VICTOR SANMARTÍN LÓPEZ

# HIPERSUPERFICIES ISOPARAMÉTRICAS EN EL ESPACIO HIPERBÓLICO COMPLEJO

131a

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICTOR SANMARTÍN LÓPEZ

# HIPERSUPERFICIES ISOPARAMÉTRICAS EN EL ESPACIO HIPERBÓLICO COMPLEJO

131a

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Máster**

# Hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo

Víctor Sanmartín López

Xullo 2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

# Índice general

# Resumen

El objetivo principal de este trabajo es abordar el problema de clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{C}H^n$. En este sentido, empezamos con la presentación del espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$ y lo describimos como un espacio homogéneo. A continuación, estudiamos el operador de configuración de estas hipersuperficies teniendo en cuenta la relación entre el espacio hiperbólico complejo y el espacio de anti-De Sitter. Construimos también, utilizando la descomposición de Iwasawa, los ejemplos de la clasificación que pretendemos obtener. Comenzamos finalmente con los primeros pasos para la resolución del problema.

# Abstract

The main aim of this work is to tackle the classification problem of isoparametric hypersurfaces in $\mathbb{C}H^n$. We start with the presentation of the complex hyperbolic space $\mathbb{C}H^n$ and describe it as a homogeneous space. Then, we study the shape operator of these hypersurfaces taking into account the relation between the complex hyperbolic space and the anti-De Sitter space. Using the Iwasawa decomposition, we also construct the examples of the classification we intend to obtain. We finally present the first steps towards this classification result.

# Introducción

El desarrollo de la geometría de Riemann ha estado ligado desde sus comienzos con el estudio de la geometría de subvariedades. En esta última, ha tenido gran repercusión el análisis de un tipo concreto de subvariedades, las hipersuperficies isoparamétricas. De hecho, éstas han sido estudiadas por prestigiosos matemáticos tales como Segre [25], Cartan [8, 9, 10, 11] o Levi-Civita [22]. Incluso recientemente, Yao incluye en una lista de problemas abiertos de la Geometría [29] la clasificación de esta clase de hipersuperficies en las esferas. Con sus trabajos pudo adivinarse ya que estas hipersuperficies conectaban diferentes campos dentro de las matemáticas, pues aparece no solo involucrada la geometría de Riemann, sino también la topología algebraica, la geometría algebraica, la teoría de grupos de Lie o la teoría de ecuaciones diferenciales. A pesar de las anteriores citas, el origen de las hipersuperficies isoparamétricas se remonta probablemente al año 1919 con la publicación de un trabajo de Carlo Somigliana [26], donde se estudia un problema de óptica que pasamos a exponer muy brevemente a continuación. Si bien allí se aborda tal problema utilizando tres variables espaciales, esto es, $\mathbb{R}^3$, aquí lo presentaremos generalizándolo a una variedad riemanniana $\bar{M}$.

Se comienza considerando una onda, que se define como la aplicación diferenciable $\varphi\colon \bar{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to \varphi(x,t)$, solución de la ecuación de onda

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

donde $\Delta$ denota el operador de Laplace-Beltrami, $t \in \mathbb{R}$ representa la variable temporal y $x \in \bar{M}$ representa la variable espacial que, como hemos dicho, en el problema inicial era $\mathbb{R}^3$.

Se definen como frente de onda los conjuntos formados por puntos en el mismo estado de fase en el instante de tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$. Expresado en otros términos, si para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación $f_{t_0}\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ mediante $f_{t_0}(x) = \varphi(x, t_0)$, los frentes de onda en el instante $t_0$ son precisamente los conjuntos de nivel de la función $f_{t_0}$.

Para irnos acercando al concepto de hipersuperficie isoparamétrica, imponemos dos condiciones sobre $\varphi$. En primer lugar, la supondremos estacionaria, es decir, asumiremos que el frente de onda no depende del tiempo. Así, ahora los frentes de onda son los conjuntos de nivel de $f$, sin ser necesario poner como subíndice el tiempo. De esta forma, si $M$ es un frente de onda y $x_0 \in M$, la aplicación $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $c(t) = \varphi(x_0, t)$, no depende del

$x_0$ escogido, sino del frente de onda. Por consiguiente, el Laplaciano de $f$ es constante a lo largo de sus conjuntos de nivel, pues para cualquier $x \in f^{-1}(c(t_0))$ se tiene que

$$\Delta f(x) = \Delta\varphi(x, t_0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x, t_0) = c''(t_0).$$

La otra condición consiste en imponer que el gradiente sea constante a lo largo de los conjuntos de nivel. Ello puede interpretarse, de un modo informal, como exigir que los conjuntos de nivel sean equidistantes entre si, donde aquí al hablar de distancia nos referimos a longitudes de geodésicas ortogonales a la hipersuperficie. Como conclusión podemos extraer que las ondas estacionarias con frentes de onda equidistantes permiten determinar una función diferenciable $f$ verificando que tanto $||\nabla f||$ como $\Delta f$ son constantes a lo largo de sus conjuntos de nivel. Esto nos permite ya presentar la definición de función isoparamétrica, que aparece por primera vez, casi con toda seguridad, en un artículo de Levi-Civita en 1937 [22].

Una función diferenciable no constante $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ se dice isoparamétrica si existen dos funciones reales de una variable real $F_1$ y $F_2$ verificando

$$\Delta f = F_1 \circ f \qquad \text{y} \qquad ||\nabla f|| = F_2 \circ f.$$

Asimismo, una colección de conjuntos de nivel de $f$, $\{f^{-1}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$, se dice una familia isoparamétrica de hipersuperficies. A su vez, una hipersuperficie $M$ inmersa en $\bar{M}$ se dice hipersuperficie isoparamétrica si para cada $p \in M$ existe un entorno abierto $U$ de $p$ en $M$, tal que las superficies equidistantes a $U$ tienen curvatura media constante. El siguiente teorema expresa de forma precisa la relación entre función isoparamétrica e hipersuperficie isoparamétrica.

**Teorema.** *Sea $\bar{M}$ una variedad riemanniana. Sea $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ una función isoparamétrica y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de $f$. En estas condiciones, $M = f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie isoparamétrica de $\bar{M}$.*

*Recíprocamente, si $M$ es una hipersuperficie isoparamétrica de $\bar{M}$, entonces, para cada $p \in M$, podemos escoger un entorno abierto $U$ de $p$ en $M$ tal que $U$ es un conjunto de nivel regular de una función isoparamétrica $f\colon V \to \mathbb{R}$, para algún abierto $V$ en $M$.*

Uno de los problemas centrales de la geometría de Riemann es precisamente el de la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas de una variedad riemanniana. Sin ir más lejos, por ejemplo, en el caso euclídeo fue Segre [25] el que, tras las clasificaciones de Somigliana [26] y Levi-Civita [22] en $\mathbb{R}^3$, completó la clasificación de $\mathbb{R}^n$, demostrando que cada hipersuperficie isoparamétrica tendría una o dos curvaturas principales y sería una parte abierta de un hiperplano $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, o una esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, o, por último, un cilindro generalizado $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, donde $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Otro ejemplo notable es el del caso hiperbólico real, $\mathbb{R}H^n$, resuelto por Cartan [8], que probó que aquí las hipersuperficies isoparamétricas eran partes abiertas o de una horosfera, o de una esfera geodésica, o de un hiperespacio hiperbólico totalmente geodésico $\mathbb{R}H^{n-1}$ de

$\mathbb{R}H^n$, o una de sus hipersuperficies equidistantes, o de un tubo alrededor de un subespacio hiperbólico real $\mathbb{R}H^k$, con $k \in \{1, \ldots, n-2\}$.

En el presente trabajo estudiaremos el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$. Aquí, el problema de clasificación de hipersuperficies isoparamétricas suele dividirse en varios casos, en función del número de proyecciones no triviales del vector de Hopf sobre los autoespacios del operador de configuración. Veremos de qué modo la fibración de Hopf constituye una herramienta esencial a la hora de abordar dicho problema, pues permite trasladar el estudio a un espacio de curvatura seccional constante como es el espacio de anti-De Sitter, $H_1^{2n+1}$.

El problema de clasificación en $\mathbb{C}H^n$ para el caso $h = 2$, donde $h$ denota el número de proyecciones no triviales del vector de Hopf sobre los autoespacios del operador de configuración, ya ha sido resuelto por Miguel Domínguez en su tesis Doctoral [14], tesis que deberá ser considerada la referencia principal del presente trabajo, pues aquí trataremos de iniciar el problema de clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas con $h = 3$ allí presentadas.

La memoria ha sido elaborada del modo que sigue. En un primer capítulo se presentan algunas notaciones y resultados de carácter general que serán empleados a lo largo del texto. En un segundo capítulo, se construye detalladamente el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$, dotándolo de una métrica de Riemann, describiéndolo como espacio homogéneo y presentando $(H_1^{2n+1}, \pi, \mathbb{C}H^n)$ como un $\mathbb{S}^1$-fibrado principal.

El tercer capítulo se dedica a estudiar la procedencia de las hipersuperficies de $\mathbb{C}H^n$ con $h = 3$. Lo que se trata aquí puede encontrarse en el Capítulo 4 de [14].

En el cuarto capítulo se presentan los ejemplos de la clasificación que se pretende obtener. Para ello es necesario introducir la descomposición de Iwasawa, que permite describir el espacio hiperbólico complejo como grupo de Lie con métrica invariante a la izquierda.

En el Capítulo 5 se comienza realmente con el problema de clasificación, llegando a observarse las analogías entre el operador de configuración de los ejemplos introducidos en el Capítulo 4 y de las hipersuperficies isoparamétricas con $h = 3$.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este primer capítulo de preliminares introduciremos la terminología, las notaciones y los resultados relativos a la geometría de subvariedades, a la teoría de campos de Jacobi, a las acciones sobre variedades de Riemann y a los espacios homogéneos que se emplearán a lo largo del presente trabajo.

## 1.1. Geometría de subvariedades

En adelante, $\bar{M}$ será una variedad riemanniana o semi-riemanniana de dimensión $\bar{m}$ y $M$ una subvariedad de $\bar{M}$ de dimensión $m$. Recordemos que éstas se definían como pares constituidos por una variedad diferenciable y un campo de tensores simétrico bilineal y no degenerado de tipo $(0, 2)$ con signatura constante $(r, s)$, que se denomina signatura de la variedad. Las variedades de Riemann son precisamente las variedades semi-riemannianas con signatura $(n, 0)$, mientras que por ejemplo las variedades de Lorentz son las que tienen signatura $(n-1, 1)$. Aquí, como se hace en [24], llamaremos vectores temporales (*timelike*) a aquellos cuyo producto escalar es negativo, espaciales (*spacelike*) a los de producto escalar positivo y vectores nulos (*nulls*) a los de producto escalar nulo.

Es conocido que toda subvariedad de una variedad de Riemann es de Riemann, aunque no sucede así con las variedades semi-riemannianas. Sin embargo, cuando nos refiramos al caso semi-riemanniano, asumiremos, si no se menciona lo contrario, que $M$ con la métrica inducida sigue siendo semi-riemanniana. Para ser coherentes con la notación, reservaremos la barra superior para referirnos a los elementos de la geometría de $\bar{M}$, mientras que escribiremos de la manera usual los de $M$. Así por ejemplo, $\bar{\nabla}$ denotará la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}$, mientras que $\nabla$ hará referencia a la de $M$.

Dado un punto $p \in M$, denotaremos por $T_pM$ y $\nu_pM$ el espacio vectorial tangente a $M$ en $p$ y el espacio vectorial normal a $M$ en $p$ respectivamente, teniéndose además el isomorfismo canónico $T_p\bar{M} = T_pM \oplus \nu_pM$ [20]. A su vez, $TM$ y $\nu M$ serán el fibrado tangente y normal. Utilizaremos la notación $\Gamma(TM)$ para referirnos a las secciones diferenciables de $TM$. Si $V$ es un espacio vectorial dotado de una métrica y $W \subset V$ es un subespacio vectorial de $V$, denotaremos por $V \ominus W$ el complemento ortogonal de $W$ en $V$.

Uno de los conceptos más importantes dentro de la geometría riemanniana y semi-riemanniana es el de curvatura. A la hora de formalizar tal concepto surge la definición de tensor (a veces, [20], endomorfismo) de curvatura. Si bien prácticamente todos los autores coinciden en definirlo como un campo de tensores de tipo $(1, 3)$, no hay un convenio establecido respecto al signo. En este trabajo adoptamos, siguiendo por ejemplo [20], la siguiente definición del tensor de curvatura en la variedad $M$:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Cabe señalar en este punto que si una variedad semi-riemaniana $M$ tiene un tensor de curvatura dado por la expresión $R(X, Y)Z = c(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$, con $c$ una constante real, se dice que $M$ tiene curvatura constante $c$.

El tensor de curvatura de una variedad $M$ es un invariante intrínseco, en el sentido de que depende únicamente de la métrica de $M$. Sin embargo, es de gran importancia el estudio de la geometría de $M$ respecto a la de $\bar{M}$, esto es, el estudio de la geometría extrínseca de $M$, cuya información se encuentra recogida en la segunda forma fundamental, definida mediante la fórmula de Gauss,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Si $\xi \in \Gamma(\nu M)$ es un campo unitario de vectores, se define el operador de configuración de $M$ asociado a $\xi$ (*shape operator*), como el operador lineal autoadjunto que verifica $\langle S_\xi X, Y\rangle = \langle II(X, Y), \xi\rangle$, donde $X$, $Y \in \Gamma(TM)$. Sea $U$ un abierto de $M$. Se dice que $\lambda \colon U \subset M \to \mathbb{R}$ es una curvatura principal de $M$ asociada a $\xi$ si existe un campo de vectores $X \in \Gamma(TU)$ tal que $S_\xi X = \lambda X$. Denotaremos por $T_\lambda(p)$ el espacio de los autovectores del operador de configuración en el punto $p$ asociados al autovalor $\lambda(p)$. Diremos que una hipersuperficie conexa tiene curvaturas principales constantes si los autovalores del operador de configuración son los mismos en cada punto. Asimismo, se define el campo de vectores curvatura media $H$ con respecto a una base ortonormal $\{E_i\}$ de $TM$ como $H = \sum_i II(E_i, E_i)$, de manera que puede interpretarse como la traza de la segunda forma fundamental.

Con todo lo anterior, puede probarse la fómula de Weingarten, $\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla^\perp_X \xi$, donde $\nabla^\perp$ denota la conexión normal de $M$, es decir, $\nabla^\perp_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$. La relación entre las curvaturas de $M$ y $\bar{M}$ puede expresarse en términos de la segunda forma fundamental, como precisa la ecuación de Gauss,

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(X, Y)Z, W\rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W)\rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W)\rangle.$$

Enunciamos por completitud la ecuación de Codazzi,

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X II)(Y, Z) - (\nabla^\perp_Y II)(X, Z),$$

y la de Ricci,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle \bar{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [S_{\xi},S_{\eta}]X,Y\rangle,$$

donde $X$, $Y \in \Gamma(TM)$, $\xi$, $\eta \in \Gamma(\nu M)$ y $R^{\perp}(X,Y)\xi = [\nabla^{\perp}_X,\nabla^{\perp}_Y]\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$ es la curvatura de la conexión normal.

En caso de que $M$ sea una hipersuperficie de $\bar{M}$, es decir, cuando $M$ sea una subvariedad embebida de $\bar{M}$ de codimensión uno, existe, al menos localmente, un campo de vectores normal unitario, salvo signo, $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Pero entonces, puesto que el espacio ortogonal a $M$ en cada punto es un espacio vectorial 1-dimensional, la segunda forma fundamental resulta ser un múltiplo de $\xi$. Así pues, si ponemos $\epsilon = \langle \xi,\xi\rangle \in \{1,-1\}$, las fórmulas de Gauss y Weingarten puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \epsilon\,\langle SX,Y\rangle\xi,\\ \bar{\nabla}_X\xi &= -SX.\end{aligned}$$

Aplicando esta información a las ecuaciones de Gauss y Codazzi se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \epsilon\,\langle SY,Z\rangle\langle SX,W\rangle + \epsilon\,\langle SX,Z\rangle\langle SY,W\rangle,\\ \langle \bar{R}(X,Y)Z,\xi\rangle &= \langle (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X, Z\rangle.\end{aligned}$$

## 1.2. Campos de vectores de Jacobi

Una de las herramientas más importantes en geometría de subvariedades radica en la utilización de campos de vectores de Jacobi para el estudio del comportamiento de una subvariedad cuando ésta se desplaza una distancia determinada a lo largo de direcciones normales. Por ello, dedicaremos esta sección a introducir las nociones principales de esta técnica, o, al menos, aquellas que vamos a emplear durante el desarrallo del presente texto.

Como es conocido, dada una curva geodésica $\gamma$ sobre la variedad diferenciable $\bar{M}$, diremos que un campo de vectores diferenciable $J$ a lo largo $\gamma$ es un campo de vectores de Jacobi si satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$J'' + \bar{R}(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0,$$

que se conoce en la literatura con el nombre de ecuación de Jacobi. Se demuestra [13, 20] que los campos de vectores de Jacobi a lo largo de una curva geodésica $\gamma$ son exactamente los campos de la variación de variaciones por geodésicas de la curva $\gamma$.

Estos campos de vectores están además completamente determinados mediante dos condiciones iniciales, en el sentido que precisa la siguiente proposición [20].

**Proposición 1.1.** *(Existencia y unicidad de campos de vectores de Jacobi). Sea $\gamma\colon I \to \bar{M}$ una geodésica, con $a \in I$ y $\gamma(a) = p$. Para cada par de vectores $X, Y \in T_p\bar{M}$ existe un único campo de Jacobi a lo largo de $\gamma$, $J$, verificando las condiciones iniciales*

$$J(a) = X, \quad J'(a) = Y.$$

Una consecuencia importante de este resultado es que los campos de vectores de Jacobi a lo largo de una geodésica $\gamma$ forman un subespacio vectorial $2\bar{m}$-dimensional de $\Gamma(\gamma)$, donde aquí $\Gamma(\gamma)$ denota los campos de vectores diferenciables a lo largo de la curva $\gamma$.

Sea $c\colon I \to M$ una curva diferenciable en $M$, con $0 \in I$. Sea $\xi = \xi_{(s)} \in \nu_{c(s)}M$ un campo de vectores unitario a lo largo de la curva $c$ y sea $\gamma = \gamma_{\xi_p}\colon I \to \bar{M}$ la curva geodésica determinada por las condiciones iniciales $p = \gamma(0) \in M$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi_{(0)} \in \nu_p M$. Construimos la variación por geodésicas $\Gamma$ de la curva $\gamma$, $\Gamma(s,t) = \exp_{c(s)}(t\xi_{(s)})$, cuyo campo de la variación, campo de Jacobi, viene determinado por las condiciones iniciales

$$Y(0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Gamma(s,0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_{c(s)}(0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} c(s) = \dot{c}(0),$$

y, haciendo uso del lema de simetría y de la ecuación de Weingarten,

$$\begin{aligned} Y'(0) &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \Gamma(s,t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \exp_{c(s)}(t\xi_{(s)}) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_{c(s)*0}(\xi_{(s)}) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \xi_{(s)} = \bar{\nabla}_{\dot{c}(0)}\xi = \bar{\nabla}_{Y(0)}\xi = -S_\xi Y(0) + \nabla^\perp_{Y(0)}\xi. \end{aligned}$$

Si $Y$ es un campo de vectores de Jacobi cuyas condiciones iniciales cumplen que $Y(0) \in T_pM$ e $Y'(0) + S_\xi Y(0) \in \nu_p M$, se dice que $Y$ es un $M$-campo de Jacobi. Con estas consideraciones, es claro que los $M$-campos de Jacobi forman un subespacio vectorial $\bar{m}$-dimensional dentro de los campos de vectores de Jacobi. Además, dado que $J(t) = t\dot{\gamma}(t)$ es un campo que cumple las condiciones arriba citadas, algunos autores [4] denotan mediante $\Gamma(M,\gamma)$ el espacio vectorial $(\bar{m}-1)$-dimensional de los $M$-campos de Jacobi ortogonales a $J$.

Sea $M$ una hipersuperficie de $\bar{M}$ y $\xi$ un campo de vectores normal a $M$. Definimos el desplazamiento paralelo de $M$ en la dirección de $\xi$ a una distancia $r > 0$, y lo denotamos por $M^r$, como la imagen de $M$ mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi^r\colon M &\longrightarrow \bar{M} \\ p &\mapsto \Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p). \end{aligned}$$

En general, $M^r$ no tiene porqué ser una subvariedad de $\bar{M}$. Sin embargo, es claro, por ejemplo, que $M^r$ es una subvariedad inmersa de $\bar{M}$ si, y solo si, $\Phi^r$ es una inmersión. En este sentido veremos como, en términos de $M$-campos de Jacobi, existen condiciones suficientes para afirmar que $M^r$ es subvariedad de $\bar{M}$.

Sean $c$, $Y$ y $\xi$ como antes. Es preciso resaltar que ahora las condiciones iniciales de $Y$ son $Y(0) \in T_pM$ junto con $Y'(0) = -SY(0)$, lo cual viene de utilizar la fórmula de Weingarten para hipersuperficies en los cálculos anteriores. Por tanto,

$$\Phi^r_{*p}Y(0) = \Phi^r_{*p}\dot{c}(0) = (\Phi^r \circ c)_{*0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\Phi^r \circ c)(s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_{c(s)}(r\xi_s) = Y(r)$$

Si bajo estas condiciones existe un campo no nulo $Y \in \Gamma(M, \gamma)$ con $Y(r) = 0$, entonces diremos que $\Phi^r(p)$ es un punto focal de $M$ a lo largo de la geodésica $\gamma$ y llamaremos multiplicidad del punto focal a la dimensión del núcleo de la diferencial de $\Phi^r$ en el punto $p$. Se sigue de la definición que $\Phi^r_{*p}$ es no inyectiva si, y solo si, $\Phi^r(p)$ es un punto focal de $M$. Sin embargo, si existe un entero positivo $k$ tal que $\Phi^r(q)$ es un punto focal de $M$ a lo largo de $\gamma_{\xi_q}$ de multiplicidad $k$ , para todo $q$ en algún entorno $U$ de $p$, entonces, tomando $U$ suficientemente pequeño $\Phi^r_{|U}$ parametriza una subvariedad $(\bar{m} - 1 - k)$-dimensional de $\bar{M}$, que llamaremos subvariedad focal de $M$ en $\bar{M}$.

Por otra parte, si $\Phi^r(p)$ no es punto focal de $M$ a lo largo de $\gamma$, entonces $\Phi^r_{*q}$ tiene rango máximo para todo $q$ en algún entorno $U$ de $p$. De nuevo, tomando $U$ suficientemente pequeño, podemos concluir que $\Phi^r_{|U}$ parametriza una hipersuperficie de $\bar{M}$. Además, en este caso el vector $\dot{\gamma}(r)$ es un vector normal en $\Phi^r(p)$ a la nueva subvariedad construida, sea ésta focal o hipersuperficie.

Se pretende ahora mostrar de qué forma se puede calcular el operador de configuración de $M^r$, asumiendo ya que nos encontramos en el caso en el cual ésta es una subvariedad de $\bar{M}$. Para ello, construimos la curva diferenciable $c_r = \Phi^r \circ c$ en $M^r$. Por los cálculos hechos arriba sabemos que $\dot{c}_r(0) = Y(r)$. Definimos también el campo de vectores diferenciable $\eta^r(s) = \dot{\gamma}_{\xi_{(s)}}(r)$ a lo largo la curva $c_r$. Si denotamos por $S^r$ el operador de configuración de $M^r$, se deduce que

$$\begin{aligned} Y'(r) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=r} \exp_{c(s)}(t\xi_{(s)}) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \dot{\gamma}_{\xi_{(s)}}(r) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \eta^r(s) = \bar{\nabla}_{\dot{c}_r(0)}\eta^r(0) \\ &= -S^r_{\dot{\gamma}(r)}Y(r) + \nabla^{\perp}_{Y(r)}\eta^r(0). \end{aligned}$$

En consecuencia, $S^r_{\dot{\gamma}(r)}Y(r) = -(Y'(r))^{\top}$. Como caso particular, si $M^r$ es una hipersuperficie, de $Y(0) \perp \dot{\gamma}(0)$ junto con $Y(r) \perp \dot{\gamma}(r)$ se deduce que $Y \perp \dot{\gamma}$ [20], de donde se sigue que $S^r_{\dot{\gamma}(r)}Y(r) = -Y'(r)$.

Tiene especial interés el caso en que $M^r$ es una hipersuperficie, pues podemos calcular $S^r$ del modo que se muestra a continuación. En primer lugar, definimos un endomorfismo $D(r)$ en el espacio vectorial $T_{\gamma(r)}\bar{M} \ominus \mathbb{R}\dot{\gamma}(r)$ mediante la expresión

$$D(r)B_X(r) = \zeta_X(r), \quad \text{para cualquier } X \in T_pM,$$

donde $B_X$ denota el transporte paralelo de $X$ a lo largo de la curva $\gamma$ y donde $\zeta_X$ es el campo de vectores de Jacobi a lo largo de $\gamma$ determinado por las condiciones iniciales $\zeta_X(0) = X$, $\zeta'_X(0) = -S^rX$. En otros términos, $D$ es el endomorfismo de $\gamma^{\perp}$ dado por las condiciones iniciales

$$D'' + \bar{R}_{\dot{\gamma}} \circ D = 0, \qquad D(0) = \mathrm{Id}_{T_pM}, \qquad D'(0) = -S^r.$$

Pero entonces:

$$S^rD(r)B_X(r) = S^r\zeta_X(r) = -\zeta'_X(r) = -(D \circ B_X)'(r) = -D'(r)B_X(r).$$

Ahora bien, el endomorfismo $D(r)$ es no inversible si, solo si, $\Phi^r(p)$ es un punto focal. Así pues, habiendo asumido $M^r$ hipersuperficie, $D(r)$ es no singular y por tanto

$$S^r_{\dot\gamma(r)} = -D'(r) \circ D(r)^{-1}.$$

Pese a que hasta el momento nos hemos centrado en el caso del desplazamiento paralelo de una hipersuperficie, todo el proceso anterior puede generalizarse partiendo de una subvariedad $M$ de $\bar M$ con codimensión mayor estricta que uno. En tal caso, definimos, para $r > 0$,

$$M^r = \{\exp(r\xi) : \xi \in \nu M,\ \|\xi\| = 1\}.$$

Si $M^r$ es una hipersuperficie la llamaremos tubo de radio $r$ alrededor de $M$, mientras que si $M^r$ es subvariedad de $\bar M$ con codimensión mayor que uno la llamaremos subvariedad focal de $M$. Sin embargo, en general, $M^r$ no es subvariedad de $M$. El resto del proceso se realiza esencialmente de modo análogo a lo anterior, si bien surgen algunas novedades. En este sentido, dado que la codimensión es mayor que uno, $\Gamma(M,\gamma)$ rompe de modo natural como suma directa de los subespacios vectoriales

$$\{Y \in \Gamma(M,\gamma) \mid Y(0) \in T_pM\ ,\ Y'(0) = -S_{\dot\gamma(0)}Y(0)\} \quad \text{y}$$

$$\{Y \in \Gamma(M,\gamma) \mid Y(0) = 0\ ,\ Y'(0) \in \nu_pM\}.$$

Ahora, se dirá que un $\gamma(r)$ es un punto focal de $M$ a lo largo de $\gamma$ si existe un $M$-campo de Jacobi no nulo $Y \in \Gamma(M,\gamma)$ verificando $Y(r) = 0$. De nuevo, al igual que antes, la multiplicidad del punto focal se define como la dimensión del subespacio vectorial $\{Y \in \Gamma(M,\gamma) \mid Y(0) = 0\}$.

Una vez suponemos que $M^r$ es una subvariedad y nos disponemos a calcular $S^r$, su operador de configuración, surge también una diferencia con respecto al caso anterior. En esta nueva situación, el endomorfismo $D$ es solución del siguiente problema de valor inicial

$$D'' + \bar R_{\dot\gamma} \circ D = 0, \qquad D(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{T_pM} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D'(0) = \begin{pmatrix} -S_{\dot\gamma(0)} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\nu_pM\ominus\mathbb{R}\dot\gamma(0)} \end{pmatrix}.$$

Un cálculo similar al ya realizado anteriormente conduce a

$$S^r_{\dot\gamma(r)} = -D'(r)\, D(r)^{-1}.$$

## 1.3. Espacios homogéneos

Sea $G$ un grupo de Lie actuando sobre $\bar M$ por isometrías. Esto quiere decir que existe una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Psi\colon\ G \times \bar M &\longrightarrow \bar M \\ (g,p) &\mapsto g\cdot p. \end{aligned}$$

verificando $g_1g_2 \cdot p = g_1 \cdot (g_2 \cdot p)$ y $e \cdot p = p$, de manera que cada aplicación $\Psi_g$ dada por $\Psi_g(p) = g \cdot p$ es un elemento del grupo de isometrías de $\bar M$, $I(\bar M)$. Para cada punto $p \in \bar M$, se define la órbita de la acción en $p$ como el conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}$ y el grupo de isotropía de $p$ como el subgrupo de $G$ cerrado $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$. Si existe algún $p \in \bar{M}$ tal que $G \cdot p = \bar{M}$, la acción se dice transitiva.

Sea $H$ un subgrupo cerrado de $G$. Denotamos por $G/H$ el conjunto de las clases por la derecha

$$\{gH \mid g \in G\},$$

conjunto que podemos dotar de una topología, la topología cociente, es decir, la que convierte a la proyección canónica,

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & G & \longrightarrow & G/H \\ & g & \mapsto & gH, \end{array}$$

en identificación. Teniendo en cuenta que $H$ es cerrado, se sigue que $G/H$ es un espacio topológico Hausdorff. Además, existe una única estructura diferenciable sobre $G/H$ que convierte a $\pi$ en aplicación $C^\infty$ entre variedades diferenciables y hace que ésta posea secciones locales (Teorema 3.58 de [27]).

Con estas hipótesis podemos considerar la acción

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \longrightarrow & G/H \\ (g_1, g_2H) & \mapsto & g_1g_2H, \end{array}$$

que resulta ser una acción diferenciable y transitiva del grupo $G$ sobre la variedad diferenciable $G/H$. De hecho, la estructura diferenciable de esta última puede caracterizarse como la que convierte la acción arriba definida en diferenciable.

En el otro sentido, si partimos ahora de una variedad $\bar{M}$ y $G \times \bar{M} \to \bar{M}$ una acción diferenciable transitiva de $G$ sobre $M$, tomando el grupo de isotropía de $G$ en $p$, podemos dotar $G/G_p$ con la estructura diferenciable anterior. En tales condiciones, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G/G_p & \longrightarrow & \bar{M} \\ gG_p & \mapsto & g \cdot p \end{array}$$

resulta un difeomorfismo (Teorema 3.62 de [27]).

Así, si $\bar{M}$ es una variedad diferenciable y $G$ un grupo de Lie actuando diferenciable y transitivamente sobre $\bar{M}$, entonces se dice que $\bar{M}$ es un $G$-espacio homogéneo. En otras palabras, se definen los espacios homogéneos como las variedades diferenciables equipadas con un grupo transitivo de difeormorfismos o, con las consideraciones previas, las variedades de la forma $G/H$ donde $G$ es un grupo de Lie y $H$ un subgrupo cerrado de $G$.

Se dice que $M$ es una subvariedad homogénea de $\bar{M}$ si para cada dos puntos $p, q \in M$ existe una isometría $g$ de $\bar{M}$ tal que $g(M) = M$ y $g(p) = q$. Como consecuencia de la definición, las subvariedades homogéneas de $\bar{M}$ son precisamente las órbitas de algún subgrupo $G$ del grupo de isometrías $I(\bar{M})$.

# Capítulo 2

# Construcción de $\mathbb{C}H^n$

## 2.1. Definiciones previas

Dedicaremos el presente capítulo a la construcción del espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$, así como a la presentación de la notación y los resultados necesarios para dotar tal espacio de una métrica riemmaniana que, como veremos, resultará ser una métrica de Kähler. Justificaremos finalmente que se trata de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante. Antes de ello y para empezar, sin embargo, introducimos, siguiendo a [19], algunas definiciones que serán, en lo sucesivo, necesarias.

**Definición 2.1.** Se dice que un endomorfismo $J$ de un espacio vectorial real $V$ es *una estructura compleja* de $V$ si verifica $J^2 =$ -Id.

Un espacio vectorial real con una estructura compleja puede dotarse de estructura de espacio vectorial complejo, haciendo funcionar $J$ como la unidad imaginaria. De un modo más preciso, la multiplicación de un vector $v \in V$ por un escalar complejo $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se define como $(a+bi)\cdot v = a\cdot v+b\cdot Jv$. El recíproco también es cierto. En efecto, basta tomar el endomorfismo $Jv = iv$, con $v \in V$.

**Definición 2.2.** Se dice que $J$ es *una estructura casi compleja* en una variedad diferenciable real $M$ si es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre $M$ que, en cada punto $p \in M$, constituye una estructura compleja del espacio vectorial tangente $T_pM$.

Una variedad diferenciable con una estructura casi compleja se denominará variedad diferenciable casi compleja.

**Definición 2.3.** Una métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en un espacio vectorial real $V$ con una estructura compleja $J$ se dice *hermitiana* si verifica

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad \text{para cada } X, Y \in V.$$

Como consecuencia de la definición se tiene que $\langle JX, Y\rangle = \langle JJX, JY\rangle = -\langle X, JY\rangle$.

Una *métrica hermitiana* en una variedad semi-riemanniana $(M, g)$ casi compleja es una métrica $g$ invariante por la estructura casi compleja $J$, esto es,

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \text{para cada } X, Y \in \Gamma(TM).$$

En definitiva, una métrica hermitiana en la variedad semi-riemanniana $M$ es aquella que define una métrica hermitiana en cada espacio vectorial tangente.

Una variedad diferenciable casi compleja (respectivamente una variedad diferenciable compleja) con una métrica hermitiana se denomina *variedad diferenciable casi hermitiana* (respectivamente *variedad diferenciable hermitiana*). Cuando además, en una variedad casi hermitiana $M$ (respectivamente hermitiana) la estructura casi compleja $J$ es paralela respecto a la conexión de Levi-Civita $\nabla$, es decir, $\nabla J = 0$, entonces $M$ se dice *variedad casi Kähler* (respectivamente *Kähler*).

En relación a las variedades de Kähler enunciamos una proposición, cuya utilidad se observará más adelante, que nos da la expresión para el tensor de curvatura de las variedades de Kähler de curvatura seccional holomorfa constante. Omitimos aquí la demostración, que puede encontrarse en [28].

**Proposición 2.4.** *Una variedad de Kähler $M$ es de curvatura seccional holomorfa constante $c \in \mathbb{R}$ si, y solo si, su tensor de curvatura $R$ viene dado por la fómula:*

$$R(X, Y)Z = \frac{c}{4}(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y + \langle JY, Z\rangle JX - \langle JX, Z\rangle JY - 2\langle JX, Y\rangle JZ).$$

## 2.2. Construcción de $\mathbb{C}H^n$

Como paso previo a la construcción de $\mathbb{C}H^n$ es necesario introducir, aunque aquí no se hace de un modo detallado, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$. Tal espacio se define usualmente como el espacio de las rectas complejas de $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen, o, equivalentemente, como la variedad diferenciable cociente de la esfera de radio $r$ centrada en el origen, $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$, por la relación de equivalencia $z \sim \lambda z$, con $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ y $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. En lo que sigue, $\pi$ denotará la proyección canónica de $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$ sobre el espacio proyectivo complejo,

$$\pi \colon \mathbb{S}^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}P^n.$$

No es difícil comprobar, pasando a cartas locales y teniendo en cuenta que $\mathbb{C}P^n$ es una variedad compleja de dimensión $n$ (dimensión real $2n$), que $\pi$ es una sumersión de rango constante $2n$ diferenciable y sobreyectiva. En la literatura, se la conoce como aplicación de Hopf. Las cartas se tomarían de modo análogo al caso real, esto es, cada una como el complementario de cada hiperplano complejo $z_i = 0$, con $i \in \{0, \cdots, n\}$. Es posible dotar a $\mathbb{C}P^n$ de una métrica de Riemann de curvatura seccional holomorfa constante [15], aunque pasamos ya directamente a la construcción de $\mathbb{C}H^n$.

Comenzamos definiendo sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ la métrica

$$\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}(-z_0\bar{w}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k),$$

donde $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Teniendo en cuenta que $\mathbb{C}^{n+1}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n+2}$ mediante la identificación $u \equiv z$, donde $u \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ y $z_k = u_{2k} + u_{2k+1}i$, podemos escribir

$$\langle z, w\rangle = \langle u, v\rangle = -u_0v_0 - u_1v_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} u_kv_k,$$

que, expresado en palabras, es decir que estamos ante una métrica semi-riemanniana en $\mathbb{R}^{2n+2}$ de signatura $(2n, 2)$. Se define el espacio anti-De Sitter de radio $r$, el análogo lorentziano del espacio hipérbolico real, como

$$H_1^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle z, z\rangle = -r^2\},$$

cuyo espacio tangente en el punto $z$ es

$$T_zH_1^{2n+1}(r) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle z, w\rangle = 0\}.$$

Consideramos la restricción de la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al espacio anti-De Sitter y definimos el campo de vectores unitario ortogonal a dicho espacio $\xi_z = \frac{1}{r}z$. Nótese que $\langle\xi, \xi\rangle = -1$. Si $(U, \varphi = (u^0, \cdots, u^{2n+1}))$ es una carta, la expresión local de $\xi$ es $\xi_{|U} = \frac{1}{r}u^i\frac{\partial}{\partial u^i}$, donde, siguiendo la notación de Einstein, índices repetidos arriba y abajo indican suma. Si $X = X^j\frac{\partial}{\partial u^j}$ es un campo de vectores tangente a $H_1^{2n+1}(r)$, $D$ denota la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{2n+2}$ que actúa sobre cada campo derivando sus componentes y $S$ denota el operador de configuración de $H_1^{2n+1}(r)$, entonces

$$\begin{aligned} SX &= -D_X\xi = -\frac{1}{r}D_X\left(u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = -\frac{1}{r}\left(Xu^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = -\frac{1}{r}\left(X^j\frac{\partial u^i}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\ &= -\frac{1}{r}X^i\frac{\partial}{\partial u^i} = -\frac{1}{r}X. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$II(X, Y) = \langle II(X, Y), \xi\rangle\langle\xi, \xi\rangle\xi = -\langle SX, Y\rangle\xi = \frac{1}{r}\langle X, Y\rangle\xi,$$

donde $X, Y$ y $Z$ son campos de vectores tangentes a $H_1^{2n+1}(r)$ arbitrarios, si denotamos por $\widetilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita del espacio anti-De Sitter, podemos escribir la fórmula de Gauss como

$$D_XY = \widetilde{\nabla}_XY + \frac{\langle X, Y\rangle}{r}\xi,$$

y la ecuación de Gauss adquiere la expresión

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = -\frac{1}{r^2}(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Y\rangle Z).$$

Llegados a este punto, definimos $\mathbb{C}H^n$ como el espacio de las rectas complejas negativas respecto a la métrica de signatura $(2n, 2)$ o, de modo equivalente, como la imagen de $H_1^{2n+1}(r)$ mediante la proyección canónica $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}P^n$ del espacio proyectivo complejo,

$$\pi\colon H_1^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}H^n \subset \mathbb{C}P^n.$$

En aras de una mejor comprensión del espacio hiperbólico $\mathbb{C}H^n$, observemos que el hiperplano complejo $z_0 = 0$ no corta al espacio de anti-De Sitter, luego, como consecuencia, $\mathbb{C}H^n$ está contenido en la carta $z_0 \neq 0$ de $\mathbb{C}P^n$. Pero entonces, dado un elemento $(w_0, \ldots, w_n) \in H_1^{2n+1}(r)$, se tiene que $\pi\left(w_0, \ldots, w_n\right) = \pi\left(1, \frac{w_1}{w_0}, \ldots, \frac{w_n}{w_0}\right)$, donde aquí $\pi$ denota la proyección canónica $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}P^n$. Además,

$$-1 + \left|\frac{w_1}{w_0}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{w_n}{w_0}\right|^2 = \frac{1}{|w_0|^2}(-|w_0|^2 + |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2) = \frac{1}{|w_0|^2}(-r^2) < 0,$$

lo cual implica que $\left(1, \frac{w_1}{w_0}, \ldots, \frac{w_n}{w_0}\right) \in H_1^{2n+1}\left(\frac{r}{w_0}\right)$. Esto indica que cualquier punto de $\mathbb{C}H^n$ procede de un vector de la forma $(1, z_1, \ldots, z_n)$ temporal. Veamos que también el recíproco es cierto. Supongamos para ello un punto $(1, z_1, \ldots, z_n)$ tal que $-1+|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2 = -k$, para algún $k > 0$. Entonces $\pi(1, z_1, \ldots, z_n) = \pi\left(\frac{r}{\sqrt{k}}, \frac{r}{\sqrt{k}}z_1, \ldots, \frac{r}{\sqrt{k}}z_n\right)$ y además

$$-\frac{r^2}{k} + \left(\frac{r}{\sqrt{k}}z_1\right)\overline{\left(\frac{r}{\sqrt{k}}z_1\right)} + \cdots + \left(\frac{r}{\sqrt{k}}z_n\right)\overline{\left(\frac{r}{\sqrt{k}}z_n\right)} = \frac{r^2}{k}(-1 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2) = -r^2.$$

Hemos demostrado que

$$\mathbb{C}H^n = \{\pi(1, z_1, \ldots, z_n) \mid -1 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 0\},$$

lo que viene a decir que

$$\mathbb{C}H^n = \pi(\{1\} \times B_{\mathbb{C}^n}(0, 1)),$$

con lo cual, $\mathbb{C}H^n$ es difeomorfo a la bola abierta de radio unidad y centro el origen de $\mathbb{C}^n$ con la topología usual. Todo ello nos permite presentar $\mathbb{C}H^n$ como una subvariedad abierta de $\mathbb{C}P^n$, teniendo por tanto estructura de variedad diferenciable compleja.

Por otra parte, la terna $(H_1^{2n+1}, \pi, \mathbb{C}H^n)$ resuta ser, utilizando la terminología de [16], un $\mathbb{S}^1$-fibrado principal trivial. Para justificar este hecho, comenzamos construyendo una acción de $\mathbb{S}^1$ sobre $H_1^{2n+1}$ por la derecha,

$$\begin{array}{rccc} \Psi\colon & H_1^{2n+1} \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & H_1^{2n+1} \\ & (z, \lambda) & \mapsto & \lambda \cdot z. \end{array}$$

Es claro que, para cada $z \in H_1^{2n+1}$, se tiene que $\pi^{-1}(\pi(z)) = \mathbb{S}^1 \cdot z$, es decir, las fibras de la aplicación $\pi$ coinciden con las órbitas de la acción $\Psi$. Veamos como se contruye la trivialización. Para cada punto $p \in \mathbb{C}H^n$, fijamos un punto $z_p$, de forma diferenciable, tal que $\pi(z_p) = p$, de manera que entonces, cada elemento de $\pi^{-1}(p)$ es expresable como $e^{it}z_p$, para algún $t \in [0, 2\pi)$. Con este paso previo, se sigue que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & H_1^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}H^n \times \mathbb{S}^1 \\ & e^{it}z_p & \mapsto & (\pi(z_p), e^{it}) \end{array},$$

está bien definida y es biyectiva. No es difícil comprobar que es diferenciable. Además, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_1^{2n+1}(r) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C}H^n \times \mathbb{S}^1 \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& \mathbb{C}H^n, &
\end{tikzcd}$$

y, por último, se tiene que

$$\varphi(\Psi(e^{it}z_p, e^{is})) = \varphi(e^{is}e^{it}z_p) = (\pi(z_p), e^{it}e^{is}) = (\pi(z_p), e^{it}) \cdot e^{is},$$

quedando así justificado que $H_1^{2n+1}$ es un $\mathbb{S}^1$-fibrado principal trivial.

## 2.3. Estructura riemanniana de $\mathbb{C}H^n$

El siguiente paso es, dicho de un modo informal, trasladar la métrica semi-riemanniana de $H_1^{2n+1}(r)$ al espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$. Para ello, se necesitan todavía algunas herramientas previas. En este sentido, comenzamos definiendo, para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\varphi_t\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, dada por $\varphi_t(z) = e^{it}z$. Es sencillo comprobar que se trata, para cada $t \in \mathbb{R}$, de una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Por ello y en base a que es diferenciable como aplicación entre variedades, podemos hacer la identificación $\varphi_t = (\varphi_t)_*$. Cada $\varphi_t$ es inyectiva, pues $e^{it}z = e^{it}w$ implica que $z = w$, y sobreyectiva, en efecto, dado un elemento $w \in \mathbb{C}^{n+1}$, este puede expresarse como $w = |w|e^{i\theta}$ para algún $\theta \in (0, 2\pi]$. Basta tomar entonces como antecedente $z = |w|e^{i(\theta - t)}$. Además, $\langle \varphi_t(z), \varphi_t(w) \rangle = e^{it}\overline{e^{it}}\langle z, w \rangle = \langle z, w \rangle$, lo cual nos permite afirmar que $\varphi_t(H_1^{2n+1}(r)) = H_1^{2n+1}(r)$. Es más, con la identificación hecha entre $\varphi_t$ y $(\varphi_t)_*$, y viendo que $T_zH_1^{2n+1}(r)$ se identifica con los elementos $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que $\langle w, z \rangle = 0$, es claro que cada una de las aplicaciones definidas es una isometría del espacio de anti-De Sitter. Es decir, $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico de isometrías del espacio $H_1^{2n+1}(r)$. De especial importancia es $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$, pues constituye una estructura casi compleja en $H_1^{2n+1}(r)$. En este capítulo será denotada por $\widetilde{J}$. Un cálculo sencillo en coordenadas muestra que $D_X\widetilde{J}Y = \widetilde{J}D_XY$, lo cual prueba que $\mathbb{C}^{n+1}$ es una variedad Kähler.

Definimos el campo de vectores tangente al espacio anti-De Sitter $V = \widetilde{J}\xi$, que es además tangente a las fibras, pues en cada punto $z \in H_1^{2n+1}(r)$ es el vector velocidad en el instante cero de la curva que recorre la fibra $\alpha(t) = e^{\frac{1}{r}it}z$. Evidentemente, esta curva se proyecta en un único punto de $\mathbb{C}H^n$. Si dividimos el espacio tangente de $H_1^{2n+1}(r)$ en sus componentes vertical y horizontal, tal como se hace en [24],

$$T_z H_1^{2n+1}(r) = \mathbb{R}V_z \oplus V_z^{\perp},$$

es claro que $\mathbb{R}V_z$ es el núcleo de la diferencial de la proyección canónica en el punto $z$, pues se tiene que

$$\pi_{*z} V_z = \pi_{*z}\alpha'(0) = (\pi \circ \alpha)_{*0}\frac{d}{dt}(0) = (\pi \circ \alpha)'(0) = 0.$$

Ahora bien, $\pi$ es una aplicación de rango constante $2n$, y teniendo en cuenta que $\dim_{\mathbb{R}} T_z H_1^{2n+1}(r) = 2n+1$ y $\dim_{\mathbb{R}} T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n = 2n$, se puede afirmar que $\pi_{*z}$ lleva $V_z^{\perp}$ isomórficamente en $T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$. Es en este isomorfismo donde reside realmente la clave para, como adelantábamos antes de un modo informal, trasladar la métrica de $H_1^{2n+1}(r)$ a $\mathbb{C}H^n$. Así, dado un vector $X \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$, definimos el levantamiento horizontal de $X$ a $z$ como el único vector $X_z^L \in V_z^{\perp}$ tal que $\pi_{*z}X_z^L = X$. Una consecuencia inmediata de tal definición es que un campo de vectores $X$ está $\pi$- relacionado con su levantamiento. Este proceso se realiza vector a vector, por lo que cabe preguntarse si al levantar un campo de vectores diferenciable obtenemos otro campo de vectores diferenciable. En otros términos, ¿conserva el proceso de levantamiento de campos la diferenciabilidad? La respuesta es sí y la justificación radica en que el ortogonal a una distribución diferenciable es diferenciable.

Cada aplicación $\varphi_t$ se ha definido de modo que conserva la fibra, por consiguiente $\pi = \pi \circ \varphi_t$. Tomando de nuevo $X \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$,

$$\pi_{*\varphi_t(z)}(\varphi_t)_{*z}X_z^L = (\pi \circ \varphi_t)_{*z}X_z^L = \pi_{*z}X_z^L = X,$$

lo cual, teniendo en mente que $X_z^L \in V_z^{\perp}$ y que $\varphi_t$ es una isometría, viene a afirmar que

$$X_{\varphi_t(z)}^L = (\varphi_t)_{*z}X_z^L.$$

Es posible en este punto dar una estructura casi compleja a la variedad $\mathbb{C}H^n$, que denotaremos por $J$. Así, para un $X \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$, definimos $JX = \pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L$. Esta aplicación $J$ está bien definida, pues no depende del punto de la fibra que escojamos para levantar el vector $X$. En efecto,

$$\pi_{*\varphi_t(z)}\widetilde{J}X_{\varphi_t(z)}^L = \pi_{*\varphi_t(z)}\widetilde{J}(\varphi_t)_{*z}X_z^L = \pi_{*\varphi_t(z)}(\varphi_t)_{*z}\widetilde{J}X_z^L = \pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L,$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la conmutatividad entre $\varphi_t$ y $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$. Utilizando la linealidad de la métrica en $H_1^{2n+1}(r)$ es claro que $X_z^L + Y_z^L \in V_z^{\perp}$. Además, $\pi_{*z}(X_z^L + Y_z^L) = X + Y$, luego, $(X+Y)_z^L = X_z^L + Y_z^L$. Entonces,

$$J(X+Y) = \pi_{*z}\widetilde{J}(X+Y)_z^L = \pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L + \pi_{*z}\widetilde{J}Y_z^L = JX + JY.$$

Del mismo modo, teniendo en cuenta que $(\lambda X)_z^L = \lambda X_z^L$, se concluye que $J(\lambda X) = \lambda X$, para $\lambda$ un número real. Por último,

$$J^2X = J(\pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L) = \pi_{*z}\widetilde{J}(\pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L)^L = \pi_{*z}\widetilde{J}\widetilde{J}X_z^L = -\pi_{*z}X_z^L = -X.$$

Con lo visto hasta el momento, nos disponemos ya a construir una métrica en $\mathbb{C}H^n$. Aunque para ello hay más de un método, nosotros definiremos una métrica de forma que $\pi$ lleve isométricamente $V_z^{\perp}$ en $T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$ para cada $z \in H_1^{2n+1}(r)$, es decir, definimos precisamente la métrica que convierte a $\pi$ en una sumersión semi-riemanniana. Así, dados $X, Y$ dos vectores en $T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$, se define $\langle X, Y\rangle = \langle X_z^L, Y_z^L\rangle$. Sin embargo, cuando en vez de vectores, $X$ e $Y$ representen campos de vectores, es más correcto escribir $\langle X, Y\rangle \circ \pi = \langle X^L, Y^L\rangle$. Teniendo en cuenta de nuevo que cada $\varphi_t$ es una isometría, se tiene que,

$$\langle X_z^L, Y_z^L\rangle = \langle (\varphi_t)_{*z} X_z^L, (\varphi_t)_{*z} Y_z^L\rangle = \langle X_{\varphi_t(z)}^L, Y_{\varphi_t(z)}^L\rangle,$$

lo que permite afirmar la buena definición de la métrica, pues no depende del punto de la fibra al que levantemos el vector. Además, puesto que

$$\begin{aligned}\langle JX, JY\rangle &= \langle \pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L, \pi_{*z}\widetilde{J}Y_z^L\rangle = \langle (\pi_{*z}\widetilde{J}X_z^L)^L, (\pi_{*z}\widetilde{J}Y_z^L)^L\rangle \\ &= \langle \widetilde{J}X_z^L, \widetilde{J}Y_z^L\rangle = \langle X_z^L, Y_z^L\rangle = \langle X, Y\rangle,\end{aligned}$$

queda claro que $\mathbb{C}H^n$ es una variedad diferenciable hermitiana.

Nuestro siguiente objetivo será estudiar la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{C}H^n$, y, si bien en la siguiente proposición se prueba que la proyección de la conexión de Levi-Civita de $H_1^{2n+1}(r)$ es precisamente la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{C}H^n$, ello no debe inducir a error en el sentido de que no podremos afirmar que el levantamiento de una sea la otra, debido a que, en general, no vamos a poder controlar si pertenece a la componente horizontal del tangente.

**Proposición 2.5.** *Sean $\widetilde{\nabla}$ y $\nabla$ las conexiones de Levi-Civita de $H_1^{2n+1}(r)$ y $\mathbb{C}H^n$ respectivamente. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}H^n)$, entonces $\pi_*(\widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L) = \nabla_X Y$.*

*Demostración.* Dado que, como ya hemos dicho, $X^L$ está $\pi$-relacionado con $X$, se puede probar [27] que $[X^L, Y^L]$ está $\pi$-relacionado con $[X, Y]$, luego $\pi_*[X^L, Y^L] = [X, Y]$, lo cual nos permite afirmar que $[X, Y]^L = ([X^L, Y^L])_{V^{\perp}}$, donde $(\cdot)_{V^{\perp}}$ indica la proyección en cada punto $z$ sobre el subespacio vectorial $V_z^{\perp}$. Ahora bien, si $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}H^n)$,

$$\begin{aligned}\{X^L\langle Y^L, Z^L\rangle\}(z) &= \{X^L\langle Y, Z\rangle \circ \pi\}(z) = X_z^L[\langle Y, Z\rangle \circ \pi]_z \\ &= \pi_{*z}X_z^L[\langle Y, Z\rangle]_{\pi(z)} = \{X\langle Y, Z\rangle \circ \pi\}(z),\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\langle X^L, [Y^L, Z^L]\rangle &= \langle X^L, [Y, Z]^L + ([Y^L, Z^L])_{\mathbb{R}V}\rangle = \langle X^L, [Y, Z]^L\rangle \\ &= \langle X, [Y, Z]\rangle \circ \pi,\end{aligned}$$

que son precisamente los términos implicados en la fórmula de Koszul. Por tanto, haciendo uso de la misma, llegamos a que $\langle \nabla_X Y, Z\rangle \circ \pi = \langle \widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L, Z^L\rangle$, lo cual, por la definición que hemos hecho de la métrica implica

$$\langle (\nabla_X Y)^L, Z^L\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L, Z^L\rangle.$$

Lo escrito arriba, por ser $Z$ un vector arbitrario, puede inducir a pensar que, utilizando el carácter no degenerado de la métrica, es posible afirmar que $(\nabla_X Y)^L$ es exactamente $\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L$. Sin embargo, esto no sucede así, pues aunque $Z$ es efectivamente fijado de modo arbitrario, $Z^L$ pertenece por definición a la descomposición horizontal del espacio tangente. Luego, lo anterior permite únicamente deducir $(\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L)_{V^\perp} = (\nabla_X Y)^L$, o, equivalentemente, $\pi_*(\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L) = \nabla_X Y$. □

El siguiente lema soluciona, como veremos, el problema de levantar la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{C}H^n$.

**Lema 2.6.** *Sean $X$ e $Y$ dos campos de vectores diferenciables de $\mathbb{C}H^n$. Entonces,*

$$(\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L)_{\mathbb{R}V} = \frac{1}{2}([X^L, Y^L])_{\mathbb{R}V}.$$

*Demostración.* En primer lugar, tenemos que $\langle X^L, X^L \rangle$ es un función de $H_1^{2n+1}(r)$ en $\mathbb{R}$ constante a lo largo de cualquier curva contenida dentro de cada fibra, luego, dado $W \in \mathbb{R}V$, se tiene que $W\langle X^L, X^L\rangle = 0$. Además, repitiendo el argumento que ya utilizamos en la proposición (2.5), $X^L$ está $\pi$-relacionado con $X$ y $W$ está $\pi$-relacionado con el campo de vectores nulo, luego $\pi_*[W, X^L] = [0, X] = 0$. Haciendo uso de estas dos propiedades obtenemos

$$0 = \langle \widetilde{\nabla}_W X^L, X^L \rangle = \langle [W, X^L] + \widetilde{\nabla}_{X^L} W, X^L \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{X^L} W, X^L \rangle = \langle -W, \widetilde{\nabla}_{X^L} X^L \rangle,$$

donde en la última igualdad se ha utilizado la relación $X^L\langle W, X^L\rangle = 0$. Pero entonces es posible deducir que

$$0 = \langle \widetilde{\nabla}_{X^L+Y^L} X^L + Y^L, W \rangle,$$

de donde se sigue que $(\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L)_{\mathbb{R}V} = -(\widetilde{\nabla}_{Y^L} X^L)_{\mathbb{R}V}$ y por tanto

$$([X^L, Y^L])_{\mathbb{R}V} = (\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L - \widetilde{\nabla}_{Y^L} X^L)_{\mathbb{R}V} = 2(\widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L)_{\mathbb{R}V}.$$ □

Un resultado inmediato que se sigue del lema que venimos de probar, es el hecho de que ahora sí podemos dar cual es exactamente el levantamiento de la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{C}H^n$,

$$(\nabla_X Y)^L = \widetilde{\nabla}_{X^L} Y^L - \frac{1}{2}([X^L, Y^L])_{\mathbb{R}V}.$$

Hasta este punto, hemos visto que $\mathbb{C}H^n$ es una variedad diferenciable hermitiana, pues hemos definido sobre ella una estructura casi compleja que se comporta del modo requerido respecto a la métrica. Pero ahora, tras el resultado que venimos de probar acerca de la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{C}H^n$, estamos en condiciones de demostrar que se trata además de una variedad Kähler. En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}_X J\right)Y &= \bar{\nabla}_X JY - J\bar{\nabla}_X Y = \pi_*\left(\widetilde{\nabla}_{X^L}(JY)^L\right) - J\left(\pi_*\widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L\right)\\ &= \pi_*\left(\widetilde{\nabla}_{X^L}\widetilde{J}Y^L - \widetilde{J}(\widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L)_{V^\perp}\right)\\ &= \pi_*\left((D_{X^L}\widetilde{J}Y^L)^\top - \widetilde{J}(D_{X^L}Y^L)_{V^\perp}\right)\\ &= \pi_*\left((D_{X^L}\widetilde{J}Y^L)_{V^\perp} + (D_{X^L}\widetilde{J}Y^L)_{\mathbb{R}V} - (\widetilde{J}D_{X^L}Y^L)_{V^\perp}\right) = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, veremos que $\mathbb{C}H^n$ tiene curvatura seccional holomorfa constante, de modo que, al tratarse además, como hemos visto, de una variedad de Kälher, la Proposición 2.4 nos permitirá conocer su tensor de curvatura. Para ello, es preciso hacer uso de la ecuación de la teoría de sumersiones semi-riemannianas

$$K(X,Y) = \widetilde{K}(X^L,Y^L) + \frac{3\langle [X^L,Y^L]_{\mathbb{R}V}, [X^L,Y^L]_{\mathbb{R}V}\rangle}{4(\langle X^L,X^L\rangle\langle Y^L,Y^L\rangle - \langle X^L,Y^L\rangle^2)},$$

donde, $X,Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}H^n)$ y donde $\widetilde{K}$ y $K$ denotan, respectivamente, las curvaturas seccionales de $H_1^{2n+1}(r)$ y $\mathbb{C}H^n$. La demostración puede encontrarse en [23]. Para obtener una expresión más manejable, haciendo cálculos, se obtiene

$$\begin{aligned}\langle [X^L,Y^L],V\rangle &= 2\langle \widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L - (\nabla_X Y)^L, V\rangle = 2\langle \widetilde{\nabla}_{X^L}Y^L, V\rangle = 2\langle (D_{X^L}Y^L)^\top, \widetilde{J}\xi\rangle\\ &= -2\langle \widetilde{J}D_{X^L}Y^L,\xi\rangle = -2\langle D_{X^L}\widetilde{J}Y^L,\xi\rangle = 2\langle \widetilde{J}Y^L, D_{X^L}\xi\rangle\\ &= -2\langle \widetilde{J}Y^L, SX^L\rangle = \frac{2}{r}\langle \widetilde{J}Y^L, X^L\rangle = \frac{2}{r}\langle JY, X\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura seccional de $\mathbb{C}H^n$ asociada al subespacio vectorial 2-dimensional generado por la base ortonormal $\{X, JX\}$ es

$$K(X,JX) = -\frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^2}\langle J(JX),X\rangle^2\langle V,V\rangle = -\frac{4}{r^2}.$$

Con todo ello, podemos concluir que $\mathbb{C}H^n$ es una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante $c = -\frac{4}{r^2}$, y, atendiendo al enunciado de la Proposición 2.4, deducimos que la expresión para su tensor de curvatura es

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle JY,Z\rangle JX - \langle JX,Z\rangle JY - 2\langle JX,Y\rangle JZ).$$

## 2.4. El espacio homogéneo $\mathbb{C}H^n$

En primer lugar, nótese que la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ con la que hemos dotado a $\mathbb{C}^{n+1}$ al principio del capítulo puede escribirse como

$$\langle z,w\rangle = \mathrm{Re}(w^* I_{1,n} z), \text{ donde } I_{1,n} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right),$$

y $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & SU(1,n)\times\mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ & (A,z) & \mapsto & \psi(A,z) = A\cdot z \end{array}$$

es una acción sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ por isometrías del grupo $SU(1,n)$ de las matrices cuadradas complejas de orden $n+1$ que verifican $AI_{1,n}A^* = I_{1,n}$ y cuyo determinante tiene módulo unidad, pues

$$\langle Az, Aw\rangle = \mathrm{Re}((Aw)^* I_{1,n} Az) = \mathrm{Re}(w^* A^* I_{1,n} Az) = \mathrm{Re}(w^* I_{1,n} z) = \langle z,w\rangle.$$

Ahora bien, esto significa que si restringimos la acción a $SU(1,n)\times H_1^{2n+1}(r)$, ésta se factoriza a través del espacio anti-De Sitter,

$$\begin{tikzcd} SU(1,n)\times H_1^{2n+1}(r) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed] & \mathbb{C}^{n+1} \\ & H_1^{2n+1}(r). \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

De esta manera, utilizando el Lema 1.32 de [27], lema de factorización, obtenemos que la acción $SU(1,n)\times H_1^{2n+1}(r)\to H_1^{2n+1}(r)$ es diferenciable. Veamos que $SU(1,n)\cdot re_1 = H_1^{2n+1}(r)$, lo cual probaría que se trata además de una acción transitiva. Tomamos entonces un elemento cualquiera $z\in H_1^{2n+1}(r)$ y hacemos $v_1 = \frac{z}{r}$. Completamos $v_1$ a una base ortonormal $\{v_1,\ldots,v_{n+1}\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ mediante por ejemplo el procedimiento de Gram-Schmidt respecto a la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Cada uno de los elementos de esta base se expresará de forma única como combinación lineal de los elementos de la base canónica. Pongamos

$$v_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} e_i \ , \text{ con } \ j = 1,\ldots,n+1.$$

Pero entonces la matriz $A = (a_{ij})$ es un elemento de $SU(1,n)$, pues $AI_{1,n}A^*$ es precisamente la matriz $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Además, dado que $\det(AI_{1,n}A^*) = \det(I_{1,n})$, se concluye que $\det(A)\in\mathbb{S}^1$. Por como hemos construido la matriz $A$ se tiene que $A\cdot e_1 = \frac{z}{r}$

y esto implica que $A \cdot re_1 = z$.

Esta acción induce de modo natural una acción $F$ de $SU(1,n)$ sobre $\mathbb{C}H^n$ dada por $F(A, \pi(q)) = \pi(A \cdot q)$. Su buena definición es clara, pues si $\pi(q_1) = \pi(q_2)$ entonces $q_1 = \lambda q_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{S}^1$, lo cual implica que $\pi(A \cdot q_2) = \pi(\lambda A \cdot q_2) = \pi(A \cdot q_1)$. Además, observando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
SU(1,n) \times H_1^{2n+1}(r) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\pi"'] \arrow[dr, "F\circ(\mathrm{Id}\times\pi)"] & H_1^{2n+1}(r) \arrow[d, "\pi"] \\
SU(1,n) \times \mathbb{C}H^n \arrow[r, "F"'] & \mathbb{C}H^n,
\end{tikzcd}$$

y ayudándonos de la Proposición 7.17 de [21] que afirma que $F$ es diferenciable si, y solo si, lo es también $F \circ (\mathrm{Id} \times \pi)$, y ésta última lo es por ser composición de dos aplicaciones diferenciables, podemos afirmar la diferenciabilidad de $F$. Sea $o = \pi(re_1)$, utilizando la transitividad de $\psi$ se sigue directamente que $SU(1,n) \cdot o = \mathbb{C}H^n$.

Por otra parte, denotaremos por $S(U(1)U(n))$ el subgrupo $S(U(1) \times U(n))$ de $SU(1,n)$, isomorfo a $U(n)$ mediante la aplicación

$$A \in U(n) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \det A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in S(U(1)U(n)).$$

Por un lado, es claro que para $A \in S(U(1)U(n))$ se tiene que $F(A, o) = o$, lo cual prueba que $S(U(1)U(n)) \subset SU(1,n)_o$. Recíprocamente, si algún $A \in SU(1,n)$ verifica que $F(A, o) = o$, esto implica la existencia de un elemento $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tal que $A \cdot re_1 = \lambda re_1$. Pero entonces $a_{11} = \lambda$ y $a_{i1} = 0$ para $i > 1$. Además, dado que $AI_{1,n}A^* = I_{1,n}$ se obtiene que $-1 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n+1}|^2 = -1$. Por tanto $a_{1i} = 0$ para $i > 1$. Pero entonces $A$ es un elemento de $S(U(1)U(n))$. Ello nos permite concluir que el grupo de isotropía de $o \in \mathbb{C}H^n$ es precisamente $S(U(1)U(n))$, pudiendo presentar en consecuencia el espacio hiperbólico complejo como el espacio homogéneo $\mathbb{C}H^n = \frac{SU(1,n)}{S(U(1)U(n))}$.

# Capítulo 3

# Hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{C}H^n$

El objetivo del presente trabajo es, como se menciona en la introducción, iniciar el problema de clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{C}H^n$ en las cuales el vector de Hopf tiene tres proyecciones no triviales sobre los autoespacios del operador de configuración. La idea es probar que cada una de estas hipersuperficies es precisamente alguno de los ejemplos presentados en [12] o en el cuarto capítulo de esta memoria. Por ello, dedicaremos las siguientes líneas al estudio de las curvaturas principales de estas hipersuperficies, o, lo que es lo mismo, al análisis de su operador de configuración.

Así, en el presente capítulo, $H_1^{2n+1}$, con $n > 2$, denotará el espacio de anti-De Sitter de curvatura constante $c/4(= -1/r^2) < 0$, que fue construido detalladamente en el Capítulo 2. Del mismo modo que allí, $V$ será el campo de vectores tangente a las fibras, o, en otros términos, dado que $H_1^{2n+1}$ era un fibrado principal, el campo tangente a las órbitas de la acción $\Psi$ por $\mathbb{S}^1$ presentada en el mencionado capítulo. Dicho campo está dado por la expresión $V_z = \frac{i\sqrt{-c}}{2}z$.

Sea $M$ una hipersuperficie real de $\mathbb{C}H^n$. Entonces $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$ es un hipersuperfice de $H_1^{2n+1}$ invariante por la acción $\Psi$. Recíprocamente, si $\widetilde{M}$ es una hipersuperficie de $H_1^{2n+1}$ que contiene a la fibra $\mathbb{S}^1$, entonces $\widetilde{M}$ es una hipersuperficie Lorentziana y se tiene que $M = \pi(\widetilde{M})$ es una hipersuperficie de $\mathbb{C}H^n$ y $\pi_{|\widetilde{M}} : \widetilde{M} \to M$ sigue siendo una sumersión semi-riemanniana. Si denotamos por $\widetilde{\bar{\nabla}}$ la conexión de Levi-Civita de $H_1^{2n+1}$ y por $\nabla$, indistintamente, las de $M$ y $\widetilde{M}$, recordando las expresiones obtenidas en el Capítulo 2

$$\widetilde{\bar{\nabla}}_{X^L}Y^L = (\nabla_X Y)^L + \frac{1}{2}[X^L, Y^L]_{\mathbb{R}\mathbb{V}} \quad \text{y}$$
$$\langle [X^L, Y^L], V\rangle = \frac{2}{r}\langle JY, X\rangle,$$

se obtiene

$$\widetilde{\bar{\nabla}}_{X^L}Y^L = (\bar{\nabla}_X Y)^L + \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle JX^L, Y^L\rangle V, \tag{3.1}$$

donde aquí denotamos por $J$ las estructuras complejas tanto de $H_1^{2n+1}$ como de $\mathbb{C}H^n$. Además, también nos será de gran utilidad la expresión

$$\widetilde{\nabla}_V X^L = \widetilde{\nabla}_{X^L} V = \frac{\sqrt{-c}}{2}(JX)^L = \frac{\sqrt{-c}}{2} JX^L, \tag{3.2}$$

que puede consultarse en [23].

Ahora, si $\xi$ es un campo de vectores unitario y ortogonal a $M$, $\xi^L$ será un campo de vectores unitario ortogonal a $\widetilde{M}$. En general, la existencia de este campo de vectores está garantizada solo localmente, aunque para simplificar la notación asumiremos que está definido en todo $M$, pues no hay pérdida de generalidad. De hecho, informalmente, podemos pensar que $\xi$ está definido en un abierto $M$ de $M$. Bajo estas hipótesis, las fórmulas de Gauss y de Weingarten para $\widetilde{M}$, hipersuperficie de $H_1^{2n+1}$, se escriben de la forma

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle \widetilde{S}X, Y\rangle \xi^L, \qquad \widetilde{\nabla}_X \xi^L = -\widetilde{S}X,$$

donde $\widetilde{S}$ denota el operador de configuración de la hipersuperfice $\widetilde{M}$ con respecto al vector normal $\xi^L$. Utilizando (3.1) y (3.2) junto con estas dos últimas fórmulas y denotando por $S$ el operador de configuración de $M$ obtenemos las expresiones

$$\widetilde{S}X^L = (SX)^L + \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle J\xi^L, X^L\rangle V, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{S}V = -\frac{\sqrt{-c}}{2} J\xi^L. \tag{3.4}$$

En este punto, como se hace en [14], si tomamos una base local $X_1, \dots, X_{2n-1}$ de $M$ formada por autovectores (vectores asociados a las curvaturas principales), entonces $X_1^L, \dots, X_{2n-1}^L, V$ forma una base local de $\widetilde{M}$ respecto a la cual el operador de configuración $\widetilde{S}$ viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & -\frac{b_1\sqrt{-c}}{2} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_{2n-1} & -\frac{b_{2n-1}\sqrt{-c}}{2} \\ \frac{b_1\sqrt{-c}}{2} & \dots & \frac{b_{2n-1}\sqrt{-c}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

donde $b_i = \langle J\xi, X_i\rangle$, $i = 1, \dots, 2n-1$, son funciones invariantes bajo la acción $\Psi$. De este modo, se deduce que $M$ y $\widetilde{M}$ tienen la misma curvatura media, siendo entonces $M$ isoparamétrica si, y solo si, lo es también $\widetilde{M}$. Este hecho motiva que podamos reducir en cierto modo el estudio de las hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{C}H^n$ al análisis de las hipersupeficies isoparamétricas Lorentzianas de $H_1^{2n+1}$ resultantes de levantar las primeras.

Así, supongamos entonces $\widetilde{M}$ una hipersuperficie isoparamétrica de $H_1^{2n+1}$. Sabemos por [24] que $\widetilde{S}$, en un punto $q \in \widetilde{M}$, adopta alguna de las siguientes formas canónicas de Jordan:

I.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$$

II.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ \varepsilon & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2n-1} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

III.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_{2n-2} \end{pmatrix}$$

IV.
$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ -b & a & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$$

En los casos II y III, $\widetilde{S}$ viene así representado respecto a una base seminula $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$, es decir, una base cuyos productos interiores son todos nulos excepto $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1$, con $i \in \{3, \ldots, 2n\}$. A su vez, la base respecto a la cual $\widetilde{S}$ viene dado de la forma I o IV, es una base ortonormal con el primer vector temporal. En general, los $\lambda_i$ pueden ser repetidos.

En adelante, si $p \in M$, denotaremos por $g(p)$ el número de curvaturas principales distintas de $M$ en el punto $p$. De modo análogo se define $\widetilde{g}(q)$, para $q \in \widetilde{M}$. A su vez, $h(p)$ denotará el número de proyecciones no triviales del vector de Hopf $J\xi$ en los autoespacios asociados a las curvaturas principales en el punto $p$.

A continuación presentaremos la fórmula fundamental de Cartan, adaptándola a nuestro caso particular. Posteriormente, enunciaremos los principales resultados obtenidos al ir analizando una a una las cuatro posibilidades arriba citadas para el operador de configuración de la hipersuperficie $\widetilde{M}$ levantada de $M$. Puesto que en el presente trabajo vamos a centrarnos únicamente en las hipersuperficies de $\mathbb{C}H^n$ con $h = 3$, no se incluirán aquí las demostraciones cuya omisión no afecte a la comprensión general de este texto. Así, realizaremos solo aquellas cuyos argumentos puedan resultar de utilidad en lo sucesivo.

Introducimos, como adelantábamos antes, la fórmula de Cartan adaptada al caso del espacio de anti-De Sitter. La fórmula general, junto con su demostración, puede consultarse en [17].

**Teorema 3.1** (Fórmula fundamental de Cartan)**.** *Sea $\widetilde{M}$ una hipersuperficie del espacio de anti-De Sitter $H_1^{2n+1}$ de curvatura constante $c/4$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\widetilde{g}}$ sus curvaturas principales con multiplicidades algebraicas $m_1, \ldots, m_{\widetilde{g}}$ respectivamente. Si para algún $i \in \{1, \ldots, \widetilde{g}\}$ se tiene que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y además coinciden su multiplicidad geométrica y algebraica, entonces*

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{\widetilde{g}} m_j \frac{c + 4\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

La utilidad de este teorema se refleja en el siguiente lema.

**Lema 3.2.** *Sea $q \in \widetilde{M}$ un punto de tipo I, II o III. Entonces el número de curvaturas principales constantes en el punto $q$ satisface $\widetilde{g}(q) \in \{1, 2\}$. Además, si $\widetilde{g} = 2$, entonces $c + 4\lambda\mu = 0$, donde $\lambda$ y $\mu$ denotan las curvaturas principales.*

*Demostración.* Aunque la expresión

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{\widetilde{g}} m_j \frac{c + 4\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0 \tag{3.6}$$

solo es válida, en un principio, cuando el autovalor $\lambda_i$ es un número real y coinciden su multiplicidad geométrica y algebraica, asumimos por el momento su veracidad en cualquier caso y la probaremos al final.

Si hubiese un único autovalor nulo, el lema quedaría probado ($\widetilde{g}(q) = 1$). Supongamos entonces la existencia de al menos un autovalor $\lambda$ no nulo. Escogiendo de forma conveniente el vector normal a la hora de tratar con el operador de configuración podemos asumir $\lambda > 0$. En efecto, si respecto al vector normal $\xi$ el autovalor $\lambda$ fuese negativo, tomamos $X$ un autovector asociado a $\lambda$ y un vector cualquiera $Y \in T_q\widetilde{M}$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned}\langle -\widetilde{S}_{-\xi}X, Y\rangle &= -\langle \widetilde{S}_{-\xi}X, Y\rangle = -\langle II(X,Y), -\xi\rangle = \langle II(X,Y), \xi\rangle \\ &= \langle \widetilde{S}_{\xi}X, Y\rangle = \langle \lambda X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, ahora $\widetilde{S}_{-\xi}X = -\lambda X$ , con $-\lambda > 0$, como queríamos. Definimos en este punto $\lambda = \max\{\lambda_i : 0 < \lambda_i \leq \frac{\sqrt{-c}}{2}\}$ y $\lambda' = \min\{\lambda_i : \frac{\sqrt{-c}}{2} < \lambda_i\}$. Antes de comenzar, conviene señalar que dado que $\lambda \leq \frac{\sqrt{-c}}{2}$, elevando ambos términos al cuadrado se mantiene la desigualdad y dividiendo a ambos lados de la misma por $\lambda$ se obtiene $\lambda \leq -\frac{c}{4\lambda}$. Así, tiene sentido hablar de los intervalos $\left(\lambda, -\frac{c}{4\lambda}\right)$ y $(-\frac{c}{4\lambda'}, \lambda')$. La buena definición del segundo se obtiene de modo análogo. Distinguimos ahora tres casos:

1. Existe $\lambda$ y no hay ninguna curvatura principal constante en $\left(\lambda, -\frac{c}{4\lambda}\right)$. Sea entonces $\lambda_i \neq \lambda$ otra curvatura principal. Si $\lambda_i < \lambda$ entonces tenemos que $\lambda - \lambda_i > 0$ y $\lambda_i + \frac{c}{4}\lambda < 0$. Por otra parte, si $\lambda < \lambda_i$, entonces $\lambda - \lambda_i < 0$ y $\lambda_i + \frac{c}{4}\lambda > 0$. En cualquier caso, obtenemos que
$$m_i \frac{c + 4\lambda\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} = 4m_i\lambda \frac{\lambda_i + \frac{c}{4\lambda}}{\lambda - \lambda_i} < 0.$$
En virtud de (3.6) deducimos que $\lambda_i = -\frac{c}{4\lambda}$.

2. Existe $\lambda$ y hay una curvatura principal $\eta \in \left(\lambda, -\frac{c}{4\lambda}\right)$. En tal caso, puesto que $\eta > \lambda$, se tiene que $\eta > \frac{\sqrt{-c}}{2}$, porque en otro caso se contradice la definición de $\lambda$. En consecuencia, $\lambda' \in \left(\lambda, -\frac{c}{4\lambda}\right)$ y dado que $\lambda' < -\frac{c}{4\lambda}$ entonces $\lambda < -\frac{c}{4\lambda'}$. Así, no hay ninguna curvatura principal en $\left(-\frac{c}{4\lambda'}, \lambda'\right)$ y se procede como en el caso anterior. En efecto, si $\eta'$ perteneciese al intervalo $(-\frac{c}{4\lambda'}, \lambda')$, se tendría que $\lambda < -\frac{c}{4\lambda'} < \eta' < \lambda' < -\frac{c}{4\lambda}$, lo cual contradice o bien la definición de $\lambda$ o bien la de $\lambda'$, en función de si $\eta' \leq \frac{\sqrt{-c}}{2}$ o $\eta' > \frac{\sqrt{-c}}{2}$.

3. No existe $\lambda$. En ese caso existe $\lambda'$ y de nuevo no exite ninguna curvatura principal en $\left(-\frac{c}{4\lambda'}, \lambda'\right)$.

Probemos pues la validez de la expresión (3.6). Supongamos que es $\lambda_1$ el autovalor para el cual no coinciden multiplicidad algebraica y geométrica. Por el lema anterior sabemos que para cualquier $i \in \{2, \cdots, \widetilde{g}\}$ se tiene que
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{\widetilde{g}} m_j \frac{c + 4\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$
En consecuencia:
$$\begin{aligned} m_1 \sum_{j=2}^{\widetilde{g}} m_j \frac{c + 4\lambda_1\lambda_j}{\lambda_1 - \lambda_j} &= \sum_{i=1}^{\widetilde{g}} m_i \left( \sum_{j=1, j\neq i}^{\widetilde{g}} m_j \frac{c + 4\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) \\ &= \sum_{i<j} m_i m_j (c + 4\lambda_i\lambda_j) \left( \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \right) = 0. \end{aligned}$$
Ahora bien, notando que $m_1 \neq 0$, se prueba que la expresión es válida también para el primer autovalor. $\square$

Se enuncian a continuación los principales resultados para los puntos de los tipos I, II y IV.

**Proposición 3.3.** *Sea $q \in \widetilde{M}$ un punto de tipo I, entonces $\widetilde{g}(q) = 2$. Además, si $p = \pi(q)$, se tiene que $h(p) = 1$ y $g(p) \in \{2, 3\}$. Las curvaturas principales de $\widetilde{M}$ en $q$ son un número real no nulo $\lambda \in (-\frac{\sqrt{-c}}{2}, \frac{\sqrt{-c}}{2})$ y $\mu = \frac{-c}{4\lambda}$. Por otra parte, las curvaturas principales de $M$ en $p$ son $\lambda + \mu$, de multiplicidad uno y correspondiente al vector de Hopf, junto con aquellas curvaturas principales de $\widetilde{M}$ en $q$ cuya multiplicidad geométrica sea mayor o igual que dos.*

**Proposición 3.4.** *Si $q \in \widetilde{M}$ es un punto de tipo II, entonces $\widetilde{g}(q) = 1$. Además, si $p = \pi(q)$, se tiene que $h(p) = 1$ y $g(p) = 2$. La hipersuperficie $\widetilde{M}$ tiene una única curvatura principal $\lambda = \pm\sqrt{-c}$ y las curvaturas principales de $M$ en $p$ son $\lambda$ y $2\lambda$. La segunda tiene multiplicidad uno y se corresponde con el vector de Hopf.*

**Proposición 3.5.** *Si $q \in \widetilde{M}$ es un punto de tipo IV y $p = \pi(q)$, entonces se tiene que $h(p) = 1$ y $g(p) \in \{2, 3\}$. Sean $\lambda$ y $\mu$ las curvaturas principales de $\widetilde{M}$ en $q$, donde una de ellas podría no existir. Entonces las curvaturas principales de $M$ en $p$ son $\lambda$, $\mu = \frac{-c}{4\lambda}$ y $2a = -\frac{4c\lambda}{-c+4\lambda^2}$. Esta última tiene multiplicidad uno, salvo que coincida con $\mu$, y se corresponde con el vector de Hopf.*

A la luz de las proposiciones que venimos enunciar, cuyas demostraciones pueden hallarse en [14], observamos que ninguna de estas clases de hipersuperficies en el espacio de anti-De Sitter dan lugar a las que realmente nos interesan en el espacio hiperbólico complejo. Por ello, pasamos ahora a estudiar detenidamente las hipersuperficies de $H_1^{2n+1}$ que presenten puntos de tipo III.

Sea entonces $q \in \widetilde{M}$ un punto de tipo III. En un primer análisis, vamos a suponer la existencia de dos curvaturas principales. En virtud del Lema 3.1, se tiene que $c + 4\lambda\mu = 0$, de donde se deduce que ambas curvaturas principales son no nulas, pues $c$ es una constante real estrictamente negativa. Sea $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ la base seminula respecto a la cual el operador de configuración de $\widetilde{M}$ en el punto $q$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 1 & \lambda & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Asumiremos en adelante que $T_\lambda = \mathbb{R}\{e_1, e_4, \ldots, e_k\}$, $T_\mu = \mathbb{R}\{e_{k+1}, \ldots, e_{2n}\}$, $\widetilde{S}e_2 = \lambda e_2 + e_3$ y $\widetilde{S}e_3 = e_1 + \lambda e_3$. El vector tangente a las fibras es tangente a $\widetilde{M}$, luego tendrá una expresión única respecto a la base que hemos escogido. Pongamos $V = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + u + w$, donde $r_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2, 3\}$, $u \in T_\lambda$ con $\langle u, e_2\rangle = 0$ y $w \in T_\mu$. Podemos aplicar a $V$ el operador de configuración,

$$\widetilde{S}V = (r_1\lambda + r_3)e_1 + r_2\lambda e_2 + (r_2 + r_3\lambda)e_3 + \lambda u + \mu w.$$

Además, utilizando la ecuación (3.4) obtenemos

$$J\xi^L = -\frac{2}{\sqrt{-c}}\left((r_1\lambda + r_3)e_1 + r_2\lambda e_2 + (r_2 + r_3\lambda)e_3 + \lambda u + \mu w\right).$$

Teniendo en cuenta que $0 = \langle \widetilde{S}V, V\rangle$ y que $1 = \langle J\xi^L, J\xi^L\rangle$ se obtiene

$$1 = \langle J\xi^L, J\xi^L\rangle = -\frac{4}{c}\left(2r_1r_2\lambda^2 + 4r_2r_3\lambda + r_2^2 + r_3^2\lambda^2 + \langle u,u\rangle\lambda^2 + \langle w,w\rangle\mu^2\right),$$
$$0 = \langle \widetilde{S}V, V\rangle = 2r_1r_2\lambda + 2r_2r_3 + r_3^2\lambda + \langle u,u\rangle\lambda + \langle w,w\rangle\mu.$$

Hemos visto que $V$ es un vector de norma $-1$, por tanto se tiene que $\langle u,u\rangle = -1 - 2r_1r_2 - r_3^2 - \langle w,w\rangle$. De aquí se deduce un hecho de vital importancia en lo que sigue: tanto $r_1$ como $r_2$ son números reales no nulos. Es más, en adelante podremos suponer $r_2 > 0$. En efecto, si con la base seminula que hemos escogido de partida $r_2$ fuese un número negativo, bastaría tomar la base seminula opuesta a de la inicio, $\{-e_1, \cdots, -e_{2n}\}$, para obtener $(-r_2) > 0$ como coeficiente que acompaña al vector $-e_2$ . Hecha esta aclaración, seguiremos denotando del mismo modo la base, suponiendo o bien que $r_2$ es estrictamente positivo de partida o que ya se ha hecho el cambio preciso para obtener tal desigualdad. En este punto, las igualdades anteriores pueden reescribirse como:

$$\left.\begin{aligned} 4r_2r_3\lambda + r_2^2 + (\mu^2 - \lambda^2)\langle w,w\rangle &= -\frac{c}{4} + \lambda^2 \\ 2r_2r_3 + (\mu - \lambda)\langle w,w\rangle &= \lambda \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Si multiplicamos por $2\lambda$ la segunda de ellas y restamos el resultado a la primera, teniendo en cuenta de nuevo que $c + 4\lambda\mu = 0$, obtenemos

$$r_2^2 + \frac{\left(\frac{c}{4} + \lambda^2\right)^2}{\lambda^2}\langle w,w\rangle = -\frac{c}{4} - \lambda^2.$$

De aquí, atendiendo a que el término de la izquierda es estrictamente positivo, se deduce que $\lambda^2 < \frac{-c}{4}$ y por tanto $\lambda \in (-\frac{\sqrt{-c}}{2}, \frac{\sqrt{-c}}{2})$. Multiplicando los términos de esta última igualdad por $(\frac{-c}{4} - \lambda^2)^{-1}$ obtenemos

$$\frac{r_2^2}{-\frac{c}{4} - \lambda^2} + \frac{\left(-\frac{c}{4} - \lambda^2\right)}{\lambda^2}\langle w,w\rangle = 1.$$

Por tanto, ha de existir $\varphi \in (0, 2\pi)$ tal que

$$\sin^2(\varphi) = \frac{r_2^2}{-\frac{c}{4} - \lambda^2}, \qquad \cos^2(\varphi) = \frac{\left(-\frac{c}{4} - \lambda^2\right)}{\lambda^2}\langle w,w\rangle.$$

Despejando en esta expresión y tomando siempre raíces positivas, recordando que $r_2 > 0$, podemos tomar $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y escribir

$$r_2 = \sqrt{\frac{-c}{4} - \lambda^2} \sin(\varphi), \quad \sqrt{\langle w, w\rangle} = \frac{2|\lambda|}{\sqrt{-c-4\lambda^2}} \cos(\varphi).$$

Utilizando (3.7) y los nuevos valores en función de $\varphi$ para $r_2$ y $\langle w, w\rangle$ se sigue además que $r_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{-c-4\lambda^2}} \sin(\varphi)$.

Vamos ahora a tratar de comprender, tomando también como hipótesis que $w$ es no nulo, como es el operador de configuración $S$ de $M$ en el punto $p = \pi(q)$. Para ello, escogemos $k-3$ vectores linealmente independientes pertenecientes a $T_\lambda$ que sean ortogonales simultáneamente a $V$ y a $J\xi^L$. Si $u \neq 0$, basta tomar una base cualquiera del subespacio vectorial $(k-4)$-dimensional de $T_q\widetilde{M}$

$$\mathbb{R}\{e_4, \dots, e_k\} \ominus \mathbb{R}u,$$

y añadir el vector $\langle u, u\rangle e_1 - r_2 u$. Por otra parte, si $u = 0$, tomamos una base cualquiera del subespacio $\mathbb{R}\{e_4, \cdots, e_k\}$. Además, dado que $w \neq 0$, existen $2n-k-1$ vectores linealmente independientes en $T_\mu$ ortogonales a $V$ y a $J\xi^L$. Para ello, es suficiente escoger una base cualquiera de $T_\mu \ominus \mathbb{R}w$.

Dado que estos $2n-4$ vectores son por construcción ortogonales a $V$, es coherente denotarlos por $X_1^L, \dots, X_{k-3}^L, X_{k+1}^L, \dots, X_{2n-1}^L$. En otras palabras, podemos pensarlos como levantamientos de vectores en el punto $p \in M$. Aplicando $\pi_{*q}$ a la expresión (3.3) y utilizando su carácter lineal se tiene que

$$SX_i = \pi_{*q}\widetilde{S}X_i^L = \pi_{*q}\lambda_i X_i^L = \lambda_i X_i,$$

donde $i \in \{1, \dots, k-3, k+1, \dots, 2n-1\}$, con $\lambda_i = \lambda$ si $i \leq k-3$ y $\lambda_i = \mu$ si $i > k-3$. En conclusión, ya conocemos $2n-4$ autovectores de $S$ en $p$, de los cuales $k-3$ de ellos tienen autovalor $\lambda$ y los $2n-k-1$ restantes tienen autovalor $\mu$. Además, puesto que por construcción

$$\langle J\xi, X_i\rangle = \langle J\xi^L, X_i^L\rangle = 0,$$

se sigue que el vector de Hopf no se proyecta (de forma no trivial) en ninguno de estos dos autoespacios. Así, en base a que $M$ tiene dimensión $2n-1$, se deduce que $h(p) \leq 2n-1-(2n-4) = 3$. Además $h(p) \neq 1$, pues en otro caso la matriz (3.5) no tendría un bloque $3 \times 3$ no diagonal y no estaríamos en un punto de tipo III.

Tomamos ahora los vectores $l_1 = (r_1 r_2 + \langle u, u\rangle)e_1 - r_2^2 e_2 - r_2 u$, $l_2 = r_2 r_3 e_1 - r_2^2 e_3$ y $l_3 = 2\lambda\langle w, w\rangle r_2 e_1 - 2\lambda r_2^2 w$, que generan un subespacio vectorial 3-dimensional $L$ de $T_q\widetilde{M}$, pues la submatriz inferior $3 \times 3$ de

$$\begin{pmatrix} r_1 r_2 + \langle u, u\rangle & r_2 r_3 & 2\lambda\langle w, w\rangle r_2 \\ -r_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -r_2^2 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda r_2^2 \end{pmatrix}$$

tiene determinante $-2\lambda r_2^5 \neq 0$. Es claro que los vectores de $L$ son ortogonales a $V$, por tanto, $\pi_{*q}L$ es un subespacio vectorial 3-dimensional de $T_pM$. Restringiéndolo a $\pi_{*q}L$, el operador de configuración tiene, con respecto a la base $\{\pi_{*q}l_1, \pi_{*q}l_2, \pi_{*q}l_3\}$, la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda + r_2 r_3 & r_2^2 & -\frac{1}{2}\langle w, w\rangle(c+4\lambda^2)r_2 \\ 1 + r_3^2 & \lambda + r_2 r_3 & -\frac{1}{2}\langle w, w\rangle(c+4\lambda^2)r_3 \\ \frac{r_3}{2\lambda} & \frac{r_2}{2\lambda} & -\frac{c+\langle w,w\rangle(c+4\lambda^2)}{4\lambda} \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico, empleando los valores que hemos obtenido para $r_2, r_3$ y $\langle w, w\rangle$ en función de $\varphi$, es

$$\begin{aligned} f_\varphi(x) = {} & \frac{-c^2 - 16c\lambda^2 + 16\lambda^4 + (c+4\lambda^2)^2\cos(2\varphi)}{32\lambda} + \frac{1}{2}\left(c - 6\lambda^2\right)x \\ & + \left(3\lambda - \frac{c}{4\lambda}\right)x^2 - x^3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observamos que ni $\lambda$ ni $\mu$ pueden ser raíces de $f$. De hecho, sustituyendo, obtenemos $f(\lambda) = -\frac{(c+4\lambda^2)^2\sin^2(\varphi)}{16\lambda}$ y $f(\mu) = \frac{(c+4\lambda^2)^2\cos^2(\varphi)}{16\lambda}$. Es más, con un argumento análogo al empleado en [5], puede probarse que el polinomio $f$ tiene tres raíces distintas. Denotaremos por $y_1, y_2, y_3$ los autovectores unitarios de este endomorfismo, con autovalores las raíces de $f$, $\lambda_1, \lambda_2$ y $\lambda_3$. Sea además, como al principio del presente capítulo, $b_i = \langle J\xi, y_i\rangle$, con $i = 1, 2, 3$.

Veamos además que con las hipótesis anteriores $h(p) = 3$. Tomamos para ello $l_2' = r_2 e_2 + u$, de forma que $\{e_1, l_2', e_3, w\}$ consitutya una base de $L \oplus \mathbb{R}V$ respecto a la cual el operador de configuración $\widetilde{S}$ adopta la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio caraterístico es

$$x^4 + (-3\lambda - \mu)x^3 + 3\lambda(\lambda+\mu)x^2 - \lambda^2(\lambda + 3\mu)x + \lambda^3\mu.$$

Ahora, si expresamos el operador de configuración respecto a la base $\{y_1^L, y_2^L, y_3^L, V\}$ de $L \oplus \mathbb{R}V$, entonces éste viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & -b_1\frac{\sqrt{-c}}{2} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -b_2\frac{\sqrt{-c}}{2} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -b_3\frac{\sqrt{-c}}{2} \\ b_1\frac{\sqrt{-c}}{2} & b_2\frac{\sqrt{-c}}{2} & b_3\frac{\sqrt{-c}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico, utilizando la relación $b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$, es

$$\begin{aligned}
&x^4+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\,x^3\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(-c+4\lambda_1\lambda_2+4\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2\lambda_3\right)x^2\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(b_1^2c\lambda_2+b_1^2c\lambda_3+b_2^2c\lambda_1+b_3^2c\lambda_1+b_3^2c\lambda_2+b_2^2c\lambda_3-4\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)x\\
&\quad-\frac{1}{4}c\left(b_1^2\lambda_2\lambda_3+b_3^2\lambda_1\lambda_2+b_2^2\lambda_1\lambda_3\right).
\end{aligned}$$

Pero las matrices anteriores representan ambas el mismo endomorfismo del espacio vectorial $L\oplus\mathbb{R}V$, por tanto, es conocido que sus polinomios característicos deben coincidir. Tenemos entonces el siguiente sistema compatible determinado de ecuaciones en las variables $b_1, b_2, b_3$, pues su determinante es $\frac{c^2}{16}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\neq 0$.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(c\lambda_2+c\lambda_3\right)b_1^2+\frac{1}{4}\left(c\lambda_1+c\lambda_3\right)b_2^2+\frac{1}{4}\left(c\lambda_1+c\lambda_2\right)b_3^2&=\lambda_1\lambda_2\lambda_3-\lambda^2(\lambda+3\mu)\\
-\frac{1}{4}c\lambda_2\lambda_3b_1^2-\frac{1}{4}c\lambda_1\lambda_3b_2^2-\frac{1}{4}c\lambda_1\lambda_2b_3^2&=\lambda^3\mu\\
b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1
\end{aligned}\right\}$$

Ahora, haciendo uso de las relaciones de igualdad entre ambos polinomios característicos

$$\begin{aligned}
\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=3\lambda+\mu,\\
-\frac{c}{4}+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3&=3\lambda(\lambda+\mu),
\end{aligned}$$

podemos dar una solución explícita del sistema:

$$b_i^2=-\frac{4(\lambda-\lambda_i)^3(\lambda_i-\mu)}{c(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i+2})},\qquad i=1,\,2,\,3,\qquad (\text{índices módulo } 3),$$

que resultan ser no nulas las tres, puesto que ya hemos justificado antes que los autovalores son todos distintos.

Concluimos pues que, bajo las hipótesis de existencia de dos curvaturas principales diferentes $\lambda$ y $\mu$ en el espacio tangente a $q\in\widetilde{M}$ y de proyección no trivial de $V$ sobre el autoespacio asociado a $\mu$, esto último es, $w\neq 0$, se puede afirmar que el vector de Hopf tiene tres proyecciones no triviales sobre los autoespacios del operador de configuración de $M$ en el punto $p$, es decir, $h(p)=3$.

Es posible afirmar también que, en este caso, $g(p)\in\{4,5\}$. Para empezar, como hemos dicho, tres raíces diferentes ya son aportadas por el polinomio $f$ obtenido al restringir el operador de configuración $S$ a $\pi_{*q}L$. Además, a lo sumo hay dos autovalores más, $\lambda$ y $\mu$. Pero, ¿podríamos perder simultáneamente $\lambda$ y $\mu$ al proyectar $\widetilde{M}$? La respuesta es no. En efecto, los vectores $J\xi^L$ y $V$ se proyectan de forma no trivial en $T_\mu$, pues hemos supuesto

$w \neq 0$. Por lo argumentado arriba, hay entonces exactamente $2n - k - 1$ autovectores de $S$ asociados al autovalor $\mu$. Del mismo modo, $J\xi^L$ y $V$ se proyectan sobre $T_\lambda$ de forma no trivial, pues $r_1 \neq 0$, tanto si $u$ es nulo como si no y hemos visto que por tanto hay $k - 3$ autovectores de $S$ en $p$ asociados al autovalor $\lambda$. Por consiguiente, para que ni $\lambda$ ni $\mu$ fuesen autovalores de $S$ tendríamos que tener las igualdades $2n = k + 1$ junto con $k = 3$. Pero entonces $\dim_{\mathbb{R}}(T_q\widetilde{M}) = 4$ y estaríamos en $\mathbb{C}H^2$, mientras que hemos supuesto de partida que $n \geq 3$.

Queda entonces por analizar el caso en el que tenemos una única curvatura principal y el caso en el que hay dos autovalores $\lambda$ y $\mu$ en $\widetilde{M}$, pero $w = 0$, o, lo que es lo mismo, cuando tenemos dos autovalores pero $V$ tiene proyección trivial sobre $T_\mu$. En esencia, se trata de realizar en ambos casos el desarrollo anterior pero tomando $w = 0$, o, equivalentemente, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Por una parte, si existe $T_\mu$ pero $w = 0$, podemos escoger $2n - k$ vectores linealmente independientes en $T_\mu$ ortogonales a $V$ y a $J\xi^L$. Sumados con los $k - 3$ que cumplen la misma propiedad en $T_\lambda$ obtenemos $2n - 3$ vectores linealmente independientes ortogonales a $V$ y a $J\xi^L$. Ahora, utilizando la ecuación (3.3), deducimos que la proyección de estos $2n - 3$ vectores son autovectores de $M$ en $p$. Por consiguiente, $h(p) = 2$.

En caso de que $T_\mu$ no exista, esto es, si hay una única curvatura principal en $\widetilde{M}$, entonces escogemos directamente $2n - 3$ vectores linealmente independientes en $T_\lambda$ ortogonales simultáneamente a $V$ y a $J\xi^L$. De nuevo, se sigue que $h(p) = 2$.

En ambos casos, dado que $w = 0$, bien porque $V$ tiene proyección trivial sobre $T_\mu$ o porque tal autoespacio no existe, la ecuación (3.7) puede reescribirse de la forma

$$\left.\begin{aligned} 4r_2r_3\lambda + r_2^2 &= -\frac{c}{4} + \lambda^2 \\ 2r_2r_3 &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

De nuevo, si multiplicamos por $-2\lambda$ la segunda de ellas y sumamos lo obtenido a la primera, se sigue la igualdad $r_2^2 = -\frac{-c}{4} - \lambda^2$. De aquí se obtienen los valores

$$r_2 = \sqrt{-\frac{c}{4} - \lambda^2}, \quad r_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{-c - 4\lambda^2}}, \quad 2r_2r_3 = \lambda.$$

Con estas últimas consideraciones es posible obtener algo más de información acerca de las posibilidades para $g(p)$ así como de la relación entre las diferentes curvaturas principales. Sin embargo, omitimos aquí los detalles del razonamiento, que pueden consultarse en [14], puesto que no estamos en el caso $h(p) = 3$, que es el que realmente nos interesa.

Como síntesis de lo explicado hasta aquí, enunciamos la siguiente proposición para los puntos de tipo III.

**Proposición 3.6.** *Sea $q \in \widetilde{M}$ un punto de tipo III, sea $p = \pi(q) \in M$ y sea $\lambda$ la curvatura principal de $\widetilde{M}$ en $q$ para la cual no coinciden multiplicidad geométrica y algebraica. Entonces $\lambda \in (-\frac{\sqrt{-c}}{2}, \frac{\sqrt{-c}}{2})$ y $h(p) \in \{2, 3\}$. Además, los puntos de tipo III definen un número real $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ de forma que:*

- *$h(p) = 2$ si y solo si $\varphi = \frac{\pi}{2}$.*
- *$h(p) = 3$ si y solo si $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Además, en este caso, las curvaturas principales de $M$ en $p$ son los ceros del polinomio*

$$\begin{aligned} f_\varphi(x) = {} & \frac{-c^2 - 16c\lambda^2 + 16\lambda^4 + (c + 4\lambda^2)^2 \cos(2\varphi)}{32\lambda} + \frac{1}{2}\left(c - 6\lambda^2\right) x \\ & + \left(3\lambda - \frac{c}{4\lambda}\right) x^2 - x^3, \end{aligned}$$

*junto con las curvaturas principales de $\widetilde{M}$ en $q$ cuya multiplicidad geométrica sea mayor o igual que dos. Las raíces del polinomio son siempre distintas de estas posibles dos últimas.*

# Capítulo 4

# Los ejemplos

Tras la descripción hecha en el Capítulo 2 del espacio hiperbólico complejo como el espacio homogéneo $SU(1,n)/S(U(1)U(n))$, introducimos a continuación un modelo más sencillo para $\mathbb{C}H^n$, presentándolo como un grupo de Lie resoluble con métrica invariante a la izquierda. Para poder llegar a tal descripción, comenzamos estudiando la estructura del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{su}(1,n)$ del grupo de isometrías $SU(1,n)$. Todo ello será necesario para poder introducir los ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{C}H^n$ cuyo vector de Hopf tiene exactamente tres proyecciones no triviales sobre los autoespacios del operador de configuración, que es el objetivo del presente capítulo.

En adelante, denotaremos por $K$ el subgrupo $S(U(1)U(n)$, mientras que $G$ hará referencia al grupo $SU(1,n)$. Además, como se hace en [15], adoptaremos la notación

$$\lceil \lambda,\, v,\, X \rceil = \left( \begin{array}{c|c} i\lambda & v^* \\ \hline v & X \end{array} \right),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}^n$ y $X$ es una matriz compleja de orden $n$.

Utilizando el teorema de caracterización del álgebra de Lie de un subgrupo de Lie (véase la Proposición 3.33 de [27]), es posible afirmar que

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n)) = \{\lceil \lambda,\, 0,\, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R},\, X \in \mathfrak{u}(n),\, i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\} \qquad \text{y} \\ \mathfrak{g} &= \mathfrak{su}(1,n) = \{Y \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}) : Y I_{1,n} + I_{1,n} Y^* = 0,\, \operatorname{tr} Y = 0\} \\ &= \{\lceil \lambda,\, v,\, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R},\, v \in \mathbb{C}^n,\, X \in \mathfrak{u}(n),\, i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}. \end{aligned}$$

En este punto construimos la aplicación $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, dada por $\theta(X) = -X^*$, donde $(\cdot)^*$ indica la conjugada de la traspuesta. Tal aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales y puesto que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$\theta[X,Y] = -[X,Y]^* = -[Y^*,X^*] = [-X^*,-Y^*] = [\theta X, \theta Y],$$

es también un automorfismo de álgebras de Lie. Además, $\theta^2 = \mathrm{Id}$, luego $\theta$ es una involución. Recordemos que la forma de Killing B de $\mathfrak{g}$ es una aplicación bilineal y simétrica que viene dada por la expresión $B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$, donde ad denota la aplicación de $\mathfrak{g}$ en $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$. Pero entonces, definiendo $B_\theta(X,Y) = -B(\theta X, Y)$, obtenemos,

$$B_\theta(X,Y) = -B(\theta X, Y) = -B(\theta^2 X, \theta Y) = -B(X, \theta Y) = -B(\theta Y, X) = B_\theta(Y,X),$$

y también

$$B_\theta(X,X) = -B(\theta X, X) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(-X^*)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(X)^*) \geq 0.$$

Entonces $B_\theta$ es un producto interior definido positivo en $\mathfrak{g}$, lo que convierte a $\theta$ en una involución de Cartan [18]. Esto nos permite considerar la descomposición de Cartan asociada a $\theta$, que no es más que la descomposición ortogonal de $\mathfrak{g}$ respecto a $B_\theta$. Así, $\mathfrak{g}$ puede escribirse como la suma directa de $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{k}$, siendo

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \{M \in \mathfrak{su}(1,n) : \theta M = M\} = \{\lceil \lambda,\ 0,\ X \rceil : \lambda \in \mathbb{C},\ X \in \mathfrak{u}(n),\ i\lambda + \mathrm{tr}\, X = 0\} \\ &= \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n)) \qquad \text{y} \\ \mathfrak{p} &= \{M \in \mathfrak{su}(1,n) : \theta M = -M\} = \{\lceil 0,\ v,\ 0 \rceil : v \in \mathbb{C}^n\} \cong \mathbb{C}^n.\end{aligned}$$

En este punto, nos interesa escoger un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{p}$. Ello no es difícil, pues basta tomar un subespacio abeliano 1-dimensional. En efecto, si $\lceil 0, v, 0 \rceil$ y $\lceil 0, w, 0 \rceil$ perteneciesen al mismo subespacio abeliano $\mathfrak{b}$, se tendría que $[\lceil 0, v, 0 \rceil, \lceil 0, w, 0 \rceil] = \lceil \ldots, \ldots, vw^* - wv^* \rceil = 0$, con lo que se deduce que $vw^* - wv^* = 0$. Pero entonces tenemos que $v_i \overline{w}_j = w_i \overline{v}_j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, fijamos un $i$ para el cual $v_i \neq 0$ y hacemos $j = i$, de manera que $\frac{w_i}{v_i} = \overline{\frac{w_i}{v_i}} \in \mathbb{R}$. Así, $w_j = \frac{w_i}{v_i} v_j$ para cualquier subíndice $j \in \{1, \ldots, n\}$, de manera que $\mathfrak{b}$ tiene dimensión real uno. Hecha esta apreciación, escogemos por ejemplo $\mathfrak{a} = \mathbb{R}\lceil 0, e_1, 0 \rceil$, que es isomorfo a $\mathbb{R}$ y definimos la 1-forma $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ como $\alpha\lceil 0, re_1, 0 \rceil = r$, donde $r \in \mathbb{R}$.

Consideramos la familia de operadores $\{\mathrm{ad}(H) \mid H \in \mathfrak{a}\}$ que, por una parte, resulta ser autoadjunta respecto a $B_\theta$, pues

$$\begin{aligned}B_\theta(\mathrm{ad}(H)X, Y) &= -B(\theta\, \mathrm{ad}(H)X, Y) = -B(\mathrm{ad}(H)X, \theta Y) = B(X, \mathrm{ad}(H)\theta Y) \\ &= B(X, [H, \theta Y]) = B(\theta X, [-H, Y]) = -B(\theta X, [H, Y]) \\ &= -B(\theta X, \mathrm{ad}(H)Y) = B_\theta(X, \mathrm{ad}(H)Y),\end{aligned}$$

y además, dado que $\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) = \mathrm{ad}[X,Y] + \mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{ad}(X)$, es claro que conmutan dos a dos. Por ello, tales operadores diagonalizan simultáneamente, lo que permite considerar sus autoespacios, conocidos como *espacios de raíces* [18], definidos para cada $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ como

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,n) \mid \mathrm{ad}(H)X = \lambda(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

En este caso, resolviendo las ecuaciones, obtenemos la descomposición en espacios de raíces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha},$$

que es además una descomposición ortogonal respecto a $B_\theta$. Los elementos $0 \neq \lambda \in \mathfrak{a}^*$ tales que $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ se denominan conjunto de raíces restringidas de $\mathfrak{g}$ y las denotaremos por $\Sigma$. Se verifica además que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ para cualesquiera $\alpha$ y $\beta$. Es conveniente tener en mente que $\mathfrak{g}_\alpha \equiv \mathbb{C}^{n-1}$, hecho que puede consultarse en [15], donde están calculados todos los espacios de raíces.

Se presenta a continuación la descomposición de Iwasawa del grupo de isometrías de $\mathbb{C}H^n$, de gran importancia en lo que sigue, que viene inducida por una descomposición de su álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,n)$. Antes de nada, hay que introducir una noción de positividad en el conjunto $\Sigma$, esto es, entre las raíces $\alpha$ y $-\alpha$, una de ellas debe ser positiva y además la suma de raíces positivas y cada múltiplo positivo de una raíz positiva debe permanecer positivo. En este sentido, en nuestro caso, podemos escoger un orden que convierta a $\alpha$ y $2\alpha$ en raíces positivas. El siguiente paso es definir el álgebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, que resulta ser un álgebra de Lie nilpotente, pues recordemos que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Puede probarse también que es isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n-1$ [6]. Dado que $[\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}, \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$, y $\mathfrak{n}$ es nilpotente, se deduce que $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$ es una subálgebra de Lie resoluble de $\mathfrak{g}$.

Llegados a este punto, podemos presentar la descomposición de Iwasawa del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,n)$,

$$\mathfrak{su}(1,n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Es importante resaltar, en primer lugar, que tal descomposición depende del subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$ que escogimos de partida. Por otra parte, esta descomposición es una suma directa de espacios vectoriales, pero no una suma directa de álgebras de Lie, pues por ejemplo $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \neq 0$.

Ahora, tomamos $A$ y $N$ los subgrupos conexos de $G$ correspondientes a las subálgebras de Lie $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{n}$ respectivamente, y construimos el subgrupo conexo $AN$ de $G$, cuya álgebra de Lie es precisamente $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$, pues la contiene y coinciden las dimensiones. Además, el teorema de descomposición de Iwasawa afirma que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} K \times A \times N & \longrightarrow & G \\ (k, a, n) & \longmapsto & kan, \end{array}$$

es un difeomorfismo. Puede obtenerse como corolario de ello que tanto $A$, $N$ como $AN$ son simplemente conexos. Incluso, teniendo en cuenta que tanto $A$ como $N$ son nilpotentes, es posible probar que las aplicaciones $\operatorname{Exp}|_{\mathfrak{a}} \colon \mathfrak{a} \to A$ y $\operatorname{Exp}|_{\mathfrak{n}} \colon \mathfrak{n} \to N$ son difeomorfismos [18]. En cualquier caso, lo que realmente nos interesa es que con este teorema es fácil ver que $AN$ actúa de modo simple y transitivo sobre $\mathbb{C}H^n$. Ello implica que si consideramos la aplicación diferenciable $\phi\colon G \to \mathbb{C}H^n$, definida por $\phi(g) = g \cdot o$, la restricción al subgrupo $AN$, $\phi_{|AN}\colon AN \to \mathbb{C}H^n$, es un difeomorfismo de variedades. Por tanto, haciendo un *pull-back* de la métrica $g$ de $\mathbb{C}H^n$, se tiene que $(AN, \phi^*_{|AN}g)$ y $(\mathbb{C}H^n, g)$ son variedades de Riemann isométricas. Es más, sea $h^{-1} \in G$ y denotemos por $\phi_{h^{-1}}$ la isometría de $\mathbb{C}H^n$ dada por $\phi_{h^{-1}}(p) = h^{-1} \cdot p$. Teniendo en cuenta que $((\phi_{h^{-1}}) \circ \phi \circ L_h)(h') = (\phi_{h^{-1}})(hh'(o)) = h'(o) = \phi(h')$ para todo $h' \in G$, se deduce que

$$L_h^*\left(\phi^* g\right) = L_h^* \phi^* (\phi_{h^{-1}})^* g = \left((\phi_{h^{-1}}) \circ \phi \circ L_h\right)^* g = \phi^* g, \quad \text{para todo } h \in G.$$

En resumen, lo que hemos hecho ha sido identificar el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$ con el grupo de Lie resoluble con métrica invariante a la izquierda $AN$, grupo que procede de la descomposición de Iwasawa y que depende, en consecuencia, de la elección del subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a}$. A continuación, veremos brevemente la importancia de tal identificación, pues nos permitirá estudiar la geometría de $\mathbb{C}H^n$ en términos del álgebra de Lie $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Para ello, volviendo a la aplicación diferenciable $\phi$, identificando $T_I G$ con $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, si tomamos la curva $\alpha(t) = \operatorname{Exp}_X(t)$ contenida en $K$ para cualquier $X \in K$, donde Exp denota la aplicación exponencial de la teoría de grupos de Lie, se sigue que $\phi_{*I} X = \phi_{*I}\dot{\alpha}(0) = (\phi \circ \alpha)'(0) = 0$. De un modo similar, se prueba que $\phi_{*I} X \neq 0$ para cualquier $X \in \mathfrak{p}$. Razonando por dimensiones se concluye que $\phi_{*I}$ identifica $T_o\mathbb{C}H^n$ con $\mathfrak{p}$. En consecuencia, el *pull-back* de $g_o$, $\phi^* g_o$, induce una métrica en $\mathfrak{p}$. Como se puede ver en [15], haciendo uso de la representación de isotropía se llega a que $\mathbb{C}H^n$ es un espacio simétrico irreducible, probándose luego que $\phi^* g_o$ es un múltiplo real positivo de la forma de Killing restringida a $\mathfrak{p}$, esto es, $B_{\theta|\mathfrak{p}}$. Para simplificar algunos cálculos posteriores, escogemos la constante $c < 0$ para la cual se tiene que

$$\phi^* g_o = -\frac{1}{c(n+1)} B_\theta \qquad \text{en } \mathfrak{p}.$$

Esta fórmula va a permitir calcular en términos matriciales el producto interior de los elementos de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. A partir de ahora, emplearemos la notación

$$\lfloor x + iy,\, v \rfloor = \left[ y,\, (x + iy, v),\, \left( \begin{array}{c|c} -iy & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right], \quad x, y \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

El siguiente paso es construir una estructura compleja sobre el espacio vectorial real $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Para ello, como es natural, haremos uso del isomorfismo $\phi_{*I}$ entre los espacios vectoriales $T_I AN \equiv \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ y $T_o\mathbb{C}H^n$. Esto nos permitirá, expresado de manera informal, copiar la estructura casi compleja $J$ de $\mathbb{C}H^n$ descrita en el Capítulo 2 para inducir una estructura compleja en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, que denotaremos también mediante $J$. Así, dado $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ un campo de vectores invariante por la izquierda, si tomamos la curva $\alpha(t) = \mathrm{Exp}_X(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_{*I}X = \phi_{*I}\dot{\alpha}(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi \circ \mathrm{Exp}_X)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Exp}_X(t) \cdot o \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi\left(\mathrm{Exp}_X(t) \cdot re_1\right) = r\pi_{*re_1}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Exp}_X(t) \cdot e_1\right) \\ &= r\pi_{*re_1}(Xe_1) = r\pi_{*re_1}(iy, 0, 0) + r\pi_{*re_1}(0, x+iy, v) \\ &= r\pi_{*re_1}(0, x+iy, v).\end{aligned}$$

De este modo, al campo de partida $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ le corresponde el campo $r\pi_{*re_1}(Xe_1)$, cuya imagen mediante la estructura compleja de $\mathbb{C}H^n$ es $r\pi_{*re_1}(0, -y+ix, iv)$. Pero entonces, ahora se trata de encontrar un campo $Y$ invariante por la izquierda (una matriz) tal que $\phi_{*I}Y = r\pi_{*re_1}(Ye_1) = r\pi_{*re_1}(0, -y+ix, iv)$. Por tanto $Y = \lfloor -y+ix,\, iv \rfloor$ y en consecuencia $J\lfloor x+iy,\, v\rfloor = \lfloor i(x+iy,\, v)\rfloor$. Así pues, podemos escribir ya, aunque se omiten aquí los cálculos, la métrica, el producto corchete y la estructura compleja de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ inducidos mediante la isometría existente entre $\mathbb{C}H^n$ y $AN$,

$$\begin{aligned}J\lfloor x+iy,\, v\rfloor &= \lfloor i(x+iy,\, v)\rfloor, \\ \langle \lfloor x+iy,\, v\rfloor, \lfloor a+ib,\, w\rfloor\rangle &= -\frac{4}{c}\langle (x+iy, v), (a+ib, w)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}, \\ [\lfloor x+iy,\, v\rfloor, \lfloor a+ib,\, w\rfloor] &= \lfloor 2i\langle i(x+iy, v), (a+ib, w)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}},\, -av+xw\rfloor,\end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^{2n}$. Ahora, ya es posible calcular la conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ para los campos de vectores de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, empleando la fórmula de Koszul. Nótese que los términos de la forma $X\langle Y, Z\rangle$ involucrados en dicha fórmula, con $X, Y, Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, son nulos, pues utilizando el carácter invariante por la izquierda de la métrica,

$$\langle Y_g, Z_g\rangle = \langle L_{g*e}Y_e, L_{g*e}Z_e\rangle = \langle Y_e, Z_e\rangle,$$

lo cual prueba que la función $\langle Y, Z\rangle$ es constante. Realizando los cálculos,

$$\bar{\nabla}_{\lfloor x+iy,\, v\rfloor} \lfloor z+it,\, w\rfloor = \lfloor 2ty + \langle v,\, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}} + i(-2yz + \langle iv, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}), -zv - yiw - tiv\rfloor.$$

Ahora, como último paso antes de la presentación de los ejemplos, se definen los campos unitarios de vectores:

$$\begin{aligned}B &= \left[0,\, \frac{\sqrt{-c}}{2}e_1,\, 0\right] = \left\lfloor \frac{\sqrt{-c}}{2},\, 0\right\rfloor, \\ Z = JB &= \left\lfloor \frac{i\sqrt{-c}}{2},\, 0\right\rfloor.\end{aligned}$$

Puede comprobarse en [15] que $\mathfrak{a} = \mathbb{R}B$ y $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathbb{R}Z$. Si $U, V \in \mathfrak{g}_\alpha$, realizando los cálculos pertinentes se obtiene que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{aB+U+xZ}(bB+V+yZ) = \sqrt{-c}\Bigg\{&\left(xy + \frac{1}{2}\langle U, V\rangle\right)B - \frac{1}{2}\left(bU + yJU + xJV\right) \\ &+ \left(-bx + \frac{1}{2}\langle JU, V\rangle\right)Z\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

En las siguientes líneas presentaremos los ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 3$, en las cuales el vector de Hopf se proyecta de forma no trivial sobre exactamente tres autoespacios del operador de configuración. Estos ejemplos serán, como veremos, tubos alrededor de subvariedades homogéneas, si bien, general, no podremos afirmar su carácter homogéneo. En un primer momento seguiremos la línea expositiva de [12], aunque se omiten algunos detalles que pueden consultarse allí. Sin embargo, probaremos pormenorizadamente que los ejemplos construidos verifican $h = 3$.

Para comenzar, tomamos $\mathfrak{w}$ un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}_\alpha$, donde este último, recordemos, procede de la descomposición de $\mathfrak{g}$ en espacios de raíces. Puede probarse que $\mathfrak{s}_\mathfrak{w} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ es una subálgebra de Lie resoluble de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Sea $S_\mathfrak{w}$ el subgrupo de Lie conexo de $AN$ correspondiente al álgebra de Lie $\mathfrak{s}_\mathfrak{w}$. Por tanto, por lo visto en la sección dedicada a los espacios homogéneos en el capítulo de Preliminares, $W_\mathfrak{w} = S_\mathfrak{w} \cdot o$ es una subvariedad homogénea de $\mathbb{C}H^n$. Sea $\mathfrak{w}^\perp$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{w}$ en $\mathfrak{g}_\alpha$, cuya dimensión denotaremos por $k$. Para cada elemento $\xi \in \mathfrak{w}^\perp$, podemos descomponer $J\xi$ en su proyección ortogonal sobre $\mathfrak{w}$, $P\xi$, y su proyección ortogonal sobre $\mathfrak{w}^\perp$, $F\xi$. Dado que estamos en un espacio vectorial con un producto interior, es posible hablar del concepto de ángulo. Se define el ángulo de Kähler $\varphi_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, como el ángulo formado entre $J\xi$ y $F\xi$, o, lo que es lo mismo, el ángulo entre $J\xi$ y $\mathfrak{w}^\perp$. Así, $\langle F\xi, F\xi\rangle = (\cos^2\varphi_\xi)\langle \xi, \xi\rangle$. Como consecuencia, $\langle P\xi, P\xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle - (\cos^2\varphi_\xi)\langle \xi, \xi\rangle = (\sin^2\varphi_\xi)\langle \xi, \xi\rangle$. En adelante, si $\xi$ es un vector unitario de $\mathfrak{w}^\perp$, escribiremos, cuando tenga sentido, $\bar{P}\xi$ y $\bar{F}\xi$ para referirnos a los vectores unitarios en las direcciones de $P\xi$ y $F\xi$ respectivamente. Esto es, cuando $\varphi_\xi \neq 0, \frac{\pi}{2}$, tomamos $\bar{P}\xi = (\sin(\varphi_\xi))^{-1}P\xi$ y $\bar{F}\xi = (\cos(\varphi_\xi))^{-1}F\xi$.

Por otra parte, puesto que tanto $\mathfrak{a}$ como $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ son espacios vectoriales 1-dimensionales, ninguno de ellos puede dotarse de una estructura de espacio vectorial complejo. Sin embargo, como ya hemos mencionado, $\mathfrak{g}_\alpha$ es isomorfo, como espacio vectorial, a $\mathbb{C}^{n-1}$. Por tanto, el subespacio complejo maximal $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{s}_\mathfrak{w}$ será la suma directa de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ y el espacio vectorial complejo generado por el complemento ortogonal de $\mathfrak{w}^\perp$, o, equivalentemente, $\mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp) \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$. Pero recordemos, como se hizo en el inicio del segundo capítulo, que para construir un espacio vectorial complejo a partir uno real y una estructura compleja se hacía $\mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp = \mathfrak{w}^\perp + J\mathfrak{w}^\perp = \mathfrak{w}^\perp \oplus P\mathfrak{w}^\perp$. Es claro, por otra parte, que $\mathfrak{g}_\alpha \ominus (\mathfrak{w}^\perp \oplus P\mathfrak{w}^\perp) = \mathfrak{w} \ominus P\mathfrak{w}^\perp$. Como consecuencia, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{w} \ominus P\mathfrak{w}^\perp) \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ y $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{c} \oplus P\mathfrak{w}^\perp \oplus \mathfrak{w}^\perp$. Ahora bien, si denotamos por $\mathfrak{C}$, $P\mathfrak{W}^\perp$, y $\mathfrak{W}^\perp$ las distribuciones invariantes a la izquierda de $AN$, obtenemos que $TW_\mathfrak{w} = \mathfrak{C} \oplus P\mathfrak{W}^\perp$ y $\nu W_\mathfrak{w} = \mathfrak{W}^\perp$.

El siguiente paso es construir $W^r_\mathfrak{w} = \{\exp(r\xi) \mid \xi \in \nu W_\mathfrak{w}, ||\xi|| = 1\}$ y comprobar que se trata efectivamente de un tubo. Antes de ello, sin embargo, analizaremos el operador de configuración $S$ de $W_\mathfrak{w}$ respecto a vector unitario $\xi \in \nu W_\mathfrak{w} = \mathfrak{W}^\perp$. A partir de la expresión (4.1) se deduce que:

- (1) $S_\xi(Z + \bar{P}\xi) = \frac{\sqrt{-c}}{2}\sin(\varphi_\xi)(Z + \bar{P}\xi)$.
- (2) $S_\xi(Z - \bar{P}\xi) = -\frac{\sqrt{-c}}{2}\sin(\varphi_\xi)(Z - \bar{P}\xi)$.
- (3) $S_\xi U = 0$, para todo $U \in (\mathfrak{c} \ominus \mathfrak{g}_{2\alpha}) \oplus (P\mathfrak{w}^\perp \ominus \mathbb{R}P\xi) = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{w} \ominus \mathbb{R}P\xi)$.

Por tanto, notando que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{w} \ominus \mathbb{R}P\xi)) = 2n - k - 2$ y que $W_{\mathfrak{w}}$ es una subvariedad homogénea de dimensión $2n-k$, es claro que el operador de configuración, cuyos autovalores son $\frac{\sqrt{-c}}{2}\sin(\varphi_\xi)$, $-\frac{\sqrt{-c}}{2}\sin(\varphi_\xi)$ y 0 queda completamente determinado.

A continuación veremos que, tal como anticipábamos, para cada $r > 0$, el conjunto $W^r_{\mathfrak{w}}$ es un tubo. Como viene siendo habitual, utilizaremos para ello la teoría de campos de Jacobi. Construimos para empezar la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi^r\colon \nu^1 W_{\mathfrak{w}} & \longrightarrow & \mathbb{C}H^n \\ \xi_q & \mapsto & \Phi^r(\xi_q) = \exp_q(r\xi_q), \end{array}$$

cuya imagen es precisamente $W^r_{\mathfrak{w}}$, donde $\nu^1 W_{\mathfrak{w}} = \{\xi \in \nu W_{\mathfrak{w}} \mid ||\xi|| = 1\}$ es el fibrado normal unitario. Para evitar confusiones con la aplicación de Hopf, denotaremos por $(\nu^1 W_{\mathfrak{w}}, \pi_1, W_{\mathfrak{w}})$ el fibrado vectorial normal unitario. Es conocido, observando las trivializaciones [16], que la dimensión de un fibrado vectorial es la suma de la dimensión del espacio base más la dimensión de la fibra. Por ello, aquí la dimensión de $\nu^1 W_{\mathfrak{w}}$ como variedad diferenciable es exactamente la dimensión de $\nu W_{\mathfrak{w}}$ menos uno, esto es, $2n-1$. En consecuencia, si conseguimos argumentar que $\Phi^r$ tiene rango constante máximo, habremos probado que $W^r_{\mathfrak{w}}$ es una subvariedad de codimensión uno. Fijemos entonces $\xi_q \in \nu^1 W_{\mathfrak{w}}$ y veamos que la aplicación

$$\Phi^r_{*\xi_q}\colon T_{\xi_q}(\nu^1 W_{\mathfrak{w}}) \longrightarrow T_{\Phi^r(\xi_q)}\mathbb{C}H^n$$

tiene efectivamente rango constante $2n-1$. Sea $\eta_{\xi_q} \in T_{\xi_q}(\nu^1 W_{\mathfrak{w}})$ y sea $\alpha\colon I \to \nu^1 W_{\mathfrak{w}}$ la curva diferenciable tal que $\alpha(0) = \xi_q$ y $\dot\alpha(0) = \eta_{\xi_q}$. Definimos la variación por geodésicas $\Gamma(s,t) = \exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)}(t\cdot\alpha(s))$. Entonces,

$$\Phi^r_{*\xi_q}\eta_{\xi_q} = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}(\Phi^r\circ\alpha)(s) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)}(r\xi_q),$$

que es precisamente el campo de la variación $\Gamma$ evaluado en $t = r$. Es claro además que cualquier vector de $T_{\xi_q}(\nu^1 W_{\mathfrak{w}})$ es combinación lineal de vectores tangentes a la fibra y vectores que no son tangentes a la fibra. Por tanto, estudiaremos únicamente dos casos. En primer lugar tomaremos como hipótesis que $\alpha$ no es nunca tangente a la fibra y luego analizaremos el caso en el que sí lo es.

Supongamos pues que $\alpha$ no es tangente a la fibra. Entonces, podemos pensarla como un campo de vectores normal a lo largo de una curva $\beta$ contenida $W_{\mathfrak{w}}$ al que llamaremos $\eta_{\beta(s)}$. Como consecuencia, las condiciones iniciales del campo $\zeta$ de la variación $\Gamma$ son:

$$\zeta(0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)}(0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}(\pi_1\circ\alpha)(s) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\beta(0) = \dot\beta(0),$$

$$\begin{aligned} \zeta'(0) &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)}(t\cdot\alpha(s)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)*0}\alpha(s) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\xi_{\beta(s)} = -S_{\xi_q}\dot\beta(0) + \nabla^\perp_{\xi_q}\dot\beta(0). \end{aligned}$$

En lo anterior, es importante observar que dado que $\beta$ es una curva cualquiera en $W_{\mathfrak{w}}$, para probar que $\Phi^r_{*\xi_q}\dot{\alpha}(0)$ es no nulo basta demostrar que $\zeta_X(r) \neq 0$, donde $\zeta_X$ denota el campo de vectores de Jacobi a lo largo de la geodésica $\gamma_\xi = \exp_q(t\xi_q)$ determinado por las condiciones iniciales $\zeta_X(0) = X$ y $\zeta'(0) = -S_{\xi_q}X$, para $X \in T_q\mathbb{C}H^n$. Pero estos campos son de la forma

$$\zeta_X(t) = f_\lambda(t)B_X(t) + \langle X, J\xi\rangle g_\lambda(t) J\dot{\gamma}_\xi(t),$$

donde

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) &= \cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - 2\lambda\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}, \qquad \text{y} \\ g_\lambda(t) &= \left(\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - 1\right)\left(1 + 2\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - 2\lambda\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right). \end{aligned}$$

En este punto, obsérvese que $\zeta_{X+Y}(t) = \zeta_X(t) + \zeta_Y(t)$, lo cual puede razonarse notando que se trata de campos de Jacobi con las mismas condiciones iniciales. Además, por la propia definición de transporte paralelo, se tiene que $J\dot{\gamma}_\xi(t) = JB_{\xi_q}(t) = \cos(\varphi_\xi)B_{\bar{F}\xi} + \sin(\varphi_\xi)B_{\bar{P}\xi}$. Con estas consideraciones se obtiene que

$$\begin{aligned} \zeta_X(t) =&\ \cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,B_X(t), \qquad \text{si } X \in TW_{\mathfrak{w}} \ominus (\mathbb{R}Z \oplus \mathbb{R}\bar{P}\xi), \\ \zeta_Z(t) =&\ \cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,B_Z(t) - \sqrt{-c}\sin\varphi_\xi\left(\cos^2\varphi_\xi + \sin^2\varphi_\xi\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right)\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,\mathcal{B}_{\bar{P}\xi}(t) \\ &- \sqrt{-c}\cos\varphi_\xi\sin^2\varphi_\xi\left(\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - 1\right)\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,\mathcal{B}_{\bar{F}\xi}(t), \\ \zeta_{\bar{P}\xi}(t) =&\ -\sqrt{-c}\sin\varphi_\xi\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,\mathcal{B}_Z(t) + \left(\cos^2\varphi_\xi\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} + \sin^2\varphi_\xi\cosh t\right)\mathcal{B}_{\bar{P}\xi}(t) \\ &- \sin\varphi_\xi\cos\varphi_\xi\left(\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - \cosh t\sqrt{-c}\right)\mathcal{B}_{\bar{F}\xi}(t). \end{aligned}$$

Es fácil ver que todos estos campos son no nulos al evaluarlos en el instante $t = r$, lo cual prueba que $\Phi^r$ tiene al menos rango $2n - k$.

Vamos ahora con el caso en el que $\alpha$ es una curva diferenciable contenida en $\nu^1_q W_{\mathfrak{w}}$. Dada la identificación entre un espacio vectorial y su espacio tangente cuando pensamos éste como una variedad diferenciable, podemos identificar cada elemento de $T_{\xi_q}\nu^1_q W_{\mathfrak{w}}$ con un elemento de $\nu_q W_{\mathfrak{w}}$. Calculando entonces las condiciones iniciales del campo $\zeta$ de la variación $\Gamma(s,t) = \exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)}(t\cdot\alpha(s))$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\pi_1\circ\alpha)(s) = 0, \\ \zeta'(0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp_{(\pi_1\circ\alpha)(s)*0}\alpha(s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\alpha(s) = \eta_{\xi_q}. \end{aligned}$$

Entonces, probar que $\Phi^r_{*\xi_q}\dot{\alpha}(0)$ es no nulo equivale a ver que el campo de Jacobi $\zeta_\eta$ a lo largo de $\gamma_\xi$ determinado por las condiciones iniciales $\zeta_\eta(0)=0$ y $\zeta'_\eta(0)=\eta$ es distinto de cero en el instante $t=r$ para cualquier $\eta \in \nu_p W_{\mathfrak{w}} \ominus \mathbb{R}\xi$. Pero estos campos vienen dados por la expresión

$$\zeta_\eta(t) = p(t)B_\eta(t) + \langle \eta, J\xi\rangle q(t) J\dot{\gamma}_\xi(t),$$

donde

$$p(t) = 2\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}, \qquad q(t) = 2\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\left(\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - 1\right).$$

Con las mismas consideraciones que para el caso anteriores, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\bar{F}\xi}(t) &= 2\sin\varphi_\xi\cos\varphi_\xi\left(\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2} - 1\right)\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,\mathcal{B}_{\bar{P}\xi}(t) \\
&\quad + 2\left(1+\cos^2\varphi_\xi\left(\cosh\frac{t\sqrt{-c}}{2}-1\right)\right)\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,\mathcal{B}_{\bar{F}\xi}(t), \\
\zeta_X(t) &= 2\sinh\frac{t\sqrt{-c}}{2}\,\mathcal{B}_X(t), \qquad \text{si } X \in \nu W_{\mathfrak{w}} \ominus (\mathbb{R}\xi \oplus \mathbb{R}\bar{F}\xi),
\end{aligned}$$

y como antes, se trata de campos no nulos en el instante $t=r$. Esto prueba que, para cada $r>0$, hemos construido una hipersuperficie $W^r_{\mathfrak{w}}$.

Una vez probado lo anterior, vamos a tratar de obtener más información acerca del operador de configuración de $W^r_{\mathfrak{w}}$ y del carácter isoparamétrico de esta última. Definimos con este objetivo el endomorfismo $D(r)$ del espacio vectorial tangente $T_{\gamma_\xi(r)}W^r_{\mathfrak{w}}$ dado por $D(r)B_X(r) = \zeta_X(r)$, donde $X \in (T_p\mathbb{C}H^n \ominus \mathbb{R}\xi)$. Es conocido, como vimos en el capítulo de preliminares, que $S^r = -D'(r)\circ D(r)^{-1}$. Ello nos permite calcular la curvatura media de $W^r_{\mathfrak{w}}$,

$$H^r(\gamma_\xi(r)) = \operatorname{tr} S^r(\gamma_\xi(r)) = \frac{\frac{d}{dr}\det(D(r))}{\det(D(r))} = \frac{1}{2\sinh\frac{r\sqrt{-c}}{2}\cosh\frac{r\sqrt{-c}}{2}}\left(k-1+2n\sinh^2\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right).$$

En lo anterior, es claro que no hay dependencia del vector $\xi \in \nu W_{\mathfrak{w}}$ escogido de partida. Ello implica que los tubos $W^r_{\mathfrak{w}}$ alrededor de la subvariedad $W_{\mathfrak{w}}$ constituyen una familia de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{C}H^n$. Puede verse en [3] que estos tubos son homogéneos precisamente cuando el ángulo de Kähler es constante, esto es, cuando $\varphi_\xi$ es independiente del vector $\xi$ que tomemos de partida.

Además, haciendo $\lambda = \frac{\sqrt{-c}}{2}\tanh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right)$, el polinomio caraterístico de $S^r$ es

$$\begin{aligned}
f_\xi(x) = \Bigg(&\frac{-c^2-16c\lambda^2+16\lambda^4+(c+4\lambda^2)^2\cos(2\varphi_\xi)}{32\lambda} + \frac{1}{2}\left(c-6\lambda^2\right)x \\
&+\left(3\lambda - \frac{c}{4\lambda}\right)x^2 - x^3\Bigg)(\lambda - x)^{2n-k-2}\left(\frac{-c}{4\lambda}-x\right)^{k-2}.
\end{aligned}$$

Se observa que este polinomio tiene raíces $\lambda$, $\mu = \frac{-c}{4\lambda}$ y las tres raíces del polinomio (3.8). Es decir, tenemos los mismos autovalores para el operador de configuración de $W^r$ y $W^r_{\mathfrak{w}}$. Además, aquí, la subvariedad $W_{\mathfrak{w}}$ tiene dimensión $2n-k$ y el autovalor $\lambda$ multiplicidad algebraica $2n-k-2$, pero esto es precisamente lo que sucedía en el desarrollo teórico. El tangente de la subvariedad focal $\widetilde{W^r}$ estaba generado precisamente por el autoespacio $T_\lambda$ y dos vectores más que no pertenecían a ningún autoespacio.

Por último, vamos a comprobar que la hipersuperficie isoparamétrica $W^r_{\mathfrak{w}}$ que venimos de construir verifica efectivamente que $h=3$. El primer paso será demostrar que es una hipersuperficie conexa de $\mathbb{C}H^n$, para luego utilizar un teorema presentado en [14] que nos permitirá concluir.

Recordemos que para la construcción de $W_{\mathfrak{w}}$ partíamos de la subálgebra $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}$ de $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$ y tomábamos $S_{\mathfrak{w}}$ el subgrupo conexo de $AN$ correspondiente a tal subálgebra. Luego, definíamos $W_{\mathfrak{w}}$ como la imagen de $S_{\mathfrak{w}}$ mediante la aplicación $\phi\colon SU(1,n)\to\mathbb{C}H^n$, que venía dada por $\phi(g)=g\cdot o$. Esta aplicación es continua por ser diferenciable y $S_{\mathfrak{w}}$ es conexo por definición. Como consecuencia $W_{\mathfrak{w}}=\phi(S_{\mathfrak{w}})$ es un conjunto conexo que, por ser localmente euclídeo, constituye una subvariedad de $\mathbb{C}H^n$ conexa por caminos. Hechas estas apreciaciones, ya estamos en disposición de ver que $W^r_{\mathfrak{w}}$ es conexo por caminos.

Supongamos entonces dos puntos $p,q\in W^r_{\mathfrak{w}}$. Por construcción, existirán vectores $\xi_{p_0}\in\nu_{p_0}W_{\mathfrak{w}}$ y $\eta_{q_0}\in\nu_{q_0}W_{\mathfrak{w}}$ tales que $p=\exp_{p_0}(r\xi_{p_0})$ y $q=\exp_{q_0}(r\eta_{q_0})$. Estos vectores pueden pensarse como elementos de los campos $\xi$ y $\eta$, que si no fuesen globales, los extenderíamos de forma diferenciable a $\mathbb{C}H^n$. Ahora, utilizando el carácter conexo por caminos de $W_{\mathfrak{w}}$, debe existir una curva $\alpha\colon I\to W_{\mathfrak{w}}$, que podemos suponer diferenciable a trozos, verificando que $\alpha(0)=p_0$ y $\alpha(1)=q_0$. Definimos el campo de vectores $X(t)=(1-t)\xi_{\alpha(t)}+t\eta_{\alpha(t)}$ a lo largo de la curva $\alpha$. Entonces $\beta(t)=\exp_{\alpha(t)}(rX(t))$ es una aplicación continua, contenida en $W^r_{\mathfrak{w}}$, que cumple $\beta(0)=p$ y $\beta(1)=q$.

Enunciamos ahora el Teorema 4.11 de [14].

**Teorema 4.1.** *Sea $M$ una hipersuperficie conexa real de $\mathbb{C}H^n$ verificando $h\leq 2$ en cada punto. Entonces $M$ es isoparamétrica si, y solo si, tiene curvaturas principales constantes. En este caso, $h$ es constante y $M$ es una parte abierta de una subvariedad homogénea.*

En nuestro caso, $M^r$ es una subvariedad isoparamétrica conexa, pero sus curvaturas principales dependen, como hemos visto, del ángulo de Kähler $\varphi_\xi$. Por ello, debe suceder, al menos para un punto $p\in W^r_{\mathfrak{w}}$, que $h(p)=3$. Con un argumento presentado al inicio del próximo capítulo se deduce la existencia de un entorno de $p$ en cual el vector de Hopf tiene tres proyecciones no triviales sobre los autoespacios del operador de configuración. Con esto queda justificado que la hipersuperficie $W^r_{\mathfrak{w}}$, tomando un abierto más pequeño dentro de la misma si fuese necesario, es del tipo $h=3$.

# Capítulo 5

# Inicio del problema de clasificación

Sea $M$ una hipersuperficie de $\mathbb{C}H^n$ y sea $p_0 = \pi(q_0)$ un punto de $M$ verificando $h(p_0) = 3$, esto es, verificando que el vector de Hopf, $J\xi$, tiene exactamente tres proyecciones no triviales sobre los autoespacios del operador de configuración de $M$ en el punto $p_0$. En este caso, tenemos que $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$ es una hipersuperficie de $H_1^{2n+1}$ cuyo operador de configuración respecto a alguna base seminula en el punto $q_0$ viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 1 & \lambda & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

De hecho, de no ser así, si $q_0$ no fuese un punto de tipo III en $\widetilde{M}$, entonces, a la luz de los resultados que se enuncian en el Capítulo 3, se tendría $h(p_0) \leq 2$, lo que supone una contradicción con nuestra hipótesis de partida. Por tanto, podemos realizar todo el desarrollo teórico que hicimos para los puntos de tipo III sobre el punto $q_0$. Recordemos entonces que si denotamos por $X_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, los autovectores unitarios asociados a los autoespacios 1-dimensionales sobre los que se proyecta el vector de Hopf, obteníamos las tres funciones diferenciables

$$b_i = \langle J\xi, X_i \rangle \colon M \to \mathbb{R},$$

que resultaban ser no nulas en el punto $p_0$. Por consiguiente, de su carácter continuo se infiere la existencia de un entorno abierto $W$ de $p_0$, de manera que $b_i(p) \neq 0$ para todo $p \in W$. En otras palabras, $W$ es un entorno abierto de $p_0$ donde el vector de Hopf tiene exactamente tres proyecciones no triviales sobre los autoespacios del operador de configuración en cada espacio tangente. El mismo argumento que hicimos para deducir que el punto $q_0$ es de tipo de III sirve ahora para afirmar que $\widetilde{W} := \pi^{-1}(W)$ es un entorno abierto de $q_0$ en $\widetilde{M}$ formado exclusivamente por puntos de tipo III.

Sea ahora $\xi$ un campo de vectores unitario ortogonal a $M$ definido en el entorno abierto $W$ del punto $p_0$, tomando $W$ más pequeño si fuese necesario. En consecuencia, $\xi^L$ es un campo de vectores unitario ortogonal a $\widetilde{M}$ en el entorno abierto $\widetilde{W}$ del punto $q_0$.

En adelante, la notación $\widetilde{\gamma}_q$, con $q \in \widetilde{W}$, se reservará, salvo que se mencione lo contrario, para la geodésica $\widetilde{\gamma}_q \colon I \to H_1^{2n+1}$ determinada por las condiciones iniciales $\widetilde{\gamma}_q(0) = q$ y $\dot{\widetilde{\gamma}}_q(0) = \xi_q^L$. Consecuentemente, $\gamma_p$ será la geodésica en $\mathbb{C}H^n$ con condiciones iniciales $\gamma_p(0) = p$ y $\dot{\gamma}_p(0) = \xi_p$, siendo $p$ un punto de $W$.

Si $X \in T_q\widetilde{W}$, entonces podemos hablar del campo de vectores de Jacobi $\zeta$ a lo largo de la geodésica $\widetilde{\gamma}_q$ caracterizado por las condiciones iniciales $\zeta(0) = X$ y $\zeta'(0) = -\widetilde{S}X$. Además, notando que tanto $\zeta(0)$ como $\zeta'(0)$ son ortogonales a $\dot{\widetilde{\gamma}}_q(0)$, del Lema 10.6 de [20] se deduce que $\zeta(t) \perp \dot{\widetilde{\gamma}}_q(t)$ para cualquier $t \in I$. Por tanto, teniendo en cuenta como era el tensor de curvatura $\widetilde{R}$ de la variedad semi-riemanniana de curvatura constante $H_1^{2n+1}$, la ecuación de Jacobi queda de la forma

$$\zeta'' + \widetilde{R}(\zeta, \dot{\widetilde{\gamma}}_q)\dot{\widetilde{\gamma}}_q = \zeta'' + \frac{c}{4}(\langle \dot{\widetilde{\gamma}}_q, \dot{\widetilde{\gamma}}_q \rangle \zeta - \langle \zeta, \dot{\widetilde{\gamma}}_q \rangle \dot{\widetilde{\gamma}}_q) = \zeta'' + \frac{c}{4}\zeta = 0.$$

En adelante, salvo mención expresa de lo contrario, si $X \in T_q\widetilde{W}$, $\zeta_X$ denotará el campo de Jacobi a lo largo de la curva geodésica $\widetilde{\gamma}_q$ determinado por las condiciones iniciales $\zeta_X(0) = X$ y $\zeta_X'(0) = -\widetilde{S}X$.

Como ya hemos justificado, todos los puntos $q \in \widetilde{W}$ son de tipo III. Por ello, adoptaremos de nuevo el convenio $\{(e_1)_q, \ldots, (e_{2n})_q\}$ para referirnos la base seminula en el punto $q$ respecto a la cual el operador de configuración $\widetilde{S}$ viene dado por la matriz (5.1). Cuando no haya peligro de confusión escribiremos simplemente $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$, teniendo en mente que esta base varía de punto a punto. Sin embargo, dado que $\widetilde{M}$ es una hipersuperficie isoparamétrica, en virtud del Teorema 2.4 de [14] sabemos que las curvaturas principales son constantes y tienen multiplicidades algebraicas constantes. Por ello, establecemos de nuevo la notación

$$T_\lambda = \mathbb{R}\{e_1, e_4, \ldots, e_k\} \text{ y } T_\mu = \mathbb{R}\{e_{k+1}, \ldots, e_{2n}\}.$$

Ahora, tomando un vector $X \in T_q\widetilde{W}$, podemos dar explícitamente la expresión del campo de vectores de Jacobi $\zeta_X$ a lo largo de la curva $\widetilde{\gamma}_q$, en función de como $X$ esté relacionado con los autoespacios de $\widetilde{S}$.

(1) $\zeta_X(t) = \left(\cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - \frac{2\lambda}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right)\right) B_X(t), \quad \text{si } X \in T_\lambda.$

(2) $\zeta_X(t) = \left(\cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - \frac{2\mu}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right)\right) B_X(t), \quad \text{si } X \in T_\mu.$

(3) $\zeta_{e_2}(t) = \left(\cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - \frac{2\lambda}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right)\right) B_{e_2}(t) - \frac{2}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) B_{e_3}(t).$

(4) $\zeta_{e_3}(t) = \left(\cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - \frac{2\lambda}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right)\right) B_{e_3}(t) - \frac{2}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) B_{e_1}(t).$

Como ya hemos probado durante el desarrollo teórico de los puntos de tipo III, y en particular para el caso $h = 3$, $\lambda$ es un autovalor real no nulo perteneciente al intervalo $(-\frac{\sqrt{-c}}{2}, \frac{\sqrt{-c}}{2})$. Por consiguiente, podemos escoger un número real $r > 0$ verificando

$$\lambda = \frac{\sqrt{-c}}{2} \tanh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right).$$

Construimos entonces, para este $r > 0$, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\Phi}^r\colon & \widetilde{M} & \longrightarrow & H_1^{2n+1} \\ & q & \mapsto & \widetilde{\Phi}^r(q) = \exp_q(r\xi_q^L). \end{array}$$

A continuación, probaremos que $\widetilde{\Phi}^r$ parametriza una subvariedad $k$-dimensional de $H_1^{2n+1}$. Para ello, haciendo uso de lo enunciado en el Capítulo 1, bastará comprobar que $\widetilde{\Phi}^r(q)$ es un punto focal de $\widetilde{M}$ a lo largo de la geodésica $\widetilde{\gamma}_q$ de multiplicidad $2n-k$, para cualquier $q$ en el entorno $\widetilde{W}$ de $q_0$. Teniendo en cuenta la igualdad $\widetilde{\Phi}^r_{*q}X = \zeta_X(r)$, obtenemos lo siguiente:

(1) Si $X \in T_\lambda$, entonces $\widetilde{\Phi}^r_{*q}X = 0$ si, y solo si,

$$1 = \cosh^2\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) = 0,$$

lo cual supone una contradicción. Por tanto, todos los autovectores asociados al autovalor $\lambda$ son enviados en vectores no nulos mediante $\widetilde{\Phi}^r_{*q}$.

(2) Si $X \in T_\mu$, recordando la igualdad $c + 4\lambda\mu = 0$, se deduce que $\widetilde{\Phi}^r_{*q}X = 0$.

(3) $\widetilde{\Phi}^r_{*q}e_2$ es siempre no nulo, pues en el primer sumando se puede razonar igual que se hizo en el primer caso.

(4) Con $\widetilde{\Phi}^r_{*q}e_3$ se razona como en el caso anterior.

De este modo, $\widetilde{W}^r = \widetilde{\Phi}^r(\widetilde{W})$ es subvariedad focal de $\widetilde{M}$ en $H_1^{2n+1}$, que además tiene dimensión $k$, de acuerdo con las notaciones que hemos establecido.

El siguiente paso es comprobar que la subvariedad focal $\widetilde{W}^r$ contiene a las fibras, o, equivalentemente, comprobar que el campo de vectores $V$ es tangente a $\widetilde{W}^r$. Para ello, son necesarias algunas consideraciones previas.

En primer lugar, es importante resaltar que dado un punto $q \in \widetilde{W}$, la geodésica $\widetilde{\gamma}_q$ es horizontal, o, dicho de otro modo, es ortogonal a la fibra. En efecto, teniendo en cuenta que $V$ es un campo de Killing, se sigue que

$$\frac{d}{dt}\langle \dot{\widetilde{\gamma}}_q, V\rangle = \langle D_t\dot{\widetilde{\gamma}}_q, V\rangle + \langle \dot{\widetilde{\gamma}}_q, D_tV\rangle = 0,$$

luego $\langle\dot{\widetilde{\gamma}}_q, V\rangle$ es constantemente nulo, puesto que por definición $\dot{\widetilde{\gamma}}_q(0) \perp V_q$.

Esto nos permite enunciar y probar el siguiente lema.

**Lema 5.1.** *Sea $\widetilde{\sigma}\colon I \to H_1^{2n+1}$ una geodésica horizontal. Entonces $\sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma}$ es una geodésica en $\mathbb{C}H^n$.*

*Demostración.* Por hipótesis $\widetilde{\sigma} \perp V$, por tanto, el vector tangente a $\sigma$ en el instante $t \in I$,

$$\dot{\sigma}(t) = (\pi \circ \widetilde{\sigma})'(t) = \pi_{*\widetilde{\sigma}(t)}\dot{\widetilde{\sigma}}(t),$$

es siempre no nulo, de donde se deduce que $\sigma$ es una curva regular. Por consiguiente, podemos pensarla, al menos localmente, como la curva integral de un campo de vectores diferenciable $X$. Pero entonces,

$$\dot{\widetilde{\sigma}}(t) = (\pi_{*\widetilde{\sigma}(t)}\dot{\widetilde{\sigma}}(t))^L = (\dot{\sigma}(t))^L = (X_{\sigma(t)})^L = X^L_{\widetilde{\sigma}(t)},$$

o, expresado en palabras, $\widetilde{\sigma}$ es curva integral, localmente, del campo de vectores $X^L$. Para concluir la demostración, hacemos

$$D_t\dot{\sigma}(t) = \nabla_{X_{\sigma(t)}}X_{\sigma(t)} = \pi_{*\widetilde{\sigma}(t)}(\nabla_{X_{\sigma(t)}}X_{\sigma(t)})^L = \pi_{*\widetilde{\sigma}(t)}(\widetilde{\nabla}_{X^L_{\widetilde{\sigma}(t)}}X^L_{\widetilde{\sigma}(t)}) = \pi_{*\widetilde{\sigma}(t)}(\widetilde{D}_t\dot{\widetilde{\sigma}}(t)) = 0,$$

lo cual prueba que $\sigma$ es efectivamente una curva geodésica en $\mathbb{C}H^n$. $\square$

Este resultado es una particularización de un hecho más general, pues lo anterior es cierto no solo para la proyección $\pi$ que estamos considerando, sino para cualquier sumersión semi-riemanniana.

Como consecuencia y con las notaciones que venimos empleando, es claro que si $p = \pi(q)$, $\pi \circ \widetilde{\gamma}_q$ y $\gamma_p$ son geodésicas con las mismas condiciones iniciales, y dado que ambas tienen velocidad uno, se concluye que $\pi \circ \widetilde{\gamma}_q(t) = \gamma_p(t)$. Por tanto,

$$(\pi \circ \widetilde{\Phi}^r)(q) = \pi(\exp_q(r\xi_q^L)) = \pi \circ \widetilde{\gamma}_q(r) = \gamma_p(r) = \exp_p(r\xi_p) = (\Phi^r \circ \pi)(q), \tag{5.2}$$

donde $\Phi^r$ es la aplicación entre $M$ y $\mathbb{C}H^n$ dada por $\Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p)$.

En este punto, ya estamos en condiciones de probar que $V$ es un vector tangente a la subvariedad $\widetilde{W}^r$. En efecto, para un $q \in \widetilde{W}$ arbitrario,

$$\pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{\Phi}^r_{*q}V_q = (\pi \circ \widetilde{\Phi}^r)_{*q}V_q = (\Phi^r \circ \pi)_{*q}V_q = \Phi^r_{*\pi(q)}\pi_{*q}V_q = 0.$$

Una vez probado que la subvariedad focal $\widetilde{W}^r$ contiene la fibra, trataremos ahora de hallar la expresión de su operador de configuración. Para ello, utilizaremos la expresión obtenida en primer capítulo de esta memoria. Si bien allí se prueba su veracidad únicamente en el seno de hipersuperficies, veremos ahora que sigue siendo válida para subvariedades de codimensión mayor que uno.

En primer lugar, recordemos que el tangente a $\widetilde{W}^r$ en un punto $\widetilde{\gamma}_q(r)$ es, en cierto sentido, el transporte paralelo de $T_\lambda \oplus \mathbb{R}\{e_2, e_3\}$. Ahora, podemos definir el endomorfismo

$$\begin{array}{rcl} D(r)\colon\ T_{\widetilde{\gamma}_q(r)}\widetilde{W}^r & \longrightarrow & T_{\widetilde{\gamma}_q(r)}\widetilde{W}^r \\ B_X(r) & \mapsto & D(r)B_X(r) = \zeta_X(r), \end{array}$$

con $X \in T_\lambda \oplus \mathbb{R}\{e_2, e_3\}$, que resulta ser no singular, pues viene respresentado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha(r) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) & & & \\ 0 & \alpha(r) & 0 & & & \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{-c}}\sinh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) & \alpha(r) & & & \\ & & & \alpha(r) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha(r) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(r) = \cosh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{-c}}\lambda\sinh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right)$ y cuyo determinante es $\alpha(r)^k \neq 0$. En este momento, mediante un proceso similar al del primer capítulo, se deduce

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^r_{\dot{\widetilde{\gamma}}_q(r)} D(r)B_X(r) &= \widetilde{S}^r_{\dot{\widetilde{\gamma}}_q(r)}\zeta_X(r) = -(\zeta'_X(r))^\top = -((D(r)B_X(r))')^\top \\ &= -(D'(r)B_X(r))^\top = -D'(r)B_X(r), \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\widetilde{S}^r_{\dot{\widetilde{\gamma}}_q(r)} = -D'(r) \circ D(r)^{-1}.$$

Teniendo en cuenta que $\widetilde{W}$ es una subvariedad de $H_1^{2n+1}$ que contiene a la fibra, junto con que $\pi$ es una sumersión, podemos afirmar que $W^r = \pi(\widetilde{W}^r)$ es una subvariedad $(k-1)$-dimensional de $\mathbb{C}H^n$, que además, en virtud de la expresión (5.2), resulta ser subvariedad focal de $M$ en $\mathbb{C}H^n$. Ahora, es posible pensar en la diferencial de $\pi_{|\widetilde{W}^r}$ del modo que sigue:

$$\pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}\colon\ V_{\widetilde{\Phi}^r(q)} \oplus (T_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \ominus V_{\widetilde{\Phi}^r(q)}) \oplus \nu_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \ \longrightarrow\ T_{\Phi^r(p)}W^r \oplus \nu_{\Phi^r(p)}W^r\ ,$$

donde, en virtud del isomorfismo

$$(T_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \ominus V_{\widetilde{\Phi}^r(q)}) \oplus \nu_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \cong T_{\Phi^r(p)}W^r \oplus \nu_{\Phi^r(p)}W^r,$$

y teniendo en cuenta que $\pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}T_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \subset T_{\Phi^r(p)}W^r$, entonces, razonando con la dimensión de los espacios vectoriales involucrados, se prueban los isomorfismos

$$(T_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \ominus V_{\widetilde{\Phi}^r(q)}) \cong T_{\Phi^r(p)}W^r \quad \text{y} \quad \nu_{\widetilde{\Phi}^r(q)}\widetilde{W}^r \cong \nu_{\Phi^r(p)}W^r.$$

Como suele ser habitual, denotaremos por $(\cdot)^\top$ y $(\cdot)^\perp$ las proyecciones sobre el tangente y el normal, tanto para la subvariedad $W^r$ como para $\widetilde{W}^r$. Así, para un vector $X \in\ T_{\Phi^r(p)}\mathbb{C}H^n$,

$$X^\top + X^\perp = X = \pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}X^L = \pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}(X^L)^\top + \pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}(X^L)^\perp,$$

por tanto, $X^\perp = \pi_{*\widetilde{\Phi}^r(q)}(X^L)^\perp$, que, junto con la propiedad $(X^L)^\perp \perp V$, nos permite afirmar que

$$(X^\perp)^L = (X^L)^\perp.$$

Con la igualdad anterior veremos que la expresión (3.3), que había sido probada únicamente para el caso de hipersuperficies, sigue siendo válida en subvariedades de codimensión mayor que uno.

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^r_{\xi^L} X^L &= -\widetilde{\nabla}_{X^L}\xi^L + (\widetilde{\nabla}_{X^L}\xi^L)^\perp = -((\nabla_X \xi)^L - \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle J\xi^L, X^L\rangle V) + (\widetilde{\nabla}_{X^L}\xi^L)^\perp \\
&= -((-S^r_\xi X + (\nabla_X\xi)^\perp)^L - \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle J\xi^L, X^L\rangle V) + (\widetilde{\nabla}_{X^L}\xi^L)^\perp \\
&= (S^r_\xi X)^L - ((\nabla_X\xi)^\perp)^L + \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle J\xi^L, X^L\rangle V + ((\nabla_X\xi)^L)^\perp + \frac{1}{2}([X^L, \xi^L]_{\mathbb{R}V})^\perp \\
&= (S^r_\xi X)^L + \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle J\xi^L, X^L\rangle V
\end{aligned}$$

Realizando los cálculos, $-D'(r) \circ D(r)^{-1}$ resulta tener una forma canónica de Jordan dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

luego existe una base seminula respecto a la cual el operador de configuración de $\widetilde{W}^r$ en el punto $q_r = \widetilde{\Phi}^r(q)$ asociado al vector normal $\dot{\widetilde{\gamma}}_q(r)$, viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

siendo en este caso preciso especificar, al contrario de lo que sucedía en hipersuperficies, dicho vector normal, pues $\nu_{q_r}\widetilde{W}^r$ tiene dimensión $2n-k+1$ como espacio vectorial real. En este punto, es preciso señalar que lo que hemos hecho hasta el momento ha sido demostrar que el operador de configuración de $\widetilde{W}^r$ en el punto $q_r$ asociado al vector normal $\dot{\widetilde{\gamma}}_q(r)$ viene expresado por la matriz (5.3) para la base seminula adecuada. Sin embargo, ¿es posible afirmar siempre la existencia de una base seminula respecto a la cual el operador de configuración asociado a cualquier vector normal en el punto $q_r$ viene dado por (5.3)? Veamos que la respuesta es sí.

Teniendo en cuenta que $\widetilde{\Phi}^r$ es una aplicación de rango constante $k$, una adaptación del Teorema del rango a conjuntos de nivel (Teorema 8.8 de [21]) nos permite afirmar que $N = (\widetilde{\Phi}^r)^{-1}(q_r)$ es una subvariedad de $\widetilde{W}$ de dimensión $2n-k$. Sea $p \in N$, sea $X \in T_pN$ y sea $\alpha\colon I \to N$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$. Entonces, el hecho de que $\widetilde{\Phi}^r_{*p}X = \widetilde{\Phi}^r_{*p}\alpha'(0) = (\widetilde{\Phi}^r \circ \alpha)'(0) = 0$ prueba que $T_pN \subset \operatorname{Ker} \widetilde{\Phi}^r_{*p}$. Pero estos últimos son ambos espacios vectoriales con la misma dimensión, luego el anterior contenido es en realidad una igualdad.

Por consiguiente, con la notación que venimos empleando, el espacio tangente a $N$ en $p$ está formado por los campos de Jacobi $\zeta_X$ a lo largo de la geodésica $\widetilde{\gamma}_p$ evaluados en el instante inicial, donde $X$ es un autovector asociado al autovalor $\mu$, es decir, $T_pN = T_\mu(p)$. Construimos ahora la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \eta\colon & N & \longrightarrow & \nu^1_{q_r}\widetilde{W}^r \\ & p & \mapsto & \eta(p) = \dot{\widetilde{\gamma}}_p(r). \end{array}$$

Es fácil comprobar, con las expresiones explícitas que hemos obtenido para los campos de vectores de Jacobi, que $\eta_{*p}X = \zeta'_X(r) \neq 0$. Por tanto, $\eta$ es una inmersión y dado que las dimensiones de $N$ y $\nu^1_{q_r}\widetilde{W}^r$ coinciden, es también una sumersión. En consecuencia, $\eta$ es un difeomorfismo local y $\eta(N)$ contiene a un abierto de $\nu^1_{q_r}\widetilde{W}^r$, lo cual permite extraer una base de este último dentro del conjunto $\{\dot{\widetilde{\gamma}}_p(r) \mid p \in N\}$.

De este modo, cualquier $\xi \in \nu_{q_r}\widetilde{W}^r$ procede de un normal de esta manera y se obtiene que $\widetilde{S}^r_\xi$ es de la forma (5.3), como queríamos. Con todo, nos hallamos en una situación similar a la vivida cuando fueron estudiados los puntos de tipo III. En aquel caso, como sucede ahora, conocíamos la expresión del operador de configuración en una subvariedad de $H^{2n+1}_1$ levantada de una subvariedad de $\mathbb{C}H^n$, con la salvedad de que antes se trataba de hipersuperficies, mientras que ahora son subvariedades de codimensión mayor que uno. Así, cómo se hizo entonces, trataremos ahora de comprender como es el operador de configuración en $W^r$.

Escogemos un punto cualquiera $q_r$ de la subvaridad focal $\widetilde{W}^r$ y un vector unitario $\xi^L$ ortogonal en $q_r$ a la misma. Por lo anterior, existe una base seminula $\{e_1, \ldots, e_k\}$ respecto a la cual el operador de configuración $\widetilde{S}^r_{\xi^L}$ tiene la forma (5.3). Por ello, $T_0 = \mathbb{R}\{e_1, e_4, \ldots, e_k\}$, $\widetilde{S}^r_{\xi^L}e_2 = e_3$ y $\widetilde{S}^r_{\xi^L}e_3 = e_1$. También hemos demostrado que $\widetilde{W}^r$ contiene a la fibra, por tanto $V$ se expresa de la forma $V = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 + u$, para ciertos $r_i \in \mathbb{R}$, con $i \in \{1,2,3\}$ y para algún $u \in T_0$, verificando además que $\langle u, e_2\rangle = 0$, o, lo que es lo mismo, $u$ no tiene componente en $e_1$. Ahora bien, $-1 = \langle V, V\rangle = 2r_1r_2 + r_3^2 + \langle u, u\rangle$, de donde es posible deducir que tanto $r_1$ como $r_2$ son no nulos. Incluso, modificando si fuese preciso la base seminula del mismo modo que se hizo en los puntos de tipo III, podemos asumir en adelante que $r_2 > 0$.

Por otra parte, la expresión (3.4) se ve ligeramente modificada al no hallarnos en el seno de una hipersuperficie. En efecto,

$$\widetilde{S}^r_{\xi^L}V = -\widetilde{\nabla}_V\xi^L + (\widetilde{\nabla}_V\xi^L)^\perp = -(\widetilde{\nabla}_V\xi^L)^\top = -\frac{\sqrt{-c}}{2}(J\xi^L)^\top.$$

Por ello, teniendo en cuenta que $\xi^L \perp V$, y por tanto $J\xi^L = (J\xi^L)^\top + (J\xi^L)^\perp \perp V$, se deduce que en el caso de subvariedades de codimensión mayor que uno también se cumple $\widetilde{S}^r_{\xi^L} V \perp V$. Utilizando esta relación se obtiene

$$0 = \langle \widetilde{S}^r_{\xi^L} V, V \rangle = 2 r_2 r_3,$$

lo que demuestra que $r_3 = 0$, de modo que pueden simplificarse las anteriores expresiones para $V$ y $\widetilde{S}^r_{\xi^L} V$. Además, $J\xi^L = (J\xi^L)^\top + (J\xi^L)^\perp = \frac{-2}{\sqrt{-c}} \widetilde{S}^r_{\xi^L} V + (J\xi^L)^\perp$, de manera que podemos escribir

$$J\xi^L = \frac{-2}{\sqrt{-c}} \widetilde{S}^r_{\xi^L} V + t F\xi^L,$$

para un cierto $F\xi^L$ unitario en la dirección de $(J\xi^L)^\perp$, de manera que, sustituyéndolo por $-F\xi^L$ si fuese preciso, podemos asumir en lo sucesivo que $t \geq 0$. Por consiguiente, $1 = \langle J\xi^L, J\xi^L \rangle = -\frac{4}{c} r_2^2 + t^2$. Así, existe un número real $\varphi_\xi \in (0, \frac{\pi}{2}]$, que dependerá, en general, del vector $\xi$ escogido al principio, verificando

$$r_2 = \frac{\sqrt{-c}}{2} \sin(\varphi_\xi) \quad , \quad t = \cos(\varphi_\xi).$$

En este momento, de un modo análogo a lo hecho con los puntos de tipo III, podemos elegir $k-3$ vectores linealmente independientes y ortogonales simultáneamente a $V$ y a $J\xi^L$. En efecto, si $u \neq 0$, escogemos una base de $\mathbb{R}\{e_4, \ldots, e_k\} \ominus \mathbb{R}u$ y añadimos el vector $\langle u, u \rangle e_1 - r_2 u$, mientras que basta con tomar $\{e_4, \ldots, e_k\}$ si $u = 0$. De nuevo, utilizando la expresión (3.3), vemos que estos $k-3$ vectores se proyectan en $k-3$ autovectores de $W^r$ en $\pi(q_r)$ correspondientes al autovalor cero. Quedan entonces por determinar, a lo sumo, dos autoespacios más, pues $W^r$ tiene dimensión $k-1$.

Definimos los vectores ortogonales a $V$, $P\xi^L = (J\xi)^\top = -\sin(\varphi_\xi) e_3$ y $Z^L = -\frac{1}{r_2} e_1 - V$. Es claro que son dos vectores linealmente independientes, pues $\langle P\xi^L, Z^L \rangle = 0$, y que ninguno de ellos puede formar parte de los $k-3$ anteriores, pues no son autovectores asociados a cero. Además, por ser ortogonales a la fibra, sus proyecciones también generan un subespacio 2-dimensional de $T_{\pi(q_r)} W^r$. Utilizando de nuevo la expresión (3.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} S^r_\xi Z &= \pi_{*q_r} \widetilde{S}^r_{\xi^L} Z^L - \frac{\sqrt{-c}}{2} \langle J\xi^L, Z^L \rangle \pi_{*q_r} V = \pi_{*q_r} \widetilde{S}^r_{\xi^L} - \frac{1}{r_2} e_1 - V = -\frac{\sqrt{-c}}{2} \sin(\varphi_\xi) \pi_{*q_r} e_3. \\ S^r_\xi P\xi &= \pi_{*q_r} \widetilde{S}^r_{\xi^L} P\xi^L - \frac{\sqrt{-c}}{2} \langle J\xi^L, P\xi^L \rangle \pi_{*q_r} V = -\sin(\varphi_\xi) \pi_{*q_r} e_1 - \frac{\sqrt{-c}}{2} \sin^2(\varphi_\xi) \pi_{*q_r} V \\ &= \frac{\sqrt{-c}}{2} \sin^2(\varphi_\xi) Z. \end{aligned}$$

Entonces, restringiendo el operador de configuración $S^r_\xi$ al subespacio generado por $Z$ y $P\xi$, y expresándolo respecto a la base $\{Z, P\xi\}$, éste viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{-c}}{2} \sin^2(\varphi_\xi) \\ \frac{\sqrt{-c}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son $\pm\frac{\sqrt{-c}}{2}\sin(\varphi_\xi)$, coincidiendo con los autovalores de la subvariedad focal de los ejemplos presentados [12] o en el capítulo anterior.

Como punto final a la presente memoria, indicaremos nuestros próximos pasos para conseguir la clasificación que perseguimos. Nótese que el vector $Z^L = -\frac{1}{r_2}e_1 - V$ depende en general del vector normal $\xi$ escogido de partida. Si ello no fuese así, si consiguiésemos argumentar la independencia entre $Z^L$ y $\xi$, una adaptación del siguiente teorema [5] nos permitiría prácticamente concluir.

**Teorema 5.2.** *Sea $M$ una subvariedad conexa $(2n-k)$-dimensional de $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$, con fibrado normal $\nu M \subset T\mathbb{C}H^n$ y ángulo de Kähler constante $\varphi \in (0, \pi/2]$. Supongamos la existencia de un campo unitario de vectores $Z$ tangente a la distribución compleja maximal de $M$ tal que la segunda forma fundamental de $M$ viene dada por*

$$2\,II(Z, P\xi) = \sqrt{-c}\sin^2(\varphi)\,(JP\xi)^\perp,$$

*para cualquier $\xi \in \nu M$, donde $P\xi$ es la componente tangencial de $J\xi$.*

*En estas circunstancias, $M$ es congruente holomórficamente a una parte abierta de la subvariedad $W^{2n-k}_\varphi$.*

En nuestro caso, hemos obtenido que $2II(Z, P\xi) = \sqrt{-c}\sin^2(\varphi_\xi)\,(JP\xi)^\perp$, pero como hemos dicho, $Z$ es un vector que depende de $\xi$. Así, el próximo paso será tratar de quitarnos de en medio esta dependencia. Una posibilidad es haciendo uso de la información que hay recogida en las ecuaciones de Codazzi y Gauss, aunque es posible que este problema de dependencia también sea abordable desde un punto de vista algebraico.

# Bibliografía


[1] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, 1996.

[2] J. Berndt, Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space, *J. Reine Angew. Math.* **395** (1989), 132–141.

[3] J. Berndt, M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *J. Reine Angew. Math.***541** (2001), 209–235.

[4] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, **434**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[5] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos, Homogeneous hypersurfaces in complex hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata*, **138** (2009), 129–150

[6] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke: *Generalized Heisenberg groups and Damek–Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1598**, Springer–Verlag, Berlin, 1995.

[7] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, Orlando, second edition, 1986.

[8] É. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.* **17** (1938), 177–191.

[9] É. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques, *Math. Z.* **45** (1939), 335–367.

[10] É. Cartan, Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces, *C. R. Congrès Math. Liège* (1939), 30–41.

[11] É. Cartan, Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions, *Revista Univ. Tucuman*, Serie A, **1** (1940), 5–22.

[12] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, *Inhomogeneous isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces*, Math. Z. 271 (2012), 1037-1042.

[13] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, Boston, 1992.

[14] M. Domínguez-Vázquez, *Isoparametric foliations and polar actions on complex space forms*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **126**, Universidad de Santiago de Compostela, 2013.

[15] M. Domínguez Vázquez, *Hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos proxectivo e hiperbólico complexos*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **118**, Universidad de Santiago de Compostela, 2010.

[16] J. Dupont, *Fiber Bundles and Chern-Weyl Theory.* Lecture Notes Series No.: 69. August 2003. Layout & Typesetting: Emil Hedevang Lohse, Erik Olsen and John Olsen

[17] J. Hahn, Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms, *Math. Z.* **187** (1984), 195–208.

[18] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Second edition, Progress in Mathematics, **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[19] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **15**, Interscience Pubishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[20] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to curvature.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[21] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Matemathics, 218. Springer-Verlag, New York, 2003.

[22] T. Levi-Civita, Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **26** (1937), 355–362.

[23] B. O'Neill, The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.* **13** (1966), 459–469.

[24] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.

[25] B. Segre, Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (6) **27** (1938), 203–207.

[26] C. Somigliana, Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica, *Atti Acc. Sc. Torino* **LIV** (1918-1919), 974–979.

[27] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[28] K. Yano, M. Kon, *Structures on manifolds*, Series in Pure Math. **3**, World Scientific, Singapore, 1984.

[29] S.-T. Yau, Open problems in geometry, *Differential Geometry: Partial Differential Equations on Manifolds* (Los Angeles, 1990), Editors R. Greene and S.-T. Yau, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 54, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1993, Part 1, 439–484.