

EUGENIO E. MERINO GAYOSO



**GEOMETRÍA k -SIMPLÉCTICA Y
 k -COSIMPLÉCTICA.
APLICACIONES A LAS TEORÍAS
CLÁSICAS DE CAMPOS**

87

1997

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

**Geometría k -simpléctica y k -cosimpléctica.
Aplicaciones a las teorías clásicas
de campos**

Eugenio E. Merino Gayoso

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-03-7

Dep. Leg.: C-1010/97

DEPARTAMENTO DE
GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO

PDYT-87
14 de agosto de 2013

Geometría k -simpléctica y k -cosimpléctica. Aplicaciones a las teorías clásicas de campos

Eugenio E. Merino Gayoso

Memoria realizada bajo la dirección del profesor Dr. Modesto Salgado, de la Universidad de Santiago de Compostela, para optar al Grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.



Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 31 de Enero de 1997, en la Universidad de Santiago de Compostela, ante el tribunal formado por los Profesores:

Presidente:

Dr. D. Luis A. Cordero Rego (Univ. de Santiago de Compostela)

Vocales:

Dr. D. Luis Hervella Torrón (Univ. de Santiago de Compostela)

Dr. D. Paulo R. Rodrigues (Univ. Fed. Fluminense de Rio de Janeiro, Brasil)

Dr. D. Manuel de León Rodríguez (C.S.I.C. Madrid)

Secretario:

Dr. D. Juan Carlos Marrero (Univ. de La Laguna)

obtuvo la máxima calificación, APTO CUM LAUDE.

Abstract

The dynamics of a classical mechanical system is given by the solutions of the Hamilton and Euler-Lagrange equations. A geometric description of these equations can be done by using the symplectic structures defined respectively on the cotangent and tangent bundles of the configuration space M . For the cotangent bundle T^*M we use the canonical symplectic structure, and for the tangent bundle the symplectic structure defined by using the canonical almost tangent structure and the Lagrangian function.

The purpose of this thesis is to extend this approach for the case of classical field theories.

To do this, we consider the concept k -symplectic structures, a geometrical structure which arises by abstracting the geometrical ingredients of the cotangent bundle of k^1 -covelocities, $(T_k^1)^*M$. By choosing a Hamiltonian function, we obtain the corresponding field equations in a Hamiltonian version.

Alternatively, we use the almost k -tangent structures, defined by abstracting the geometry of the tangent bundle of k^1 -velocities T_k^1M , to obtain the field equations in a Lagrangian version.

To illustrate both descriptions, we discuss some physical examples. For the case of the Hamilton equations, the electrostatic equations with a constant electric charge density are considered on the Euclidean space. In the Lagrangian formalism, we study two examples: an elastic one-dimensional string, and an oscillating gaz in the 3-dimensional space.

The non-autonomous geometrical descriptions in classical mechanics are obtained by using the cosymplectic structures, whose geometrical model is $\mathbf{R} \times T^*M$.

The corresponding geometrical description in classical field theory is obtained by considering k -cosymplectic manifolds and stable almost k -tangent structures. A detailed geometric study of these structures has been done.

We give several applications: the electrostatic equations in \mathbf{R}^3 for the case of arbitrary metrics and electric charge density, scalar fields in the Minkowski space-time, and Maxwell equations of the electromagnetism.

Finally, we connect both geometrical descriptions with the so-called multisymplectic formalism in jet bundles.

Agradecimientos

El Profesor Dr. Modesto Salgado con su dirección científica, su constante estímulo y su generosa dedicación, ha hecho posible este trabajo. Al mismo tiempo, la colaboración del Profesor Dr. Manuel de León proponiendo ideas y ayudando a superar dificultades, ha sido decisiva en la realización de la memoria. A ellos se debe mi formación actual como matemático.

Tan importante como la ayuda científica que de ellos he recibido, ha sido la amistad que durante estos años me han brindado y que tan sinceramente agradezco.

Del mismo modo debo agradecer los consejos y observaciones recibidos del Profesor Dr. José A. Oubiña, que han sido de gran importancia para enriquecer sustancialmente el resultado final de este trabajo.

Quiero extender mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Xeometría e Topoloxía de la Universidad de Santiago, donde he podido participar en el programa de doctorado en un inmejorable ambiente de apoyo y colaboración.

La compañera y amiga Profesora Dr. Ana Tarrío, como directora de algunos de los proyectos de investigación en los que he tenido oportunidad de participar, ha hecho posible con su disponibilidad e interés que el aprovechamiento de dichos proyectos fuese óptimo, lo que sin duda ha sido parte importante en la realización de este trabajo. Mi agradecimiento para ella y para los demás compañeros en estos proyectos.

Al Profesor Dr. Eduardo García Ríu, compañero y amigo, le agradezco su constante estímulo y sus valiosísimos consejos durante todos estos años.

La comprensión y confianza mostrada por todos los componentes del actual Departamento de Matemáticas de la Universidad de A Coruña ha facilitado que este trabajo fuese para adelante. Mi agradecimiento para todos ellos, en especial para los que son o han sido compañeros en el campus de Ferrol.

La aportación económica que en forma de proyectos de investigación o becas he recibido de la Universidad de A Coruña y de la Xunta de Galicia ha sido fundamental en el desarrollo de este trabajo.

A todos los compañeros de la E. P. S. de Ferrol, en especial a los Profesores Dr.

Alberto Ramil y Dr. Armando Yáñez que con enorme paciencia han contribuído a aclarar el sentido físico de los ejemplos que en la memoria se exponen, les agradezco su colaboración constante.

A mis compañeros en los cursos de doctorado les agradezco su camaradería y el afecto demostrado durante este tiempo.

A mis padres, que con tan buen criterio alentaron en mí el deseo del estudio como medio de progreso personal que se encuentra en el origen de este trabajo, les agradezco el ejemplo de integridad y de generosidad que siempre me han ofrecido.

A mis hermanos Carlos y Pablo, que con entusiasmo han seguido cada paso en la realización de esta memoria sirviéndome con ello de inmejorable estímulo.

A Pilar que compartiu *cominco* os momentos mais difíciles e traballosos de toda esta tarefa e fixo que fosen tamén os mais felices. Para que compartia a satisfacción pola finalización dun traballo que tamén é seu.

Contenidos

Introducción	i
1 Variedades k-simplécticas.	1
1.1 Estructuras k -simplécticas	1
1.1.1 El fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades	1
1.1.2 Estructuras k -simplécticas	3
1.2 Estructuras casi k -cotangentes	5
1.3 Caracterizaciones del Fibrado $(T_k^1)^*Q$	10
1.3.1 Método de Crampin-Thompson.	11
1.3.2 Método de Nagano	14
2 Variedades casi k-tangentes.	25
2.1 Estructuras casi k -tangentes	25
2.1.1 El fibrado tangente de las k^1 -velocidades	25
2.1.2 Estructuras casi k -tangentes	28
2.1.3 Condiciones de integrabilidad	29
2.2 Caracterizaciones del Fibrado T_k^1Q	30
2.2.1 Método de Crampin-Thompson.	30
2.2.2 Método de Nagano	32
2.3 Jets de primer orden	37
2.4 Campos de k -vectores	40
2.4.1 Campos de k -vectores	40
2.4.2 Conexiones	44
2.4.3 k -semisprays	47
3 Formalismo hamiltoniano.	53
3.1 Formas polisimplécticas	53
3.2 Ecuaciones de Hamilton	58

3.2.1	Hamiltonianos \mathbf{R} -valuados	59
3.2.2	Hamiltonianos \mathbf{R}^k -valuados	65
4	Formalismo lagrangiano.	67
4.1	Transformación de Legendre	67
4.2	Ecuaciones de Euler-Lagrange	75
5	Variedades k-cosimplécticas	93
5.1	Estructuras casi k -cosimplécticas	93
5.1.1	El fibrado estable cotangente de las k^1 -covelocidades	93
5.1.2	Estructuras k -cosimplécticas sobre espacios vectoriales	98
5.1.3	Estructuras casi k -cosimplécticas sobre variedades	103
5.2	Integrabilidad	108
5.2.1	Ejemplos	112
5.3	Conexiones lineales adaptadas	113
5.3.1	Estructuras definidas a partir de tensores	114
5.3.2	G -conexiones lineales	116
5.4	Caracterizaciones del fibrado $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$	119
5.4.1	Método de Crampin-Thompson	119
5.4.2	Método de Nagano	128
6	Variedades casi k-tangente estables	133
6.1	Estructuras casi k -tangente estables	133
6.1.1	El fibrado tangente estable de las k^1 -velocidades	133
6.1.2	Estructuras casi k -tangente estables	135
6.2	Integrabilidad	140
6.2.1	Ejemplo	143
6.3	Conexiones lineales adaptadas	144
6.3.1	Estructuras definidas a partir de tensores	144
6.3.2	G -conexiones lineales	147
6.4	Caracterizaciones del fibrado $\mathbf{R}^k \times T_k^1Q$	148
6.4.1	Método de Crampin-Thompson	149
6.4.2	Método de Nagano	155
6.5	k -semisprays	161
7	Formalismo hamiltoniano no autónomo	163
7.1	Hamiltonianos \mathbf{R} -valuados	163
7.2	Hamiltonianos \mathbf{R}^k -valuados	171

8	Formalismo lagrangiano no autónomo	175
8.1	Transformación de Legendre	175
8.2	Ecuaciones de Euler-Lagrange	181
8.3	Formalismo lagrangiano en variedades de jets	193
8.3.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange	193
8.3.2	El fibrado $J^1(\mathbf{R}^k, Q)$	195
8.4	Formalismo hamiltoniano en variedades de jets	196
8.4.1	Ecuaciones de Hamilton	197
8.4.2	El fibrado $J^1(Q, \mathbf{R}^k)$	199
8.4.3	La transformación de Legendre	202

Bibliografía	205
---------------------	------------

Introducción

El Principio de Mínima Acción de Hamilton determina cuál es la trayectoria que, de entre todas las posibles, describe un sistema mecánico que se mueve entre dos puntos del espacio.

Tal principio es un principio variacional. El problema principal del cálculo de variaciones es encontrar la función $x = x(t)$, con la condición de que la integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), x'(t)) dt,$$

sea un extremal, es decir, sea un valor máximo o un valor mínimo de J .

En este problema se considera que f está dada y que los extremos de integración t_1 y t_2 están fijos.

En tales condiciones hay que hacer variar la función $x(t)$ hasta que J alcance un valor extremo.

Si, por ejemplo, una función $x = x(t)$ da a J un valor mínimo, toda función *tan próxima* a $x(t)$ como se quiera, hará que J tome un valor mayor.

La noción de *función tan próxima* a $x(t)$ se interpreta del modo siguiente. Consideremos todas las posibles funciones y una representación paramétrica $x = x(\alpha, t)$ de ellas, de modo que cuando $\alpha = 0$, $x = x(0, t) = x(t)$ es la función que da el extremal de J .

Podemos escribir

$$x(\alpha, t) = x(0, t) + \alpha\eta(t),$$

donde $\eta(t)$ es función de t con la primera derivada continua y tal que se anula en t_1 y t_2 , ya que $x(\alpha, t)$ debe ser idéntica a $x(t)$ en los extremos.

Para las funciones $x(\alpha, t)$, la integral J pasa a ser función del parámetro α :

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(\alpha, t), x'(\alpha, t)) dt.$$

Para que el valor de la integral sea extremal es necesario que:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = 0.$$

La condición de extremal puede escribirse por tanto por:

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(\alpha, t), x'(\alpha, t)) d\alpha dt = 0.$$

El principio de Hamilton puede formularse mediante el siguiente teorema [MR]:

Teorema 0.0.1 *Para cada sistema mecánico en movimiento entre dos puntos existe una integral, S , llamada de acción, que toma su valor mínimo para la trayectoria que sigue realmente el sistema mecánico entre esos dos puntos, de forma tal que la variación de la integral de acción, δS , a partir de esa trayectoria, es igual a cero.*

Si denotamos por T y V la energía cinética y potencial del sistema mecánico respectivamente, y si $L = T - V$, entonces la integral S se expresa como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

donde t_1 y t_2 representan los tiempos correspondientes a las posiciones inicial y final del sistema mecánico en movimiento.

El principio de Hamilton establece que la trayectoria que describe realmente un sistema mecánico en movimiento es aquella para la cuál la acción S tiene un extremo.

La trayectoria descrita por el sistema será, por tanto, una curva $c = c(t) = (c_i(t), \dot{c}_i(t))$, donde $c_i(t)$ y $\dot{c}_i(t)$ denotan respectivamente las posiciones y las velocidades del sistema, para la que la integral curvilínea S es extremal. En otras palabras, la trayectoria real es una curva $c(t)$ tal que una variación infinitesimal respecto de ella, es decir, respecto de $c_i(t)$ y $\dot{c}_i(t)$, produce una variación nula en la acción,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, c_i(t), \dot{c}_i(t)) dt = 0.$$

Utilizando las técnicas del cálculo de variaciones se puede comprobar que el principio de Hamilton es condición necesaria y suficiente para que se verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

En esta formulación lagrangiana las coordenadas son las posiciones q_i y las velocidades \dot{q}_i . La formulación hamiltoniana utiliza como coordenadas las posiciones q_i y los momentos conjugados generalizados p_i , definidos a partir del lagrangiano L como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Se define la aplicación hamiltoniana H como,

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t).$$

El principio de Hamilton enunciado en el espacio fase de las posiciones y los momentos es el siguiente [MR]:

Teorema 0.0.2 *Dado el hamiltoniano H sobre el espacio fase, una curva en este espacio satisface las ecuaciones de Hamilton,*

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

si y sólo si,

$$\delta \int_a^b (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)) dt = 0,$$

para variaciones de dicha curva.

La geometría simpléctica permite desarrollar un formalismo geométrico sobre los espacios fibrados tangente TQ y cotangente T^*Q , del espacio de configuración Q sin recurrir a un principio variacional.

Si $L : TQ \rightarrow \mathbf{R}$ es una aplicación lagrangiana se define sobre TQ la 2-forma

$$\omega_L = -dd_{J_0}L,$$

donde d_{J_0} es la diferenciación vertical asociada a la estructura casi tangente canónica J_0 de TQ . Si L es regular, ω_L es una forma simpléctica.

Sea C el campo de vectores canónico sobre el fibrado tangente y sea E_L la función definida por $E_L = CL - L$. Entonces una curva $c = c(t)$ en Q es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange si y sólo si es una curva integral básica del campo de vectores X_L sobre TQ , definido por

$$\iota_{X_L} \omega_L = dE_L.$$

Por otro lado, si ω_0 es la 2-forma simpléctica canónica del fibrado T^*Q , entonces una curva $c = c(t)$ en T^*Q satisface las ecuaciones de Hamilton asociadas al hamiltoniano $H : T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$, si y sólo si es una curva integral del campo de vectores X_H sobre T^*Q definido por la ecuación

$$\iota_{X_H}\omega_0 = dH.$$

Por lo tanto las variedades casi-tangentes, definidas a partir del modelo dado por la estructura canónica del fibrado tangente, y las variedades simplécticas, definidas a partir del modelo dado por la estructura canónica del fibrado cotangente, juegan un papel importante en las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la Mecánica Clásica.

El desarrollo formal de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de Mecánica Clásica puede generalizarse a la teoría de campos clásica. En tales sistemas el paso de coordenadas discretas a coordenadas continuas hace que las aplicaciones lagrangianas y hamiltonianas totales sean integrales múltiples de densidades lagrangianas y hamiltonianas, respectivamente:

$$\begin{aligned} L &= \int \dots \int \mathcal{L} dx_1 \dots dx_n, \\ H &= \int \dots \int \mathcal{H} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

En tales situaciones el principio de mínima acción de Hamilton toma la forma:

$$\delta \int \int \dots \int \mathcal{L} dx_0 dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Existe abundante bibliografía que estudia la estructura geométrica de las teorías de campos lagrangiana y hamiltoniana, [BŠF], [CCI], [GS], [Gü], [ILMM], [KT], [LMM1], [LMM2], [LR4], [LR5], [Ru], [Sar]. Los campos se interpretan como secciones de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ sobre un espacio de parámetros M de dimensión m . Se denota por $J^1\pi$ el fibrado de jets de secciones de π . Una aplicación lagrangiana es entonces una función diferenciable $L : J^1\pi \rightarrow \mathbf{R}$. La estructura geométrica de $J^1\pi$ y la aplicación L permiten definir una m -forma θ_L sobre $J^1\pi$ que se llama m -forma de Cartan.

Una sección σ de π satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L si y sólo si:

$$(0.0.1) \quad (j_1\sigma)^*(\iota_X d\theta_L) = 0,$$

para todo X campo de vectores sobre $J^1\pi$ y donde $j_1\sigma$ es la prolongación de σ a $J^1\pi$.

Se denota por $J^1\pi^*$ al fibrado dual de $J^1\pi$. Si $\mathcal{M}\pi = \Lambda_1^m E$ es el espacio de las m -formas ω sobre E tales que,

$$\iota_{v_1}\iota_{v_2}\omega = 0,$$

para todos $v_1, v_2 \in \ker T\pi$, entonces $\mathcal{M}\pi$ es un fibrado sobre $J^1\pi^*$ con fibras de dimensión 1 cuya proyección denotamos por $\mu: \mathcal{M} \rightarrow J^1\pi^*$.

Una sección h de μ se llama sección hamiltoniana y, junto a la estructura geométrica de $\mathcal{M}\pi$, permite definir una m -forma θ_h sobre $J^1\pi^*$ llamada m -forma hamiltoniana.

Una sección ϕ de $J^1\pi^*$ se dice que satisface las ecuaciones de Hamilton asociadas a h si y sólo si:

$$(0.0.2) \quad \phi^*(\iota_X d\theta_h) = 0,$$

para todo campo de vectores X sobre $J^1\pi^*$.

Cuando el fibrado $\pi: E \rightarrow M$ es $\pi: \mathbf{R}^k \times Q \rightarrow \mathbf{R}^k$ con π la proyección trivial, el fibrado de jets $J^1\pi$ es $J^1(\mathbf{R}^k, Q) = \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ y el fibrado dual $J^1\pi^*$ es $J^1(Q, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q$.

El estudio de los formalismos lagrangiano y hamiltoniano en teoría de campos clásica requiere el estudio de los fibrados de jets $T_k^1 Q$, $(T_k^1)^* Q$, $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ y $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q$ y de sus estructuras geométricas canónicas con el fin de obtener formulaciones que extiendan las conocidas para la Mecánica Clásica.

Si la aplicación lagrangiana L está definida sobre el espacio $T_k^1 Q$ de los jets de aplicaciones de $\mathbf{R}^k \rightarrow Q$ y tomamos en este fibrado coordenadas $(u^\alpha, v_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n = \dim Q)$, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Por procedimientos análogos a los utilizados en el caso discreto se obtiene la siguiente expresión para las ecuaciones de Hamilton asociadas a un hamiltoniano $H: (T_k^1)^* Q \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial v_i^\alpha} &= \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

donde $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq \alpha \leq n$.

Varios son los autores que se han ocupado de este estudio. Por ejemplo A. Awane ([Aw1], [Aw2], [Aw3]) toma como modelo la estructura canónica del fibrado

$T^*Q \oplus \dots \oplus T^*Q$, isomorfo a $(T_k^1)^*Q$, para definir las estructuras k -simpléticas sobre una variedad M de dimensión $k(n+1)$.

En [LMS1], [LMS2], [LMS3], [LMS4] y [M], de León, Méndez y Salgado se basan en los modelos dados por los fibrados T_k^1Q y $(T_k^1)^*Q$ para definir las estructuras casi k -cotangentes y casi k -tangentes sobre variedades de dimensión $k(n+1)$.

C. Günther define en [Gü] las estructuras polisimpléticas sobre variedades de dimensión $k(n+1)$ como 2-formas Ω , \mathbf{R}^k -valuadas, cerradas y no degeneradas en el sentido de que si X es un campo de vectores sobre M tal que $\iota_X \Omega = 0$ entonces necesariamente $X = 0$. Esta estructura geométrica permite obtener directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton a partir, respectivamente, de las aplicaciones lagrangiana y hamiltoniana.

El objetivo de la primera parte de esta memoria (Capítulos 1-4), es recapitular y, en la medida de lo posible, unificar las descripciones geométricas de las estructuras introducidas a partir de los modelos T_k^1Q y $(T_k^1)^*Q$, y establecer la forma en que estas estructuras geométricas permiten obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un lagrangiano L y las ecuaciones de Hamilton asociadas a un hamiltoniano H .

En la segunda parte de la memoria, (Capítulos 5-8), realizamos el estudio geométrico de los fibrados $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ y $\mathbf{R}^k \times T_k^1Q$ obteniendo las definiciones de estructura k -cosimplética y de estructura casi k -tangente estable sobre una variedad M de dimensión $k(n+1) + n$. A partir de estas estructuras geométricas obtenemos una descripción intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton asociadas a un lagrangiano L y a un hamiltoniano H definidos, respectivamente, sobre el fibrado $\mathbf{R}^k \times T_k^1Q$ y sobre una variedad k -cosimplética M .

A continuación describimos de un modo más detallado el contenido de cada uno de los capítulos de la memoria.

En el Capítulo 1 comparamos las definiciones de estructura k -simplética dada por A. Awane [Aw1], [Aw2], y de estructura casi estable k -cotangente dada por León, Méndez y Salgado, [LMS1], [M].

Awane define las estructuras k -simpléticas sobre una variedad M de dimensión $k(n+1)$ como una familia $(\omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ formada por k 2-formas ω_i y una distribución V de dimensión kn sobre M tales que:

$$\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0,$$

$$(\omega_i)_{\downarrow V \times V} = 0.$$

Una estructura casi k -cotangente consiste en una familia $(\omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k)$

formada por k 2-formas y k distribuciones de dimensión n tales que:

$$V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) = 0,$$

$$\ker \omega_i = \oplus_{j \neq i} V_j,$$

$$(\omega_i)_{|_{V_i \times V_i}} = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Comprobamos que sobre una variedad M de dimensión $k(n+1)$ las estructuras k -simpécticas y casi k -cotangentes integrables son los mismos objetos.

La última parte de este capítulo la dedicamos a caracterizar en qué condiciones una variedad M dotada de una estructura k -simpéctica, o equivalentemente una estructura casi k -cotangente integrable, es el fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades $(T_k^1)^*Q$ de alguna variedad Q . Para ello recordamos la caracterización hecha por de León, Méndez y Salgado en [LMS2] y [M] mediante el método utilizado por Crampin y Thompson en [CrT] y [Th]. Además damos una nueva caracterización de este tipo utilizando un resultado debido a Nagano, [Ng], que establece condiciones para que una variedad dotada de alguna estructura geométrica sea el espacio total de un cierto fibrado vectorial.

En el Capítulo 2 recordamos la definición de estructura casi k -tangente sobre una variedad M . Esta definición ha sido dada por de León, Méndez y Salgado en [LMS3] y [M] y consiste en una familia (J_1, \dots, J_k) formada por k tensores de tipo $(1, 1)$ sobre M tales que:

$$J_i \circ J_j = J_j \circ J_i = 0,$$

$$\text{rango } J_i = n,$$

$$\text{Im } J_i \cap (+_{j \neq i} \text{Im } J_j) = 0,$$

para $1 \leq i, j \leq k$.

La segunda sección de este capítulo la dedicamos a establecer las condiciones en que una variedad M de dimensión $k(n+1)$ dotada de una estructura casi k -tangente integrable es el fibrado tangente de las k^1 -velocidades T_k^1Q de una variedad Q . En primer lugar recordamos la caracterización establecida en [LMS4] y en [M] utilizando el método de Crampin y Thompson, y después aplicamos el teorema de Nagano para dar una nueva caracterización.

Acabamos este segundo capítulo recordando resultados de la teoría general de fibrados de jets de primer orden, como el estudio de los campos de k -vectores sobre M , o secciones del fibrado $T_k^1M \rightarrow M$; las conexiones sobre variedades fibradas o

los k -semisprays. Estos resultados y una amplia exposición de la teoría de fibrados de jets puede consultarse, por ejemplo, en [S3].

El tercer capítulo está dedicado al estudio de las ecuaciones de Hamilton asociadas a una aplicación hamiltoniana H definida sobre una variedad M dotada de una estructura k -simpléctica. Comprobamos en primer lugar que la definición de estructura polisimpléctica estándar dada por Günther, [Gü], (una 2-forma Ω , \mathbf{R}^k -valuada, no degenerada en el sentido de que si X es un campo de vectores sobre M tal que $\iota_X \Omega = 0$ entonces necesariamente $X = 0$, y tal que existe en M un sistema de coordenadas locales adaptado a Ω), es equivalente a la definición de estructura k -simpléctica y, por tanto, a la definición de estructura casi k -cotangente integrable.

Si M es una variedad k -simpléctica existen las aplicaciones Ω^b y Ω^\sharp :

$$\Omega^b : TM \longrightarrow (T_k^1)^*M,$$

$$\Omega^\sharp : T_k^1 M \longrightarrow T^*M.$$

Dada una aplicación hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbf{R}$, comprobamos que la ecuación

$$(0.0.3) \quad \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dH$$

tiene soluciones locales y que, a partir de estas soluciones locales, se pueden construir, utilizando particiones de la unidad, soluciones (X_1, \dots, X_k) globalmente definidas. Las condiciones para que una solución global de la ecuación (0.0.3) sea integrable, son que existan aplicaciones definidas localmente

$$\mathbf{R}^k \rightarrow M$$

$$t = (t_1, \dots, t_k) \rightarrow (\psi^\alpha(t), \psi_\alpha^i(t)),$$

tales que,

$$\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial t_i},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t_i},$$

es decir, que ψ sea una solución de las ecuaciones de Hamilton asociadas a H .

La ecuación (0.0.3) es por tanto una versión global de las ecuaciones de Hamilton asociadas a H .

Como un ejemplo de esta descripción de las ecuaciones de Hamilton comprobamos que las ecuaciones de la electrostática en el espacio \mathbf{R}^3 dotado de una métrica

euclídea, correspondientes a una distribución de densidad de carga constante, son las ecuaciones de Hamilton asociadas a un hamiltoniano $H : (T_3^1)^*\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

En el Capítulo 4 consideramos una aplicación lagrangiana L definida sobre el fibrado tangente de las k -velocidades T_k^1Q de una variedad Q .

Si L es un lagrangiano regular, la correspondiente transformación de Legendre $FL : T_k^1Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$ permite definir una estructura k -simpléctica sobre T_k^1Q como el pull-back de la estructura canónica de $(T_k^1)^*Q$.

Asociadas a esta estructura existen aplicaciones:

$$\Omega_L^b : TT_k^1Q \longrightarrow (T_k^1)^*T_k^1Q,$$

$$\Omega_L^\sharp : T_k^1T_k^1Q \longrightarrow T^*T_k^1Q.$$

Si C_1, \dots, C_k son los campos de vectores canónicos sobre T_k^1Q y $C = C_1 + \dots + C_k$, definimos la función $E_L = CL - L$.

La ecuación

$$(0.0.4) \quad \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dE_L,$$

tiene soluciones globales (X_1, \dots, X_k) que son necesariamente k -semisprays.

Si $X = (X_1, \dots, X_k)$ es un k -semispray integrable que es solución de (0.0.4), entonces existe una curva $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow Q$ que es una solución de X y que verifica:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0.$$

La ecuación (0.0.4) es entonces una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L .

Como ejemplos de esta formulación describimos dos casos de la Mecánica de los Medios Continuos, la ecuación de la cuerda vibrante, que es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a una aplicación lagrangiana $L : T_2^1\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, y las ecuaciones del movimiento del sistema físico que describe las vibraciones de un gas en un espacio de dimensión 3, que son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una aplicación $L : T_4^1\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$.

En el Capítulo 5 describimos la estructura geométrica canónica del fibrado de jets $J^1(Q, \mathbf{R}^k) = \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ y, a partir de este modelo, definimos las estructuras casi k -cosimplécticas sobre variedades M de dimensión $k(n+1) + n$.

La definición es la siguiente:

Definición 0.0.1 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1) + n$. Una familia $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ formada por k 1-formas η_i , k 2-formas ω_i y una distribución V de dimensión nk tal que:*

1. $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$,
2. $\dim(\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k) = k$,
3. $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0$,
4. $\eta_{i|V} = 0, \quad \omega_{i|V \times V} = 0$,

para todo $1 \leq i \leq k$, se llama estructura casi k -cosimpléctica sobre M . La variedad M se dice una variedad casi k -cosimpléctica.

Describimos las estructuras casi k -cosimplécticas como G -estructuras sobre M con grupo de estructura:

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cccccc} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C \end{array} \right), \begin{array}{l} A \in Gl(n, \mathbf{R}) \\ C = (A^{-1})^t \\ A^t B_i = B_i^t A, \quad 1 \leq i \leq k \end{array} \right\}.$$

Como G -estructuras, la integrabilidad de las estructuras k -cosimplécticas se caracteriza del modo siguiente:

Teorema 0.0.3 Una estructura casi k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) sobre una variedad diferenciable M de dimensión $k(n+1) + n$ es integrable si y solo si,

$$d\eta_i = 0, \quad d\omega_i = 0, \quad [V, V] \subset V.$$

A las estructuras casi k -cosimplécticas integrables las llamamos estructuras k -cosimplécticas.

En la última sección de este capítulo aplicamos de nuevo los métodos introducidos por Crampin y Thompson por un lado, y por Nagano por otro, para caracterizar las condiciones en que una variedad M de dimensión $k(n+1) + n$ dotada de una estructura k -cosimpléctica es el fibrado de jets $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ de alguna variedad Q .

El Capítulo 6 está dedicado al estudio geométrico de las estructuras definidas a partir del modelo dado por $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$. A tales estructuras las llamamos estructuras casi k -tangente estables y su definición es la siguiente.

Definición 0.0.2 Sea M una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1)+n$. Una familia $(\xi_1, \dots, \xi_k, J_1, \dots, J_k, \eta_1, \dots, \eta_k)$ formada por k campos de vectores ξ_1, \dots, ξ_k , k campos de tensores de tipo $(1, 1)$ J_1, \dots, J_k y k 1-formas η_1, \dots, η_k tales que:

- 1) $J_i \circ J_j = J_j \circ J_i = \delta_{ij}(\xi_j \otimes \eta_j)$,
- 2) rango $J_i = n + 1$,
- 3) $\text{Im} J_i \cap (\sum_{j \neq i} \text{Im} J_j) = 0$,
- 4) $\eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$,

para $1 \leq i, j \leq k$, se llama una estructura casi k -tangente estable sobre M y se dice que (M, ξ_i, J_i, η_i) es una variedad casi k -tangente estable.

Describimos las estructuras casi k -tangente estables como G -estructuras con grupo de estructura G dado por el subgrupo de $Gl(k(n+1)+n, \mathbf{R})$ de las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_k & 0 & \dots & A \end{pmatrix}$$

donde $A \in Gl(n, \mathbf{R})$, $A_i \in gl(n, \mathbf{R})$ para todo $1 \leq i \leq k$ e I_k es la matriz identidad de dimensión k .

Demostramos también que la integrabilidad de las estructuras casi k -tangente estables como G -estructuras se expresa en términos de la familia $(\xi_1, \dots, \xi_k, J_1, \dots, J_k, \eta_1, \dots, \eta_k)$ del siguiente modo:

Teorema 0.0.4 Una estructura casi k -tangente estable (ξ_i, J_i, η_i) es integrable si y sólo si, para todo $1 \leq i, j \leq k$,

$$d\eta_i = 0, \quad \{J_i, J_j\} = 0,$$

donde $\{, \}$ es el operador definido por:

$$\{A, B\}(X, Y) = [AX, BY] + AB[X, Y] - A[X, BY] - B[AX, Y],$$

para A, B campos de tensores de tipo $(1, 1)$ y X, Y campos de vectores en la variedad M .

En la Sección 4 de este capítulo caracterizamos las condiciones en que una variedad casi k -tangente estable M es el fibrado $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ de una variedad Q . Para ello utilizamos de nuevo los métodos de Crampin y Thompson y de Nagano.

Acabamos el capítulo con la definición y la caracterización de k -semisprays sobre la variedad $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

El Capítulo 7 está dedicado al estudio de las ecuaciones de Hamilton asociadas a una aplicación hamiltoniana definida sobre una variedad M dotada de una estructura k -cosimpléctica.

La estructura geométrica de M permite definir las aplicaciones.

$$\Omega^b : TM \longrightarrow (T_k^1)^* M,$$

$$\Omega^\sharp : T_k^1 M \longrightarrow T^* M.$$

Si consideramos las ecuaciones:

$$(0.0.5) \quad \begin{aligned} \eta_i(X_j) &= \delta_{ij}, \\ \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) &= dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H)) \eta_i, \end{aligned}$$

demostramos que existen soluciones globales de estas ecuaciones.

Llamamos a estas soluciones campos de k -vectores de evolución sobre M . Dado un campo de vectores de evolución integrable, una sección integral es una aplicación con una expresión local

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{R}^k &\longrightarrow M \\ s_i &\longrightarrow (\sigma^j(s_i), \sigma^\alpha(s_i), \sigma_\alpha^j(s_i)), \end{aligned}$$

tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \sigma_\alpha^i}{\partial s_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} &= \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial s_i}, \end{aligned}$$

con $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$.

Las ecuaciones (0.0.5) son por tanto una versión intrínseca de las ecuaciones de Hamilton.

Como ejemplo de este formalismo describimos de nuevo las ecuaciones de la electrostática pero en este caso con una métrica arbitraria g en \mathbf{R}^3 y con una función de

densidad de carga arbitraria. En estas condiciones las ecuaciones de la electrostática son las ecuaciones de Hamilton asociadas a una aplicación hamiltoniana:

$$H : \mathbf{R}^3 \times (T_3^1)^*\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}.$$

En el Capítulo 8 consideramos una aplicación lagrangiana L definida sobre el fibrado $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ de una variedad Q . Si L es regular, la transformación de Legendre correspondiente,

$$FL : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q,$$

define por pull-back una estructura k -cosimpléctica sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Esta estructura permite definir las aplicaciones:

$$\Omega_L^b : T(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) \rightarrow (T_k^1)^*(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q),$$

$$\Omega_L^\sharp : T_k^1(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) \rightarrow T^*(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q).$$

Asociada a la función lagrangiana L definimos la aplicación

$$E_L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$$

por

$$E_L = \sum_{i=1}^k \overline{C}_i L - L = \sum_{i,\alpha} (v_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} - L),$$

donde $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ son los campos de de vectores canónicos sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Por cálculos semejantes a los realizados en el caso de las ecuaciones de Hamilton obtenemos que las ecuaciones,

$$\eta_i(X_j) = \delta_{ij},$$

(0.0.6)

$$\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dE_L + \sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L)) \eta_i,$$

son una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L .

Como ejemplo de esta formulación, obtenemos las ecuaciones de las trayectorias de una partícula de masa m sometida a la acción de un campo escalar sobre el espacio-tiempo \mathbf{R}^4 dotado de una métrica de Lorentz de signatura $(-+++)$. Tales ecuaciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una aplicación lagrangiana L definida sobre $\mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}$ llamado lagrangiano de Klein-Gordon.

Un segundo ejemplo es el de las ecuaciones de campo para el campo electromagnético, conocidas como ecuaciones de Maxwell, que son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un lagrangiano L definido sobre $\mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}^4$. En este caso L

no es regular a pesar de lo que es posible obtener las ecuaciones de Maxwell como un ejemplo de ecuaciones de Euler-Lagrange.

Finalmente, relacionamos los formalismos lagrangiano y hamiltoniano estudiados en esta memoria con el denominado formalismo multisimpléctico en fibrados de jets.

Capítulo 1

Variedades k -simplécticas.

1.1 Estructuras k -simplécticas

1.1.1 El fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades

El fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades $(T_k^1)^*Q$ sobre una variedad diferenciable Q es el modelo a partir del cual A. Awane ([Aw1], [Aw2]) introduce la definición de estructura k -simpléctica sobre una variedad M . En concreto, Awane toma como modelo la suma directa de n copias del fibrado cotangente $T^*Q \oplus \dots \oplus T^*Q$ que, como se comprueba en [M] o en [LMS1], es precisamente $(T_k^1)^*Q$.

Ejemplo 1.1.1 Dada una variedad diferenciable Q de dimensión n , en cada punto $x \in Q$, el espacio cotangente de las k^1 -covelocidades de Q es:

$$(T_k^1)_x^*Q = J_{x,0}^1(Q, \mathbf{R}^k) = \{j_{x,0}^1\sigma/\sigma : Q \rightarrow \mathbf{R}^k \text{ diferenciable, } \sigma(x) = 0\},$$

donde $j_{x,0}^1\sigma$ denota el 1-jet de la aplicación σ en el punto $x \in Q$.

El fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades de Q es la variedad de 1-jets

$$(T_k^1)^*Q = \cup_{x \in Q} (T_k^1)_x^*Q = \cup_{x \in Q} J_{x,0}^1(Q, \mathbf{R}^k) = J_0^1(Q, \mathbf{R}^k).$$

Si $(u^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n)$ es un sistema de coordenadas locales en la variedad Q , se define en $(T_k^1)^*Q$ el sistema de coordenadas locales $(u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k; 1 \leq \alpha \leq n)$ de la forma siguiente:

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} u^\alpha(j_{x,0}^1\sigma) &= u^\alpha(x) \\ u_\alpha^i(j_{x,0}^1\sigma) &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial u^\alpha}(x) \end{aligned}$$

para $1 \leq \alpha \leq n$ y $1 \leq i \leq k$, donde σ^i denota la composición de σ con la i -ésima proyección canónica de $\mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$. $(u^\alpha, u_\alpha^i; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$ es un sistema de coordenadas locales en $(T_k^1)^*Q$, que es una variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$.

Denotamos por $\tau^k : (T_k^1)^*Q \rightarrow Q$ la proyección canónica definida por

$$\tau^k(j_{x,0}^1\sigma) = x.$$

Existe un difeomorfismo canónico

$$\Lambda : (T_k^1)^*Q \rightarrow T^*Q \oplus \dots \oplus T^*Q$$

entre el fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades de Q y la suma de Whitney del fibrado cotangente sobre Q consigo mismo k veces, definido del modo siguiente:

$$\Lambda(j_{x,0}^1\sigma) = (j_{x,0}^1\sigma^1, \dots, j_{x,0}^1\sigma^k),$$

donde $\sigma^i : Q \rightarrow \mathbf{R}$ y por lo tanto $j_{x,0}^1\sigma^i = d\sigma^i(x)$ es un covector tangente a Q en el punto $x \in Q$.

Localmente, el difeomorfismo Λ se escribe

$$\Lambda(u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k) = (u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k)$$

siendo (u^α, u_α^i) las coordenadas locales del covector $j_{x,0}^1\sigma^i$, es decir, $j_{x,0}^1\sigma^i = u_\alpha^i du^\alpha$.

Por medio de esta identificación se pueden definir una suma y un producto por escalares en $(T_k^1)^*Q$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma + \rho &= (\sigma_1 + \rho_1, \dots, \sigma_k + \rho_k), \\ \lambda\sigma &= (\lambda\sigma_1, \dots, \lambda\sigma_k). \end{aligned}$$

Entonces $\tau^k : (T_k^1)^*Q \rightarrow Q$ es un fibrado vectorial sobre Q isomorfo, como fibrados vectoriales, a la suma de Whitney de T^*Q consigo mismo k veces.

Es evidente que para $k = 1$ obtenemos el fibrado cotangente sobre la variedad Q .

Sobre $(T_k^1)^*Q$ está definida de forma canónica una distribución V de dimensión nk por

$$V = \ker T\tau^k.$$

Localmente, en cada punto $\theta \in (T_k^1)^*Q$ el espacio vertical $V(\theta)$, verifica

$$(1.1.2) \quad V(\theta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\alpha^1}(\theta), \dots, \frac{\partial}{\partial u_\alpha^k}(\theta); 1 \leq \alpha \leq n \right\rangle.$$

También de modo natural se definen, sobre $(T_k^1)^*Q$, formas presimplécticas $\omega_1, \dots, \omega_k$. Para ello se definen primero las 1-formas canónicas $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ por:

$$\lambda_i(\theta)(X) = \theta^i(x)(T\tau^k(\theta)X)$$

para $X \in T_\theta((T_k^1)^*Q)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ utilizando el difeomorfismo Λ , y $\tau^k(\theta) = x$.

Localmente λ_i se escribe

$$\lambda_i = u_\alpha^i du^\alpha$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Las formas presimplécticas $\omega_1, \dots, \omega_k$ son entonces,

$$\omega_i = -d\lambda_i,$$

para $1 \leq i \leq k$, y por lo tanto, en coordenadas locales,

$$(1.1.3) \quad \omega_i = du^\alpha \wedge du_\alpha^i$$

para todo $1 \leq i \leq k$, donde se ha utilizado el criterio de Einstein para la suma de índices. Este criterio se utilizará en adelante de modo que índices repetidos arriba y abajo indicarán la suma de los términos correspondientes salvo que se diga expresamente lo contrario.

Si denotamos $\ker \omega_i = \{X \in T((T_k^1)^*Q) / \iota_X \omega_i = 0\}$ entonces, utilizando (1.1.2) y (1.1.3), se prueba fácilmente que

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k &= 0, \\ (\omega_i) \rfloor V \times V &= 0. \end{aligned}$$

1.1.2 Estructuras k -simplécticas

A partir del modelo anterior A. Awane define del siguiente modo las estructuras k -simplécticas.

Definición 1.1.1 Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$. Sea V una distribución en M de dimensión nk y sean $\omega_1, \dots, \omega_k$ k 2-formas diferenciales cerradas sobre M . Decimos que $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ define una estructura k -simpléctica sobre M si, en cada punto $x \in M$

$$(1.1.5) \quad \begin{aligned} i) \quad &\ker \omega_1(x) \cap \dots \cap \ker \omega_k(x) = 0, \\ ii) \quad &\omega_i(x)(X, Y) = 0, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$ y para todos $X, Y \in V(x)$.

Una variedad M dotada de una estructura k -simpléctica se llama variedad k -simpléctica.

En [Aw2] se demuestra que toda variedad k -simpléctica M posee un sistema de coordenadas locales adaptadas a la estructura k -simpléctica. De hecho se prueba el siguiente teorema tipo Darboux:

Teorema 1.1.1 Sea $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ una estructura k -simpléctica sobre M . Para cada punto de M podemos encontrar un sistema de coordenadas locales (x^α, x^i) con $1 \leq \alpha \leq n$, $1 \leq i \leq k$, llamado sistema de coordenadas adaptadas, tal que

$$(1.1.6) \quad \omega_i = \sum_{\alpha=1}^n dx_\alpha^i \wedge dx^\alpha,$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

Debido a la existencia de sistemas de coordenadas locales del tipo anterior se comprueba que una estructura k -simpléctica $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ sobre M verifica las siguientes propiedades:

- (1) Las formas diferenciales $\omega_1, \dots, \omega_k$ son todas ellas de rango $2n$.
- (2) En un sistema de coordenadas locales adaptadas $(x^\alpha, x^i; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$ la distribución V está definida por $dx^1 = \dots = dx^n = 0$, o, equivalentemente, $V = \langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}; 1 \leq \alpha \leq n \rangle$.
- (3) Una estructura k -simpléctica sobre M es, como G -estructura, una $Sp(k, n, \mathbf{R})$ -estructura sobre M , donde

$$(1.1.7) \quad Sp(k, n, \mathbf{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & C & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_k & 0 & 0 & \dots & C \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} C = (A^{-1})^t, \\ A^t B_i = B_i^t A, \quad 1 \leq i \leq k \end{array} \right\}.$$

Definición 1.1.2 Sean $(M, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ y $(N, \phi_1, \dots, \phi_k, W)$ dos variedades k -simplécticas de la misma dimensión.

1. Un k -simplectomorfismo de $(M, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ en $(N, \phi_1, \dots, \phi_k, W)$ es un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ tal que

$$(1.1.8) \quad \begin{aligned} f^* \phi_i &= \omega_i \\ T_x f V(x) &= W(f(x)) \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$ y para todo $x \in M$.

2. Un k -simplectomorfismo local de $(M, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ en $(N, \phi_1, \dots, \phi_k, W)$ es una aplicación $f : M \rightarrow N$ tal que todo punto $x \in M$ tiene un entorno U_1 tal que $U_2 = f(U_1)$ es abierto en N y $f|_{U_1}$ es un k -simplectomorfismo de $(U_1, (\omega_1)|_{U_1}, \dots, (\omega_k)|_{U_1}, V|_{U_1})$ en $(U_2, (\phi_1)|_{U_2}, \dots, (\phi_k)|_{U_2}, W|_{U_2})$.

1.2 Estructuras casi k -cotangentes

Basándose en el ejemplo del fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades, en [LMS1] y en [M] se introducen las estructuras casi k -cotangentes sobre una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1)$.

Consideramos de nuevo la variedad $(T_k^1)^*Q$, fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades sobre Q , con un sistema de coordenadas locales $(u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k; 1 \leq \alpha \leq n)$ definido por (1.1.1). Sobre esta variedad es posible definir las k 2-formas presimpléticas $\omega_1, \dots, \omega_k$ con expresiones locales dadas por (1.1.3), y se pueden definir también k distribuciones diferenciables V_1, \dots, V_k de dimensión n de la forma siguiente.

La proyección canónica

$$\rho^i : (T_k^1)^*Q \longrightarrow (T_{k-1}^1)^*Q$$

definida por

$$\rho^i(\theta^1, \dots, \theta^k) = (\theta^1, \dots, \hat{\theta}^i, \dots, \theta^k)$$

para $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k) \in (T_k^1)^*Q$, donde $\hat{}$ sobre un término significa que ese término está suprimido, se expresa en coordenadas locales por

$$\rho^i(u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k) = (u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, \hat{u}_\alpha^i, \dots, u_\alpha^k).$$

La distribución V_i de dimensión n sobre $(T_k^1)^*Q$ está definida por

$$V_i = \ker T\rho^i$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

Localmente, en cada punto $\theta \in (T_k^1)^*Q$,

$$(1.2.9) \quad V_i(\theta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}(\theta); 1 \leq \alpha \leq n \right\rangle.$$

Utilizando las expresiones locales (1.1.3) y (1.2.9) se comprueba que la familia $(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_k)$ de k 2-formas y k distribuciones sobre $(T_k^1)^*Q$ satisfacen las siguientes propiedades

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) &= 0 \\ \ker \omega_i &= \oplus_{j \neq i} V_j \\ (\omega_i)|_{V_i \times V_i} &= 0, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

A partir de este modelo se define una estructura casi k -cotangente sobre una variedad diferenciable M del modo siguiente:

Definición 1.2.1 Una estructura casi k -cotangente sobre una variedad diferenciable M de dimensión $n(k+1)$ consiste en una familia $(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_k)$ de k 2-formas diferenciables presimplécticas de rango $2n$ y k distribuciones de dimensión n tales que

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} i) \quad & V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) = 0, \\ ii) \quad & \ker \omega_i = \oplus_{j \neq i} V_j, \\ iii) \quad & (\omega_i)|_{V_i \times V_i} = 0, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Una variedad M dotada de una estructura casi k -cotangente se llama una variedad casi k -cotangente.

En [LMS1] y [M] se prueba que dar una estructura casi k -cotangente sobre una variedad diferenciable M de dimensión $n(k+1)$ es equivalente a dar, sobre la misma variedad M , una G -estructura $B_G M$ con $G = Sp(k, n, \mathbf{R})$ el subgrupo de Lie de $Gl(n(k+1), \mathbf{R})$ dado por (1.1.7). Como G -estructura, una estructura casi k -cotangente es integrable en las siguientes condiciones.

Para $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\}$, denotamos por $V_{i_1, \dots, i_r} = V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_r}$, y entonces:

Teorema 1.2.1 Una estructura casi k -cotangente $\{\omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k\}$ sobre una variedad M de dimensión $n(k+1)$ es integrable si y sólo si todas las distribuciones

V_{i_1, \dots, i_r} y todas las formas presimpléticas ω_i son integrables, es decir, las distribuciones V_{i_1, \dots, i_r} son involutivas y las formas ω_i son cerradas, $d\omega_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq k$.

Así pues, podemos asegurar que si M es una variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$ dotada de una estructura casi k -cotangente $\{\omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k\}$ integrable, es decir en las condiciones del Teorema 1.2.1, entonces existe en M un sistema de coordenadas locales $(x^\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^k; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$ tal que

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} \omega_i &= dx_\alpha^i \wedge dx^\alpha, \\ V_i &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}; 1 \leq \alpha \leq n \right\rangle, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Probaremos que las estructuras k -simpléticas son precisamente las estructuras casi k -cotangentes integrables.

De hecho puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 1.2.1 *Sobre una variedad diferenciable M de dimensión $n(k+1)$ toda estructura k -simplética define una estructura casi k -cotangente integrable y, recíprocamente, toda estructura casi k -cotangente integrable define una estructura k -simplética.*

Demostración

Suponemos en primer lugar que $(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_k)$ es una estructura casi k -cotangente integrable sobre M .

Definimos

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k,$$

y probamos que $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ es una estructura k -simplética sobre M .

Para ello comprobamos que se satisfacen las condiciones (1.1.5) de la Definición 1.1.1.

La condición $i)$ se comprueba fácilmente, pues

$$\begin{aligned} \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k &= (\oplus_{j=2}^k V_j) \cap \dots \cap (\oplus_{j=1}^{k-1} V_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $X, Y \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, es decir, si

$$\begin{aligned} X &= X_1 + \dots + X_k, \\ Y &= Y_1 + \dots + Y_k, \end{aligned}$$

con $X_i, Y_i \in V_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_i(X, Y) &= \omega_i(X_1 + \dots + X_k, Y_1 + \dots + Y_k) \\ &= \omega_i(X_i, Y_i) \\ &= 0,\end{aligned}$$

utilizando las condiciones *ii*) y *iii*) de la Definición 1.2.1.

Además sabemos que V es una distribución de dimensión nk y, por ser la estructura casi k -cotangente integrable, las formas presimplécticas ω_i son cerradas para todo $1 \leq i \leq k$.

Así $(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1 \oplus \dots \oplus V_k)$ es una estructura k -simpléctica sobre M .

Recíprocamente, sea $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ una estructura k -simpléctica sobre M .

En cada punto $x \in M$ definimos los subespacios de $T_x M$ siguientes:

$$V_i(x) = \bigcap_{j \neq i} \ker \omega_j(x),$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

En todos los puntos $x \in M$ y para todo $1 \leq i \leq k$ se tiene que

$$\ker \omega_i(x) \subset V(x).$$

Si existiese $X \in \ker \omega_i(x)$ tal que $X \notin V(x)$, el espacio de dimensión $nk + 1$ $E(x) = V(x) \oplus \langle X \rangle$ verificaría

$$(\omega_i)|_{E(x) \times E(x)} = 0,$$

lo que contradice la condición de que rango de ω_i es igual a $2n$. En efecto, ([LR2], pág. 231) dado W espacio vectorial de dimensión finita, un subespacio $K \subset W$ y una 2-forma bilineal ω sobre W , si $K^\perp = \{u \in W / \omega(u, v) = 0, \forall v \in K\}$, entonces

$$\dim W + \dim(W^\perp \cap K) = \dim K + \dim K^\perp.$$

Si aplicamos esta fórmula a $W = T_x M$ y $K = E(x)$ donde $\omega_i(x)$ es una 2-forma bilineal sobre W , entonces

$$(1.2.13) \quad \dim T_x M + \dim(T_x M^\perp \cap E(x)) = \dim E(x) + \dim E(x)^\perp.$$

Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}(1.2.14) \quad \dim T_x M + \dim(T_x M^\perp \cap K) &\leq \dim T_x M + \dim T_x M^\perp \\ &= nk + n + (nk - n) \\ &= 2nk\end{aligned}$$

por ser ω_i de rango $2n$, y por otro lado, por ser $E(x)$ isotrópica, $E(x) \subset E(x)^\perp$ y entonces $\dim E(x)^\perp \geq nk + 1$, con lo que

$$(1.2.15) \quad \begin{aligned} \dim E(x) + \dim E(x)^\perp &\geq nk + 1 + nk + 1 \\ &= 2nk + 2. \end{aligned}$$

Las condiciones (1.2.14) y (1.2.15) contradicen (1.2.13) y por tanto deducimos que no existe X en las condiciones impuestas, con lo que $\ker \omega_i(x) \subset V(x)$ para todo $1 \leq i \leq k$, y, en consecuencia,

$$V_i(x) \subset V(x)$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Como para cada $j \neq i$ se verifica que

$$\begin{aligned} V_i(x) \cap V_j(x) &= (\bigoplus_{h \neq i} \ker \omega_h(x)) \cap (\bigoplus_{l \neq j} \ker \omega_l(x)) \\ &= \bigcap_{h=1}^k \ker \omega_h(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces $V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \subset V(x)$ y además,

$$V_i(x) \cap (\bigoplus_{j \neq i} V_j(x)) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, que es la condición i) de la Definición 1.2.1.

Ahora, dado $X \in \bigoplus_{j \neq i} V_j(x)$ entonces $X = X_1 + \dots + \hat{X}_i + \dots + X_k$, con $X_j \in V_j(x)$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iota_X \omega_i(x) &= \iota_{X_1} \omega_i(x) + \dots + \iota_{X_i} \widehat{\omega}_i(x) + \dots + \iota_{X_k} \omega_i(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de forma que $X \in \ker \omega_i(x)$. Así

$$\bigoplus_{j \neq i} V_j(x) \subset \ker \omega_i(x).$$

Además, utilizando las expresiones locales de $\omega_i(x)$ encontradas en el Teorema 1.1.1, tenemos que

$$\ker \omega_i(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq j \leq k, j \neq i \right\rangle$$

y

$$\bigcap_{j \neq i} \ker \omega_j(x) = V_i(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}; 1 \leq \alpha \leq n \right\rangle$$

con lo que $\dim V_i(x) = n$ en todo punto $x \in M$ y para todo $1 \leq i \leq k$.

Entonces $\dim \bigoplus_{j \neq i} V_j(x) = n(k-1) = \dim \ker \omega_i(x)$ y se verifica,

$$\ker \omega_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j(x),$$

que es la condición *ii*) de la Definición 1.2.1.

La condición *iii*) de esa definición es un caso particular de la *ii*) en la Definición 1.1.1. Así $(\omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k)$ es una estructura casi k -cotangente sobre M .

Esta estructura es integrable pues las formas ω_i son todas cerradas y, a partir de las expresiones locales de cada distribución V_i , se tiene también que las distribuciones V_{i_1, \dots, i_r} son todas ellas integrables. \square

Sobre una variedad M de dimensión $n(k+1)$, una estructura casi k -cotangente $(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_k)$, no es, en general, integrable; definiendo de nuevo $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, tenemos que la familia $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ verifica

i) $\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0,$

ii) $\omega_{i|_{V \times V}} = 0,$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Teniendo en cuenta esto y la Proposición 1.2.1 podemos llamar a las estructuras casi k -cotangentes estructuras casi k -simpléticas.

1.3 Caracterizaciones del Fibrado $(T_k^1)^*Q$

El fibrado vectorial $(T_k^1)^*Q$ ha servido de modelo canónico para la definición de las estructuras k -simpléticas y de las estructuras casi k -cotangentes como vimos en las Secciones 1.1 y 1.2.

De hecho $(T_k^1)^*Q$ está dotado de una estructura k -simplética, y por lo tanto de una estructura casi k -cotangente integrable, (Proposición 1.2.1), de forma canónica.

En esta sección tratamos de estudiar en qué condiciones una variedad M de dimensión $n(k+1)$ dotada de una estructura casi k -cotangente integrable es el fibrado de las k^1 -covelocidades $(T_k^1)^*Q$ sobre una variedad Q de dimensión n .

Para ello es posible utilizar las técnicas aplicadas por Crampin y Thompson [CrT] a las estructuras casi tangentes y por Thompson [Th] a las estructuras casi cotangentes.

De esta manera, de León, Méndez y Salgado ([LMS2], [M]) obtuvieron una caracterización de variedades casi k -cotangentes como fibrados afines modelados sobre un fibrado cotangente de k^1 -covelocidades.

Otra forma de estudiar esta situación es mediante las técnicas introducidas por Nagano [Ng] para el estudio de las estructuras simplécticas y utilizadas después por de León, Merino, Oubiña y Salgado en [LMOS1] para las estructuras casi tangentes y casi estable tangentes.

De esta forma obtenemos [LMOS2] una caracterización de variedades casi k -cotangentes como fibrados cotangentes de k^1 -covelocidades.

1.3.1 Método de Crampin-Thompson.

En primer lugar recordamos la definición de fibrado afín ([CrT], [Gol]).

Definición 1.3.1 *Supongamos que $\pi : A \rightarrow B$ es una submersión sobreyectiva de variedades diferenciables. Sea (E, p, B, F) un fibrado vectorial con espacio total E , base B , proyección $p : E \rightarrow B$ y fibra F . Sea $A \times_B E$ el producto fibrado de las variedades fibradas A y E . Se dice que A es un fibrado afín modelado sobre E si existe una aplicación diferenciable $\rho : A \times_B E \rightarrow A$ que es fibrada sobre la identidad de B y tal que, para cada $z \in B$, $\rho_z : \pi^{-1}(z) \times p^{-1}(z) \rightarrow \pi^{-1}(z)$ es una acción libre y transitiva del espacio vectorial $p^{-1}(z)$ sobre $\pi^{-1}(z)$. En este caso A es un fibrado localmente trivial sobre B con fibra estándar F .*

En [LMS2] y en [M] se establece en qué condiciones una estructura casi k -cotangente sobre una variedad diferenciable M se puede ver como la estructura casi k -cotangente canónica de un fibrado cotangente de k^1 -covelocidades.

Sea $(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_k)$ una estructura integrable en el sentido del Teorema 1.2.1 y supongamos una estructura que define una fibración, es decir, verifica:

- 1) Para todo $1 \leq i \leq k$ el espacio de hojas $M_i = \frac{M}{K_i}$, con $K_i = \ker \omega_i$, es una variedad cociente de M de forma que $\rho_i : M \rightarrow M_i$ es una fibración cuyas fibras son precisamente las hojas de K_i .
- 2) Denotando $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, el espacio de hojas $N = \frac{M}{V}$ es una variedad cociente de M cuyas fibras son precisamente las hojas de V .

Ahora, dada $\alpha \in T_x^*N$ se definen los (i) -levantamientos verticales de α a M , $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ y se demuestra que existe una conexión simétrica ∇ adaptada a la estructura casi k -cotangente integrable que define una fibración de forma que la conexión inducida por ∇ sobre cada hoja de V y de V_i es llana.

En estas condiciones se prueba el teorema que caracteriza a las variedades casi k -cotangentes como fibrados cotangentes de k^1 -covelocidades:

Teorema 1.3.1 Sea $(M, \omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k)$ una estructura casi k -cotangente integrable que define una fibración $\pi : M \rightarrow N$. Supongamos que ∇ es una conexión simétrica adaptada tal que la conexión llana inducida por ella sobre cada hoja de V y V_i es geodésicamente completa. Suponemos además que cada fibra de π es conexa y simplemente conexa y que cada hoja de V_i es conexa para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces M es difeomorfa a $(T_k^1)^*N$. Además existe un difeomorfismo $F : M \rightarrow (T_k^1)^*N$ tal que $\omega_i = F^*((\omega_i)_0 + \pi_0^*\phi_i)$, donde $(\omega_i)_0$ son las formas presimplécticas canónicas sobre $(T_k^1)^*N$, $\pi_0 : (T_k^1)^*N \rightarrow N$ la proyección canónica y ϕ_i son k -formas cerradas sobre N .

Demostración

Definiremos una aplicación

$$\rho : M \times_N (T_k^1)^*N \rightarrow M$$

fibrada sobre la identidad de N tal que

$$\rho_x : \pi^{-1}(x) \times (T_k^1)_x^*N \rightarrow \pi^{-1}(x)$$

es una acción libre y transitiva del espacio vectorial $(T_k^1)_x^*N$ sobre $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in N$.

Para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (T_k^1)_x^*N$, con $\alpha_i \in T_x^*N$, se define el campo de vectores A_i sobre $\pi^{-1}(x)$ $1 \leq i \leq k$ por

$$(A_i)_y = ((\alpha_i)^{(i)})_y$$

para cada $y \in \pi^{-1}(x)$.

Como $A_i \in V_i$, entonces A_i es un campo de vectores geodésico y genera un grupo 1-paramétrico global de transformaciones

$$\Phi_{A_i} : \mathbf{R} \times \pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x).$$

La acción ρ_x definida por

$$\rho_x(y, (\alpha_1, \dots, \alpha_k)) = \Phi_{A_k}(1, \dots, \Phi_{A_2}(1, \Phi_{A_1}(1, y))) \dots$$

es libre y transitiva y por tanto M es un fibrado afín modelado sobre $(T_k^1)^*N$.

Siempre que la variedad M sea paracompacta se puede escoger una sección global $s : N \rightarrow M$ y entonces M puede identificarse con $(T_k^1)^*N$ con s jugando el papel de sección cero. Denotamos por F el difeomorfismo resultante y consideramos las 2-formas

$$\Omega_i = \omega_i - F^*(\omega_i)_0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Estas formas son cerradas y satisfacen $\iota_X \Omega_i = 0$ para cualquier vector vertical $X \in V$. Existen entonces k 2-formas cerradas ϕ_i sobre N tales que

$$\Omega_i = \pi^* \phi_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Por último, como F es fibrada sobre la identidad de N se tiene

$$\omega_i = F^*((\omega_i)_0 + \pi_0^* \phi_i)$$

para todo $1 \leq i \leq k$, lo que finaliza la prueba. \square

Corolario 1.3.1 *Supongamos que (M, ω_i, V_i) satisface todas las hipótesis del Teorema 1.3.1 excepto que las hojas de V son simplemente conexas. Entonces si las hojas de V se suponen mutuamente homeomorfas, $(T_k^1)^* N$ es un espacio de recubrimiento de M y las hojas de V son de la forma $T^k \times \mathbf{R}^{kn-k}$, donde T^k es un toro de dimensión k . Además, si se supone que las hojas de V son compactas, entonces $(T_k^1)^* N$ es un espacio de recubrimiento de M y las hojas son difeomorfas a T^{kn} .*

También en [LMS2] y en [M] se clasifican las variedades casi k -cotangentes que verifican las condiciones del Teorema 1.3.1. Las estructuras de este tipo se llamarán regulares.

Se define una relación de equivalencia entre las estructuras casi k -cotangentes regulares de la siguiente forma

Definición 1.3.2 *Si (M, π, N, ω_i) y $(\overline{M}, \overline{\pi}, N, \overline{\omega}_i)$ son dos estructuras casi k -cotangentes regulares, se dice que son equivalentes si existe un morfismo de fibrados $F : M \rightarrow \overline{M}$ fibrado sobre la identidad de N tal que*

$$F^* \overline{\omega}_i - \omega_i = \pi^*(d\alpha_i)$$

donde α_i , $1 \leq i \leq k$, es una 1-forma sobre N , esto es, $F^* \overline{\omega}_i - \omega_i$ es cohomólogo a cero para todo i .

El siguiente resultado proporciona una clasificación de las estructuras casi k -cotangentes regulares.

Proposición 1.3.1 *Dada una variedad diferenciable N , existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de equivalencia de estructuras casi k -cotangentes regulares (M, π, N, ω_i) y los elementos de $H^2(N, \mathbf{R}) \times \dots \times H^2(N, \mathbf{R})$, donde $H^2(N, \mathbf{R})$ es el segundo grupo de cohomología de de Rham de N .*

Demostración

Para una estructura regular (M, π, N, ω_i) sabemos que existen k 2-formas diferenciales $(\phi_1)_s, \dots, (\phi_k)_s$ sobre N tales que

$$\omega_i = F_s^*(\omega_i)_0 - \pi_0^*((\phi)_i)_s$$

donde F_s es el difeomorfismo de M en $(T_k^1)^*N$ definido a partir de la sección global $s: N \rightarrow M$ de π .

La aplicación que a cada clase de equivalencia de variedades casi k -cotangentes regulares con base N , $[(M, \omega_i, N, \pi)]$, le asocia el elemento

$$[(\phi_1)_s], \dots, [(\phi_k)_s] \in H^2(N, \mathbf{R}) \times \dots \times H^2(N, \mathbf{R})$$

está bien definida y es la correspondencia biyectiva buscada. \square

Las estructuras casi k -cotangentes regulares equivalentes a $((T_k^1)^*N, \pi_0, N, (\omega_i)_0)$ están caracterizadas por la anulación del elemento de $H^2(N, \mathbf{R}) \times \dots \times H^2(N, \mathbf{R})$ asociado. De hecho se prueba en [LMS2] el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2 *Supongamos que (M, π, N, ω_i) es una estructura casi k -cotangente regular. Entonces (M, π, N, ω_i) es equivalente a $((T_k^1)^*N, \pi_0, (\omega_i)_0)$ si y sólo si el elemento de $H^2(N, \mathbf{R}) \times \dots \times H^2(N, \mathbf{R})$ que determina es cero. En tal caso ω_i es exacta para todo $1 \leq i \leq k$, es decir $\omega_i = d\lambda_i$, y la equivalencia F verifica $F^*(\lambda_i)_0 = \lambda_i$.*

1.3.2 Método de Nagano

A continuación establecemos, por un procedimiento distinto del utilizado en la sección anterior, bajo qué condiciones una variedad M de dimensión $n(k+1)$ es difeomorfa al fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades $(T_k^1)^*Q$ de una variedad Q de dimensión n .

En este caso utilizamos un resultado demostrado por Nagano [Ng] en el cual se prueba cómo una variedad diferenciable satisfaciendo algunas propiedades puede ser dotada de una cierta estructura de fibrado vectorial.

Dado un campo de vectores X sobre una variedad diferenciable M , en cada punto singular de X $x \in M$ tal que $X_x = 0$, podemos definir un operador que se llama operador característico de X en x , que denotamos $(A_X)_x$, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} (A_X)_x: T_x M &\longrightarrow T_x M \\ Y &\longrightarrow (A_X)_x(Y) = \nabla_Y X \end{aligned}$$

donde ∇ es una conexión lineal arbitraria sobre M . Este operador no depende de la elección de la conexión lineal ∇ por ser x un punto singular de X .

En efecto, si (x^i) es un sistema de coordenadas locales sobre M de forma que

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

la expresión local de $(A_X)_x$ es:

$$(A_X)_x Y = Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

expresión que no depende de la conexión lineal ∇ escogida.

Sea M el espacio total de un fibrado vectorial $M \rightarrow N$. Podemos definir una acción de \mathbf{R} sobre M dada por la multiplicación escalar en cada fibra. Si (x^i, y^a) es un sistema de coordenadas locales de M de forma que (x^i) son coordenadas en la base N e (y^a) son coordenadas en las fibras, entonces la acción está dada localmente por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, (x^i, y^a)) &\longrightarrow (x^i, e^t y^a). \end{aligned}$$

Esta acción es el flujo de un campo de vectores C sobre M que se llama campo de vectores canónico del fibrado vectorial.

Es fácil comprobar que, en el sistema de coordenadas (x^i, y^a) , la expresión local de C es:

$$(1.3.16) \quad C = y^a \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

El campo de vectores C verifica las siguientes cuatro condiciones:

- i) C genera un grupo 1-paramétrico global de transformaciones sobre M .
- ii) Para cada punto $x \in M$ existe un único $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\exp tC)(x)$, donde $\exp tC$ denota el flujo de C .
- iii) El operador característico $(A_C)_x$ asociado a C satisface $((A_C)_x)^2 = (A_C)_x$ para cada punto singular x de C .
- iv) El conjunto S de los puntos singulares de C es una subvariedad de M de codimensión igual al rango del operador $(A_C)_x$ para todo $x \in S$.

Las condiciones i) y ii) son consecuencia inmediata de la propia definición de la acción de \mathbf{R} sobre M . La condición iii) se comprueba utilizando la expresión local del operador característico asociado a C que es, respecto al sistema de coordenadas (x^i, y^a) :

$$(A_C)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0, \quad (A_C)_x\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right) = \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Finalmente, de la expresión local (1.3.16) de C , se deduce que el conjunto singular S está determinado por las ecuaciones $y^a = 0$. Entonces S es la sección cero del fibrado $M \rightarrow N$, y por lo tanto S es difeomorfo a N y una subvariedad regular de M . Además $\text{codim } S = \dim M - \dim N$ que es claramente igual al rango del operador $(A_C)_x$ para todo $x \in S$.

Teniendo en cuenta la expresión local (1.3.16) el conjunto singular S de C está determinado por las ecuaciones $y^a = 0$, por lo que es la sección cero del fibrado vectorial $M \rightarrow N$, y por lo tanto difeomorfo a N .

Teorema 1.3.3 [Ng] *Sea M una variedad diferenciable sobre la que existe un campo de vectores C que satisface las propiedades i)-iv). Existe entonces una única estructura de fibrado vectorial en M sobre la variedad S de los puntos singulares de C , tal que C es el campo de vectores canónico.*

A continuación exponemos brevemente un esquema de la demostración de este resultado. La prueba consiste en comprobar que, si $N(S)$ es el fibrado vectorial sobre S definido en cada punto $x \in S$ por

$$N(S)_x = \{X \in T_x M / (A_C)_x X = X\},$$

entonces M es difeomorfa a $N(S)$ y tiene por tanto una estructura de fibrado vectorial sobre S de la que C resulta ser el campo de vectores canónico.

La propiedad iii), significa que, en cada punto $x \in S$, el operador $(A_C)_x$ es un proyector y por tanto, [LR2], podemos escribir

$$T_x M = \ker(A_C)_x \oplus \text{Im}(A_C)_x,$$

para todo $x \in S$. O, lo que es lo mismo,

$$TM|_S = TS \oplus N(S),$$

teniendo en cuenta la definición de $N(S)$ y que,

$$T_x S = \{X \in T_x M / (A_C)_x(X) = 0\}$$

en cualquier punto $x \in S$.

Para definir el difeomorfismo $\Phi : N(S) \rightarrow M$ se comprueba en primer lugar que existe un subfibrado esférico $E \subset N(S)$ tal que para todo $X \in E$, está bien definida la aplicación,

$$(1.3.17) \quad X \in E \longrightarrow \alpha(1) \in M,$$

con α una aplicación de \mathbf{R} en M tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=0} &= X(\alpha(0)), \\ t \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t &= C(\alpha(t)). \end{aligned}$$

La propiedad i) permite extender la aplicación a todo $N(S)$.

La aplicación $\Phi : N(S) \rightarrow M$ así construida es el difeomorfismo buscado que nos permite dotar a M de estructura de fibrado vectorial sobre S . La construcción de Φ asegura que C es el campo de vectores canónico. Además, por ser la estructura de fibrado vectorial de $N(S)$ sobre S única, obtenemos que la estructura de fibrado vectorial construida en M es también única.

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente corolario.

Corolario 1.3.2 *Dos fibrados vectoriales son isomorfos si y sólo si existe un difeomorfismo que preserva los campos de vectores canónicos.*

Este resultado general puede aplicarse a distintos fibrados vectoriales. En [Ng], Nagano lo aplica al caso del fibrado cotangente obteniendo una caracterización de variedades simpléticas como fibrados cotangentes.

A continuación aplicamos el resultado de Nagano al caso de variedades casi k -cotangentes integrables, o equivalentemente, variedades k -simpléticas.

En la demostración del teorema utilizamos los siguientes resultados:

Definición 1.3.3 *Si (E, π, M) es un fibrado y $\rho : H \rightarrow M$ una aplicación, entonces el pull-back de π por ρ es el fibrado $(\rho^*(E), \rho^*(\pi), H)$ donde el espacio total $\rho^*(E)$ está definido por,*

$$\{(a, b) \in E \times H / \pi(a) = \rho(b)\},$$

y la proyección $\rho^*(\pi)$ por,

$$\rho^*(\pi)(a, b) = b.$$

El pull-back es un fibrado con fibra tipo igual a la fibra tipo de π . El par $(\pi^*(\rho), \rho)$ es un morfismo de fibrados de $\rho^*(\pi)$ a π .

Si tomamos el fibrado tangente (TM, τ_M, M) y, en lugar de una aplicación ρ tomamos otro fibrado (E, π, M) sobre M , entonces el pull-back de τ_M por π es el fibrado,

$$(\pi^*(TM), \pi^*(\tau_M), E),$$

llamado fibrado transverso a π .

Podemos definir una aplicación,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_* : TE &\longrightarrow \pi^*(TM) \\ X &\longrightarrow (\pi_*(X), \tau_E(X)). \end{aligned}$$

Se verifica, [S3]:

Lema 1.3.1 *La siguiente sucesión de morfismos de fibrados sobre M es exacta:*

$$0 \rightarrow V\pi \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\bar{\pi}_*} \pi^*(TM) \rightarrow 0,$$

donde $V\pi$ es el subfibrado vertical de τ_E e i es la inclusión.

Teorema 1.3.4 *Sea M una variedad de dimensión $n(k+1)$ dotada de una estructura casi k -cotangente integrable $(\omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k)$ tal que las formas presimplécticas ω_i son exactas, es decir $\omega_i = -d\lambda_i$, y además $(\lambda_i)|_{V_j} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq k$. Sean C_1, \dots, C_k los campos de vectores sobre M definidos por*

$$(1.3.18) \quad \iota_{C_i} \omega_j = -\delta_{ij} \lambda_j.$$

*Si los campos de vectores C_1, \dots, C_k satisfacen las condiciones i)-ii) entonces M es un fibrado vectorial sobre la variedad S de los puntos singulares de $C = C_1 + \dots + C_k$, isomorfo al fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades de S . Además el isomorfismo lleva la estructura casi k -cotangente canónica y los campos de vectores canónicos de $(T_k^1)^*Q$ a $(\omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k)$ y C_1, \dots, C_k respectivamente.*

Demostración

Por ser la estructura (ω_i, V_i) integrable existe sobre M un sistema de coordenadas locales, que denotamos $(\bar{x}^\alpha, \bar{x}_\alpha^i)$, y que es adaptado a la estructura, es decir

$$\omega_i = d\bar{x}^\alpha \wedge d\bar{x}_\alpha^i, \quad V_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha^i} \right\rangle_{\alpha=1, \dots, n}.$$

Si las formas presimplécticas son globalmente exactas, es decir $\omega_i = -d\lambda_i$, entonces las 1-formas λ_i se pueden escribir localmente como

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \bar{x}_\alpha^i d\bar{x}^\alpha + df_i \\ &= (\bar{x}_\alpha^i + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}^\alpha}) d\bar{x}^\alpha + \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_\alpha^j} d\bar{x}_\alpha^j.\end{aligned}$$

Utilizando además que $(\lambda_i)_{|V} = 0$ se deduce que

$$\lambda_i = (\bar{x}_\alpha^i + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}^\alpha}) d\bar{x}^\alpha.$$

Definimos un nuevo sistema de coordenadas (x^α, x_α^i) por las siguientes funciones

$$x^\alpha = \bar{x}^\alpha, \quad x_\alpha^i = \bar{x}_\alpha^i + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}^\alpha},$$

de forma que, en el nuevo sistema de coordenadas locales las 1-formas λ_i se escriben por

$$\lambda_i = x_\alpha^i dx^\alpha.$$

Consideramos sobre la variedad M k campos de vectores C_1, \dots, C_k determinados por las expresiones

$$\iota_{C_i} \omega_j = -\delta_{ij} \lambda_j.$$

Operando en coordenadas locales (x^α, x_α^i) se obtiene que la expresión local de estos campos de vectores es

$$C_i = x_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

para cada $1 \leq i \leq k$ fijo. Por lo tanto el campo de vectores $C = C_1 + \dots + C_k$ tiene la siguiente expresión local

$$(1.3.19) \quad C = x_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \dots + x_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}.$$

El conjunto S formado por los puntos singulares de C se expresa en las coordenadas locales adaptadas (x^α, x_α^i) por $x_\alpha^1 = \dots = x_\alpha^k = 0$, para todo $1 \leq \alpha \leq n$, con lo que S es, como en el caso general, una subvariedad de M de dimensión n . Además el operador característico A_C asociado a C tiene expresión local, respecto de (x^α, x_α^i) ,

$$(A_C)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = 0, \quad (A_C)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

en un punto cualquiera $x \in S$, de modo que $\text{rango}(A_C)_x = kn$, y por lo tanto C satisface la condición *iv*).

También utilizando la expresión local de A_C se comprueba que C verifica la condición *iii*). Para comprobar que C verifica *i*) y *ii*) basta tener en cuenta que C_1, \dots, C_k verifican estas condiciones y que, como $[C_i, C_j] = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq k$, entonces,

$$\exp tC = \exp tC_1 \circ \dots \circ \exp tC_k,$$

con lo que C es un campo de vectores completo y existe un único $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\exp tC)(x)$.

Así M satisface todas las condiciones del Teorema 1.3.3, de Nagano, y podemos asegurar que M tiene una única estructura de fibrado vectorial sobre S tal que C es el campo de vectores canónico. De hecho existe un isomorfismo φ entre M y el fibrado normal de S ,

$$\begin{aligned} N(S)_x &= \text{Im}(A_C)_x \\ &= \{X \in T_x M / X = \sum_{i,\alpha} X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\}. \end{aligned}$$

Este isomorfismo es tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N(S) & \xrightarrow{\varphi} & M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & S & \end{array}$$

donde π es la proyección canónica y π' es la proyección inducida a través del isomorfismo φ .

Para cada punto $x \in S$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales φ_x entre las fibras $\pi^{-1}(x) = N_x S$ y $(\pi')^{-1}(x) = M_x$,

$$\varphi_x : N_x S \rightarrow M_x.$$

Además, de la expresión local de $N_x S$ se deduce que,

$$N_x S = V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x).$$

Entonces, en cada punto $x \in S$, existe un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$F_x = 1 + \varphi_x : T_x M = T_x S \oplus N_x S = T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \rightarrow T_x S \oplus M_x.$$

Por ser F_x un isomorfismo de espacios vectoriales se comprueba de modo inmediato que la familia $(\tilde{\omega}_i(x), W_i(x), 1 \leq i \leq k)$ formada por k 2-formas $\tilde{\omega}_i(x)$ en $T_x S \oplus M_x$ tales que

$$\omega_i(x) = F_x^* \tilde{\omega}_i(x),$$

y por k subespacios $W_i(x)$ de $T_x S \oplus M_x$ de dimensión n tales que

$$W_i(x) = \varphi_x(V_i(x)),$$

es una estructura casi k -cotangente en el espacio vectorial $T_x S \oplus M_x$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base del subespacio $T_x S$ y sea $\{v_1^i, \dots, v_n^i\}$ una base del subespacio $V_i(x)$ para cada $1 \leq i \leq k$. Si $\{u_1^i = \varphi_x(v_1^i), \dots, u_n^i = \varphi_x(v_n^i)\}$ es la correspondiente base del subespacio $W_i(x)$ de M_x entonces podemos definir una aplicación,

$$G_x : T_x S \oplus M_x \longrightarrow T_x S \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S,$$

del modo siguiente:

$$G_x(e_i, 0, \dots, 0) = (e_i, 0, \dots, 0),$$

$$G_x(0, \dots, u_\alpha^i, \dots, 0) = (0, \dots, \iota_{(0, \dots, u_\alpha^i, \dots, 0)} \tilde{\omega}_i(x), \dots, 0),$$

para $1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n$.

De las propiedades de $(\tilde{\omega}_i(x), W_i(x))$ se deduce que G es un isomorfismo de espacios vectoriales. Existe entonces un difeomorfismo de fibrados vectoriales sobre S definido fibra a fibra,

$$M = \cup_{x \in S} M_x \longrightarrow (T_k^1)^* S = \cup_{x \in S} (T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S).$$

Para ver que este difeomorfismo conserva las estructuras casi k -cotangentes tomamos en primer lugar un elemento $\alpha_x \in (T_k^1)^* S$ y expresamos la estructura casi k -cotangente canónica del espacio vectorial $T_{\alpha_x}((T_k^1)^* S)$ del modo siguiente.

Para cualquier fibrado vectorial (E, p, M) , si denotamos por $Vp = \ker p_*$ el subfibrado vertical y por $p^*(TM)$ el fibrado transverso a p , entonces existe una sucesión exacta corta de morfismos de fibrados vectoriales ([S3], [Go], Lema 1.3.1)

$$0 \rightarrow Vp \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM) \rightarrow 0.$$

Como en cada punto $\alpha_x \in (T_k^1)^* S$ el espacio vertical $V\tau^k(\alpha_x)$ es

$$V\tau^k(\alpha_x) = V_1(\alpha_x) \oplus \dots \oplus V_k(\alpha_x),$$

y el fibrado transversal $\tau^k(TS)$ se puede identificar en cada punto con el espacio $T_{\tau^k(\alpha_x)}S$, entonces cada vector $Z_{\alpha_x} \in T_{\alpha_x}((T_k^1)^*S)$ se expresa de modo único por

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_x} &= \tau_*^k(\alpha_x)Z_{\alpha_x} + v_1(Z_{\alpha_x}) + \dots + v_k(Z_{\alpha_x}) \\ &\in T_x S \oplus V_1(\alpha_x) \oplus \dots \oplus V_k(\alpha_x). \end{aligned}$$

Definimos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \psi : T_{\alpha_x}((T_k^1)^*S) &\rightarrow T_x S \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S \\ Z_{\alpha_x} &\rightarrow (\tau_*^k(\alpha_x)Z_{\alpha_x}, \beta_1(x), \dots, \beta_k(x)), \end{aligned}$$

donde $\beta_i(x) \in T_x^* S$ es tal que

$$(\beta_i(x))^{(i)} = v_i(Z_{\alpha_x}),$$

para $(\beta_i(x))^{(i)}$ el (i) -levantamiento vertical del covector $\beta_i(x)$ a $V_i(\alpha_x)$ definido por de León, Méndez y Salgado en [LMS2], [M].

Sobre el espacio vectorial $T_x S \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S$ existe una estructura casi k -cotangente $((\omega_i)_0(x), (V_i)_0(x))$ definida por

$$\begin{aligned} (\omega_i)_0(x)((A_x, \sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)), (B_x, \rho_1(x), \dots, \rho_k(x))) &= \sigma_i(x)(B_x) - \rho_i(x)(A_x), \\ (V_i)_0(x) &= 0 \oplus \dots \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus 0, \end{aligned}$$

con $T_x^* S$ situado en el lugar i .

Calculamos $\psi^*((\omega_i)_0(x))$:

$$\begin{aligned} \psi^*((\omega_i)_0(x))(X_{\alpha_x}, Y_{\alpha_x}) &= (\omega_i)_0(x)(\psi(X_{\alpha_x}), \psi(Y_{\alpha_x})) \\ &= (\omega_i)_0(x)((\tau_*^k(\alpha_x)X_{\alpha_x}, \beta_1(x), \dots, \beta_k(x)), \\ &\quad (\tau_*^k(\alpha_x)Y_{\alpha_x}, \sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x))) \\ &= \beta_i(x)(\tau_*^k(\alpha_x)Y_{\alpha_x}) - \sigma_i(x)(\tau_*^k(\alpha_x)X_{\alpha_x}) \\ &= ((\tau^k)^*\beta_i)(\alpha_x)Y_{\alpha_x} - ((\tau^k)^*\sigma_i)(\alpha_x)X_{\alpha_x} \\ &= \iota_{\beta_i^{(i)}(\alpha_x)}\omega_i(\alpha_x)(Y_{\alpha_x}) - \iota_{\sigma_i^{(i)}(\alpha_x)}\omega_i(\alpha_x)(X_{\alpha_x}) \\ &= \omega_i(\alpha_x)(v_i(X_{\alpha_x}), Y_{\alpha_x}) - \omega_i(\alpha_x)(v_i(Y_{\alpha_x}), X_{\alpha_x}) \\ &= \omega_i(\alpha_x)(X_{\alpha_x}, Y_{\alpha_x}). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\psi(V_i(\alpha_x)) = (V_i)_0(x),$$

para todo $1 \leq i \leq k$, entonces la estructura casi k -cotangente canónica de $T_{\alpha_x}((T_k^1)^*S)$ se identifica, a través de ψ , con la estructura casi k -cotangente $((\omega_i)_0(s), (V_i)_0(s))$ del espacio vectorial $T_x S \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S$.

Además,

$$(1.3.20) \quad \begin{aligned} G_x^*(\omega_i)_0(x) &= \tilde{\omega}_i(x), \\ G_x(W_i(x)) &= (V_i)_0(x), \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$, y por tanto el isomorfismo de fibrados vectoriales $M \rightarrow (T_k^1)^*S$ conserva las estructuras casi k -cotangentes, puesto que la composición $\psi^{-1} \circ G_s \circ F_s$ es una aplicación de $T_x M$ en $T_{\alpha_x}((T_k^1)^*S)$ que conserva las correspondientes estructuras casi k -cotangentes.

La segunda condición de (1.3.20) es inmediata y la primera se comprueba del modo siguiente.

Si denotamos por $(a, b) = (a, b_1, \dots, b_k)$ y $(c, d) = (c, d_1, \dots, d_k)$ dos elementos de $T_x S \oplus M_x$, entonces:

$$\begin{aligned} (G_x^*(\omega_i)_0(x))((a, b), (c, d)) &= (\omega_i)_0(x)(G_x(a, b), G_x(c, d)) \\ &= (\omega_i)_0(x)((a, \iota_{(a,b)}\tilde{\omega}_1(x), \dots, \iota_{(a,b)}\tilde{\omega}_k(x)), \\ &\quad (c, \iota_{(c,d)}\tilde{\omega}_1(x), \dots, \iota_{(c,d)}\tilde{\omega}_k(x))) \\ &= \iota_{(a,b)}\tilde{\omega}_i(x)(c, 0, \dots, 0) - \iota_{(c,d)}\tilde{\omega}_i(x)(a, 0, \dots, 0) \\ &= \tilde{\omega}_i(x)((a, b), (c, 0)) - \tilde{\omega}_i(x)((c, d), (a, 0)) \\ &= \tilde{\omega}_i(x)((a, b), (c, d)). \end{aligned}$$

con lo que $G_x^*(\omega_i)_0(x) = \tilde{\omega}_i(x)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Además de la definición de G_x es evidente que $G_x(W_i) = 0 \oplus \dots \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus 0 = V_i(x)$ con $T_x^* S$ situado en el lugar i .

Si $x \in M$ es tal que no está en S y $\pi'(x) = s \in S$, podemos escribir, utilizando el Lema 1.3.1,

$$T_x M \equiv T_s S \oplus V_{\tau_M}(x),$$

y, mediante una traslación en la fibra $(\pi')^{-1}(x)$, podemos identificar $V_{\tau_M}(x)$ con $V_{\tau_M}(s)$ de modo que

$$T_x M \equiv T_s S \oplus V_{\tau_M}(s) = T_s S \oplus N_s S,$$

y podemos repetir el razonamiento anterior.

Como las condiciones (1.3.18) determinan por completo a los campos C_i , es inmediato que F_s aplica estos campos en los campos de vectores canónicos del fibrado $(T_k^1)^*S$. \square

Capítulo 2

Variedades casi k -tangentes.

2.1 Estructuras casi k -tangentes

2.1.1 El fibrado tangente de las k^1 -velocidades

El fibrado tangente de las k^1 -velocidades sobre una variedad diferenciable Q es el ejemplo modelo a partir del cual de León, Méndez y Salgado ([LMS3], [M]) definen las estructuras casi k -tangentes sobre una variedad Q .

Ejemplo 2.1.1 Dada una variedad diferenciable Q de dimensión n el fibrado tangente de las k^1 -velocidades de Q es la variedad de jets $T_k^1 Q$ definido del siguiente modo.

Para $x \in Q$,

$$(T_k^1)_x Q = J_{0,x}^1(\mathbf{R}^k, Q) = \{j_{0,x}^1 \sigma / \sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q \text{ diferenciable, } \sigma(0) = x\},$$

donde $j_{0,x}^1 \sigma$ denota el 1-jet de la aplicación σ ; entonces

$$T_k^1 Q = \cup_{x \in Q} (T_k^1)_x Q = \cup_{x \in Q} J_{0,x}^1(\mathbf{R}^k, Q) = J_0^1(\mathbf{R}^k, Q).$$

Dado un sistema de coordenadas locales $(u^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n)$ en Q , se define el sistema de coordenadas locales $(u^\alpha, v_1^\alpha, \dots, v_k^\alpha)$ en $T_k^1 Q$ por

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} u^\alpha(j_{0,x}^1 \sigma) &= u^\alpha(x), \\ v_i^\alpha(j_{0,x}^1 \sigma) &= \frac{\partial(u^\alpha \circ \sigma)}{\partial t^i} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq \alpha \leq n$ y $1 \leq i \leq k$, donde $(t^1, \dots, t^k) \in \mathbf{R}^k$. Así $T_k^1 Q$ es una variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$.

La proyección $\pi^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ está definida por

$$\pi^k(j_{0,x}^1 \sigma) = x.$$

Es evidente que para $k = 1$ obtenemos el fibrado tangente sobre Q .

Para k arbitrario existe un difeomorfismo canónico

$$\Lambda : T_k^1 Q \longrightarrow TQ \oplus \dots \oplus TQ,$$

del fibrado tangente de las k^1 -velocidades sobre M con la suma de Whitney del fibrado tangente sobre Q consigo mismo k veces. Λ está definido por

$$(2.1.2) \quad \Lambda(j_{0,x}^1 \sigma) = (j_{0,x}^1(\sigma)_1, \dots, j_{0,x}^1(\sigma)_k)$$

donde $\sigma_i : \mathbf{R} \rightarrow Q$ es la curva en Q definida por

$$\sigma_i(t) = \sigma(0, \dots, t, \dots, 0),$$

con t colocado en la i -ésima posición.

Localmente,

$$\Lambda(u^\alpha, v_1^\alpha, \dots, v_k^\alpha) = (u^\alpha, v_1^\alpha, \dots, u^\alpha, v_k^\alpha).$$

Así, para cualquier $x \in Q$, podemos identificar cada elemento de $(T_k^1)_x Q$ con una k -tupla de vectores tangentes a Q en x .

Utilizando esta identificación, se puede definir una suma y un producto por escalares en $(T_k^1)_x Q$ como sigue. Si $u = (u_1, \dots, u_k)$ y $v = (v_1, \dots, v_k)$ son elementos de $(T_k^1)_x Q$ y si $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, \dots, u_k + v_k), \\ \lambda u &= (\lambda u_1, \dots, \lambda u_k). \end{aligned}$$

Entonces $\pi^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ es un fibrado vectorial sobre Q isomorfo a la suma de Whitney de TQ consigo mismo k veces.

Recordamos ahora la teoría de levantamientos de campos de tensores sobre Q a $T_k^1 Q$, [Mor].

Dada una función f sobre Q se define el (i) -levantamiento $f^{(i)}$ a $T_k^1 Q$ de la forma siguiente

$$f^{(i)}(j_{0,x}^1(\sigma)) = \frac{\partial(f \circ \sigma)}{\partial t^i} \Big|_{t=0},$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

El levantamiento vertical de f , se define por $f^V = f \circ \tau^k$.

Localmente,

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} f^{(i)}(u^\alpha, v_i^\alpha) &= v_i^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right), \\ f^V(u^\alpha, v_i^\alpha) &= f(u^\alpha). \end{aligned}$$

Si u es un campo de vectores sobre Q se define un campo de vectores $u^{(i)}$ sobre $T_k^1 Q$ del modo siguiente:

$$(2.1.4) \quad u^{(i)}(f^V) = 0, \quad u^{(i)}(f^{(j)}) = \delta^{ij}(u(f)),$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$ y para cualquier función f sobre Q .

Se define también el levantamiento completo u^C de u a $T_k^1 Q$ por

$$u^C(f^V) = (uf)^V, \quad u^C(f^{(i)}) = (uf)^{(i)},$$

para cualquier función f sobre Q .

Dado un campo de tensores F de tipo $(1, 1)$ sobre Q , se define el (i) -levantamiento $F^{(i)}$ de F a $T_k^1 Q$ como el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre $T_k^1 Q$ dado por

$$(2.1.5) \quad (F^{(i)})_y(X) = (F_y(T\pi^k(X)))_y^{(i)},$$

para todo $1 \leq i \leq k$ y para cualquier vector tangente $X \in T_y(T_k^1 Q)$.

Localmente, si $F = F_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \otimes du^\beta$, es

$$(2.1.6) \quad F^{(i)} = F_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} \otimes du^\beta.$$

De esta manera, dado I el tensor identidad sobre Q , podemos definir k campos de tensores J_i , de tipo $(1, 1)$ sobre $T_k^1 Q$, como los k (i) -levantamientos de I :

$$J_i = I^{(i)},$$

es decir,

$$(J_i)_y(X) = (T\pi^k(y)X)^{(i)}.$$

La expresión local de los campos de tensores J_i , $1 \leq i \leq k$, de tipo $(1, 1)$ en $T_k^1 Q$ es,

$$(2.1.7) \quad J_i = \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} \otimes du^\alpha.$$

A partir de la expresión local (2.1.7), se deduce que se verifican las propiedades siguientes:

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} (1) \quad & J_i \circ J_j = J_j \circ J_i = 0, \\ (2) \quad & \text{rango} J_i = n, \\ (3) \quad & \text{Im} J_i \cap (+_{j \neq i} \text{Im} J_j) = 0, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$.

Se definen del modo siguiente las prolongaciones de aplicaciones entre variedades a los fibrados tangentes de k^1 -velocidades.

Definición 2.1.1 Dada una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables M y N , se define la prolongación $T_k^1 f : T_k^1 M \rightarrow T_k^1 N$ por

$$T_k^1 f(j_{0,x}^1 \phi) = j_{0,f(x)}^1 (f \circ \phi),$$

para todo $x \in M$.

2.1.2 Estructuras casi k -tangentes

Considerando el modelo anterior, de León, Méndez y Salgado ([LMS3], [M]) introducen las estructuras casi k -tangentes sobre una variedad M de dimensión $n(k+1)$.

Definición 2.1.2 Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$. Supongamos que sobre M están definidos k campos de tensores J_1, \dots, J_k de tipo $(1, 1)$ verificando las siguientes condiciones

$$(2.1.9) \quad \begin{aligned} 1) \quad & J_i \circ J_j = J_j \circ J_i = 0, \\ 2) \quad & \text{rang} J_i = n, \\ 3) \quad & \text{Im} J_i \cap (+_{j \neq i} \text{Im} J_j) = 0, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$. La k -tupla (J_1, \dots, J_k) se denomina estructura casi k -tangente en M y M se denomina una variedad casi k -tangente.

También en [LMS3] y [M] se describen las estructuras casi tangentes como cierto tipo de G -estructuras y se demuestra que existe una correspondencia biyectiva entre estructuras casi k -tangentes sobre una variedad M de dimensión $n(k+1)$ y G -estructuras $B_G(M)$ sobre M , donde G es el subgrupo de Lie de $Gl(n(k+1), \mathbf{R})$

definido por

$$(2.1.10) \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_k & 0 & \dots & A \end{pmatrix} / A \in Gl(n, \mathbf{R}), A_i \in gl(n, \mathbf{R}), 1 \leq i \leq k \right\}.$$

2.1.3 Condiciones de integrabilidad

El grupo de estructura G dado en (2.1.10) puede describirse como el grupo de invarianza de las matrices

$$(J_1)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, (J_k)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de dimensión n . Es decir,

$$G = \{ \alpha \in Gl(n(k+1), \mathbf{R}) / \alpha(J_i)_0 = (J_i)_0 \alpha; 1 \leq i \leq k \}.$$

Por la teoría general de G -estructuras, [Fu], tenemos

Definición 2.1.3 Una estructura casi k -tangente (J_1, \dots, J_k) sobre M es integrable si y sólo si en un entorno de cada punto de M existe un sistema de coordenadas $(x^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_k^\alpha)$ en el cual J_i se expresa como $(J_i)_0$ para todo $1 \leq i \leq k$.

A continuación, daremos una caracterización de la integrabilidad de las estructuras casi k -tangentes.

Definición 2.1.4 Dados A y B dos tensores de tipo $(1, 1)$ sobre M tales que $AB = BA$, definimos un campo de tensores $\{A, B\}$ de tipo $(1, 2)$ sobre M por

$$\{A, B\}(X, Y) = [AX, BY] + AB[X, Y] - A[X, BY] - B[AX, Y].$$

Nótese que $\{A, A\} = N_A$, tensor de Nijenhuis de A .

Teorema 2.1.1 [LMS3], [M] *Una estructura casi k -tangente (J_1, \dots, J_k) sobre M es integrable si y sólo si $\{J_i, J_j\} = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq k$.*

En estas condiciones, existe un sistema de coordenadas locales $(x^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_k^\alpha)$ tal que los tensores J_i de tipo $(1, 1)$ sobre M se expresan en este sistema por

$$(2.1.11) \quad J_i = \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \otimes dx^\alpha.$$

2.2 Caracterizaciones del Fibrado $T_k^1 Q$

En esta Sección aplicamos los métodos ya utilizados en la Sección 1.3 para obtener caracterizaciones del fibrado vectorial $T_k^1 Q$.

En primer lugar recordamos los resultados obtenidos por de León, Méndez y Salgado ([M], [LMS2]) para variedades casi k -tangentes integrables que definen fibraciones. En estos resultados, siguiendo de nuevo el trabajo de Crampin y Thompson [CrT] se obtiene en qué condiciones una variedad casi k -tangente se puede identificar con el fibrado tangente de las k^1 -velocidades sobre otra variedad.

Después aplicamos el teorema de Nagano [Ng] para fibrados vectoriales, al caso particular de las variedades casi k -tangentes, obteniendo [LMOS2] una nueva caracterización de variedades de este tipo como fibrados tangentes de k^1 -velocidades.

2.2.1 Método de Crampin-Thompson.

Dada una variedad casi k -tangente $(M, J_i; 1 \leq i \leq k)$ denotamos por $V_i = \text{Im} J_i$ las k distribuciones diferenciables sobre M de dimensión n .

Utilizando la condición 3) de (2.1.9) existe $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ una distribución diferenciable sobre M de dimensión nk .

Si la estructura casi k -tangente (J_1, \dots, J_k) es integrable, entonces las distribuciones V, V_1, \dots, V_k resultan ser involutivas. Además cada una de ellas define una foliación de M de forma que cada hoja de la foliación definida por V es, localmente, un producto de k hojas de las foliaciones definidas por V_1, \dots, V_k .

Definición 2.2.1 *La estructura casi k -tangente (J_1, \dots, J_k) sobre M define una fibración si el espacio de hojas de la foliación definida por V tiene una estructura de variedad diferenciable.*

Dada (M, J_1, \dots, J_k) variedad casi k -tangente integrable que define una fibrición, sea N el espacio de hojas de la foliación en M definida por V . N tiene estructura de variedad diferenciable y se pueden definir $[M]$ los (i) -levantamientos verticales de vectores tangentes u a N a vectores tangentes $u^{(i)}$ a M .

Además, dada una conexión lineal simétrica ∇ adaptada a la estructura casi k -tangente, es decir, tal que $\nabla J_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, se prueba que ∇ induce por restriccción una conexión llana sobre cada hoja de las foliaciones definidas por V, V_1, \dots, V_k .

Se puede probar ahora el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 *Dada (M, J_1, \dots, J_k) una estructura casi k -tangente integrable que define una fibrición $\pi : M \rightarrow N$, sea ∇ una conexión lineal simétrica sobre M tal que $\nabla J_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ y supongamos que, con respecto a la conexión llana inducida por ∇ , cada hoja de las foliaciones definidas por V, V_1, \dots, V_k , es geodésicamente completa. Si además cada fibra de $\pi : M \rightarrow N$ es conexa y simplemente conexa y cada hoja de V_i es conexa para todo $1 \leq i \leq k$, entonces M es un fibrado afín modelado sobre $T_k^1 N$.*

Demostración

De acuerdo con la Definición 1.3.1 tenemos que definir un morfismo

$$\rho : M \times_N T_k^1 M \longrightarrow M$$

de variedades fibradas sobre N de modo que para cualquier $x \in M$,

$$\rho_x : \pi^{-1}(x) \times (T_k^1)_x N \longrightarrow \pi^{-1}(x)$$

sea una acción libre y transitiva del espacio vectorial $(T_k^1)_x N$ sobre $\pi^{-1}(x)$.

Si $u = (u_1, \dots, u_k) \in (T_k^1)_x N$ entonces los k campos de vectores verticales U_i en $\pi^{-1}(x)$ dados por

$$U_i(y) = ((u_i)^{(i)})_y,$$

para cada $y \in \pi^{-1}(x)$, son campos geodésicos respecto a ∇ y, por lo tanto, cada uno de ellos está generado por un grupo 1-paramétrico global:

$$\Phi_{U_i} : \mathbf{R} \times \pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x).$$

A partir de las curvas integrales $t \rightarrow \Phi_{U_i}(t, y)$ de U_i definimos ρ por

$$\rho_x(y, u) = \Phi_{U_k}(1, \dots, \Phi_{U_2}(1, \Phi_{U_1}(1, y)) \dots).$$

Así definida ρ_x resulta ser una acción libre y transitiva. \square

Consecuencias de este resultado son:

Corolario 2.2.1 Si (M, J_1, \dots, J_k) verifica todas las hipótesis del Teorema 2.2.1 y además $\pi : M \rightarrow N$ admite una sección global, entonces M es isomorfo, como fibrado vectorial, a $T_k^1 N$. El isomorfismo depende de la elección de la sección.

Corolario 2.2.2 Si (M, J_1, \dots, J_k) verifica las condiciones del Teorema 2.2.1 salvo que las hojas de la foliación definida por V son simplemente conexas y esas hojas se suponen mutuamente homeomorfas, entonces $T_k^1 N$ es un espacio de recubrimiento de M y las hojas de V son de la forma $T^s \times \mathbf{R}^{kn-s}$ donde T^s es el toro de dimensión s , para $1 \leq s \leq kn$. Además, si se suponen las hojas de V compactas entonces $T_k^1 N$ es un espacio de recubrimiento de M y las fibras son difeomorfas a T^{kn} .

2.2.2 Método de Nagano

Consideremos la estructura casi k -tangente canónica (J_1, \dots, J_k) sobre el fibrado tangente de las k^1 -velocidades $T_k^1 Q$ de una variedad diferenciable Q introducida en el Ejemplo 2.1.1.

Localmente los campos de tensores J_i se expresan por

$$J_i = \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} \otimes du^\alpha.$$

Consideramos las proyecciones canónicas

$$\mu^i : T_k^1 Q \longrightarrow T_{k-1}^1 Q,$$

definidas por $\mu^i(X_1, \dots, X_k) = (X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)$ para cada $1 \leq i \leq k$, donde $(X_1, \dots, X_k) \in T_k^1 Q = TQ \oplus \dots \oplus TQ$, y denotamos por C_i , con $1 \leq i \leq k$, los campos de vectores canónicos sobre el fibrado vectorial $\mu^i : T_k^1 Q \longrightarrow T_{k-1}^1 Q$.

Los campos de vectores C_i se escriben, localmente,

$$C_i = v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha},$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

El campo de vectores $C = C_1 + \dots + C_k$ verifica, por estar construido a partir de campos de vectores canónicos asociados a fibrados vectoriales, las condiciones $i) - iv)$ de la Sección 1.3.

Además, los campos de vectores C_1, \dots, C_k satisfacen:

$$(2.2.12) \quad [C_i, C_j] = 0, \quad L_{C_i} J_j = -\delta_{ij} J_j, \quad J_i C_j = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

A continuación probamos que una variedad casi k -tangente integrable con algunas hipótesis adicionales es el fibrado tangente de las k^1 -velocidades de cierta subvariedad.

Teorema 2.2.2 *Sea M una variedad de dimensión $n(k+1)$ dotada de una estructura casi k -tangente integrable (J_1, \dots, J_k) y de k campos de vectores C_1, \dots, C_k sobre M que satisfacen las condiciones (2.2.12), es decir,*

$$[C_i, C_j] = 0, \quad L_{C_i} J_j = -\delta_{ij} J_j, \quad J_i C_j = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$. Si además C_1, \dots, C_k satisfacen las condiciones *i) - ii)*, entonces existe una única estructura de fibrado vectorial en M sobre S que es isomorfa al fibrado tangente $T_k^1 S$ de las k^1 -velocidades de la variedad singular S de $C = C_1 + \dots + C_k$. Además el isomorfismo lleva la estructura casi k -tangente canónica y los campos de vectores canónicos de $T_k^1 S$ a (J_1, \dots, J_k) y C_1, \dots, C_k , respectivamente.

Demostración

La integrabilidad de la estructura (J_1, \dots, J_p) implica que existe un sistema de coordenadas $(\bar{x}^\alpha, \bar{y}_i^\alpha)$ sobre M tal que, para todo $1 \leq i \leq k$ y para todo $1 \leq \alpha \leq n$, se verifica

$$J_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i^\alpha}, \quad J_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}_j^\alpha} \right) = 0.$$

La expresión local de cada C_i es

$$C_i = (A_i)^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} + (B_i)_j^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}_j^\alpha},$$

donde $(A_i)^\alpha = (A_i)^\alpha(\bar{x}^\beta, \bar{y}_1^\beta, \dots, \bar{y}_k^\beta)$, $(B_i)_j^\alpha = (B_i)_j^\alpha(\bar{x}^\beta, \bar{y}_1^\beta, \dots, \bar{y}_k^\beta)$. Como $J_i C_j = 0$ se deduce que $(A_i)^\alpha = 0$, y como $L_{C_i} J_j = -\delta_{ij} J_j$ obtenemos que

$$\frac{\partial (B_i)_j^\alpha}{\partial \bar{y}_h^\beta} = \delta_h^i \delta_h^j \delta_\beta^\alpha.$$

Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$C_i = (B_i)_i^\alpha(\bar{x}^\beta, \bar{y}_1^\beta, \dots, \bar{y}_k^\beta) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i^\alpha} + \sum_{j \neq i} (B_i)_j^\alpha(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_j^\alpha}.$$

Utilizando ahora que $[C_i, C_j] = 0$ obtenemos que $(B_i)_j^\alpha = (B_j)_i^\alpha = 0$ siempre que $i \neq j$, con lo que

$$C_i = (B_i)_i^\alpha (\bar{x}^\beta, \bar{y}_1^\beta, \dots, \bar{y}_p^\beta) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i^\alpha}.$$

Definiendo ahora un nuevo sistema de coordenadas locales (x^α, y_i^α) por

$$x^\alpha = \bar{x}^\alpha, \quad y_i^\alpha = (B_i)_i^\alpha (\bar{x}^\beta, \bar{y}_j^\beta),$$

podemos escribir los campos C_i respecto de estas nuevas coordenadas por

$$(2.2.13) \quad C_i = y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha},$$

de modo que además estas coordenadas son también adaptadas a la estructura (J_1, \dots, J_p) . Si llamamos S_i a la subvariedad de M formada por los puntos singulares de C_i , para cada $1 \leq i \leq k$, obtenemos que cada S_i está determinada por la condición $y_i^\alpha = 0$. Además, si $C = C_1 + \dots + C_k$, entonces

$$(2.2.14) \quad C = y_1^\alpha \frac{\partial}{\partial y_1^\alpha} + \dots + y_k^\alpha \frac{\partial}{\partial y_k^\alpha},$$

de modo que $S = S_1 \cap \dots \cap S_k$, la subvariedad de M de los puntos singulares de C , tiene dimensión n .

En las coordenadas (x^α, y_i^α) , el operador característico A_C está dado por

$$(A_C)_x \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = 0, \quad (A_C)_x \left(\frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha},$$

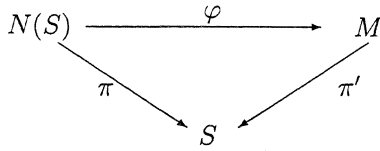
para cada punto $x \in S$.

Las expresiones locales (2.2.14) de C y las de A_C , implican directamente que C verifica las condiciones *iii*) - *iv*).

C verifica también las condiciones *i*) - *ii*) puesto que de $[C_i, C_j] = 0$ se sigue

$$\exp tC = \exp tC_1 \circ \dots \circ \exp tC_k,$$

con lo que C es completo por serlo cada C_i existe un único $\lim_{t \rightarrow \infty} (\exp tC)(x)$ para cada $x \in M$. Estamos entonces en las condiciones del teorema de Nagano y podemos decir que existe una única estructura de fibrado vectorial en M sobre S tal que C es el campo de vectores canónico y existe un isomorfismo



donde π es la proyección canónica y π' es la proyección inducida a través de φ .

Se tiene

$$\begin{aligned}
 N(S)_x &= \left\{ X \in T_x M \mid X = \sum_{i=1}^k X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \right\}, \\
 T_x S &= \left\{ X \in T_x M \mid X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}.
 \end{aligned}$$

Para cada punto $x \in S$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales φ_x entre las fibras $\pi^{-1}(x) = N_x S$ y $(\pi')^{-1}(x) = M_x$,

$$\varphi_x : N_x S \longrightarrow M_x.$$

Además, si denotamos por $V_i(x) = \text{Im } J_i(x)$ los k subespacios de $T_x M$ de dimensión n , es inmediato que

$$N_x S = V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x).$$

Entonces, para cada punto $x \in S$, existe un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$F_x : 1 + \varphi_x : T_x M = T_x S \oplus N_x S = T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \rightarrow T_x S \oplus M_x.$$

En el espacio vectorial $T_x S \oplus M_x$ definimos k aplicaciones lineales $\tilde{J}_1(x), \dots, \tilde{J}_k(x)$ por:

$$\begin{array}{ccc}
 T_x S \oplus M_x & \xrightarrow{(1+\varphi_x)^{-1}} & T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \\
 \tilde{J}_i(x) \downarrow & & \downarrow J_i(x) \\
 T_x S \oplus M_x & \xrightarrow{1+\varphi_x} & T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x).
 \end{array}$$

$(\tilde{J}_1(x), \dots, \tilde{J}_k(x))$ es una estructura casi k -tangente en el espacio vectorial $T_x S \oplus M_x$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $T_x S$ y sea $\{v_1^i, \dots, v_k^i\}$ una base de $V_i(x)$ para cada $1 \leq i \leq k$. Sea $\{u_1^i = \varphi_x(v_1^i), \dots, u_n^i = \varphi_x(v_n^i)\}_{1 \leq i \leq k}$, la base de M_x correspondiente.

La aplicación $J_i(s)$ está definida por:

$$J_i(x) : T_x M = T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \rightarrow T_x M = T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x),$$

$$J_i(x)(e_\alpha, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, v_\alpha^i, \dots, 0)$$

$$J_i(x)(0, 0, \dots, v_\alpha^i, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0),$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$.

Es inmediato que,

$$J_i(x)|_{T_x S} : T_x S \longrightarrow V_i(x),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Podemos definir un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$G_x : T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S \longrightarrow T_x S \oplus M_x,$$

por:

$$G_x = (1 + \varphi_x) \circ (1 + J_1(x)|_{T_x S} + \dots + J_k(x)|_{T_x S}).$$

Existe entonces un difeomorfismo de fibrados vectoriales sobre S definido fibra a fibra,

$$T_k^1 S = \cup_{x \in S} (T_x S \oplus \dots \oplus T_x S) \rightarrow \cup_{x \in S} M_x = M.$$

Para ver que este difeomorfismo conserva la estructuras casi k -tangentes tomamos en primer lugar un elemento $X_x \in T_k^1 S$ y expresamos la estructura casi k -tangente canónica del espacio vectorial $T_{X_x}(T_k^1 S)$ del modo siguiente.

Puesto que en cada punto $X_x \in T_k^1 S$ el espacio vertical $V\pi^k(X_x)$ es,

$$V\pi^k(X_x) = V_1(X_x) \oplus \dots \oplus V_k(X_x),$$

y el fibrado transversal $(\pi^k)^*(TS)$ se puede identificar en cada punto con el espacio $T_{\pi^k(X_x)} S$, entonces cada vector $Z_{X_x} \in T_{X_x}(T_k^1 S)$ se expresa de modo único como

$$\begin{aligned} Z_{X_x} &= (\pi^k)_*(X_x)(Z_{X_x}) + v_1(Z_{X_x}) + \dots + v_k(Z_{X_x}) \\ &\in T_x S \oplus V_1(X_x) \oplus \dots \oplus V_k(X_x). \end{aligned}$$

Definimos un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$\begin{aligned} \psi : T_{X_x}(T_k^1 S) &\rightarrow T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S \\ Z_{X_x} &\rightarrow ((\pi^k)_*(X_x)Z_{X_x}, A_1(x), \dots, A_k(x)), \end{aligned}$$

donde $A_i(x) \in T_x S$ es tal que,

$$(A_i(x))^{(i)} = v_i(Z_{X_x}),$$

siendo $(A_i(x))^{(i)}$ el (i) -levantamiento vertical del vector $A_i(x)$ a $V_i(X_x)$ definido por de León, Méndez y Salgado ([LMS4], [M]).

Sobre el espacio vectorial $T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S$ existe una estructura casi k -tangente $((J_1)_0(x), \dots, (J_k)_0(x))$ definida por,

$$(J_i)_0(x)(e_\alpha, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, e_\alpha, \dots, 0),$$

$$(J_i)_0(x)(0, 0, \dots, e_\alpha, \dots, 0) = (0, \dots, 0),$$

con $1 \leq i \leq k$.

El isomorfismo ψ conserva la estructura, puesto que el siguiente diagrama es conmutativo para todo $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{array}{ccc} T_{X_x}(T_k^1 S) & \xrightarrow{\psi} & T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S \\ \bar{J}_i(X_x) \downarrow & & \downarrow (J_i)_0(x) \\ T_{X_x}(T_k^1 S) & \xrightarrow{\psi} & T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S. \end{array}$$

Por tanto, la estructura casi k -tangente canónica de $T_{X_x}(T_k^1 S)$ se identifica, a través de ψ , con la estructura casi k -tangente $((J_1)_0(x), \dots, (J_k)_0(x))$ del espacio vectorial $T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S$.

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S & \xrightarrow{G_x} & T_x S \oplus M_x \\ (\bar{J}_i)_0 \downarrow & & \downarrow \bar{J}_i(x) \\ T_x S \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S & \xrightarrow{G_x} & T_x S \oplus M_x \end{array}$$

para todo $1 \leq i \leq k$, prueba que el difeomorfismo de fibrados vectoriales $M \rightarrow T_k^1 S$ conserva las estructuras casi k -tangentes.

Dado que los campos de vectores C_1, \dots, C_k están caracterizados por las condiciones (2.2.12) es fácil ver que se conservan los campos de vectores canónicos. \square

2.3 Jets de primer orden

En esta sección recordaremos la construcción del fibrado de 1-jets $J^1 \pi$ de un fibrado (E, π, M) donde M es la variedad base, E es el espacio total y $\pi : E \rightarrow M$ la proyección [S3]. Suponemos $\dim M = m$, $\dim E = m + n$.

Sea $\Gamma_p(\pi)$ el conjunto de secciones locales de π cuyo dominio contiene a p . Definimos en $\Gamma_p(\pi)$ la siguiente relación de equivalencia.

Definición 2.3.1 Dos secciones locales ϕ y $\psi \in \Gamma_p(\pi)$ son equivalentes si $\phi(p) = \psi(p)$ y además, en algún sistema de coordenadas fibradas (x^i, u^α) con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \alpha \leq n$ se verifica

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^i} \Big|_p.$$

La clase de equivalencia que contiene a ϕ se llama el 1-jet de ϕ en p y se denota $j_p^1 \phi$.

Se define la primera variedad de jets de π del modo siguiente.

Definición 2.3.2 La primera variedad de jets de π es

$$(2.3.15) \quad J^1\pi = \{j_p^1\phi/p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}.$$

Se definen además las proyecciones π_1 y $\pi_{1,0}$ de $J^1\pi$ a M y E respectivamente por

$$\begin{aligned} \pi_1 : J^1\pi &\longrightarrow M \\ j_p^1\phi &\longrightarrow p \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} : J^1\pi &\longrightarrow E \\ j_p^1\phi &\longrightarrow \phi(p). \end{aligned}$$

$J^1\pi$ tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $m(n+1) + n$. De hecho se puede definir un sistema de coordenadas locales del modo siguiente

Definición 2.3.3 Sea (E, π, M) un fibrado y sea (U, u) un sistema de coordenadas fibradas en E con $u = (x^i, u^\alpha)$. El sistema coordinado inducido (U^1, u^1) sobre $J^1(\pi)$ se define por

$$\begin{aligned} U^1 &= \{j_p^1\phi/\phi(p) \in U\}, \\ u^1 &= (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha), \end{aligned}$$

donde:

$$(2.3.16) \quad \begin{aligned} x^i(j_p^1\phi) &= x^i(p), \\ u^\alpha(j_p^1\phi) &= u^\alpha(\phi(p)), \\ u_i^\alpha(j_p^1\phi) &= \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \Big|_p, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq \alpha \leq n$.

Las proyecciones $\pi_{1,0} : J^1\pi \rightarrow E$ y $\pi_1 : J^1\pi \rightarrow M$ son submersiones sobreyectivas. De hecho se verifica [S3],

Teorema 2.3.1 *El triple $(J^1\pi, \pi_{1,0}, E)$ tiene una estructura de fibrado afín modelado sobre el fibrado vectorial*

$$(\pi^*(T^*M) \otimes V\pi, (\tau_{E|_{\pi^*(T^*M)}}^* \otimes (\tau_{E|_{V\pi}}), E)$$

donde $\tau_E : TE \rightarrow E$ es la proyección canónica.

Esta estructura es tal que, para cada carta fibrada (U, u) sobre E , la aplicación

$$r_u : \begin{array}{l} \pi_{1,0}^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbf{R}^{mn} \\ j_p^1\phi \longrightarrow (\phi(p), u_i^\alpha(j_p^1\phi)) \end{array}$$

es una trivialización afín local.

De aquí se deduce

Corolario 2.3.1 *El espacio total $J^1\pi$ de $\pi_{1,0}$ es una variedad cuya dimensión es $m(n+1) + n$.*

Dada una subvariedad abierta $W \subset M$ y dado el conjunto $\Gamma_W(\pi)$ de secciones de π con dominio W , se pueden definir las prolongaciones de secciones locales.

Definición 2.3.4 *Sea (E, π, M) un fibrado, $W \subset M$ una subvariedad abierta y $\phi \in \Gamma_W(\pi)$. La primera prolongación de ϕ es la sección $j^1\phi \in \Gamma_W(\pi_1)$ definida por*

$$(2.3.17) \quad j^1\phi(p) = j_p^1\phi$$

para $p \in W$.

Utilizando las ecuaciones (2.3.16) se obtiene que la representación coordenada de la sección $j^1\phi \in \Gamma_W(\pi_1)$ es $(\phi^\alpha, \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i})$.

Definición 2.3.5 *Dados el fibrado (E, π, M) y el fibrado de 1-jets asociado $J^1\pi$, se define un campo de jets como una sección $\Gamma : E \rightarrow J^1\pi$ del fibrado $\pi_{1,0}$.*

Definición 2.3.6 *Una sección integral del campo de jets Γ es una sección local ϕ de π tal que la prolongación $j^1\phi$ satisfice*

$$j^1\phi = \Gamma \circ \phi.$$

Se define también [S3] la primera prolongación de un morfismo de fibrados del modo siguiente

Definición 2.3.7 Sean (E, π, M) y (H, ρ, N) dos fibrados y sea (f, \bar{f}) un morfismo de fibrados tal que \bar{f} es un difeomorfismo. La primera prolongación de (f, \bar{f}) es la aplicación $j^1(f, \bar{f}) : J^1\pi \rightarrow J^1\rho$ definida por

$$j^1(f, \bar{f})(j_p^1\phi) = j_{\bar{f}(p)}^1(\bar{f}(\phi))$$

donde $\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \circ \bar{f}_{j\bar{f}(\text{dom}\phi)}^{-1}$.

2.4 Campos de k -vectores

2.4.1 Campos de k -vectores

Consideramos una variedad diferenciable M de dimensión n dotada de un sistema de coordenadas locales $(u^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n)$. Consideramos el fibrado tangente de las k^1 -velocidades de M , T_k^1M , con el sistema de coordenadas inducido $(u^\alpha, v_i^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$. Sea $\pi_M^k : T_k^1M \rightarrow M$ la proyección canónica.

Definición 2.4.1 Un campo de k -vectores sobre M es una sección $X : M \rightarrow T_k^1M$ de la proyección canónica π_M^k .

En coordenadas locales podremos escribir

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow T_k^1M \\ (u^\alpha) &\longrightarrow (u^\alpha, X_i^\alpha), \end{aligned}$$

donde $X_i^\alpha = X_i^\alpha(u^\alpha)$.

Consideramos el fibrado trivial $\pi : \mathbf{R}^k \times M \rightarrow \mathbf{R}^k$. Veremos que se puede identificar $J^1\pi$ con $\mathbf{R}^k \times T_k^1M$. En efecto, si $j_t^1\phi \in J^1\pi$, entonces $\phi : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k \times M$ da lugar a una aplicación $\tilde{\phi} : \mathbf{R}^k \rightarrow M$ definida por $\tilde{\phi}(t) = pr_2 \circ \phi(t)$, donde $pr_2 : \mathbf{R}^k \times M \rightarrow M$ denota la proyección en el segundo factor. Definimos ahora $\tilde{\phi}_t : \mathbf{R}^k \rightarrow M$ por $\tilde{\phi}_t(s) = \tilde{\phi}(t+s)$. Entonces $\tilde{\phi}_t(0) = \tilde{\phi}(t) = x \in M$. Así, $j_t^1\phi$ se identifica al par $(t, j_0^1\tilde{\phi}_t)$.

Recíprocamente, dado $(t, j_0^1 \sigma) \in \mathbf{R}^k \times T_k^1 M$, con $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow M$ tal que $\sigma(0) = x \in M$, se define:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : \mathbf{R}^k &\longrightarrow M \\ s &\longrightarrow \bar{\sigma}(t) = \sigma(t - s), \end{aligned}$$

de modo que $\bar{\sigma}(t) = \sigma(t - t) = \sigma(0) = x$.

Identificamos $(t, j_0^1 \sigma)$ con $j_0^1 \bar{\sigma} \in J^1 \pi$. En coordenadas inducidas la identificación es la identidad y no hacemos distinción entre las coordenadas en $\mathbf{R}^k \times T_k^1 M$ y $J^1 \pi$.

Se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} J^1 \pi = \mathbf{R}^k \times T_k^1 M & \xrightarrow{\pi_{1,0}} & \mathbf{R}^k \times M \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi \\ & \mathbf{R}^k & \end{array}$$

donde $\pi_{1,0}$, π y π_1 son las proyecciones canónicas.

Utilizando la Definición 2.3.5, un campo de jets para π es una sección de la proyección

$$\pi_{1,0} : J^1 \pi = \mathbf{R}^k \times T_k^1 M \longrightarrow \mathbf{R}^k \times M.$$

Podemos expresar localmente un campo de jets γ sobre π por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbf{R}^k \times M &\longrightarrow \mathbf{R}^k \times T_k^1 M \\ (t^i, u^\alpha) &\longrightarrow (t^i, u^\alpha, \gamma_i^\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto cada campo de k -vectores sobre M ,

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow T_k^1 M \\ u^\alpha &\longrightarrow X(u^\alpha) = (u^\alpha, X_i^\alpha), \end{aligned}$$

puede identificarse con el campo de jets γ sobre $\pi : \mathbf{R}^k \times M \rightarrow \mathbf{R}^k$ dado por:

$$\gamma(t^i, u^\alpha) = (t^i, u^\alpha, X_i^\alpha).$$

Teniendo en cuenta la Definición 2.3.6 de sección integral de un campo de jets, definimos del siguiente modo las secciones integrales de un campo de k -vectores sobre M .

Definición 2.4.2 Una sección integral del campo de k -vectores X sobre M es una aplicación $\sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow M$, con U abierto en \mathbf{R}^k , tal que

$$X \circ \sigma = \sigma^{(1)},$$

donde $\sigma^{(1)}$ es la prolongación de σ definida por

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} : U \subset \mathbf{R}^k &\longrightarrow T_k^1 M \\ t &\longrightarrow \sigma^{(1)}(t) = j_0^1 \sigma_t \end{aligned}$$

con $\sigma_t(s) = \sigma(t + s)$ para todo $t, s \in \mathbf{R}^k$.

Comparando la definición de $\sigma^{(1)}$ con la Definición 2.3.4, se obtiene que,

$$\sigma^{(1)} = pr_2 \circ j_t^1(id, \sigma),$$

donde $(id, \sigma) : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k \times M$ es la sección definida a partir de σ .

De hecho se verifica

Proposición 2.4.1 $\sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow M$ es una sección integral del campo de k -vectores $X : M \rightarrow T_k^1 M$ si y sólo si $(id, \sigma) : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k \times M$ es una sección integral del campo de jets $id \times X : \mathbf{R}^k \times M \rightarrow \mathbf{R}^k \times T_k^1 M$.

Demostración

Si localmente la sección σ se escribe por $\sigma(t) = (\sigma^\alpha(t))$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(t) &= j_0^1 \sigma_t \\ &= (\sigma_t(0), \frac{\partial \sigma_t^\alpha}{\partial t^i}(0)) \\ &= (\sigma^\alpha(t), \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}(t)). \end{aligned}$$

Por otro lado la composición $X \circ \sigma$ se escribe

$$\begin{aligned} X \circ \sigma : U \subset \mathbf{R}^k &\rightarrow M \rightarrow T_k^1 M \\ (t^i) &\rightarrow (\sigma^\alpha(t^i)) \rightarrow (\sigma^\alpha(t^i), X_i^\alpha(\sigma^\alpha(t^i))) \end{aligned}$$

de manera que $\sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow M$ es una sección integral del campo de k -vectores X sobre M si y sólo si

$$X_i^\alpha(\sigma(t)) = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}(t)$$

lo que equivale a que (id, σ) sea sección integral del campo de jets $id \times X$. \square

Nota 2.4.1 Las ecuaciones

$$X_i^\alpha(\sigma(t)) = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}(t)$$

que determinan las condiciones en que una aplicación de un abierto $U \subset \mathbf{R}^k$ en M es una sección integral de un campo de k -vectores, son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales y por lo tanto pueden no existir soluciones, es decir, un campo de k -vectores puede no tener secciones integrales.

Definición 2.4.3 Un campo de k -vectores $X : M \rightarrow T_k^1 M$ se dice integrable si en cada punto $p \in M$ existe una sección integral $\sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow M$ tal que $\sigma(0) = p$.

Nota 2.4.2 Sea $(t_i, x^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq m)$ el sistema de coordenadas canónico de $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m$. Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden del tipo:

$$(2.4.18) \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial t_i} = f_i^\alpha(x^\beta),$$

con $x = (x^1, \dots, x^m) : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m$ y $f = (f_i^\alpha) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m$ puede interpretarse localmente como un campo de k -vectores sobre \mathbf{R}^m .

En un entorno U de cada punto $x \in \mathbf{R}^m$ podemos definir el siguiente campo de k -vectores:

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbf{R}^m &\longrightarrow T_k^1 \mathbf{R}^m|_U \\ x &\longrightarrow X(x) = (X_1(x), \dots, X_k(x)), \end{aligned}$$

con

$$X_i(x) = f_i^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x).$$

De este modo una aplicación,

$$\sigma : V \subset \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^m,$$

con V un entorno de $0 \in \mathbf{R}^k$ y $\sigma(0) = x$, es una sección integral de X si y sólo si

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t_i}(t) = f_i^\alpha(\sigma(t)),$$

para todo $t \in V$, es decir, σ satisface el sistema de ecuaciones (2.4.18).

2.4.2 Conexiones

A continuación aplicamos los resultados generales [S3] de caracterización de la integrabilidad de campos de jets por medio de conexiones en fibrados al caso de los campos de k -vectores.

Como antes, sea (E, π, M) una variedad fibrada. Veamos en primer lugar cómo se define una conexión sobre esta variedad fibrada. Para ello empezamos recordando las definiciones de subespacio y subfibrado verticales.

Definición 2.4.4 Dado el fibrado (E, π, M) , el subconjunto

$$V\pi = \{X \in TE / \pi_*(X) = 0 \in TM\}$$

se denomina el conjunto de vectores verticales a π . $V\pi$ es una subvariedad de TE . El triple $(V\pi, (\pi_E)|_{V\pi}, E)$ con π_E la proyección canónica del fibrado tangente a E , es un subfibrado de π_E que se llama el subfibrado vertical de π .

Para cada punto $z \in E$ el conjunto

$$V_z = \{X \in V\pi / X \in T_z E\},$$

es un subespacio vectorial de $T_z E$ que se denomina subespacio vertical en z .

Entonces:

Definición 2.4.5 Una conexión sobre (E, π, M) es un campo de tensores Γ , de tipo $(1, 1)$ sobre E tal que

$$(2.4.19) \quad \Gamma^2 = I,$$

y tal que el subespacio propio en cada punto $z \in E$ correspondiente al valor propio -1 es el subespacio vertical V_z .

Se definen las proyecciones vertical y horizontal asociadas a una conexión Γ como los campos de tensores v y h sobre E , de tipo $(1, 1)$, dados por

$$v = \frac{1}{2}(I - \Gamma), \quad h = \frac{1}{2}(I + \Gamma).$$

Por ser Γ una conexión, utilizando (2.4.19) se deduce que v y h satisfacen

$$v + h = I, \quad v^2 = v, \quad h^2 = h, \quad vh = hv = 0.$$

Si además definimos el subfibrado de TE , $H = \text{Im } h$, entonces se verifica que

$$TE = H \oplus V.$$

donde $V = \text{Im } v$. H se denomina la distribución horizontal y $H_e = h_e(T_e E)$ el subespacio horizontal en e . Es evidente que una conexión consiste en dar un subespacio horizontal en cada punto.

Dada una conexión Γ , su proyector horizontal h se expresa localmente, en coordenadas fibradas (x^i, u^α) , por:

$$(2.4.20) \quad \begin{aligned} h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \\ h\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Las funciones Γ_α^i se llaman componentes de la conexión.

Equivalentemente puede escribirse:

$$\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + 2\Gamma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \otimes dt_i - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\alpha.$$

Se verifica también, [S3], que existe una correspondencia biyectiva entre campos de 1-jets, es decir, secciones de la proyección $\pi_{1,0} : J^1\pi \rightarrow E$, y conexiones sobre E .

En tal correspondencia, a un campo de jets $\gamma : E \rightarrow J^1\pi$, dado por $\gamma(x^i, u^\alpha) = (x^i, u^\alpha, \Gamma_\gamma^\alpha)$, le corresponde una conexión Γ_γ tal que su proyector horizontal se escribe, en coordenadas locales, por:

$$h = dx^i \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right).$$

Si Γ es una conexión sobre E con proyecciones vertical y horizontal v y h respectivamente, entonces

Definición 2.4.6 La curvatura de la conexión Γ es el campo de tensores de tipo $(1, 2)$ en E definido por $R_\Gamma = -\frac{1}{2}[h, h]$ donde $[h, h]$ es el corchete de Nijenhuis de h .

Finalmente se caracteriza la integrabilidad de un campo de jets del modo siguiente.

Proposición 2.4.2 Sea γ un campo de jets sobre $\pi : E \rightarrow M$ y sea Γ_γ la conexión sobre E asociada a γ . Entonces se verifica que γ es integrable si y sólo si Γ_γ es una conexión llana, es decir, si y sólo si $N_h = 0$.

Demostración

Sea un sistema de coordenadas locales (x^i, u^α) sobre E adaptadas a la estructura fibrada (E, π, M) .

Operando en coordenadas locales se obtienen fácilmente las siguientes igualdades:

$$R_{\bar{\Gamma}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = 0,$$

$$R_{\bar{\Gamma}}\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) = 0,$$

$$R_{\bar{\Gamma}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Gamma_j^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial \Gamma_j^\alpha}{\partial u^\beta}\right) - \left(\frac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial x^j} + \Gamma_j^\beta \frac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial u^\beta}\right)\right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

De este modo,

$$R_{\bar{\Gamma}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \Gamma_j^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial \Gamma_j^\alpha}{\partial u^\beta}\right) = \left(\frac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial x^j} + \Gamma_j^\beta \frac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial u^\beta}\right),$$

o, equivalentemente,

$$R_{\bar{\Gamma}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\Gamma^\alpha \circ \phi)^i}{\partial x^j} = \frac{(\Gamma^\alpha \circ \phi)^j}{\partial x^i},$$

que es la condición de integrabilidad de la ecuación,

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} = \Gamma_i^\alpha \circ \phi$$

y por lo tanto la condición de integrabilidad del campo de jets γ . \square

Consideraremos el caso particular de la variedad fibrada $(\mathbf{R}^k \times M, \pi, \mathbf{R}^k)$. Utilizando que un campo de jets de esta variedad fibrada equivale a un campo de k -vectores sobre M , se obtiene que:

Proposición 2.4.3 *Existe una correspondencia biyectiva entre campos de k -vectores sobre M y conexiones sobre el fibrado $(\mathbf{R}^k \times M, \pi, \mathbf{R}^k)$.*

Como sabemos por la Proposición 2.4.1, la integrabilidad del campo de k -vectores X equivale a la integrabilidad del campo de jets asociado. Deducimos, utilizando la Proposición 2.4.2, que la integrabilidad de un campo de k -vectores sobre M está caracterizada por el carácter llano de la conexión asociada sobre $\mathbf{R}^k \times M$.

Proposición 2.4.4 *Sea $X : M \rightarrow T_k^1 M$ un campo de k -vectores sobre M y sea Γ_X la conexión sobre $(\mathbf{R}^k \times M, \pi, \mathbf{R}^k)$ asociada. El campo X es integrable si y sólo si la conexión asociada Γ_X tiene curvatura nula.*

Nota 2.4.3 Además de la interpretación local descrita en la Nota 2.4.2, un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden del tipo (2.4.18),

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial t_i} = f_i^\alpha(x^\beta),$$

se interpreta geoméricamente también como una conexión. Basta considerar la fibración

$$\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^k,$$

con coordenadas $(t_i, x^\alpha, 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq m)$ y tomar la conexión sobre $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m$ con proyector horizontal h dado por:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial t_i} + f_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ h\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) &= 0, \end{aligned}$$

de modo que $\text{Im } h = \left\langle \frac{\partial}{\partial t_i} + f_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\rangle_{1 \leq i \leq k}$ es la distribución horizontal H de Γ .

De este modo una sección local $\phi = \phi(t_i) = (t_i, \phi^\alpha)$ definida en un entorno cúbico W de $0 \in \mathbf{R}^k$, es una sección horizontal para Γ si y sólo si,

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t_i} = f_i^\alpha(\phi^\beta),$$

es decir, si y sólo si es una solución de (2.4.18) en un abierto $W \subset \mathbf{R}^k$.

2.4.3 k -semisprays

Sea $M = T_k^1 Q$ y consideremos el fibrado tangente de las k^1 -velocidades de M , $T_k^1 M = T_k^1 T_k^1 Q$. Estudiaremos un tipo particular de campo de k -vectores en M .

Definición 2.4.7 Una k -semispray sobre Q es un campo de k -vectores sobre $T_k^1 Q$, es decir, una sección $\xi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 T_k^1 Q$ de la proyección $\pi_{T_k^1 Q}^k : T_k^1 T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$, tal que ξ es también una sección del fibrado vectorial $T_k^1 \pi_Q^k : T_k^1 T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$, con $T_k^1 \pi_Q^k$ definida según la Definición 2.1.1.

Si (u^α) es un sistema de coordenadas en Q y (u^α, v_i^α) es el sistema de coordenadas inducido en $T_k^1 Q$, denotamos por $(u^\alpha, v_i^\alpha, u_{i,j}^\alpha, v_{i,j}^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$ las coordenadas inducidas en $T_k^1 T_k^1 Q$ por las ecuaciones (2.1.1).

Utilizando la identificación Λ definida en (2.1.2) se deduce que, en cada punto de $T_k^1 Q$, la sección ξ se puede identificar con una k -tupla (ξ_1, \dots, ξ_k) de vectores tangentes a $T_k^1 Q$ que representaremos localmente por

$$\xi_j = \xi_j^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \xi_{i,j}^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha},$$

para todo $1 \leq j \leq k$.

Entonces, localmente, el k -semispray ξ se escribe

$$(2.4.21) \quad \xi(u^\alpha, v_i^\alpha) = (u^\alpha, v_i^\alpha, \xi_j^\alpha, \xi_{i,j}^\alpha).$$

Sabemos que la proyección $\pi_{T_k^1 Q}^k : T_k^1 T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$ se escribe localmente

$$(2.4.22) \quad \pi_{T_k^1 Q}^k(u^\alpha, v_i^\alpha, u_j^\alpha, v_{i,j}^\alpha) = (u^\alpha, v_i^\alpha)$$

y puesto que $\pi_Q^k(u^\alpha, v_i^\alpha) = (u^\alpha)$, entonces la prolongación $T_k^1 \pi_Q^k$ se escribe localmente

$$(2.4.23) \quad T_k^1 \pi_Q^k(u^\alpha, v_i^\alpha, u_j^\alpha, v_{i,j}^\alpha) = (u^\alpha, u_j^\alpha).$$

Así, por ser ξ un k -semispray sabemos que

$$\pi_{T_k^1 Q}^k(\xi(u^\alpha, v_i^\alpha)) = T_k^1 \pi_Q^k(\xi(u^\alpha, v_i^\alpha))$$

y combinando (2.4.21), (2.4.22) y (2.4.23) se obtiene que ξ es un k -semispray si y sólo si

$$\xi_i^\alpha = v_i^\alpha,$$

para todo $1 \leq \alpha \leq n$ y para todo $1 \leq i \leq k$.

De esta forma el k -semispray ξ se escribe localmente

$$(2.4.24) \quad \xi(u^\alpha, v_i^\alpha) = (u^\alpha, v_i^\alpha, v_j^\alpha, \xi_{i,j}^\alpha).$$

Definición 2.4.8 *El campo de k -vectores de Liouville sobre $T_k^1 Q$ es el campo de k -vectores $C = (C_1, \dots, C_k)$ donde cada C_i , $1 \leq i \leq k$, es el campo de vectores sobre $T_k^1 Q$ definido por*

$$C_i(u) = (u_i)_u^{(i)}$$

para todo $u = (u_1, \dots, u_k) \in T_k^1 Q$, para todo $1 \leq i \leq k$ y con el (i) -levantamiento de u_i definido por (2.1.4).

Los campos de vectores C_i son los campos de vectores canónicos de los fibrados vectoriales $\mu^i : T_k^1 Q \rightarrow T_{k-1}^1 Q$ descritos en la Sección 2.2.2.

Una consecuencia inmediata de (2.4.24) es el siguiente resultado.

Proposición 2.4.5 *Un campo de k -vectores $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ sobre $T_k^1 Q$ es un k -semispray si y sólo si*

$$J_i(\xi_i) = C_i, \quad \forall 1 \leq i \leq k,$$

donde (J_1, \dots, J_k) es la estructura casi k -tangente canónica sobre $T_k^1 Q$.

Se puede probar, de modo análogo al caso del segundo fibrado tangente, [Go], la existencia de una involución canónica del segundo fibrado tangente de las k^1 -velocidades.

Teorema 2.4.1 *Existe un difeomorfismo s^k de $T_k^1 T_k^1 Q$ sobre sí mismo, y uno solo, verificando las siguientes propiedades:*

- i) s^k es una involución de $T_k^1 T_k^1 Q$, es decir $(s^k)^2 = id$.*
- ii) s^k es un isomorfismo de fibrados vectoriales entre los fibrados $(T_k^1 T_k^1 Q, \pi_{T_k^1 Q}^k, T_k^1 Q)$ y $(T_k^1 T_k^1 Q, T_k^1 \pi_Q^k, T_k^1 Q)$.*
- iii) Para toda función $f : Q \rightarrow Q$ se verifica que $T_k^1 T_k^1 f \circ s^k = T_k^1 T_k^1 f$.*

Demostración

Utilizando las propiedades *i)* y *ii)* se deduce que, localmente, s^k debe estar definida necesariamente por

$$(2.4.25) \quad (u^\alpha, v_i^\alpha, u_{i,j}^\alpha, v_{i,j}^\alpha) \rightarrow (u^\alpha, u_{i,j}^\alpha, v_i^\alpha, v_{i,j}^\alpha).$$

Recíprocamente, esta expresión local determina, para cada abierto $U \subset Q$, un difeomorfismo de $\tau_{T_k^1 Q}^{-1} \tau_Q^{-1}(U)$ sobre sí mismo que verifica las condiciones *i)* y *ii)*.

Además, teniendo en cuenta la Definición 2.1.1, si f es una función diferenciable sobre U , entonces $T_k^1 T_k^1 f \circ s^k = T_k^1 T_k^1 f$. \square

A partir de la expresión local (2.4.25) y de la Definición 2.4.7 se deducen los siguientes resultados.

Proposición 2.4.6 *Un campo de k -vectores $\xi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 T_k^1 Q$ es un k -semispray si y sólo si*

$$s^k \circ \xi = s^k.$$

Los siguientes resultados sobre k -semisprays e integrabilidad de k -semisprays aparecen en [Gü]. En ese artículo los k -semisprays se denominan secciones de segundo orden y sus secciones integrales se denominan soluciones.

Dado que un k -semispray es un campo de k -vectores sobre $T_k^1 Q$, utilizando la Definición 2.4.2, se deduce que una sección integral de un k -semispray ψ es una aplicación $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$ tal que

$$\xi \circ \sigma = \sigma^{(1)}.$$

Además, de acuerdo con la Definición 2.4.3, un k -semispray ξ se dice integrable si, en cada punto $u \in T_k^1 Q$ existe una sección integral de ξ tal que $\sigma(0) = u$.

Se verifica el siguiente resultado

Proposición 2.4.7 *Un campo de k -vectores integrable $\xi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 T_k^1 Q$ es un k -semispray si y sólo si para toda sección integral $\sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$ se verifica que*

$$(\pi_Q^k \circ \sigma)^{(1)} = \sigma.$$

Demostración

Las expresiones locales de ξ , σ y $\sigma^{(1)}$ son:

$$\begin{aligned} \xi : T_k^1 Q &\longrightarrow T_k^1 T_k^1 Q \\ (u^\alpha, v_i^\alpha) &\longrightarrow (u^\alpha, v_i^\alpha, \xi_i^\alpha, \xi_{i,j}^\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma : U \subset \mathbf{R}^k &\longrightarrow T_k^1 Q \\ t &\longrightarrow (\sigma^\alpha(t), \sigma_i^\alpha(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} : U \subset \mathbf{R}^k &\longrightarrow T_k^1 Q \\ t &\longrightarrow (\sigma^\alpha(t), \sigma_i^\alpha(t), \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}(t), \frac{\partial \sigma_i^\alpha}{\partial t^j}(t)). \end{aligned}$$

Si σ es una sección integral de ξ , se verifica:

$$(2.4.26) \quad \xi_i^\alpha = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}, \quad \xi_{i,j}^\alpha = \frac{\partial \sigma_i^\alpha}{\partial t^j}.$$

Por otro lado las expresiones locales de $\pi_Q^k \circ \sigma$ y de $(\pi_Q^k \circ \sigma)^{(1)}$ son

$$\begin{aligned} \pi_Q^k \circ \sigma : U \subset \mathbf{R}^k &\longrightarrow Q \\ t &\longrightarrow (\sigma^\alpha(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi_Q^k \circ \sigma)^{(1)} : U \subset \mathbf{R}^k &\longrightarrow T_k^1 Q \\ t &\longrightarrow (\sigma^\alpha(t), \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}(t)). \end{aligned}$$

Utilizando (2.4.26) se deduce que ξ es un k -semispray si y solo si $\sigma_i^\alpha = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t^i}$, pero, por las expresiones locales anteriores, esto es equivalente a que

$$\sigma = (\tau_Q^k \circ \sigma)^{(1)},$$

lo que prueba la proposición. \square

También utilizando las expresiones locales correspondientes se prueba que

Proposición 2.4.8 *Sea $\xi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 T_k^1 Q$ un k -semispray integrable. Entonces, para cada punto $z \in T_k^1 T_k^1 U$ existe una aplicación $\sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ tal que $(\sigma^{(1)})^{(1)} = \xi \circ \sigma^{(1)}$ y $(\sigma^{(1)})^{(1)}(0) = z$. σ se llama solución de ξ .*

Demostración

Dada $\psi : \mathbf{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$ una sección integral de ξ basta tomar $\sigma = \tau_Q^k \circ \psi$. \square

Nota 2.4.4 Sea un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden del tipo,

$$(2.4.27) \quad \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t_i \partial t_j} = f_{ij}^\alpha(x^\beta, \frac{\partial x^\beta}{\partial t_i}).$$

Reescribimos este sistema como,

$$(2.4.28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t_i} &= v_i^\alpha \\ \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial t_j} &= f_{ij}^\alpha(x^\beta, v_i^\beta). \end{aligned}$$

Si tomamos la fibración $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{km} \rightarrow \mathbf{R}^m$ con coordenadas adaptadas $(x^\alpha, x_\alpha^i, 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq m)$, el sistema (2.4.28) puede identificarse localmente con un campo de k -vectores,

$$X : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{km} \rightarrow T_k^1(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{km}),$$

de modo que las soluciones de (2.4.28) son funciones,

$$\phi : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{km},$$

$\phi = \phi(x^i) = (\phi^\alpha, \phi_\alpha^i)$ que son secciones integrales de X .

Puesto que,

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} = \phi_\alpha^i,$$

es inmediato comprobar que X es un k -semispray y las soluciones de (2.4.28) son las proyecciones a abiertos de \mathbf{R}^m de las secciones integrales $\phi = (\phi^\alpha, \phi_\alpha^i)$ de X .

Así, de modo local, podemos interpretar geoméricamente un sistema del tipo (2.4.28) como un k -semispray sobre abiertos de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{km}$.

Capítulo 3

Formalismo hamiltoniano.

El objetivo principal de esta sección es obtener una descripción geométrica de las ecuaciones de Hamilton asociadas a un problema variacional integral múltiple, utilizando la estructura geométrica de las variedades k -simplécticas.

3.1 Formas polisimplécticas

En esta sección describimos las formas polisimplécticas en el sentido de Günther [Gü] y comprobamos que una forma polisimpléctica estándar no es más que una estructura k -simpléctica como las estudiadas en el Capítulo 1.

Si la forma polisimpléctica no es estándar no tendremos asegurada la existencia de una distribución sobre M verificando las propiedades de la Definición 1.1.1.

Definición 3.1.1 *Una 2-forma Ω sobre M , \mathbf{R}^k -valuada, cerrada y no degenerada en el sentido de que, si $X \in \chi(M)$ es tal que $\iota_X \Omega = 0$ entonces necesariamente $X = 0$, se llama forma polisimpléctica. El par (M, Ω) se llama variedad polisimpléctica.*

El ejemplo canónico de estructura polisimpléctica considerado por Günther [Gü] es la variedad fibrada $\text{Hom}(TQ, \mathbf{R}^k)$ sobre Q que Günther llama fibrado homogéneo de cojets, variedad que no es más que el fibrado cotangente de las k^1 -covelocidades $(T_k^1)^*Q$, que, como vimos en el Capítulo 1, es el modelo de las variedades k -simplécticas.

Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 T(T_k^1)^*Q & \xrightarrow{T\tau_Q^k} & TQ \\
 \pi_{(T_k^1)^*Q} \downarrow & & \downarrow \pi_Q \\
 (T_k^1)^*Q & \xrightarrow{\tau_Q^k} & Q.
 \end{array}$$

La estructura polisimpléctica canónica sobre $(T_k^1)^*Q$ es la 2-forma \mathbf{R}^k -valuada definida del siguiente modo:

Sea $X_\theta \in T_\theta((T_k^1)^*Q)$ con $\theta = \pi_{(T_k^1)^*Q}(X_\theta)$ de forma que $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in (T_k^1)^*Q$. Entonces sobre $(T_k^1)^*Q$ se define la 1-forma canónica Θ_0 por:

$$\begin{aligned}
 \Theta_0(X_\theta) &= \theta(T\tau_Q^k(X_\theta)) \\
 &= (\theta_1(T\tau_Q^k(X_\theta)), \dots, \theta_k(T\tau_Q^k(X_\theta))) \in \mathbf{R}^k.
 \end{aligned}$$

Definición 3.1.2 Θ_0 es la 1-forma canónica y $\Omega_0 = -d\Theta_0$ es la forma polisimpléctica canónica sobre $(T_k^1)^*Q$. En efecto Ω_0 es cerrada (es exacta) y no degenerada.

Es fácil comprobar que si $(u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k)$ es un sistema de coordenadas adaptadas en $(T_k^1)^*Q$ entonces las expresiones locales de Θ_0 y Ω_0 son

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned}
 \Theta_0 &= \sum_{i=1}^k (\Theta_0)^i e_i, & \text{con} & \quad (\Theta_0)^i = \sum_{\alpha} u_\alpha^i du^\alpha, \\
 \Omega_0 &= \sum_{i=1}^k (\Omega_0)^i e_i, & \text{con} & \quad (\Omega_0)^i = \sum_{\alpha} du^\alpha \wedge du_\alpha^i,
 \end{aligned}$$

donde $\{e_1, \dots, e_k\}$ es la base canónica de \mathbf{R}^k .

Por último, para una variedad diferenciable M , se definen en [Gü] las formas polisimplécticas estándares.

Definición 3.1.3 Una forma polisimpléctica Ω sobre una variedad M se llama una forma estándar si y sólo si M admite un atlas de cartas canónicas para Ω , es decir, cartas en las que localmente Ω se escribe en la forma (3.1.1). (M, Ω) se llamará entonces una variedad polisimpléctica estándar.

Así, dada una forma polisimpléctica estándar Ω sobre una variedad M podemos escribir $\Omega = \sum_{i=1}^k \Omega_i e_i$ donde cada Ω_i es una 2-forma \mathbf{R} -valuada sobre M . Dado un sistema de coordenadas adaptadas a Ω podemos definir localmente una distribución

V sobre M de dimensión nk , por las condiciones $du^1 = \dots = du^n = 0$. Entonces es fácil comprobar que $(\Omega_1, \dots, \Omega_k, V)$ es una estructura k -simpléctica sobre M .

Si en el modelo $(T_k^1)^*Q$ se considera la estructura k -simpléctica canónica $((\omega_1)_0, \dots, (\omega_k)_0, V)$ descrita en el Ejemplo 1.1.1 y definimos la 2-forma \mathbf{R}^k -valuada Ω_0 por

$$\Omega_0 = (\omega_1)_0 e_1 + \dots + (\omega_k)_0 e_k$$

es inmediato comprobar, utilizando las expresiones locales (1.1.3) y (3.1.1), que Ω_0 es precisamente la forma polisimpléctica canónica de $(T_k^1)^*Q$.

Para una variedad k -simpléctica arbitraria $(M, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ se demuestra, utilizando la primera condición de (1.1.4), que:

Proposición 3.1.1 *Si $(M, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ es una variedad k -simpléctica y definimos sobre M la 2-forma \mathbf{R}^k -valuada Ω por*

$$\Omega = \omega_1 e_1 + \dots + \omega_k e_k$$

entonces Ω es una forma polisimpléctica sobre M . Además, del Teorema 1.1.1, se deduce que Ω es una forma polisimpléctica estándar.

De esta manera hemos probado que una estructura k -simpléctica sobre M equivale a una forma polisimpléctica estándar.

A continuación definimos los morfismos musicales que en la siguiente sección utilizaremos para expresar de modo global las ecuaciones de Hamilton sobre una variedad k -simpléctica.

Puesto que toda variedad k -simpléctica es de hecho una variedad polisimpléctica estándar, podemos considerar sobre ella los morfismos musicales Ω^b y Ω^\sharp definidos por Günther para este tipo de variedades.

Así, para una variedad k -simpléctica $(M, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$, definimos,

$$\begin{aligned} \Omega^b : TM &\longrightarrow (T_k^1)^*M \equiv T^*M \oplus \dots \oplus T^*M \\ X &\longrightarrow \Omega^b(X) \end{aligned}$$

del modo siguiente.

Para cada $1 \leq i \leq k$, si $X \in T_x M$, entonces para cualquier $Y \in T_x M$ se define:

$$(3.1.2) \quad (\Omega^b(X))_i(x)(Y) = \omega_i(x)(X, Y),$$

de modo que,

$$\Omega^b(X) = (\Omega^b(X)_1, \dots, \Omega^b(X)_k) \in (T_k^1)^*M.$$

Calculemos ahora la expresión local de Ω^b . Sea $(x^\alpha, x_\alpha^i; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$ un sistema de coordenadas locales sobre M adaptado a la estructura k -simpléctica $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$. En estas coordenadas:

$$\omega_i = dx^\alpha \wedge dx_\alpha^i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, de modo que utilizando (3.1.2) obtenemos la siguiente expresión local para Ω^b :

$$(\Omega^b(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}))_i(\frac{\partial}{\partial x^\beta}) = 0,$$

$$(\Omega^b(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}))_i(\frac{\partial}{\partial x_\beta^j}) = \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta},$$

con lo que

$$(3.1.3) \quad \Omega^b(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = (dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^k).$$

Por otro lado:

$$(\Omega^b(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}))_i(\frac{\partial}{\partial x^\beta}) = -\delta^{ij} \delta_{\alpha\beta},$$

$$(\Omega^b(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}))_i(\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}) = 0,$$

con lo que,

$$(3.1.4) \quad \Omega^b(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}) = (0, \dots, -dx^\alpha, \dots, 0),$$

con $-dx^\alpha$ situado en la posición j -ésima.

Por lo tanto, si $X \in TM$ se escribe localmente como

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

entonces:

$$(3.1.5) \quad \Omega^b(X) = (X^\alpha dx_\alpha^1 - X_\alpha^1 dx^\alpha, \dots, X^\alpha dx_\alpha^k - X_\alpha^k dx^\alpha).$$

La aplicación Ω^\sharp

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp : T_k^1 M &\longrightarrow T^*M \\ X &\longrightarrow \Omega^\sharp(X),\end{aligned}$$

está definida como sigue.

Si $X = (X_1, \dots, X_k) \in (T_k^1)_x M$ entonces $\Omega^\sharp(X) \in T_x^* M$ es el covector dado por

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp(X)(Y) &= -\text{traza}((\Omega^b(Y))_i(x)(X_j)) \\ &= -\sum_{i=1}^k (\Omega^b(Y))_i(x)(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \omega_i(x)(X_i, Y),\end{aligned}$$

para cualquier $Y \in T_x M$.

Veamos cual es la expresión local de Ω^\sharp en el sistema de coordenadas locales adaptadas (x^α, x_α^i) .

Si $X = (X_1, \dots, X_k)$ está dado por:

$$(3.1.6) \quad X_i = (X_i)^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + (X_i)_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j},$$

entonces

$$\begin{aligned}(\Omega^b(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}))_i(X_j) &= (X_j)_\alpha^i, \\ (\Omega^b(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}))_i(X_j) &= -\delta_{ij} X_j^\alpha,\end{aligned}$$

de modo que,

$$\begin{aligned}(3.1.7) \quad \Omega^\sharp(X) &= \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) \\ &= -\sum_{i=1}^k (X_i)_\alpha^i dx^\alpha + \sum_{i=1}^k (X_i)^\alpha dx_\alpha^i.\end{aligned}$$

Nota 3.1.1 Si $k = 1$ entonces $\Omega^\sharp = \Omega^b$ es el isomorfismo b de TM en T^*M determinado por la forma simpléctica.

3.2 Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton de la Mecánica Clásica son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del tipo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{dq_i}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= -\frac{dp_i}{dt}\end{aligned}$$

donde (q^i, p_i) es un sistema de coordenadas del espacio fase dado por las posiciones y los momentos del sistema mecánico.

La geometría simpléctica permite dar una versión intrínseca de estas ecuaciones del modo siguiente: En una variedad simpléctica (M, ω) la 2-forma simpléctica permite definir el isomorfismo \flat por:

$$\begin{aligned}TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longrightarrow \flat(X) = \iota_X \omega\end{aligned}$$

el cual permite asociar a cada función $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ (función hamiltoniana) un campo de vectores X_H , llamado campo de vectores hamiltoniano correspondiente a H , tal que las curvas integrales de X_H satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Hamilton. En efecto X_H está definido por la ecuación $\iota_{X_H} \omega = dH$.

Las ecuaciones de Hamilton clásicas asociadas a un problema variacional integral múltiple, son un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden de la forma:

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= -\sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial t_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_i^\alpha} &= \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial t_i}.\end{aligned}$$

El objetivo de esta sección es encontrar una versión intrínseca de estas ecuaciones sobre variedades k -simplécticas.

De hecho, si $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ es una función hamiltoniana, el morfismo Ω^\sharp anteriormente descrito nos permite asociar a H campos de k -vectores (X_1, \dots, X_k) sobre M tales que

$$\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dH.$$

Si existe alguna solución (X_1, \dots, X_k) integrable, entonces sus secciones integrales satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Hamilton.

3.2.1 Hamiltonianos \mathbf{R} -valuados

En primer lugar veremos que dado $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ existen siempre soluciones de la ecuación $\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dH$.

En segundo lugar veremos que, en caso de existir, las secciones integrales de (X_1, \dots, X_k) satisfacen las ecuaciones de Hamilton.

En variedades k -simpléticas, dada $H : M \rightarrow \mathbf{R}$, para cada $x \in M$ se tiene $dH(x) \in T_x^*M$ y se trata de encontrar una colección de k -vectores $X_x = ((X_1)_x, \dots, (X_k)_x) \in (T_k^1)_x M$ tales que

$$\Omega^\sharp(X_x) = dH(x).$$

Consideramos el subconjunto $(\Omega^\sharp)^{-1}(dH) \subset T_k^1 M$ definido por

$$(\Omega^\sharp)^{-1}(dH) = \{X \in T_k^1 M / \Omega^\sharp(X) = dH\}.$$

En general, dH no pertenece necesariamente a la imagen de Ω^\sharp , lo que implica que no existirán necesariamente soluciones de la ecuación $\Omega^\sharp(X_x) = dH(x)$.

Se verifica el siguiente resultado:

Proposición 3.2.1 *El conjunto $(\Omega^\sharp)^{-1}(dH)$ es un espacio fibrado afín modelado en el espacio subfibrado vectorial $\ker \Omega^\sharp \subset T_k^1 M$*

$$\begin{array}{ccc} \ker \Omega^\sharp & \xrightarrow{\quad} & T_k^1 M \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

Demostración

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} r : \quad (\Omega^\sharp)^{-1}(dH) \times \ker \Omega^\sharp &\quad \rightarrow \quad (\Omega^\sharp)^{-1}(dH) \\ ((X_1, \dots, X_k), (Y_1, \dots, Y_k)) &\quad \rightarrow \quad (X_1, \dots, X_k) + (Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad = (X_1 + Y_1, \dots, X_k + Y_k). \end{aligned}$$

r está bien definida y además, en cada punto $x \in M$, r_x es una acción libre y transitiva del espacio vectorial $\ker \Omega^\sharp(x)$ sobre $(\Omega^\sharp)^{-1}(dH(x))$. \square

Como consecuencia de este resultado podemos asegurar que las soluciones (X_1, \dots, X_k) de

$$(3.2.9) \quad \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dH$$

no son únicas, pues cualquier elemento de $\ker \Omega^\sharp$ sumado a una solución de (3.2.9) nos da otra solución de esta ecuación.

Sea $X_H = (X_1, \dots, X_k)$ una solución de (3.2.9) tal que cada X_i se escribe localmente por (3.1.6). Para una función hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ se verifica:

$$(3.2.10) \quad dH = \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^i.$$

Igualando las expresiones locales (3.1.7) y (3.2.10) correspondientes a $\Omega^\sharp(X_H)$ y a dH respectivamente, obtenemos,

$$(3.2.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k (X_i)_\alpha^i, \\ \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} &= (X_i)^\alpha. \end{aligned}$$

Recíprocamente, utilizando estas condiciones, podemos construir, en cada entorno de un punto de M , un campo de k -vectores local que es solución de la ecuación (3.2.9).

Bastaría definir (X_1, \dots, X_k) por:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \\ X_i &= \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \end{aligned}$$

para todo $i > 1$.

Evidentemente esta definición no es única.

Veamos como, mediante una partición de la unidad, podemos encontrar, a partir de soluciones locales, un $X_H \in T_k^1 M$ globalmente definido y verificando, $\Omega^\sharp(X_H) = dH$ en todo M .

Para ello, sea $\{U_a\}_{a \in A}$ un recubrimiento localmente finito de M de modo que en cada abierto U_a existe $X_{H_a} \in T_k^1 U_a$ verificando

$$(3.2.12) \quad \Omega^\sharp(X_{H_a})(x) = dH(x),$$

para todo $x \in U_a$.

Para cada $a \in A$ definimos el elemento \tilde{X}_{H_a} de $T_k^1 M$, dado en cada punto $x \in M$ por:

$$\tilde{X}_{H_a}(x) = \begin{cases} X_{H_a}(x) & \text{si } x \in U_a \\ 0 & \text{si } x \notin U_a. \end{cases}$$

Sea $\{\lambda_a\}_{a \in A}$ una partición de la unidad asociada al recubrimiento $\{U_a\}_{a \in A}$ de M .

Consideramos X_H sección global de $T_k^1 M$ definido por:

$$\begin{aligned} X_H : M &\rightarrow T_k^1 M \\ x &\rightarrow X_H(x) = \sum_A (\lambda_a(\tilde{X}_{H_a}))(x) = \sum_A \lambda_a(x)(\tilde{X}_{H_a})(x) \end{aligned}$$

Veamos que, así definido, X_H satisface la condición $\Omega^\sharp(X_H) = dH$ en todo M . De hecho $\Omega^\sharp(X_H)$ es la sección de T^*M definida por

$$\begin{aligned} \Omega^\sharp(X_H) : M &\rightarrow T^*M & T_x M \\ x &\rightarrow \Omega^\sharp(X_H)(x) : & \downarrow \\ & & \mathbf{R}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega^\sharp(X_H)(x)(Y) &= -\text{traza}((\Omega^b(Y))_i(x)(X_H(x))_j) \\ &= -\sum_{i=1}^k (\Omega^b(Y))_i(x)(X_H(x))_i \\ &= \sum_{i=1}^k \omega_i(x) \left(\sum_A \lambda_a(x)(\tilde{X}_{H_a}(x))_i, Y \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_A \lambda_a(x) \omega_i(x) ((\tilde{X}_{H_a}(x))_i, Y) \\ &= \sum_A \lambda_a(x) \sum_{i=1}^k \omega_i(x) ((\tilde{X}_{H_a}(x))_i, Y) \\ &= dH(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in M$, teniendo en cuenta que $\sum_A \lambda_a(x) = 1$ y (3.2.12).

Los campos de k -vectores sobre una variedad no son, en general, integrables, es decir, no poseen en general secciones integrales.

Supongamos que X_H es una solución integrable de la ecuación (3.2.9). Por lo tanto existe una sección ψ dada localmente por:

$$\begin{aligned} \psi : U \subset \mathbf{R}^k &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_k) &\longrightarrow (\psi^\alpha(t_1, \dots, t_k), \psi_\alpha^i(t_1, \dots, t_k)), \end{aligned}$$

y que verifica,

$$(3.2.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t_i} &= (X_i)^\alpha, \\ \frac{\partial \psi_\alpha^j}{\partial t_i} &= (X_i)_\alpha^j, \end{aligned}$$

de modo que las ecuaciones (3.2.11) toman ahora la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial t_i} \\ \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} &= \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t_i}. \end{aligned}$$

Como vemos, las secciones integrales de X_H , en caso de existir, satisfacen las ecuaciones de Hamilton (3.2.8).

Podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2 *La ecuación (3.2.9)*

$$\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dH,$$

puede considerarse como una versión intrínseca de las ecuaciones de Hamilton sobre una variedad k -simpléctica.

En el siguiente ejemplo estudiamos unas ecuaciones físicas conocidas, como son las ecuaciones de la electrostática, y comprobamos que tales ecuaciones pueden obtenerse como las ecuaciones de Hamilton (3.2.8) asociadas a una cierta aplicación hamiltoniana H .

Ejemplo 3.2.1 Sobre el espacio \mathbf{R}^3 con coordenadas (x^1, x^2, x^3) consideramos una métrica de Riemann g .

Las ecuaciones de la electrostática son [KT]

$$(3.2.14) \quad \begin{aligned} p &= *d\phi, \\ dp &= -4\pi\rho, \end{aligned}$$

donde ϕ es un campo escalar $\phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ que da el potencial eléctrico sobre \mathbf{R}^3 , p es un campo vectorial $p : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que establece el campo eléctrico sobre \mathbf{R}^3 y que puede interpretarse también como la 2-forma sobre \mathbf{R}^3 dada por:

$$p = p_1 dx^2 \wedge dx^3 - p_2 dx^1 \wedge dx^3 + p_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

ρ es la 3-forma sobre \mathbf{R}^3 que determina la densidad de carga, y que es un dato conocido, y $*$ es el operador estrella de Hodge que a cada h -forma β le asocia la $(3-h)$ -forma $*\beta$ definida, para v_1, v_2, v_3 un sistema de vectores ortonormales orientados en $T_x \mathbf{R}^3$, por

$$*\beta(v_{h+1}, \dots, v_3) = \beta(v_1, \dots, v_h).$$

En coordenadas locales las ecuaciones (3.2.14) son:

$$(3.2.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^3 g_{ij} p_j, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_j}{\partial x^j} &= -4\pi \sqrt{g} r(x), \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq 3$ y donde g_{ij} son las componentes de la métrica, $\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{ij}}$ y $r(x)$ es la función escalar sobre \mathbf{R}^3 determinada por:

$$\rho(x) = \sqrt{g} r(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

En lo que sigue suponemos que la función $r(x)$ es constante $r(x) = r$, es decir, la distribución de carga eléctrica es constante en todo \mathbf{R}^3 , y que la métrica g sobre \mathbf{R}^3 es la métrica euclídea.

La solución de las ecuaciones (3.2.15) está dada por un par de aplicaciones definidas sobre \mathbf{R}^3 , que toman valores una en \mathbf{R} y la otra en \mathbf{R}^3 , de modo que representen, respectivamente, al potencial ϕ y al campo eléctrico p .

ϕ y las componentes de $p = (p_1, p_2, p_3)$ determinan una aplicación $\psi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tal que

$$\psi = (\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3) = (\phi, p_1, p_2, p_3).$$

Si tratamos de interpretar esta aplicación ψ como la solución de las ecuaciones de Hamilton (3.2.8), entonces debemos identificar \mathbf{R}^4 con una variedad k -simpléctica de dimensión 4, como por ejemplo $\mathbf{R}^4 \equiv (T_3^1)^* \mathbf{R}$ el fibrado de cojets de aplicaciones de \mathbf{R} en \mathbf{R}^3 .

En esta situación demostramos a continuación que las ecuaciones de la electrostática se pueden obtener como las ecuaciones de Hamilton asociadas al siguiente hamiltoniano definido sobre $(T_3^1)^*\mathbf{R}$:

$$H : (T_3^1)^*\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(u, u^1, u^2, u^3) \longrightarrow H(u, u^1, u^2, u^3) = (4\pi r u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (u^i)^2),$$

con $1 \leq i, j \leq 3$.

Teniendo en cuenta la definición de H , es inmediato que:

$$\begin{aligned} (3.2.16) \quad dH &= \frac{\partial H}{\partial u} du + \frac{\partial H}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial H}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial H}{\partial u^3} du^3 \\ &= 4\pi r du + u^1 du^1 + u^2 du^2 + u^3 du^3. \end{aligned}$$

Como vimos, las soluciones de las ecuaciones de Hamilton asociadas a H son las secciones integrales de cualquier campo de 3-vectores (X_1, X_2, X_3) sobre $(T_3^1)^*\mathbf{R}$ tal que

$$(3.2.17) \quad \Omega^\sharp(X_1, X_2, X_3) = dH.$$

Si la expresión local de (X_1, X_2, X_3) es:

$$X_i = (X_i)^0 \frac{\partial}{\partial u} + (X_i)^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + (X_i)^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + (X_i)^3 \frac{\partial}{\partial u^3},$$

entonces sabemos que

$$\begin{aligned} (3.2.18) \quad \Omega^\sharp(X_1, X_2, X_3) &= -((X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3) du + (X_1)^0 du^1 \\ &\quad + (X_2)^0 du^2 + (X_3)^0 du^3, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la expresión local de (3.2.17) es

$$\begin{aligned} (3.2.19) \quad 4\pi r &= -((X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3), \\ u^i &= (X_i)^0, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq 3$.

Las soluciones de $\Omega^\sharp(X_1, X_2, X_3) = dH$ no son únicas. Cualquier elemento de $\ker \Omega^\sharp$ sumado a una solución da una nueva solución. El núcleo de Ω^\sharp está formado por los campos de 3-vectores sobre $(T_3^1)^*\mathbf{R}^3$ tales que:

$$\begin{aligned} (X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3 &= 0, \\ (X_1)^0 = (X_2)^0 = (X_3)^0 &= 0. \end{aligned}$$

Si $\psi : \mathbf{R}^3 \rightarrow (T_3^1)^*\mathbf{R}$ es una sección integral de (X_1, X_2, X_3) dada por $\psi = (\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3)$, entonces

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} = (X_j)^i$$

para $0 \leq i \leq 3$, y sustituyendo en (3.2.19) obtenemos

$$4\pi r = -\left(\frac{\partial \psi^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi^3}{\partial x_3}\right),$$

$$\psi^i = \frac{\partial \psi^0}{\partial x_i},$$

que son las ecuaciones de la electrostática de modo que ψ^0 representa el potencial eléctrico y (ψ^1, ψ^2, ψ^3) representa el campo eléctrico buscados.

En el Capítulo 1 de [J] se comprueba que la función,

$$\psi^0(x) = - \int \frac{r}{|x - x'|} d^3x',$$

con $x, x' \in \mathbf{R}^3$, es un potencial escalar solución de las ecuaciones de la electrostática. Esta sería la solución general en el caso en que las distribuciones de carga no tuviesen superficie límite alguna.

En los problemas reales aparecen, lógicamente, superficies límites con condiciones de contorno preestablecidas. También en [J] se estudian métodos para encontrar soluciones de las ecuaciones de la electrostática en algunos de estos casos.

3.2.2 Hamiltonianos \mathbf{R}^k -valuados

Se pueden considerar también (Awane [Aw1], Puta [Pu]) aplicaciones hamiltonianas $H : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbf{R}^k$. En este apartado obtendremos las ecuaciones de Hamilton para hamiltonianos \mathbf{R}^k -valuados (k -hamiltonianos) de la siguiente manera.

Teniendo en cuenta que si $H = (H^1, \dots, H^k)$ entonces $dH(x) = (dH^1(x), \dots, dH^k(x)) \in (T_k^1)^*_x Q$ definimos del siguiente modo los sistemas k -hamiltonianos.

Definición 3.2.1 Si M es una variedad k -simpléctica, un campo de vectores $X_H \in TM$ tal que $\Omega^b(X_H) = dH$, con Ω^b definida por (3.1.5), se llama sistema k -hamiltoniano asociado al k -hamiltoniano H .

En [Aw1] se prueba que la estructura local de los k -hamiltonianos sobre una variedad k -simpléctica es la siguiente

Proposición 3.2.3 Sea $H = (H^1, \dots, H^k)$ un k -hamiltoniano y sea (x^α, x_α^i) con $1 \leq \alpha \leq n$ y $1 \leq i \leq k$, un sistema coordenado local adaptado a la estructura k -simpléctica. Entonces las componentes (H^1, \dots, H^k) de H se escriben localmente como

$$H^i = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha(x^1, \dots, x^n) x_\alpha^i + \phi^i(x^1, \dots, x^n)$$

donde φ_α y ϕ^i , con $1 \leq \alpha \leq n$ y $1 \leq i \leq k$, son funciones diferenciables sobre M .

Observemos que la existencia de X_H implica la forma lineal local de H .

Veamos en este caso cómo obtener las ecuaciones de Hamilton.

Sea X_H un sistema hamiltoniano con k -hamiltoniano asociado $H \in C^\infty(M, \mathbf{R}^k)$. Sea (x^α, x_α^i) un sistema de coordenadas locales adaptadas sobre M y sea $\sigma : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbf{R} \rightarrow M$ una curva integral de X_H , es decir

$$(3.2.20) \quad X_H(\sigma(t)) = \frac{d\sigma(t)}{dt},$$

para todo $t \in \mathbf{R}$.

Localmente, $\sigma(t) = (\sigma^\alpha(t), \sigma_\alpha^i(t))$ y por lo tanto:

$$(3.2.21) \quad \frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{d\sigma^\alpha}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{d\sigma_\alpha^i}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}.$$

Ahora, utilizando de nuevo la ecuación (3.1.5), podemos escribir del siguiente modo $\Omega^b(X_H)$:

$$(3.2.22) \quad \Omega^b(X_H) = \left(\frac{d\sigma^\alpha}{dt} dx_\alpha^1 - \frac{d\sigma_\alpha^1}{dt} dx^\alpha, \dots, \frac{d\sigma^\alpha}{dt} dx_\alpha^k - \frac{d\sigma_\alpha^k}{dt} dx^\alpha \right).$$

Por otro lado, si $H = (H^1, \dots, H^k)$, entonces:

$$(3.2.23) \quad dH = \left(\frac{\partial H^1}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \frac{\partial H^1}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^i, \dots, \frac{\partial H^k}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \frac{\partial H^k}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^i \right).$$

Finalmente, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.2.20), (3.2.22) y (3.2.23), obtenemos que el campo de vectores X_H satisface la ecuación $\Omega^b(X_H) = dH$ si y sólo si sus curvas integrales σ verifican las ecuaciones de Hamilton siguientes:

$$(3.2.24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H^i}{\partial x^\alpha} &= -\frac{d\sigma_\alpha^i}{dt}, \\ \frac{\partial H^i}{\partial x_\alpha^j} &= \delta_j^i \frac{d\sigma^\alpha}{dt}, \end{aligned}$$

que son condiciones necesarias que deben verificar las curvas integrales de un sistema k -hamiltoniano asociado al k -hamiltoniano H .

Capítulo 4

Formalismo lagrangiano.

En este capítulo consideraremos funciones $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$, que llamaremos funciones lagrangianas o lagrangianos.

Veremos cómo en esta situación podemos definir una aplicación de $T_k^1 Q$ en $(T_k^1)^* Q$ que generaliza a la transformación de Legendre usual entre los fibrados tangente y cotangente. Como en el caso del fibrado tangente llamaremos lagrangianos regulares o hiperregulares a aquellos lagrangianos L para los cuales la transformación de Legendre FL es un difeomorfismo local o, respectivamente, un difeomorfismo global. En el caso de los lagrangianos regulares obtendremos las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange asociadas a un problema variacional integral múltiple ([CCI], [GS], [Gü], [KT], [Sar]):

$$(4.0.1) \quad \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0, \quad v_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial t_i}.$$

El objetivo principal de este capítulo es obtener una descripción geométrica de las ecuaciones (4.0.1) utilizando la estructura geométrica de $J_0^1(\mathbf{R}^k, Q)$.

4.1 Transformación de Legendre

Consideraremos la estructura casi k -tangente canónica (J_1, \dots, J_k) sobre $T_k^1 Q$ fibrado tangente de las k^1 -velocidades sobre Q .

Localmente, si (u^α, v_i^α) es el sistema coordenado sobre $T_k^1 Q$ definido por (2.1.1), cada J_i se escribe por

$$J_i = \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} \otimes du^\alpha,$$

como vimos en (2.1.7).

En esta situación se pueden definir sobre T_k^1Q las siguientes k derivaciones verticales ι_{J_i} con $1 \leq i \leq k$ como sigue.

Si $f \in C^\infty(T_k^1Q)$, $\omega \in \Lambda^p(T_k^1Q)$ y $X_1, \dots, X_p \in \chi(T_k^1Q)$, entonces

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} \iota_{J_i} f &= 0 \\ (\iota_{J_i} \omega)(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{a=1}^p \omega(X_1, \dots, J_i X_a, \dots, X_p). \end{aligned}$$

ι_{J_i} es así una derivación de grado 0 sobre $\Lambda(T_k^1Q)$.

También para cada $1 \leq i \leq k$ definimos una diferenciación vertical d_{J_i} sobre T_k^1Q del modo siguiente:

$$(4.1.3) \quad d_{J_i} = [\iota_{J_i}, d],$$

de modo que d_{J_i} es una antiderivación de grado 1 sobre T_k^1Q .

Así, para una función lagrangiana $L : T_k^1Q \rightarrow \mathbf{R}$, podemos definir el elemento $\beta_L = ((\beta_L)_1, \dots, (\beta_L)_k) \in (T_k^1)^*T_k^1Q$ por

$$(4.1.4) \quad (\beta_L)_i = d_{J_i} L.$$

Utilizando las condiciones (4.1.2) y (4.1.3) se comprueba que, localmente, $(\beta_L)_i$ se escribe

$$(4.1.5) \quad (\beta_L)_i = \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} du^\alpha.$$

Cada $(\beta_L)_i \in T^*T_k^1Q$ es una 1-forma semibásica sobre T_k^1Q , es decir, $(\beta_L)_i(X) = 0$ para todo campo de vectores vertical X sobre T_k^1Q .

Teorema 4.1.1 *Dada una función lagrangiana $L : T_k^1Q \rightarrow \mathbf{R}$ existe una aplicación $FL : T_k^1Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$ tal que $\tau^k \circ FL = \pi^k$.*

Demostración

De hecho, para $y \in (T_k^1Q)_x$ con $x \in Q$, $FL(y) \in ((T_k^1)^*Q)_x$ está definido por

$$(FL(y))_i(X) = (\beta_L)_i(\bar{X})$$

para cualesquiera $X \in T_xQ$ y $\bar{X} \in T_yTQ$ con $(\pi_Q)_*(\bar{X}) = X$ y para todo $1 \leq i \leq k$. \square

Como un caso más general puede comprobarse la existencia de una correspondencia biyectiva entre elementos de $(T_k^1)^*T_k^1Q$ de la forma $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, donde

cada β_i es una 1-forma semibásica sobre $T_k^1 Q$, y aplicaciones $D : T_k^1 Q \rightarrow (T_k^1)^* Q$ tales que $\tau^k \circ D = \pi^k$.

La existencia de tal correspondencia se puede obtener también como un caso particular del estudiado en [LR5]. En este artículo se denota por $\pi_r^l : T_n^l Q \rightarrow T_n^r Q$ la proyección canónica entre los fibrados de n -jets de orden l y de n -jets de orden r . Se comprueba que cada forma π_r^l -semibásica sobre $T_n^l Q$ define una aplicación $D : T_n^l Q \rightarrow T^*(T_n^r Q)$ tal que $q_{T_n^r Q} \circ D = \pi_r^l$ donde $q_{T_n^r Q} : T^*(T_n^r Q) \rightarrow T_n^r Q$ es la proyección canónica.

Tomando el caso particular de $l = 1$, $r = 0$ y $n = k$ obtenemos que cada forma semibásica sobre $T_k^1 Q$ define una aplicación $D : T_k^1 Q \rightarrow T^* Q$ tal que $\pi^* \circ D = \tau^k$, de modo que si consideramos, como antes, un elemento $\beta \in (T_k^1)^* T_k^1 Q$ tal que $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ con β_i semibásica para todo $1 \leq i \leq k$, entonces obtenemos una aplicación $D : T_k^1 Q \rightarrow (T_k^1)^* Q$ verificando las propiedades requeridas.

La aplicación FL del Teorema 4.1.1 es la asociada al elemento $\beta_L = ((\beta_L)_1, \dots, (\beta_L)_k) \in (T_k^1)^* T_k^1 Q$ por esta correspondencia teniendo en cuenta que cada $(\beta_L)_i$ es una 1-forma semibásica sobre $T_k^1 Q$.

Se comprueba, utilizando la expresión local de las $(\beta_L)_i$ (4.1.5), y la expresión de FL vista en la demostración del Teorema 4.1.1, que la expresión local de FL es

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} FL : T_k^1 Q &\longrightarrow (T_k^1)^* Q \\ (u^\alpha, v_i^\alpha) &\longrightarrow \left(u^\alpha, \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} \right), \end{aligned}$$

con $1 \leq \alpha \leq n$ y $1 \leq i \leq k$.

Utilizando la expresión local de FL (4.1.6) es inmediato comprobar que, teniendo en cuenta las identificaciones $(T_k^1)^* Q = T^* Q \oplus \dots \oplus T^* Q$ y $T_k^1 Q = TQ \oplus \dots \oplus TQ$ descritas en los Ejemplos 1.1.1 y 2.1.1 respectivamente, la aplicación FL se puede ver como la transformación de Legendre usual definida entre los fibrados tangente y cotangente de una variedad, actuando sobre cada copia de TQ . Además podemos escribir del siguiente modo la matriz Jacobiana J de FL :

$$(4.1.7) \quad J = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_1^\beta} & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_k^\beta} & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix}$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión n y $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, de modo que J es una matriz cuadrada de dimensión $n(k+1)$.

Se deduce fácilmente que:

$$(4.1.8) \quad FL \text{ es un difeomorfismo local} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix} \neq 0$$

con $1 \leq \alpha, \beta \leq n$.

Definición 4.1.1 *La función lagrangiana $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ se dice que es regular si la correspondiente transformación de Legendre FL es un difeomorfismo local. L se dirá hiperregular si y sólo si FL es un difeomorfismo global.*

Si $(\omega_1, \dots, \omega_k, V)$ es la estructura k -simpléctica canónica sobre el fibrado $(T_k^1)^* Q$ y $(\omega_L)_i = -d(\beta_L)_i$, podemos probar utilizando las expresiones locales (4.1.5) de $(\beta_L)_i$, (4.1.6) de FL y (1.1.3) de ω_i , el siguiente lema.

Lema 4.1.1 *Para todo $1 \leq i \leq k$ se verifica que*

$$(\omega_L)_i = (FL)^* \omega_i.$$

Demostración

En efecto,

$$(4.1.9) \quad (\omega_L)_i = FL^* \omega_i = \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} du^\alpha \wedge dv_j^\beta$$

para todo $1 \leq i \leq k$. \square

Si denotamos por $V = \ker T\pi^k$ la distribución vertical del fibrado $(T_k^1 Q, \pi^k, Q)$ obtenemos la siguiente caracterización de lagrangianos regulares.

Proposición 4.1.1 *$L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ es un lagrangiano regular si y sólo si $((\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$ es una estructura k -simpléctica sobre $T_k^1 Q$.*

Demostración

Utilizamos las expresiones locales (4.1.9) de $(\omega_L)_i$ y que,

$$(4.1.10) \quad V = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha}; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k \right\rangle.$$

Se deduce que, independientemente de la regularidad de L , se verifica la condición

$$(\omega_L)_{i_j V \times V} = 0,$$

con lo que es suficiente probar que L es regular si y sólo si $\ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k = 0$.

Suponemos en primer lugar que L es un lagrangiano regular. Entonces

$$(4.1.11) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix} \neq 0$$

donde $1 \leq \alpha, \beta \leq n$.

Veamos que entonces $\ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k = 0$.

Sea $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + X_j^\alpha \frac{\partial}{\partial v_j^\alpha}$ la expresión local de un campo de vectores sobre $T_k^1 Q$ respecto de un sistema de coordenadas locales adaptadas, de modo que se verifica, para todo $1 \leq i \leq k$

$$\iota_X(\omega_L)_i = 0.$$

Operando en coordenadas locales se obtiene que

$$\iota_X(\omega_L)_i \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} \right) X^\beta - \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X_j^\beta,$$

$$\iota_X(\omega_L)_i \left(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X^\beta,$$

para todo $1 \leq \alpha \leq k$ y todos $1 \leq i, j \leq k$.

Por lo tanto, para que $X \in \ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k$, las siguientes condiciones son necesarias:

$$(4.1.12) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} \right) X^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X_j^\beta &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X^\beta &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación de (4.1.12) se deduce que $(X^\beta; 1 \leq \beta \leq n)$ es solución del sistema de n ecuaciones (una para cada $1 \leq \alpha \leq n$) y n incógnitas (una para cada $1 \leq \beta \leq n$)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X^\beta = 0$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Si $X^\beta \neq 0$, es decir, si X^β es una solución no trivial de los k^2 sistemas anteriores, entonces el vector $(X^\beta, \dots, X^\beta)$ es una solución no trivial del sistema de kn ecuaciones y kn incógnitas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\beta \\ \vdots \\ X^\beta \end{pmatrix} = 0$$

lo que contradice a la condición (4.1.11), de modo que necesariamente, $X^\alpha = 0$ para $1 \leq \alpha \leq n$.

Sustituyendo ahora en la primera ecuación de (4.1.12) obtenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X_j^\beta = 0$$

con $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$. Esta expresión corresponde a un sistema de kn ecuaciones y kn incógnitas con matriz asociada

$$(4.1.13) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix}$$

que por hipótesis es de rango máximo, con lo que necesariamente $X_j^\beta = 0$ para todo $1 \leq \beta \leq n$ y $1 \leq j \leq k$.

Así pues, necesariamente $X = 0$ y $((\omega_L)_i, V)$ es una estructura k -simpléctica sobre $T_k^1 Q$.

Recíprocamente, suponiendo que $\ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k = 0$, obtenemos, repitiendo los cálculos anteriores, que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} \right) X^\beta - \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X_j^\beta &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X^\beta &= 0. \end{aligned}$$

posee únicamente la solución trivial.

Entonces el sistema de kn ecuaciones y kn incógnitas

$$(4.1.14) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} X_j^\beta = 0$$

admite también únicamente solución trivial pues si existiese una solución no trivial X_i^α de (4.1.14) entonces $(0, X_i^\alpha)$ sería una solución no trivial de (4.1.12).

Pero la matriz asociada al sistema (4.1.14), es la matriz dada por (4.1.13) de modo que necesariamente su determinante es no nulo y el lagrangiano L es regular. \square

Del mismo modo, se puede probar que L es un lagrangiano hiperregular si y sólo si FL es un k -simplectomorfismo global.

Podemos entonces enunciar el siguiente Teorema:

Teorema 4.1.2 Para un lagrangiano $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes

- a) L es regular.
- b) $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} \right) \neq 0$, con $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ y $1 \leq i, j \leq k$.
- c) FL es un k -simplectomorfismo local.

Hemos visto en el Capítulo 1, Proposición 1.2.1, que las estructuras k -simplécticas sobre cualquier variedad M son precisamente las estructuras casi k -cotangentes integrables sobre M . Sin embargo el siguiente ejemplo demuestra que la regularidad de un lagrangiano $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ no implica necesariamente que $((\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V_1, \dots, V_k)$ (donde $V_i = \text{Im } J_i$ es una de las k distribuciones de dimensión n sobre $T_k^1 Q$ definidas a partir de la estructura casi k -tangente canónica (J_1, \dots, J_k) de $T_k^1 Q$) sea una estructura casi k -cotangente sobre $T_k^1 Q$.

Ejemplo 4.1.1 Sean $Q = \mathbf{R}$ y $k = 2$ de forma que:

$$T_k^1 Q = T_2^1 \mathbf{R} = T\mathbf{R} \oplus T\mathbf{R}.$$

Sea además (x, y_1, y_2) un sistema de coordenadas locales sobre $T_2^1 \mathbf{R}$.

Sabemos que la estructura casi k -tangente canónica sobre $T_2^1 \mathbf{R}$, (J_1, J_2) está definida localmente por

$$J_1 = dx \otimes \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad J_2 = dx \otimes \frac{\partial}{\partial y_2}$$

de forma que las distribuciones V_1 y V_2 están localmente generadas por

$$V_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_2} \right\rangle.$$

Definimos el siguiente lagrangiano L sobre $T_2^1 \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} L : T_2^1 \mathbf{R} &= T\mathbf{R} \oplus T\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y_1, y_2) &\longrightarrow y_1 y_2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.1.6) obtenemos la siguiente expresión local para la correspondiente transformación de Legendre:

$$\begin{aligned} FL = T_2^1 \mathbf{R} &= T\mathbf{R} \oplus T\mathbf{R} \longrightarrow (T_2^1)^* \mathbf{R} = T^* \mathbf{R} \oplus T^* \mathbf{R} \\ (x, y_1, y_2) &\longrightarrow (x, y_2, y_1) \end{aligned}$$

y la correspondiente matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que verifica obviamente que $\det J = -1 \neq 0$.

L es por lo tanto un lagrangiano regular.

Utilizando la ecuación (4.1.9) obtenemos que las expresiones locales de las formas presimplécticas $(\omega_L)_1$ y $(\omega_L)_2$ en el sistema de coordenadas (x, y_1, y_2) son

$$\begin{aligned} (\omega_L)_1 &= dy_2 \wedge dx, \\ (\omega_L)_2 &= dy_1 \wedge dx, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\ker(\omega_L)_1 = V_1, \quad \ker(\omega_L)_2 = V_2$$

y por lo tanto no se verifica la condición *ii*) de la Definición 1.2.1 y $((\omega_L)_1, (\omega_L)_2, V_1, V_2)$ no define una estructura casi 2-cotangente sobre $T_2^1\mathbf{R}$.

Sí es cierto que $((\omega_L)_1, (\omega_L)_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2)$ es una estructura casi 2-cotangente en $T_2^1\mathbf{R}$, con $\bar{V}_1 = V_2$ y $\bar{V}_2 = V_1$.

Si $V = V_1 \oplus V_2$ (la distribución vertical del fibrado $\pi^2 : T_2^1\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$), entonces $((\omega_L)_1, (\omega_L)_2, V)$ es una estructura 2-simpléctica sobre $T_2^1\mathbf{R}$ y FL es un 2-simplectomorfismo.

4.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de la Mecánica Clásica,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

con $1 \leq i \leq k$, donde (q^i) es un sistema de coordenadas de la variedad diferenciable Q , y donde

$$L : TQ \longrightarrow \mathbf{R}$$

es una función lagrangiana, son un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Si L es regular, la transformación de Legendre asociada permite definir sobre TQ una estructura simpléctica ω_L por pull-back, a partir de la estructura canónica de T^*Q .

Utilizando esta estructura simpléctica obtenemos una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la forma siguiente.

Se define el isomorfismo b_L por:

$$\begin{aligned} T(TQ) &\longrightarrow T^*(TQ) \\ X &\longrightarrow b_L(X) = \iota_X \omega_L, \end{aligned}$$

que permite asociar a la función $E_L = CL - L$, con C el campo de vectores de Liouville sobre TQ , un campo de vectores X_L sobre TQ , tal que:

$$\iota_{X_L} \omega_L = dE_L,$$

de modo que las proyecciones a Q de las curvas integrales de X_L satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El objetivo de esta sección es obtener una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un problema variacional integral múltiple,

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0, \quad v_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial t_i},$$

correspondientes a una función lagrangiana,

$$L : T_k^1 Q \longrightarrow \mathbf{R},$$

definida sobre el fibrado tangente de las k^1 -velocidades de Q .

Si L es un lagrangiano regular, es decir, la correspondiente transformación de Legendre es un difeomorfismo local, entonces se obtiene sobre $T_k^1 Q$ una estructura k -simpléctica $((\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$ por pull-back a partir de la estructura canónica de $(T_k^1)^* Q$.

El correspondiente morfismo Ω_L^\sharp nos permite asociar a $E_L = CL - L$, con C el campo de vectores de Liouville sobre $T_k^1 Q$, campos de k -vectores (X_1, \dots, X_k) sobre $T_k^1 Q$ tales que

$$\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dE_L.$$

Estos campos de k -vectores son necesariamente k -semisprays y, si existe alguno integrable, entonces las proyecciones a Q de sus secciones integrales satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.0.1).

La estructura geométrica sobre $T_k^1 Q$ nos permitirá interpretar las ecuaciones de Euler-Lagrange como campos de k -vectores globalmente definidos.

En primer lugar, dado que como vimos en la sección anterior, existen sobre $T_k^1 Q$ k 2-formas $(\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k$ asociadas al lagrangiano L , definimos, utilizando estas formas, los morfismos Ω_L^b y Ω_L^\sharp del modo siguiente.

$$\begin{aligned} \Omega_L^b : TT_k^1 Q &\longrightarrow (T_k^1)^* T_k^1 Q \\ X &\longrightarrow \Omega_L^b(X) \end{aligned}$$

donde, si $X \in T_x T_k^1 Q$, entonces, para cada $1 \leq i \leq k$, $(\Omega_L^b(X))_i \in T_x^* T_k^1 Q$ está definido por

$$(\Omega_L^b(X))_i(Y) = (\omega_L)_i(x)(X, Y)$$

para todo $Y \in T_x T_k^1 Q$.

Y también

$$\begin{aligned}\Omega_L^\sharp : T_k^1 T_k^1 Q &\longrightarrow T^* T_k^1 Q \\ (X_1, \dots, X_k) &\longrightarrow \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k)\end{aligned}$$

donde, si $X_i \in T_x T_k^1 Q$, para todo $1 \leq i \leq k$, entonces $\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) \in T_x^* T_k^1 Q$ está definido por

$$\begin{aligned}\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k)(Y) &= -\text{traza}((\Omega_L^\flat(Y))_i(X_j)) \\ &= -\sum_{i=1}^k (\Omega_L^\flat(Y))_i(X_i)\end{aligned}$$

para todo $Y \in T_x T_k^1 Q$.

Utilizando estas definiciones y las expresiones locales (4.1.9) de las formas $(\omega_L)_i$ calculamos las expresiones locales de Ω_L^\flat y Ω_L^\sharp .

Obtenemos

$$\begin{aligned}(\Omega_L^\flat(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}))_i(\frac{\partial}{\partial u^\beta}) &= \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} \\ (\Omega_L^\flat(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}))_i(\frac{\partial}{\partial v_j^\beta}) &= \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta}\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}(4.2.15) \quad \Omega_L^\flat(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}) &= ((\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_1^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_1^\beta})du^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_j^\beta}dv_j^\beta, \\ &\dots, (\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_k^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_k^\beta})du^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_j^\beta}dv_j^\beta).\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}(\Omega_L^\flat(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha}))_i(\frac{\partial}{\partial u^\beta}) &= -\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\beta \partial v_j^\alpha} \\ (\Omega_L^\flat(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha}))_i(\frac{\partial}{\partial v_i^\beta}) &= 0\end{aligned}$$

con lo que

$$(4.2.16) \quad \Omega_L^\flat(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha}) = (-\frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\beta \partial v_j^\alpha} du^\beta, \dots, -\frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\beta \partial v_j^\alpha} du^\beta).$$

Por otro lado si $X = (X_1, \dots, X_k) \in T_k^1 T_k^1 Q$ con

$$X_i = X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + (X_i)_j^\alpha \frac{\partial}{\partial v_j^\alpha},$$

entonces

$$\begin{aligned} (\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k))(Y) &= -\text{traza}((\Omega_L^b(Y))_i X_i) \\ &= -\sum_{i=1}^k (\Omega_L^b(Y))_i X_i \\ &= -\sum_{i=1}^k (\omega_L)_i(Y, X_i). \end{aligned}$$

En coordenadas locales,

$$(\omega_L)_i\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, X_i\right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta}\right) X_i^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} (X_i)_j^\beta,$$

y también

$$(\omega_L)_i\left(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha}, X_i\right) = -\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\beta \partial v_j^\alpha} X_i^\beta.$$

De todo lo anterior deducimos que

$$\begin{aligned} (4.2.17) \quad \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^k \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} \right) X_i^\beta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} (X_i)_j^\beta du^\alpha + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\beta \partial v_j^\alpha} X_i^\beta \right) dv_j^\alpha \right). \end{aligned}$$

Consideramos los campos de vectores canónicos de Liouville C_1, \dots, C_k sobre $T_k^1 Q$ de la Definición 2.4.8. Sabemos que $C = C_1 + \dots + C_k$ se escribe, en el sistema de coordenadas locales (u^α, v_i^α) sobre $T_k^1 Q$ como

$$C = \sum_{\alpha, i} v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha}.$$

Dado el lagrangiano L , podemos definir una nueva aplicación

$$E_L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$$

por

$$E_L = CL - L$$

con lo que, en coordenadas locales:

$$(4.2.18) \quad E_L = \sum_{\alpha, i} v_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} - L,$$

y

$$(4.2.19) \quad dE_L = \sum_{\alpha, \beta, i} (v_i^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) du^\alpha + \sum_{\alpha, \beta, i} v_i^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} dv_j^\alpha.$$

Estudiamos la ecuación

$$(4.2.20) \quad \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dE_L.$$

A diferencia del caso $k = 1$ sobre el fibrado tangente TQ , para un k arbitrario no está asegurada la existencia de soluciones para las ecuaciones de Euler-Lagrange. Igual que para las ecuaciones de Hamilton las soluciones, en caso de existir, no tienen por qué ser únicas y de hecho puede probarse que el conjunto $(\Omega_L^\sharp)^{-1}(dE_L)$ es un fibrado afín sobre $T_k^1 Q$ modelado sobre el subfibrado $\ker \Omega_L^\sharp$.

Suponemos que existe una solución (X_1, \dots, X_k) de (4.2.20).

Igualando (4.2.17) y (4.2.19) obtenemos la expresión local de (4.2.20),

$$(4.2.21) \quad \begin{aligned} \sum_{\beta, i} (\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha}) X_i^\beta \\ - \sum_{\beta, i, j} \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} (X_i)_j^\beta = \sum_{\beta, i} (v_i^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}) \\ \sum_{\beta, i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} X_i^\beta = \sum_{\beta, i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} v_i^\beta \end{aligned}$$

Por ser L un lagrangiano regular, la matriz de nk filas y nk columnas $(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\beta \partial v_j^\alpha})$ con $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ y $1 \leq i, j \leq k$ es de rango máximo y como consecuencia de la segunda ecuación de (4.2.21) obtenemos que

$$X_i^\beta = v_i^\beta$$

para todo $1 \leq \beta \leq n$ y $1 \leq i \leq k$. Como vimos en la Sección 2.4.3, esta condición es equivalente a que (X_1, \dots, X_k) sea un k -semispray.

Sustituyendo ahora en la otra ecuación se deduce que

$$(4.2.22) \quad \sum_{\beta, i} (\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} X_i^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} (X_i)_j^\beta) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Recíprocamente, teniendo en cuenta la condición $X_i^\beta = v_i^\beta$ y utilizando que L es regular, podemos construir a partir de (4.2.22), soluciones locales de la ecuación

(4.2.20). Además, utilizando una partición de la unidad, podemos, mediante un razonamiento como el utilizado en el caso hamiltoniano construir k -semisprays globales sobre $T_k^1 Q$ tales que verifican (4.2.20).

Si además suponemos que existe algún k -semispray sobre $T_k^1 Q$ que es solución de (4.2.20) y que es integrable, entonces existe una aplicación $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ solución de $X = (X_1, \dots, X_k)$.

Entonces

$$(4.2.23) \quad v_i^\alpha = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t_i}, \quad (X_i)_j^\alpha = \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial v_j^\alpha}{\partial t_i},$$

de modo que, sustituyendo en la expresión (4.2.22), obtenemos

$$\sum_{\beta, i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} \frac{\partial^2 \sigma^\beta}{\partial t_i \partial t_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0,$$

de donde se deduce:

$$\sum_{\beta, i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} v_i^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} \frac{\partial v_j^\beta}{\partial t_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0,$$

o, equivalentemente, para todo $1 \leq \alpha \leq n$,

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0, \quad v_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial t_i}.$$

Si el lagrangiano L es no regular, no podemos asegurar, en general, la existencia de soluciones de (4.2.20).

Se puede aplicar a este caso un algoritmo de ligaduras del tipo descrito en [LMM2] para densidades lagrangianas singulares.

Para ello, sea $P_1 = T_k^1 Q$ y sea P_2 el espacio formado por los puntos en los que existe solución, es decir,

$$P_2 = \{z \in T_k^1 Q / \exists (X_1, \dots, X_k)_z \in T_k^1(P_1)_z, k\text{-semispray}, \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dE_L(z)\}.$$

Si P_2 es una subvariedad regular de P_1 , entonces existe en P_2 una sección de τ^k que toma valores en $T_k^1(T_k^1 Q)$. En general esta sección no es un campo de k -vectores sobre P_2 pues para ello tendría que tomar valores en $T_k^1 P_2$. Sea entonces P_3 el espacio de los puntos de P_2 en los que las soluciones de (4.2.20) son campos de k -vectores sobre P_2 , es decir,

$$P_3 = \{z \in P_2 / \exists (X_1, \dots, X_k)_z \in T_k^1(P_2)_z, k\text{-semispray}, \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k)_z = dE_L(z)\}.$$

Si P_3 es una subvariedad regular de P_2 , existe una sección de τ^k definida en P_3 , que es solución de (4.2.20), pero que no define, en general, un campo de k -vectores sobre P_3 .

Repitiendo sucesivamente esta construcción obtenemos una sucesión de variedades de ligadura,

$$\dots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 = T_k^1 Q.$$

Cuando exista un número natural h tal que $P_{h+1} = P_h$ y $\dim P_h > 0$, se dice que $P = P_h$ es la variedad de ligadura final y podemos asegurar que existe un k -semispray sobre P que es solución de (4.2.20).

Cuando tal k -semispray sea integrable, las proyecciones por $\tau_{|P}^k$ de sus secciones integrables, satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Podemos entonces enunciar el siguiente resultado,

Proposición 4.2.1 *La ecuación (4.2.20) se puede interpretar como una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Veamos a continuación algunos ejemplos de problemas físicos conocidos que pueden formularse utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a aplicaciones lagrangianas definidas sobre fibrados de jets $T_k^1 Q$.

Ejemplo 4.2.1 En este ejemplo consideramos las ecuaciones del movimiento asociadas a un sistema mecánico dado por una varilla elástica infinitamente larga que vibra longitudinalmente.

Si las constantes σ y τ representan respectivamente la masa por unidad de longitud y el módulo de Young del sistema, dado por la constante de proporcionalidad entre el alargamiento de la varilla y la fuerza o tensión ejercida sobre ella, entonces se deduce, [Go], que las ecuaciones del movimiento son

$$(4.2.24) \quad \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial t_2^2} = 0,$$

de modo que las soluciones son aplicaciones

$$y: \quad \mathbf{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}$$

$$(t_1, t_2) \quad \longrightarrow \quad y(t_1, t_2)$$

que describen el desplazamiento de cada punto de la varilla en función del tiempo y de la posición.

Tratamos de expresar las ecuaciones (4.2.24) como un ejemplo de ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una aplicación lagrangiana L definida sobre el fibrado de jets $T_k^1 Q$ de alguna variedad Q , de forma que las soluciones y sean las proyecciones a Q de secciones integrales de los k -semisprays solución de (4.2.20).

Para ello tomamos $k = 2$ y $Q = \mathbf{R}$, con lo que L es una aplicación:

$$L : T_2^1 \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Si denotamos por (u, v_1, v_2) las coordenadas fibradas de $T_2^1 \mathbf{R}$, entonces las ecuaciones (4.2.24) son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a:

$$L(u, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2).$$

Sabemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L son:

$$\sigma \frac{\partial v_1}{\partial t_1} - \tau \frac{\partial v_2}{\partial t_2} = 0, \quad v_i = \frac{\partial u}{\partial t_i},$$

es decir,

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = 0.$$

Se comprueba fácilmente que L es un lagrangiano regular por lo que existe una estructura 2-simpléctica $((\omega_L)_1, (\omega_L)_2, V)$ asociada a L tal que, en coordenadas locales, se escribe:

$$\begin{aligned} (\omega_L)_1 &= \sigma dv_1 \wedge du \\ (\omega_L)_2 &= -\tau dv_2 \wedge du \\ V &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2} \right\rangle. \end{aligned}$$

La aplicación $E_L = CL - L$ definida localmente por (4.2.15) se escribe

$$E_L = \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2)$$

de modo que

$$dE_L = \sigma v_1 dv_1 - \tau v_2 dv_2.$$

Dado un elemento $X = (X_1, X_2) \in T_2^1 T_2^1 \mathbf{R}$ expresado localmente por

$$X_i = A_i \frac{\partial}{\partial u} + (A_i)_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + (A_i)_2 \frac{\partial}{\partial v_2},$$

con $1 \leq i \leq 2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Omega_L^\sharp(X_1, X_2) &= -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2}(A_1)_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial v_2^2}(A_2)_2\right)du + \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2}A_1dv_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial v_2^2}A_2dv_2 \\ &= -(\sigma(A_1)_1 - \tau(A_2)_2)du + \sigma A_1dv_1 - \tau A_2dv_2.\end{aligned}$$

La expresión local de $\Omega_L^\sharp(X_1, X_2) = dE_L$ es entonces

$$(4.2.25) \quad \begin{aligned}\sigma(A_1)_1 - \tau(A_2)_2 &= 0 \\ A_1 &= v_1, \quad A_2 = v_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, una aplicación $y : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ $y = y(t_1, t_2)$, solución básica de $X = (X_1, X_2)$ verifica (4.2.23), es decir

$$\begin{aligned}A_1 = v_1 &= \frac{\partial y}{\partial t_1}, & A_2 = v_2 &= \frac{\partial y}{\partial t_2} \\ (A_1)_1 &= \frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} = \frac{\partial v_1}{\partial t_1}, & (A_2)_2 &= \frac{\partial^2 y}{\partial t_2^2} = \frac{\partial v_2}{\partial t_2}\end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.2.25) obtenemos

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial t_2^2} = 0,$$

que es la ecuación (4.2.24).

Las soluciones de $\Omega_L^\sharp(X_1, X_2) = dE_L$ no son únicas. Dada una solución cualquiera, siempre que le sumemos un elemento de $\ker \Omega_L^\sharp$, es decir, un elemento (X_1, X_2) tal que

$$\begin{aligned}A_1 = A_2 &= 0, \\ \sigma(A_1)_1 - \tau(A_2)_2 &= 0,\end{aligned}$$

obtenemos otra solución de la misma ecuación.

Para encontrar soluciones de este problema consideramos las siguientes condiciones. Tomamos una cuerda elástica finita con sus extremos fijos en los puntos $t_1 = 0$ y $t_2 = L$.

Fijamos las condiciones iniciales:

$$(4.2.26) \quad \begin{aligned}y(0, t_2) &= f(t_2), \\ \frac{\partial y}{\partial t_1}(0, t_2) &= g(t_2),\end{aligned}$$

con $t_2 \in (0, L)$.

La ecuación (4.2.24) con condiciones iniciales (4.2.26) puede resolverse por el método de separación de variables [Ro], de modo que existe una solución de la forma:

$$y(t_1, t_2) = T_1(t_1)T_2(t_2).$$

De hecho existe una solución de la forma:

$$y(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\text{Sen} \frac{n\pi t_2}{L} \right) \left(a_n \text{Sen} \frac{n\pi \alpha t_1}{L} + b_n \text{Cos} \frac{n\pi \alpha t_1}{L} \right),$$

donde,

$$a_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^L g(t_2) \text{Sen} \frac{n\pi t_2}{L} dt_2,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t_2) \text{Sen} \frac{n\pi t_2}{L} dt_2,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}.$$

Ejemplo 4.2.2 En este ejemplo estudiamos el caso de un lagrangiano L no regular. A pesar de ello la ecuación (4.2.20) nos permite obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.0.1) que en este caso son las ecuaciones del movimiento del sistema físico que describe las vibraciones de un gas en un espacio de dimensión tres, [Go].

Las ecuaciones del movimiento de un sistema del tipo anterior tienen por soluciones a aplicaciones $\eta : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que expresan el desplazamiento de cada punto del espacio en función del tiempo y de la posición.

Denotamos por P_0 y μ_0 los valores de equilibrio de la presión y la densidad respectivamente.

Por consideraciones termodinámicas [Ze], se obtiene la constante γ que es el cociente de los calores específicos a presión y volumen constantes.

Denotando por (x_0, x_1, x_2, x_3) las coordenadas en \mathbf{R}^4 y (η_1, η_2, η_3) las componentes de la aplicación η , resulta, [Go], que las ecuaciones del movimiento para un sistema como el descrito son:

$$(4.2.27) \quad \begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_0^2} - \gamma P_0 \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) &= 0 \\ \mu_0 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_0^2} - \gamma P_0 \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) &= 0 \\ \mu_0 \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x_0^2} - \gamma P_0 \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x_3^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Tratamos de expresar las ecuaciones (4.2.27) como un ejemplo de ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una aplicación lagrangiana definida sobre el fibrado de jets $T_k^1 Q$ de alguna variedad Q . Las soluciones η de estas ecuaciones deben ser las proyecciones a Q de secciones integrales de los campos de k -vectores solución de (4.2.20). Para ello tomamos $k = 4$, $Q = \mathbf{R}^3$ y L la aplicación definida como sigue.

Si denotamos por

$$(u_1, u_2, u_3, v_0^1, v_0^2, v_0^3, v_1^1, v_1^2, v_1^3, v_2^1, v_2^2, v_2^3, v_3^1, v_3^2, v_3^3),$$

un sistema de coordenadas en $T_4^1 \mathbf{R}^3$, entonces el lagrangiano L es:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\mu_0((v_0^1)^2 + (v_0^2)^2 + (v_0^3)^2) - \gamma P_0(v_1^1 + v_2^2 + v_3^3)^2) \\ &= \frac{1}{2}(\mu_0((v_0^1)^2 + (v_0^2)^2 + (v_0^3)^2) - \gamma P_0((v_1^1)^2 + 2v_1^1 v_2^2 + 2v_1^1 v_3^3 \\ &\quad + (v_2^2)^2 + 2v_2^2 v_3^3 + (v_3^3)^2). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L se escriben en este caso por:

$$\sum_{i=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} = 0, \quad v_i^\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_i},$$

para $1 \leq \alpha \leq 3$, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} (4.2.28) \quad &\mu_0 \frac{\partial v_0^1}{\partial x_0} - \gamma P_0 \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) = 0, \\ &\mu_0 \frac{\partial v_0^2}{\partial x_0} - \gamma P_0 \frac{\partial}{\partial x_2} (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) = 0, \\ &\mu_0 \frac{\partial v_0^3}{\partial x_0} - \gamma P_0 \frac{\partial}{\partial x_3} (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) = 0, \\ &v_j^\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

En este caso las cuatro 2-formas sobre $T_4^1 \mathbf{R}^3$ asociadas a L son, en coordenadas locales, y teniendo en cuenta (4.1.9):

$$\begin{aligned} (\omega_L)_0 &= \mu_0 (dv_0^1 \wedge du_1 + dv_0^2 \wedge du_2 + dv_0^3 \wedge du_3) \\ (\omega_L)_1 &= -\gamma P_0 (dv_1^1 \wedge du_1 + dv_2^2 \wedge du_1 + dv_3^3 \wedge du_1) \\ (\omega_L)_2 &= -\gamma P_0 (dv_1^1 \wedge du_2 + dv_2^2 \wedge du_2 + dv_3^3 \wedge du_2) \\ (\omega_L)_3 &= -\gamma P_0 (dv_1^1 \wedge du_3 + dv_2^2 \wedge du_3 + dv_3^3 \wedge du_3), \end{aligned}$$

Estas formas no verifican las condiciones de la definición de estructura k -simpléctica, por lo que, utilizando el Teorema 4.1.2, deducimos que L no es regular.

Los campos de Liouville C_0, C_1, C_2, C_3 son, en este sistema de coordenadas,

$$C_i = v_i^1 \frac{\partial}{\partial v_i^1} + v_i^2 \frac{\partial}{\partial v_i^2} + v_i^3 \frac{\partial}{\partial v_i^3},$$

para $0 \leq i \leq 3$.

De este modo, operando en coordenadas locales se comprueba que

$$CL = 2L$$

y entonces

$$E_L = CL - L = L$$

con lo que

$$(4.2.29) \quad \begin{aligned} dE_L = dL &= \mu_0(v_0^1 dv_0^1 + v_0^2 dv_0^2 + v_0^3 dv_0^3) \\ &\quad - \gamma P_0((v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) dv_1^1 + (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) dv_2^2 \\ &\quad + (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) dv_3^3). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $X = (X_0, X_1, X_2, X_3) \in T_4^1 T_4^1 \mathbf{R}^3$ es

$$\begin{aligned} X_i &= (X_i)^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + (X_i)^2 \frac{\partial}{\partial u_2} + (X_i)^3 \frac{\partial}{\partial u_3} \\ &\quad + (X_i)_0^1 \frac{\partial}{\partial v_0^1} + \dots + (X_i)_3^3 \frac{\partial}{\partial v_3^3} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Omega_L^\sharp(X_0, X_1, X_2, X_3) &= -\mu_0((X_0)_0^1 du_1 + (X_0)_0^2 du_2 + (X_0)_0^3 du_3 \\ &\quad + \gamma P_0((X_1)_1^1 + (X_1)_2^2 + (X_1)_3^3) du_1 \\ &\quad + \gamma P_0((X_2)_1^1 + (X_2)_2^2 + (X_2)_3^3) du_2 \\ &\quad + \gamma P_0((X_3)_1^1 + (X_3)_2^2 + (X_3)_3^3) du_3 \\ &\quad + \mu_0((X_0)^1 dv_0^1 + (X_0)^2 dv_0^2 + (X_0)^3 dv_0^3) \\ &\quad - \gamma P_0(X_1)^1 (dv_1^1 + dv_2^2 + dv_3^3) \\ &\quad - \gamma P_0(X_2)^2 (dv_1^1 + dv_2^2 + dv_3^3) \\ &\quad - \gamma P_0(X_3)^3 (dv_1^1 + dv_2^2 + dv_3^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -[\mu_0(X_0)_0^1 - \gamma P_0((X_1)_1^1 + (X_1)_2^2 + (X_1)_3^3)]du_1 \\
& -[\mu_0(X_0)_0^2 - \gamma P_0((X_2)_1^1 + (X_2)_2^2 + (X_2)_3^3)]du_2 \\
& -[\mu_0(X_0)_0^3 - \gamma P_0((X_3)_1^1 + (X_3)_2^2 + (X_3)_3^3)]du_3 \\
& + \mu_0((X_0)^1 dv_0^1 + (X_0)^2 dv_0^2 + (X_0)^3 dv_0^3) \\
& - \gamma P_0((X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3)dv_1^1 \\
& - \gamma P_0((X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3)dv_2^2 \\
& - \gamma P_0((X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3)dv_3^3.
\end{aligned}$$

Igualando esta expresión con (4.2.29), obtenemos que

$$(4.2.30) \quad \Omega_L^\sharp(X_0, X_1, X_2, X_3) = dE_L$$

es equivalente a

$$\begin{aligned}
v_0^1 &= (X_0)^1 \\
v_0^2 &= (X_0)^2 \\
v_0^3 &= (X_0)^3 \\
(4.2.31) \quad v_1^1 + v_2^2 + v_3^3 &= (X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3 \\
\mu_0(X_0)_0^1 - \gamma P_0((X_1)_1^1 + (X_1)_2^2 + (X_1)_3^3) &= 0 \\
\mu_0(X_0)_0^2 - \gamma P_0((X_2)_1^1 + (X_2)_2^2 + (X_2)_3^3) &= 0 \\
\mu_0(X_0)_0^3 - \gamma P_0((X_3)_1^1 + (X_3)_2^2 + (X_3)_3^3) &= 0.
\end{aligned}$$

Como L es no regular, para poder asegurar la existencia de soluciones de (4.2.30), tenemos que aplicar el algoritmo de ligaduras anteriormente descrito.

En este caso es inmediato, a partir de las ecuaciones (4.2.31), que, en cada punto $z \in T_4^1 \mathbf{R}^3$, podemos definir un k -semispray (Y_0, \dots, Y_3) por:

$$\begin{aligned}
Y_i &= (Y_i)^j \frac{\partial}{\partial u_j} + (Y_i)_l^j \frac{\partial}{\partial v_l^j} \\
&= v_i^j \frac{\partial}{\partial u_j},
\end{aligned}$$

es decir,

$$(Y_i)_l^j = 0,$$

para todos $0 \leq i, j, l \leq 3$, que satisface (4.2.31) y, por lo tanto,

$$\Omega_L^\sharp(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)(z) = dE_L(z).$$

Como esto es válido para todo $z \in T_4^1 \mathbf{R}^3$, entonces, en el algoritmo de ligadura,

$$P_2 = P_1 = T_4^1 \mathbf{R}^3,$$

y podemos asegurar que existen soluciones de (4.2.30) en $T_4^1 \mathbf{R}^3$.

Es evidente que $\ker \Omega_L^\sharp \neq 0$, de hecho cualquier $(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) \in T_4^1 T_4^1 \mathbf{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} (Y_0)^1 &= (Y_0)^2 = (Y_0)^3 = 0 \\ (Y_1)^1 + (Y_2)^2 + (Y_3)^3 &= 0 \\ \mu_0(Y_0)_0^1 - \gamma P_0((Y_1)_1^1 + (Y_1)_2^2 + (Y_1)_3^3) &= 0 \\ \mu_0(Y_0)_0^2 - \gamma P_0((Y_2)_1^1 + (Y_2)_2^2 + (Y_2)_3^3) &= 0 \\ \mu_0(Y_0)_0^3 - \gamma P_0((Y_3)_1^1 + (Y_3)_2^2 + (Y_3)_3^3) &= 0. \end{aligned}$$

verifica que

$$\Omega_L^\sharp(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) = 0,$$

y por lo tanto la solución de (4.2.30) no es única, dada una solución particular cualquier otra solución se diferenciará de ella en un elemento de $\ker \Omega_L^\sharp$.

Si $\eta : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es una solución integral básica de (X_0, X_1, X_2, X_3) , obtenemos

$$\begin{aligned} (X_0)^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_0} = v_0^1 \\ (X_0)^2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_0} = v_0^2 \\ (X_0)^3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = v_0^3 \\ (X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ &= v_1^1 + v_2^2 + v_3^3 \\ \mu_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0^2} - \gamma P_0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) &= 0 \\ \mu_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_0^2} - \gamma P_0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) &= 0 \\ \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_0^2} - \gamma P_0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones (4.2.27).

Las tres últimas ecuaciones se pueden escribir, utilizando las anteriores, de la siguiente forma:

$$\mu_0 \frac{\partial v_0^1}{\partial x_0} - \gamma P_0 \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) = 0$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_0^2}{\partial x_0} - \gamma P_0 \frac{\partial}{\partial x_2} (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) = 0$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_0^3}{\partial x_0} - \gamma P_0 \frac{\partial}{\partial x_3} (v_1^1 + v_2^2 + v_3^3) = 0,$$

$$v_i^\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i},$$

que, como vimos, son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L .

Si consideramos el caso en que las vibraciones son de pequeña amplitud, la variación relativa de la densidad del gas σ verifica, [Go],

$$\sigma = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = -(v_1^1 + v_2^2 + v_3^3).$$

Utilizando esta expresión, si a las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas les aplicamos el operador divergencia, resulta:

$$\delta\sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_0^2} = 0,$$

donde $\delta\sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2}$, que es la ecuación de ondas tridimensionales.

En [LaL1] se estudia la existencia de soluciones en el caso de ondas planas, aquéllas en las que solo existe dependencia de una de las coordenadas espaciales, y de ondas monocromáticas, aquéllas en las que todas las cantidades son periódicas respecto al tiempo.

De hecho cualquier onda se puede representar por un conjunto de ondas monocromáticas planas. Esta descomposición es el desarrollo en serie de Fourier cuyas componentes se llaman componentes monocromáticas o de Fourier de la onda considerada.

Ejemplos de soluciones de ecuaciones de onda con condiciones de contorno, como condiciones iniciales u ondas en recintos de formas determinadas, pueden encontrarse en [BST].

Por último supongamos que $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ es un lagrangiano hiperregular. Existe entonces un hamiltoniano $H : (T_k^1)^* Q \rightarrow \mathbf{R}$ definido por $H = E_L \circ FL^{-1}$, donde E_L

está definido por (4.2.18) y FL^{-1} es la inversa de la transformación de Legendre, que existe por ser L hiperregular.

En estas condiciones se verifica el siguiente resultado:

Teorema 4.2.1 *El conjunto de secciones integrales básicas $\pi^k \circ \sigma : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ tales que $\sigma : U \rightarrow T_k^1 Q$ con $\sigma^{(1)} \in \Omega_L^{\sharp-1}(dE_L)$ coincide con el conjunto de secciones integrales básicas $\tau^k \circ \psi : U \subset \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ tales que $\psi : U \rightarrow (T_k^1)^* Q$ con $\psi^{(1)} \in \Omega^{\sharp-1}(dH)$. Es decir, las ecuaciones de Hamilton (3.2.8) y la ecuación de Euler-Lagrange (4.0.1) tienen las mismas soluciones.*

Demostración

En primer lugar comprobamos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_k^1 T_k^1 Q & \xrightarrow{\Omega_L^\sharp} & T^* T_k^1 Q \\ T_k^1 FL \downarrow & & \downarrow FL^{-1*} \\ T_k^1 (T_k^1)^* Q & \xrightarrow{\Omega^\sharp} & T^* (T_k^1)^* Q. \end{array}$$

En efecto, dados $X_1, \dots, X_k, Y \in T_x T_k^1 Q$,

$$\begin{aligned} \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k)Y &= -tr((\Omega_L^\flat(Y))_a(X_b)) \\ &= -tr((\omega_a)_L(Y, X_b)) \\ &= -tr((FL^* \omega_a)(Y, X_b)) \\ &= -tr(\omega_a(FL_* Y, FL_* X_b)) \\ &= \Omega^\sharp(FL_* X_1, \dots, FL_* X_k)(FL_* Y) \\ &= FL^* \Omega^\sharp(FL_* X_1, \dots, FL_* X_k)(Y) \\ &= FL^* \circ \Omega^\sharp \circ T_k^1 FL(X_1, \dots, X_k)(Y). \end{aligned}$$

Entonces, si X_L es un campo de k -vectores sobre $T_k^1 Q$ tal que $X_L \in \Omega_L^{\sharp-1}(dE_L)$ y $X_H = T_k^1 FL \circ X_L \circ FL^{-1}$ es un campo de k -vectores sobre $(T_k^1)^* Q$, el diagrama siguiente es conmutativo

$$(4.2.32) \quad \begin{array}{ccccc} T_k^1 Q & \xrightarrow{X_L} & T_k^1 T_k^1 M & \xrightarrow{\Omega_L^\#} & T^* T_k^1 Q \\ & \xleftarrow{\pi_{T_k^1 Q}^k} & & & \downarrow FL^{-1*} \\ FL \downarrow & & T_k^1 FL \downarrow & & \\ (T_k^1)^* Q & \xrightarrow{X_H} & T_k^1 (T_k^1)^* Q & \xrightarrow{\Omega^\#} & T^* (T_k^1)^* Q \\ & \xleftarrow{\pi_{(T_k^1)^* Q}} & & & \end{array}$$

Veamos que $\Omega^\#(X_H) = dH$. En efecto,

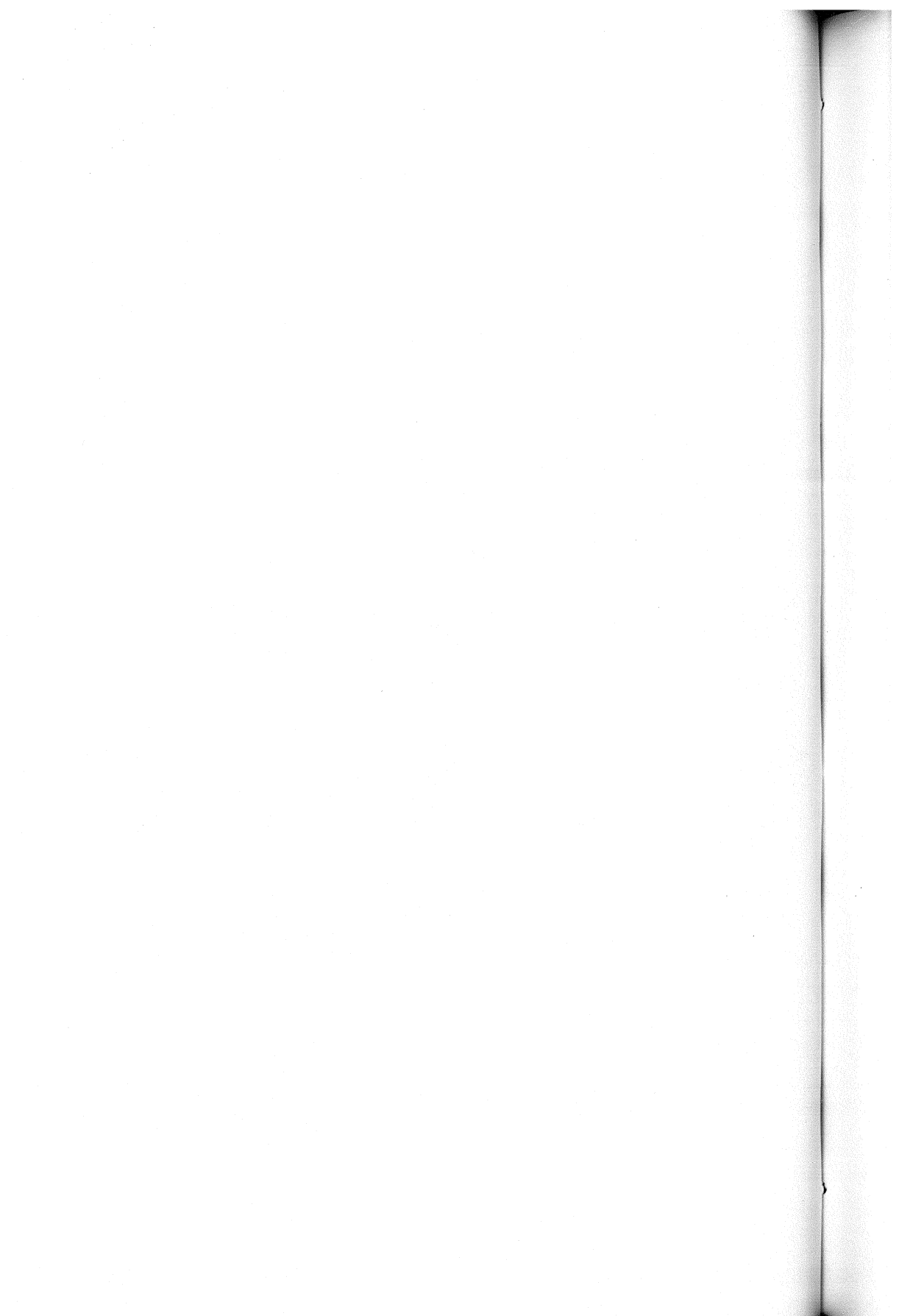
$$\begin{aligned} dH &= d(E_L \circ FL^{-1}) \\ &= (FL^{-1})^* dE_L \\ &= (FL^{-1})^* \Omega_L^\#(X_L) \\ &= \Omega^\# \circ X_H \circ FL. \end{aligned}$$

utilizando la conmutatividad del diagrama anterior.

Además, para $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$, tal que $\sigma^{(1)} = X_L \circ \sigma$, se verifica, para todo $u \in \mathbf{R}^k$,

$$\begin{aligned} X_H(FL \circ \sigma(u)) &= T_k^1 FL \circ X_L \circ FL^{-1} \circ FL \circ \sigma(u) \\ &= T_k^1 FL \circ X_L(\sigma(u)) \\ &= T_k^1 FL \circ \sigma^{(1)}(u) \\ &= T_k^1 FL \circ j_0^1(\sigma_u) \\ &= j_0^1(FL \circ \sigma_u) \\ &= (FL \circ \sigma)^{(1)}(u) \end{aligned}$$

lo que implica que $FL \circ \sigma$ es una sección integral de X_H . \square



Capítulo 5

Variedades k -cosimplécticas

5.1 Estructuras casi k -cosimplécticas

En esta sección estudiaremos el modelo geométrico dado por la estructura canónica de la variedad de jets,

$$J^1(Q, \mathbf{R}^k) = \cup_{t \in \mathbf{R}^k} J_t^1(Q, \mathbf{R}^k),$$

con $J_t^1(Q, \mathbf{R}^k)$ definido como en el Ejemplo 1.1.1.

A partir de tal modelo definimos las estructuras que llamamos k -cosimplécticas sobre una variedad de dimensión $k(n+1)+n$ de modo que para el caso particular en que $k=1$ obtenemos la definición de estructura casi cotangente estable ([LMOS3]).

5.1.1 El fibrado estable cotangente de las k^1 -covelocidades

Ejemplo 5.1.1 Dada una aplicación $\sigma : Q \rightarrow \mathbf{R}^k$, denotamos por $\sigma^i = pr_i \circ \sigma$ su composición con la proyección i -ésima de \mathbf{R}^k en \mathbf{R} . Cada $\sigma^i : Q \rightarrow \mathbf{R}$ define ([LR2]) un covector $j_{x,0}^1 \sigma^i \in T_x^* Q$ en cada punto $x \in Q$ tal que $\sigma^i(x) = 0$.

Por lo tanto $\sigma(x) = 0 \in \mathbf{R}^k$ y σ define un elemento $j_{x,0}^1 \sigma = (j_{x,0}^1 \sigma^1, \dots, j_{x,0}^1 \sigma^k) \in (T_k^1)^* Q$.

De este modo ([M]) la variedad $J^1(Q, \mathbf{R}^k)$ de todos los jets de aplicaciones de Q en \mathbf{R}^k con meta en $t \in \mathbf{R}^k$, puede identificarse con el fibrado $(T_k^1)^* Q$.

Si hacemos variar en todo \mathbf{R}^k la meta t , la variedad de jets de aplicaciones $\sigma : Q \rightarrow \mathbf{R}^k$ es:

$$J^1(Q, \mathbf{R}^k) = \cup_{t \in \mathbf{R}^k} J_t^1(Q, \mathbf{R}^k) = \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q.$$

Estudiamos a continuación cual es la estructura geométrica canónica definida sobre $J^1(Q, \mathbf{R}^k) \cong \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q$.

Para establecer cuál es el grupo de estructura G estudiamos en primer lugar cómo es el cambio de coordenadas locales en el modelo.

Si $(u^\alpha, 1 \leq \alpha \leq n)$ es un sistema de coordenadas locales sobre la variedad Q , se define un sistema de coordenadas locales fibradas sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$, $(t_i, u^\alpha, u_\alpha^i; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k)$ del modo siguiente.

Para un elemento $(t, j_{x,0}^1 \sigma) \in \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ arbitrario se define:

$$(5.1.1) \quad \begin{aligned} t_i(t, j_{x,0}^1 \sigma) &= t_i(t), \\ u^\alpha(t, j_{x,0}^1 \sigma) &= u^\alpha(x), \\ u_\alpha^i(t, j_{x,0}^1 \sigma) &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial u^\alpha}(x), \end{aligned}$$

para todos $1 \leq \alpha \leq n$ y $1 \leq i \leq k$.

Dados ahora dos sistemas de coordenadas locales $(t_i, u^\alpha, u_\alpha^i)$ y $(\bar{t}_i, \bar{u}^\alpha, \bar{u}_\alpha^i)$ sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$, cuyos dominios tienen intersección no vacía, los dos sistemas estarán relacionadas por el siguiente cambio de coordenadas,

$$\begin{aligned} \bar{t}_i(t, j_{x,0}^1 \sigma) &= \bar{t}_i(t) = t_i(t), \\ \bar{u}^\alpha(t, j_{x,0}^1 \sigma) &= \bar{u}^\alpha(x), \\ \bar{u}_\alpha^i(t, j_{x,0}^1 \sigma) &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial \bar{u}^\alpha}(x) = \frac{\partial \sigma^i}{\partial u^\beta}(x) \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} = u_\beta^i \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}, \end{aligned}$$

es decir,

$$(t_i, u^\alpha, u_\alpha^i) \rightarrow (\bar{t}_i, \bar{u}^\alpha, \bar{u}_\alpha^i) = (t_i, \bar{u}^\alpha, u_\beta^i \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}).$$

Se comprueba ahora fácilmente por cálculo directo que, si denotamos

$$A = \left(\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \right), \quad B_i = \left(u_\gamma^i \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\delta \partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \right), \quad C = \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \right),$$

para todos $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ y para todo $1 \leq i \leq k$, entonces:

$$(5.1.2) \quad C = (A^{-1})^t, \quad A^t B_i = B_i^t A,$$

y la matriz jacobiana asociada al cambio de coordenadas anterior es

$$J = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C \end{pmatrix}$$

donde I_k es la matriz identidad de orden k y donde además se verifican las condiciones (5.1.2).

Consideramos el subgrupo G de $Gl(k(n+1) + n, \mathbf{R})$,

$$(5.1.3) \quad G = \left\{ \left(\begin{array}{cccccc} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C \end{array} \right), \begin{array}{l} A \in Gl(n, \mathbf{R}) \\ C = (A^{-1})^t \\ A^t B_i = B_i^t A, 1 \leq i \leq k \end{array} \right\}.$$

Volvemos ahora al estudio del modelo $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$. Veamos en primer lugar que esta variedad tiene una estructura de fibrado vectorial sobre Q con fibra tipo $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n_k}$.

Sea

$$\begin{aligned} \tau^k : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow Q \\ (t, j_{x,0}^1 \sigma) &\longrightarrow x \end{aligned}$$

la proyección canónica.

Definimos un difeomorfismo canónico,

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow (\mathbf{R} \times T^*Q) \oplus \dots \oplus (\mathbf{R} \times T^*Q) \\ (t, j_{x,0}^1 \sigma) &\longrightarrow (t_1, j_{x,0}^1 \sigma^1, \dots, t_k, j_{x,0}^1 \sigma^k). \end{aligned}$$

Así cada elemento $(t, \theta) \in \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q = (\tau^k)^{-1}(x)$ con $x \in Q$ puede ser identificado, mediante Λ , con la k -tupla $((t_1, \theta^1), \dots, (t_k, \theta^k))$ de elementos de $\mathbf{R} \times T_x^*Q$.

Si definimos además,

$$\lambda(t, \theta) + \mu(s, \phi) = (\lambda(t_1, \theta^1) + \mu(s_1, \phi^1), \dots, \lambda(t_k, \theta^k) + \mu(s_k, \phi^k)),$$

para $t, s \in \mathbf{R}^k$, $\theta, \phi \in (T_k^1)^*Q$ y $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, entonces,

$$\tau^k : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q \longrightarrow Q,$$

es un fibrado vectorial sobre Q isomorfo, como tal fibrado vectorial, con la suma de Whitney de $\mathbf{R} \times T^*Q$ consigo mismo k veces.

Podemos definir, para cada $1 \leq i \leq k$, una proyección canónica:

$$\begin{aligned} \rho^i : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow \mathbf{R}^k \times (T_{k-1}^1)^*Q \\ (t, \theta^1, \dots, \theta^k) &\longrightarrow (t, \theta^1, \dots, \hat{\theta}^i, \dots, \theta^k). \end{aligned}$$

De esta manera existen k distribuciones verticales,

$$V_i = \ker T\rho^i,$$

para $1 \leq i \leq k$, tales que:

$$V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) = 0.$$

En efecto, en coordenadas locales, ρ^i se escribe:

$$\rho^i(t_1, \dots, t_k, u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k) = (t_1, \dots, t_k, u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, \hat{u}_\alpha^i, \dots, u_\alpha^k)$$

con lo que

$$(5.1.4) \quad V_i = \ker T\rho^i = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \right\rangle.$$

Además si $\tilde{\tau}^k$ es la proyección,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^k : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow \mathbf{R}^k \times Q \\ (t, j_{x,0}^1 \sigma) &\longrightarrow (t, x) \end{aligned}$$

entonces es inmediato que:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i = \ker T\tilde{\tau}^k.$$

Sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ se pueden definir k 1-formas canónicas $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ del modo siguiente:

$$\lambda_i(t, \theta)(X) = \theta^i(\tau^k(t, \theta))(T\tau^k X),$$

para $X \in T_{(t, \theta)}(\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ con $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$.

La expresión local de λ_i en el sistema de coordenadas locales $(t_i, u^\alpha, u_\alpha^i)$ es

$$\lambda_i = u_\alpha^i du^\alpha,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

De hecho, dada la proyección canónica $p : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$, las formas λ^i son los pull-backs de las formas canónicas de $(T_k^1)^*Q$.

Definimos entonces k 2-formas presimplécticas $\omega_1, \dots, \omega_k$ sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ por

$$\omega_i = -d\lambda_i.$$

Localmente, se tiene

$$(5.1.5) \quad \omega_i = du^\alpha \wedge du_\alpha^i.$$

Si consideramos ahora las proyecciones,

$$\begin{aligned} p_i : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (t, j_{x,0}^1\sigma) &\longrightarrow t_i \end{aligned}$$

podemos definir k 1-formas η_1, \dots, η_k sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$, por

$$\eta_i = dp_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

En coordenadas locales es fácil comprobar que

$$(5.1.6) \quad \eta_i = dt_i$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Utilizando la expresión local (5.1.6) es inmediato comprobar que:

$$\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k = T((T_k^1)^*Q).$$

Localmente

$$\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}; 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k \right\rangle.$$

Si además utilizamos las expresiones locales de $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ (5.1.4), de ω_i (5.1.5) y de η_i (5.1.6), obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.1 *La colección $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ formada sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ por las k 1-formas η_i , las k 2-formas ω_i y la distribución V , verifica:*

1. $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$,
2. $\dim(\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k) = k$,
3. $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0$,
4. $\eta_{i|_V} = 0, \quad \omega_{i|_{V \times V}} = 0, \quad (1 \leq i \leq k)$.

5.1.2 Estructuras k -cosimplécticas sobre espacios vectoriales

A partir del modelo anterior definimos del siguiente modo las estructuras k -cosimplécticas sobre espacios vectoriales de dimensión $k(n+1) + n$.

Sea E un espacio vectorial de dimensión $k(n+1) + n$.

Definición 5.1.1 La familia $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$, donde η_1, \dots, η_k son 1-formas, $\omega_1, \dots, \omega_k$ son 2-formas y V un subespacio vectorial de E de dimensión nk , define una estructura k -cosimpléctica sobre el espacio vectorial E si se verifican las siguientes condiciones:

$$(5.1.7) \quad \begin{aligned} i) & \quad \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0, \\ ii) & \quad \dim(\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k) = k, \\ iii) & \quad \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0, \\ iv) & \quad \eta_{i|_V} = 0, \quad \omega_{i|_{V \times V}} = 0, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

(E, η_i, ω_i, V) se denomina espacio vectorial k -cosimpléctico.

Nota 5.1.1 Si $k = 1$ entonces E es un espacio vectorial de dimensión $2n + 1$ y tenemos una familia (η, ω, V) compuesta por una 1-forma η , una 2-forma ω y un subespacio $V \subset E$ de dimensión n .

De las condiciones *ii*) y *iii*) de (5.1.7) se deduce que $\eta \wedge \omega^n \neq 0$ pues $\dim \ker \omega = 1$, y por tanto $\text{rango } \omega = 2n$, y además $\ker \eta \cap \ker \omega = 0$.

El par (η, ω) define una estructura cosimpléctica sobre E . De la condición *iv*) se deduce además que (η, ω, V) define una estructura casi cotangente estable sobre E [LMOS3].

Podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 5.1.2 Si $(\eta_1, \dots, \eta_k, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ es una estructura k -cosimpléctica sobre E entonces existe una base $(\eta_1, \dots, \eta_k, \gamma_\alpha, \gamma_1^\alpha, \dots, \gamma_k^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n)$ de E^* tal que

$$(5.1.8) \quad \omega_i = \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \wedge \gamma_i^\alpha.$$

Demostración

Puesto que $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$, $\dim(\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k) = n(k+1)$; además $V \subset \ker \eta_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, y $E = (\bigcap_{i=1}^k \ker \eta_i) \oplus (\bigcap_{i=1}^k \ker \omega_i)$ como consecuencia de (5.1.7). Por tanto

$$V \subset \bigcap_{i=1}^k \ker \eta_i \subset E = (\bigcap_{i=1}^k \ker \eta_i) \oplus (\bigcap_{i=1}^k \ker \omega_i),$$

y podemos obtener una base $(f_1, \dots, f_k, e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{nk})$ de E , tal que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{nk})$ es una base del subespacio vectorial V , $(e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{nk})$ una base de $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k$, y (f_1, \dots, f_k) es una base de $\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k$.

Sea además la base dual de 1-formas $(f_1^*, \dots, f_k^*, e_1^*, \dots, e_n^*, \varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_{nk}^*)$.

Utilizando las condiciones (5.1.7) obtenemos que, en esta base, las formas η_i y ω_i pueden escribirse por

$$(5.1.9) \quad \eta_i = \sum_{j=1}^k A_i^j f_j^* \quad \text{con} \quad \det(A_i^j) \neq 0$$

y

$$(5.1.10) \quad \omega_i = (B_i)_\alpha^s \varepsilon_s^* \wedge e_\alpha^* + (C_i)_\alpha^\beta e_\beta^* \wedge e_\alpha^*,$$

con $1 \leq i \leq k$, $1 \leq s \leq nk$ y $1 \leq \alpha, \beta \leq n$.

Si definimos las 1-formas

$$\Omega_i^\alpha = (B_i)_\alpha^s \varepsilon_s^* + (C_i)_\alpha^\beta e_\beta^*,$$

entonces las 2-formas ω_i se pueden escribir por

$$\omega_i = \Omega_i^\alpha \wedge e_\alpha^*.$$

Las kn formas Ω_i^α son independientes entre si. Para verlo basta con comprobar que la matriz cuadrada $B = ((B_i)_\alpha^s)$ de dimensión kn es una matriz de rango máximo. De hecho, se comprueba que si $X = (X_1, \dots, X_{kn}) \in \mathbf{R}^{kn}$ es tal que

$$BX = 0,$$

entonces,

$$X_1 \varepsilon_1 + \dots + X_{kn} \varepsilon_{kn} \in V \cap \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k,$$

con lo que $X = 0$ y B tiene rango kn .

Por tanto, las formas $(B_i)_\alpha^s \varepsilon_s^*$ son independientes entre si y en consecuencia las formas Ω_i^α son también independientes.

Utilizando (5.1.9) y la condición *iii*) de (5.1.7) se deduce que $(\eta_1, \dots, \eta_k, \gamma_\alpha, \gamma_1^\alpha, \dots, \gamma_k^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n)$, donde:

$$\gamma_\alpha = e_\alpha^*, \quad \gamma_i^\alpha = \Omega_i^\alpha,$$

para todos $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq \alpha \leq n$, es una base de E^* tal que verifica las condiciones (5.1.8). \square

Si tomamos la base de $\{f_i, e_\alpha, e_i^\alpha\}$ E dual de la base de 1-formas $\{\eta_i, \gamma_\alpha, \gamma_i^\alpha\}$ obtenida en la Proposición 5.1.2 y si además definimos los subespacios V_1, \dots, V_k de E por:

$$(5.1.11) \quad V_i = \bigcap_{j \neq i} \ker \omega_j \cap \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k$$

entonces

$$V_i = \langle e_i^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n \rangle,$$

de modo que $\dim V_i = n$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Además, por el mismo razonamiento que en la demostración de la Proposición 1.2.1, obtenemos que $V_i \subset V$ para todo $1 \leq i \leq k$ y que $V_i \cap V_j = 0$ para todo $i \neq j$ de modo que podemos escribir,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Los subespacios V_1, \dots, V_k así definidos verifican:

1. $V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) = 0$,
2. $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j$,
3. $\omega_i|_{V_i \times V_i} = 0$,

para todo $1 \leq i \leq k$.

De hecho puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 5.1.3 *El espacio vectorial E es un espacio vectorial k -cosimpléctico si y solo si sobre él está definida una familia $(\eta_i, \omega_i, V_i; 1 \leq i \leq k)$ formada por k 1-formas η_i , k 2-formas ω_i y k subespacios V_i de dimensión n tal que:*

1. $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$,
 2. $\dim(\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k) = k$,
 3. $V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) = 0$,
 4. $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j$,
 5. $\omega_i|_{V_i \times V_i} = 0$.
- (5.1.12)

Demostración

Si E es un espacio vectorial k -cosimpléctico hemos visto que los subespacios V_1, \dots, V_k de dimensión n definidos en (5.1.11) satisfacen las condiciones (5.1.12).

Recíprocamente, si se verifican las condiciones (5.1.12), basta definir el subespacio de E de dimensión nk ,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

y entonces $(E, \eta_i, \omega_i V)$ es un espacio vectorial k -cosimpléctico. \square

Sea $(\eta_i, \gamma_\alpha, \gamma_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ una base de 1-formas sobre E tal que verifica las condiciones (5.1.8). Denotamos por $(\xi_i, e_\alpha, e_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ la correspondiente base dual de E .

Los vectores ξ_1, \dots, ξ_k de esta base son únicos, es decir, no dependen de las 1-formas $\gamma_\alpha, \gamma_i^\alpha$, ya que si $(\eta_i, \gamma'_\alpha, (\gamma'_i)^\alpha)$ es otra base de 1-formas que verifica (5.1.8) y $(\xi'_i, e'_\alpha, (e'_i)^\alpha)$ es la correspondiente base dual, entonces

$$\iota_{\xi_i - \xi'_i} \eta_j = 0,$$

$$\iota_{\xi_i - \xi'_i} \omega_j = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$ lo que, teniendo en cuenta la condición *iii*) de (5.1.7), implica que $\xi_i - \xi'_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Definición 5.1.2 Los vectores ξ_1, \dots, ξ_k se llaman vectores de Reeb asociados a la estructura k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) y están caracterizados por las condiciones

$$\iota_{\xi_i} \eta_j = \delta_{ij}, \quad \iota_{\xi_i} \omega_j = 0.$$

Veamos a continuación cuál es el subgrupo G de $Gl(k(n+1) + n, \mathbf{R})$ que relaciona a todas las bases $(\xi_i, e_\alpha, e_i^\alpha)$ de E adaptadas a una estructura k -cosimpléctica sobre E .

Sean $(\xi_i, e_\alpha, e_i^\alpha)$ y $(\xi_i, f_\alpha, f_i^\alpha)$ dos bases que verifican las condiciones de la Proposición 5.1.2. Teniendo en cuenta (5.1.8) y la definición (5.1.11) de los subespacios V_i , deducimos que, para todo $1 \leq i \leq k$:

$$V_i = \langle e_i^\alpha \rangle_{\alpha=1, \dots, n} = \langle f_i^\alpha \rangle_{\alpha=1, \dots, n},$$

de modo que una matriz $M \in G \subset Gl(k(n+1) + n, \mathbf{R})$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ e_\alpha \\ e_i^\alpha \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_i \\ f_\alpha \\ f_i^\alpha \end{pmatrix},$$

es de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C_k \end{pmatrix}$$

con I_k la matriz identidad de dimensión k , $A, B_i \in gl(n, \mathbf{R})$ y $C_i \in Gl(n, \mathbf{R})$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Como además, por (5.1.8), sabemos que las matrices asociadas a las formas $\omega_1, \dots, \omega_k$ respecto de estas bases son:

$$(5.1.13) \quad (\omega_1)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -I_n & \dots & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, (\omega_k)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces, para todo $1 \leq i \leq k$, se verifica,

$$M^t(\omega_i)_0 M = (\omega_i)_0.$$

De esta condición se deduce que, necesariamente,

$$C_i = (A^{-1})^t, \quad A^t B_i = B_i^t A,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Obtenemos entonces que el grupo G buscado es justamente el dado por (5.1.3), es decir,

$$G = \left\{ \left(\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C \end{pmatrix}, \begin{array}{l} A \in Gl(n, \mathbf{R}) \\ C = (A^{-1})^t \\ A^t B_i = B_i^t A \quad 1 \leq i \leq k \end{array} \right\}.$$

5.1.3 Estructuras casi k -cosimplécticas sobre variedades

En esta sección definimos las estructuras k -cosimplécticas sobre variedades diferenciales de dimensión $k(n+1) + n$ de modo que, en cada punto $x \in M$, el espacio tangente $T_x M$ es un espacio vectorial k -cosimpléctico.

Definición 5.1.3 Sea M una variedad diferencial de dimensión $k(n+1) + n$. Una familia $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ formada por k 1-formas η_i , k 2-formas ω_i y una distribución V de dimensión nk tal que:

1. $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$,
2. $\dim(\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k) = k$,
3. $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0$,
4. $\eta_{i|V} = 0, \quad \omega_{i|V \times V} = 0, \quad (1 \leq i \leq k)$

se llama estructura casi k -cosimpléctica sobre M . La variedad M se dice que es una variedad casi k -cosimpléctica.

Veamos a continuación como la existencia sobre la variedad M de una estructura casi k -cosimpléctica equivale a la existencia de una G -estructura $B_G M$ con grupo de estructura G dado por (5.1.3).

Suponemos en primer lugar que sobre la variedad M existe una familia (η_i, ω_i, V) que verifica las condiciones de la Definición 5.1.3.

Podemos definir k distribuciones V_1, \dots, V_k en M del modo siguiente:

$$(5.1.14) \quad V_i = \bigcap_{j \neq i} \ker \omega_j \cap \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k.$$

De la Definición 5.1.3 se obtiene que, $(T_x M, \eta_i(x), \omega_i(x), V(x))$ es un espacio vectorial k -cosimpléctico para cada $x \in M$ y, por los mismos razonamientos que en la sección anterior, tenemos que, para todo $1 \leq i \leq k$:

$$(5.1.15) \quad \begin{aligned} V_i &\subset V, \\ \dim V_i &= n, \\ V_i \cap (+_{j \neq i} V_j) &= 0, \end{aligned}$$

y en consecuencia $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Sea $\{Y_1, \dots, Y_{k(n+1)+n}\}$ una referencia lineal en M tal que verifica:

$$\begin{aligned} \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle &= \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k, \\ \langle Y_{k+1}, \dots, Y_{k(n+1)+n} \rangle &= \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k, \\ \langle Y_{k+in+1}, \dots, Y_{k+in+n} \rangle &= V_i, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Se deduce de las propiedades (5.1.7) que

$$\text{rango } \omega_i(x) = 2n,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, y para todo $x \in M$.

Puesto que en cada punto $x \in M$, $(T_x M, \eta_i(x), \omega_i(x), V(x))$ es un espacio vectorial k -cosimpléctico entonces, en cada punto $x \in M$, existen los correspondientes k vectores de Reeb $\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)$ caracterizados por las condiciones

$$\iota_{\xi_i(x)} \eta_j(x) = \delta_{ij}, \quad \iota_{\xi_i(x)} \omega_j(x) = 0.$$

Así existen k campos de vectores ξ_1, \dots, ξ_k en M caracterizados por las condiciones

$$(5.1.16) \quad \iota_{\xi_i} \eta_j = \delta_{ij}, \quad \iota_{\xi_i} \omega_j = 0.$$

ξ_1, \dots, ξ_k se llamarán los campos de Reeb sobre M asociados a la estructura k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) .

De la primera condición de (5.1.16) se deduce, teniendo en cuenta que $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$, que $\dim \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle = k$. De la segunda condición obtenemos que $\langle \xi_1, \dots, \xi_k, Y_{k+1}, \dots, Y_{k(n+1)+n} \rangle$ es una referencia lineal en M .

Respecto a esta referencia lineal es fácil comprobar que:

$$(\omega_i)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_i & \dots & -Q_i^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & Q_i & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

con $P_i = P_i^t$ y $\det Q_i \neq 0$.

Construimos una nueva referencia $\{\xi_1, \dots, \xi_k, X_{k+1}, \dots, X_{k(n+1)+n}\}$ por:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ X_{k+1} \\ \vdots \\ X_{k(n+1)+n} \end{pmatrix} = (\xi_1, \dots, \xi_k, Y_{k+1}, \dots, Y_{k(n+1)+n}) \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C_k \end{pmatrix},$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= Q_k^{-1}, & C_k &= I_n, & B_k &= \frac{1}{2}(Q_k^{-1})^t P_k Q_k^{-1}, \\ C_i &= (Q_i^{-1})^t Q_k^t, & B_i &= \frac{1}{2}(Q_i^{-1})^t P_i Q_k^{-1}, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Respecto a esta nueva referencia, las formas $\omega_1, \dots, \omega_k$, se expresan por las matrices $(\omega_1)_0, \dots, (\omega_k)_0$ dadas por (5.1.13).

Cada referencia lineal $\{\xi_1, \dots, \xi_k, X_{k+1}, \dots, X_{k(n+1)+n}\}$ así construída es una referencia lineal adaptada a la estructura k -cosimpléctica.

Es fácil ahora comprobar que todo par de referencias adaptadas se relacionan por un cambio de referencia con matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_k & 0 & \dots & C \end{pmatrix}$$

con $B_i^t A = A^t B_i$ y $C = (A^{-1})^t$ para todo $1 \leq i \leq k$.

De este modo el conjunto de todas las referencias lineales adaptadas a la estructura k -cosimpléctica determina una G -estructura con G dado por (5.1.3).

Recíprocamente sea $B_G M$ una G -estructura sobre M , donde G está dado por (5.1.3).

Sea además

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+n}, e_{k+n+1}, \dots, e_{k+2n}, \dots, e_{k+kn+1}, \dots, e_{k+kn+n}\},$$

una referencia adaptada a $B_G M$, y sea,

$$\{\theta^1, \dots, \theta^k, \theta^{k+1}, \dots, \theta^{k+n}, \theta^{k+n+1}, \dots, \theta^{k+2n}, \dots, \theta^{k+kn+1}, \dots, \theta^{k+kn+n}\},$$

la correferencia adaptada dual correspondiente.

Definimos entonces una familia de k 2-formas diferenciales $\omega_1, \dots, \omega_k$ sobre M por sus matrices asociadas respecto a cualquier referencia adaptada a $B_G M$. Sean estas matrices las dadas por (5.1.13).

Las ω_i están así bien definidas pues utilizando (5.1.3) y (5.1.13), se comprueba directamente que si cambiamos la referencia adaptada, y $B \in G$ es la matriz de cambio de referencia correspondiente, entonces, como vimos en la Sección 5.1.2, la matriz asociada a cada ω_i respecto de la nueva referencia es:

$$(\omega_i)'_0 = B^t(\omega_i)_0 B = (\omega_i)_0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Por lo tanto, utilizando una correferencia adaptada a $B_G M$ arbitraria, cada ω_i se escribe

$$\omega_i = \sum_{\alpha=1}^n \theta^{k+\alpha} \wedge \theta^{k+in+\alpha},$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Utilizando de nuevo una correferencia adaptada $\{\theta^A; 1 \leq A \leq n+k+kn\}$ definimos k 1-formas η_1, \dots, η_k sobre M por:

$$\eta_i(x)(X) = \theta^i(X),$$

para $1 \leq i \leq k$, $x \in M$ y $X \in T_x M$, es decir $\eta_i = \theta^i$.

La expresión (5.1.3) del grupo de estructura G asegura de forma inmediata que las η_i están bien definidas.

Por último para una referencia adaptada arbitraria $\{e_A; 1 \leq A \leq n+k+nk\}$, definimos k distribuciones V_1, \dots, V_k de dimensión n sobre M , por:

$$V_i = \langle e_{k+in+1}, \dots, e_{k+in+n} \rangle,$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

De nuevo la expresión del grupo G nos asegura que las V_i están bien definidas.

Con estas definiciones es inmediato que la familia (η_i, ω_i, V) , donde $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, verifica:

1. $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$,
2. $\dim(\ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k) = k$,
3. $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_1 \cap \dots \cap \ker \omega_k = 0$,
4. $\eta_{i|_V}, \quad \omega_{i|_V \times V} = 0, \quad 1 \leq i \leq k$.

Hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 5.1.4 *La variedad M es una variedad casi k -cosimpléctica si y sólo si sobre M existe una G -estructura con grupo de estructura G dado por (5.1.3).*

Lema 5.1.1 *Si M es una variedad casi k -cosimpléctica con $k > 1$ y ξ_1, \dots, ξ_k son los campos de Reeb asociados a la estructura casi k -cosimpléctica entonces, para todo $1 \leq i \leq k$ se verifica*

$$(d\eta_j = 0, d\omega_j = 0, \forall 1 \leq j \leq k) \Rightarrow [\xi_i, V] \subset V.$$

Demostración

Sea ξ_i un campo de Reeb asociado a la estructura casi k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) y sea $v_j \in V_j$. Suponemos que η_i y ω_i son cerradas para todo $1 \leq i \leq k$.

Sea ω_l con $l \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} \iota_{[\xi_i, v_j]} \omega_l &= [L_{\xi_i}, \iota_{v_j}] \omega_l \\ &= 0, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $l \neq j$ y la condición 3 de (5.1.12).

Para $l \in \{1, \dots, k\}$ arbitrario, se verifica

$$\begin{aligned} \iota_{[\xi_i, v_j]} \eta_l &= [L_{\xi_i}, \iota_{v_j}] \eta_l \\ &= 0. \end{aligned}$$

De este modo hemos probado que:

$$[\xi_i, v_j] \in \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_l,$$

para todo $1 \leq l \leq k$ con $l \neq j$, es decir,

$$\begin{aligned} [\xi_i, v_j] &\in \bigcap_{l \neq j} (\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_l) \\ &= V_j. \end{aligned}$$

Se demuestra así que $[\xi_i, V_j] \subset V_j$ para todo $1 \leq i, j \leq k$, y por lo tanto

$$[\xi_i, V] \subset V$$

para todo $1 \leq i \leq k$, con la condición $k > 1$. \square

Definición 5.1.4 Sean $(M, \eta_1, \dots, \eta_k, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ y $(N, \rho_1, \dots, \rho_k, \phi_1, \dots, \phi_k, W)$ dos variedades k -cosimplécticas de la misma dimensión.

1. Un k -cosimplectomorfismo de (M, η_i, ω_i, V) en (N, ρ_i, ϕ_i, W) es un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ tal que:

$$(5.1.17) \quad \begin{aligned} f^* \rho_i &= \eta_i, \\ f^* \phi_i &= \omega_i, \\ T_x f V(x) &= W(f(x)), \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$ y para todo $x \in M$.

2. Un k -cosimplectomorfismo local de (M, η_i, ω_i, V) en (N, ρ_i, ϕ_i, W) es una aplicación $f : M \rightarrow N$ tal que todo punto $x \in M$ tiene un entorno U_1 tal que $U_2 = f(U_1)$ es abierto en N y $f|_{U_1}$ es un k -cosimplectomorfismo de $(U_1, (\eta_i)|_{U_1}, (\omega_i)|_{U_1}, V|_{U_1})$ en $(U_2, (\rho_i)|_{U_2}, (\phi_i)|_{U_2}, W|_{U_2})$.

5.2 Integrabilidad

Como G -estructura, una estructura casi k -cosimpléctica $B_G M$ es integrable si existe un sistema de coordenadas locales $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ de modo que la sección local del fibrado de referencias de M que asocia a cada punto de $x \in M$ la referencia lineal,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(x), \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(x) \right),$$

es una sección local del fibrado $B_G M$. Es decir, la referencia así definida es una referencia adaptada a la estructura casi k -cosimpléctica de modo que, para cada $1 \leq i \leq k$, se verifican:

$$(5.2.18) \quad \begin{aligned} \eta_i &= dt_i, \\ \omega_i &= dx^\alpha \wedge dx_\alpha^i, \\ V &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} \right\rangle_{\alpha=1, \dots, n}. \end{aligned}$$

La caracterización de las estructuras casi k -cosimplécticas integrables está determinada por el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1 Una estructura casi k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) sobre una variedad diferenciable M de dimensión $k(n+1) + n$ es integrable si y sólo si

$$(5.2.19) \quad d\eta_i = 0, \quad d\omega_i = 0, \quad [V, V] \subset V, \quad (1 \leq i \leq k).$$

Demostración

Si la G -estructura es integrable y existe un sistema de coordenadas locales $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i)$ sobre M , tal que se verifican las condiciones (5.2.18), es fácil comprobar que la estructura casi k -cosimpléctica verifica las condiciones (5.2.19).

Veamos ahora el recíproco. Suponemos que la estructura casi k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) verifica (5.2.19). Construiremos un sistema de coordenadas sobre M verificando (5.2.18).

En cada punto $x \in M$ consideramos el subespacio $K_x = \ker \eta_1(x) \cap \dots \cap \ker \eta_k(x)$. Hemos visto que el espacio tangente $T_x M$ verifica,

$$T_x M = \langle \xi_1 \rangle_x \oplus \dots \oplus \langle \xi_k \rangle_x \oplus K_x.$$

La siguiente sucesión está formada por distribuciones integrables:

$$\langle \xi_1 \rangle, \langle \xi_2 \rangle, \dots, \langle \xi_k \rangle, K_x.$$

Como las sumas dos a dos de estas distribuciones son también integrables y, en cada punto, el espacio tangente a M es la suma directa de todas ellas, entonces estamos en las condiciones del Lema 1.3 de [K], y podemos asegurar que existe, en cada punto $x \in M$, un sistema de coordenadas locales $(\bar{t}_i, \bar{x}^\alpha, \bar{x}_\alpha^i; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ en un entorno \bar{U} de x , tal que:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i} \right\rangle, \\ K &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha^i} \right\rangle \left(\begin{array}{l} 1 \leq \alpha \leq n \\ 1 \leq i \leq k \end{array} \right). \end{aligned}$$

En el entorno \bar{U} puede escribirse, para cada $1 \leq i \leq k$ fijo,

$$\xi_i = f_i \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i},$$

y, como $\eta_j(\xi_i) = \delta_{ij}$, entonces,

$$\eta_i = \frac{1}{f_i} d\bar{t}_i = g_i d\bar{t}_i.$$

Si cada 1-forma η_1, \dots, η_k es cerrada, entonces, para cada $1 \leq i \leq k$ fijo:

$$0 = d\eta_i = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{t}_j} d\bar{t}_j \wedge d\bar{t}_i + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha \wedge d\bar{t}_i + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{y}_j^\alpha} d\bar{x}_j^\alpha \wedge d\bar{t}_i,$$

de donde se deduce:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}^\alpha} = 0 = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}_j^\alpha},$$

para todos $1 \leq i, j \leq k, 1 \leq \alpha \leq n$, y

$$\frac{\partial g_i}{\partial \bar{t}_j} = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.

Entonces $g_i = g_i(\bar{t}_i)$ y podemos definir k funciones $h^i = h^i(\bar{t}_i)$ donde cada h^i es una primitiva de la correspondiente g_i .

Podemos definir un nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{t}_i, \tilde{x}^\alpha, \tilde{x}_\alpha^i)$ en un entorno \tilde{U} de x por

$$\tilde{t}_i = h^i(\bar{t}_i), \quad \tilde{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha, \quad \tilde{x}_\alpha^i = \bar{x}_\alpha^i,$$

para $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq \alpha \leq n$.

En este nuevo sistema se verifican

$$\eta_i = d\tilde{t}_i,$$

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_i},$$

$$K = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\alpha^i} \right\rangle_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \leq \alpha \leq n \\ 1 \leq i \leq k \end{smallmatrix} \right)}.$$

Dado que K es una distribución integrable podemos asegurar que existe una subvariedad integral W de K pasando por x y se comprueba fácilmente que $(W, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ es una variedad k -simpléctica.

Existe entonces un entorno coordinado $(U', x^\alpha, x_\alpha^i)$ con $1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n$, de x en W tal que

$$\omega_{i|U'} = dx^\alpha \wedge dx_\alpha^i,$$

$$V|_{U'} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} \right\rangle_{1 \leq \alpha \leq n},$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Si las funciones coordenadas \tilde{t}_i de \tilde{U} están definidas en el intervalo $(-\epsilon_i, \epsilon_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$, entonces consideramos el entorno coordinado de x en M ,

$$(U = U' \times (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times \dots \times (-\epsilon_k, \epsilon_k), t_i, x^\alpha, x_\alpha^i),$$

con $t_i = \tilde{t}_i$.

En el entorno U de x se verifican:

$$\begin{aligned}\omega_i &= (A_i)_s^j dt_j \wedge dt_s + (B_i)_\alpha^j dt_j \wedge dx^\alpha \\ &\quad (C_i)_{\alpha,s}^j dt_j \wedge dx_\alpha^s + (D_i)_{\beta,j}^\alpha dx^\alpha \wedge dx_\beta^j \\ &\quad (E_i)_\beta^\alpha dx^\alpha \wedge dx^\beta + (F_i)_{\beta,s}^{\alpha,j} dx_\alpha^j \wedge dx_\beta^s.\end{aligned}$$

De la condición $\iota_{\xi_j} \omega_i = 0$ se deduce que

$$(A_i)_s^j = (B_i)_\alpha^j = (C_i)_{\alpha,s}^j = 0,$$

para todos $1 \leq i, j, s \leq k, 1 \leq \alpha \leq n$.

Por otro lado, de la condición $d\omega_i = 0$, se deducen:

$$\frac{\partial(E_i)_\beta^\alpha}{\partial t_j} = \frac{\partial(F_i)_{\beta,s}^{\alpha,j}}{\partial t_l} = \frac{\partial(D_i)_{\beta,j}^\alpha}{\partial t_s} = 0.$$

y entonces

$$\begin{aligned}(E_i)_\beta^\alpha(t_j, x^\sigma, x_\sigma^j) &= (E_i)_\beta^\alpha(0, x^\sigma, x_\sigma^j) = 0, \\ (F_i)_{\beta,s}^{\alpha,j}(t_l, x^\sigma, x_\sigma^l) &= (F_i)_{\beta,s}^{\alpha,j}(0, x^\sigma, x_\sigma^l) = 0, \\ (D_i)_{\beta,j}^\alpha(t_s, x^\sigma, x_\sigma^s) &= (D_i)_{\beta,j}^\alpha(0, x^\sigma, x_\sigma^s) = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{ij},\end{aligned}$$

de donde

$$\omega_i = dx^\alpha \wedge dx_\alpha^i.$$

Además, en todo $x \in U$,

$$V(x) \subset T_x U',$$

entonces

$$V = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} \right\rangle_{1 \leq \alpha \leq n},$$

lo que acaba la prueba del teorema. \square

Definición 5.2.1 Una estructura casi k -cosimpléctica integrable se llama estructura k -cosimpléctica.

Nota 5.2.1 [LMOS3] En el caso $k = 1$, es decir, para estructuras casi cotangente estables, la condición $[\xi, V] \subset V$, donde ξ es el campo de Reeb asociado a la estructura, es una condición necesaria para la integrabilidad de la G -estructura independiente de las otras condiciones que caracterizan tal integrabilidad.

5.2.1 Ejemplos

Además del ejemplo canónico elegido como modelo para la Definición 5.1.1 en el fibrado cotangente estable de las k^1 -covelocidades, construiremos un ejemplo de variedad compacta dotada de una estructura casi k -cosimpléctica.

Sea $H(2, 2)$ el subgrupo de Lie del grupo lineal general $Gl(6, \mathbf{R})$ formado por las matrices $A \in M_{6 \times 6}(\mathbf{R})$ de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & z_1^1 & z_2^1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & z_1^2 & z_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$H(2, 2)$ es un subgrupo de Lie nilpotente de $Gl(6, \mathbf{R})$ de dimensión 8.

Puede definirse en $H(2, 2)$ un sistema global de coordenadas $(x^i, y^i, z_j^i; 1 \leq i, j \leq 2)$ por:

$$x^i(A) = x_i, \quad y^i(A) = y_i, \quad z_j^i(A) = z_j^i.$$

Consideramos la base siguiente de 1-formas invariantes por la izquierda sobre $H(2, 2)$

$$(5.2.20) \quad \{dx^1, dx^2, dy^1, dy^2, dz_2^1, dz_1^2, \tilde{\gamma}^1 = dz_1^1 - x^1 dy^1, \tilde{\gamma}^2 = dz_2^2 - x^2 dy^2\}.$$

Denotamos por Γ el subgrupo de matrices de $H(2, 2)$ con componentes enteras. El espacio de las clases de equivalencia por la derecha $M(2, 2) = \Gamma/H(2, 2)$ es una variedad compacta de dimensión 8, mas precisamente es una nilvariedad compacta.

Puesto que las 1-formas (5.2.20) son invariantes por Γ , existen 1-formas,

$$\{\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2, \sigma_2^1, \sigma_1^2, \gamma^1, \gamma^2\},$$

sobre $M(2, 2)$ tales que:

$$\pi^* \alpha^i = dx^i, \quad \pi^* \beta^i = dy^i,$$

$$\pi^* \sigma_j^i = dz_j^i, \quad \pi^* \gamma^i = \tilde{\gamma}^i,$$

para todo $1 \leq i, j \leq 2$ y $i \neq j$, y donde $\pi : H(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$ es la proyección natural.

Denotamos ahora por,

$$\{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, T_1, T_2\},$$

la base dual de $\{\alpha^i, \beta^i, \sigma_j^i, \gamma^i\}$.

Si definimos

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \beta^1, & \eta_2 &= \beta^2, \\ \omega_1 &= \alpha^1 \wedge \gamma^1 + \alpha^2 \wedge \gamma^2, \\ \omega_2 &= \alpha^1 \wedge \sigma_2^1 + \alpha^2 \wedge \sigma_1^2, \\ V &= \langle T_1, T_2, C_1, C_2 \rangle,\end{aligned}$$

entonces es fácil comprobar que $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq 2)$ verifica las condiciones de la Definición 5.1.3 y por lo tanto $(M(2, 2), \eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq 2)$ es una variedad casi 2-cosimpléctica de dimensión 8.

Utilizando las expresiones locales (5.2.20) y la definición de las formas η_1, η_2, ω_1 y ω_2 se comprueba que

$$(5.2.21) \quad d\eta_1 = d\eta_2 = d\omega_1 = d\omega_2 = 0.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la Proposición 2.30 de [Wn], la distribución V es integrable si y sólo si el anulador $I(V)$ de V (es decir, las formas sobre $M(2, 2)$ que restringidas a V se anulan) verifica

$$d(I(V)) \subset I(V).$$

$I(V)$ es el ideal generado por $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, y β_2 . Puesto que

$$d\alpha_1 = d\alpha_2 = d\beta_1 = d\beta_2 = 0,$$

se deduce que $I(V)$ es un ideal diferencial y, así, V es involutiva, lo que, junto a (5.2.21) implica que $(\eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2, V)$ es una estructura 2-cosimpléctica sobre $M(2, 2)$.

5.3 Conexiones lineales adaptadas

En esta sección, en primer lugar, introducimos las estructuras casi k -cosimplécticas como las estructuras asociadas a un cierto tipo de tensores definidos sobre el fibrado FM de las referencias lineales de M .

Estudiaremos después la existencia y caracterización de conexiones lineales adaptadas a las estructuras casi k -cosimplécticas.

5.3.1 Estructuras definidas a partir de tensores

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $m = k(n+1) + n$ y sean F_i los siguientes espacios vectoriales:

$$F_i = (\mathbf{R}^m)^* \otimes (\mathbf{R}^m)^*,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Sea $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. Definimos una representación de $Gl(m, \mathbf{R})$ en F por $r = \bigoplus_{i=1}^k r_i$, con

$$r_i(A)(h)(u, v) = h(A^{-1}u, A^{-1}v),$$

para $A \in Gl(m, \mathbf{R})$, $h \in F_i$ y $u, v \in \mathbf{R}^m$.

Sea $\omega_0 = (\omega_1)_0 + \dots + (\omega_k)_0 \in F$ con $(\omega_i)_0 \in F_i$ dadas por las matrices (5.1.13) para todo $1 \leq i \leq k$.

Representamos por G_{ω_0} el subgrupo de isotropía de ω_0 para la representación r , y por $G_{(\omega_i)_0}$ el subgrupo de isotropía de $(\omega_i)_0$ para la representación r_i para $1 \leq i \leq k$.

Dar una $G_{(\omega_i)_0}$ -estructura sobre M equivale ([Fu]) a dar un tensor t_i de tipo (r_i, F_i) sobre FM , y dar una G_{ω_0} -estructura equivale a dar un tensor t de tipo (r, F) sobre FM .

Se define una $G_{(\omega_i)_0}$ -estructura sobre M por:

$$\begin{aligned} B_{G_{(\omega_i)_0}} M &= \{z \in FM / t_i(z) = (\omega_i)_0\} \\ &= \{z \in FM / \omega_i(zu, zv) = (\omega_i)_0(u, v), \forall u, v \in \mathbf{R}^m\}, \end{aligned}$$

y una G_{ω_0} -estructura por:

$$B_{G_{\omega_0}} M = \bigcap_{i=1}^k B_{G_{(\omega_i)_0}} M.$$

Sea además \bar{V} el subespacio de \mathbf{R}^m de dimensión kn definido por,

$$\bar{V} = \langle e_{k+n+1}, \dots, e_{k(n+1)+n} \rangle.$$

Denotamos por G_0 el subgrupo cerrado de $Gl(m, \mathbf{R})$ definido por

$$G_0 = \{A \in Gl(m, \mathbf{R}) / A\bar{V} = \bar{V}\},$$

de modo que dar una G_0 -estructura sobre M es equivalente a dar una distribución diferenciable V sobre M tal que:

$$V(x) = z\bar{V},$$

donde z es cualquier referencia lineal en $x \in M$ perteneciente a la G_0 -estructura $B_{G_0}M$.

Entonces dar una G_0 -estructura sobre M es equivalente a dar una distribución diferenciable V sobre M de dimensión nk .

De este modo,

$$B_{G_0}M = \{z \in FM / z\bar{V} = V\}.$$

Sean E_i con $1 \leq i \leq k$ los k espacios vectoriales,

$$E_i = (\mathbf{R}^m)^*,$$

y sea $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$.

Definimos una representación s de $Gl(m, \mathbf{R})$ en $\text{Aut}(E)$ por $s = \bigoplus_{i=1}^k s_i$, donde

$$s_i(A)h(u) = h(A^{-1}u),$$

para todo $A \in Gl(m, \mathbf{R})$, $h \in E_i$ y $u \in \mathbf{R}^m$.

Utilizando el producto escalar en \mathbf{R}^m podemos considerar cada elemento e_i , $1 \leq i \leq k$ de la base canónica de \mathbf{R}^m como un elemento del espacio E_i . Así $\eta_0 = e_1 + \dots + e_k \in E$ y sea $G_{(\eta_0)_i}$ el grupo de isotropía de $(\eta_i)_0 = e_i \in E_i$ respecto de las representaciones s_i . De esta manera,

$$G_{\eta_0} = \bigcap_{i=1}^k G_{(\eta_i)_0}.$$

Dar una $G_{(\eta_i)_0}$ -estructura sobre M equivale a dar un tensor u_i de tipo (s_i, E_i) sobre FM , y dar una G_{η_0} -estructura equivale a dar un tensor u de tipo (s, E) sobre FM .

Se define una $G_{(\eta_i)_0}$ -estructura sobre M por:

$$\begin{aligned} B_{G_{(\eta_i)_0}}M &= \{z \in FM / u_i(z) = (\eta_i)_0\} \\ &= \{z \in FM / \eta_i(z(u)) = (\eta_i)_0(u), \forall u \in \mathbf{R}^m\}, \end{aligned}$$

y una G_{η_0} -estructura por:

$$B_{G_{\eta_0}}M = \bigcap_{i=1}^k B_{G_{(\eta_i)_0}}M.$$

Finalmente una estructura casi k -cotangente estable sobre M está determinada por las referencias lineales en puntos de M tales que son referencias adaptadas a $B_{G_{\omega_0}}M$, $B_{G_0}M$ y $B_{G_{\eta_0}}M$ al mismo tiempo, es decir,

$$(5.3.22) \quad B_G M = B_{G_{\omega_0}}M \cap B_{G_0}M \cap B_{G_{\eta_0}}M,$$

o, equivalentemente

$$B_G M = \left\{ z \in FM \left| \begin{array}{l} \eta_i(z(u)) = (\eta_i)_0(u) \forall 1 \leq i \leq k, \forall u, v \in \mathbf{R}^m \\ \omega_i(zu, zv) = (\omega_i)_0(u, v) \\ V = z \langle e_{k+n+1}, \dots, e_{k(n+1)+n} \rangle \end{array} \right. \right\}$$

donde $\{e_A; 1 \leq A \leq m\}$ es la base canónica de \mathbf{R}^k .

5.3.2 G -conexiones lineales

La teoría general de G -estructuras ([Fu]) asegura que, para G -estructuras definidas por tensores t , la integrabilidad de la G -estructura implica la existencia de una G -conexión simétrica, es decir, de una conexión lineal simétrica tal que $\nabla t = 0$.

Para una estructura casi k -cosimpléctica hemos visto que el grupo de estructura G puede escribirse como

$$G = G_{\eta_0} \cap G_{\omega_0} \cap G_0$$

de hecho, hemos visto (5.3.22),

$$B_G M = B_{G_{\eta_0}} M \cap B_{G_{\omega_0}} M \cap B_{G_0} M.$$

Si la estructura es k -cosimpléctica, es decir, es integrable, entonces $B_{G_{\eta_0}} M$, $B_{G_{\omega_0}} M$ y $B_{G_0} M$ son simultáneamente integrables y la teoría general nos asegura la existencia de una conexión simétrica ∇ que es simultáneamente G_{η_0} -conexión, G_{ω_0} -conexión y G_0 -conexión, es decir,

$$\nabla \eta_i = 0, \quad \nabla \omega_i = 0, \quad \nabla V \subset V,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Nota 5.3.1 De hecho puede probarse que si $k > 1$ y,

$$\nabla \eta_i = 0, \quad \nabla \omega_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, entonces, necesariamente, $\nabla V_i \subset V_i$, donde cada V_i es la distribución definida por (5.1.11), y por lo tanto $\nabla V \subset V$.

Para comprobarlo, sean $X \in \chi(M)$ arbitrario y $X_i \in V_i$, y veamos que entonces $\nabla_X X_i \in V_i$.

Como $\nabla \eta_i = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X \eta_j)(X_i) \\ &= \nabla_X(\eta_j(X_i)) - \eta_j(\nabla_X X_i) \\ &= -\eta_j(\nabla_X X_i), \end{aligned}$$

es decir, $\nabla_X X_i \in \ker \eta_j$ para todo $1 \leq j \leq k$.

Del mismo modo, como $\nabla \omega_i = 0$, entonces, si $i \neq j$ e $Y \in \chi(M)$ es arbitrario, se deduce

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X \omega_j)(X_i, Y) \\ &= \nabla_X(\omega_j(X_i, Y)) - \omega_j(\nabla_X X_i, Y) - \omega_j(X_i, \nabla_X Y) \\ &= -\omega_j(\nabla_X X_i, Y), \end{aligned}$$

y así $\nabla_X X_i \in \ker \omega_j$ para todo $j \neq i$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla_X X_i &\in \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_j \\ &= \bigoplus_{l \neq j} V_l, \end{aligned}$$

para todo $j \neq i$, es decir,

$$\nabla_X X_i \in \bigcap_{j \neq i} (\bigoplus_{l \neq j} V_l) = V_i,$$

lo que prueba que $\nabla V_i \subset V_i$ para todo $1 \leq i \leq k$ y, por lo tanto $\nabla V \subset V$.

Para las estructuras casi k -cosimplécticas existe el resultado recíproco, es decir:

Proposición 5.3.1 *Sea $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ una estructura casi k -cosimpléctica sobre la variedad M y sea ∇ una G -conexión simétrica sobre M . Entonces $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ es una estructura k -cosimpléctica.*

Demostración

Sea ∇ la derivada covariante de una G -conexión simétrica, es decir, tal que:

$$\nabla \eta_i = 0, \quad \nabla \omega_i = 0, \quad \nabla V \subset V,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Por ser simétrica, se satisface,

$$(5.3.23) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Además $\nabla V \subset V$, de lo que se deduce que la distribución V es integrable.

Utilizando $\nabla \omega_i = 0$ y desarrollando la expresión $\nabla \omega_i(X, Y, Z) = 0$ para todos $X, Y, Z \in \chi(M)$ se obtiene que:

$$X(\omega_i(Y, Z)) = \omega_i(\nabla_X Y, Z) + \omega_i(Y, \nabla_X Z).$$

De esta igualdad y de la simetría de ∇ se demuestra que,

$$(5.3.24) \quad d\omega_i(X, Y, Z) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Del mismo modo, como $\nabla\eta_i = 0$ tenemos que, para todo $X, Y \in \chi(M)$,

$$X\eta_i(Y) = \eta_i(\nabla_X Y),$$

lo que, con la simetría de ∇ , nos permite probar que

$$(5.3.25) \quad d\eta_i(X, Y) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Las condiciones (5.3.24) y (5.3.25) junto a la integrabilidad de V prueban la integrabilidad de la estructura casi k -cosimpléctica, para $k > 1$, en virtud del Teorema 5.2.1.

Si $k = 1$ hay que comprobar también la condición $[\xi, V] \subset V$, [LMOS3]. Para ello, sea ξ el campo de Reeb asociado a la estructura casi cotangente estable y sea $X \in V$.

Por (5.3.23) se obtiene que:

$$[\xi, X] = \nabla_\xi X - \nabla_X \xi,$$

y puesto que $\nabla V \subset V$ y $X \in V$ entonces $\nabla_\xi X \in V$.

Si $Y \in \chi(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} \eta(\nabla_X \xi) &= \nabla_X(\eta(\xi)) - (\nabla_X \eta)(\xi) \\ &= \nabla_X 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \omega(\nabla_X \xi, Y) &= \nabla_X(\omega(\xi, Y)) - \omega(\xi, \nabla_X Y) \\ &\quad - (\nabla_X \omega)(\xi, Y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $\nabla\eta = 0$ y $\nabla\omega = 0$.

De este modo

$$\nabla_X \xi \in \ker \eta \cap \ker \omega,$$

con lo que

$$[\xi, X] = \nabla_\xi X \in V.$$

Por lo tanto,

$$(5.3.26) \quad [\xi, V] \subset V. \square$$

5.4 Caracterizaciones del fibrado $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$

En esta sección utilizamos de nuevo los métodos de Crampin-Thompson y de Nagano para caracterizar en qué condiciones una variedad diferenciable M de dimensión $k(n+1) + n$ se puede identificar con el fibrado estable cotangente de las k^1 -covelocidades $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ para alguna variedad Q de dimensión n .

5.4.1 Método de Crampin-Thompson

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1) + n$ dotada de una estructura k -cosimpléctica $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$.

Denotamos, para todo $1 \leq i \leq k$,

$$V_i = \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap_{j \neq i} \ker \omega_j,$$

de modo que,

$$K_i = \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker \omega_i = \oplus_{j \neq i} V_j.$$

Para todo $1 \leq i \leq k$, V y K_i son distribuciones involutivas que definen foliaciones sobre M .

Si ξ_1, \dots, ξ_k son los campos de Reeb asociados a la estructura k -cosimpléctica entonces definimos, también para cada $1 \leq i \leq k$, las siguientes distribuciones:

$$\begin{aligned} W &= \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \oplus V, \\ W_i &= \langle \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k \rangle \oplus K_i. \end{aligned}$$

W y W_i son también distribuciones involutivas y tienen, respectivamente, dimensiones $k(n+1)$ y $(n+1)(k-1)$.

Análogamente al caso de las estructuras casi k -cotangentes [M], introducimos la siguiente definición:

Definición 5.4.1 *Se dice que la estructura k -cosimpléctica (η_i, ω_i, V) define una fibración sobre M cuando se verifican las siguientes condiciones.*

1. *El espacio de las hojas $M_i = M/W_i$ definido por la distribución involutiva W_i es una variedad cociente de M , con lo que la proyección canónica $p_i : M \rightarrow M_i$ es una fibración cuyas fibras son las hojas de W_i para cada $1 \leq i \leq k$.*
2. *El espacio de las hojas $Q = M/W$ definido por la distribución involutiva W es una variedad cociente de M con lo que la proyección canónica $p : M \rightarrow Q$ es una fibración cuyas fibras son las hojas de W .*

Tenemos entonces los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p_i} & M_i \\ & \searrow p & \nearrow \sigma_i \\ & Q & \end{array}$$

tales que, en un sistema de coordenadas adaptadas,

$$\begin{aligned} p_i(t_1, \dots, t_k, x^\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^k) &= (t_i, x^\alpha, x_\alpha^i), \\ p(t_1, \dots, t_k, x^\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^k) &= (x^\alpha), \\ \sigma_i(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i) &= (x^\alpha). \end{aligned}$$

De la definición de las W_i se deduce que,

$$W_i = \ker \eta_i \cap \ker \omega_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Utilizando esta condición se prueba que sobre M_i se pueden definir una 1-forma $\bar{\eta}_i$ y una 2-forma $\bar{\omega}_i$ por:

$$\bar{\eta}_i(X) = \eta_i(\bar{X}), \quad \bar{\omega}_i(X, Y) = \omega_i(\bar{X}, \bar{Y}),$$

para todo $1 \leq i \leq k$, y con $\bar{X}, \bar{Y} \in TM$ tales que $(p_i)_*(\bar{X}) = X$ y $(p_i)_*(\bar{Y}) = Y$.

En el sistema de coordenadas $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i; 1 \leq \alpha \leq n)$ sobre M_i se obtiene que,

$$\bar{\eta}_i = dt_i, \quad \bar{\omega}_i = dx^\alpha \wedge dx_\alpha^i,$$

para cada $1 \leq i \leq k$, con lo que es inmediato que $(\bar{\eta}_i, \bar{\omega}_i)$ es una estructura cosimpléctica sobre M_i .

Además, dado que $W_i \cap V_i = 0$, V_i induce sobre M_i una distribución involutiva $\bar{V}_i = (Tp_i)V_i$ para $1 \leq i \leq k$. Las hojas de V_i proyectan en las hojas de \bar{V}_i por p_i de modo que σ_i es una fibración cuyas fibras son las hojas de \bar{V}_i .

De nuevo, tomando un sistema de coordenadas adaptadas en M y el sistema de coordenadas $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i; 1 \leq \alpha \leq n)$ inducido en M_i se comprueba que,

$$\bar{V}_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}; 1 \leq \alpha \leq n \right\rangle,$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

Con estas expresiones locales es inmediato [LMOS3] probar que $(\overline{\eta}_i, \overline{\omega}_i, \overline{V}_i)$ es una estructura casi cotangente estable sobre M_i .

La siguiente construcción sobre una variedad k -cosimpléctica que define una fibración, generaliza la construcción de los levantamientos (i) -verticales sobre el fibrado estable cotangente de las k^1 -covelocidades.

Definición 5.4.2 Sea $y \in M$ tal que $p(y) = x$ y $p_i(y) = y_i$ para cada $1 \leq i \leq k$. Si $\beta \in T_x^*Q$, el i -levantamiento vertical de β a T_yM es el único vector $\beta^{(i)} \in T_yM$ tal que $\beta^{(i)} \in V_i(y)$ y además

$$\iota_{T_{p_i}\beta^{(i)}}\overline{\eta}_i = 0, \quad \iota_{T_{p_i}\beta^{(i)}}\overline{\omega}_i = (\sigma_i)^*\beta.$$

$\beta^{(i)}$ está así bien definido, puesto que $V_i(y)$ y $T_{y_i}M_i$ son isomorfos, y si $\beta = \beta_\alpha dx^\alpha$, entonces $\beta^{(i)}$ se escribe localmente por

$$\beta^{(i)} = -\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

De este modo, dada una 1-forma β sobre Q , existen k campos de vectores $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(k)}$ sobre M tales que $\beta^{(i)} \in V_i$ para $1 \leq i \leq k$.

Proposición 5.4.1 Dadas las 1-formas β, γ sobre Q y dados los k campos de Reeb ξ_1, \dots, ξ_k sobre M asociados a la estructura casi k -cotangente estable, se deduce que,

$$[\beta^{(i)}, \gamma^{(j)}] = 0, \quad [\beta^{(i)}, \xi_j] = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Demostración

Ambas igualdades son inmediatas a partir de las expresiones locales correspondientes. \square

Por lo visto en la Sección 5.3.2 sabemos que, por ser $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ una estructura k -cosimpléctica, existe sobre M una conexión simétrica adaptada a la estructura. Se puede probar, en estas condiciones, el siguiente resultado:

Proposición 5.4.2 Si ∇ es una conexión simétrica adaptada a la estructura k -cosimpléctica sobre M que define una fibración, entonces ∇ induce, por restricción, una conexión llana sobre cada hoja de las fibraciones $p_i: M \rightarrow M_i$.

Demostración

Basta probar que,

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j = 0, \quad \nabla_{\beta^{(i)}} \gamma^{(j)} = 0, \quad \nabla_{\xi_i} \beta^{(j)} = 0, \quad \nabla_{\beta^{(i)}} \xi_j = 0,$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$ y para cualesquiera 1-formas β, γ sobre Q . Para cada uno de estos campos de vectores se comprueba que:

$$\eta_s(\nabla_{\xi_i} \xi_j) = \eta_s(\nabla_{\beta^{(i)}} \gamma^{(j)}) = \eta_s(\nabla_{\xi_i} \beta^{(j)}) = \eta_s(\nabla_{\beta^{(i)}} \xi_j) = 0,$$

para todos $1 \leq i, j, s \leq k$, y también:

$$\omega_s(\nabla_{\xi_i} \xi_j, Z) = \omega_s(\nabla_{\beta^{(i)}} \gamma^{(j)}, Z) = \omega_s(\nabla_{\xi_i} \beta^{(j)}, Z) = \omega_s(\nabla_{\beta^{(i)}} \xi_j, Z) = 0,$$

para todos $1 \leq i, j, s \leq k$ y para cada campo de vectores Z sobre M . De hecho basta comprobarlo tomando, $Z = \xi_l$, $Z = \sigma^{(l)}$ con σ una 1-forma sobre Q y Z un campo de vectores sobre M , de modo que, en cada punto de $x \in M$, Z_x está en el espacio complementario a $V(x)$ en $\bigcap_{i=1}^k \ker \eta_i(x)$. Para ello se utiliza la Proposición 5.4.1. \square

Estamos ahora en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.4.1 *Sea $(M, \eta_1, \dots, \eta_k, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ una variedad k -cosimpléctica que define una fibración $p : M \rightarrow Q$. Sea ∇ una conexión simétrica adaptada a la estructura de modo que la conexión llana inducida sobre cada hoja de las distribuciones $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ y W , es geodésicamente completa. Si además cada fibra de p es conexa y simplemente conexa y cada hoja de $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ es conexa para todo $1 \leq i \leq k$, entonces M es un fibrado afín modelado sobre el fibrado vectorial $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$. Por lo tanto, cada vez que tomemos una sección global $s : Q \rightarrow M$ podemos definir un difeomorfismo $F_s : M \rightarrow \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ con s jugando el papel de sección cero.*

Demostración

Teniendo en cuenta la Definición 1.3.1 de fibrado afín modelado sobre un fibrado vectorial, hemos de definir una aplicación,

$$\rho : M \times_Q (\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \longrightarrow M,$$

de modo que para cada punto $z \in Q$,

$$\rho_z : p^{-1}(z) \times (\tau^k)^{-1}(z) \longrightarrow p^{-1}(z),$$

sea una acción libre y transitiva de $(\tau^k)^{-1}(z) = \mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*Q)_z$ sobre $p^{-1}(z)$.

Para cada $\beta \in T^*Q$ y cada $t \in \mathbf{R}^k$ definimos k vectores $(\hat{\beta}_i^{t_i})_x$, $1 \leq i \leq k$, en $x \in p^{-1}(z) \subset M$ por

$$(\hat{\beta}_i^{t_i})_x = t_i \xi_i(x) + \beta_x^{(i)}.$$

De este modo,

$$(\hat{\beta}^t)_x = ((\hat{\beta}_1^{t_1})_x, \dots, (\hat{\beta}_k^{t_k})_x) \in (T_k^1 M)_x.$$

Por la Proposición 5.4.2 sabemos que, si ∇ es la conexión simétrica adaptada a la estructura casi estable k -cotangente, entonces,

$$\nabla_{\hat{\beta}_i^{t_i}} \hat{\beta}_i^{t_i} = 0,$$

con lo que $\hat{\beta}_i^{t_i}$ es un campo de vectores geodésico. Puesto que la conexión que ∇ induce sobre las hojas de las fibraciones p y σ_i es geodésicamente completa, el campo $\hat{\beta}_i^{t_i}$ es completo para todo $1 \leq i \leq k$.

Cada $\hat{\beta}_i^{t_i}$ genera un grupo 1-paramétrico global de transformaciones,

$$\phi_{\hat{\beta}_i^{t_i}} : \mathbf{R} \times p^{-1}(z) \rightarrow p^{-1}(z).$$

Sea $t \rightarrow \phi_{\hat{\beta}_i^{t_i}}(t, y)$ la curva integral de $\hat{\beta}_i^{t_i}$ tal que $\phi_{\hat{\beta}_i^{t_i}}(0, y) = y \in p^{-1}(z)$.

Definimos

$$\rho_z(y, t_1, \dots, t_k, \beta_1, \dots, \beta_k) = \phi_{\hat{\beta}_k^{t_k}}(1, (\dots, \phi_{\hat{\beta}_2^{t_2}}(1, \phi_{\hat{\beta}_1^{t_1}}(1, y)) \dots)).$$

Probamos ahora que ρ_z es una acción libre y transitiva.

Sean $(t_1, \dots, t_k, \beta_1, \dots, \beta_k)$ y $(s_1, \dots, s_k, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ elementos de $\mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*Q)_z$.

Los campos $\hat{\beta}_i^{t_i}$ y $\hat{\gamma}_j^{s_j}$ verifican,

$$[\hat{\beta}_i^{t_i}, \hat{\gamma}_j^{s_j}] = 0,$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$, con lo que sus flujos asociados conmutan y por tanto su composición es un flujo con generador infinitesimal $\hat{\beta}_i^{t_i} + \hat{\gamma}_j^{s_j}$, es decir,

$$\begin{aligned} \phi_{\hat{\beta}_i^{t_i}}(t, \phi_{\hat{\gamma}_j^{s_j}}(t, y)) &= \phi_{\hat{\gamma}_j^{s_j}}(t, \phi_{\hat{\beta}_i^{t_i}}(t, y)) \\ (5.4.27) \qquad \qquad \qquad &= \phi_{\hat{\beta}_i^{t_i} + \hat{\gamma}_j^{s_j}}(t, y). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_z(\rho_z(y, (t, \beta)), (s, \gamma)) &= \rho_z(\rho_z(y, (s, \gamma)), (t, \beta)) \\ &= \rho_z(y, (t + s, \beta + \gamma)), \end{aligned}$$

lo que prueba que ρ_z define una acción de $\mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*Q)_z$ sobre $p^{-1}(z)$.

Veamos que la acción es transitiva.

A partir de un producto escalar arbitrario $(,)$ sobre T^*Q , definimos una métrica de Riemann g_i en cada hoja de la fibración $\sigma_i : M_i \rightarrow Q$, por,

$$g_i(\tilde{\beta}_i^{t_i}, \tilde{\gamma}_i^{s_i}) = (\beta_i, \gamma_i) + t_i s_i.$$

Ahora, utilizando que $\nabla_{\tilde{\beta}_i^{t_i}} \tilde{\gamma}_i^{s_i} = 0$ para todos $t_i, s_i \in \mathbf{R}$ y para todos $\beta, \gamma \in T^*Q$ y que $g_i(\tilde{\beta}_i^{t_i}, \tilde{\gamma}_i^{s_i})$ es constante en todo $\sigma_i^{-1}(z)$, se prueba que $\nabla g_i = 0$ con lo que ∇ es la conexión de Riemann de la métrica g_i para todo $1 \leq i \leq k$ y cada hoja de la foliación definida por $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ es una variedad de Riemann geodésicamente completa.

Como cada una de las distribuciones $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ es integrable, también son integrables todas las sumas directas $(\langle \xi_i \rangle \oplus V_i) \oplus (\langle \xi_j \rangle \oplus V_j)$, y también $T_x p^{-1}(z) = \langle \xi_1 \rangle \oplus V_1 \oplus \dots \oplus \langle \xi_k \rangle \oplus V_k$. Utilizando [K], en cada punto $x \in p^{-1}(z)$, podemos encontrar un entorno cúbico de x en $p^{-1}(z)$ con coordenadas $(t_1, \dots, t_k, v_1^\alpha, \dots, v_k^\alpha)$ tal que

$$\langle \xi_i \rangle \oplus V_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha^i} \right\rangle_{1 \leq \alpha \leq n}.$$

Sean $y, y' \in p^{-1}(z)$. Si y y y' están en un mismo entorno coordenado del tipo anterior, entonces:

$$y = (a_1, a_2, \dots, a_k, u_1^\alpha, u_2^\alpha, \dots, u_k^\alpha),$$

$$y' = (b_1, b_2, \dots, b_k, v_1^\alpha, v_2^\alpha, \dots, v_k^\alpha).$$

Tomamos $k-1$ puntos $y_i, 1 \leq i \leq k-1$, dados por

$$y_i = (b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_k, v_1^\alpha, \dots, v_i^\alpha, u_{i+1}^\alpha, \dots, u_k^\alpha).$$

De este modo $y_i \in U$ para todo $1 \leq i \leq k-1$ y además, la sucesión finita

$$\{y_0 = y, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k = y'\},$$

verifica que cada par de puntos $\{y_{i-1}, y_i\}$ está en la hoja H_i correspondiente a $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ para todo $0 \leq i \leq k$. Utilizando el Teorema de Hopf-Rinow, (las hojas H_i son todas geodésicamente completas), y_{i-1} y y_i se pueden unir por una geodésica γ_i contenida en la hoja H_i :

$$y_i = (\gamma_i)_{\tilde{\beta}_i^{s_i}}(1, y_{i-1}),$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 y' &= \gamma_{\hat{\beta}_k^{s_k}}(1, y_{k-1}) \\
 &= \gamma_{\hat{\beta}_k^{s_k}}(1, \gamma_{\hat{\beta}_{k-1}^{s_{k-1}}}(1, y_{k-2})) \\
 &= \dots \\
 &= \gamma_{\hat{\beta}_k^{s_k}}(1, \gamma_{\hat{\beta}_{k-1}^{s_{k-1}}}(1, \dots, \gamma_{\hat{\beta}_1^{s_1}}(1, y)) \dots) \\
 &= \rho_z(y, (s, \beta)),
 \end{aligned}$$

donde $(s, \beta) = (s_1, \dots, s_k, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*N$.

Si y e y' no están en un mismo entorno cúbico del tipo descrito, entonces, por ser $p^{-1}(z)$ conexo, podemos unir y e y' por una sucesión finita de entornos de ese tipo U_1, \dots, U_n tales que $y \in U_1$, $y' \in U_n$ y $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Tomamos la sucesión formada por $n+1$ puntos $\{y_0 = y, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = y'\}$ tales que $y_i, y_{i+1} \in U_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq n$, de modo que

$$y_{i+1} = \rho_z(y_i, (s_{i+1}, X_{i+1})),$$

con $(s_i, \beta_i) \in \mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*N)_z$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Así

$$\begin{aligned}
 y' &= \rho_z(y_{n-1}, (s_n, \beta_n)) \\
 &= \rho_z(y_{n-2}, (s_{n-1}, \beta_{n-1}) + (s_n, X_n)) \\
 &= \dots \\
 &= \rho_z(y, (s_1, \beta_1) + \dots + (s_n, \beta_n)),
 \end{aligned}$$

con lo que ρ_z es transitiva.

Veamos que además es una acción libre.

Para ello hemos de ver que el grupo de isotropía:

$$\Gamma(y) = \{(t, \beta) \in \mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*Q)_z / \rho_z(y, (t, \beta)) = y\}.$$

es trivial.

Puesto que la acción es transitiva, la órbita es

$$p^{-1}(z) = \frac{\mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*Q)_z}{\Gamma(y)},$$

pero como $\dim p^{-1}(z) = (n+1)k = \dim (\mathbf{R}^k \times ((T^1)^k)^*Q)_z$ $\dim \Gamma(y) = 0$ y $\Gamma(y)$ es un grupo discreto.

Si $\Gamma(y)$ no es trivial, sus elementos son combinaciones lineales enteras de m elementos linealmente independientes $(s_1, u_1), \dots, (s_m, u_m)$ de $\mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*N)_z$ con $1 \leq m \leq k(n+1)$.

Se deduce así que

$$p^{-1}(z) = \frac{\mathbf{R}^k \times ((T_k^1)^*Q)_z}{\Gamma(y)} = T^m \times \mathbf{R}^{k(n+1)-m},$$

y puesto que la fibra es simplemente conexa, entonces necesariamente $m = 0$, $\Gamma(y)$ es trivial y ρ_z es libre, lo que finaliza la demostración. \square .

Corolario 5.4.1 Si (M, η_i, ω_i, V) verifica todas las condiciones del Teorema 5.4.1, salvo que las fibras de $p^{-1}(z)$ sean simplemente conexas, y las fibras se consideran mutuamente homeomorfas, entonces $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ es un espacio de revestimiento de M y las hojas de V son de la forma $T^m \times \mathbf{R}^{k(n+1)-m}$, $0 \leq m \leq k(n+1)$. Además, si las hojas de V son compactas, entonces $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ es un espacio de revestimiento de M y las fibras son difeomorfas a $T^{k(n+1)}$.

Proposición 5.4.3 El difeomorfismo F de M en $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ puede elegirse tal que

$$\begin{aligned}\eta_i &= F^*((\eta_i)_0 + (\tau^k)^*\beta_i), \\ \omega_i &= F^*((\omega_i)_0 + (\tau^k)^*\phi_i),\end{aligned}$$

donde $(\eta_i)_0, (\omega_i)_0$ son las formas canónicas en $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$, τ^k es la proyección canónica, β_i son k 1-formas cerradas sobre Q y ϕ_i son 2-formas cerradas sobre Q .

Demostración

Sea $y \in M$ tal que $p(y) = x \in N$ y que

$$F(y) = (s_1, \dots, s_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*N.$$

Si $\varphi_y(t)$ es la curva integral de $\alpha^{(i)}$ que pasa por y , resulta que $F \circ \varphi_y(t)$, que es la curva integral de $F_*(\alpha^{(i)})$ que pasa por $F(y)$, es de la forma

$$F \circ \varphi_y(t) = (s_1, \dots, s_k, \sigma_1, \dots, \sigma_i - t\alpha, \dots, \sigma_k),$$

que, como es fácil comprobar, es la curva integral de $\alpha^{(i)_0}$, levantamiento (i) -vertical de α a $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*N$, que pasa por $F(y)$, lo que prueba que

$$F_*(\alpha^{(i)}) = \alpha^{(i)_0}.$$

Del mismo modo se prueba que los campos de Reeb sobre M están F -relacionadas con los campos de vectores de Reeb sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*N$.

Ahora es inmediato que

$$(\eta_i - F^*((\eta_i)_0)|_{\langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \oplus V} = 0,$$

$$(\omega_i - F^*((\omega_i)_0)|_{\langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \oplus V} = 0,$$

con lo que existen una 1-forma β_i y una 2-forma ϕ_i sobre M tales que

$$\eta_i - F^*((\eta_i)_0) = p^*\beta,$$

$$\omega_i - F^*((\omega_i)_0) = p^*\phi,$$

de donde se sigue el resultado. \square

A continuación damos una clasificación las estructuras k -cosimplécticas que verifican las condiciones del Teorema 5.4.1 de modo análogo a la clasificación de las estructuras casi k -cotangentes regulares citada en el Capítulo 1, [M], [LMS2].

Definición 5.4.3 *Las estructuras k -cosimplécticas que satisfacen todas las hipótesis del Teorema 5.4.1 se dice que son regulares.*

Dos variedades k -cosimplécticas regulares $(M, p, Q, \eta_i, \omega_i, V)$ y $(\overline{M}, \overline{p}, Q, \overline{\eta}_i, \overline{\omega}_i, \overline{V})$ sobre la misma variedad Q son equivalentes si existe un homomorfismo de fibrados $F : M \rightarrow \overline{M}$ sobre la identidad de Q tal que,

$$F^*\overline{\eta}_i - \eta_i = p^*(df_i), \quad F^*\overline{\omega}_i - \omega_i = p^*(d\beta_i),$$

para todo $1 \leq i \leq k$, donde f_i es una función sobre Q y β_i una 1-forma sobre Q . De este modo $F^*\overline{\eta}_i - \eta_i$ y $F^*\overline{\omega}_i - \omega_i$ son cohomólogos a cero para todo $1 \leq i \leq k$.

Proposición 5.4.4 *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de equivalencia de estructuras k -cosimplécticas regulares para una variedad Q fija y los elementos de*

$$(H^1(Q, \mathbf{R}) \times \dots \times H^1(Q, \mathbf{R})) \oplus (H^2(Q, \mathbf{R}) \times \dots \times H^2(Q, \mathbf{R})),$$

donde $H^1(Q, \mathbf{R})$ y $H^2(Q, \mathbf{R})$ son respectivamente el primer y el segundo grupos de cohomología de de Rham de Q .

Demostración

Denotamos por F_s el difeomorfismo de M en $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ definido a partir de la sección s de Q en M tal que, para todo $1 \leq i \leq k$,

$$\eta_i = F_s^*(\eta_i)_0 + p^*(\beta_i)_s, \quad \omega_i = F_s^*(\omega_i)_0 + p^*(\phi_i)_s,$$

y la clase de equivalencia de la variedad casi k -cotangente estable regular $(M, p, Q, \eta_i, \omega_i, V_i)$ le asociamos el elemento de $(H^1(Q, \mathbf{R}) \times \dots \times H^1(Q, \mathbf{R})) \oplus (H^2(Q, \mathbf{R}) \times \dots \times H^2(Q, \mathbf{R}))$ determinado por:

$$([\beta_1]_s, \dots, [\beta_k]_s, [\phi_1]_s, \dots, [\phi_k]_s).$$

Esta correspondencia está bien definida y es biyectiva, lo que completa la demostración de la proposición. \square

5.4.2 Método de Nagano

Sabemos (Ejemplo 5.1.1) que el fibrado cotangente estable $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ sobre una variedad Q está dotado, de forma canónica, de una estructura k -cosimpléctica $(\eta_1, \dots, \eta_k, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$. Localmente, en un sistema de coordenadas $(t_1, \dots, t_k, u^\alpha, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k; 1 \leq \alpha \leq n)$ definido por (5.1.14) a partir de un sistema de coordenadas $(u^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n)$ sobre Q , se verifica

$$(5.4.28) \quad \eta_i = dt_i, \quad \omega_i = du^\alpha \wedge du_\alpha^i, \quad V_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \right\rangle_{\alpha=1, \dots, n},$$

donde cada V_i es la distribución de dimensión n definida por (5.1.4) para todo $1 \leq i \leq k$.

Consideramos los fibrados vectoriales,

$$\begin{aligned} \rho^i: \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow \mathbf{R}^k \times (T_{k-1}^1)^*Q \\ (t, \theta^1, \dots, \theta^k) &\longrightarrow (t, \theta^1, \dots, \hat{\theta}^i, \dots, \theta^k). \end{aligned}$$

definidos en la Sección 5.1 y denotamos por \overline{C}_i los campos de vectores canónicos sobre este fibrado. Localmente,

$$\overline{C}_i = \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^i \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}.$$

Si además ξ_1, \dots, ξ_k son los campos de Reeb sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ asociados a la estructura canónica (5.4.28) y llamamos C_1, \dots, C_k a los k campos de vectores sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ definidos globalmente por

$$C_i = t_i \xi_i + \overline{C}_i$$

para cada $1 \leq i \leq k$, entonces es fácil comprobar que el campo de vectores $C = C_1 + \dots + C_k$ verifica las condiciones *i) – iv)* de la Sección 1.3 y que los campos $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ verifican:

$$\iota_{\overline{C}_i} \eta_j = 0, \quad \iota_{\overline{C}_i} \omega_j = \delta_{ij} \lambda_j,$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son las k 1-formas canónicas sobre el fibrado $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ definidas en la Sección 5.1 y donde $1 \leq i, j \leq k$.

El siguiente resultado caracteriza en qué condiciones una variedad diferenciable dotada de una estructura k -cosimpléctica es el fibrado cotangente estable de las k^1 -covelocidades sobre una variedad diferenciable.

Teorema 5.4.2 *Sea M una variedad de dimensión $k(n+1) + n$ dotada de una estructura k -cosimpléctica $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ tal que las 1-formas η_i y las 2-formas ω_i son globalmente exactas, es decir, existen k funciones f_i y k 1-formas α_i tales que,*

$$\eta_i = df_i, \quad \omega_i = d\alpha_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$ y con $(\alpha_i)|_V = 0$ y $\alpha_i(\xi_j) = 0$.

Sean $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ los campos de vectores sobre M definidos por

$$\iota_{\overline{C}_i} \eta_j = 0, \quad \iota_{\overline{C}_i} \omega_j = \delta_{ij} \alpha_j,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Sean C_1, \dots, C_k los campos de vectores sobre M definidos por

$$C_i = f_i \xi_i + \overline{C}_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, de modo que

$$\iota_{C_i} \eta_j = \delta_{ij} f_j, \quad \iota_{C_i} \omega_j = \delta_{ij} \alpha_j.$$

Si C_1, \dots, C_k verifican las condiciones *i) – ii)* del Teorema de Nagano, entonces existe un única estructura de fibrado vectorial sobre M que es isomorfa al fibrado cotangente estable de las k^1 -covelocidades de la subvariedad singular S de $C = C_1 + \dots + C_k$. Además este isomorfismo transporta la estructura k -cosimpléctica canónica y los campos de vectores canónicos de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*S$ a (η_i, ω_i, V) y C_1, \dots, C_k , respectivamente.

Demostración

Por ser (η_i, ω_i, V_i) integrable existe sobre M un sistema de coordenadas locales $(\bar{t}_i, \bar{x}^\alpha, \bar{x}_\alpha^i)$ sobre M adaptados a la estructura, es decir,

$$\eta_i = d\bar{t}_i, \quad \omega_i = d\bar{x}^\alpha \wedge d\bar{x}_\alpha^i, \quad V_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha^i} \right\rangle_{\alpha=1, \dots, n}.$$

donde, para $1 \leq i \leq k$, las V_i son las distribuciones de dimensión n definidas por (5.1.11).

Si las formas presimplécticas son globalmente exactas, esto es $\omega_i = -d\alpha_i$, entonces, utilizando que $(\alpha_i)_{|V} = 0$ y que $\alpha_i(\xi_j) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{x}_\alpha^i d\bar{x}^\alpha + dg_i \\ &= (\bar{x}_\alpha^i + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}^\alpha}) d\bar{x}^\alpha + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{t}_j} d\bar{t}_j + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}_\alpha^j} d\bar{x}_\alpha^j \\ &= (\bar{x}_\alpha^i + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}^\alpha}) d\bar{x}^\alpha. \end{aligned}$$

Puesto que $\eta_i = df_i = d\bar{t}_i$, es

$$f_i = \bar{t}_i + c_i,$$

para alguna constante c_i .

Definimos un nuevo sistema de coordenadas locales sobre M , $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i)$ por:

$$t_i = \bar{t}_i + c_i, \quad x^\alpha = \bar{x}^\alpha, \quad x_\alpha^i = \bar{x}_\alpha^i + \frac{g_i}{\partial \bar{x}^\alpha}.$$

Entonces

$$\omega_i = -d\alpha_i = -d(x_\alpha^i dx^\alpha), \quad \eta_i = df_i = dt_i,$$

con

$$\alpha_i = x_\alpha^i dx^\alpha, \quad f_i = t_i.$$

Localmente, si $\bar{C}_i = A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} + (A_i)^j_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha^j}$, se deduce

$$\begin{aligned} \iota_{\bar{C}_i} \omega_j &= \iota_{(A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} + (A_i)^j_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha^j})} (dx^\beta \wedge dx_\beta^j) \\ &= A_i^\alpha dx_\alpha^j - (A_i)^j_\alpha dx^\alpha \\ &= -\delta_{ij} x_\alpha^j dx^\alpha, \end{aligned}$$

de donde

$$A_i^\alpha = 0, \quad (A_i)_\alpha^j = \delta_{ij} x_\alpha^j,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k, 1 \leq \alpha \leq n$.

Se deduce que

$$\bar{C}_i = \sum_\alpha x_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

y, evidentemente,

$$C_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_\alpha x_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} C &= C_1 + \dots + C_k \\ &= \sum_{i=1}^k t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{i,\alpha} x_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}. \end{aligned}$$

En consecuencia, en las coordenadas $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i)$ el conjunto S formado por los puntos singulares de C está definido por $t_1 = \dots = t_k = x_\alpha^1 = \dots = x_\alpha^k = 0$ con lo que S es una subvariedad de M de dimensión n y C verifica la condición *iv*).

La condición *iii*) se sigue de forma inmediata de las expresiones locales de C y A_C , (Sección 1.3).

Puesto que C_1, \dots, C_k verifican, por hipótesis, las condiciones *i*) y *ii*), puede comprobarse, de modo análogo al Teorema 1.3.4, que son ciertas para C , con lo que C verifica las cuatro condiciones *i*) – *iv*) del Teorema de Nagano y por lo tanto podemos asegurar que M tiene una estructura única de fibrado vectorial sobre S tal que C es el campo de vectores canónico. De hecho sabemos que existe un isomorfismo entre $N(S)$, fibrado normal de S , y M tal que:

$$\begin{array}{ccc} N(S) & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & S \end{array}$$

es conmutativo.

Utilizando la expresión local de A_C se comprueba que

$$A_C\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad A_C\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right) = 0, \quad A_C\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

para todos $1 \leq i \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} N_x S &= \text{Im}(A_C)_x \\ &= \left\{ X \in T_x M / X = X^i \frac{\partial}{\partial t_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}, \\ T_x S &= \text{ker}(A_C)_x \\ &= \left\{ X \in T_x M / X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

de modo que

$$N_x S = \langle \xi_1 \rangle_x \oplus \dots \oplus \langle \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x).$$

En cada punto $x \in S$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre las fibras

$$\phi_x : N_x S \longrightarrow M_x.$$

Por lo tanto existe un isomorfismo de espacios vectoriales

$$F_x : T_x S \oplus N_x S = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus T_x S \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \rightarrow T_x S \oplus M_x,$$

y se puede definir otro isomorfismo

$$G_x : T_x S \oplus M_x \rightarrow \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S,$$

de modo análogo a como se hizo en la demostración del Teorema 1.3.4, teniendo en cuenta que, si

$$(f_i, 0) = F_x(0, \dots, \xi_i(x), \dots, 0, 0, \dots, 0),$$

para todo $1 \leq i \leq k$ y para $0 \in M_x$, entonces,

$$G_x(r f_i, 0) = (0, \dots, r, \dots, 0, \dots, 0),$$

con $r \in \mathbf{R}$ situado en la i -ésima copia de \mathbf{R} .

Tal como se hacía en el Teorema 1.3.4 para la estructura k -simpléctica canónica de $(T_k^1)^*S$, se prueba que la estructura k -cosimpléctica canónica del espacio tangente a $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*S$ en un punto, se puede considerar en el espacio vectorial $\mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus T_x^* S \oplus \dots \oplus T_x^* S$.

Además, también de modo análogo a lo hecho en el Teorema 1.3.4, se comprueba que G_x es un k -cosimplectomorfismo.

Como los campos de vectores C_i están caracterizados por su producto interior con las η_j y las ω_j , el isomorfismo construido lleva estos campos en los campos fundamentales del fibrado $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*S$. \square

Capítulo 6

Variedades casi k -tangente estables

6.1 Estructuras casi k -tangente estables

Consideramos la variedad $J^1(\mathbf{R}^k, Q)$ de jets de aplicaciones $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$. La estructura geométrica canónica de esta variedad es el modelo utilizado para definir las estructuras casi k -tangente estables.

6.1.1 El fibrado tangente estable de las k^1 -velocidades

Ejemplo 6.1.1 Dada una variedad diferenciable Q de dimensión n , el fibrado tangente estable de las k^1 -velocidades sobre Q es el fibrado de jets de aplicaciones $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$, que denotamos $J^1(\mathbf{R}^k, Q)$.

Para cualquier $t \in \mathbf{R}^k$ sea $j_t^1 \sigma$ el 1-jet de σ en t . Definimos la traslación

$$\begin{aligned}\tau_t : \mathbf{R}^k &\longrightarrow Q \\ s &\longrightarrow \tau_t(s) = t + s,\end{aligned}$$

y una aplicación

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{R}^k &\longrightarrow Q \\ s &\longrightarrow \sigma(\tau_t(s)).\end{aligned}$$

que verifica $\varphi(0) = \sigma(t)$.

La aplicación

$$\begin{aligned}J^1(\mathbf{R}^k, Q) &\longrightarrow \mathbf{R}^k \times J_0^1(\mathbf{R}^k, Q) \\ j_t^1 \sigma &\longrightarrow (t, j_0^1 \varphi),\end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Recordando el Ejemplo 2.1.1, podemos hacer la identificación,

$$J^1(\mathbf{R}^k, Q) \equiv \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q,$$

y se pueden introducir coordenadas locales fibradas $(t_i, u^\alpha, v_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$, en $J^1(\mathbf{R}^k, Q)$ definidas por

$$(6.1.1) \quad \begin{aligned} t_i(t, j_0^1 \sigma) &= t_i(t), \\ u^\alpha(t, j_0^1 \sigma) &= u^\alpha(\sigma(0)), \\ v_i^\alpha(t, j_0^1 \sigma) &= \frac{\partial(u^\alpha \circ \sigma)}{\partial t_i} \Big|_0. \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ es una variedad de dimensión $k(n+1) + n$. Denotamos por

$$\pi^k : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow Q$$

la proyección canónica definida por $\pi^k(t, j_0^1 \sigma) = \sigma(0)$.

Consideramos sobre $T_k^1 Q$ J_1, \dots, J_k los k campos de tensores de tipo $(1, 1)$ descritos en el Ejemplo 2.1.1 y definidos localmente por (2.1.7) y, a partir de ellos, definimos sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ k campos de tensores \bar{J}_i de tipo $(1, 1)$ por

$$(6.1.2) \quad \bar{J}_i = J_i + \frac{\partial}{\partial t_i} \otimes dt_i,$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

Localmente,

$$(6.1.3) \quad \bar{J}_i = \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} \otimes du^\alpha + \frac{\partial}{\partial t_i} \otimes dt_i.$$

Si además definimos k 1-formas η_1, \dots, η_k sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ por

$$(6.1.4) \quad \eta_i = dt_i,$$

para $1 \leq i \leq k$, y k campos de vectores ξ_1, \dots, ξ_k por

$$(6.1.5) \quad \xi_i = \frac{\partial}{\partial t_i},$$

para $1 \leq i \leq k$, entonces, utilizando las expresiones locales (6.1.3), (6.1.4) y (6.1.5), es inmediato comprobar que la familia $(\xi_i, \bar{J}_j, \eta_i)$ verifica las siguientes condiciones

1. $\bar{J}_i \circ \bar{J}_j = \bar{J}_j \circ \bar{J}_i = \delta_{ij} \xi_j \otimes \eta_j$,
2. rango $\bar{J}_i = n + 1$,
3. $\text{Im} \bar{J}_i \cap (+_{j \neq i} \text{Im} \bar{J}_j) = 0$,
4. $\eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$,

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Si $k = 1$, la familia (ξ, \bar{J}, η) satisface:

- i) $\eta(\xi) = 1$,
- ii) $\bar{J}^2 = \xi \otimes \eta$,
- iii) rango $\bar{J} = n + 1$,

y (ξ, \bar{J}, η) es la estructura casi tangente estable canónica sobre $\mathbf{R} \times TQ$ descrita en [0].

6.1.2 Estructuras casi k -tangente estables

Tomando como modelo el ejemplo anterior definimos del modo siguiente las estructuras casi k -tangente estables.

Definición 6.1.1 Sea M una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1)+n$. Una familia $(\xi_1, \dots, \xi_k, J_1, \dots, J_k, \eta_1, \dots, \eta_k)$ formada por k campos de vectores ξ_1, \dots, ξ_k , k campos de tensores J_1, \dots, J_k de tipo $(1, 1)$ y k 1-formas η_1, \dots, η_k , tales que

$$(6.1.6) \quad \begin{aligned} 1) & J_i \circ J_j = J_j \circ J_i = \delta_{ij}(\xi_j \otimes \eta_j), \\ 2) & \text{rango } J_i = n + 1, \\ 3) & \text{Im} J_i \cap (+_{j \neq i} \text{Im} J_j) = 0, \\ 4) & \eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

para $1 \leq i, j \leq k$, se llama una estructura casi k -tangente estable sobre M y se dice que (M, ξ_i, J_i, η_i) es una variedad casi k -tangente estable.

Lema 6.1.1 Si (ξ_i, J_i, η_i) es una estructura casi k -tangente estable sobre Q entonces

$$J_i(\xi_j) = \delta_{ij} \lambda_j \xi_j,$$

con $\lambda_i^2 = 1$, para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Demostración

En efecto,

$$\begin{aligned} J_i \xi_i &= J_i(J_i^2(\xi_i)) \\ &= J_i^3(\xi_i) = J_i^2(J_i(\xi_i)) \\ &= \xi_i \otimes \eta_i(J_i(\xi_i)) \\ &= \eta_i(J_i(\xi_i))\xi_i. \end{aligned}$$

Si $\lambda_i = \eta_i(J_i(\xi_i))$, entonces $J_i(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$, y además

$$\xi_i = J_i^2 \xi_i = J_i(\lambda_i \xi_i) = \lambda_i^2 \xi_i,$$

con lo que $\lambda_i^2 = 1$.

Por último si $i \neq j$,

$$0 = J_i \circ J_j(\xi_j) = J_i(\lambda_j \xi_j) = \lambda_j J_i(\xi_j),$$

con lo que necesariamente $J_i(\xi_j) = 0$ y concluimos la demostración del lema. \square

Si (M, ξ_i, J_i, η_i) es una variedad casi k -tangente estable veamos como construir, en cada punto $x \in M$, las referencias lineales adaptadas a la estructura.

En cada punto $x \in M$, $\xi_i(x) \notin \ker \eta_i(x)$, el espacio tangente $T_x Q$ se descompone como sigue:

$$T_x M = \langle \xi_1 \rangle_x \oplus \ker \eta_1(x) = \dots = \langle \xi_k \rangle_x \oplus \ker \eta_k(x).$$

Si denotamos $W_x = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x$, y K_x es un subespacio complementario de W_x en $T_x M$, entonces

$$T_x M = W_x \oplus K_x = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus K_x.$$

Utilizando el Lema 6.1.1 obtenemos que, para todo $1 \leq i \leq k$, $\xi_i \in \text{Im } J_i$ y que $\langle \xi_i \rangle \cap \langle \xi_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ con lo que ξ_1, \dots, ξ_k son campos de vectores independientes. Teniendo en cuenta la condición 4) de (6.1.6), las formas η_1, \dots, η_k son también independientes.

Puesto que

$$\dim(\ker \eta_1(x) \cap \dots \cap \ker \eta_k(x)) = n + nk,$$

podemos tomar

$$K_x = \ker \eta_1(x) \cap \dots \cap \ker \eta_k(x),$$

y, por lo tanto,

$$(6.1.7) \quad T_x Q = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus (\ker \eta_1(x) \cap \dots \cap \ker \eta_k(x)).$$

Para cada $1 \leq i \leq k$ denotamos:

$$V_i(x) = \text{Im}(J_i(x)|_{K_x}).$$

Se verifica que $V_i(x) \subset K_x$ y $V(x) = V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \subset K_x$ para todo $x \in M$.
Sea H_x un subespacio complementario de V_x en K_x de modo que

$$T_x Q = W_x \oplus H_x \oplus V_x.$$

Consideramos las aplicaciones

$$J_{i|_{H_x}} : H_x \longrightarrow V_i(x),$$

para cada $1 \leq i \leq k$.

A continuación comprobamos que cada $J_{i|_{H_x}}$ es un isomorfismo.

$J_{i|_{H_x}}$ es lineal ya que es la restricción de la aplicación lineal $J_i(x)$ al subespacio H_x .

Sea $Y = J_i(x)(Z)$, con $Z \in K_x$ de modo que $Y \in V_i(x)$. Si $i \neq j$, entonces

$$J_j(x)(Y) = J_j(x)J_i(x)Z = 0,$$

y si $i = j$,

$$J_i(x)(Y) = J_i^2(x)(Z) = \eta_i(x)(Z)\xi_i = 0,$$

pues $Z \in K_x \subset \ker \eta_i(x)$.

Hemos comprobado por lo tanto que $V_i(x) \subset \ker J_j(x)$ para todos $1 \leq i, j \leq k$.
Como además $\text{rango } J_i = n + 1$ y $J_i \xi_j = \delta_{ij} \xi_j$, entonces,

$$\ker J_i(x) = \langle \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x),$$

donde $\hat{}$ sobre un campo significa que tal campo no se considera.

Así pues deducimos que $H_x \cap \ker J_i(x) = 0$ con lo que $J_{i|_{H_x}}$ es inyectiva para todo $1 \leq i \leq k$.

Como $\dim V_i(x) = \text{im } H(x) = n$ entonces, como queríamos comprobar, cada $J_{i|_{H_x}}$ es un isomorfismo.

Se deduce que, si $\{e^\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$ es una base del espacio vectorial H_x , entonces $\{e_i^\alpha = J_i(e^\alpha); 1 \leq \alpha \leq n\}$ es una base de $V_i(x)$ para cada $1 \leq i \leq k$.

En estas condiciones,

$$(6.1.8) \quad \{\xi_1(x), \dots, \xi_k(x), e^\alpha, e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n\}$$

es una base de $T_x Q$.

Definición 6.1.2 Una referencia lineal (6.1.8) en $x \in Q$ obtenida del modo anterior se llama referencia adaptada a la estructura (ξ_i, J_i, η_i) .

De hecho, si $\{\theta^1, \dots, \theta^k, \sigma^\alpha, \beta_\alpha^1, \dots, \beta_\alpha^k\}$ es la correferencia lineal dual, entonces, respecto de esta correferencia:

$$\eta_i(x) = \theta^i,$$

$$(6.1.9) \quad J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, J_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión n y $\lambda_i = \eta_i(J_i(\xi_i))$ para cada $1 \leq i \leq k$.

Las estructuras casi k -tangente estable pueden ser descritas como un cierto tipo de G -estructuras de la forma siguiente.

Escogemos otra referencia $\{\xi_1, \dots, \xi_k, \bar{e}^\alpha, \bar{e}_1^\alpha, \dots, \bar{e}_k^\alpha\}$ también adaptada a la estructura casi k -tangente estable, es decir, $\{\bar{e}^\alpha; 1 \leq \alpha \leq n\}$ es un base de un espacio \bar{H}_x complementario de V_x en K_x y, para cada $1 \leq i \leq k$, $\bar{e}_i^\alpha = J_i \bar{e}^\alpha$.

Es inmediato que las dos referencias adaptadas están relacionadas por una matriz de la forma

$$(6.1.10) \quad \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_k & 0 & \dots & A \end{pmatrix}$$

donde $A \in Gl(n, \mathbf{R})$, $A_i \in gl(n, \mathbf{R})$ para todo $1 \leq i \leq k$ e I_k es la matriz identidad de dimensión k .

Denotamos por G el grupo de todas las matrices de la forma (6.1.10) y por B_G el conjunto de todas las referencias adaptadas a la estructura casi k -tangente estable $\{\xi_1, \dots, \xi_k, J_1, \dots, J_k, \eta_1, \dots, \eta_k\}$.

Trivialmente se verifica que B_G define una G -estructura sobre la variedad M .

Recíprocamente, si sobre M está dada un G -estructura B_G podemos definir una estructura casi k -tangente estable del modo siguiente.

Definimos k campos de tensores J_1, \dots, J_k de tipo $(1, 1)$ por:

$$(J_i)_x(X) = p \circ (J_i)_0 \circ p^{-1}(X),$$

donde $X \in T_x M$, $p \in B_G$ es una referencia lineal en $x \in M$ y, para cada $1 \leq i \leq k$, $(J_i)_0$ es la matriz correspondiente definida en (6.1.9).

Si $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+nk+n}\}$ es la base canónica de \mathbf{R}^{k+nk+n} entonces definimos k campos de vectores ξ_1, \dots, ξ_k sobre M por

$$(\xi_i)_x = p(e_i),$$

con $1 \leq i \leq k$ y $p \in B_G$.

Por último definimos k 1-formas η_1, \dots, η_k sobre M por

$$\eta_i(p(e_j)) = \delta_{ij}, \quad \eta_i(p(e_A)) = 0,$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$, para todo $k+1 \leq A \leq k+nk+n$ y para $p \in B_G$.

Entonces $(\xi_1, \dots, \xi_k, J_1, \dots, J_k, \eta_1, \dots, \eta_k)$ es una estructura casi k -tangente estable bien definida sobre M .

Hemos obtenido entonces el siguiente resultado:

Proposición 6.1.1 *Una variedad M de dimensión $k(n+1)+n$ admite una estructura casi estable k -tangente si y sólo si admite una G -estructura B_G donde G es el grupo de las matrices dadas por (6.1.10).*

Ejemplo 6.1.2 Sea $H(2, 2)$ el subgrupo de Lie de $Gl(6, \mathbf{R})$ de dimensión 8 descrito en la Sección 5.2.1.

Consideramos sobre $H(2, 2)$ la base de 1-formas invariantes a la izquierda dadas por (5.2.20) y sea Γ denota el subgrupo de matrices de $H(2, 2)$ con componentes enteras.

El espacio de clases de equivalencia por la derecha $M(2, 2) = \Gamma/H(2, 2)$ es una nilvariedad compacta de dimensión 8.

Como en la Sección 5.2.1, denotamos por

$$\{\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \gamma^1, \gamma^2\}$$

la base de 1-formas sobre $M(2, 2)$ tales que:

$$\begin{aligned} \pi^* \alpha^i &= dx^i, & \pi^* \beta^i &= dy^i, \\ \pi^* \sigma_j^i &= dz_j^i, & \pi^* \gamma^i &= \tilde{\gamma}^i, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i, j \leq 2$ y $i \neq j$, y donde $\pi : H(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$ es la proyección natural.

Sea

$$\{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, T_1, T_2\}$$

la base dual de $\{\alpha^i, \beta^i, \sigma_j^i, \gamma^i\}$.

Si definimos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta^1, & \eta_2 &= \beta^2, \\ J_1 &= C_1 \otimes \alpha^1 + T_1 \otimes \alpha^2 + B_1 \otimes \beta^1, \\ J_2 &= C_2 \otimes \alpha^1 + T_2 \otimes \alpha^2 + B_2 \otimes \beta^2, \\ \xi_1 &= B_1, & \xi_2 &= B_2, \end{aligned}$$

es fácil comprobar que $\{\eta_i, J_i, \xi_i; 1 \leq i \leq 2\}$ verifica las condiciones de la Definición 6.1.1 y por lo tanto $(M(2, 2), \eta_i, J_i, \xi_i; 1 \leq i \leq 2)$ es una variedad casi 2-tangente estable de dimensión 8.

6.2 Integrabilidad

Establecemos en esta sección las condiciones que aseguran la integrabilidad, como G -estructura, de una estructura casi k -tangente estable. Es decir, las condiciones en las que podemos construir un sistema de coordenadas locales $(t_i, x^\alpha, y_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ tal que la sección

$$(6.2.11) \quad x \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(x), \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x), \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}(x) \right),$$

es una sección local de la G -estructura. Respecto de tal sistema de coordenadas se verifica

$$(6.2.12) \quad \xi_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad J_i = \frac{\partial}{\partial t_i} \otimes dt_i + \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \otimes dx^\alpha, \quad \eta_i = dt_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

En la demostración del teorema de integrabilidad utilizaremos el siguiente Lema, donde $\{, \}$ es el operador descrito en la Definición 2.1.4:

Lema 6.2.1 Si $d\eta_i = 0$ y $\{J_i, J_j\} = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq k$, entonces para todo $k \in K$ y para todo $v \in V$, se verifican:

$$\begin{aligned} [\xi_i, k] &\in K, \\ [\xi_i, v] &\in V, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Además,

$$L_{\xi_i} J_j = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Teorema 6.2.1 Una estructura casi k -tangente estable (ξ_i, J_i, η_i) es integrable si y sólo si, para todo $1 \leq i, j \leq k$,

$$d\eta_i = 0, \quad \{J_i, J_j\} = 0.$$

Demostración

La necesidad es inmediata utilizando las expresiones locales (6.2.12).

En cada punto $x \in M$ consideramos el subfibrado vectorial $K = \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k$ de TM . Hemos visto que

$$T_x M = \langle \xi_1 \rangle_x \oplus \dots \oplus \langle \xi_k \rangle_x \oplus K_x$$

para cada punto $x \in M$.

Las sucesiones,

$$\langle \xi_1 \rangle, \langle \xi_2 \rangle, \dots, \langle \xi_k \rangle, K_x,$$

está en las condiciones del Lema 1.3 de [K], es decir, son todas ellas integrables, las sumas directas dos a dos son también integrables y la suma directa de todas ellas en cada punto es el espacio tangente a M en ese punto. Entonces, para cada punto $x \in M$, existe un sistema de coordenadas locales $(\bar{t}_i, \bar{x}^\alpha, \bar{y}_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ en un entorno \bar{U} de x , tal que:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i} \right\rangle, \\ K &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i^\alpha} \right\rangle_{\substack{1 \leq \alpha \leq n \\ 1 \leq i \leq k}}. \end{aligned}$$

En el entorno \bar{U} puede escribirse, para cada $1 \leq i \leq k$ fijo,

$$\xi_i = f_i \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i},$$

y, como $\eta_j(\xi_i) = \delta_{ij}$, es

$$\eta_i = \frac{1}{f_i} d\bar{t}_i = g_i d\bar{t}_i.$$

Si cada 1-forma η_1, \dots, η_k es cerrada, entonces, para cada $1 \leq i \leq k$ fijo

$$0 = d\eta_i = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{t}_j} d\bar{t}_j \wedge d\bar{t}_i + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha \wedge d\bar{t}_i + \frac{\partial g_i}{\partial \bar{y}_j^\alpha} d\bar{y}_j^\alpha \wedge d\bar{t}_i,$$

de donde se deduce

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^\alpha} = 0 = \frac{\partial g_i}{\partial y_j^\alpha},$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$, y

$$\frac{\partial g_i}{\partial t_j} = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$.

Entonces $g_i = g_i(\bar{t}_i)$ y podemos definir k funciones $h^i = h^i(\bar{t}_i)$ donde cada h^i es una primitiva de la correspondiente g_i .

Podemos definir un nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{t}_i, \tilde{x}^\alpha, \tilde{y}_i^\alpha)$ en un entorno \tilde{U} de x por

$$\tilde{t}_i = h^i(\bar{t}_i), \quad \tilde{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha, \quad \tilde{y}_i^\alpha = \bar{y}_i^\alpha,$$

para $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq \alpha \leq n$.

En este nuevo sistema se verifican,

$$\eta_i = d\tilde{t}_i,$$

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_i},$$

$$K = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \right\rangle \left(\begin{array}{c} 1 \leq \alpha \leq n \\ 1 \leq i \leq k \end{array} \right).$$

Puesto que K es una distribución integrable podemos asegurar que existe una subvariedad integral W de K pasando por x y se comprueba fácilmente que (W, J_1, \dots, J_k) es una variedad casi k -tangente integrable [M].

Entonces existe un entorno coordinado $(U', x^\alpha, y_i^\alpha)$ con $1 \leq i \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$, de x en W tal que

$$J_{i|U'} = \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \otimes dx^\alpha,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Si las funciones coordenadas \tilde{t}_i de \tilde{U} están definidas en el intervalo $(-\epsilon_i, \epsilon_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$, consideramos el entorno coordinado de x en M ,

$$(U = U' \times (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times \dots \times (-\epsilon_k, \epsilon_k), t_i, x^\alpha, y_i^\alpha),$$

con $t_i = \tilde{t}_i$.

En el entorno U de x se verifican

$$\begin{aligned} J_i(\xi_j) &= \delta_{ij} \lambda_j \xi_j, \\ J_i\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) &= (A_{i,\alpha})^j \frac{\partial}{\partial t_j} + (A_{i,\alpha})^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} + (A_{i,\alpha})^j_s \frac{\partial}{\partial y_j^\beta}, \\ J_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}\right) &= (B_{i,\alpha}^j)^s \frac{\partial}{\partial t_s} + (B_{i,\alpha}^j)^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} + (B_{i,\alpha}^j)^s_\beta \frac{\partial}{\partial y_s^\beta}. \end{aligned}$$

De la condición $L_{\xi_i} J_j = 0$ establecida en el Lema 6.2.1, se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_i} (A_{j,\alpha})^s &= 0, & \frac{\partial}{\partial t_i} (B_{j,\alpha}^s)^r &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_i} (A_{j,\alpha})^\beta &= 0, & \frac{\partial}{\partial t_i} (B_{j,\alpha}^s)^\beta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_i} (A_{j,\alpha})^j_s &= 0, & \frac{\partial}{\partial t_i} (B_{j,\alpha}^s)^j_r &= 0, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} (A_{j,\alpha})^r(t_i, x^\sigma, y_i^\sigma) &= (A_{j,\alpha})^r(0, x^\sigma, y_i^\sigma) = 0, \\ (A_{j,\alpha})^\beta(t_i, x^\sigma, y_i^\sigma) &= (A_{j,\alpha})^\beta(0, x^\sigma, y_i^\sigma) = 0, \\ (A_{j,\alpha})^j_s(t_i, x^\sigma, y_i^\sigma) &= (A_{j,\alpha})^j_s(0, x^\sigma, y_i^\sigma) = \delta^{\beta\alpha} \delta_{js}, \\ (B_{j,\alpha}^s)^r(t_i, x^\sigma, y_i^\sigma) &= (B_{j,\alpha}^s)^r(0, x^\sigma, y_i^\sigma) = 0, \\ (B_{j,\alpha}^s)^\beta(t_i, x^\sigma, y_i^\sigma) &= (B_{j,\alpha}^s)^\beta(0, x^\sigma, y_i^\sigma) = 0, \\ (B_{j,\alpha}^s)^j_r(t_i, x^\sigma, y_i^\sigma) &= (B_{j,\alpha}^s)^j_r(0, x^\sigma, y_i^\sigma) = 0. \end{aligned}$$

y por tanto

$$J_i = \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \otimes dx^\alpha,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, y la estructura es integrable. \square

6.2.1 Ejemplo

En el grupo $H(2, 2)$ del Ejemplo de la Sección 5.2.1 una base de campos de vectores invariantes por la izquierda es la dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial z_1^1}, \frac{\partial}{\partial y^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial z_2^2}, \frac{\partial}{\partial z_2^2}, \frac{\partial}{\partial z_2^1}, \frac{\partial}{\partial z_1^2}, \frac{\partial}{\partial z_1^1}, \frac{\partial}{\partial z_2^2} \right\}.$$

La familia $\{\eta_1, \eta_2, J_1, J_2, \xi_1, \xi_2\}$ dada por

$$\begin{aligned}\eta_1 &= dy_1, & \eta_2 &= dy_2, \\ J_1 &= \frac{\partial}{\partial z_1^1} \otimes dx^1 + \frac{\partial}{\partial z_1^1} \otimes dx^2 + \frac{\partial}{\partial y^1} \otimes dy^1, \\ J_2 &= \frac{\partial}{\partial z_1^2} \otimes dx^1 + \frac{\partial}{\partial z_2^2} \otimes dx^1 + \frac{\partial}{\partial y^2} \otimes dy^2, \\ \xi_1 &= \frac{\partial}{\partial y^1}, & \xi_2 &= \frac{\partial}{\partial y^2},\end{aligned}$$

es una estructura casi 2-tangente estable sobre $H(2, 2)$.

Utilizando que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} + x^i \frac{\partial}{\partial z_i^i} \right] = \frac{\partial}{\partial z_i^i},$$

para $1 \leq i \leq 2$ y que los demás corchetes entre elementos de la base de campos de vectores invariantes por la izquierda son cero, se obtiene que:

$$\{J_i, J_j\} = 0,$$

para $1 \leq i, j \leq 2$.

Como además es inmediato que,

$$d\eta_1 = 0 = d\eta_2,$$

entonces la estructura casi 2-tangente estable es integrable.

6.3 Conexiones lineales adaptadas

Como se hizo en el Capítulo 5 para el caso cotangente, estudiamos la existencia y la caracterización de las conexiones lineales adaptadas a las estructuras casi k -tangente estables.

Para ello describimos en primer lugar estas estructuras como estructuras asociadas a tensores definidos sobre el fibrado de las referencias lineales FM de M .

6.3.1 Estructuras definidas a partir de tensores

Denotamos $m = k(n+1) + n$. Para $E_i = (\mathbf{R}^m)^*$ y $E = \bigoplus_{i=1}^k E$ tomamos los elementos $(\eta_0)_i \in E_i$ identificando cada $(\eta_0)_i$ con el elemento e_i correspondiente de la base canónica de \mathbf{R}^m y $\eta_0 = e_1 + \dots + e_k \in E$.

Si $G_{(\eta_0)_i}$ y G_{η_0} son, respectivamente, los grupos de isotropía de $(\eta_0)_i$ y η_0 respecto de las representaciones s_i y s definidas en la Sección 5.3.1, entonces sabemos que dar una $G_{(\eta_0)_i}$ -estructura sobre M es equivalente a dar un tensor u_i sobre FM de tipo (s_i, E_i) y, del mismo modo, dar una G_{η_0} -estructura sobre M es equivalente a dar un tensor u sobre FM de tipo (s, E) .

De hecho, si u es un tensor sobre FM de tipo (s, E) y (u_1, \dots, u_m) son las componentes de u obtenidas a través de las proyecciones canónicas de E en E_i , cada u_i es un tensor sobre FM de tipo (s_i, E_i) y le corresponde una 1-forma η_i sobre M dada por

$$\eta_i(x)(X) = u_i(z)(z^{-1}X),$$

para todo $X \in T_x M$ y z una referencia lineal en $x \in M$.

Sobre M existen una $G_{(\eta_0)_i}$ -estructura,

$$\begin{aligned} B_{G_{(\eta_0)_i}} M &= \{z \in FM / u_i(z) = (\eta_0)_i\} \\ &= \{z \in FM / z^{-1}\eta_i z = (\eta_0)_i\}, \end{aligned}$$

y una G_{η_0} -estructura,

$$B_{\eta_0} M = \bigcap_{i=1}^k B_{G_{(\eta_0)_i}}.$$

Sea ahora $F_i = \text{Hom}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m) = (\mathbf{R}^m)^* \otimes \mathbf{R}^m$ y sea r_i la representación de $Gl(m, \mathbf{R})$ definida por $r_i(A)(f) = AfA^{-1}$,

$$\begin{aligned} r_i : Gl(m, \mathbf{R}) &\longrightarrow Aut(F_i) \\ A &\longrightarrow r_i(A). \end{aligned}$$

Sean $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ y $r = \bigoplus_{i=1}^k r_i$ una representación de $Gl(m, \mathbf{R})$ en F .

Tomando las matrices $(J_1)_0, \dots, (J_k)_0$ dadas por (6.1.9) como elementos de F_1, \dots, F_k respectivamente y $J_0 = (J_1)_0 + \dots + (J_k)_0 \in F$, denotamos por $G_{(J_i)_0}$ y G_{J_0} los grupos de isotropía de $(J_i)_0$ y J_0 respecto de las representaciones r_i y r .

Como sabemos dar una $G_{(J_i)_0}$ -estructura sobre M es equivalente a dar un tensor $t_i : FM \rightarrow F_i$ de tipo (r_i, F_i) , y dar una G_{J_0} -estructura sobre M es equivalente a dar un tensor $t : FM \rightarrow F$ de tipo (r, F) .

Dados un tensor t de tipo (r, F) sobre FM y sus componentes t_1, \dots, t_k en F_1, \dots, F_k respectivamente, definimos k campos de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre M por,

$$\begin{aligned} J_i : T_x M &\longrightarrow T_x M \\ X &\longrightarrow J_i(X) = z t_i(x) z^{-1}(X) \end{aligned}$$

donde Z es cualquier referencia lineal en $x \in M$.

Entonces sobre M existen una $G_{(\eta_i)_0}$ -estructura,

$$\begin{aligned} B_{G_{(J_i)_0}} M &= \{z \in FM / t_i(z) = (J_i)_0\} \\ &= \{z \in FM / z^{-1} J_i z = (J_i)_0\}, \end{aligned}$$

y una G_{J_0} -estructura,

$$B_{G_{J_0}} M = \bigcap_{i=1}^k B_{G_{(J_i)_0}} M.$$

Por último, si para cada $1 \leq i \leq k$ tomamos los k subgrupos de Lie de $Gl(m, \mathbf{R})$, G_1, \dots, G_k definidos por,

$$G_i = \{A \in Gl(m, \mathbf{R}) / Ae_i = e_i\},$$

donde $\{e_a; 1 \leq a \leq m\}$ es la base canónica de \mathbf{R}^m , entonces dar una G_i -estructura sobre M equivale a dar un campo de vectores ξ_i sobre M por

$$\xi_i(x) = z(e_i),$$

con z cualquier referencia lineal en $x \in M$.

Si $G_0 = \bigcap_{i=1}^k G_i$ entonces existe una G_0 -estructura,

$$\begin{aligned} B_{G_0} M &= \{z \in FM / z(e_i) = \xi_i, \forall 1 \leq i \leq k\} \\ &= \bigcap_{i=1}^k B_{G_i} M. \end{aligned}$$

Finalmente una estructura casi k -tangente estable sobre M o, lo que es lo mismo, una G -estructura donde G es el grupo de las matrices de la forma (6.1.10),

$$B_G M = B_{G_{\eta_0}} M \cap B_{J_0} M \cap B_{G_0} M,$$

o, equivalentemente,

$$B_G M = \left\{ z \in FM \left| \begin{array}{l} \eta_i(z(u)) = (\eta_i)_0(u) \\ J_i(z(u)) = (J_i)_0(u) \\ \xi_i = z(e_i) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq k, u \in \mathbf{R}^m \right\}$$

donde $\{e_a; 1 \leq a \leq m\}$ es la base canónica de \mathbf{R}^m .

6.3.2 G -conexiones lineales

Utilizando los resultados de la teoría general de G -estructuras, [Fu], deducimos que, si sobre una variedad M existe una estructura casi k -tangente estable integrable, entonces existe una G -conexión lineal simétrica ∇ en M , es decir, una conexión tal que su derivada covariante satisface:

$$\nabla \eta_i = 0, \quad \nabla J_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Puede probarse el resultado recíproco, es decir:

Proposición 6.3.1 *Sea $(\xi_i, J_i, \eta_i; 1 \leq i \leq k)$ una estructura casi k -tangente estable definida sobre la variedad M , y sea ∇ una conexión lineal simétrica sobre M tal que*

$$\nabla \xi_i = 0, \quad \nabla \eta_i = 0, \quad \nabla J_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces (ξ_i, J_i, η_i) es una estructura casi k -tangente estable integrable.

Demostración

Recordando el Teorema 6.2.1 basta probar que, para todo $1 \leq i, j \leq k$, se verifican,

$$d\eta_i = 0, \quad \{J_i, J_j\} = 0.$$

Utilizando que $\nabla \eta_i = 0$, se obtiene

$$X\eta_i(Y) = \eta_i(\nabla_X Y),$$

y, por ser ∇ simétrica,

$$\begin{aligned} d\eta_i(X, Y) &= X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i[X, Y] \\ &= \eta_i(\nabla_X Y) - \eta_i(\nabla_Y X) - \eta_i[X, Y] \\ &= \eta_i(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \chi(M)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \{J_i, J_j\}(X, Y) &= [J_i X, J_j Y] + J_i \circ J_j [X, Y] \\
 &\quad - J_i [X, J_j Y] - J_j [J_i X, Y] \\
 &= \nabla_{J_i X} J_j Y - \nabla_{J_j Y} J_i X + J_i \circ J_j [X, Y] \\
 &\quad - J_i (\nabla_X J_j Y - \nabla_{J_j Y} X) - J_j (\nabla_{J_i X} Y - \nabla_Y J_i X) \\
 &= (\nabla_{J_i X} J_j) Y - (\nabla_{J_j Y} J_i) X - J_i ((\nabla_X J_j) Y) + J_j ((\nabla_Y J_i) X) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que ∇ es simétrica, $J_i \circ J_j = J_j \circ J_i = \delta_{ij} \xi_j \otimes \eta_j$ y que $\nabla J_i = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Por tanto la estructura casi k -tangente estable (ξ_i, J_i, η_i) es integrable. \square

Obsérvese que en la demostración anterior no es necesario utilizar que $\nabla \xi_i = 0$, de hecho esta condición se deduce de las otras dos como se comprueba en el siguiente resultado.

Proposición 6.3.2 Si $(\xi_i, J_i, \eta_i; 1 \leq i \leq k)$ es una estructura casi k -tangente estable sobre M , y $\bar{\nabla}$ es una conexión lineal simétrica tal que,

$$\bar{\nabla} J_i = 0, \quad \bar{\nabla} \eta_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, entonces existe otra conexión lineal simétrica ∇ sobre M tal que,

$$\nabla \xi_i = 0, \quad \nabla J_i, \quad \nabla \eta_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Demostración

La conexión lineal sobre M definida por:

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \sum_{i=1}^k \eta_i(Y) \bar{\nabla}_X \xi_i,$$

es la conexión buscada. \square

6.4 Caracterizaciones del fibrado $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$

Como hicimos en capítulos anteriores, utilizamos las técnicas de Crampin-Thompson y de Nagano para establecer en qué condiciones una variedad casi k -tangente estable puede identificarse con el fibrado tangente estable de las k^1 -velocidades $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ de una variedad Q .

6.4.1 Método de Crampin-Thompson

Consideramos una estructura casi k -tangente estable integrable $(\xi_i, J_i, \eta_i; 1 \leq i \leq k)$ sobre una variedad M de dimensión $k(n+1) + n$.

Como en las secciones anteriores denotamos por V_i , para cada $1 \leq i \leq k$, la distribución de dimensión n sobre M dada, en cada punto $x \in M$, por,

$$V_i(x) = \text{Im} J_i(x)_{|K_x},$$

con $K_x = \ker \eta_1(x) \cap \dots \cap \ker \eta_k(x)$, y por V la distribución $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Se verifican las siguientes igualdades:

$$(6.4.13) \quad \begin{aligned} \text{Im} J_i &= \langle \xi_i \rangle \oplus V_i, \\ \text{Im} J_1 \oplus \dots \oplus \text{Im} J_k &= \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \oplus V, \\ \ker J_i &= \langle \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k \rangle \oplus V, \\ \ker J_1 \cap \dots \cap \ker J_k &= V. \end{aligned}$$

Definición 6.4.1 Sea (M, ξ_i, J_i, η_i) una variedad casi k -tangente estable integrable. Llamamos N al espacio de las hojas de la foliación definida por la distribución integrable $\langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \oplus V$; es decir, el espacio cociente de la relación de equivalencia definida por la foliación definida por $\langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \oplus V$. Decimos que (ξ_i, J_i, η_i) define una fibración si N es una variedad cociente de M , es decir, si la proyección canónica $\pi : M \rightarrow N$ es una submersión.

Si (ξ_i, J_i, η_i) es una estructura casi k -tangente estable que define una fibración, entonces N es una variedad de dimensión n y además

$$\ker \pi_*(x) = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V(x) = \text{Im} J_1(x) \oplus \dots \oplus \text{Im} J_k(x).$$

En esta situación podemos definir un levantamiento vertical de campos de vectores en N a campos de vectores en M . Así, dado $z \in N$, $X \in T_z N$ y $x \in \pi^{-1}(z)$, definimos k vectores $X^{(i)} \in T_x M$, $1 \leq i \leq k$, los (i) -levantamientos verticales de X , por

$$X^{(i)} = J_i(x)(\bar{X}) - \lambda_i \eta_i(x)(\bar{X}) \xi_i(x),$$

donde $\lambda_i = \eta_i(J_i(\xi_i)) = \pm 1$, $\bar{X} \in T_x M$ y $\pi_*(x)\bar{X} = X$.

Los campos de vectores $X^{(i)}$ están bien definidos para todo $1 \leq i \leq k$ y además $X^{(i)} \in V(x) = \ker J_1(x) \cap \dots \cap \ker J_k(x)$ para todo $1 \leq i \leq k$ y para todo $x \in M$.

Dado el campo de vectores X sobre N , su (i) -levantamiento vertical $X^{(i)}$ a M es el campo de vectores $X^{(i)} = J_i \bar{X} - \lambda_i \eta_i(\bar{X}) \xi_i$ donde \bar{X} es un campo de vectores sobre M π -relacionado con X .

Para $X \in \chi(N)$ existe un único campo de vectores $\bar{X} \in \chi(M)$ π -relacionado con X y tal que, en cada punto $x \in M$, verifica $\bar{X}(x) \in S_x$ con S_x un espacio complementario de $\ker J_1(x) \cap \dots \cap \ker J_k(x)$ en K_x . Para este \bar{X} podemos escribir $X^{(i)} = J_i(\bar{X})$.

Suponiendo ciertas todas las condiciones anteriores, es decir, (ξ_i, J_i, η_i) una estructura casi k -tangente estable integrable y que define una fibración sobre M , pueden demostrarse los siguientes resultados.

Lema 6.4.1 Sean X e Y dos campos de vectores sobre N y sea \bar{Y} el campo de vectores sobre M π -relacionado con Y tal que $\bar{Y}_x \in S_x$ para todo $x \in M$. Entonces $[X^{(i)}, \bar{Y}] \in \ker J_j$ para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Proposición 6.4.1 Para todos $1 \leq i, j \leq k$ y para todos $X, Y \in \chi(N)$,

$$(a) [X^{(i)}, Y^{(j)}] = 0,$$

$$(b) [\xi_i, X^{(j)}] = 0,$$

$$(c) L_{X^{(i)}} J_j = 0,$$

$$(d) \iota_{X^{(i)}} \eta_j = 0.$$

Como vimos en la Proposición 6.3.2, por ser la estructura (ξ_i, J_i, η_i) integrable, existe sobre M una conexión lineal simétrica ∇ tal que, para todo $1 \leq i \leq k$, se tiene

$$\nabla \xi_i = 0, \quad \nabla J_i = 0, \quad \nabla \eta_i = 0.$$

Esta conexión verifica:

Proposición 6.4.2 La conexión inducida por ∇ sobre cada hoja de $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$, con $1 \leq i \leq k$, es llana.

Demostración

Basta probar que, para todo $1 \leq i \leq k$, es

$$\nabla_{X^{(i)}} Y^{(i)} = 0, \quad \nabla_{\xi_i} X^{(i)} = 0, \quad \nabla_{X^{(i)}} \xi_i = 0.$$

Sea \bar{Y} el campo de vectores sobre M π -relacionado con Y y tal que $\bar{Y}_x \in S_x$ en todo punto $x \in M$; entonces,

$$\begin{aligned}\nabla_{X^{(i)}} Y^{(i)} &= \nabla_{X^{(i)}} J_i(\bar{Y}) \\ &= J_i(\nabla_{X^{(i)}} \bar{Y}) \\ &= J_i(\nabla_{\bar{Y}} X^{(i)} + [X^{(i)}, \bar{Y}]) \\ &= \nabla_{\bar{Y}} J_i(X^{(i)}) \\ &= 0\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la simetría de ∇ y el Lema 6.4.1.

Además, para todo $1 \leq i \leq k$,

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi_i} X^{(i)} &= \nabla_{X^{(i)}} \xi_i - [\xi_i, X^{(i)}] \\ &= -[\xi_i, X^{(i)}] \\ &= 0,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\nabla \xi_i = 0$ y la Proposición 6.4.1. \square

El resultado de caracterización de las variedades casi k -tangente estables es el siguiente.

Teorema 6.4.1 *Sea (M, ξ_i, J_i, η_i) una variedad casi k -tangente estable integrable que define una fibración $\pi : M \rightarrow N$. Sea ∇ una conexión lineal simétrica sobre M en las condiciones de la Proposición 6.3.2. Supongamos que la conexión llana inducida por ∇ sobre cada hoja de las foliaciones definidas por $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ es geodésicamente completa. Si además cada hoja de la foliación definida por W es conexa y simplemente conexa y cada hoja de las foliaciones definidas por $\langle \xi_1 \rangle \oplus V_1, \dots, \langle \xi_k \rangle \oplus V_k$, es conexa, entonces M es un fibrado afín modelado sobre el fibrado vectorial $\mathbf{R}^k \times T_k^1 N$.*

Demostración

Tenemos que definir un morfismo

$$\rho : M \times (\mathbf{R}^k \times T_k^1 N) \longrightarrow M,$$

de variedades fibradas sobre id_N tal que para cada punto $z \in N$,

$$\rho_z : \pi^{-1}(z) \times (\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z) \longrightarrow \pi^{-1}(z),$$

es una acción libre y transitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z$ sobre $\pi^{-1}(z)$.

Cada elemento de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z$ es de la forma (s, X) donde $s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbf{R}^k$ y $X = (X_1, \dots, X_k) \in (T_k^1 N)_z$.

Podemos definir k campos de vectores $\hat{X}_i^{s_i}$, $1 \leq i \leq k$, sobre $\pi^{-1}(z)$ asociados a (s, X) por:

$$\hat{X}_i^{s_i}(x) = X_i^{(i)}(x) + s_i \xi_i(x),$$

para todo $x \in \pi^{-1}(z)$.

Por la Proposición 6.4.2 sabemos que $\nabla_{\hat{X}_i^{s_i}} \hat{X}_i^{s_i} = 0$, de modo que cada $\hat{X}_i^{s_i}$ es un campo de vectores geodésico y, por las hipótesis del teorema, un campo de vectores completo, de modo que los flujos asociados $\phi_{\hat{X}_i^{s_i}} : \mathbf{R} \times \pi^{-1}(z) \rightarrow \pi^{-1}(z)$ son globales.

Para cada $1 \leq i \leq k$ sea $t \rightarrow \phi_{\hat{X}_i^{s_i}}(t, x)$ la curva integral de $\hat{X}_i^{s_i}$ tal que $\phi_{\hat{X}_i^{s_i}}(0, x) = x$.

En cada punto $z \in N$ definimos la aplicación ρ por:

$$\rho_z(x, (s, X)) = \phi_{\hat{X}_k^{s_k}}(1, \phi_{\hat{X}_{k-1}^{s_{k-1}}}(1, \dots, \phi_{\hat{X}_2^{s_2}}(1, \phi_{\hat{X}_1^{s_1}}(1, x)) \dots).$$

Veamos en primer lugar que ρ_z es una acción.

De los apartados a) y b) de la Proposición 6.4.1 se sigue que, dados dos elementos (s, X) y (r, Y) de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_x$, los correspondientes campos de vectores $\hat{X}_i^{s_i}$, $\hat{Y}_j^{r_j}$ verifican, para todos $1 \leq i, j \leq k$,

$$[\hat{X}_i^{s_i}, \hat{Y}_j^{r_j}] = 0.$$

Por lo tanto sus flujos conmutan, es decir,

$$(\phi_{\hat{X}_i^{s_i}}(h), \phi_{\hat{Y}_j^{r_j}}(t, x)) = (\phi_{\hat{Y}_j^{r_j}}(t, \phi_{\hat{X}_i^{s_i}}(h, x)),$$

y entonces la composición de los flujos es un flujo generado por la suma de los campos. En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\phi_{\hat{X}_i^{s_i}}(t), \phi_{\hat{Y}_j^{r_j}}(t, x)) &= (\phi_{\hat{Y}_j^{r_j}}(t, \phi_{\hat{X}_i^{s_i}}(t, x))) \\ &= \phi_{\hat{X}_i^{s_i} + \hat{Y}_j^{r_j}}(t, x). \end{aligned}$$

Dado que $(s, X) + (r, Y) = (s + r, X + Y)$, se deduce que:

$$\begin{aligned} \rho_z(\rho_z(x, (s, X)), (r, Y)) &= \phi_{\hat{Y}_k^{r_k}}(1, \dots, \phi_{\hat{Y}_1^{r_1}}(1, \rho_z(x, (s, X))) \dots) \\ &= \phi_{\hat{Y}_k^{r_k}}(1, \dots, \phi_{\hat{Y}_1^{r_1}}(1, \phi_{\hat{X}_k^{s_k}}(1, \dots, \\ &\quad \phi_{\hat{X}_1^{s_1}}(1, x)) \dots) \dots) \\ &= \phi_{\hat{Y}_k^{r_k} + \hat{X}_k^{s_k}}(1, \dots, \phi_{\hat{Y}_1^{r_1} + \hat{X}_1^{s_1}}(1, x)) \dots) \\ &= \rho_z(x, (s + r, X + Y)), \end{aligned}$$

con lo que ρ_x es una acción de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z$ sobre $\pi^{-1}(z)$.

Veamos que la acción es transitiva.

Sea $(,)$ un producto escalar sobre $T_z N$. Definimos una métrica de Riemann sobre cada hoja de la foliación definida por $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ para cada $1 \leq i \leq k$, del modo siguiente:

$$g_i(\hat{X}_i^{s_i}, \hat{Y}_i^{r_i}) = (X_i, Y_i) + s_i r_i.$$

Puesto que $\nabla_{\hat{X}_i^{s_i}} \hat{Y}_i^{r_i} = 0$ para todos $s_i, r_i \in \mathbf{R}$ y para todos $X_i, Y_i \in T_z N$ y como $g_i(\hat{X}_i^{s_i}, \hat{Y}_i^{r_i})$ es constante se deduce que $\nabla g_i = 0$, con lo que la restricción de ∇ a la hoja de la foliación definida por $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ es la conexión de Riemann asociada a cada métrica g_i para todo $1 \leq i \leq k$.

Obtenemos así que las hojas de las foliaciones definidas por $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ son variedades de Riemann geodésicamente completas. Como cada una de las distribuciones $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ es integrable y también es integrable cada una de las sumas directas $(\langle \xi_i \rangle \oplus V_i) \oplus (\langle \xi_j \rangle \oplus V_j)$, para cada punto $x \in \pi^{-1}(z)$, existe un entorno cúbico U de x en $\pi^{-1}(z)$ con coordenadas $(t_1, \dots, t_k, y_1^\alpha, \dots, y_k^\alpha)$ tal que

$$\langle \xi_i \rangle \oplus V_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} \right\rangle_{1 \leq \alpha \leq n}.$$

Sean $y, y' \in \pi^{-1}(z)$. Si y e y' están en un mismo entorno coordenado del tipo anterior, entonces:

$$y = (a_1, a_2, \dots, a_k, u_1^\alpha, u_2^\alpha, \dots, u_k^\alpha),$$

$$y' = (b_1, b_2, \dots, b_k, v_1^\alpha, v_2^\alpha, \dots, v_k^\alpha).$$

Tomamos $k-1$ puntos y_i $1 \leq i \leq k-1$ dados por

$$y_i = (b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_k, v_1^\alpha, \dots, v_i^\alpha, u_{i+1}^\alpha, \dots, u_k^\alpha).$$

De este modo $y_i \in U$ para todo $1 \leq i \leq k-1$ y además, la sucesión finita

$$\{y_0 = y, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k = y'\},$$

verifica que cada par de puntos $\{y_{i-1}, y_i\}$ está en la hoja H_i correspondiente a $\langle \xi_i \rangle \oplus V_i$ para todo $0 \leq i \leq k$. Utilizando el Teorema de Hopf-Rinow, dado que las hojas H_i son todas geodésicamente completas, y_{i-1} e y_i se pueden unir por una geodésica γ_i contenida en H_i :

$$y_i = (\gamma_i)_{\hat{X}_i^{s_i}}(1, y_{i-1}),$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} y' &= \gamma_{\tilde{X}_k^{s_k}}(1, y_{i-1}) \\ &= \gamma_{\tilde{X}_k^{s_k}}(1, \tilde{X}_{k-1}^{s_{k-1}}(1, y_{i-1})) \\ &= \dots \\ &= \tilde{X}_k^{s_k}(1, \tilde{X}_{k-1}^{s_{k-1}}(1, \dots, \tilde{X}_1^{s_1}(1, y))) \dots \\ &= \rho_z(y, (s, X)), \end{aligned}$$

donde $(s, X) = (s_1, \dots, s_k, X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{R}^k \times T_k^1 N$.

Si y e y' no están en un mismo entorno cúbico del tipo descrito, entonces, por ser $\pi^{-1}(z)$ conexo, podemos unir y e y' por una sucesión finita de entornos de ese tipo U_1, \dots, U_n tales que $y \in U_1$, $y' \in U_n$ y $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Tomamos una sucesión formada por $n+1$ puntos $\{y_0 = y, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = y'\}$ tales que $y_i, y_{i+1} \in U_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq n$ de modo que

$$y_{i+1} = \rho_z(y_i, (s_{i+1}, X_{i+1})),$$

con $(s_i, X_i) \in \mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

De este modo,

$$\begin{aligned} y' &= \rho_z(y_{n-1}, (s_n, X_n)) \\ &= \rho_z(y_{n-2}, (s_{n-1}, X_{n-1}) + (s_n, X_n)) \\ &= \dots \\ &= \rho_z(y, (s_1, X_1) + \dots + (s_n, X_n)), \end{aligned}$$

y por tanto ρ_z es transitiva.

Finalmente, para ver que ρ_z es libre, tomamos el grupo de isotropía $\Gamma(x)$ de $x \in \pi^{-1}(z)$ por la acción de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z$, es decir,

$$\Gamma(x) = \{(s, X) \in \mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z / \rho_z(x, (s, X)) = x\},$$

y probamos que $\Gamma(x)$ es trivial.

Por ser la acción ρ_z transitiva, tenemos que la aplicación,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z}{\Gamma(x)} &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ (s, X)\Gamma(x) &\longrightarrow \rho_z(x, (s, X)), \end{aligned}$$

es un difeomorfismo y, puesto que,

$$\dim \mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z = \dim \pi^{-1}(x),$$

entonces $\dim \Gamma(x) = 0$ y $\Gamma(x)$ es un subgrupo aditivo discreto de $\mathbf{R} \times (T_k^1 N)_z$.

Si $\Gamma(x)$ no es trivial entonces los elementos de $\Gamma(x)$ son combinaciones lineales enteras de m elementos linealmente independientes $(s_1, u_1), \dots, (s_m, u_m)$ de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z$ con $1 \leq m \leq k(n+1)$.

Se deduce:

$$\pi^{-1}(z) = \frac{\mathbf{R}^k \times (T_k^1 N)_z}{\Gamma(x)} = T^m \times \mathbf{R}^{k(n+1)-m},$$

y si la fibra es simplemente conexa, entonces $m = 0$, $\Gamma(x)$ es trivial y ρ_z es una acción libre, lo que finaliza la demostración. \square

6.4.2 Método de Nagano

Consideramos la estructura casi k -tangente estable canónica (ξ_i, J_i, η_i) (descrita en el Ejemplo 6.1.1) sobre el fibrado estable tangente de las k^1 -velocidades $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ sobre una variedad diferenciable Q .

Sea $(t_i, u^\alpha, v_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ el sistema de coordenadas locales sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ definido por (6.1.1).

La familia (ξ_i, J_i, η_i) está dada en este sistema de coordenadas por

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad J_i = \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha} \otimes du^\alpha, \quad \eta_i = dt_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Los k campos de vectores de Liouville $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ sobre $T_k^1 Q$, descritos en la Definición 2.4.8 pueden ser canónicamente extendidos a k campos de vectores $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ tales que, respecto al sistema de coordenadas anterior, se representan por,

$$\overline{C}_i = v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha}.$$

Los k campos de vectores de Liouville $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ están caracterizados por

$$(6.4.14) \quad J_i(\overline{C}_j) = 0, \quad \eta_i(\overline{C}_j) = 0, \quad L_{\overline{C}_i} J_j = \delta_{ij}(J_j - \xi_j \otimes \eta_j),$$

y además verifican las condiciones *i) - iv)* enunciadas en la Sección 1.3.

Teorema 6.4.2 Sea M una variedad diferenciable de dimensión $k(n+1)+n$ dotada de una estructura casi k -tangente estable integrable (ξ_i, J_i, η_i) tal que las 1-formas η_1, \dots, η_k son globalmente exactas, es decir, existen k funciones f_1, \dots, f_k sobre M tales que $\eta_i = df_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Supongamos que sobre M existen k campos de vectores $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ definidos por las condiciones (6.4.14), es decir,

$$J_i(\overline{C}_j) = 0, \quad \eta_i(\overline{C}_j) = 0, \quad L_{\overline{C}_i} J_j = \delta_{ij}(J_j - \xi_j \otimes \eta_j),$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$. Supongamos que además los k campos de vectores C_1, \dots, C_k , sobre M definidos por $C_i = f_i \xi_i + \overline{C}_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, satisfacen las condiciones i) - ii). Entonces existe una única estructura de fibrado vectorial en M sobre S , donde S es la subvariedad singular de $C = C_1 + \dots + C_k$, que es isomorfa al fibrado $\mathbf{R}^k \times T_k^1 S$. Tal isomorfismo transporta la estructura canónica de $\mathbf{R}^k \times T_k^1 S$ y sus campos de vectores de Liouville a (ξ_i, J_i, η_i) y C_1, \dots, C_k respectivamente.

Demostración

Sea $(\bar{t}_i, \bar{x}^\alpha, \bar{y}_i^\alpha)$ un sistema de coordenadas locales sobre M adaptado a la estructura casi k -tangente estable integrable (ξ_i, J_i, η_i) de modo que se verifican las igualdades (6.2.12).

Supongamos que el campo de vectores \overline{C}_i está dado en estas coordenadas por

$$\overline{C}_i = a_1 \frac{\partial}{\partial \bar{t}_1} + \dots + a_k \frac{\partial}{\partial \bar{t}_k} + b_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} + c_1^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^\alpha} + \dots + c_k^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k^\alpha}.$$

Por la primera y la segunda condiciones de (6.4.14) deducimos, respectivamente, que $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ y que $b_\alpha = 0$ para todo $1 \leq \alpha \leq n$.

Entonces $C_i = c_1^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^\alpha} + \dots + c_k^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k^\alpha}$ y utilizando la tercera condición de (6.4.14) obtenemos que

$$(6.4.15) \quad \frac{\partial c_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j^\beta} = \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij},$$

y, por lo tanto,

$$\overline{C}_i = \sum_{\alpha=1}^n \bar{x}_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}.$$

Además, como $\eta_i = df_i = d\bar{t}_i$, entonces, para todo $1 \leq i \leq k$, es $f_i = \bar{t}_i + c_i$ con c_i constante.

Utilizando (6.4.15) obtenemos que las funciones $(t_i, x^\alpha, y_i^\alpha)$ definidas por

$$t_i = \bar{t}_i + c_i, \quad x^\alpha = \bar{x}^\alpha, \quad y_i^\alpha = \bar{y}_i^\alpha,$$

con $1 \leq i \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$, definen un sistema de coordenadas locales en M respecto al cual, para todo $1 \leq i \leq k$,

$$\bar{C}_i = y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha},$$

$$C_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}.$$

Además, se verifican también las condiciones (6.2.12).

Si denotamos por S_i la subvariedad singular de M asociada al campo de vectores C_i , entonces

$$S_i = \{(t_1, \dots, t_k, x^\alpha, x_1^\alpha, \dots, x_k^\alpha) / t_i = x_i^\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq n\}.$$

La variedad singular S asociada al campo de vectores C es

$$S = S_1 \cap \dots \cap S_k$$

$$= \{(t_1, \dots, t_k, x^\alpha, x_1^\alpha, \dots, x_k^\alpha) / t_i = x_i^\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq k\}.$$

Utilizando estas expresiones y la expresión local del operador A_C asociado a C es inmediato que C verifica las condiciones *iii*) y *iv*).

Como las condiciones *i*) y *ii*) son ciertas por hipótesis para C_1, \dots, C_k , entonces, como en secciones anteriores, pueden probarse también para C y podemos aplicar el Teorema 1.3.3 de modo que existe en M una única estructura de fibrado vectorial sobre S tal que C es el campo de vectores canónico. De hecho existe un isomorfismo ϕ entre $N(S)$, fibrado normal de S , y M tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N(S) & \xrightarrow{\phi} & M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & S \end{array}$$

es conmutativo.

Utilizando la expresión local de A_C obtenemos,

$$N(S)_x = \text{Im}(A_C)_x$$

$$= \{X \in T_x M / X = X^i \frac{\partial}{\partial t_i} + X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\},$$

$$T_x S = \text{ker}(A_C)_x$$

$$= \{X \in T_x M / X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}.$$

En cada punto $x \in S$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$\phi_x : N_x S \longrightarrow M_x,$$

con $M_x = (\pi')^{-1}(x)$.

Si $V_i(x) = \text{Im} J_i(x)$ para cada $1 \leq i \leq k$, entonces es inmediato que,

$$N_x S = \langle \xi_1 \rangle_x \oplus \dots \oplus \langle \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x),$$

y por lo tanto existe un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$F_x = 1 + \phi_x : T_x S \oplus N_x S = T_x S \oplus \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \rightarrow T_x S \oplus M_x.$$

En el espacio vectorial $T_x S \oplus M_x$ se definen k aplicaciones lineales $\tilde{J}_1(x), \dots, \tilde{J}_k(x)$ por:

$$\begin{array}{ccc} T_x S \oplus M_x & \xrightarrow{(1+\phi_x)^{-1}} & T_x S \oplus \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \\ \tilde{J}_i(x) \downarrow & & \downarrow J_i(x) \\ T_x S \oplus M_x & \xleftarrow{1+\phi_x} & T_x S \oplus \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x). \end{array}$$

Si tomamos las 1-formas $\tilde{\eta}_1(x), \dots, \tilde{\eta}_k(x)$ duales de los vectores $\tilde{\xi}_i(x) = (1 + \phi_x)(\xi_i(x))$ con $1 \leq i \leq k$, entonces,

$$(\tilde{\eta}_1(x), \dots, \tilde{\eta}_k(x), \tilde{J}_1(x), \dots, \tilde{J}_k(x), \tilde{\xi}_1(x), \dots, \tilde{\xi}_k(x)),$$

es una estructura casi k -tangente estable sobre $T_x S \oplus M_x$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $T_x S$ y sea $\{v_1^i, \dots, v_k^i\}$ una base de $V_i(x)$ para cada $1 \leq i \leq k$. Sea $\{u_1^i = \phi_x(v_1^i), \dots, u_n^i = \phi_x(v_n^i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de modo que $\{\tilde{\xi}_1(x), \dots, \tilde{\xi}_k(x), u_1^i, \dots, u_n^i\}_{1 \leq i \leq k}$ es una base de M_x .

La aplicación $J_i(x)$ está definida por:

$$J_i(x) : T_x M = T_x S \oplus \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x) \rightarrow T_x M,$$

$$J_i(x)(e_\alpha) = v_\alpha^i,$$

$$J_i(x)(\xi_j(x)) = \delta_{ij} \xi_j(x),$$

$$J_i(x)(v_\alpha^i) = 0,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k, 1 \leq \alpha \leq n$.

Resulta inmediato que,

$$J_i(x)|_{T_x S} : T_x S \longrightarrow V_i(x),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Podemos definir un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$G_x : T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S \rightarrow T_x S \oplus M_x,$$

por

$$G_x = (1 + \phi_x) \circ (1 + H_x + J_1(x)|_{T_x S} + \dots + J_k(x)|_{T_x S}),$$

donde

$$H_x : \mathbf{R}^k \longrightarrow \langle \tilde{\xi}_1(x), \dots, \tilde{\xi}_k(x) \rangle,$$

$$H_x(E_i) = \tilde{\xi}_i(x),$$

siendo $\{E_i; 1 \leq i \leq k\}$ la base canónica de \mathbf{R}^k .

Entonces existe un difeomorfismo de fibrados vectoriales sobre S definido fibra a fibra,

$$\mathbf{R}^k \times T_k^1 S = \cup_{x \in S} (\mathbf{R}^k \times (T_k^1 S)_x) \rightarrow \cup_{x \in S} M_x = M.$$

Para ver que este difeomorfismo conserva las estructuras casi k -tangente estables tomamos en primer lugar un elemento $X_x \in \mathbf{R}^k \times T_k^1 S$ y expresamos la estructura casi k -tangente estable canónica del espacio vectorial $T_{X_x}(\mathbf{R}^k \times T_k^1 S)$ del modo siguiente.

Como en cada punto $X_x \in \mathbf{R}^k \times T_k^1 S$ el espacio vertical $V\tau^k(X_x)$ es

$$V\tau^k(X_x) = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(x) \oplus \dots \oplus V_k(x),$$

y el fibrado transversal $(\tau^k)^*(TS)$ se puede identificar en cada punto con el espacio $T_{\tau^k(X_x)}S$, entonces cada vector $Z_{X_x} \in T_{X_x}(\mathbf{R}^k \times T_k^1 S)$ se expresa de modo único por

$$\begin{aligned} Z_{X_x} &= (\tau^k)_*(X_x)(Z_{X_x}) + r_1 \xi_1(x) + \dots + r_k \xi_k(x) + v_1(Z_{X_x}) + \dots + v_k(Z_{X_x}) \\ &\in T_x S \oplus \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle_x \oplus V_1(X_x) \oplus \dots \oplus V_k(X_x). \end{aligned}$$

Definimos un isomorfismo de espacios vectoriales,

$$\begin{aligned} \psi : T_{X_x}(T_k^1 S) &\rightarrow T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S \\ Z_{X_x} &\rightarrow ((\tau^k)_*(X_x)Z_{X_x}, r_1, \dots, r_k, A_1(x), \dots, A_k(x)), \end{aligned}$$

donde $A_i(x) \in T_x S$ es tal que

$$(A_i(x))^{(i)} = v_i(Z_{X_x}),$$

siendo $(A_i(x))^{(i)}$ el (i) -levantamiento vertical del vector $A_i(x)$ a $V_i(X_x)$ definido en la sección anterior.

Sobre el espacio vectorial $T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S$ existe una estructura casi k -tangente estable

$$((\tilde{\eta}_i)_0(x), (\tilde{J}_i)_0(x), (\tilde{\xi}_i)_0(x); 1 \leq i \leq k),$$

definida por

$$(\tilde{\xi}_i)_0(x) = E_i \equiv i\text{-ésimo vector de la base canónica de } \mathbf{R}^k,$$

$$(\tilde{\eta}_i)_0(x) = E^i \equiv i\text{-ésimo covector de la base canónica de } (\mathbf{R}^k)^*,$$

$$(\tilde{J}_i)_0(x)((\tilde{\xi}_j)_0(x)) = \delta_{ij}(\tilde{\xi}_j)_0(x),$$

$$(\tilde{J}_i)_0(x)(e_\alpha, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, e_\alpha, \dots, 0),$$

$$(\tilde{J}_i)_0(x)(0, 0, \dots, e_\alpha, \dots, 0) = (0, \dots, 0),$$

El isomorfismo ψ conserva la estructura pues el siguiente diagrama es conmutativo para todo $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{array}{ccc} T_{X_x}(\mathbf{R}^k \times T_k^1 S) & \xrightarrow{\psi} & T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S \\ (\tilde{J}_i)_0(X_x) \downarrow & & \downarrow (\tilde{J}_i)_0(x) \\ T_{X_x}(\mathbf{R}^k \times T_k^1 S) & \xrightarrow{\psi} & T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S. \end{array}$$

Por lo tanto la estructura casi k -tangente estable canónica de $T_{X_x}(\mathbf{R}^k \times T_k^1 S)$ puede identificarse, a través de ψ , con la estructura casi k -tangente estable,

$$((\tilde{\eta}_i)_0(x), (\tilde{J}_i)_0(x), (\tilde{\xi}_i)_0(x); 1 \leq i \leq k)$$

del espacio vectorial

$$T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S.$$

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S & \xrightarrow{G_x} & T_x S \oplus M_x \\ (\tilde{J}_i)_0(x) \downarrow & & \downarrow \tilde{J}_i(x) \\ T_x S \oplus \mathbf{R}^k \oplus T_x S \oplus \dots \oplus T_x S & \xrightarrow{\psi} & T_x S \oplus M_x \end{array}$$

para todo $1 \leq i \leq k$, prueba que el difeomorfismo de fibrados vectoriales $M \rightarrow \mathbf{R}^k \times T_k^1 S$ conserva las estructuras casi k -tangente estables.

Si $x \notin S$ podemos escribir $T_x M = T_{\pi'(x)} S \oplus V(\pi'(x))$ utilizando la sucesión exacta corta descrita en el Lema 1.3.1 y entonces repetir la construcción anterior. \square

6.5 k -semisprays

Sobre la variedad $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ definimos k -campos de tensores $\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_k$ de tipo $(1, 1)$, del siguiente modo:

$$\tilde{J}_i = J_i - \overline{C}_i \otimes \eta_i,$$

para todo $1 \leq i \leq k$, donde J_i y η_i son, respectivamente, el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ y la 1-forma sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ descritos en el Ejemplo 6.1.1 y \overline{C}_i es el campo de vectores sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ descrito en la sección 6.4.2.

En $[\mathbf{R}]$ se definen del modo siguiente los k -semisprays sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$,

Definición 6.5.1 *Un campo de k -vectores $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ se dice que es un k -semispray si y sólo si*

$$\tilde{J}_i(\zeta_i) = 0, \quad \eta_i(\zeta_j) = \delta_{ij},$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$.

Calculando directamente en coordenadas locales se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 6.5.1 *Un campo de k -vectores $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ es un k -semispray si y sólo si*

$$(6.5.16) \quad \zeta_i = \frac{\partial}{\partial t_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + (\zeta_i)^\alpha_j \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha},$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Definición 6.5.2 *Dada una aplicación $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$, definimos la prolongación de σ ,*

$$\sigma^{[1]} : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q,$$

por

$$\sigma^{[1]}(t) = j_t^1 \sigma.$$

En coordenadas locales se obtiene:

$$\sigma^{[1]}(t_1, \dots, t_k) = (t_1, \dots, t_k, \sigma^\alpha(t_1, \dots, t_k), \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_k)),$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Definición 6.5.3 Una aplicación $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ es una solución del k -semispray ζ sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ si

$$(\sigma^{[1]})^{(1)} = \zeta \circ \sigma^{[1]}.$$

En tal caso se dice que ζ es integrable.

Operando en coordenadas locales es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 6.5.2 $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ es una solución del k -semispray $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ de expresión local (6.5.16), si y sólo si:

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t_i} = u_i^\alpha, \quad \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial t_i \partial t_j} = (\zeta_i)_j^\alpha.$$

Capítulo 7

Formalismo hamiltoniano no autónomo

7.1 Hamiltonianos \mathbf{R} -valuados

El objetivo principal de este capítulo es obtener una versión intrínseca de las ecuaciones de Hamilton asociadas a un problema variacional integral múltiple

$$\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial t_i},$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_i^\alpha} = \frac{\partial \psi_\alpha^i}{\partial t_i}.$$

utilizando la estructura geométrica de las variedades k -cosimplécticas.

Dada una aplicación hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbf{R}$, la estructura geométrica de la variedad k -cosimpléctica M permite definir un nuevo morfismo Ω^\sharp de TM en $(T_k^1)^*M$.

Por medio de este morfismo asociamos a H campos de k -vectores (X_1, \dots, X_k) sobre M tales que, si $(\eta_i, \omega_i, V; 1 \leq i \leq k)$ es la estructura k -cosimpléctica de M , entonces:

$$\eta_i(X_j) = \delta_{ij},$$

$$\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i.$$

Si alguno de estos campos de k -vectores es integrable, entonces sus secciones integrales satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Hamilton.

Definimos en primer lugar las aplicaciones Ω^b y Ω^\sharp análogas a las descritas en el caso k -simplético, de modo que generalizamos la aplicación $\chi_{\eta,\omega}$ definida en el caso cosimplético usual ([Al], [CLL]).

Sea $(M, \eta_1, \dots, \eta_k, \omega_1, \dots, \omega_k, V)$ una variedad k -cosimplética. Definimos una aplicación Ω^b por,

$$(7.1.1) \quad \begin{aligned} \Omega^b : TM &\longrightarrow (T_k^1)^*M \\ X &\longrightarrow \Omega^b(X) = (\iota_X \omega_1 + \eta_1(X)\eta_1, \dots, \iota_X \omega_k + \eta_k(X)\eta_k) \end{aligned}$$

donde utilizamos la identificación $(T_k^1)^*M \equiv T^*M \oplus \dots \oplus T^*M$ descrita en el Ejemplo 1.1.1.

Si consideramos en M un sistema de coordenadas locales $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ adaptado a la estructura k -cosimplética, se deduce

$$\begin{aligned} \Omega^b\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) &= \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \omega_1 + \eta_1\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\eta_1, \dots, \iota_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \omega_i + \eta_i\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\eta_i, \right. \\ &\quad \left. \dots, \iota_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \omega_k + \eta_k\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\eta_k\right) \\ &= (0, \dots, dt_i, \dots, 0), \end{aligned}$$

con dt_i ocupando el lugar i -ésimo.

$$\begin{aligned} \Omega^b\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) &= \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \omega_1 + \eta_1\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\eta_1, \dots, \iota_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \omega_k + \eta_k\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\eta_k\right) \\ &= (dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^k). \\ \Omega^b\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right) &= \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}} \omega_1 + \eta_1\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)\eta_1, \dots, \iota_{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}} \omega_k + \eta_k\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right)\eta_k\right) \\ &= (0, \dots, -dx^\alpha, \dots, 0), \end{aligned}$$

con $-dx^\alpha$ ocupando el lugar i -ésimo.

De este modo, si $X \in TM$ se escribe localmente por

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial t_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

entonces

$$\Omega^b(X) = ((\Omega^b(X))_1, \dots, (\Omega^b(X))_k) \in (T_k^1)^*M$$

donde

$$(7.1.2) \quad (\Omega^b(X))_i = X^i dt_i - X_\alpha^i dx^\alpha + X^\alpha dx_\alpha^i \in T^*M,$$

para cada $1 \leq i \leq k$ fijo.

Definimos la aplicación Ω^\sharp del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp : \quad T_k^1 M &\longrightarrow T^*M \\ (X_1, \dots, X_k) &\longrightarrow \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k)\end{aligned}$$

donde para cada $Y \in TM$, es

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k)(Y) &= \text{traza}((\Omega^b(X_j))_i(Y)) \\ &= \sum_{i=1}^k (\Omega^b(X_i))_i(Y) \\ &= \sum_{i=1}^k (\omega_i(X_i, Y) + \eta_i(X_i)\eta_i(Y)).\end{aligned}$$

Con estas definiciones es inmediato comprobar que en el caso $k = 1$, es decir, para una estructura cosimpléctica usual, las aplicaciones Ω^b y Ω^\sharp coinciden entre sí y son iguales a la aplicación $\chi_{\eta, \omega}$ descrita en [AI], y en [CLL].

Veamos cuál es la expresión local de Ω^\sharp en un sistema de coordenadas del tipo anterior.

Sea $(X_1, \dots, X_k) \in T_k^1 M$ tal que

$$(7.1.3) \quad X_i = (X_i)^j \frac{\partial}{\partial t_j} + (X_i)^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + (X_i)_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k)\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right) &= \sum_{i=1}^k (\Omega^b(X_i))_i\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right) \\ &= (X_i)^l.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k)\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) &= \sum_{i=1}^k (\Omega^b(X_i))_i\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^k (X_i)_\beta^i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k)\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right) &= \sum_{i=1}^k (\Omega^b(X_i))_i\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right) \\ &= (X_i)^\beta.\end{aligned}$$

Así,

$$(7.1.4) \quad \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = \sum_i (X_i)^i dt_i - \sum_{i,\alpha} (X_i)_\alpha^i dx^\alpha + \sum_{i,\alpha} (X_i)^\alpha dx_\alpha^i.$$

Si $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ es una función, la 1-forma $dH \in T^*M$ se expresa localmente por

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial t_i} dt_i + \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \sum_{i,\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^i$$

y, si ξ_1, \dots, ξ_k son los campos de Reeb sobre M asociados a la estructura k -cosim-
pléctica, entonces definimos sobre M la 1-forma $dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i$, que se expresa
localmente por

$$(7.1.5) \quad dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i = \sum_i dt_i + \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \sum_{i,\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^i.$$

Consideramos las ecuaciones,

$$(7.1.6) \quad \begin{aligned} \eta_i(X_j) &= \delta_{ij}, \\ \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) &= dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i, \end{aligned}$$

donde (X_1, \dots, X_k) es un campo de k -vectores sobre M .

En caso de existir, las soluciones de (7.1.6) no tienen por qué ser únicas. De hecho, si denotamos por $\mathcal{M}_k(C^\infty(M))$ el espacio de matrices (de funciones sobre M) cuadradas de dimensión k y definimos la aplicación,

$$(7.1.7) \quad \begin{aligned} \eta^\sharp : \quad T_k^1 M &\longrightarrow \mathcal{M}_k(C^\infty(M)) \\ (X_1, \dots, X_k) &\longrightarrow (\eta_i(X_j)), \end{aligned}$$

entonces es fácil deducir que el conjunto de soluciones de (7.1.6) es único módulo $\ker \Omega^\sharp \cap \ker \eta^\sharp$.

Sea $X = (X_1, \dots, X_k)$ una solución de (7.1.6) tal que cada X_i se expresa localmente por (7.1.3). Igualando coeficientes en las expresiones locales (7.1.4) y (7.1.5) obtenemos las siguientes condiciones locales para (7.1.6):

$$(7.1.8) \quad \begin{aligned} (X_i)^j &= \delta_{ij}, \\ \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k (X_i)_\alpha^i, \\ \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} &= (X_i)^\alpha. \end{aligned}$$

Ahora, a partir de estas condiciones locales, es posible definir (de modo no único), en un entorno de cada punto de M , un campo de k -vectores que satisfaga (7.1.8).

Por ejemplo bastaría tomar el campo de vectores

$$\begin{aligned}(X_i)^j &= \delta_{ij}, \\ (X_1)_\alpha^1 &= \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \\ (X_i)_\alpha^j &= 0, \text{ para } i \neq 1 \neq j, \\ (X_i)^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i}.\end{aligned}$$

Veamos cómo, mediante una partición de la unidad, podemos encontrar a partir de soluciones de (7.1.6) definidas localmente, un campo de k -vectores E_H globalmente definido y tal que verifica (7.1.8).

Para ello sea $\{U_a\}_{a \in A}$ un recubrimiento localmente finito de M tal que, en cada abierto U_a existe $X_a \in T_k^1 U_a$ que verifica (7.1.8) y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\eta_i(x)((X_a)_j(x)) &= \delta_{ij}, \\ \Omega^\#(X_a)(x) &= dH(x) + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))(x)\eta_i(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in U_a$.

Para cada $a \in A$ definimos el elemento \tilde{X}_a de $T_k^1 M$ que en cada punto $x \in M$ está dado por:

$$\tilde{X}_a(x) = \begin{cases} X_{H_a}(x) & \text{si } x \in U_a \\ 0 & \text{si } x \notin U_a \end{cases}$$

Sea $\{\lambda_a\}_{a \in A}$ una partición de la unidad asociada al recubrimiento $\{U_a\}_{a \in A}$ de M .

Consideramos E_H sección global de $T_k^1 M$ definida por

$$\begin{aligned}E_H: M &\rightarrow T_k^1 M \\ x &\rightarrow X_H(x) = \sum_A \lambda_a(\tilde{X}_a)(x).\end{aligned}$$

Veamos que, así definido, E_H satisface las condiciones (7.1.6).

De hecho $\Omega^\#(E_H)$ es la sección de T^*M definida por

$$\begin{aligned}\Omega^\#(E_H): M &\rightarrow T^*M & T_x M \\ x &\rightarrow \Omega^\#(E_H)(x): & \downarrow\end{aligned}$$

R

donde, si $Y \in T_x M$, entonces,

$$\begin{aligned}
 \Omega^\sharp(E_H)(x)(Y) &= \text{traza}((\Omega^\flat(E_H)_i)_j(x)(Y)) \\
 &= \sum_{i=1}^k \omega_i(x)((E_H)_i(x), Y) + \eta_i(x)((E_H)_i(x))\eta_i(x)(Y) \\
 &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_A \lambda_a(x) (\omega_i(x)((\tilde{X}_a)_i(x), Y) + \eta_i(x)((\tilde{X}_a)_i(x))\eta_i(x)(Y)) \right) \\
 &= \sum_a \lambda_a(x) \sum_{i=1}^k (\Omega^\flat((\tilde{X}_a)_i)_i(x)(Y)) \\
 &= \sum_a \lambda_a(x) (dH(x) + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))(x)\eta_i(x)(Y)) \\
 &= (dH(x) + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))(x)\eta_i(x))(Y).
 \end{aligned}$$

E_H verifica también,

$$\begin{aligned}
 \eta_i(x)((E_H)_j(x)) &= \eta_i(x) \left(\sum_a \lambda_a(x) (\tilde{X}_a)_j(x) \right) \\
 &= \sum_a \lambda_a(x) \eta_i(x)((\tilde{X}_a)_j(x)) \\
 &= \sum_a \lambda_a(x) \delta_{ij} \\
 &= \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Como generalización del caso cosimpléctico usual introducimos la siguiente definición:

Definición 7.1.1 *Cualquier campo de k -vectores (X_1, \dots, X_k) sobre M tal que*

$$\begin{aligned}
 \eta_i(X_j) &= \delta_{ij}, \\
 \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) &= dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i,
 \end{aligned}$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$, se denomina campo de k -vectores de evolución sobre M asociado a la función hamiltoniana H .

Sabemos que los campos de k -vectores sobre M no son, en general, integrables. Sea (X_1, \dots, X_k) un campo de k -vectores de evolución sobre M asociado a H e integrable, y sea

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbf{R}^k &\longrightarrow M \\ s_i &\longrightarrow (\sigma^j(s_i), \sigma^\alpha(s_i), \sigma_\alpha^j(s_i)),\end{aligned}$$

una sección integral de (X_1, \dots, X_k) . Se verifica:

$$\frac{\partial \sigma^j}{\partial s_i} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial s_i} = (X_i)^\alpha, \quad \frac{\partial \sigma_\alpha^j}{\partial s_i} = (X_i)_\alpha^j,$$

para todos $1 \leq i, j \leq k$ y $1 \leq \alpha \leq n$. Sustituyendo estas condiciones en (7.1.8) obtenemos

$$(7.1.9) \quad \begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \sigma_\alpha^i}{\partial s_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_\alpha^i} &= \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial s_i},\end{aligned}$$

con $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n$, que son las conocidas ecuaciones de Hamilton (3.2.8).

La existencia de soluciones para las ecuaciones (7.1.9) es equivalente por tanto a la integrabilidad de los campos de k -vectores sobre M que satisfacen (7.1.6).

De los cálculos anteriores deducimos el siguiente resultado,

Proposición 7.1.1 *Las ecuaciones (7.1.6) se pueden considerar como una versión intrínseca de las ecuaciones de Hamilton.*

Ejemplo 7.1.1 [Du][KT] Volvemos a considerar el Ejemplo 3.2.1 de las ecuaciones de la electrostática.

Sobre el espacio \mathbf{R}^3 consideramos una función escalar de densidad de carga dependiente de la posición, $r = r(x_1, x_2, x_3)$, y una métrica de Riemman g arbitraria.

Las ecuaciones de la electrostática son en este caso las ecuaciones de Hamilton asociadas al hamiltoniano H siguiente:

$$\begin{aligned}H : \quad \mathbf{R}^3 \times (T_3^1)^* \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, x_3, u, u^1, u^2, u^3) &\longrightarrow \sqrt{g}(4\pi r(x_1, x_2, x_3)u + \frac{1}{2g}g_{ij}u^i u^j).\end{aligned}$$

En efecto, operando en coordenadas locales se obtiene que:

$$\begin{aligned} dH + \sum_{i=1}^3 (1 - \xi_i(H)) dx_i &= \sum_{i=1}^3 dx_i + 4\pi r(x_1, x_2, x_3) \sqrt{g} du \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{1j} u^j \right) du^1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{2j} u^j \right) du^2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{3j} u^j \right) du^3. \end{aligned}$$

Además, si $(X_1, X_2, X_3) \in T_3^1(\mathbf{R}^3 \times (T_3^1)^* \mathbf{R})$ es tal que

$$dx_i(X_j) = \delta_{ij},$$

para todos $1 \leq i, j \leq 3$, entonces podemos escribir localmente cada X_i por:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial t_i} + (X_i)^0 \frac{\partial}{\partial u} + (X_i)^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + (X_i)^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + (X_i)^3 \frac{\partial}{\partial u^3}.$$

Utilizando (7.1.4), la igualdad

$$\Omega^{\sharp}(X_1, X_2, X_3) = dH + \sum_{i=1}^3 (1 - \xi_i(H)) dx_i,$$

es equivalente localmente a

$$(7.1.10) \quad \begin{aligned} 4\pi r(x_1, x_2, x_3) \sqrt{g} &= -((X_1)^1 + (X_2)^2 + (X_3)^3) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{ij} u^j \right) &= (X_i)^0. \end{aligned}$$

Si $\tilde{\psi} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times (T_3^1)^* \mathbf{R}$ es una sección integral de un campo de k -vectores de evolución $E_H = (X_1, X_2, X_3)$, entonces podemos escribir las ecuaciones (7.1.10) por

$$(7.1.11) \quad \begin{aligned} 4\pi r(x_1, x_2, x_3) \sqrt{g} &= -\left(\frac{\partial \psi^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi^3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{i=1}^3 g_{ij} \psi^j \right) &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \end{aligned}$$

donde hemos denotado $\tilde{\psi}(t) = (t, \psi(t), \psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t))$.

Las ecuaciones (7.1.11) son las ecuaciones de la electrostática para una densidad de carga $r = r(x_1, x_2, x_3)$ en el espacio métrico (\mathbf{R}^3, g) .

7.2 Hamiltonianos \mathbf{R}^k -valuados

Podemos también considerar funciones hamiltonianas \mathbf{R}^k -valuadas sobre una variedad k -cosymplectica M .

En coordenadas de Darboux tenemos,

$$H = (H^1(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i), \dots, H^k(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i)),$$

o, equivalentemente,

$$H = H^i e_i,$$

donde $\{e_1, \dots, e_k\}$ denota la base estándar en \mathbf{R}^k .

Definición 7.2.1 Si M es una variedad k -cosimpléctica, un campo de vectores X sobre M tal que,

$$(7.2.12) \quad \begin{aligned} \eta_i(X) &= 1, \text{ for all } i = 1, \dots, k, \\ \Omega^b(X) &= dH + \left[\sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H^i)) \eta_i \right], \end{aligned}$$

donde $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ son los campos de vectores de Reeb asociados con la estructura k -cosimpléctica, serán llamados sistemas k -hamiltonianos asociados a H .

En coordenadas de Darboux, un tal campo de vectores se escribe

$$X = \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial t_k} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

donde

$$\frac{\partial H^i}{\partial t_j} = \delta_{ij} X^j, \quad \frac{\partial H^i}{\partial x^\alpha} = -X_\alpha^i, \quad \frac{\partial H^i}{\partial x_\alpha^j} = \delta_{ij} X^\alpha.$$

Si

$$\begin{aligned} \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbf{R} &\longrightarrow M \\ t &\longrightarrow (\sigma_i(t), \sigma^\alpha(t), \sigma_\alpha^i(t)) \end{aligned}$$

es una curva integral de X entonces obtenemos las ecuaciones de Hamilton asociados al hamiltoniano \mathbf{R}^k -valuado H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^i}{\partial x^\alpha} &= -\frac{d\sigma_\alpha^i}{dt}, \\ \frac{\partial H^i}{\partial x_\alpha^j} &= \delta_{ij} \frac{d\sigma^\alpha}{dt}. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, y usando el mismo argumento que en [Aw1, Aw2], podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 7.2.1 *If $(t_i, x^\alpha, x_\alpha^i)$ son coordenadas de Darboux para la variedad k-cosimpléctica M y $H = (H^1, \dots, H^k)$ es una función hamiltoniana sobre M , entonces H es de la forma*

$$H^i = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha(t_i, x_1, \dots, x_n) x_\alpha^i + \psi^i(t_i, x_1, \dots, x_n),$$

para $1 \leq i \leq k$.

Una aplicación.- Sea $L : \mathbf{R} \times TQ \rightarrow \mathbf{R}$ un Lagrangiano hiperregular, tenemos que la transformación de Legendre $Leg : \mathbf{R} \times TQ \rightarrow \mathbf{R} \times T^*Q$ definida por L es un difeomorfismo.

Denotamos por $H = E_L \circ Leg^{-1}$ la energía lagrangiana, donde $E_L = C(L) - L$, donde C es el generador infinitesimal de las dilataciones sobre TQ .

Construimos una estructura 2-cosimpléctica sobre la variedad $M = \mathbf{R}^2 \times (TQ \oplus T^*Q)$ como sigue.

Primero de todo, sea ω_Q la forma simpléctica canónica sobre T^*Q y $\omega_L = Leg^* \omega_Q$ la 2-forma de Poincaré-Cartan sobre TQ [LR1]. Si (q^α) son coordenadas en Q denotamos por (q^α, v^α) y (q^α, p_α) las coordenadas inducidas en TQ y T^*Q , respectivamente. Entonces tenemos coordenadas $(t_1, t_2, q^\alpha, v^\alpha, p_\alpha)$ en M .

Denotamos por $\tau : M \rightarrow \mathbf{R} \times TR$ and $\pi : M \rightarrow \mathbf{R} \times T^*R$ las proyecciones canónicas, localmente dadas por

$$\begin{aligned} \tau(t_1, t_2, q^\alpha, v^\alpha, p_\alpha) &= (t_1, q^\alpha, v^\alpha), \\ \pi(t_1, t_2, q^\alpha, v^\alpha, p_\alpha) &= (t_2, q^\alpha, p_\alpha). \end{aligned}$$

Si hacemos

$$\eta_1 = dt_1, \eta_2 = dt_2, \omega_1 = \tau^* \omega_L, \omega_2 = \pi^* \omega_L,$$

deducimos que $(\eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2, V)$ es una estructura 2-cosimpléctica sobre M donde $V = \text{Ker } T\rho$, $\rho : M \rightarrow Q$ son las proyecciones canónicas.

Consideramos ahora la función hamiltoniana

$$H : M \rightarrow \mathbf{R}^2$$

dada por

$$H(t_1, t_2, X_q, \alpha_q) = (\tau^* E_L, \langle X_q, \alpha_q \rangle - \tau^* L).$$

En coordenadas locales obtenemos

$$H(t_1, t_2, q^\alpha, v^\alpha, p_\alpha) = (v^\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\alpha} - L, q^\alpha p_\alpha - L).$$

Sea X un campo de vectores sobre M que es hamiltoniano para H . Por cálculo directo, obtenemos

$$X = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + v^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial v^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha},$$

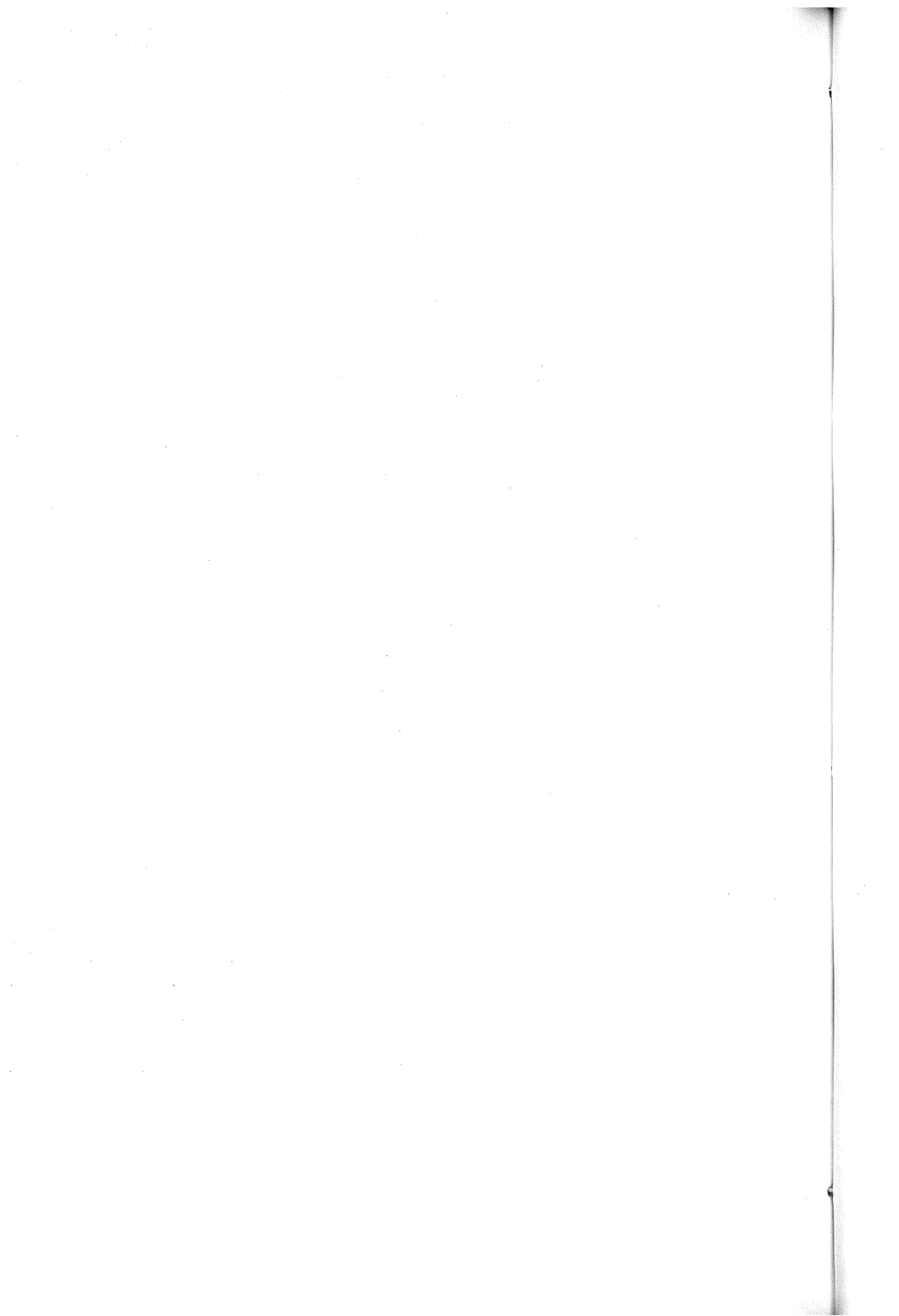
donde

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial v^\beta} + v^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + X_\alpha^1 \frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} - \frac{\partial L}{\partial q^\beta} = 0.$$

Si $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma^\alpha(t), \sigma_\alpha^1(t), \sigma_\alpha^2(t))$ es una curva integral de X tenemos

$$\frac{d\sigma^\alpha}{dt} = v^\alpha, \quad \frac{d\sigma_\alpha^1}{dt} = X_\alpha^1, \quad \frac{d\sigma_\alpha^2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}.$$

Por lo tanto, las proyecciones de σ en Q satisfacen simultáneamente las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton.



Capítulo 8

Formalismo lagrangiano no autónomo

En este capítulo estudiamos el formalismo lagrangiano sobre el fibrado tangente estable de las k^1 -velocidades $J^1(\mathbf{R}^k, Q) \equiv \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

El objetivo principal es obtener una descripción geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0, \quad v_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial t_i}.$$

sobre este fibrado utilizando su estructura geométrica descrita en el Capítulo 6.

8.1 Transformación de Legendre

Como en el caso no dependiente de los parámetros estudiado en el Capítulo 4, a cada aplicación lagrangiana $L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ se le asocia una aplicación FL

$$FL : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \longrightarrow \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q,$$

que se llama transformación de Legendre.

Recordamos en primer lugar que $(t_i, u^\alpha, v_i^\alpha; 1 \leq i \leq k, 1 \leq \alpha \leq n)$ es un sistema de coordenadas locales definido por (6.1.1), entonces la familia $(\xi_i, \bar{J}_i, \eta_i; 1 \leq i \leq k)$ formada por los k campos de vectores ξ_1, \dots, ξ_k con expresión local (6.1.5), por los k campos de tensores de tipo $(1, 1)$ $\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_k$ con expresión local (6.1.3) y por las k 1-formas η_1, \dots, η_k con expresión local (6.1.4), forman la estructura casi estable k -tangente canónica sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Como generalización del caso $k = 1$, [O], (fibrado tangente estable $\mathbf{R} \times TQ$), se definen del modo siguiente k derivaciones de grado 0, $\iota_{\bar{J}_1}, \dots, \iota_{\bar{J}_k}$, sobre el álgebra de formas sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Para una p -forma ω sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$,

$$(\iota_{\bar{J}_i} \omega)(X_1, \dots, X_p) = \sum_{j=1}^p \omega(X_1, \dots, \bar{J}_i X_j, \dots, X_p)$$

para X_1, \dots, X_k campos de vectores arbitrarios sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Utilizando los $\iota_{\bar{J}_i}$ se definen k antiderivaciones $d_{\bar{J}_1}, \dots, d_{\bar{J}_k}$ de grado 1, por:

$$d_{\bar{J}_i} = [\iota_{\bar{J}_i}, d],$$

para $1 \leq i \leq k$.

Dada una aplicación lagrangiana L sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$, definimos, utilizando los operadores anteriores, un elemento

$$\beta_L = ((\beta_L)_1, \dots, (\beta_L)_k) \in (T_k^1)^*(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q)$$

por:

$$(\beta_L)_i = d_{\bar{J}_i} L - \xi_i(L) \eta_i$$

con $1 \leq i \leq k$.

En el sistema de coordenadas locales $(t_i, u^\alpha, v_i^\alpha)$ se obtiene que, para cualquier $1 \leq i \leq k$:

$$(\beta_L)_i = \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} du^\alpha.$$

Se definen, sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$, las 2-formas diferenciales $(\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k$ por

$$(\omega_L)_i = -d(\beta_L)_i.$$

Si denotamos por $\pi^k : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow Q$ la proyección canónica $\pi^k(t_i, u^\alpha, v_i^\alpha) = u^\alpha$, entonces $(\beta_L)_1, \dots, (\beta_L)_k$ son 1-formas π -semibásicas sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ y en consecuencia, utilizando los resultados de [LR5], existe una aplicación FL ,

$$\begin{aligned} FL : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q &\longrightarrow \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q \\ (t_i, u^\alpha, v_i^\alpha) &\longrightarrow (t_i, u^\alpha, \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha}). \end{aligned}$$

La matriz jacobiana $\tilde{\mathcal{J}}$ asociada a la aplicación FL se escribe, en coordenadas locales,

$$(8.1.1) \quad \tilde{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial u^\alpha} & \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_1^\beta} & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial t_k \partial u^\alpha} & \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_k^\beta} & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix}$$

donde I_k e I_n son las matrices identidad de dimensiones k y n respectivamente y $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, de modo que $\tilde{\mathcal{J}}$ es una matriz cuadrada de dimensión $n(k+1) + k$.

Es inmediato el siguiente resultado:

$$FL \text{ es un difeomorfismo local} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_1^\beta} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_1^\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_k^\beta} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_k^\beta} \end{pmatrix}_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} \neq 0.$$

Como en el caso no dependiente de los parámetros introducimos la siguiente definición:

Definición 8.1.1 La función lagrangiana $L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ se dice que es regular si la correspondiente transformación de Legendre FL es un difeomorfismo local. L se dice hiperregular si y sólo si FL es un difeomorfismo global.

Operando en coordenadas locales se obtiene

Lema 8.1.1 Para todo $1 \leq i \leq k$ se verifica que

$$(\omega_L)_i = FL^* \omega_i,$$

donde $\omega_1, \dots, \omega_k$ son las 2-formas de la estructura k -cosimpléctica canónica de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q$.

Demostración

En efecto,

$$(8.1.2) \quad (\omega_L)_i = (FL)^*\omega_i = \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\beta} du^\beta \wedge dt_j + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} du^\beta \wedge dv_j^\alpha. \square$$

Si denotamos por $V = \ker T\bar{\pi}^k$ la distribución vertical del fibrado $(\mathbf{R}^k \times T_k^1, \bar{\pi}^k, \mathbf{R}^k \times Q)$ y consideramos las k 1-formas η_1, \dots, η_k de la estructura casi k -tangente estable canónica de $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$, podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 8.1.1 $L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ es un lagrangiano regular si y sólo si la familia $(\eta_1, \dots, \eta_k, (\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$ es una estructura k -cosimpléctica sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Demostración

Las condiciones $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \neq 0$, $\eta_{i|V} = 0$ y $(\omega_L)_{i|V \times V} = 0$ son siempre ciertas independientemente de que L sea o no regular. Veamos las otras condiciones.

Suponemos primero que L es regular. Sea $X \in \ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker (\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker (\omega_L)_k$. La expresión local de X es entonces de la forma

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha},$$

pues necesariamente las componentes en $\frac{\partial}{\partial t_i}$ son cero.

Utilizando las expresiones locales (8.1.2) de las $(\omega_L)_i$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(8.1.3) \quad \iota_X (\omega_L)_i \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) = X^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\alpha} = 0,$$

$$(8.1.4) \quad \iota_X (\omega_L)_i \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) = X^\beta \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} \right) - X_j^\beta \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} \right) = 0,$$

$$(8.1.5) \quad \iota_X (\omega_L)_i \left(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha} \right) = -X^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} = 0.$$

Como en la prueba de la Proposición 4.1.1, de la ecuación (8.1.5) se deduce, por ser L regular, que necesariamente $X^\alpha = 0$ para todo $1 \leq \alpha \leq n$.

Sustituyendo en la ecuación (8.1.4) y utilizando de nuevo la regularidad de L se obtiene que $X_i^\alpha = 0$ para todo α y para todo i .

Así obtenemos que $X = 0$ y entonces $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k = 0$.

Sea un campo de vectores arbitrario X sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ y escribamos en coordenadas locales la condición

$$(8.1.6) \quad \iota_X(\omega_L)_i = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$.

Utilizando de nuevo (8.1.2) y si

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial t_i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha},$$

obtenemos las siguientes condiciones equivalentes a (8.1.6):

$$\begin{aligned} X^\alpha &= 0 \\ X^j \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\beta} &= -X_j^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta}. \end{aligned}$$

Tomamos (X_i^α) como un vector fila de dimensión nk y como la matriz cuadrada $(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta})$ es no singular, se verifica:

$$-(X_j^\alpha) = (X^j) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} \right)^{-1}.$$

De esta expresión es inmediato que los k vectores

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_1} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial v_j^\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_1^\alpha \partial v_j^\beta} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial v_1^\alpha}, \\ &\vdots \\ &\frac{\partial}{\partial t_k} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t_k \partial v_j^\beta} \right) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_k^\alpha \partial v_j^\beta} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial v_k^\alpha}, \end{aligned}$$

son independientes y que pertenecen a $\ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k$.

Como por la condición $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k = 0$ sabemos que $\dim(\ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k) \leq k$, se deduce que $\dim(\ker(\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker(\omega_L)_k) = k$ como queríamos comprobar.

Recíprocamente, si la familia $(\eta_1, \dots, \eta_k, (\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$ es una estructura k -cosimpléctica sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ sabemos que, si X es un campo de vectores en $\ker \eta_1 \cap \dots \cap \ker \eta_k \cap \ker (\omega_L)_1 \cap \dots \cap \ker (\omega_L)_k$ entonces necesariamente $X = 0$, lo que en coordenadas locales equivale a decir que el sistema formado por las ecuaciones (8.1.3), (8.1.4) y (8.1.5) posee únicamente solución trivial. Para ello es necesario que el sistema de nk ecuaciones y nk incógnitas dado por la expresión

$$(8.1.7) \quad X_i^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} = 0,$$

tenga solo solución trivial pues si no fuese así y (X_i^α) fuera solución no trivial de este último sistema entonces $(0, X_i^\alpha)$ sería una solución no trivial del sistema formado por (8.1.3), (8.1.4) y (8.1.5).

La unicidad de solución para el sistema (8.1.7) implica la no singularidad de la matriz $(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta})$ y por consiguiente la regularidad de L . \square

Una vez demostrado el Lema podemos enunciar de modo inmediato un resultado análogo al Teorema 4.1.2 para caracterizar la regularidad de lagrangianos dependientes de k parámetros.

Teorema 8.1.1 *Para un lagrangiano $L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) L es regular.

$$b) \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i^\alpha \partial v_j^\beta} \right)_{\substack{1 \leq \alpha \beta \leq n \\ 1 \leq i, j \leq k}} \neq 0.$$

c) FL es k -cosimplectomorfo.

Denotamos por $(\xi_L)_1, \dots, (\xi_L)_k$ los campos de vectores de Reeb asociados a la estructura k -cosimpléctica $(\eta_1, \dots, \eta_k, (\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$. En coordenadas locales estos campos de Reeb verifican

$$(\xi_L)_i = \frac{\partial}{\partial t_i} + (\tilde{\xi}_i)_j^\alpha \frac{\partial}{\partial v_j^\alpha},$$

donde

$$(8.1.8) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial t_s \partial v_i^\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} (\tilde{\xi}_s)_j^\alpha = 0,$$

para todos $1 \leq i, s, j \leq k$ y para todos $1 \leq \alpha \beta \leq n$.

8.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta Sección veremos cómo obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un lagrangiano $L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$.

En primer lugar definiremos las aplicaciones Ω_L^b y Ω_L^\sharp asociadas a la familia $(\eta_1, \dots, \eta_k, (\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$.

Estas aplicaciones permiten asociar, a cada aplicación lagrangiana L , campos de k -vectores (X_1, \dots, X_k) sobre $T_k^1 Q$ tales que:

$$\eta_i(X_j) = \delta_{ij},$$

$$\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) = dE_L + \sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E)_L) \eta_i,$$

donde $(\xi_i, J_i, \eta_i; 1 \leq i \leq k)$ es la estructura casi estable k -tangente canónica de $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$, y E_L es la función sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ definida por:

$$E_L = \sum_{i=1}^k \overline{C}_i L - L,$$

siendo C_i los campos de vectores de Liouville.

Teniendo en cuenta la ecuación (8.1.8) se comprueba fácilmente que

$$(\xi_L)_i(E_L) = -\frac{\partial L}{\partial t_i}.$$

Si L es regular, estos campos de k -vectores (X_1, \dots, X_k) son necesariamente k -semisprays, y si alguno de ellos es integrable (Definición 6.5.3) entonces sus soluciones satisfacen, en coordenadas canónicas, las ecuaciones de Hamilton.

Se define el morfismo

$$\begin{aligned} \Omega_L^b : T(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) &\longrightarrow (T_k^1)^*(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) \\ X &\longrightarrow \Omega_L^b(X) \end{aligned}$$

tal que, para todo campo de vectores Y sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$,

$$(\Omega_L^b)_i(X)(Y) = \iota_X(\omega_L)_i(Y) + \eta_i(X)\eta_i(Y).$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \Omega_L^\sharp : T_k^1(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) &\longrightarrow T^*(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) \\ (X_1, \dots, X_k) &\longrightarrow \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

está definido por

$$\begin{aligned}\Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k)(Y) &= \text{traza}(\Omega_L^b(X_i)_j(Y)) \\ &= \sum_{i=1}^k (\omega_L)_i(X_i, Y) + \eta_i(X_i)\eta_i(Y).\end{aligned}$$

En coordenadas locales se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\Omega_L^b\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) &= \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_1^\alpha} du^\alpha, \dots, dt_j - \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_j^\alpha} du^\alpha, \right. \\ &\quad \left. \dots, -\frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_k^\alpha} du^\alpha\right), \\ \Omega_L^b\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_1^\alpha} dt_j + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_1^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_1^\beta}\right) du^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_1^\alpha} dv_j^\beta, \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_k^\alpha} dt_j + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_k^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_k^\beta}\right) du^\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_k^\alpha} dv_j^\beta\right), \\ \Omega_L^b\left(\frac{\partial}{\partial v_j^\alpha}\right) &= \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_1^\beta} du^\beta, \dots, -\frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_k^\beta} du^\beta\right).\end{aligned}$$

Si $(X_1, \dots, X_k) \in T_k^1(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q)$, donde

$$X_i = (X_i)^j \frac{\partial}{\partial t_j} + (X_i)^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + (X_i)_j^\alpha \frac{\partial}{\partial v_j^\alpha},$$

entonces

$$\begin{aligned}(8.2.9) \quad \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i,j,\alpha} ((X_i)^j \delta_{ij} + (X_i)^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\alpha}) dt_j \\ &\quad + \sum_{i,j,\alpha,\beta} \left(- (X_i)^j \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\alpha} + (X_i)^\beta \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha}\right) - (X_i)_j^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha}\right) du^\alpha \\ &\quad + \sum_{i,j,\alpha,\beta} (X_i)^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\alpha \partial v_i^\beta} dv_j^\alpha.\end{aligned}$$

Por otro lado, asociada a la función lagrangiana L definimos la aplicación

$$E_L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \longrightarrow \mathbf{R}$$

por

$$E_L = \sum_{i=1}^k \overline{C}_i L - L = \sum_{i,\alpha} (v_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} - L),$$

donde $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$ son los campos de de vectores sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ descritos en la Sección 6.4.2.

Entonces

$$(8.2.10) \quad \begin{aligned} dE_L + \sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L)) \eta_i &= \sum_{i,j,\alpha} v_i^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\alpha} dt_j + \sum_{i=1}^k dt_i \\ &+ \sum_{i,\alpha,\beta} (v_i^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u^\beta}) du^\beta \\ &+ \sum_{i,j,\alpha,\beta} v_i^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} dv_j^\beta. \end{aligned}$$

A continuación estudiamos las ecuaciones

$$(8.2.11) \quad \begin{aligned} \eta_i(X_j) &= \delta_{ij}, \\ \Omega_L^\sharp(X_1, \dots, X_k) &= dE_L + \sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L)) \eta_i. \end{aligned}$$

En general no está asegurada la existencia de soluciones para (8.2.11). En caso de existir, las soluciones no tienen por qué ser únicas y de hecho, si definimos una aplicación η_L^\sharp como un caso particular de (7.1.7) para la variedad k -cosimpléctica $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$, entonces es fácil comprobar que las soluciones de (8.2.11), en caso de existir, son únicas módulo $\ker \Omega_L^\sharp \cap \ker \eta_L^\sharp$.

Si (X_1, \dots, X_k) es un campo de k -vectores sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ que verifica las ecuaciones (8.2.11), igualando coeficientes en las expresiones (8.2.9) y (8.2.10), obtenemos:

$$(8.2.12) \quad \sum_{i,\alpha} (X_i)^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\alpha} = \sum_{i,\alpha} v_i^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t_j \partial v_i^\alpha},$$

$$(8.2.13) \quad \sum_{i,j,\beta} \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t_i \partial v_i^\alpha} + (X_i)^\beta \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} \right) - (X_i)^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} \right) = \sum_{i,\beta} \left(v_i^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial v_i^\beta} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \right),$$

$$(8.2.14) \quad \sum_{i,\alpha} (X_i)^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} = \sum_{i,\alpha} v_i^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha}.$$

Si el lagrangiano L es regular, de (8.2.14) deducimos que necesariamente

$$(X_i)^\alpha = v_i^\alpha$$

para todos $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq \alpha \leq n$.

De (8.2.13) obtenemos:

$$(8.2.15) \quad \sum_{i,j,\beta} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t_i \partial v_i^\alpha} + v_i^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} + (X_i)^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \right) = 0.$$

Recíprocamente, esta ecuación permite definir, en algún entorno de cada punto, soluciones locales de (8.2.11) utilizando que $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} \right)$ es no singular por ser L regular.

Estas soluciones locales verifican $(X_i)^j = \delta_i^j$ y también $(X_i)^\alpha = v_i^\alpha$, con lo que, de acuerdo con la Definición 6.5.1, son k -semisprays.

Por el mismo razonamiento que en el Capítulo 7, mediante una partición de la unidad, podemos construir soluciones globales de (8.2.11) que son k -semisprays.

Si suponemos que existe una solución de (8.2.11) que es un k -semispray integrable, entonces existe una aplicación $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ tal que:

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial t_i} = u_i^\alpha, \quad \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial t_i \partial t_j} = (X_i)^\alpha_j.$$

Sustituyendo en (8.2.15) obtenemos,

$$\sum_{i,j,\beta} \frac{\partial^2 L}{\partial t_i \partial v_i^\alpha} + \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial t_i} \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial v_i^\alpha} + \frac{\partial^2 \sigma^\beta}{\partial t_i \partial t_j} \frac{\partial^2 L}{\partial v_j^\beta \partial v_i^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{i,\beta} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0,$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Si L no es regular, no está garantizada en general la existencia de soluciones para (8.2.11). En este caso es posible aplicar un algoritmo de ligaduras, análogo al descrito en el Capítulo 4, para determinar si existe solución en alguna subvariedad regular de $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$.

Proposición 8.2.1 *Las ecuaciones (8.2.11) son una versión intrínseca de las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Ejemplo 8.2.1 [KT]

La ecuación correspondiente a un campo escalar σ (por ejemplo el campo gravitatorio) que actúa en el espacio-tiempo es la siguiente.

$$\sqrt{-g}F'(\sigma) = \sqrt{-g}m^2\sigma - \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}(\sigma g^{ij}),$$

donde m es la masa de una partícula sobre la que actúa el campo, g es una métrica de signatura $(-+++)$ en el espacio-tiempo y $F(\sigma)$ es una función escalar tal que $F(\sigma) - \frac{1}{2}m^2\sigma^2$ es la energía potencial de la partícula de masa m .

Veamos cómo está ecuación es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a una aplicación lagrangiana definida sobre el espacio $\mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}$.

Un campo escalar sobre \mathbf{R}^4 determina trivialmente una sección del fibrado $(\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}, \pi, \mathbf{R}^4)$. El espacio de jets de secciones de este fibrado es el espacio $J^1\pi = \mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}$.

Sean $(t_i, u; 0 \leq i \leq 3)$ coordenadas en $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}$ y sean $(t_i, u, v_i; 0 \leq i \leq 3)$ coordenadas en $\mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}$. Las ecuaciones de campo para tal campo escalar, son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la aplicación lagrangiana definida por:

$$L = \sqrt{-g}(F(u) - \frac{1}{2}m^2u^2 + \frac{1}{2}g^{ij}v_i v_j),$$

donde $F(u) - \frac{1}{2}m^2u^2$ es el término correspondiente a la energía potencial y $\frac{1}{2}g^{ij}v_i v_j$ el correspondiente a la energía cinética.

Cuando $F(u) = m^2u^2$, L es el llamado lagrangiano de Klein-Gordon, [BŚF], [ILMM].

En efecto, dado el campo de vectores $C = \sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial v_i}$, tenemos que

$$E_L = CL - L = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{ij} v_i v_j - F(u) + \frac{1}{2} m^2 u^2 \right),$$

de modo que

$$\begin{aligned} dE_L + \sum_{i=0}^3 \left(1 - \frac{\partial L}{\partial t_i} \right) dt_i &= \sum_{i=0}^3 dt_i + \sum_{i,j,l} \frac{\partial g^{lj}}{\partial t_i} v_j v_l dt_i \\ &+ \sqrt{-g} (F'(u) - m^2 u) du + \sum_{i,j} v_i g^{ij} dv_j. \end{aligned}$$

Por otro lado sea, $(X_0, X_1, X_2, X_3) \in T_4^1(\mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R})$ donde

$$X_i = (X_i)^j \frac{\partial}{\partial t_j} + X_i \frac{\partial}{\partial u} + (X_i)_j \frac{\partial}{\partial v_j},$$

tal que,

$$dt_i(X_j) = \delta_{ij},$$

$$\Omega_L^\sharp(X_0, X_1, X_2, X_3) = dE_L + \sum_{i=0}^3 \left(1 - \frac{\partial L}{\partial t_i} \right) dt_i.$$

En coordenadas locales,

$$(X_i)^j = \delta_i^j,$$

para todos $0 \leq i, j \leq 3$, y

$$\begin{aligned} \Omega_L^\sharp(X_0, X_1, X_2, X_3) &= \sum_{i=0}^3 dt_i + \sum_{i=0}^3 \frac{\partial g^{li}}{\partial t_j} X_i v_l dt_j \\ &- \left(\frac{\partial g^{li}}{\partial t_j} v_l + (X_i)_j g^{ij} \right) du \\ &+ X_i g^{ij} dv^j. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes en las expresiones locales anteriores obtenemos que

$$X_i = v_i,$$

$$\sqrt{-g} (F'(u) - m^2 u) = - \frac{\partial g^{ij}}{\partial t_i} v_j - (X_i)_j g^{ij},$$

o, equivalentemente,

$$\sqrt{-g}F'(u) = \sqrt{-g}m^2u - \frac{\partial g^{ij}}{\partial t_i}v_j - (X_i)_j g^{ij}.$$

Si $\sigma : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ es una solución de (X_0, \dots, X_3) entonces

$$X_i = \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} = v_i,$$

$$(X_i)_j = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t_i \partial t_j},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}F'(\sigma) &= \sqrt{-g}m^2\sigma - \frac{\partial g^{ij}}{\partial t_i}v_j - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t_i \partial t_j}g^{ij}, \\ &= \sqrt{-g}m^2\sigma - \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t^j}(\sigma g^{ij}), \end{aligned}$$

que es la ecuación de campo para la teoría de campo escalar, [KT].

Ejemplo 8.2.2 Consideramos el espacio-tiempo \mathbf{R}^4 dotado de una métrica de Lorentz g de signatura $(-+++)$.

El campo electromagnético sobre el espacio-tiempo es un campo vectorial \bar{A} con valores en \mathbf{R}^4 , [LaL2], [CDL].

Las componentes espaciales $A = (A_1, A_2, A_3)$ de \bar{A} , forman un campo vectorial llamado potencial vector del campo electromagnético. La componente temporal A_0 toma valores imaginarios de modo que $A_0 = i\phi$ donde ϕ es una función real llamada potencial escalar, [LaL2].

Un cuadrivector φ sobre \mathbf{R}^4 equivale a una sección del fibrado $\pi : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ con π la primera proyección. El espacio de jets de secciones de este fibrado es el espacio $J^1\pi = \mathbf{R}^4 \times T_1^1\mathbf{R}^4$.

Denotamos por $(t_i, u^i; 0 \leq i \leq 3)$ un sistema de coordenadas en $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ y por $(t_i, u^i, v_j^i; 0 \leq i \leq 3)$ un sistema de coordenadas fibradas en $\mathbf{R}^4 \times T_1^1\mathbf{R}^4$.

Dado el tetravector A que determina el campo electromagnético, definimos:

$$k_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial t_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t_i},$$

para todos $0 \leq i, j \leq 3$.

Si g_{ij} son las componentes de la métrica g en el espacio-tiempo, entonces las ecuaciones de campo para el campo electromagnético A , llamadas ecuaciones de

Maxwell, son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al lagrangiano L definido ([KT], [EMR]) en $\mathbf{R}^4 \times T_4^1\mathbf{R}^4$ por

$$L = -\frac{1}{16\pi} g^{is} g^{jr} k_{ij} k_{sr},$$

con $0 \leq i, j, s, r \leq 3$.

Este lagrangiano da lugar a las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes materiales, es decir, las ecuaciones del campo electromagnético en regiones del espacio en las que no existen cargas ni corrientes.

Si suponemos la existencia de partículas cargadas en el campo electromagnético y denotamos por $j = (\rho, j_1, j_2, j_3)$ el tetravector que determina la intensidad de corriente de modo que ρ es la densidad de carga y (j_1, j_2, j_3) la densidad de corriente y si además tomamos en el espacio-tiempo la métrica de Minkowski dada por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2,$$

donde dr^2 denota la métrica euclídea de \mathbf{R}^3 , entonces las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al lagrangiano L definido ([Go], [J]) por

$$L = \frac{E^2 - B^2}{8\pi} - \rho\phi + \frac{j \cdot A}{c},$$

donde E y B son los campos vectoriales que determinan respectivamente la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético y que están dados por

$$E = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t_0} = (-v_1^0 - \frac{1}{c} v_0^1, -v_2^0 - \frac{1}{c} v_0^2, -v_3^0 - \frac{1}{c} v_0^3),$$

$$B = \text{rot } A = (v_3^2 - v_2^3, v_3^1 - v_1^3, v_1^2 - v_2^1).$$

El lagrangiano L puede escribirse

$$L = \frac{(-v_1^0 - \frac{1}{c} v_0^1)^2 + (-v_2^0 - \frac{1}{c} v_0^2)^2 + (-v_3^0 - \frac{1}{c} v_0^3)^2}{8\pi} - \frac{((v_2^3 - v_3^2)^2 + (v_3^1 - v_1^3)^2 + (v_1^2 - v_2^1)^2)}{8\pi} - \rho u^0 + \frac{j_1 u^1 + j_2 u^2 + j_3 u^3}{c}.$$

Las formas presimplécticas $(\omega_L)_i$, $0 \leq i \leq 3$ asociadas son

$$\begin{aligned}(\omega_L)_0 &= \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} (du^1 \wedge dv_0^1 + du^2 \wedge dv_0^2 + du^3 \wedge dv_0^3) \right. \\ &\quad \left. + du^1 \wedge dv_1^0 + du^2 \wedge dv_2^0 + du^3 \wedge dv_3^0 \right), \\ (\omega_L)_1 &= \frac{1}{4\pi} \left((du^0 \wedge dv_1^0 + \frac{1}{c} du^0 \wedge dv_0^1 + du^2 \wedge dv_2^1) \right. \\ &\quad \left. + du^3 \wedge dv_3^1 - du^2 \wedge dv_1^2 + du^3 \wedge dv_1^3 \right), \\ (\omega_L)_2 &= \frac{1}{4\pi} \left((du^0 \wedge dv_2^0 + \frac{1}{c} du^0 \wedge dv_0^2 + du^1 \wedge dv_1^2) \right. \\ &\quad \left. + du^3 \wedge dv_3^2 - du^1 \wedge dv_2^3 + du^3 \wedge dv_2^3 \right), \\ (\omega_L)_3 &= \frac{1}{4\pi} \left((du^0 \wedge dv_3^0 + \frac{1}{c} du^0 \wedge dv_0^3 + du^1 \wedge dv_1^3) \right. \\ &\quad \left. + du^2 \wedge dv_2^3 - du^1 \wedge dv_3^3 + du^2 \wedge dv_3^3 \right).\end{aligned}$$

Utilizando estas expresiones locales se comprueba que $((\omega_L)_i, V; 0 \leq i \leq 3)$ no es una estructura 4-simpléctica y, por lo tanto, L no es regular. A pesar de ello veamos que podemos, por las técnicas descritas en esta sección, obtener las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

Veamos cómo son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas.

L verifica

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_i \partial v_i^j} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial v_i^j} = 0,$$

para todos $0 \leq i, j, l \leq 3$.

Sea $(X_0, X_1, X_2, X_3) \in T_4^1(\mathbf{R}^4 \times T_4^1\mathbf{R}^4)$. Las ecuaciones de campo se obtienen igualando los coeficientes de $d\varphi_0$, $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ y $d\varphi_3$ en las respectivas expresiones de $\Omega_L^4(X_0, X_1, X_2, X_3)$ y $dE_L + \sum_{i=0}^3 (1 - (\xi_L)_i(E_L)) dx_i$.

Utilizando (8.2.9) y (8.2.10) obtenemos, para los coeficientes de $d\varphi_0$, $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, las igualdades:

$$\begin{aligned}(8.2.16) \quad & -\left(\frac{1}{4\pi}((X_1)_1^0 + (X_2)_2^0 + (X_3)_3^0) + \frac{1}{c}((X_1)_0^1 + (X_2)_0^2 + (X_3)_0^3)\right) = \rho, \\ & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} (X_0)_0^1 + \frac{1}{c} (X_0)_1^0 - (X_2)_2^1 + (X_2)_1^2 - (X_3)_3^1 + (X_3)_1^3 \right) = \frac{j_1}{c}, \\ & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} (X_0)_0^2 + \frac{1}{c} (X_0)_2^0 - (X_3)_3^2 + (X_3)_2^3 - (X_1)_1^2 + (X_1)_2^1 \right) = \frac{j_2}{c}, \\ & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} (X_0)_0^3 + \frac{1}{c} (X_0)_3^0 - (X_1)_3^1 + (X_1)_1^3 - (X_2)_3^2 + (X_2)_2^3 \right) = \frac{j_3}{c}.\end{aligned}$$

Dado que el lagrangiano L no es regular, no podemos asegurar la existencia de soluciones para las ecuaciones (8.2.11). Podemos aplicar el algoritmo de ligaduras y obtenemos lo siguiente.

En cada punto $z \in \mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}^4$ podemos definir un 4-vector (Y_0, \dots, Y_3) ,

$$Y_i = (Y_i)^j \frac{\partial}{\partial x_j} + (Y_i)_j \frac{\partial}{\partial w^j} + (Y_i)_l^j \frac{\partial}{\partial v_l^j},$$

con

$$(Y_i)^j = \delta_i^j, \quad (Y_i)_j = v_i^j,$$

para todos $0 \leq i, j \leq 3$. Además,

$$(Y_1)_1^0 = -4\pi\rho,$$

$$(Y_0)_1^0 = 4\pi j_1,$$

$$(Y_0)_2^0 = 4\pi j_2,$$

$$(Y_0)_3^0 = 4\pi j_3,$$

y $(Y_i)_l^j = 0$ en todos los demás casos.

Así definido, (Y_0, \dots, Y_3) es un 4-semispray solución de (8.2.11) pues satisface las ecuaciones (8.2.16).

Como esto es válido para todo $z \in \mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}^4$, en el algoritmo de ligaduras resulta

$$P_2 = P_1 = \mathbf{R}^4 \times T_4^1 \mathbf{R}^4,$$

y podemos asegurar que existe solución de (8.2.11) para el lagrangiano singular L .

Si $\varphi : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ es una solución de (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) , de la primera ecuación de (8.2.16) se obtiene:

$$(8.2.17) \quad -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_3^2} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1 \partial t_0} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t_2 \partial t_0} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t_3 \partial t_0} \right) \right) = \rho,$$

o, teniendo en cuenta la definición del campo vectorial E ,

$$(8.2.18) \quad -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial t_i} - \rho = 0.$$

Del mismo modo, de la segunda ecuación de (8.2.16), se obtiene que, si φ es una solución de (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) ,

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \right) - \frac{\partial}{\partial t_3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \right) \right) = \frac{j_1}{c},$$

o equivalentemente

$$(8.2.19) \quad -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E_1}{\partial t_0} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_3}{\partial t_2} - \frac{\partial B_2}{\partial t_3} \right) = \frac{j_1}{c}.$$

Del mismo modo, para las dos últimas ecuaciones de (8.2.16) se obtienen las ecuaciones:

$$(8.2.20) \quad -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E_2}{\partial t_0} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_1}{\partial t_3} - \frac{\partial B_3}{\partial t_1} \right) = \frac{j_2}{c},$$

$$(8.2.21) \quad -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E_3}{\partial t_0} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_2}{\partial t_1} - \frac{\partial B_1}{\partial t_2} \right) = \frac{j_3}{c}.$$

En notación vectorial, las ecuaciones (8.2.19), (8.2.20) y (8.2.21) se escriben

$$(8.2.22) \quad -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E}{\partial t_0} + \frac{1}{4\pi} \text{rot } B = \frac{j}{c}.$$

Las ecuaciones (8.2.18) y (8.2.22) son las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L y son las conocidas ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético.

Estas ecuaciones pueden reescribirse utilizando las expresiones de los campos vectoriales E y B en función de los potenciales escalar y vectorial ϕ y A .

De esta manera se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \delta \phi + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t_0} (\text{div } A) &= \rho, \\ \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial^2 A}{\partial t_0^2} + \frac{1}{4\pi} \delta A &= \frac{j}{c}, \end{aligned}$$

donde por δ denotamos el operador laplaciano,

$$\delta = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_3^2}.$$

Estas ecuaciones son simultáneas, (ambas implican a ϕ y a A), pero pueden desacoplarse ([J]) sumando al potencial vector A el gradiente de una función escalar arbitraria. De este modo se obtiene la relación

$$(8.2.23) \quad \text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t_0} = 0,$$

a partir de la cual se obtienen las siguientes ecuaciones de ondas no homogéneas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t_0^2} + \frac{1}{4\pi} \delta A &= \frac{j}{c}, \\ \frac{1}{4\pi} \delta \phi - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_0^2} &= \rho. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, junto con la relación (8.2.23), forman un sistema equivalente a las ecuaciones de Maxwell.

En [J] se describe cómo, con ayuda de las funciones de Green, se pueden obtener soluciones de ecuaciones de este tipo.

Sea $L : \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbf{R}$ un lagrangiano hiperregular y, por lo tanto, FL un difeomorfismo global. Definimos una función hamiltoniana

$$H : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q \rightarrow \mathbf{R},$$

por $H = E_L \circ FL^{-1}$.

Por los mismos razonamientos que en la demostración del Teorema 4.2.1 se prueba el siguiente resultado:

Teorema 8.2.1 *Para $H = E_L \circ FL^{-1}$, las soluciones de (7.1.6) son integrables si y solo si son integrables las soluciones de (8.2.11). De hecho $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ es una sección integral de una solución de (8.2.11) si y sólo si $FL \circ \sigma$ es una sección integral de una solución de (7.1.6).*

Demostración Sea X_L un campo de k -vectores sobre $\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q$ tal que

$$\Omega_L^\sharp(X_L) = dE_L + \sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L)) \eta_i.$$

Sea L hiperregular y sea $H = E_L \circ FL^{-1}$ con $E_L = \bar{C}L - L$.

Tomamos el campo de k -vectores sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q$ dado por

$$E_H = T_k^1 FL \circ X_L \circ FL^{-1}.$$

El siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}^k \times T_k^1 Q & \xrightarrow{X_L} & T_k^1(\mathbf{R}^k \times T_k^1 M) & \xrightarrow{\Omega_L^\sharp} & T^*(\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q) \\ \downarrow FL & \xleftarrow{\pi_{\mathbf{R}^k \times T_k^1 Q}^k} & \downarrow T_k^1 FL & & \downarrow FL^{-1*} \\ \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q & \xrightarrow{E_H} & T_k^1(\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q) & \xrightarrow{\Omega_H^\sharp} & T^*(\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q) \\ & \xleftarrow{\pi_{\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^* Q}} & & & \end{array}$$

Utilizando esta conmutatividad se obtiene:

$$\begin{aligned}
 dH + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i &= d(E_L \circ FL^{-1}) + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i \\
 &= (FL^{-1})^* d(E_L) + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i \\
 &= (FL^{-1})^*(\Omega_L^\sharp(X_L)) \\
 &\quad - (FL^{-1})^*\left(\sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L))\eta_i\right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i \\
 &= \Omega^\sharp \circ E_H \circ FL \\
 &\quad - (FL^{-1})^*\left(\sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L))\eta_i\right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i.
 \end{aligned}$$

Operando directamente se comprueba que:

$$-(FL^{-1})^*\left(\sum_{i=1}^k (1 - (\xi_L)_i(E_L))\eta_i\right) + \sum_{i=1}^k (1 - \xi_i(H))\eta_i = 0.$$

Además, teniendo en cuenta la definición de FL , es inmediato que si $\eta_i((X_L)_j) = \delta_{ij}$ entonces, $\eta_i((E_H)_j) = \delta_{ij}$. \square

8.3 Formalismo lagrangiano en variedades de jets

8.3.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Consideramos una variedad fibrada (E, π, M) donde M es la variedad base, E el espacio total y π la proyección.

Sea $J^1\pi$ la primera variedad de jets descrita en la Sección 2.3 y sea $(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)$ con $1 \leq i \leq k = \dim M$, y $1 \leq \alpha \leq n = \dim E - \dim M$, el sistema de coordenadas fibradas sobre $J^1\pi$ definido por (2.4.19).

Suponemos que M es una variedad orientable y denotamos por η una forma de volumen sobre M . Consideraremos en adelante coordenadas fibradas $(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)$ en E tales que $\eta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$.

Asociado a η existe el endomorfismo vertical J_η definido por Saunders en [S1], [S3]. En coordenadas locales es

$$J_\eta = (du^\alpha - u_j^\alpha dx^j) \wedge (d^{k-1}x^i) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha},$$

donde $d^{k-1}x^i = \iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \eta$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Sea $\Lambda^k(M)$ la variedad fibrada de todas las k -formas sobre M . Una densidad lagrangiana sobre $J^1\pi$ es una aplicación, fibrada sobre M ,

$$\mathcal{L} : J^1\pi \longrightarrow \Lambda^k(M).$$

Fijada la forma de volumen η , se puede escribir de modo único

$$\mathcal{L} = L\eta,$$

con $L : J^1\pi \rightarrow \mathbf{R}$. L se denomina función lagrangiana.

Definición 8.3.1 La k -forma de Poincaré-Cartan sobre $J^1\pi$ asociada a la función lagrangiana L está definida por

$$\Theta_L = L\eta + (J_\eta)^*(dL),$$

y la $(k+1)$ -forma de Poincaré-Cartan sobre $J^1\pi$ asociada a L está definida por

$$\Omega_L = -d\Theta_L.$$

Lema 8.3.1 Las expresiones locales de Θ_L y Ω_L son:

$$(8.3.24) \quad \begin{aligned} \Theta_L &= (L - u_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}) d^k x + \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} du^\alpha \wedge d^{k-1} x^i, \\ \Omega_L &= -(du^\alpha - u_j^\alpha dx^j) \wedge (\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} d^k x - d(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}) \wedge d^{k-1} x^i), \end{aligned}$$

donde $d^k x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$.

Definición 8.3.2 Un extremal de L es una sección σ de π tal que verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$(j^1\sigma)^*(\iota_X \Omega_L) = 0,$$

para todo campo de vectores X sobre $J^1\pi$.

Esta condición implica que

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0,$$

para todo $1 \leq \alpha \leq n$.

Por otro lado, si Γ es una conexión en la fibración $\pi^1 : J^1\pi \rightarrow M$ y H es su proyector horizontal dado por:

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha},$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = 0,$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}\right) = 0,$$

entonces se verifica el siguiente resultado:

Proposición 8.3.1 *Si L es una función lagrangiana regular en el sentido de que $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u_j^\beta \partial u_i^\alpha}\right) \neq 0$, entonces $\iota_h \Omega_L = (k-1)\Omega_L$ si y sólo si:*

$$(8.3.25) \quad \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \sum_{i,\beta} u_i^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \partial u_i^\alpha} + \sum_{i,j,\beta} \Gamma_{ij}^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^\alpha \partial u_j^\beta} = 0.$$

La regularidad de L permite construir, utilizando (8.3.25), soluciones locales de $\iota_h \Omega_L = (k-1)\Omega_L$. A partir de ellas, mediante particiones de la unidad, podemos construir soluciones globales.

Si además Γ es llana y $\tau : M \rightarrow J^1\pi$ es una solución local horizontal $\tau(x^i) = (x^i, \tau^\alpha, \tau_i^\alpha)$, se obtiene que:

$$\Gamma_i^\alpha = u_i^\alpha = \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^i} = \tau_i^\alpha, \quad \Gamma_{ij}^\alpha = \frac{\partial \tau_i^\alpha}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \tau^\alpha}{\partial x^i \partial x^j},$$

lo que implica que $\tau = j^1\sigma$ con σ un extremal de L .

8.3.2 El fibrado $J^1(\mathbf{R}^k, Q)$

Como caso particular estudiamos el fibrado $(\mathbf{R}^k \times Q, \pi, \mathbf{R}^k)$ con $\pi : \mathbf{R}^k \times Q \rightarrow \mathbf{R}^k$ la proyección usual y $\eta = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ la forma de volumen canónica en \mathbf{R}^k .

El primer fibrado de jets es, en este caso,

$$J^1\pi = \mathbf{R}^k \times T_k^1Q.$$

Como en el Ejemplo 6.1.1, denotemos por $(t_i, u^\alpha, v_i^\alpha)$ las coordenadas fibradas de $J^1\pi$.

Si una función lagrangiana

$$L : \mathbf{R}^k \times T_k^1Q \longrightarrow \mathbf{R}.$$

es regular, $\mathbf{R}^k \times T_k^1Q$ es una variedad k -cosimpléctica con estructura $(\eta_1, \dots, \eta_k, (\omega_L)_1, \dots, (\omega_L)_k, V)$, donde

$$(\omega_L)_i = -d(\beta_L)_i,$$

como vimos en la Sección 8.1.

Operando en coordenadas locales se comprueba que:

Lema 8.3.2 *Si L es un lagrangiano regular, entonces*

$$\Theta_L = (L - \bar{C}L)\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k + \sum_{i=1}^k (\beta_L)_i \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_k),$$

donde $\bar{C} = \bar{C}_1 + \dots + \bar{C}_k$, $\bar{C}_i = v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i^\alpha}$, $1 \leq i \leq k$, y donde $\hat{}$ sobre una 1-forma significa que tal forma no se considera.

La siguiente proposición es inmediata comparando los resultados de la Sección 8.2 con el formalismo lagrangiano para variedades de jets antes expuesto.

Proposición 8.3.2 *Una sección $\sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k \times Q$ de π es un extremal de L si y sólo si $pr_2 \circ \sigma : \mathbf{R}^k \rightarrow Q$ es una solución de un k -semispray $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ tal que verifica (8.2.11).*

8.4 Formalismo hamiltoniano en variedades de jets

En esta sección estudiamos la relación entre los formalismos lagrangiano y hamiltoniano descritos en esta memoria y el formalismo multisimpléctico sobre fibrados de jets.

8.4.1 Ecuaciones de Hamilton

Sea de nuevo $\pi : E \rightarrow M$ una variedad fibrada. Denotamos por $\Lambda_0^k E$ y $\Lambda_1^k E$ los fibrados vectoriales sobre E definidos por:

$$\begin{aligned}\Lambda_0^k E &= \{\sigma \in \Lambda^k E / \iota_v \sigma = 0, \forall v \in V\pi\}, \\ \Lambda_1^k E &= \{\sigma \in \Lambda^k E / \iota_{v_1} \iota_{v_2} \sigma = 0, \forall v_1, v_2 \in V\pi\},\end{aligned}$$

donde $V\pi$ representa el fibrado vertical de π .

En coordenadas locales cada elemento de $\Lambda_0^k E$ puede expresarse por $p(x^i, u^\alpha) d^k x$ y cada elemento de $\Lambda_1^k E$ puede expresarse por $p(x^i, u^\alpha) d^k x + p_\alpha^i(x^i, u^\alpha) du^\alpha \wedge d^{k-1} x^i$, lo que permite introducir coordenadas locales (x^i, u^α, p) en $\Lambda_0^k E$ y $(x^i, u^\alpha, p, p_\alpha^i)$ en $\Lambda_1^k E$.

Denotamos por $\mathcal{M}\pi$ a la variedad $\Lambda_1^k E$ y tenemos que $\Lambda_0^k E$ es un subfibrado de $\mathcal{M}\pi$. El cociente $\mathcal{M}\pi / \Lambda_0^k E$ es una variedad de dimensión $(k+1)n+k$ que se denota por $J^1\pi^*$ y que es fibrada sobre E y sobre M .

En esta construcción existen las siguientes proyecciones:

$$\begin{aligned}\mu : \mathcal{M}\pi &\longrightarrow J^1\pi^*, \\ \pi_{1,0}^* : J^1\pi^* &\longrightarrow E, \\ \pi_1^* : J^1\pi^* &\longrightarrow M.\end{aligned}$$

Sobre $\mathcal{M}\pi$ se define de modo canónico una k -forma Θ que, en cada punto $\omega \in \mathcal{M}\pi$ está dada por:

$$\Theta_\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(\nu_* X_1, \dots, \nu_* X_k),$$

donde $X_i \in T_\omega \mathcal{M}\pi$ y $\nu : \mathcal{M}\pi \rightarrow E$ es la proyección natural.

Θ se dice la forma de Liouville multimomento y, en coordenadas locales fibradas se escribe por:

$$\Theta = p d^k x + \sum_{i,\alpha} p_\alpha^i du^\alpha \wedge d^{k-1} x^i.$$

La $(k+1)$ -forma $\Omega = d\Theta$ de denomina la forma multisimpléctica y define la llamada estructura multisimpléctica sobre $\mathcal{M}\pi$.

Definición 8.4.1 *Un hamiltoniano sobre $J^1\pi^*$ es una sección global*

$$h : J^1\pi^* \rightarrow \mathcal{M}\pi$$

de μ .

La existencia de un hamiltoniano h sobre $\mathcal{M}\pi$ permite definir sobre $J^1\pi^*$ una k -forma $\Theta_h = h^*\Theta$ y una $(k+1)$ -forma $\Omega_h = -d\Theta_h$.

Definición 8.4.2 Se dice que una sección γ de $\pi_1^* : J^1\pi^* \rightarrow M$ satisface las ecuaciones de Hamilton para un hamiltoniano h si

$$\gamma^*(\iota_X\Omega_h) = 0,$$

para cualquier campo de vectores X sobre $J^1\pi^*$.

Por ser una sección de μ , un hamiltoniano h sobre $J^1\pi^*$ se expresa localmente por

$$h(x^i, u^\alpha, p_\alpha^i) = (x^i, u^\alpha, p = -H(x^i, u^\alpha, p_\alpha^i), p_\alpha^i),$$

donde $H : J^1\pi^* \rightarrow \mathbf{R}$.

Localmente,

$$\Theta_h = -Hd^kx + p_\alpha^i du^\alpha \wedge d^{k-1}x^i.$$

Las ecuaciones de Hamilton de la Definición 8.4.2 se expresan localmente por:

$$(8.4.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u^\alpha} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_\alpha^i}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha^i} &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

donde $\gamma(x^i) = (x^i, u^\alpha, p_\alpha^i)$.

Las soluciones del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (8.4.26) se corresponden con conexiones Γ sobre el fibrado $\pi_1^* : J^1\pi^* \rightarrow M$.

Si h es el proyectador horizontal de Γ , determinado localmente por

$$(8.4.27) \quad \begin{aligned} h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha^j}, \\ h\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) &= 0, \\ h\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha^i}\right) &= 0, \end{aligned}$$

entonces puede deducirse el siguiente resultado,

Proposición 8.4.1 $\iota_h\Omega_h = (k-1)\Omega_h$ si y sólo si

$$(8.4.28) \quad - \sum_{i=1}^k \Gamma_{ij}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial u^\alpha}, \quad \Gamma_i^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha^i}.$$

Si además la conexión Γ es llana y $\gamma : M \rightarrow J^1\pi^*$ es una sección local horizontal, se deduce que γ satisface las ecuaciones de Hamilton de la Definición 8.4.2.

Las ecuaciones (8.4.27) permiten construir localmente conexiones que verifican

$$(8.4.29) \quad \iota_h \Omega_h = (k-1)\Omega_h.$$

Mediante particiones de la unidad podemos construir conexiones globales que verifiquen (8.4.29).

8.4.2 El fibrado $J^1(Q, \mathbf{R}^k)$

Si como en la sección anterior consideramos el caso particular del fibrado trivial $(\mathbf{R}^k \times Q, \pi, \mathbf{R}^k)$, es

$$\mathcal{M}\pi = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \times (T_k^1)^*Q,$$

$$J^1\pi^* = \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q.$$

Como en el Ejemplo 5.1.1, denotamos por $(t_i, u^\alpha, u_i^\alpha)$ las coordenadas fibradas para $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ y por $(\eta_i, \omega_i = -d\lambda_i, V)$ la estructura k -cosimpléctica canónica de $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$.

Un hamiltoniano h sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ es una sección

$$h : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q \longrightarrow \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \times (T_k^1)^*Q,$$

de μ que podemos identificar con una función

$$H : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q \longrightarrow \mathbf{R},$$

tal que

$$h(t_i, u^\alpha, u_i^\alpha) = (t_i, -H(t_i, u^\alpha, u_i^\alpha), u^\alpha, u_i^\alpha).$$

Comparando las correspondientes expresiones locales es inmediato que:

Lema 8.4.1

$$\Theta_h = -H(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \wedge \iota_{\xi_i}(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k),$$

con ξ_i ($1 \leq i \leq k$) los k campos de Reeb sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$.

Si denotamos por π^* la proyección,

$$\begin{aligned}\pi^* : \mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\longrightarrow \mathbf{R}^k \\ (t_i, u^\alpha, u_i^\alpha) &\longrightarrow (t_i),\end{aligned}$$

entonces es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 8.4.2 Una sección ψ de π^* verifica las ecuaciones de Hamilton,

$$\psi^*(\iota_X \Omega_h) = 0,$$

para todo campo de vectores X sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ si y sólo si ψ es una sección integral de un campo de k -vectores de evolución E_H sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ asociado a la función hamiltoniana H .

Si además Γ es una conexión sobre el fibrado π^* y la aplicación h dada por (8.4.27), es su proyector horizontal, definimos k campos de vectores $(E_H)_1, \dots, (E_H)_k$ sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ por

$$(E_H)_i = h\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right).$$

De este modo podemos escribir

$$h = \sum_{i=1}^k (E_H)_i \otimes dt_i,$$

y, además, se verifica

Proposición 8.4.3 Γ verifica (8.4.29) si y sólo si $E_H = (E_H)_1, \dots, (E_H)_k$ es un campo de k -vectores de evolución sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ asociado a la función hamiltoniana H .

Ejemplo 8.4.1 Describimos ahora las ecuaciones de la electrostática (7.1.11), utilizando el formalismo multisimpléctico sobre $\mathbf{R}^k \times (T_k^1)^*\mathbf{R}$.

Dada la aplicación hamiltoniana H descrita en el Ejemplo 7.1.1, la 3-forma Θ_H es:

$$\begin{aligned}\Theta_H &= -H dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + u^1 du \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - u^2 du \wedge dx_1 \wedge dx_3 + u^3 du \wedge dx_1 \wedge dx_2,\end{aligned}$$

y la 4-forma multisimpléctica Ω_H es:

$$\begin{aligned}\Omega_H &= dH \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - du^1 \wedge du \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + du^2 \wedge du \wedge dx_1 \wedge dx_3 - du^3 \wedge du \wedge dx_1 \wedge dx_2.\end{aligned}$$

Operando en coordenadas locales se obtienen:

$$\begin{aligned} \iota_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \Omega_H &= -(dH - \frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + du^2 \wedge du \wedge dx_3 \\ &\quad - du^3 \wedge du \wedge dx_2 \\ \iota_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \Omega_H &= (dH - \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2) \wedge dx_1 \wedge dx_3 - du^1 \wedge du \wedge dx_3 \\ &\quad + du^3 \wedge du \wedge dx_1 \\ \iota_{\frac{\partial}{\partial x_3}} \Omega_H &= -(dH - \frac{\partial H}{\partial x_3} dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + du^1 \wedge du \wedge dx_2 \\ &\quad - du^2 \wedge du \wedge dx_1 \\ \iota_{\frac{\partial}{\partial u}} \Omega_H &= 4\pi r(x_1, x_2, x_3) \sqrt{g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + du^1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - du^2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + du^3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ \iota_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \Omega_H &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{1j} u^j \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - du \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ \iota_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \Omega_H &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{2j} u^j \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + du \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ \iota_{\frac{\partial}{\partial u^3}} \Omega_H &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{3j} u^j \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - du \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Dada una aplicación $\tilde{\psi} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times (T_3^1)^* \mathbf{R}$ sección de π^* , denotamos

$$\tilde{\psi}(x_i) = (x_i, \psi(x_i), \psi^j(x_i)),$$

donde $1 \leq i, j \leq 3$. Entonces

$$\tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \psi^i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Si ahora escribimos en coordenadas locales la condición

$$(8.4.30) \quad \tilde{\psi}^*(\iota_X \Omega_H) = 0$$

para todo X campo de vectores sobre $\mathbf{R}^3 \times (T_3^1)^*\mathbf{R}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial u}} \Omega_H \right) \left(\tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right), \tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ -4\pi r(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi^i}{\partial x_i} \\ \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \Omega_H \right) \left(\tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right), \tilde{\psi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{j=1}^3 g_{ij} u^j \right) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq 3$. Además, las condiciones

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \Omega_H = 0$$

son consecuencia de las anteriores, y por lo tanto obtenemos las ecuaciones de la electrostática como condiciones equivalentes a (8.4.30) para el hamiltoniano H descrito en el Ejemplo 7.1.1.

8.4.3 La transformación de Legendre

Sea \mathcal{L} una densidad lagrangiana sobre $J^1\pi$ y sea L su función lagrangiana asociada. L determina la aplicación de Legendre extendida,

$$(\mathcal{L}eg)_L : J^1\pi \longrightarrow \mathcal{M}\pi,$$

definida del modo siguiente

$$(\mathcal{L}eg)_L(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha) = (x^i, u^\alpha, p = L - \sum_{i,\alpha} u_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}, p_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}),$$

de modo que $(\mathcal{L}eg)_L$ es una aplicación fibrada sobre E .

Definición 8.4.3 La aplicación de Legendre es la composición de $(\mathcal{L}eg)_L$ con la proyección μ , es decir:

$$(leg)_L = \mu \circ (\mathcal{L}eg)_L : J^1\pi \longrightarrow J^1\pi^*.$$

En coordenadas fibradas resulta que:

$$(\text{leg})_L(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha) = (x^i, u^\alpha, p_\alpha^i = \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}).$$

Operando en coordenadas locales se obtiene que:

Proposición 8.4.4

$$(\text{leg})_L^* \Theta = \Theta_L, \quad (\text{leg})_L^* \omega = \Omega_L.$$

Las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana sobre variedades de jets antes expuestas se relacionan por el siguiente resultado, [CCI], [LMM1].

Proposición 8.4.5 1. Sea \mathcal{L} una densidad lagrangiana hiperregular y Γ una conexión en $\pi_1 : J^1\pi \rightarrow M$ que está $(\text{leg})_L$ -relacionada con una conexión $\tilde{\Gamma}$ en $\pi^* : J^1\pi^* \rightarrow M$. Entonces Γ verifica $\iota_h \Omega_L = (k-1)\Omega_L$ si y sólo si $\iota_{\tilde{h}} \Omega_h = (k-1)\omega_h$, donde h y \tilde{h} son los proyectores horizontales. Además Γ es llana si y sólo si $\tilde{\Gamma}$ es llana.

2. Si ϕ es un extremal de L entonces $\gamma = \text{leg}_L \circ j^1\phi$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton. Recíprocamente, si γ es una solución de las ecuaciones de Hamilton, entonces $\text{leg}_L^{-1} \circ \gamma$ es de la forma $j^1\phi$ con ϕ un extremal de L .

Si tomamos de nuevo la fibración $(\mathbf{R}^k \times Q, \pi, \mathbf{R}^k)$, entonces la aplicación de Legendre leg_L coincide con la FL definida en la Sección 8.1, y el apartado 2 de la Proposición 8.4.5 coincide con el Teorema 8.2.1.

Bibliografía

- [AbM] R. ABRAHAM-J. E. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*, Benjamin, Nueva York, 1978.
- [Al] C. ALBERT: *Le Théorème de réduction de Marsden-Weinstein en Géométrie Cosymplectique et de Contact*, J. Geom. Phys., **6**, (4), (1989), 627-649.
- [Aw1] A. AWANE: *Structures k-symplectiques*, Tesis, Mulhouse (1992).
- [Aw2] A. AWANE: *k-symplectic structures*, J. Math. Phys. **33**, (1992), 4046-4052.
- [Aw3] A. AWANE: *G-espaces k-symplectiques homogènes*, J. Geom. Phys., **13**, (1994), 139-157.
- [BŠF] E. BINZ-J. ŚNIATYCKI-H. FISCHER: *Geometry of Classical Fields*, North-Holland Math. Studies, **154**, Amsterdam, 1988.
- [Bl] D. E. BLAIR: *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Springer, Berlín, 1976.
- [BW] W. M. BOOTHBY-H. C. WANG: *On Contact Manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 721-734.
- [BST] B. M. BUDAK-A. D. SAMARSKI-A. N. TIJONOV: *Problemas de la Física Matemática, I, II*, McGraw-Hill/Mir, Madrid 1993.
- [Bu] J. DE BURGOS: *Curso de Álgebra y Geometría*, Alhambra Universidad, Madrid 1982.
- [CCCI] F. CANTRIJN-J. F. CARIÑENA-M. CRAMPIN-L. A. IBORT: *Reduction of Degenerate Lagrangian Systems*, J. Geom. Phys. **3**, (3), 353-400, 1986.
- [CLL] F. CANTRIJN-M. DE LEÓN-E. A. LACOMBA: *Gradient Vector Fields on Cosymplectic Manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) 175-188.

- [CIL] F. CANTRIJN-L. A. IBORT-M. DE LEÓN: *On the Geometry of Multisymplectic Manifolds*, Preprint, IMAFF-CSIC, 1996.
- [CCI] J. F. CARIÑENA-M. CRAMPIN-L. A. IBORT: *On the multisymplectic formalism for first order field theories*, *Differential Geometry and its Applications* 1 (1991) 345-374.
- [CIG] R. S. CLARK-D. S. GOEL: *Almost Cotangent Manifolds*, *J. Differential Geometry* 9 (1974) 109-122.
- [CDL] C. COHEN-TANNOUJJI-B. DIU-F. LALOË: *Mécanique Quantique I, II*, Collection Enseignement des Sciences 16, Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, Paris 1973.
- [CS] H. C. CORBEN-P. STEHLE: *Classical Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc. New York 1966.
- [CFL] L. A. CORDERO-M. FERNÁNDEZ-M. DE LEÓN: *Examples of Compact Almost Contact Manifolds Admitting Neither Sasakian nor Cosymplectic Structures*, *Atti, Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, XXXIV (1985-86), 43-54.
- [CrT] M. CRAMPIN-G. THOMPSON: *Affine Bundles and Integrable Almost Tangent Structures*, *Math. Proc. Phil. Soc.*, 98, (1985), 61-71.
- [C] L. CORDERO: *Special Connections on Almost-Multifoliate Riemannian Manifolds*, *Math. Ann.* 216, 209-215 (1975).
- [Du] E. DURAND: *Électrostatique, les Distributions*, Masson et Cie. Éditeurs, Paris 1964.
- [EMR] A. ECHEVERRÍA- M. MUÑOZ-N. ROMÁN: *Geometry of Lagrangian First-order Classical Field Theories*, Preprint.
- [Fu] A. FUJIMOTO: *Theory of G-Structures*, Publications of the Study Group of Geometry, Vol I. Tokyo, 1972.
- [GP-R] P. L. GARCÍA-A. PÉREZ-RENDÓN: *Symplectic approach to the theory of quantized fields, II*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 43 (1971), 101-124.
- [Go] C. GODBILLON: *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris, 1969.

- [Gol] H. GOLDSCHMIDT: *Integrability Criteria for Systems of Nonlinear Partial Differential Equations*, J. Differential Geom., **1**, (1967), 269-307.
- [GS] H. GOLDSCHMIDT-S. STERNBERG: *The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations*, Ann. Inst. Fourier, **23**, 1 (1973), 203-267.
- [Go] H. GOLDSTEIN: *Mecánica Clásica*, Aguilar, Madrid, 1979.
- [Got1] M. J. GOTAY: *A Multisymplectic Framework for Classical Field Theory and the Calculus of Variations, I. Covariant Hamiltonian Formulation*, Mechanics, Analysis and Geometry: 200 years after Lagrange (M. Francaviglia, Ed.) (Elsevier Sci. Publ. B. V., 1991), 203-235.
- [Got2] M. J. GOTAY: *A Multisymplectic Framework for Classical Field Theory and the Calculus of Variations, II. Space time decomposition*, Diff. Geom. and its Appl. **1** (1991), 375-390.
- [Gü] C. GÜNTHER: *The Polysymplectic Hamiltonian Formalism in Field Theory and Calculus of Variations I: The Local Case*, J. Differential Geometry, **25** (1987) 23-53.
- [Har] Y. HARAGUCHI: *Sur une Généralisation des Structures de Contact*, Thèse, Univ. du Haute Alsace, Mulhouse, 1981.
- [ILMM] A. IBORT-M. DE LEÓN-J. MARÍN-J. C. MARRERO: *The Geometry of Classical Field Theory with Constraints: Theory and Applications*, preprint.
- [J] J. D. JACKSON: *Electrodinámica Clásica*, Alhambra Universidad, Madrid, 1980.
- [KT] J. KIJOWSKI-W. TULCZYJEW: *A Symplectic Framework for Field Theories*, Lecture Notes in Physics, **107**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [K] E. T. KOBAYASHI: *A Remark on the Nijenhuis Tensor*, Pacific Journal of Math. **12**, (1962), 963-1467.
- [KN] S. KOBAYASHI-K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry, I, II*, Interscience Publ., New York, (1963-69).
- [KS] K. KODAIRA-D. C. SPENCER: *Multifoliate Structure*, Ann. of Math. **74**, 52-99 (1961).

- [LaL1] L. LANDAU-E. LIFCHITZ: *Physique Theorique. Mecanique des Fluides*, Mir-Ellipses, Moscú, 1994.
- [LaL2] L. LANDAU-E. LIFCHITZ: *Teoría Clásica de los Campos*, Ed. Reverté, Barcelona, 1966.
- [LLR] M. DE LEÓN-E. LACOMBA-P. RODRIGUES: *Special Presymplectic Manifolds, Lagrangian Submanifolds and the Lagrangian-Hamiltonian Systems on Jet Bundles*, Actas Primer Congreso de Matemática Dr. Antonio A. R. Monteiro, Bahía Blanca (Argentina), Agosto 1991, Publ. del Instituto de Mat., Univ. Nac. Sur, Bahía Blanca (1991), 103-122.
- [LMM1] M. DE LEÓN-J. MARÍN-J. C. MARRERO: *Ehresmann Connections in Classical Field Theories*, Anales de Física, Monografías 2, Proceeding of the III Fall Workshop: Differential Geometry and its Applications, 73-89, 1994.
- [LMM2] M. DE LEÓN-J. MARÍN-J. C. MARRERO: *A Geometrical Approach to Classical Field Theories: A Constraint Algorithm for singular Theories*, New Developments in Differential Geometry, L. Tamassy and J. Szenthe (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996, pp. 291-312.
- [LMS1] M. DE LEÓN-I. MÉNDEZ-M. SALGADO: *p-Almost Cotangent Structures*, Bollettino Unione Matematica Italiana, (7) 7-A (1993), 97-107.
- [LMS2] M. DE LEÓN-I. MÉNDEZ-M. SALGADO: *Regular p-Almost Cotangent Structures*, J. Korean Math. Soc., **25**, (1988), No. 2, 273-287.
- [LMS3] M. DE LEÓN-I. MÉNDEZ-M. SALGADO: *p-Almost Tangent Structures*, Reconditi del Circolo Matematico di Palermo. Serie II, Tomo XXXVII (1988), 282-294.
- [LMS4] M. DE LEÓN-I. MÉNDEZ-M. SALGADO: *Integrable p-almost tangent manifolds and tangent bundles of p^1 -covelocities*, Acta Mathematica Hungarica, **58** (1-2) (1991), 45-54.
- [LMOS1] M. DE LEÓN- E. MERINO- J. A. OUBIÑA-M. SALGADO: *A Characterization of Tangent and Stable Tangent Bundles*, Ann. Inst. Henri Poincaré. **61**, (1), (1994), 1-15.
- [LMOS2] M. DE LEÓN- E. MERINO- J. A. OUBIÑA-M. SALGADO: *A Global Characterization of Jet Bundles of p^1 -velocities and covelocities*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **6**, vol. V, fasc. 1, 61-75.

- [LMOS3] M. DE LEÓN- E. MERINO- J. A. OUBIÑA-M. SALGADO: *Stable Almost Cotangent Structures*, a aparecer en Bollettino Unione Matematica Italiana.
- [LOS1] M. DE LEÓN-J. A. OUBIÑA-M. SALGADO: *Integrable Almost s -Tangent Structures*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 14, Roma (1994), 609-623.
- [LOS2] M. DE LEÓN-J. A. OUBIÑA-M. SALGADO: *Characterization of Higher-order Tangent Bundles*, Contributions to Algebra and Geometry, **36** (1995), No. 1, 73-87.
- [LR1] M. DE LEÓN-P. RODRIGUES: *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*, North-Holland Math. Studies, **112**, Amsterdam, 1985.
- [LR2] M. DE LEÓN-P. RODRIGUES: *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland. Math. Studies, **158**, Amsterdam, 1989.
- [LR3] M. DE LEÓN-P. RODRIGUES: *A Contribution to the Global Formulation of the Higher Order Lagrangians*, Revista Colombiana de Matemáticas, vol. XXI (1987) 47-64.
- [LR4] M. DE LEÓN-P. RODRIGUES: *Hamiltonian Structures and Lagrangian Field Theories on Jet Bundles*, Bol. Acad. Galega de Ciencias, VII (1988), 69-81.
- [LR5] M. DE LEÓN-P. RODRIGUES: *n^k -Almost Tangent Structures and the Hamiltonization of Higher Order Field Theories*, J. Math. Phys., **30** (6) (1989), 1351-1353.
- [LM] P. LIBERMANN-M. MARLE: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Reidel Publ., Dordrecht, 1987.
- [Mr] J. E. MARSDEN: *Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics*, Society for Industrial and Applied Mathematics 1981.
- [MMR] J. E. MARSDEN-R. MONTGOMERY-T. RATIU: *Reduction, Symmetry and Phases in Mechanics*, Memoirs of the American Mathematical Society N^o 436, Providence, Rhode Island, 1990.
- [MR] J. E. MARSDEN-T. RATIU: *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag, New York 1994.

- [M] I. MÉNDEZ: *p-Estructuras Casi Tangentes y p-Estructuras Casi Cotangentes*, Tesis. Universidad de Santiago de Compostela. Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **78**, (1990).
- [Mor] A. MORIMOTO: *Prolongations of Geometric Structures*, Math. Inst. Nagoya University, Nagoya, (1969).
- [Ng] T. NAGANO: *1-forms with the Exterior Derivate of Maximal Rank*, J. Differential Geometry **2** (1968) 253-264.
- [No] L. K. NORRIS: *Generalized Symplectic Geometry on the Frame Bundle of a Manifold*, Proc. Symposia in Pure Math., **54**, Part 2 (1993), 435-465.
- [O] J. A. OUBIÑA: *Almost s-Tangent Manifolds*, Geometriae Dedicata **14** (1983), 395-403.
- [Pa] R. S. PALAIS: *A Global Formulation of the Lie Theory of Transformations Groups*, Mem. of Amer. Math. Soc., **22**, 1957.
- [Pl] E. PLANCHART: *Geometría Simpléctica*, Fondo Editorial Acta Científica Venezolana. VII ELAM. Caracas, 1984.
- [Pu] M. PUTA: *Some Remarks on the k-Symplectic Manifolds*, Tensor, N. S. **47**, 109-115, (1988).
- [Pu1] M. PUTA: *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, **260**, Dordrecht, (1994).
- [R] P. RODRIGUES: *Lagrangian Connections and Partial Differential Equations: A Geometric Viewpoint*, Preprint.
- [Ro] S. L. ROSS: *Ecuaciones Diferenciales*, Ed. Reverté, Barcelona 1992.
- [Ru] H. RUND: *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1966.
- [Sar] G. SARDANASHVILY: *Gauge Theory in Jet Manifolds*, Monographs in Applied Mathematics, Hadronic Press, Inc, Palm Harbor, 1993.
- [Sar2] G. SARDANASHVILY: *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory Constrained Systems*, World Scientific, Singapore, 1995.

- [S1] D. J. SAUNDERS: *An Alternative Approach to the Cartan Form in Lagrangian Field Theories*, J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987), 339-349.
- [S2] D. J. SAUNDERS: *Jet Fields, Connections and Second-Order Differential Equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987), 3261-3270.
- [S3] D. J. SAUNDERS: *The Geometry of Jet Bundles*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, **142**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [SCr] D. J. SAUNDERS-M. CRAMPIN: *On the Legendre Map in Higher-order Field Theories*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 3169-3182.
- [Sil] SILVA COSTA: *Geometría Diferencial de Variedades Subfoliadas*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **53**, Tesina de Licenciatura, Universidad de Santiago, Santiago de Compostela, 1980.
- [Ta] S. TANNO: *A Theorem on Regular Vector Fields and its Applications to Almost Contact Structures*, Tôhoku Math. J., **17**, (1965), 235-238.
- [Th] G. THOMPSON: *Integrable Almost Cotangent Structures and Legendrian Bundles*, Math. Proc. Camb. Phil Soc. **101** (1987), 61-78.
- [ThS] G. THOMPSON-U. SCHWARDMANN: *Almost Tangent and Cotangent Structures in the Large*, Transactions of the Amer. Math. Soc. **327**, 1 (1991), 313-328.
- [Wn] F. W. WARNER: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Ze] M. W. ZEMANSKY: *Calor y Termodinámica*, Aguilar, S. A. de Ediciones, Madrid, 1962.