Lucía Búa Devesa

CATEGORÍA L-S DE GRUPOS DE LIE Y ESPACIOS SIMÉTRICOS

130a

2017

Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

LUCÍA BÚA DEVESA

CATEGORÍA L-S DE GRUPOS DE LIE Y ESPACIOS SIMÉTRICOS

130a

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Categoría L-S de grupos de Lie y espacios simétricos

Lucía Búa Devesa

Xullo 2011

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Introducción

El cálculo de la categoría L-S en grupos de Lie y otras familias de variedades aparece como el primer problema en la lista de Ganea de problemas no resueltos de teoría de invariantes numéricos homotópicos [5]. De hecho, para aplicaciones en análisis, la determinación del valor explícito de la categoría de una variedad es el aspecto más importante de toda la teoría.

Teorema 1 ([7]) *Dada una variedad diferenciable compacta X y una función real diferenciable f en X, el número de puntos críticos de f es mayor o igual que* $\operatorname{cat}(X) + 1$.

Desafortunadamente, los resultados en esta dirección son normalmente bastante difíciles de obtener, como testigo el cálculo de Schweitzer de $Sp(2)$ [10].

En este trabajo mostraremos algunas de las técnicas introducidas por Singhof [11] y Mimura-Sugata [8] para el cálculo de la categoría L-S de algunos grupos de Lie y espacios simétricos clásicos.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos

En este capítulo se establecerán los conceptos previos para el desarrollo de este trabajo, se comenzará definiendo la categorí de Lusternik-Schnirelmann, y con el fin de presentar resultados básicos que acoten dicha categoría se introducirán los conceptos de categoría relativa de un subespacio de un espacio topológico, longitud del cup producto de un espacio topológico con coeficientes en un anillo conmutativo, longitud relativa del cup producto así como la denominada categoría fuerte.

1.1. Categoría L-S.

Definición 2 *La categoría de Lusternik-Schnirelmann o categoría L-S de un espacio topológico X es el menor entero n tal que existe un recubrimiento abierto $U_1, \ldots, U_{n+1}$ de X tal que cada U_i es contráctil a un punto en X. Denotaremos esta categoría por*

$$\mathrm{cat}(X) = n\,.$$

Si tal entero no existe entonces diremos que $\mathrm{cat}(X) = \infty$.

Observación 3 *La categoría L-S está normalizada, por lo tanto* $\mathrm{cat}(.) = 0$.

Con el fin de obtener cotas inferiores de los puntos críticos de un funcional diferenciable es necesario determinar la categoría relativa de subconjuntos de una variedad. Dicha categoría está definida como sigue:

Definición 4 *Sea A un subespacio de un espacio topológico X, la categoría relativa de A en X,* $\mathrm{cat}_X(A)$*, es el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que A puede ser recubierto por $n+1$ subconjuntos abiertos contráctiles en X. Si este entero no existe entonces se denotará* $\mathrm{cat}_X(A) = \infty$.

Observemos que

$$\mathrm{cat}_X(X) = \mathrm{cat}(X) \text{ y } \mathrm{cat}_X(A) \leq \mathrm{cat}(X)\,.$$

Por otro lado, si A tiene un entorno abierto del que es retracto por deformación entonces $\mathrm{cat}_X(A) \leq \mathrm{cat}(A)$.

El cálculo de las categorías relativas viene motivado por el siguiente resultado analítico:

Proposición 5 ([2]) *Sea X una variedad diferenciable compacta y f una función real diferenciable definida en X. Sea S_k la familia de todos los subconjuntos A de X tales que* $\mathrm{cat}_X(A) \geq k$. *Entonces*

$$\inf_{A \in S_k} \sup_{x \in A} f(x)$$

es un valor crítico de f.

Definición 6 *Sea R un anillo conmutativo. La longitud del cup producto de X con coeficientes en R es el menor entero k tal que todo $(k+1)$-cup-producto es nulo en la cohomología reducida $H^+(X;R)$. Este entero se denotará por*

$$\mathrm{cuplong}_R(X)\,.$$

Proposición 7 *Observación de Eilenberg.*
Se verifica que:

$$\mathrm{cuplong}_R(X) \leq \mathrm{cat}(X).$$

para cualquier anillo conmutativo R.

Demostración:

Supongamos que $\mathrm{cat}(X) = n$ siendo $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ un recubrimiento adecuado para el cálculo de la categoría. Denotamos por $x_1 \cup \cdots \cup x_{n+1} \neq 0$ un producto en $H^+(X;R)$ de longitud $n+1$; y consideramos la sucesión exacta larga de cohomología, con coeficientes en R, dada por el par (X, U_i) y la inclusión $j_i\colon U_i \to X$:

$$\cdots \to H^m(X, U_i; R) \xrightarrow{q_i^*} H^m(X;R) \xrightarrow{j_i^*} H^m(U_i;R) \to \cdots$$

Sabemos que U_i es contráctil en X, por lo tanto $j_i^* = 0$. Además, por la exactitud de la sucesión, para $x_i \in H^m(X;R)$ existe un antecedente $\overline{x_i} \in H^m(X, U_i; R)$ tal que $q_i^*(\overline{x_i}) = x_i$.

La descripción general del cup producto dice que

$$H^+(X, A; R) \otimes H^+(X, B; R) \to H^+(X, A \cup B; R)$$

con

$$u \cup v = \Delta^*(u \times v),$$

donde $\Delta\colon (X, A \cup B) \to (X, A) \times (X, B) = (X \times X, A \times X, X \times B)$ es la aplicación diagonal. Además, se demuestra que $q_i^*(u \cup v) = q_i^*(u) \cup q_i^*(v)$.

En el caso del enunciado, el producto $\overline{x_1} \cup \cdots \cup \overline{x_{n+1}}$ está definido en el grupo $H^+(X, \bigcup U_i; R)$ donde la unión $\bigcup U_i$ se toma para $i = 1, \ldots, n+1$. Por otro lado, como $X = \bigcup U_i$, $H^+(X, \bigcup U_i; R) = 0$ tal que $\overline{x_1} \cup \cdots \cup \overline{x_{n+1}} = 0$, se tiene que

$$H(X, \bigcup U_i) \xrightarrow{q^*} H(X),$$

$$q^*(\overline{x_1} \cup \cdots \cup \overline{x_n}) = x_1 \cup \cdots \cup x_n.$$

Así $x_1 \cup \cdots \cup x_{n+1} = q^*(0) = 0$ y por lo tanto:

$$\mathrm{cuplong}_R(X) \leq n = \mathrm{cat}(X).$$

$\square$

Definición 8 *Sea R un anillo conmutativo. Sea X un espacio topológico, A un subespacio de X e $i\colon A \to X$ la inclusión. La longitud relativa del cup producto de A en X,* $\operatorname{cuplong}_X(A)$*, es el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $i^*(\xi_1 \cup \cdots \cup \xi_{n+1}) = 0$, para todo $\xi_1, \ldots \xi_{n+1} \in H^+(X, R)$.*

Proposición 9 *Se verifica que:*

$$\operatorname{cuplong}_X(A) \leq \operatorname{cat}_X(A).$$

Lema 10 *Sea X un espacio topológico, A un subespacio de X e $i\colon A \to X$ la inclusión. Supongamos que* $\operatorname{cat}_X(A) = n$*, y sea R un anillo conmutativo con unidad. Si $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1} \in H^+(X; R)$ entonces*

$$i^*\xi_1 \cup \cdots \cup i^*\xi_{n+1} = 0 \in H^+(A; R).$$

El lema anterior puede entenderse del siguiente modo:

Lema 11 *Sea X un espacio topológico, A un subespacio de X e $i\colon A \to X$ la inclusión. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Si existe $k \geq n$ tal que $i^*(\xi_1 \cup \cdots \cup \xi_k) \neq 0$, para $\xi_1, \ldots, \xi_k \in H^+(X; R)$, entonces* $\operatorname{cat}_X(A) \geq n$*.*

Si se toma $A = X$, se obtiene la observación de Eilenberg, véase la Proposción 7.

Definición 12 *Sea X un poliedro finito. Llamamos categoría fuerte de X, y lo denotamos por* $\operatorname{Cat}(X)$*, al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que X puede ser recubierto por n subpoliedros; cada uno de ellos homotópicamente equivalente a un punto.*

Observación 13 *Se verifica que*

$$\operatorname{cat}(X) \leq \operatorname{Cat}(X).$$

Proposición 14 ([1] p. 23, 24) *Si X es un CW-complejo $(r-1)$-conexo para $r \geq 1$, entonces*

$$\operatorname{cat}(X) \leq \dim(X)/r.$$

El siguiente teorema será necesario para la demostración de alguno de los siguientes resultados:

Teorema 15 ([3] p. 341) *Si $M = M_1 \times M_2$ es conexa por caminos y además* $\operatorname{cat}(M_1)$ *y* $\operatorname{cat}(M_2)$ *son finitas, entonces*

$$\operatorname{cat}(M) \leq \operatorname{cat}(M_1) + \operatorname{cat}(M_2).$$

1.2. Categoría L-S de grupos de Lie

A continuación se presentan unos resultados sobre la categoría L-S de grupos de Lie, la demostración de dichos resultados pueden verse en [11].

Teorema 16 *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo, y T un toro maximal de G. Entonces,*

$$\mathrm{cat}(G/T) = 1/2(\dim(G) - \mathrm{rk}(G)).$$

Observación 17

1. *Denotamos por* $\mathrm{rk}(G)$ *el rango de G, es decir, si $T^r \subset G$ es un toro maximal, entonces* $\mathrm{rk}(G) = r$.

2. *Se verifica que* $\dim(G) - \mathrm{rk}(G)$ *es un número par.*

Con el fin de poder formular nuestro siguiente resultado, definimos:

Definición 18 *Sea π un grupo abeliano finitamente generado. Denotamos por $\varphi(\pi)$ el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que π es suma directa de n grupos cíclicos (dicho número existe por el teorema de los grupos abelianos finitamente generados).*

Teorema 19 *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo y T un toro maximal de G. Entonces:*

$$\mathrm{cat}_G(T) = \varphi(\pi_1 G).$$

Capítulo 2

Categoría L-S del grupo unitario

El objetivo de este capítulo es determinar la categoría L-S del grupo unitario y del grupo especial unitario.

Sea $U(n)$ el grupo de matrices $n \times n$ complejas con $AA^* = I$ y $SU(n)$ el grupo de matrices complejas con $AA^* = I$ y $\det(A) = 1$.

Teorema 20 *Se verifica que:*

1. $\mathrm{cat}(SU(n)) = n - 1$.
2. $\mathrm{cat}(U(n)) = n$.

La demostración de este teorema se concluye de forma directa de los siguientes resultados:

Lema 21 *Una cota superior para la categoría L-S del grupo especial unitario de dimensión n es $n - 1$, es decir,*

$$cat(SU(n)) \leq n - 1.$$

Demostración:

Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ diferentes números complejos de módulo 1 tal que $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \neq 1$. Para $1 \leq i \leq n$ definimos

$$A_i \;=\; \{X \in SU(n) \mid \xi_i \text{ no es autovalor de } X\}\,.$$

Luego los A_i forman un recubrimiento abierto de $SU(n)$, ya que la matriz tiene a lo sumo n autovalores y su determinante es 1.

Sea B una componente conexa de A_i. Como $SU(n)$ es conexa por caminos podremos demostrar que B es contráctil en $SU(n)$; además si cada componente se contrae a un punto, podemos mover todos esos puntos a un único punto.

Denotamos por $S(n)$ el conjunto de matrices $n \times n$ auto-adjuntas con su topología natural. Sea la aplicación $\Phi\colon B \to S(n)$, siendo $\Phi(X) = -i \log(X)$; está bien definida y es continua. Además $X = \exp(i\Phi(X))$.

Como $1 = \det(X) = \exp(i\mathrm{tr}(\Phi(X)))$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{tr}(\Phi(X)) = 2k\pi, \quad \forall X \in B$ por ser B conexo.

Sea
$$X_0 = \exp(2\pi ik/n)I_n \in SU(n)$$
donde I_n es la matriz identidad.

Sea I el intervalo identidad y definimos $F\colon B \times I \to SU(n)$ por
$$F(X,t) = \exp(i((1-t)\Phi(X) + t(2\pi k)/nI_n));$$
así F es continua (por ser suma y producto de aplicaciones continuas) y por otro lado tenemos:
$$F(X,0) = \exp(i\Phi(X))$$
y
$$F(X,1) = \exp(2\pi k/n)I_n = X_0$$
para todo $X \in B$. Se tiene de este modo que B es contráctil en $SU(n)$.

Hemos encontrado un recubrimiento de n abiertos contráctiles de $SU(n)$ por lo tanto $\mathrm{cat}(SU(n)) \leq n-1$.

□

Lema 22 *Una cota superior para la categoría L-S del grupo unitario de dimensión n es n, es decir,*
$$cat(U(n)) \leq n.$$

Demostración:
Sea $f\colon U(n) \to SU(n) \times S^1$ definida por
$$f(A) = (\varphi(A), \det(A)),$$
donde $\varphi(A)$ es la matriz obtenida dividiendo la última columna por $\det(A)$ y cuya inversa, $f^{-1}(X,t)$, será la matriz resultado de multiplicar por t la última columna de la matriz X. Así f define un homeomorfismo entre $U(n)$ y $SU(n) \times S^1$. Entonces por el Teorema 15 obtenemos que:
$$\mathrm{cat}(U(n)) \leq \mathrm{cat}(SU(n)) + \mathrm{cat}(S^1) \leq n-1+1 = n.$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{cat}(S^1) = 1$ ya que existen dos abiertos contráctiles que lo recubren, y además S^1 no es contráctil.

□

Utilizando los dos lemas previos se demuestran las siguientes igualdades sobre la categoría relativa del grupo uniterio y del grupo especial unitario.

Proposición 23 *Se verifica las siguientes igualdades:*

1. $\mathrm{cat}_{SU(n+k)}(SU(n)) = n-1$ *para* $k \geq 0$;

2. $\mathrm{cat}_{U(n+k)}(U(n)) = n$ *para* $k \geq 0$.

Demostración:
Por definición sabemos que $\mathrm{cat}_X(A) \leq \mathrm{cat}(X)$ y además

$$\mathrm{cat}(SU(n)) \leq n-1 \text{ y } \mathrm{cat}(U(n)) \leq n,$$

entonces tenemos

$$\mathrm{cat}_{SU(n+k)}(SU(n)) \leq \mathrm{cat}(SU(n)) \leq n-1$$

y

$$\mathrm{cat}_{U(n+k)}(U(n)) \leq \mathrm{cat}(U(n)) \leq n.$$

Por lo tanto para obtener la demostración es suficiente probar que

$$\mathrm{cat}_{SU(n+k)}(SU(n)) \geq n-1 \text{ y } \mathrm{cat}_{U(n+k)}(U(n)) \geq n.$$

Probemos entonces que $\mathrm{cat}_{U(n+k)}(U(n)) \geq n$.
El anillo de cohomología de $U(n)$ es $H^+(U(n), \mathbb{Z}) = \Lambda(e_1; e_3; \ldots; e_{2n-1})$ donde Λ es el álgebra exterior, [9] p.148.
Sea la fibración

$$U(n) \to U(n+1) \to S^{2n+1},$$

entonces de la exactitud de la sucesión de Wang por [13] obtenemos un isomorfismo inducido por la inclusión entre $H^l(U(n), \mathbb{Z})$ y $H^l(U(n+1), \mathbb{Z})$ para $l \leq 2n-1$.
Sea $i \colon U(n) \to U(n+k)$ la inclusión. Entonces por inducción tenemos que

$$i^* \colon H^l(U(n+k), \mathbb{Z}) \to H^l(U(n), \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo para $l \leq 2n-1$. Por otro lado, si tomamos $\xi_i = e_{2i-1}$ para $1 \leq i \leq n$ entonces

$$i^*(\xi_1 \cup \cdots \cup \xi_n) = i^*(e_1 \cup e_3 \cup \cdots \cup e_{2n-1}) \neq 0.$$

Por el Lema 11 tenemos que $\mathrm{cat}_{U(n+k)}(U(n)) \geq n$.
De modo análogo, teniendo en cuenta que el anillo de cohomología de $SU(n)$ es

$$H^+(SU(n), \mathbb{Z}) = \Lambda(e_3; e_5; \ldots; e_{2n-1})$$

donde Λ es el álgebra exterior, [9] p.148, se obtiene $\mathrm{cat}_{SU(n+k)}(SU(n)) \geq n-1$.

$\square$

Capítulo 3

Categoría L-S de espacios simétricos de tipo clásico

El objetivo de este capítulo será determinar la categoría L-S de los espacios simétricos $SU(n)/SO(n)$ y $SU(2n)/Sp(n)$.

Los teoremas que recogen estos resultados se probarán según la idea de la demostración del Teorema 20 de Singhof y siguiendo el artículo de Mimura y Sugata [8].

3.1. Categoría L-S de $SU(n)/SO(n)$

Teorema 24 *Se verifica que:*

$$\mathrm{cat}(SU(n)/SO(n)) = n - 1\,.$$

Comenzaremos probando el siguiente lema:

Lema 25 *Se tiene el siguiente difeomorfismo:*

$$SU(n)/SO(n) \cong \{X \in SU(n) \mid X^T = X\}.$$

Demostración:

Denotamos por $K_n = \{X \in SU(n) \mid X^T = X\}$ el espacio de matrices unitarias simétricas con determinante 1 y definimos una acción

$$\varphi \colon SU(n) \times K_n \to K_n$$

que actúa $\varphi(P, X) = PXP^T$.

Para ver que la acción es transitiva, vamos a probar primero que cada $X \in K_n$ puede ser representado como:

$$X = PP^T = PI_nP^T,$$

con $P \in SU(n)$.

Sea $X \in K_n$, entonces las matrices $X + \overline{X}$ e $i(X - \overline{X})$ verifican:

- Son reales: Denotemos $X = A + iC$ donde A, C son matrices reales. Entonces,

$$X + \overline{X} = A + iC + A - iC = 2A,$$

$$i(X - \overline{X}) = i(A + iC - (A - iC)) = i(2iC) = -2C.$$

- Son simétricas: Sabemos que $X^T = X$, entonces

$$A + iC = X = X^T = (A + iC)^T = A^T + iC^T$$

por lo tanto $A = A^T$ y $C = C^T$.

- Conmutan: Teniendo en cuenta que $X \in K_n$ obtenemos que $X^{-1} = X^* = \overline{(X^T)} = \overline{X}$ y por lo tanto $X\overline{X} = I = \overline{X}X$. En consecuencia

$$\begin{aligned} i(X - \overline{X})(X + \overline{X}) &= i(X^2 + X\overline{X} - \overline{X}X - \overline{X}^2) = \\ &\quad (X + \overline{X})[i(X - \overline{X})]. \end{aligned}$$

Como la matriz $X + \overline{X}$ es real y simétrica podemos diagonalizarla mediante una matriz $B \in SO(n)$ tal que $B^T(X + \overline{X})B = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$.
Teniendo ahora en cuenta que $X + \overline{X}$ e $i(X - \overline{X})$ conmutan, es decir,

$$i(X - \overline{X})(X + \overline{X}) - (X + \overline{X})[i(X - \overline{X})] = 0;$$

- Todos los autovalores de $X + \overline{X}$ son distintos:

  Sea a_i un autovalor con multiplicidad 1, y sea ν_i su autovector asociado: $(X + \overline{X})\nu_i = a_i\nu_i$. Por lo tanto,

$$(X + \overline{X})i(X - \overline{X})\nu_i = i(X - \overline{X})(X + \overline{X})\nu_i = a_i i(X - \overline{X})\nu_i.$$

  Obtenemos que, $i(X - \overline{X})\nu_i$ es un autovector para $X + \overline{X}$ asociado al autovalor a_i; pero a_i tiene multiplicidad 1 por lo tanto existe b_i tal que $i(X - \overline{X})\nu_i = b_i\nu_i$ y así ν_i es un autovector para $i(X - \overline{X})$. Repitiendo el proceso para todos los autovalores de $X + \overline{X}$ podemos diagonalizar $X + \overline{X}$ y $i(X - \overline{X})$ con la misma matriz de paso.

- La matriz $X + \overline{X}$ tiene autovalores repetidos:

  Sea a_i un autovalor con multiplicidad k_i, supongamos $X + \overline{X}$ diagonalizada de modo que los autovalores repetidos queden agrupados a lo largo de la diagonal, $B^T(X + \overline{X})B = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) = D$. Definimos $B^T i(X - \overline{X})B = D'$. Obtenemos que D y D' conmutan:

$$\begin{aligned} &DD' - D'D = \\ &B^T(X + \overline{X})BB^T i(X - \overline{X})B - B^T i(X - \overline{X})BB^T(X + \overline{X})B = \\ &B^T[(X + \overline{X})i(X - \overline{X}) - i(X - \overline{X})(X + \overline{X})]B = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, la matriz D' es diagonal en bloques, sean ν_i y ν_j autovalores de D correspondientes a distintos autovalores a_i y a_j, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \nu_i^T(DD'-D'D)\nu_j = (\nu_i^T D)D'\nu_j - \nu_i^T D'(D\nu_j) = \\ & a_i\nu_i^T D'\nu_j - \nu_i^T D' a_j \nu_j = (a_i - a_j)\nu_i^T D'\nu_j \end{aligned}$$

como $a_i \neq a_j$ tenemos que D' es diagonal en bloques.

Si denotamos s por el número de autovalores distintos, tenemos que:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 I_{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 I_{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_s I_{k_s} \end{bmatrix}$$

y

$$D' = \begin{bmatrix} D'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & D'_s \end{bmatrix}.$$

Se puede diagonalizar los bloques D'_i de modo que no afecta al bloque asociado, $a_i I_{k_i}$, ya que es un múltiplo de la matriz identidad.

Así podemos diagonalizarlas simultáneamente mediante una matriz adecuada, $B \in SO(n)$:

$$B^T(X+\overline{X})B = \mathrm{Diag}(a_1, ..., a_n),$$
$$B^T i(X-\overline{X})B = \mathrm{Diag}(b_1, \ldots, b_n).$$

Por otro lado

$$B^T(X+\overline{X})B = B^T(2A)B = 2B^T AB$$

y

$$B^T[i(X-\overline{X})]B = B^T(-2C)B = -2B^T CB$$

y así

$$\begin{aligned} B^T XB &= B^T(A+iC)B = B^T AB + iB^T CB = \\ & \frac{1}{2}\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) - \frac{i}{2}\mathrm{Diag}(b_1, \ldots, b_n) = \\ & \mathrm{Diag}(\frac{a_1 - ib_1}{2}, \ldots, \frac{a_n - ib_n}{2}). \end{aligned}$$

Además $B^T XB \in SU(n)$ ya que:

$$(B^T XB)^* = \overline{(B^T XB)^T} = \overline{(B^T X^T B)} = \overline{B^T X^T B} = B^{-1}X^{-1}B = (B^T XB)^{-1}$$

y

$$\det(B^T XB) = \det B^T \det X \det B = 1.$$

Y por lo tanto sus autovalores tienen módulo 1,

$$|\frac{a_k - ib_k}{2}| = 1, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

Definimos $c_k \in \mathbb{C}$ tal que $c_k^2 = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$ y además $c_1 \cdots c_n = 1$. Por otro lado, sea $C = \mathrm{Diag}(c_1, \ldots, c_n)$ que verifica $C \in SU(n)$ porque $|c_k| = 1$. Obtenemos

$$B^T X B = C^2 = CC = CC^T,$$

entonces

$$X = (B^T)^{-1} CC^T B^{-1} = BCC^T B^T = BC(BC)^T.$$

Tomamos $P = BC$, $P \in SU(n)$ y así $X = PP^T$.

Esto prueba que la acción es transitiva. Además $I_n \in K_n$ y la órbita

$$\mathrm{Orbita}(I_n) = \{PI_nP^T \mid P \in SU(n)\} = K_n.$$

Por otro lado, el grupo de isotropía de I_n viene dado por:

$$\begin{aligned} \{P \in SU(n) \mid \varphi(P, I_n) = I_n\} &= \{P \in SU(n) \mid PI_nP^T = I_n\} = \\ &\{P \in SU(n) \mid P^T = P^{-1}\} = \\ &\{P \in SU(n) \mid P = \overline{P}\} = SO(n). \end{aligned}$$

Se tiene el difeomorfismo

$$SU(n)/SO(n) \cong K_n = \{X \in SU(n) \mid X = X^T\}.$$

□

Nota: Esto es un caso particular del llamado "modelo de Cartan"de un espacio simétrico.

Está demostrado por Mimura y Toda [9] p.150, que el anillo de cohomología mod 2 de $M = SU(n)/SO(n)$ viene dado por:

$$H^+(M; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(e_2; \ldots; e_n),$$

donde Λ es el álgebra exterior. Entonces por la Proposición 7 obtenemos:

$$n - 1 = \mathrm{cuplong}_{\mathbb{Z}_2}(M) \leq \mathrm{cat}(M).$$

Entonces el Teorema 24 estará demostrado si se prueba la siguiente proposición:

Proposición 26 *Se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\mathrm{cat}(SU(n)/SO(n)) \leq n - 1.$$

Demostración:

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números complejos distintos entre si tales que $|\lambda_i| = 1, \forall i \in \{1, ..., n\}$ y $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 1$. Sea $r \in \{1, ..., n\}$ y definimos:

$$A_r = \{X \in SU(n)/SO(n) \mid \lambda_r \text{ no es autovalor de } X\}.$$

Los conjuntos A_r son abiertos. Dada una matriz $A \in K_n \cong SU(n)/SO(n)$ todos los números λ_i no pueden ser autovalores de A, supongamos que si:

$$1 = \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 1$$

lo que es una contradicción.

Así para toda matriz $A \in SU(n)/SO(n)$ existe $r \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A \in A_r$. Por lo tanto tenemos un recubrimiento abierto de $SU(n)/SO(n) : \{A_r \mid 1 \leq r \leq n\}$.

Fijamos ahora $r \in \{1, \ldots, n\}$, y sea B una componente conexa de A_r. Como $SU(n)/SO(n)$ es conexo por caminos es suficiente probar que B es contráctil para obtener que A_r lo es. Sea $\mathrm{u}(n) = \{X \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$ y definimos una aplicación:

$$\log\colon B \to \mathrm{u}(n).$$

Veamos como está definida: Sea $X \in A \subset A_r$ y podemos escribir $\lambda_r = e^{i\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$, ya que $|\lambda_r| = 1$. Además X puede ser diagonalizada

$$X = P\mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})P^*$$

por una matriz adecuada $P \in U(n)$ y

$$\alpha \leq \theta_j \leq \alpha + 2\pi \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

(las desigualdades son estrictas ya que X no tiene a $\lambda_r = e^{i\alpha}$ como autovalor). Por lo tanto, se define la función $\log\colon B \to \mathrm{u}(n)$ por

$$\log(B) = P\mathrm{Diag}(i\theta_1, \ldots, i\theta_n)P^*,$$

que está bien definida y es continua. Por definición se tiene que $X = \exp(\log(X))$ y por lo tanto:

$$1 = \det(X) = \det(\exp(\log(X))) = \exp(\mathrm{tr}(\log(X))),$$

siendo $\mathrm{tr}\colon \mathfrak{M}(\mathbb{C}, n) \to \mathbb{C}$ la función traza.

Por otro lado las funciones tr y log son continuas y B es conexo; entonces existe un número $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$1 = \exp(\mathrm{tr}(\log(X))) \Rightarrow \mathrm{tr}(\log(X)) = 2k\pi ik \quad \forall X \in B.$$

Definimos ahora una matriz constante en $SU(n)/SO(n)$, que denotaremos X_0:

$$X_0 = \exp(\frac{2\pi ik}{n})I_n.$$

Veamos que $X_0 \in SU(n)/SO(n)$, recordemos que

$$SU(n)/SO(n) \cong \{X \in SU(n) \mid X^T = X\} :$$

$$X_0 \text{ es diagonal } \Rightarrow X_0^T = X_0,$$

$$X_0^* = \overline{X_0^T} = \overline{X_0} = \exp(\frac{-2\pi ik}{n})I_n = X_0^{-1},$$

$$\det(X_0) = n\exp(\frac{2\pi ik}{n}) = \exp(2\pi ik) = 1.$$

Veamos ahora que B contrae a X_0. Como $\mathrm{u}(n)$ es un espacio vectorial, podemos construir homotopías lineales. Definimos una homotopía:

$$F: B \times [0,1] \to SU(n)/SO(n),$$

definido por

$$F(X,s) = \exp((1-s)\log(X) + s\frac{2\pi ik}{n}I_n).$$

Trivialmente F es continua por ser suma y producto de continuas, además

$$F(X,0) = \exp(\log(X)) = X$$

y

$$F(X,1) = \exp(\frac{2\pi ik}{n}I_n) = \exp(\frac{2\pi ik}{n})I_n = X_0.$$

Solo falta probar entonces que $F(X,s) \in SU(n)/SO(n);\ \forall X \in B, s \in [0,1]$. Pero como $\mathrm{u}(n)$ junto con el corchete de Lie dado por el conmutador es el álgebra de Lie de $U(n)$, tenemos $F(X,s) \in U(n);\ \forall X \in B, s \in [0,1]$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\det(F(X,s)) &= \det(\exp((1-s)\log(X) + s\frac{2\pi ik}{n}I_n)) = \\
&\exp(\mathrm{tr}((1-s)\log(X) + s\frac{2\pi ik}{n}I_n)) = \\
&\exp((1-s)\mathrm{tr}(\log(X)) + s\frac{2\pi ik}{n}\mathrm{tr}(I_n)) = \\
&\exp((1-s)2\pi ik + s2\pi ik) = \exp(2\pi ik) = 1.
\end{aligned}$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned}
F(X,s)^T &= \exp((1-s)\log(X) + s\frac{2\pi ik}{n}I_n)^T = \\
&\exp((1-s)\log(X^T) + s\frac{2\pi ik}{n}I_n^T) = \\
&\exp((1-s)\log(X) + s\frac{2\pi ik}{n}I_n) = F(X,s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se ha obtenido un recubrimiento de $SU(n)/SO(n)$ por abiertos contráctiles: $\{A_r \mid 1 \le r \le n\}$ por lo que se concluye el resultado.

$\square$

3.2. Categoría L-S de $SU(2n)/Sp(n)$

Teorema 27 *Se verifica que:*

$$\mathrm{cat}(SU(2n)/Sp(n)) = n - 1.$$

El anillo de cohomología de $N = SU(2n)/Sp(n)$ viene dado por:

$$H^+(N;\mathbb{Z}) = \Lambda(e_5; e_9; \dots; e_{4n-3}),$$

donde Λ es el álgebra exterior; como se puede ver en la demostración de Mimura y Toda en [9] p.149. Y una vez más por la Proposición 7 obtenemos que:

$$n - 1 = \mathrm{cuplong}_{\mathbb{Z}_2}(N) \leq \mathrm{cat}(N).$$

Necesitamos probar unos lemas previos para finalizar el cálculo de $\mathrm{cat}(N)$. Sea $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ donde I_n denota la matriz identidad de orden n.

Lema 28 *Existe el siguiente difeomorfismo:*

$$SU(2n)/Sp(n) \cong \{X \in SU(2n) \mid X^T = -X\}.$$

Demostración:
Existe un embebimiento $c'\colon Sp(n) \to SU(2n)$ definido por

$$c'(X) = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & A \end{pmatrix},$$

siendo $X = A + jB$ con A, B matrices complejas. Se tiene que la imagen de c' es $\{X \in SU(n) \mid XJX^T = J\}$. Sea

$$L_{2n} = \{X \in SU(2n) \mid X^T = -X\}$$

y definimos una acción

$$\varphi\colon SU(2n) \times L_{2n} \to L_{2n}$$

que actúa $\varphi(P, X) = PXP^T$.

Veamos que la acción es transitiva. Sea $X \in L_{2n}$ y λ un autovalor de X:

$$X \in L_{2n} \Rightarrow X \in SU(2n) \Rightarrow \det(X) = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

Correspondiente a este autovalor existe un autovector $\nu \in \mathbb{C}^{2n}$ tal que $X\nu = \lambda\nu$ y $|\nu| = 1$. Teniendo en cuenta que

$$X \in L_{2n} \Rightarrow X^*X = I_{2n} \text{ y } X^T = -X$$

y por otro lado que $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda| = 1$:

$$\begin{aligned} X\nu = \lambda\nu \quad \Rightarrow \quad & \nu = X^{-1}\lambda\nu \Rightarrow \nu = X^{*}\lambda\nu \Rightarrow \nu = -\overline{X}\lambda\nu \Rightarrow \\ & \overline{\nu} = -X\overline{\lambda}\overline{\nu} = -X\frac{1}{\lambda}\overline{\nu} \Rightarrow X\overline{\nu} = -\lambda\overline{\nu}. \end{aligned}$$

Es decir, si ν es un λ-autovector entonces $\overline{\nu}$ es un $(-\lambda)$-autovector.

Sea W un subespacio 2-dimensional de $\mathbb{C}^{2n}$ generado por ν y $\overline{\nu}$, que son independientes. Tomamos el conjunto $W^{\perp}$ ortogonal a W, y repetimos el procedimiento en $W^{\perp}$. Obtenemos entonces una base ortonormal $\{\nu_1, \overline{\nu_1}, \ldots, \nu_n, \overline{\nu_n}\} \in \mathbb{C}^{2n}$ tal que

$$X\lambda_k = \lambda_k\nu_k, \quad X\overline{\nu_k} = -\lambda_k\overline{\nu_k}, \text{ siendo } k = 1, \ldots, n,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son autovalores de X. Sean los siguientes números reales:

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_k + \overline{\nu_k}), \quad w'_k = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu_k - \overline{\nu_k}), \text{ siendo } k = 1, ...n.$$

Entonces como

$$\begin{aligned} Xw_k &= X\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_k + \overline{\nu_k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X\nu_k + X\overline{\nu_k}) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_k\nu_k - \lambda_k\overline{\nu_k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_k w'_k\frac{\sqrt{2}}{-i} = i\lambda_k w'_k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Xw'_k &= X\frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu_k - \overline{\nu_k}) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(X\nu_k - X\overline{\nu_k}) = \\ & \frac{-i}{\sqrt{2}}(\lambda_k\nu_k + \lambda_k\overline{\nu_k}) = \frac{-i\lambda_k}{\sqrt{2}}w_k\sqrt{2} = -i\lambda_k w_k \end{aligned}$$

obtenemos que $|w_k| = |w'_k|$, lo que implica $|w_k| = 1$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} < w_r, w_s > &= < \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_r + \overline{\nu_r}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_s + \overline{\nu_s}) >= \\ & \frac{1}{2}(< \nu_r, \nu_s > + < \overline{\nu_r}, \nu_s > + < \nu_r, \overline{\nu_s} > + < \overline{\nu_r}, \overline{\nu_s} >) = 0 \\ < w'_r, w'_s > &= < \frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu_r - \overline{\nu_r}), \frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu_s - \overline{\nu_s}) = \\ & \frac{1}{2}(< \nu_r, \nu_s > - < \nu_r, \overline{\nu_s} > - < \overline{\nu_r}, \nu_s > + < \overline{\nu_r}, \overline{\nu_s} >) = 0 \\ < w_r, w'_s > &= < \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_r + \overline{\nu_r}), \frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu_s - \overline{\nu_s}) = \\ & \frac{-i}{2}(< \nu_r, \nu_s > - < \nu_r, \overline{\nu_s} > + < \overline{\nu_r}, \nu_s > - < \overline{\nu_r}, \overline{\nu_s} >) = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< w_r, w'_r > \; &= \; < \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_r + \overline{\nu_r}), \frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu_r - \overline{\nu_r}) >= \\
& \frac{-i}{2}(< \nu_r, \nu_r > + < \overline{\nu_r}, \nu_r > - < \nu_r, \overline{\nu_r} > - < \overline{\nu_r}, \overline{\nu_r} >= \\
& \frac{-i}{2}(\|\nu_r\|^2 - \|\overline{\nu_r}\|^2) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\{w_1, w'_1, \ldots, w_n, w'_n\}$ forma una base ortonormal en $\mathbb{R}^{2n}$.

Tomamos entonces $B = (w_1, \ldots, w_n, w'_1, \ldots, w'_n) \in O(2n)$. Además se puede escoger $B \in SO(2n)$ reemplazando λ_1 con $-\lambda_1$ si es necesario. Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
B^T X B \; &= \; \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \\ {w'_1}^T \\ \vdots \\ {w'_n}^T \end{bmatrix} X \, [\, w_1 \quad \cdots \quad w_n \quad w'_1 \quad \cdots \quad w'_n \,] = \\
& \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \\ {w'_1}^T \\ \vdots \\ {w'_n}^T \end{bmatrix} [\, i\lambda_1 w'_1 \quad \cdots \quad i\lambda_n w'_n \quad -i\lambda_1 w_1 \quad \cdots \quad -i\lambda_n w_n \,] = \\
& \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -i\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -i\lambda_n \\ i\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & i\lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 0 & -i\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ i\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sean $c_1, \ldots, c_n$ números complejos tal que $c_k^2 = i\lambda_k, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, y sea

$$
C = \mathrm{Diag}(c_1, \ldots, c_n, c_1, \ldots, c_n) \in U(2n).
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
CJC \; &= \; \begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(c_1, \ldots, c_n) & 0 \\ 0 & \mathrm{Diag}(c_1, \ldots, c_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(c_1, \ldots, c_n) & 0 \\ 0 & \mathrm{Diag}(c_1, \ldots, c_n) \end{bmatrix} =
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Diag}(c_1,\ldots,c_n) \\ \mathrm{Diag}(c_1,\ldots,c_n) & 0 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(c_1,\ldots,c_n) & 0 \\ 0 & \mathrm{Diag}(c_1,\ldots,c_n) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Diag}(c_1^2,\ldots,c_n^2) \\ \mathrm{Diag}(c_1^2,\ldots,c_n^2) & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Diag}(i\lambda_1,\ldots,i\lambda_n) \\ \mathrm{Diag}(i\lambda_1,\ldots,i\lambda_n) & 0 \end{bmatrix} = B^TXB.$$

Por lo tanto, $B^TXB = CJC = CJC^T$. De forma análoga al apartado anterior tenemos que $B^TXB \in SU(2n)$ y entonces

$$\det(B^TXB) = i^{2n}\lambda_1^2\cdots\lambda_n^2 = (i^n\lambda_1\cdots\lambda_n)^2 = 1,$$

se sigue así que $i^n\lambda_1\cdots\lambda_n = \pm 1$. Además

$$\det(C) = c_1^2\cdots c_n^2 = i^n\lambda_1\cdots\lambda_n = \pm 1.$$

Si $\det(C) = -1$ entonces subtituimos C por la multiplicación por

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(0,1,\ldots,1) & \mathrm{Diag}(1,0,\ldots,0) \\ \mathrm{Diag}(1,0,\ldots,0) & \mathrm{Diag}(0,1,\ldots,1) \end{bmatrix}$$

y así obtenemos $\det(C) = 1$ y podemos tomar $C \in SU(2n)$. Tomamos entonces $P = BC$ y tenemos:

$$X = BCJC^TB^T = PJP^T \text{ con } P \in SU(2n).$$

Lo que implica que la acción es transitiva ya que $J \in L_{2n}$:

$$X \in L_{2n} \Rightarrow X = PJP^T.$$

La órbita de J:

$$\mathrm{Orbita}(J) = \{PJP^T \mid P \in SU(2n)\} = L_{2n}.$$

Por otro lado el grupo de isotropía de J viene dado por:

$$\{P \in SU(2n) \mid \varphi(P,J) = J\} = \{P \in SU(2n) \mid PJP^T = J\} = Sp(n).$$

Obtenemos el difeomorfismo:

$$SU(2n)/Sp(n) \cong L_{2n} = \{X \in SU(2n) \mid X^T = -X\}.$$

Lo que concluye la demostración.

□

Notemos que en la demostración de Mimura-Sugata [8] se toma erróneamente la matriz $B = [w_1, w_1', ..., w_n, w_n'] \in O(2n)$. Con esta elección la matriz B^TXB no es la deseada para concluir el resultado.

Corolario 29 *Se obtiene:*

$$SU(2n)/Sp(n) \cong \{X \mid X^T = JXJ^T\}.$$

Demostración:
Por el lema anterior tenemos que:

$$SU(2n)/Sp(n) \cong \{X \in SU(2n) \mid X^T = -X\}.$$

Multiplicando por J obtenemos:

$$\begin{aligned} SU(2n)/Sp(n) &= \{JX \in SU(2n) \mid X^T = -X\} = \\ & \{X \in SU(2n) \mid (J^T X)^T = -J^T X\} = \\ & \{X \in SU(2n) \mid X^T J = JX\} = \\ & \{X \in SU(2n) \mid X^T = JXJ^T\}. \end{aligned}$$

□

Lema 30 *Sea X una matriz de $SU(2n)/Sp(n)$. Si λ es un autovalor de X, entonces* $\dim(W_\lambda) \geq 2$*; donde $W_\lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$ denota el correspondiente autoespacio.*

Demostración:
Sea $X \in SU(2n)/Sp(n)$ y λ un autovalor de X, entonces existe un autovector $\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{C}^{2n}$ tal que $X\nu = \lambda\nu$. Teniendo en cuenta que $X \in SU(2n)/Sp(n)$ entonces por el lema anterior X verifica que:

$$XX^* = I_{2n},\ X^T = JXJ^T \text{ y } \overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

además tenemos que:

$$X\nu = \lambda\nu \Rightarrow \nu = X^{-1}\lambda\nu \Rightarrow \nu = \lambda X^{-1}\nu \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\nu = X^{-1}\nu.$$

Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} X(J\overline{\nu}) &= (XJ)\overline{\nu} = (JX^T)\overline{\nu} = J(X^T\overline{\nu}) = J(\overline{X^*\nu}) = J(\overline{X^{-1}\nu}) = \\ & J(\overline{\frac{1}{\lambda}\nu}) = J(\frac{1}{\overline{\lambda}}\overline{\nu}) = J(\lambda\overline{\nu}) = \lambda(J\overline{\nu}). \end{aligned}$$

En consecuencia, si ν es autovector de λ entonces $J\overline{\nu}$ tambien lo es. Será suficiente probar entonces que ν y $J\overline{\nu}$ son linealmente independientes para obtener el resultado.
Supongamos $a\nu + bJ\overline{\nu} = 0$ tal que $a, b \in \mathbb{C}$ obtenemos así:

$$\begin{aligned} a\nu + bJ\overline{\nu} = 0 &\Rightarrow Xa\nu + XbJ\overline{\nu} = 0 \Rightarrow aX\nu + bXJ\overline{\nu} = 0 \Rightarrow \\ & a\lambda\nu + b\lambda\nu = 0 \Rightarrow (a+b)\lambda\nu = 0 \Rightarrow a + b = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$a\nu + bJ\overline{\nu} = 0 \Rightarrow \overline{a\nu} + \overline{bJ}\nu = 0.$$

Aplicando J,

$$\begin{aligned}&\overline{a}J\overline{\nu} + \overline{b}(-\nu) = 0 \Rightarrow \overline{a}XJ\overline{\nu} - \overline{b}X\nu = 0 \Rightarrow\\ &\overline{a}\lambda\nu - \overline{b}\lambda\nu = 0 \Rightarrow (\overline{a} - \overline{b})\lambda\nu = 0 \Rightarrow \overline{a} - \overline{b} = 0 \Rightarrow\\ &a - b = 0.\end{aligned}$$

Entonces,

$$a + b = 0 \text{ y } a - b = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

□

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ diferentes con $|\lambda_r| = 1$ para todo $1 \leq r \leq n$ tales que $\lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2 \neq 1$. Para $1 \leq r \leq n$ definimos:

$$A_r = \{X \in SU(2n)/Sp(n) \mid \lambda_r \text{ no es autovalor de } X\}.$$

Lema 31 *La familia* $\{A_r\}_{1\leq r\leq n}$ *forma un recubrimiento abierto de* $SU(2n)/Sp(n)$.

Demostración:
Sea $X \in SU(2n)/Sp(n)$ con $X \notin \cup_{r=1}^{n} A_r$, es decir,

$$X \in \cap_{r=1}^{n}\{(SU(2n)/Sp(n)) \setminus A_r\}.$$

Por tanto X tiene como autovalor a λ_r para todo $r \in \{1 \ldots n\}$. Como por lo demostrado en el Lema 30 la dimensión del autoespacio correspondiente a cada autovalor es mayor o igual que 2, además tenemos n autovalores; y por otro lado $X \in \mathfrak{M}_{2n\times 2n}$. Entonces la dimensión del autoespacio correspondiente a λ_r $\forall r \in \{1, \ldots, n\}$ es exactamente 2.

Por lo tanto, podemos diagonalizar X mediante una matriz adecuada $P \in U(2n)$:

$$X = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n)P^*.$$

Recordando que $X \in SU(2n)$ obtenemos que:

$$1 = \det(X) = \lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2 \neq 1,$$

lo cual es una contradicción. Entonces no existe dicha matriz X, por lo tanto $SU(2n)/Sp(n) = \cup_{r=1}^{n} A_r$ y esto implica que $\{A_r\}_{1\leq r\leq n}$ forma un recubrimiento abierto; ya que los conjuntos A_r son abiertos.

□

Entonces el Teorema 27 estará demostrado si se prueba el siguiente lema:

Lema 32 *Se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\mathrm{cat}(SU(2n)/Sp(n)) \leq n - 1.$$

Demostración:

Sea $N = SU(2n)/Sp(n)$. Por el Lema 31 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es un recubrimiento abierto de N. Para obtener el resultado es suficiente probar que A_r es contráctil en N, $\forall r \in \{1, \ldots, n\}$. Además como N es conexo por caminos, basta con probar que cualquier componente conexa de A_r es contráctil en N. Fijemos A_r y sea B una componente conexa de A_r. Definimos, de forma análoga a lo hecho en la demostración de $SU(n)/SO(n)$, una función continua:

$$\log\colon B \to \mathrm{u}(n).$$

Y tambien del mismo modo definimos una matriz constante X_0:

$$X_0 = \exp(\frac{\pi i k}{n}) I_{2n} \in SU(2n)/Sp(n).$$

Sea una homotopía:

$$F\colon B \times [0,1] \to SU(2n)/Sp(n),$$

definida por $F(X,s) = \exp((1-s)\log(X) + s\frac{\pi i k}{n} I_{2n})$ que claramente es continua por ser composición, producto y suma de funciones continuas. Y verifica:

$$F(X,0) = \exp(\log(X)) = X$$

y

$$F(X,1) = \exp(\frac{\pi i k}{n} I_{2n}) = X_0 \quad \forall X \in B.$$

Veamos ahora que $F(X,s) \in N$ $\forall X \in B$, $\forall s \in [0,1]$. Como $\mathrm{u}(2n)$ junto con el conmutador es el álgebra de Lie de $U(2n)$ obtenemos que $F(X,s) \in U(2n)$. Además:

$$\exp(\mathrm{tr}(\log(X))) = \det(\exp(\log(X))) = \det(X) = 1, \quad \forall X \in B.$$

Entonces, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{tr}(\log(X)) = 2\pi i k$, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
\det(F(X,s)) &= \det(\exp((1-s)\log(X) + s\frac{\pi i k}{n} I_{2n})) = \\
&\exp(\mathrm{tr}((1-s)\log(X) + s\frac{\pi i k}{n} I_{2n})) = \\
&\exp((1-s)\mathrm{tr}(\log(X)) + s\frac{\pi i k}{n}\mathrm{tr}(I_{2n})) = \\
&\exp(2\pi i k(1-s) + s 2\pi i k) = \\
&\exp(2\pi i k) = 1,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
F(X,s)^T &= \exp((1-s)\log(X) + s\frac{\pi i k}{n} I_{2n} = \\
&\exp((1-s)\log(X^T) + s\frac{\pi i k}{n} I_{2n}^T =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\exp((1-s)\log(JXJ^T)+s\frac{\pi ik}{n}I_{2n})=\\
&\exp((1-s)J\log(X)J^T+s\frac{\pi ik}{n}I_{2n}=\\
&\exp(J((1-s)\log(X)+s\frac{\pi ik}{n}I_{2n})J^T)=\\
&J\exp((1-s)\log(X)+s\frac{\pi ik}{n}I_{2n})J^T=\\
&JF(X,s)J^T.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración.

□

Capítulo 4

Categoría L-S de espacios simétricos hermíticos

El objetivo de este capítulo será calcular la categoría L-S de los espacios simétricos hermíticos $Sp(n)/U(n)$ y $SO(2n)/U(n)$.

Para ello, en primer lugar se introducirán el concepto de estructura casi-compleja, de estructura Riemanniana hermítica y de métrica de Kähler.

Definición 33 *Una estructura casi-compleja en una variedad M es un tensor del tipo $(1,1)$:*

$$J_p \colon T_pM \to T_pM,$$
$$J_p^2 = -\mathrm{id},$$

variando diferenciablemente con $p \in M$.

Definición 34 *Sea M una variedad conexa con una estructura casi-compleja J. Una estructura Riemanniana g en M se dice que es hermítica si*

$$g(JX, JY) = g(X, Y).$$

Definición 35 *Sea M una variedad compleja conexa con una estructura hermítica; se dice que M es un espacio simétrico hermítico si cada punto $p \in M$ es un punto fijo aislado de una isometría holomorfa s_p de M.*

Proposición 36 ([6] p.372) *La estructura hermítica de un espacio simétrico hermítico es kähleriana.*

Definición 37 *En una $(2n)$-variedad kähleriana M podemos definir la 2-forma simpléctica*

$$w(X, Y) = g(JX, Y).$$

Se tiene que $w \wedge \overset{n)}{\cdots} \wedge w \neq 0$ es una forma de volumen y por tanto $\mathrm{cuplong}(M) \geq n$*.*

Proposición 38 *Si X es una $2n$-variedad compleja, simplemente conexa que admite una métrica de Kähler, entonces:*

$$\mathrm{cat}(X) = n.$$

Demostración:

Por el Teorema 14, teniendo en cuenta que X es conexa y simplemente conexa (es decir, 1-conexa), obtenemos que:

$$\mathrm{cat}(X) \leq \dim(X)/2 = 2n/2 = n.$$

Veamos ahora la otra desigualdad:

Por hipótesis, X admite una métrica de Kähler; por la Definición 37 se tiene que $\mathrm{cuplong}(X) \geq n$ y por la Proposición 7,

$$\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cuplong}(X) \geq n.$$

Lo que concluye el resultado.

$\square$

4.1. Categoría L-S de $Sp(n)/U(n)$

A continuación se calculará la dimensión de $Sp(n)/U(n)$ con el fin de determinar cuál es la categoría L-S de dicho espacio utilizando los resultados previos.

Lema 39 *Se tiene que:*

$$\dim(Sp(n)/U(n) = n(n+1).$$

Demostración:

Veamos en primer lugar que $\dim(Sp(n)) = 2n^2 + n$. Sea la función $F\colon \mathbb{H}(n) \to \mathcal{H}$ dada por $F(A) = A^*A$, donde $\mathcal{H}$ es el espacio vectorial de las matrices cuaterniónicas hermíticas, que tiene dimensión $2n^2 - n$. La fibra sobre la matriz identidad es $Sp(n)$. Veamos que es un valor regular.

$$\begin{aligned} F_{*A}(X) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[F(A+tX) - F(A)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(A+tX)^*(A+tX) - A^*A] = \\ &\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(A^*A + A^*tX + tX^*A + t^2X^*X - A^*A) = \\ &\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}t(A^*X + X^*A + tX^*X) = A^*X + X^*A. \end{aligned}$$

Si $A \in Sp(n)$, dada cualquier matriz hermítica $H \in \mathcal{H}$ tomamos $X = \frac{1}{2}AH$. Por lo tanto la diferencial es sobreyectiva; y por lo tanto se tiene:

$$\dim(Sp(n) = \dim(\mathbb{H}(n)) - \dim(\mathcal{H}) = 4n^2 - (2n^2 - n) = 2n^2 + n.$$

Veamos ahora que $\dim(U(n)) = n^2$. Sea la función $G\colon \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ dada por $G(A) = A^*A$, siendo $\mathcal{H}$ el espacio vectorial de las matrices complejas hermíticas, cuya dimensión es n^2. La fibra sobre la matriz identidad es $U(n)$; que es un valor regular, con un cálculo análogo al anterior vemos que $G_{*A}(X) = A^*X + X^*A$. Dada una matriz unitaria A y H una matriz hermítica, tomamos $X = \frac{1}{2}AH$ y por lo tanto la diferencial es sobreyectiva. De este modo se tiene que

$$\dim(U(n)) = \dim(\mathbb{C}(n)) - \dim(\mathcal{H}) = 2n^2 - n^2 = n^2.$$

Para concluir la demostración:

$$\begin{aligned}\dim(Sp(n)/U(n)) &= \dim(Sp(n)) - \dim(U(n)) = \\ & 2n^2 + n - n^2 = n^2 + n = n(n+1).\end{aligned}$$

□

Por ser $Sp(n)$ simplemente conexo y $U(n)$ conexo, tenemos que el cociente $Sp(n)/U(n)$ es simplemente conexo.

Además $Sp(n)/U(n)$ es un espacio simétrico hermítico por [6] p.518, entonces por la Proposición 36, admite una estructura kähleriana. Finalmente, por la Proposición 38 obtenemos que:

$$\operatorname{cat}(Sp(n)/U(n)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.2. Categoría L-S de $SO(2n)/U(n)$

Finalmente, en esta sección se calculará la dimensión de $SO(2n)/U(n)$ para determinar, de manera análoga a la sección anterior, cuál es la categoría L-S de dicho espacio.

Lema 40 *Se verifica:*

$$\dim(SO(2n)/U(n)) = n(n-1).$$

Demostración:

Como está probado en la demostración del Lema 39, la dimensión de $U(n)$ es n^2. Ahora de forma análoga vemos que $\dim(O(n)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sea la función $F\colon \mathbb{R}(n) \to \mathcal{S}$ dada por $F(A) = A^*A$, donde $\mathcal{S}$ es el espacio vectorial de las matrices simétricas, que tiene dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. La fibra sobre la matriz identidad es $O(n)$. Veamos que es un valor regular.

$$\begin{aligned}F_{*A}(X) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[F(A+tX) - F(A)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(A+tX)^T(A+tX) - A^TA] = \\ & \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(A^TA + A^TtX + tX^TA + t^2X^TX - A^TA) = \\ & \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}t(A^TX + X^TA + tX^TX) = A^TX + X^TA.\end{aligned}$$

Si $A \in O(n)$, dada cualquier matriz simétrica $S \in \mathcal{S}$ tomamos $X = \dfrac{1}{2}AS$. Por lo tanto la diferencial es sobreyectiva; y por lo tanto se tiene:

$$\dim(O(n) = \dim(\mathbb{R}(n)) - \dim(\mathcal{S}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ahora bien, $O(n)$ tiene dos componentes conexas ($\det(X) = 1$ y $\det(X) = -1$), y $SO(n)$ se corresponde a la componente conexa de la identidad. Por lo tanto,

$$\dim(SO(n)) = \dim(O(n)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Para concluir la demostración:

$$\begin{aligned} \dim(SO(2n)/U(n)) &= \dim(SO(2n)) - \dim(U(n)) = \\ & n(2n-1) - n^2 = n^2 - n = n(n-1). \end{aligned}$$

□

Por ser $SO(2n)/U(n)$ simplemente conexo y además $SO(2n)/U(n)$ es un espacio simétrico hermítico por [6] p.518, entonces por la Proposición 36, admite una estructura kähleriana. Finalmente, por la Proposición 38 obtenemos que:

$$\operatorname{cat}(SO(2n)/U(n)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Bibliografía

[1] Cornea, L; Lupton, G.; Oprea, J.; Tanré, D. *Lusternik-Schnirelmann category.* Mathematical Surveys and Monographs. Volume: 103. American Mathematical Society, 2001.

[2] Dieudonné, J.: *Eléments d´Analyse* Tome 3. Paris, Gauthier-Villars; 1970.

[3] Fox, R.H.: On the Lusternik-Schnirelmann Category. *Ann. of Math.,* II. Ser. 42, 333–370, 1941.

[4] Ganea, T.: Lusternik-Schnirelmann category and strong category. *Illinois J. Math.* 11, 417–427, 1967.

[5] Ganea, T.: Some problems on numerical homotopy invariants, *Lecture Notes in Math.* 249, 13–22, 1971.

[6] Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1978.

[7] Lusternik, L.; Schnirelmann, L.: *Méthodes Topologiques dans les Problémes Variationnels.* Hermann, Paris, 1934.

[8] Mimura, M.; Sugata, K.: On the Lusternik-Schnirelmann category of symmetric spaces of classical type. *Geometry and Topology Monographs* 13, 323–334, 2008.

[9] Mimura, M.; Toda, H.: *Topology of Lie Groups I and II.* Selected Monographies. Volume 16. College Press. University of Beijing. 1998.

[10] Schweitzer, P.: Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping. *Topology* 3, 337–355, 1965.

[11] Singhof, W.: On the Lusternik-Schnirelmann Category of Lie Groups I. *Math. Z.* 145, 111–116, 1975.

[12] Singhof, W.: On the Lusternik- Schnirelmann Category of Lie Groups II. *Math. Z.* 151, 143–148, 1976.

[13] Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory* Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer, 1978.