

DAVID MOSQUERA LOIS

**INTEGRACIÓN CON RESPECTO A LA
CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ**

133a

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DAVID MOSQUERA LOIS

**INTEGRACIÓN CON RESPECTO A LA
CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ**

133a

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2017



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Integración con respecto a la característica de Euler-Poincaré

David Mosquera Lois

Xullo 2017

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen	5
Introducción	7
1. La característica de Euler	13
1.1. Complejos celulares	13
1.2. Complejos simpliciales	16
1.3. Característica de Euler combinatoria	18
1.4. Homología y cohomología	20
1.5. CW-complejos y homología celular	21
1.6. Característica de Euler (co)homológica	22
2. Integración	27
2.1. Introducción	27
2.2. Teoría de la medida	28
2.3. Complejos simpliciales incompletos	30
2.4. Característica e integración	31
2.5. Conjuntos definibles	33
2.6. Aplicaciones definibles	35
2.7. Característica de Euler en conjuntos definibles	36
2.8. Definición de la integral	38
3. Propiedades de la integral	41
3.1. Aditividad de la integral	41
3.2. El teorema de Fubini	42
3.3. Un problema de enumeración	45
3.4. Métodos de cálculo	47
3.4.1. Conjuntos de recorrido	47
3.4.2. Dualidad y homología	50
4. Funciones \mathbb{R}-valuadas y teoría Morse	55
4.1. Integral de funciones \mathbb{R} -valuadas no negativas	55
4.2. Integración en variedades	59

4.3. Teoría de Morse	59
4.4. Integración en variedades y teoría de Morse	60
5. Aplicaciones en redes de sensores	63
5.1. Objetivos móviles	63
5.2. Frentes de onda	68
5.3. Aproximaciones simpliciales	69
6. Aplicaciones en geometría y topología	73
6.1. Espacios homeomorfos a definibles	73
6.2. Característica de un fibrado	77
6.3. La fórmula de Riemann-Hurwitz	79
Bibliografía	83

Resumen

En este trabajo se estudia una teoría de integración respecto a la característica de Euler-Poincaré. Se introducen algunas familias particulares de espacios topológicos y definiciones de la característica de Euler en ellas, principalmente una definición combinatoria y una definición (co)homológica. Se define la integración respecto a la característica y se exponen algunas propiedades. Finalmente se estudian aplicaciones de la teoría presentada previamente, tanto a problemas de enumeración de objetivos en redes de sensores como a geometría y topología. En particular se presentan demostraciones alternativas de la fórmula de Riemann-Hurwitz y de la característica de un fibrado localmente trivial. Asimismo, se expone una generalización de la clase de espacios en los que la integración respecto a la característica está definida.

Abstract

The aim of this dissertation is to develop an integration theory against the Euler-Poincaré characteristic. Several families of topological spaces and definitions of the Euler characteristic for them are introduced, mainly a combinatorial and a (co)homological definition. Integration against Euler-Poincaré characteristic is defined and several properties are discussed. Finally, applications of the theory previously exposed are studied, both in the context of target enumeration in sensor networks and in Geometry and Topology. Particularly, alternative proofs of the Riemann-Hurwitz formula and of the characteristic of a fiber bundle are presented. Furthermore, it is introduced a generalization of the class of spaces for which the integration against the Euler characteristic is defined.

Introducción

Dedicamos este trabajo a estudiar una teoría de integración respecto a la característica de Euler-Poincaré. Los métodos e ideas que presentaremos se inscriben en la temática denominada “Euler Calculus”, la cual nació en un artículo de Viro del año 1988 [Vir88] desde el punto de vista de la geometría algebraica y en un contexto muy concreto. En los años noventa varios trabajos de Schapira [Sch91; Sch95] volvieron sobre la temática utilizando herramientas muy sofisticadas basadas en la teoría de haces. Sin embargo, los objetos con los que trabajaba todavía eran muy rígidos y restrictivos. También en los años noventa hubo varias discusiones acerca de la utilización de la característica como una especie de medida generalizada, pero no fueron publicadas hasta más tarde [Pro02]. Paralelamente, la integración respecto a la característica de Euler fue estudiada en el contexto de la geometría integral o teoría de probabilidades geométrica [KR97]. A partir del año 2008, Ghrist, Baryshnikov, Robinson y Curry revolucionan la teoría de integración respecto a la característica de Euler-Poincaré con varios trabajos [BG08; BG09b; BG10; CGR12] en los que combinan las técnicas de sus predecesores con la incorporación de ideas muy novedosas que permiten flexibilizar la teoría, generalizarla a contextos no tan restringidos (por ejemplo los complejos simpliciales) y aplicarla al estudio de redes de sensores.

Los citados trabajos de Ghrist y sus colaboradores están motivados por las aplicaciones. De hecho, Ghrist es uno de los investigadores con más impacto en topología algebraica aplicada [Ghr14] y topología computacional [EH10], dos ramas de las matemáticas de aparición reciente y que en la actualidad se encuentran en auge. En ambas disciplinas se estudian problemas modernos utilizando técnicas clásicas. Además, en el caso de la topología computacional, tienen especial importancia las demostraciones y enunciados que proporcionan algoritmos susceptibles de ser implementados en aplicaciones informáticas. El Teorema 3.22 y la aplicación informática [BG] son ejemplos representativos de esta metodología.

Los artículos en los que nos hemos basado fundamentalmente [BG08; BG09b; BG10; CGR12] están más orientados a exponer las ideas y heurísticas a una audiencia amplia, enfatizando la intuición, que a detallar y a formalizar la teoría. Por ello, el objetivo de nuestro trabajo tiene como punto de partida la exposición de una teoría detallada y formalizada, basándonos en los trabajos previamente mencionados, de la integración respecto a la característica y sus aplicaciones. Durante el estudio de la temática han surgido algunas ideas originales que nos han llevado a exponer también alguna modesta contribución a la

misma.

La característica de Euler-Poincaré

La característica de Euler-Poincaré es un concepto clásico. Fue introducida por Euler en el contexto de multigrafos y poliedros a mediados del siglo XVIII, y pocos años más tarde la utilizó para demostrar que solo existen cinco sólidos platónicos [Ear99]. La definición de la característica en el caso de poliedros introducida por Euler:

$$\chi(\text{Poliedro}) = \# \text{vértices} - \# \text{aristas} + \# \text{caras}$$

se generalizó posteriormente a objetos susceptibles de ser expresados en términos combinatorios o algebraicos bajo ciertas condiciones de finitud, como los complejos celulares [Lee11; Ghr14], las variedades diferenciables compactas [Mun66], o subespacios de espacios topológicos que satisfagan algunas propiedades. Además, la característica interviene en multitud de resultados en bastantes ramas de las matemáticas, por ejemplo en problemas de coloración de grafos (Teorema de Heawood [Ear99, Teorema 3.3]), en combinatoria (Lema de Sperner [Ear99, Lema 4.4]), en el estudio de campos vectoriales y flujos (Teorema de Poincaré-Hopf [Ear99, Teorema 4.3]), o en una de las relaciones más fuertes entre la topología y la geometría de superficies, variedades y otros objetos geométricos (Teoremas de Gauss-Bonnet local y global [Ear99, Teorema 5.1, Teorema 5.2] y sus generalizaciones [Ghr14]).

Es bien conocido que trabajando en espacios topológicos bajo unas hipótesis razonables, si el subespacio U es contráctil, entonces la característica de Euler-Poincaré de U es uno. Además, bajo hipótesis razonables sobre los subespacios U y V se tiene que la característica de Euler-Poincaré satisface la siguiente relación:

$$\chi(U) + \chi(V) = \chi(U \cup V) + \chi(U \cap V). \quad (1)$$

Asimismo, asumiendo de nuevo que los espacios U y V satisfacen unas hipótesis razonables, entonces:

$$\chi(U \times V) = \chi(U) \cdot \chi(V). \quad (2)$$

Estas observaciones sugieren que el comportamiento de la característica de Euler-Poincaré se asemeja al de una medida en varios aspectos.

Un problema real que motiva la teoría

En los últimos años se han instalado redes wifi que cubren extensas zonas urbanas y universitarias. Tal servicio de conexión a Internet se basa en proporcionar al usuario muchos puntos de acceso a la red repartidos por la zona de cobertura, de forma que independientemente de su posición siempre disponga de al menos un punto de acceso.

Los avances tecnológicos recientes también posibilitan que un dispositivo se conecte a varios puntos de acceso con el objetivo de mejorar la calidad de la conexión. Además, en los

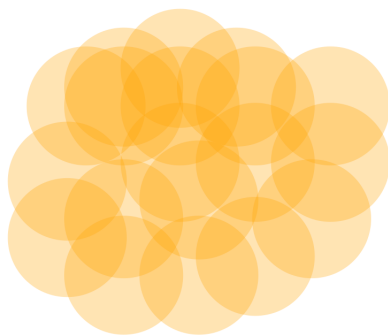


Figura 1: Región cubierta por una red wifi con múltiples puntos de acceso.

últimos años se ha incrementado la popularidad de servicios que garantizan la privacidad y que permiten anonimizar las conexiones de los usuarios, imposibilitando la identificación del dispositivo que se conecta por parte de los puntos de acceso. Resumiendo la situación, podemos suponer que los soportes (regiones de cobertura) de un conjunto de puntos de acceso recubren una región en la que un número finito, pero desconocido, de usuarios se conectan a uno o más puntos de acceso simultáneamente. El objetivo es determinar el número de usuarios conectados a la red en cada momento. Asumimos que el usuario se conecta a cuantos más puntos mejor para incrementar todo lo posible la calidad de su conexión.

Un primer enfoque puede consistir en considerar que los puntos de acceso están distribuidos uniformemente y muy densamente, es decir, que forman un continuo. Formalizando un poco las ideas:

Enfoque simplista. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ una región. Sea $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ la función que asigna a cada punto de acceso el número de dispositivos conectados. Suponemos que cada dispositivo se conecta a todos los puntos de acceso que distan de él R unidades o menos. Entonces el número de dispositivos es:

$$\frac{1}{M} \int_X h(x) dx$$

donde $M = \pi R^2$.

Analicemos detalladamente lo que estamos haciendo. Sea $\{\mathcal{O}_\alpha\}_\alpha$ el conjunto de dispositivos (de cardinalidad finita pero desconocida). Entonces $h = \sum_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$ donde U_α es la bola $\mathbb{B}^2(\mathcal{O}_\alpha, R)$ centrada en el dispositivo \mathcal{O}_α . De la linealidad de la integral se tiene:

$$\int_X h(x) dx = \int_X \sum_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}(x) dx = \sum_\alpha \int_X \mathbb{1}_{U_\alpha}(x) dx = \sum_\alpha M = M \cdot \alpha.$$

Cabe hacer unas observaciones en lo que respecta al procedimiento presentado. Primero, el argumento se extiende a cualquier dimensión y a cualquier contexto en el que dispongamos de un conjunto de sensores distribuidos formando un continuo y una familia de objetivos, por ejemplo radares y vehículos o personas en un evento. Segundo, los soportes

U_α no tienen que ser bolas, sino un conjunto “medible”, es decir, susceptible de asignarle un volumen o medida. Sin embargo, todos los soportes deben tener la misma medida para que el argumento funcione. Tercero, el enfoque utilizado es tremendamente simplista:

1. No todos los dispositivos tienen el mismo alcance para conectarse a redes wifi.
2. La región de detección de redes wifi de un dispositivo no es una bola medida con la distancia euclídea, sino que la geometría de la región puede ser compleja pues hay obstáculos y objetos que pueden actuar como repetidores.
3. Los dos puntos previos implican que la medida de Lebesgue de los soportes no coincide en general.
4. Los sensores (puntos de acceso en el ejemplo) no están situados de forma continua, sino que hay un número finito.

Destacamos que no es necesario que los sensores identifiquen a los objetivos. Lo único necesario es que cada uno de ellos devuelva el número de objetivos detectados. Para corregir algunas de las objeciones presentadas al enfoque simplista, una posibilidad consiste en desarrollar una teoría de integración robusta respecto a cambios en la geometría de los soportes, como su tamaño o ligeras variaciones en su forma, una teoría de integración topológica. Imaginemos por un instante que en el ejemplo objeto de estudio los soportes de los objetivos, denotados U_α , tuviesen medida uno respecto a una medida ξ . Entonces:

$$\int_X h(x) d\xi = \int_X \sum_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}(x) d\xi = \sum_\alpha \int_X \mathbb{1}_{U_\alpha}(x) d\xi = \sum_\alpha M = M \cdot \alpha.$$

El problema expuesto y las ecuaciones (1) y (2) nos motivan a estudiar una teoría de integración respecto a la característica de Euler-Poincaré.

Organización del trabajo

Comenzamos el trabajo con una exposición de algunos preliminares sobre la característica de Euler-Poincaré, sus definiciones alternativas, algunos espacios sobre los que puede definirse, y algunas de sus propiedades.

En el segundo capítulo abordamos la integración. Hemos optado por una presentación en orden creciente de generalidad, conforme discutimos algunos de los problemas que surgen. El Capítulo 2 se cierra con la definición de la integral respecto a la característica en los conjuntos definibles en estructuras o-minimales.

Dedicamos el tercer capítulo a exponer algunas propiedades de la integral como por ejemplo la aditividad respecto al integrando y al conjunto de integración. También enunciamos y demostramos un teorema de Fubini. A continuación exponemos algunos problemas de enumeración de objetivos que motivan otras propiedades de la integral con fines más prácticos. Una de ellas nos conduce a un resultado de dualidad en la integral, consecuencia de la dualidad de Alexander.

En el Capítulo 4 extendemos la teoría a funciones \mathbb{R} -valuadas y combinamos la integración respecto a la característica de Euler-Poincaré con la teoría Morse, obteniendo un resultado de localización.

Dedicamos el Capítulo 5 a exponer las aplicaciones de la teoría desarrollada a las redes de sensores. En particular, generalizamos los problemas de enumeración estudiados en el tercer capítulo, por ejemplo permitiendo objetivos en movimiento. También exponemos un resultado de discretización sobre los sensores.

En el Capítulo 6 explicitamos una idea implícita, pero no formulada, en los trabajos [CGR12; BG09b] y definimos una generalización de la integral a espacios homeomorfos a conjuntos definibles. Ello permite justificar algunos resultados en [CGR12; BG09b] para los que en el contexto de conjuntos definibles no hemos encontrado demostraciones rigurosas. A continuación presentamos un resultado clásico sobre la característica de Euler de los espacios de revestimiento. Acto seguido, exponemos una demostración original de la característica de Euler de un fibrado localmente trivial basada en la integración respecto a la característica y en un argumento combinatorio. Además, nuestro argumento generaliza los resultados al respecto de los que tenemos constancia [Hat02; Ser51; Spa50; Shi17] o simplifica sus demostraciones. Finalmente, presentamos una demostración, de naturaleza más topológica que en [Vir88], de la fórmula de Riemann-Hurwitz.

Capítulo 1

La característica de Euler

En este capítulo introducimos algunos de los objetos sobre los que trabajaremos posteriormente. En particular presentamos unas familias particulares de espacios topológicos, los complejos celulares y simpliciales. Enunciamos algunas de sus propiedades y las relaciones que existen entre ellos y otros objetos geométricos como las variedades. También exponemos brevemente algunos conceptos de homología y cohomología que necesitaremos a lo largo del trabajo. Además presentamos varias definiciones de la característica de Euler-Poincaré y la relación entre ellas.

1.1. Complejos celulares

En esta sección presentamos brevemente una familia de espacios topológicos, los CW-complejos finitos. Seguiremos [Lee11; Hat02; CGR12; FP90; Sha16], donde pueden consultarse las demostraciones de los resultados que nosotros enunciemos. Utilizaremos los términos CW-complejo y complejo celular como sinónimos.

Definición 1.1. Llamaremos n -celda abierta e^n a un espacio topológico homeomorfo a la bola abierta unitaria $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ y llamaremos n -celda cerrada \bar{e}^n a un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada unitaria $\bar{\mathbb{B}}^n$.

Definición 1.2. Sea X un espacio topológico no vacío, \bar{e}^n una n -celda cerrada con $n \geq 1$ y $\varphi: \partial\bar{e}^n \rightarrow X$ una aplicación continua. Definimos el espacio de adjunción $X \cup_{\varphi} \bar{e}^n$ obtenido a partir de $X \sqcup \bar{e}^n$ al identificar $\partial\bar{e}^n$ con $\varphi(\partial\bar{e}^n)$. Nos referimos a $\varphi: \partial\bar{e}^n \rightarrow X$ como la aplicación de adjunción.

Definición 1.3. Sea

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^{n-1} \subset X^n = X$$

una sucesión finita de espacios topológicos satisfaciendo las dos condiciones siguientes:

1. X^0 es un espacio discreto no vacío.

2. Para cada $i \geq 1$, X^i se obtiene a partir de X^{i-1} adjuntando una colección finita (que puede ser vacía) de i -celdas.

Diremos que el conjunto X dotado de la topología cociente es un CW-complejo finito.

Observación 1.4. El conjunto de celdas abiertas de X se denomina la estructura celular de X o descomposición celular de X .

Ejemplo 1.5. Partimos de dos puntos. En el primer paso añadimos 1-celdas (intervalos). En el segundo paso añadimos 2-celdas para obtener un cilindro (figura 1.1).



Figura 1.1: Construcción de un cilindro como CW-complejo.

Teorema 1.6. Sea X un CW-complejo finito, entonces X es compacto.

En las definiciones que siguen asumiremos que X es un CW-complejo finito. Además, de ahora en adelante por CW-complejo nos referiremos a CW-complejo finito.

Definición 1.7. La dimensión de X es el menor número natural n tal que todas las celdas de X tienen dimensión menor o igual que n .

Definición 1.8. Un subcomplejo de X es un subespacio $Y \subset X$ que es unión de celdas de X y que satisface la siguiente condición: si Y contiene una celda, entonces también contiene su clausura.

Definición 1.9. Definimos el n -esqueleto de X , como el subespacio $X^n \subset X$ formado por todas las celdas de dimensión menor o igual que n .

Proposición 1.10. Sean X un CW-complejo e Y un subcomplejo de X . Entonces Y es cerrado en X , y con la topología relativa y la descomposición celular heredada de X , también es un CW-complejo.

Definición 1.11. Un CW-complejo se dice regular si todas las aplicaciones de adjunción son homeomorfismos.

Ejemplos

Ejemplo 1.12. Un grafo finito es un CW-complejo con celdas de dimensiones cero y uno. Las celdas de dimensión cero son los vértices y las celdas de dimensión uno son las aristas.

Ejemplo 1.13. La esfera S^n admite varias realizaciones como CW-complejo:

1. Con una celda de dimensión cero y una celda de dimensión n . La aplicación característica para la celda de dimensión n es $q: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, que envía $\partial\mathbb{B}^n$ a la celda de dimensión cero.
2. Con dos celdas en cada dimensión hasta la dimensión n . Cada par de celdas en la dimensión i serán los hemisferios de la esfera de dimensión i y se pegan a lo largo del ecuador, el cual es la esfera de dimensión $i - 1$.

Observación 1.14. El ejemplo anterior pone de manifiesto que un espacio puede admitir varias estructuras de CW-complejo distintas.

Ejemplo 1.15. El espacio proyectivo real $X = \mathbb{R}P^n$ puede realizarse como un CW-complejo [Hat02, Ejemplo 0.4]. Comenzamos con un punto que es $X^0 = \mathbb{R}P^0$. Adjuntamos \mathbb{B}^1 mediante la aplicación cociente $\partial\mathbb{B}^1 \cong \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{R}P^0$. Obtenemos entonces $X^1 = \mathbb{R}P^1$. Repetimos el procedimiento hasta la dimensión n . En consecuencia podemos dotar a $X = \mathbb{R}P^n$ de una estructura de CW-complejo con una celda en cada dimensión hasta la dimensión n . Las aplicaciones características son las aplicaciones cociente de las esferas a los espacios proyectivos.

Ejemplo 1.16. Las variedades diferenciables compactas (con o sin borde) pueden realizarse como CW-complejos finitos (ver Teorema 1.29).

Ejemplo 1.17. Las variedades topológicas compactas (con o sin borde) de dimensión menor o igual que tres pueden realizarse como CW-complejos finitos (ver Teorema 1.30).

Algunas propiedades

Introducimos una proposición que proporciona información sobre los productos de CW-complejos finitos.

Proposición 1.18. *Sean X, Y dos CW-complejos finitos. Entonces $X \times Y$ admite una estructura de CW-complejo finito.*

Observación 1.19. La demostración del resultado es constructiva y muestra que las celdas del nuevo espacio son los productos de celdas de X con celdas de Y . Es decir, si las celdas de X e Y son e_j^k y e_i^l respectivamente, donde los superíndices indican la dimensión y los subíndices indexan cada una de las celdas en esa dimensión, entonces las celdas de $X \times Y$ son $e_j^k \times e_i^l$.

Ejemplo 1.20. Introducimos una ilustración del resultado anterior para $X = \mathbb{S}^1$ la circunferencia e $Y = \mathbb{B}^2$ la bola cerrada de dimensión dos. El producto es el toro sólido, el cual podemos dotar de una estructura celular dada por la Proposición 1.18. Supongamos que la estructura celular de \mathbb{S}^1 es $\{e^0, e^1\}$ y la estructura celular de \mathbb{B}^2 es $\{e^0, e^1, e^2\}$. Ilustramos la estructura celular de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ en la figura 1.2.

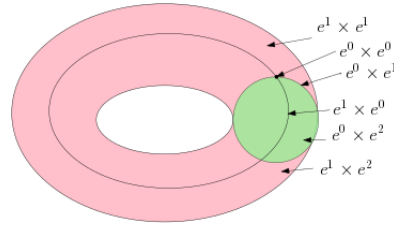


Figura 1.2: Estructura celular del producto de CW-complejos.

El cociente de un CW-complejo por un subcomplejo también puede dotarse de una estructura de CW-complejo.

Teorema 1.21 ([Hat02]). *Sea X un CW-complejo finito y A un subcomplejo. Entonces el cociente X/A tiene estructura de CW-complejo donde las celdas de A se colapsan a una celda de dimensión cero.*

El siguiente resultado permite considerar los CW-complejos finitos como subespacios de un espacio euclidiano.

Teorema 1.22 (Embebimiento de CW-complejos, [FP90, Teorema 1.5.15, p. 46]). *Sea X un CW-complejo finito de dimensión n , entonces X se embebe en \mathbb{R}^{2n+1} .*

1.2. Complejos simpliciales

Exponemos a continuación los complejos simpliciales.

Definición 1.23. Sean v_0, v_1, \dots, v_n puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^m con $m \geq n$. Llamamos n -símplice generado por v_0, v_1, \dots, v_n , y lo notamos $[v_0, v_1, \dots, v_n]$, al menor conjunto convexo en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m que contenga a los citados puntos. Es decir:

$$[v_0, v_1, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in \mathbb{R}^m : \sum_i t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \forall i\}.$$

Cada uno de los puntos v_0, v_1, \dots, v_n se llaman vértices del n -símplice y los valores t_0, t_1, \dots, t_n son las coordenadas baricéntricas respecto a los vértices. Decimos que n es la dimensión del símplice, que coincide con la dimensión como celda [Lee11, Proposición 5.32].

Sea σ un n -símplice. Cada símplice generado por un subconjunto no vacío de los vértices diremos que es una cara de σ . Las caras distintas de σ se llaman caras propias. Las caras generadas por n vértices se denominan caras de frontera. Decimos que la frontera de σ es la unión de todas sus caras de frontera y que el interior de σ es σ menos su frontera. Decimos que un n -símplice abierto es el interior de un n -símplice $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$, es decir, el conjunto

$$\{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in \mathbb{R}^m : \sum_i t_i = 1 \text{ y } t_i > 0 \forall i\}.$$

Definición 1.24. Un complejo simplicial finito es una colección finita \mathcal{K} de símplices en un espacio euclidiano \mathbb{R}^n , satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Si $\sigma \in \mathcal{K}$, entonces todas las caras de σ están en \mathcal{K} .
2. La intersección de cualquier par de símplices en \mathcal{K} es el vacío o una cara de ambos.

Convenimos que si \mathcal{K} es un complejo simplicial en \mathbb{R}^n , entonces la dimensión de \mathcal{K} es la dimensión máxima de los símplices que lo componen. Un subconjunto $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ es un subcomplejo de \mathcal{K} si dado $\sigma \in \mathcal{K}'$, entonces todas las caras de σ están en \mathcal{K}' . Dado $k \in \mathbb{N}$, el conjunto de todos los símplices de \mathcal{K} de dimensión menor o igual que k es un subcomplejo llamado el k -esqueleto de \mathcal{K} y lo notaremos \mathcal{K}^k . Al igual que en el caso de CW-complejos, por complejo simplicial entenderemos complejo simplicial finito.

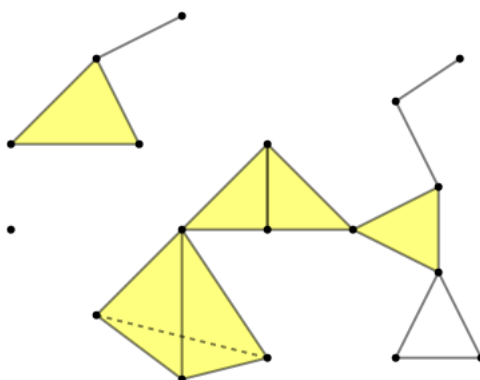


Figura 1.3: Complejo simplicial finito de dimensión tres.

Dado un complejo simplicial \mathcal{K} en \mathbb{R}^n , llamaremos poliedro de \mathcal{K} , y lo notaremos por $|\mathcal{K}|$, al conjunto de todos los símplices de \mathcal{K} dotado de la topología relativa heredada de \mathbb{R}^n . Con esta notación se tiene el siguiente resultado, que motiva la terminología anterior:

Teorema 1.25. *Sea \mathcal{K} un complejo simplicial finito. El espacio $|\mathcal{K}|$ es un CW-complejo finito.*

Observación 1.26. El CW-complejo $|\mathcal{K}|$ es regular. Las celdas del CW-complejo son los símplices abiertos.

El resultado previo justifica un abuso de lenguaje que cometeremos con frecuencia: en ocasiones nos referiremos a un poliedro $|\mathcal{K}|$ como el complejo simplicial \mathcal{K} . El Ejemplo 1.12 también puede verse como un poliedro. Para más ejemplos véase [Lee11]. A continuación exponemos bajo qué circunstancias el teorema previo tiene un recíproco.

Definición 1.27. Dado un espacio topológico X , llamamos triangulación de X a un par (\mathcal{K}, ϕ) formado por un complejo simplicial finito y un homeomorfismo $\phi: X \rightarrow |\mathcal{K}|$. Decimos que un espacio es triangulable si admite una triangulación.

Teorema 1.28 ([FP90, Teorema 3.4.1]). *Sea X un CW-complejo regular finito, entonces X es triangulable.*

Teorema 1.29 (Triangulación de variedades, [Mun66, p. 80-81, Teorema 10.6 p. 103]). *Sea M una variedad diferenciable compacta con o sin borde. Entonces M es triangulable.*

Teorema 1.30 (Triangulación de variedades topológicas, [Lee11; Hat13; Ham76]). *Sea M una variedad topológica compacta con o sin borde de dimensión uno, dos o tres. Entonces M es triangulable.*

Definición 1.31. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial finito. Una subdivisión de \mathcal{K} es un complejo simplicial finito \mathcal{K}' tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. Cada símplice de \mathcal{K}' está contenido en algún símplice de \mathcal{K} .
2. Cada símplice de \mathcal{K} es la unión finita de símplices de \mathcal{K}' .

Observación 1.32. Se sigue de la definición que $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}'|$ y que ambos espacios son homeomorfos.

Observación 1.33. De uso frecuente es la subdivisión baricéntrica [Bre93; Hat02].

Definición 1.34. Sean \mathcal{K} y \mathcal{L} complejos simpliciales finitos. Una aplicación simplicial $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ es una aplicación $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada símplice σ de \mathcal{K} , f lleva los vértices de σ en el conjunto de vértices de algún símplice σ' de \mathcal{L} .
2. La aplicación $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ es afín en cada símplice.

Observación 1.35. Algunos autores [Sha16] definen aplicación simplicial como una aplicación continua entre los poliedros que lleva símplices en símplices, es decir, una aplicación celular donde las celdas son símplices. Nótese que nuestra definición es más restrictiva.

1.3. Característica de Euler combinatoria

En esta sección introducimos la definición combinatoria de la característica de Euler-Poincaré para CW-complejos finitos y exponemos algunas de sus propiedades.

Definición 1.36. Sea X un CW-complejo finito, entonces se define la característica de Euler combinatoria de X :

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$$

donde c_i es el número de celdas en dimensión i .

Ejemplo 1.37. La característica de Euler generaliza el concepto de cardinalidad en conjuntos finitos. Si X es un conjunto finito de puntos, entonces $\chi(X) = \#X$.

Teorema 1.38 (Principio de inclusión exclusión combinatorio). *Sean X e Y subcomplejos de un CW-complejo finito Z , entonces*

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

Demostración. Nótese que la intersección de subcomplejos es un subcomplejo y por tanto está bien definida su característica. El resultado se sigue de contar celdas. \square

El principio de inclusión exclusión se extiende por inducción a un número finito de subcomplejos en la forma del principio de inclusión exclusión general.

Teorema 1.39 (Principio de inclusión exclusión combinatorio general). *Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ una familia (finita) de subcomplejos de un CW-complejo finito. Entonces:*

$$\begin{aligned} \chi\left(\bigcup_{j=1}^m X_j\right) &= \sum_i \chi(X_i) - \sum_{i \neq j} \chi(X_i \cap X_j) + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \chi(X_i \cap X_j \cap X_k) - \cdots \\ &\quad + (-1)^{m+1} \chi(X_1 \cap \cdots \cap X_m). \end{aligned}$$

Teorema 1.40. *Sean X y Y CW-complejos finitos, entonces*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Demostración. Notemos por c_i^X el número de celdas de dimensión i en X y por c_j^Y el número de celdas de dimensión j en Y . Asumamos que la dimensión de X es m y la de Y es n . Entonces se tiene

$$\chi(X) \cdot \chi(Y) = \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i c_i^X \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j c_j^Y \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (-1)^k c_i^X c_j^Y.$$

Y por la estructura celular de $X \times Y$ dada en la Proposición 1.18:

$$\chi(X \times Y) = \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k c_k^{X \times Y} = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (-1)^k c_i^X c_j^Y. \quad \square$$

Observación 1.41. Los Teoremas 1.38 y 1.40 sugieren que en cierto modo la característica de Euler se comporta como una medida. Sin embargo la colección de subcomplejos de un CW-complejo no tiene estructura de una σ -álgebra.

Utilizando la estructura celular del cociente de un complejo por un subcomplejo (Teorema 1.21) se tiene de forma inmediata el siguiente resultado:

Teorema 1.42. *Sea X un CW-complejo finito y A un subcomplejo. Entonces*

$$\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1.$$

1.4. Homología y cohomología

En esta sección R será un anillo conmutativo unitario salvo que indiquemos lo contrario. Siempre que digamos R -módulo nos referimos a R -módulo por la izquierda. Además cuando hablemos de un cuerpo asumiremos que es conmutativo. Seguiremos [Hat02; Lee11].

Definición 1.43. Sea X un espacio topológico. Un n -símplice singular en X es una aplicación continua $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$.

Definición 1.44. Sea $C_n(X; R)$ el R -módulo generado por el conjunto de n -símplices singulares en X . Los elementos de $C_n(X; R)$ se llaman n -cadenas singulares y las escribiremos como sumas finitas $\sum_i r_i \sigma_i$ con $r_i \in R$ y $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$.

Definición 1.45. Definimos los homomorfismos de R -módulos

$$\partial_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R),$$

llamados operadores borde, enunciando como actúan sobre los generadores:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i,$$

donde $\epsilon_i: [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] \hookrightarrow [e_0, \dots, e_i, \dots, e_n]$ es la inclusión de la i -ésima cara del n -símplice estándar.

Se cumple que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Ello nos permite construir un complejo de cadenas, es decir, una sucesión de homomorfismos de R -módulos tales que la composición de dos consecutivos siempre sea cero, o lo que es equivalente, $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$. Añadimos el R -módulo trivial a la derecha y $\partial_0 = 0$. Notaremos $C_i(X; R)$ por C_i :

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Definición 1.46. Se definen los R -módulos (o grupos si prescindimos de estructura) de homología singular como

$$H_n(X; R) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

Ahora dualizamos el complejo de cadenas como sigue. Consideremos los R -módulos

$$C^m(X; R) = \text{Hom}(C_m(X; R), R).$$

Los elementos de $C^m(X; R)$ son homomorfismos de R -módulos y se llaman n -cocadenas. Definimos los operadores coborde

$$\delta_n: C^{m-1}(X; R) \rightarrow C^m(X; R)$$

como sigue: si φ es una $(n-1)$ -cocadena, entonces $\delta_n(\varphi) = \varphi \circ \partial_n$. Se tiene que $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$. De nuevo, para representar el complejo de cocadenas notamos $C^m(X; R)$ por C^m ,

$$0 \xrightarrow{\delta_0} C^0 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_n} C^n \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

Definición 1.47. Se definen los R -módulos (o grupos si prescindimos de estructura) de cohomología singular como

$$H^n(X; R) = \frac{\text{Ker}(\delta_{n+1})}{\text{Im}(\delta_n)}.$$

Observación 1.48. Si se sobreentiende el anillo de coeficientes, abreviaremos por $H_n(X)$ y $H^n(X)$ los módulos de homología y cohomología, respectivamente.

Teorema 1.49 (Invariancia homotópica de la homología, [Hat02]). *Si X e Y son espacios topológicos homotópicamente equivalentes, en particular si son homeomorfos, entonces $H_n(X)$ y $H_n(Y)$ son isomorfos para todo $n \geq 0$.*

Observación 1.50. La cohomología singular satisface la misma propiedad [Hat02].

La homología y cohomología están relacionadas por el teorema de coeficientes universales de cohomología [Hat02]. Exponemos una consecuencia a la que haremos referencia a lo largo del trabajo:

Teorema 1.51. *Sea X un espacio topológico y consideremos la homología y cohomología sobre un cuerpo K (conmutativo). Entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales:*

$$H^n(X; K) \cong \text{Hom}(H_n(X; K), K).$$

Si además los espacios vectoriales son de dimensión finita, entonces existe un isomorfismo (no natural) de espacios vectoriales:

$$H^n(X; K) \cong H_n(X; K).$$

1.5. CW-complejos y homología celular

Continuamos el estudio de la (co)homología en CW-complejos. Seguiremos [Hat02; Bre93]. Utilizaremos homología y cohomología relativas, las cuales se definen utilizando cocientes de los módulos de cadenas singulares, véase [Hat02] para un tratamiento detallado. Convenimos que X^n es el conjunto vacío para $n < 0$.

Teorema 1.52. *Sea X un CW-complejo finito. Entonces:*

1. $H_k(X^n, X^{n-1})$ es cero para $k \neq n$ y es un módulo libre con base las n -celdas de X para $k = n$.
2. $H_k(X^n) = 0$ para $k > n$. En particular, $H_k(X) = 0$ para $k > \dim X$.
3. La inclusión $i: X^n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ para $k < n$.

Como consecuencia del resultado, si X es un CW-complejo finito podemos combinar trozos de las sucesiones exactas largas para los pares (X^{n+1}, X^n) , (X^{n+1}, X^n) y (X^{n+1}, X^n) en una sucesión de módulos libres finitamente generados:

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \cdots$$

que es un complejo de cadenas. Lo llamaremos complejo de cadenas celular de X . Consecuentemente, denotamos

$$C_n^{CW}(X) = H_n(X^n, X^{n-1}).$$

Se tiene que $C_n^{CW}(X)$ es un módulo libre con base las n -celdas de X , es decir, los elementos de $C_n^{CW}(X)$ son combinaciones lineales de las n -celdas.

Definición 1.53. Los módulos de homología del complejo de cadenas celular se llaman módulos de homología celular de X y los denotamos:

$$H_n^{CW}(X) = \text{Ker}d_n / \text{Im}d_{n+1}.$$

Teorema 1.54 ([Hat02]). *En las condiciones precedentes se tiene el isomorfismo:*

$$H_n^{CW}(X) \cong H_n(X) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

1.6. Característica de Euler (co)homológica

En lo que sigue asumiremos que el anillo de coeficientes es un dominio de ideales principales además de conmutativo y unitario.

Teorema 1.55. *Sea X un CW-complejo finito. Entonces*

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \text{rank } H_n(X).$$

Demostración. Durante el transcurso de esta demostración notaremos

$$C_n(X) = C_n^{CW}(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$$

para simplificar la notación. Sea:

$$\cdots \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

el complejo de cadenas celular formado por módulos libres finitamente generados, con ciclos $Z_n(X) = \text{Ker}d_n$, fronteras $B_n(X) = \text{Im}d_{n+1}$, y homología $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$. Entonces tenemos las sucesiones exactas cortas de módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales:

$$0 \rightarrow Z_n(X) \rightarrow C_n(X) \rightarrow B_{n-1}(X) \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow B_n(X) \rightarrow Z_n(X) \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0$$

para todo n . Se tiene:

$$\begin{aligned} \text{rank } C_n(X) &= \text{rank } Z_n(X) + \text{rank } B_{n-1}(X) \\ \text{rank } Z_n(X) &= \text{rank } B_n(X) + \text{rank } H_n(X) \end{aligned}$$

Substituimos la segunda ecuación en la primera y multiplicamos la ecuación resultante por $(-1)^n$. El resultado se sigue de sumar sobre n :

$$\sum_n (-1)^n \text{rank } C_n(X) = \sum_n (-1)^n \text{rank } H_n(X). \quad \square$$

Corolario 1.56. *La característica de Euler de un CW-complejo finito es invariante por homotopía y no depende de la estructura celular escogida.*

Corolario 1.57. *La característica de Euler de un complejo simplicial finito es invariante por subdivisiones.*

Como consecuencia del Teorema 1.55 se introducen varias definiciones de la característica de Euler (co)homológica.

Definición 1.58. Consideremos un complejo de cadenas C de R -módulos sobre un dominio de ideales principales R :

$$\dots \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

Decimos que C es de tipo finito si todos los módulos que lo componen son de rango finito y todos ellos salvo un número finito son cero.

Dado un complejo de cadenas $(C_\bullet, \partial_\bullet)$

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

podemos interpretar la homología del complejo de cadenas como otro complejo de cadenas $(H(C_\bullet), 0_\bullet)$. O equivalentemente, podemos ver $(H(C_\bullet), 0_\bullet)$ como módulos graduados [Sha16]. En este caso, si decimos que $M = \bigoplus_i M_i$ es un módulo graduado de tipo finito, entendemos que el complejo de cadenas asociado es de tipo finito. Consideraciones análogas se aplican un complejo de cocadenas $(C^\bullet, \delta^\bullet)$ y la cohomología.

Definición 1.59. Sea R un dominio de ideales principales y M un módulo graduado de tipo finito $M = \bigoplus_i M_i$. Entonces definimos la característica de Euler algebraica del módulo M como:

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \text{rank } M_i.$$

Repetiendo el argumento usado en el Teorema 1.55 se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.60. *Sea $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ un complejo de cadenas de tipo finito formado por R -módulos sobre un dominio de ideales principales R . Entonces*

$$\chi(H(C_\bullet)) = \chi(C_\bullet).$$

Definición 1.61. Sea X un espacio topológico y R un dominio de ideales principales. Supongamos que la homología singular con coeficientes en R del espacio es un módulo graduado de tipo finito, entonces definimos la característica de Euler homológica de X como:

$$\chi(X) = \chi(H_\bullet(X))$$

donde $H_\bullet(X)$ denota el módulo graduado de homología de X .

Supongamos ahora que consideramos los coeficientes en un cuerpo K . Como consecuencia del teorema de coeficientes universales para cohomología (Teorema 1.51), si los espacios vectoriales de homología son de dimensión finita, entonces los espacios vectoriales de homología y cohomología son isomorfos y por tanto es pertinente la siguiente definición.

Definición 1.62. Sea X un espacio topológico y K un cuerpo (conmutativo). Supongamos que la cohomología singular con coeficientes en K del espacio es un espacio vectorial graduado de tipo finito, entonces definimos la característica de Euler cohomológica de X como:

$$\chi(X) = \chi(H^\bullet(X))$$

donde $H^\bullet(X)$ denota el módulo graduado de cohomología de X .

Corolario 1.63. *La característica de Euler homológica sobre un cuerpo coincide con la característica de Euler cohomológica y es un invariante homotópico.*

Observación 1.64. El Teorema 1.55 garantiza que en el caso de CW-complejos compactos, es decir, finitos, todas las definiciones de la característica de Euler coinciden utilizando un cuerpo como anillo de coeficientes.

Observación 1.65. En el caso de las variedades diferenciables compactas con o sin borde (triangulables en virtud del Teorema 1.29), las características de Euler homológica y cohomológica están definidas, pues los módulos de homología y cohomología son finitamente generados y solo un número finito de ellos son no triviales.

Observación 1.66. En el caso de las variedades topológicas compactas con o sin borde, las características de Euler homológica y cohomológica también están definidas. Ello es consecuencia de que tales espacios tienen el tipo de homotopía de CW-complejos finitos [KS69]. Para dimensiones uno, dos o tres el resultado se sigue de los resultados de triangulación de tales variedades.

Observación 1.67. También podríamos definir la característica de Euler utilizando otras teorías de homología y cohomología. Por ejemplo cohomología con soportes compactos [CGR12; Hat02] o las teorías simpliciales [Hat02]. Sobre CW-complejos finitos coinciden [CGR12; Hat02].

Teorema 1.68 (Principio de inclusión exclusión homológico). Sean A y B subconjuntos abiertos de un espacio topológico X . Supongamos que la característica de Euler homológica de A , B , $A \cup B$ y $A \cap B$ está definida, entonces

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Demostración. Las hipótesis garantizan que la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris [Hat02]:

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(A \cup B) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

es de tipo finito. De la definición de la característica de Euler algebraica aplicada al complejo de cadenas anterior y de la definición de la característica de Euler homológica se sigue el resultado. También podríamos argumentar utilizando las ideas de la demostración del Teorema 1.55. \square

Observación 1.69. Sean A y B subcomplejos de un CW-complejo finito X tales que $X = A \cup B$. Entonces se verifica:

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

La idea de la demostración consiste en considerar entornos abiertos de los subcomplejos que se retraigan por deformación fuerte a los subcomplejos y tales que la intersección de los entornos se retraiga por deformación fuerte a la intersección de los subcomplejos [Hat02]. El principio de inclusión exclusión homológico presenta una ventaja sobre el combinatorio: se extiende a CW-complejos no finitos [Lee11; Hat02].

Teorema 1.70. Sean X y Y espacios topológicos. Supongamos que las características homológicas sobre un cuerpo de X e Y están definidas, entonces

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Demostración. Notemos por d_i^X la dimensión del espacio vectorial de homología $H_i(X)$ y por d_j^Y la dimensión del espacio vectorial de homología $H_j(Y)$. Asumamos que las dimensiones máximas de los espacios vectoriales no triviales $H_i(X)$ y $H_j(Y)$ son m y n respectivamente. Entonces

$$\chi(X) \cdot \chi(Y) = \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i d_i^X \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j d_j^Y \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (-1)^k d_i^X d_j^Y.$$

Y en virtud de la fórmula de Künneth [Hat02, Corolario 3B.7] y la dimensión del producto tensorial de espacios vectoriales se tiene

$$\chi(X \times Y) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (-1)^k d_i^X d_j^Y. \quad \square$$

Observación 1.71. El teorema de coeficientes universales para cohomología 1.51 garantiza que el resultado también se cumple para la característica de Euler cohomológica.

Capítulo 2

Integración respecto a la característica de Euler

En este capítulo introducimos la teoría de integración respecto a la característica de Euler-Poincaré. Comenzamos trabajando sobre los complejos celulares expuestos en el primer capítulo y motivados por los problemas que surgen definimos nuevos objetos más adecuados para nuestros propósitos.

2.1. Introducción

Comenzamos exponiendo la teoría de integración respecto a la característica de Euler en el contexto familiar de complejos simpliciales finitos, donde todas las definiciones de la característica coinciden. Precisamente la teoría “moderna” del “Euler Calculus” comenzó con el estudio de la característica y la integración en estos espacios. La exposición está inspirada en [Vir88; CGR12; BG09b; BG10; KR97; Pro02] y trataremos de seguir el trabajo [BG08] de Baryshnikov y Ghrist.

De ahora en adelante X será un complejo simplicial finito salvo que se diga lo contrario.

Definición 2.1. Denotamos por $CF(X)$ el \mathbb{Z} -módulo libre generado por la familia finita de aplicaciones

$$\mathbb{1}_\sigma : X \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ donde } \mathbb{1}_\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x \in \sigma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde σ es un símlice de X .

Observación 2.2. Los elementos de $CF(X)$ son de la forma $\phi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{\sigma_\alpha}$ donde $c_\alpha \in \mathbb{Z}$ e I es un conjunto finito. Además se expresan de forma única.

Definición 2.3. Dada $\phi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{\sigma_\alpha} \in CF(X)$ definimos su integral respecto a la carac-

terística de Euler, notada $\int_X \phi d\chi$, como

$$\int_X \phi d\chi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha.$$

Observación 2.4. La integral respecto a la característica de Euler es un homomorfismo $CF(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} -módulos.

Sea U un subcomplejo de X . Notamos por $\mathbb{1}_U$ la aplicación:

$$\mathbb{1}_U: X \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ donde } \mathbb{1}_U(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 2.5. Notemos que si U es un subcomplejo de X , entonces el principio de inclusión exclusión conjuntista (análogo al Teorema 1.39) aplicado al conjunto de los símlices de U garantiza que $\mathbb{1}_U \in CF(X)$. En efecto, supongamos que $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ son los símlices de U . Entonces,

$$\mathbb{1}_U = \mathbb{1}_{\cup_i \sigma_i} = \sum_i \mathbb{1}_{\sigma_i} - \sum_{i \neq j} \mathbb{1}_{\sigma_i \cap \sigma_j} + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \mathbb{1}_{\sigma_i \cap \sigma_j \cap \sigma_k} - \cdots + (-1)^{m+1} \mathbb{1}_{\sigma_1 \cap \cdots \cap \sigma_m}.$$

Proposición 2.6. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia finita de subcomplejos de X . Dada $\phi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$ con $c_\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_X \phi d\chi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \chi(U_\alpha).$$

Demostración. Puesto que la integral respecto a la característica de Euler es un homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos es suficiente demostrar que si U es un subcomplejo de X , entonces

$$\int_X \mathbb{1}_U d\chi = \chi(U).$$

Y esto se sigue de la observación 2.5 y el principio de inclusión exclusión (Teorema 1.39). \square

A continuación queremos desarrollar una teoría de integración respecto a la característica de Euler. Y ello es difícil en el contexto de complejos simpliciales compactos pues no son estructuras suficientemente flexibles. El principal problema es que los subcomplejos de un complejo simplicial no forman una σ -álgebra.

2.2. Teoría de la medida

Hemos visto que la característica de Euler satisface algunas propiedades típicas de las medidas, como por ejemplo el principio de inclusión exclusión (aditividad finita) o la multiplicatividad. Sin embargo los subcomplejos de un complejo simplicial finito no

forman una σ -álgebra de conjuntos pues el conjunto complementario de un subcomplejo no es necesariamente un subcomplejo. Para solucionar este problema extendemos la teoría a estructuras más generales. Para ello, introducimos algunas definiciones referentes a medidas y generalizaciones de las mismas apropiadas para trabajar en este contexto.

Definición 2.7. Sea X un conjunto no vacío. Una σ -álgebra de conjuntos en X es una familia $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. El conjunto vacío está en la familia \mathcal{M} .
2. Si un conjunto está en la familia, entonces también está su complementario.
3. Las uniones numerables de conjuntos en la familia \mathcal{M} están en \mathcal{M} .

Observación 2.8. Si solo requerimos que la condición (3) se satisfaga para uniones finitas, entonces \mathcal{M} es un álgebra de conjuntos.

Definición 2.9. Un espacio medible es un par (X, \mathcal{M}) donde X es un conjunto no vacío y \mathcal{M} una σ -álgebra de subconjuntos de X .

Definición 2.10. Una medida en \mathcal{M} es una aplicación $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La medida del conjunto vacío es cero, es decir, $\mu(\emptyset) = 0$.
2. La aplicación μ es σ -aditiva, es decir, dada una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces la medida de la unión es la suma de las medidas.

Analicemos la definición anterior desde la perspectiva de la característica de Euler-Poincaré:

- Primero, existen espacios con característica negativa, como por ejemplo un multigrafo con un vértice y dos ciclos.
- Segundo, las medidas satisfacen una propiedad de monotonía, es decir, dados $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Por el contrario, la característica de Euler no satisface esa propiedad. Por ejemplo, la característica de una rosa de tres pétalos (un multigrafo con un vértice y tres ciclos) es menos dos mientras que la característica del vértice es uno.
- Tercero, no hemos obtenido resultados sobre la característica para familias numerables de conjuntos, sino que todos nuestros resultados son para colecciones finitas.

Consecuentemente, presentamos una adaptación original del concepto de medida adecuada para trabajar con la característica de Euler-Poincaré:

Definición 2.11. Sea R un dominio de ideales principales y \mathcal{M} un álgebra de subconjuntos. Llamaremos χ -medida en \mathcal{M} a una aplicación $\mu: \mathcal{M} \rightarrow R$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La medida del conjunto vacío es el cero del anillo R , es decir, $\mu(\emptyset) = 0$.
2. La aplicación μ es aditiva, es decir, dada una colección finita de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces la medida de la unión es la suma de las medidas.

Definición 2.12. Un espacio de medida es una terna (X, \mathcal{M}, μ) , donde X es un conjunto no vacío, \mathcal{M} es una σ -álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en \mathcal{M} . Análogamente, un espacio de χ -medida es una terna (X, \mathcal{M}, μ) donde \mathcal{M} es un álgebra de subconjuntos de X y μ es una χ -medida en \mathcal{M} .

Observación 2.13. La característica de Euler-Poincaré también es una “valuation” en el sentido expuesto en [KR97, Capítulo 2].

2.3. Complejos simpliciales incompletos

En esta sección introducimos los complejos simpliciales incompletos, una generalización de los complejos simpliciales que jugará un papel trascendental en el desarrollo de la teoría de integración respecto a la característica de Euler-Poincaré. En cierto sentido, los complejos simpliciales incompletos son los bloques fundamentales que componen la familia de objetos sobre los que la característica es una medida. Nos basamos en [Van98; CGR12; BG09b]. En lo sucesivo cuando hablemos de complejos simpliciales entenderemos implícitamente que son finitos, tanto si son completos o no. Y lo mismo se aplica a cualquier complejo celular. De todas formas, en algunos teoremas o definiciones enfatizaremos la finitud para que no quepa lugar a confusión.

Recordamos que dados v_0, v_1, \dots, v_n puntos afinmente independientes en \mathbb{R}^m , llamamos n -símplice abierto generado por v_0, \dots, v_n , y lo notamos $[v_0, \dots, v_n]$, al conjunto:

$$[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in \mathbb{R}^m : \sum_i t_i = 1 \text{ y } t_i > 0 \forall i\}.$$

Cada uno de los puntos v_0, \dots, v_n se llaman vértices del n -símplice y los valores t_0, \dots, t_n son las coordenadas baricéntricas respecto a los vértices.

Definición 2.14. Un complejo simplicial incompleto (finito) es una colección finita \mathcal{K} de símplices abiertos en un espacio euclidiano \mathbb{R}^n , satisfaciendo la siguiente condición:

1. La intersección de cualquier par de clausuras de símplices abiertos en \mathcal{K} es el vacío o la clausura de algún símplice en el complejo.

Observación 2.15. Los complejos simpliciales incompletos difieren de los usuales en que los segundos satisfacen que si $\sigma \in \mathcal{K}$, entonces todas las caras de σ están en \mathcal{K} .

Observación 2.16. La subdivisión baricéntrica se extiende a complejos simpliciales incompletos [Van98].

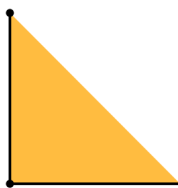


Figura 2.1: Complejo simplicial incompleto que no es un complejo simplicial completo.

En lo sucesivo “complejo simplicial” significará complejo simplicial incompleto, salvo que por el contexto esté claro que nos referimos a uno completo.

Definición 2.17. Dado un complejo simplicial (incompleto) \mathcal{K} , un subcomplejo es una subcolección de símlices de \mathcal{K} . Dado un complejo simplicial \mathcal{K} en \mathbb{R}^n , llamaremos poliedro de \mathcal{K} , y lo notaremos por $|\mathcal{K}|$, al conjunto de todos los símlices de \mathcal{K} dotado de la topología relativa heredada de \mathbb{R}^n .

Observación 2.18. Nótese que los poliedros asociados a complejos simpliciales completos son un caso particular de poliedros asociados a complejos simpliciales incompletos.

Definición 2.19. Dado un espacio topológico X , llamamos triangulación (incompleta) de X a un homeomorfismo entre X y un poliedro asociado a un complejo simplicial incompleto \mathcal{K} . Y decimos que un espacio es triangulable si admite una triangulación.

2.4. Característica e integración

A continuación definimos tanto la característica de Euler como la integral respecto a la característica en el contexto de los complejos simpliciales incompletos finitos. Nos basamos en [Van98; CGR12; BG09b].

Definición 2.20. Sea X un complejo simplicial incompleto finito, entonces se define su característica de Euler combinatoria:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$$

donde c_i es el número de símlices abiertos de dimensión i .

Observación 2.21. Es posible enunciar la Definición 2.20 como un teorema partiendo de la definición de la característica en los complejos simpliciales completos y utilizando las ideas expuestas en [KR97].

Ejemplo 2.22. De nuevo, para conjuntos finitos la característica coincide con la cardinalidad, y para grafos finitos la característica es el número de vértices menos el número de aristas.

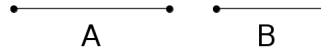


Figura 2.2: La característica del poliedro A es uno mientras que la característica de B es cero.

Observación 2.23. La característica de Euler combinatoria en complejos simpliciales incompletos no es invariante por homotopía. En la figura 2.2 se muestran dos poliedros equivalentes por homotopía cuyas características de Euler difieren.

Sin embargo, la característica sí es un invariante topológico (ver Teorema 6.1). Además la característica sobre complejos simpliciales incompletos satisface el principio de inclusión exclusión. El conjunto complementario de un subcomplejo en un complejo simplicial incompleto es también un subcomplejo. Y la intersección y unión de subcomplejos son de nuevo subcomplejos. Por tanto hemos construido unos objetos a medida para que se cumpla el siguiente resultado.

Teorema 2.24. *La familia de subcomplejos de un complejo simplicial incompleto finito tiene estructura de álgebra de conjuntos y la característica de Euler es una χ -medida.*

De ahora en adelante X será un complejo simplicial incompleto finito salvo que se diga lo contrario.

Definición 2.25. Denotamos por $CF(X)$ el \mathbb{Z} -módulo libre generado por la familia finita de aplicaciones:

$$\mathbb{1}_\sigma: X \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ donde } \mathbb{1}_\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x \in \sigma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde σ es un símplice abierto de X .

Definición 2.26. La integral respecto a la característica de Euler es el homomorfismo denotado por

$$\int_X (\bullet) d\chi: CF(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

que envía un k -símplice abierto a su característica de Euler combinatoria, es decir, a $(-1)^k$.

Al igual que en el contexto de complejos simpliciales completos, si U es un subcomplejo de X , notamos por $\mathbb{1}_U$ la aplicación:

$$\mathbb{1}_U: X \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ donde } \mathbb{1}_U(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además en el contexto de complejos simpliciales incompletos es inmediato que $\mathbb{1}_U \in CF(X)$ y que $\int_X \mathbb{1}_U d\chi = \chi(U)$. Puesto que la característica es un homomorfismo, también

se cumple que dadas una familia finita de subcomplejos de X , $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, y $\phi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$ con $c_\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_X \phi d\chi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \chi(U_\alpha).$$

Otra propiedad interesante de la integración en este contexto es que podemos adaptar ideas de la integral de Lebesgue:

Proposición 2.27. *Dadas una familia finita $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subcomplejos de X y $\phi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$*

con $c_\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_X \phi d\chi = \sum_{k \in \mathbb{R}} k \cdot \chi(\{\phi = k\})$$

donde $\{\phi = k\} := \{x \in X : \phi(x) = k\}$.

Demostración. Por construcción, los conjuntos de nivel de la función son subcomplejos, y el resultado se sigue de la definición de la integral. \square

2.5. Estructuras o-minimales y conjuntos definibles

A continuación introducimos las estructuras o-minimales y los conjuntos definibles. Tales objetos resultan idóneos en la labor probatoria de las propiedades relativas a la integración respecto a la característica de Euler-Poincaré. Seguimos [CGR12; Van98; Van17; BG09b; Rob17].

Comenzamos con una definición alternativa a la presentada en la referencia clásica [Van98], de estructura o-minimal. La equivalencia es consecuencia de [Van98, Lema 2.2, Capítulo 1].

Definición 2.28. Una estructura o-minimal (sobre \mathbb{R}) denota una colección $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Para cada n , \mathcal{A}_n es un álgebra de subconjuntos de \mathbb{R}^n .
2. La familia \mathcal{A} es cerrada respecto a productos cartesianos. Es decir, si $A \in \mathcal{A}_n$ y $B \in \mathcal{A}_m$, entonces $A \times B \in \mathcal{A}_{n+m}$.
3. La familia \mathcal{A} es cerrada respecto a las proyecciones canónicas $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Es decir, si $A \in \mathcal{A}_n$, entonces $\pi(A) \in \mathcal{A}_{n-1}$.
4. Para cada $n \geq 2$ y para cada $1 \leq i, j \leq n$, el conjunto $\Delta_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j\}$ pertenece a \mathcal{A}_n .
5. Los conjuntos de la forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ están en \mathcal{A}_2 .
6. La familia \mathcal{A}_1 es el conjunto de todas las uniones finitas de puntos e intervalos abiertos de \mathbb{R} .

Observación 2.29. Recordamos que dado un espacio afín, un conjunto algebraico es el conjunto de ceros comunes a una familia de polinomios. Algunos autores [CGR12] substituyen la condición (4) por la condición, más restrictiva, siguiente:

- La familia \mathcal{A} contiene todos los conjuntos algebraicos. Con más precisión, cada \mathcal{A}_n contiene todos los conjuntos algebraicos de \mathbb{R}^n , considerado como espacio afín.

Definición 2.30. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces decimos que A es definible si $A \in \mathcal{A}_n$.

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de conjuntos definibles y estructuras o-minimales. Recordamos que una aplicación $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice afín en \mathbb{R}^n si es de la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + a,$$

donde los λ_i y a son números reales.

Definición 2.31. Un conjunto semilineal o semiafín básico en \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_q(x) > 0\},$$

donde las f_i y g_j son aplicaciones afines en \mathbb{R}^n y permitimos que p ó q sean cero. Un conjunto de \mathbb{R}^n se dice semilineal o semiafín si es una unión finita de conjuntos semilineales básicos en \mathbb{R}^n .

Se tiene que la unión e intersección de un número finito de conjuntos semilineales es un conjunto semilineal. Además el conjunto complementario de un conjunto semiafín básico es un conjunto semiafín (aunque no necesariamente básico). Por tanto, los conjuntos semilineales de \mathbb{R}^n forman un álgebra de subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 2.32 ([Van98, Corolario 7.6, Capítulo 1, Capítulo 2]). Sea \mathcal{A}_n el álgebra de subconjuntos semilineales de \mathbb{R}^n . Entonces $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una estructura o-minimal sobre \mathbb{R} .

Sea X un espacio topológico no vacío y $E(X)$ el anillo conmutativo y unitario de funciones reales continuas $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ con las operaciones de suma y producto punto a punto, siendo la función constante igual a uno el neutro para el producto.

Definición 2.33. Decimos que un conjunto $A \subset X$ es un E -conjunto si A es una unión finita de conjuntos de la forma:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_q(x) > 0\},$$

donde las f_i y g_j son funciones reales continuas en X y permitimos que p ó q sean cero.

Se tiene que los E -conjuntos forman un álgebra de subconjuntos de X .

Definición 2.34. Si $X = \mathbb{R}^n$ y $E(X) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es el anillo de polinomios, entonces los E -conjuntos se llaman conjuntos semialgebraicos.

Observación 2.35. Nótese que los conjuntos semilineales de \mathbb{R}^n son conjuntos semialgebraicos.

Ejemplo 2.36 ([Van98, Capítulo 2]). Sea \mathcal{A}_n el álgebra de subconjuntos semialgebraicos de \mathbb{R}^n . Entonces $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una estructura o-minimal sobre \mathbb{R} .

Proposición 2.37 ([Van98, Lema 3.4, Capítulo 1]). *Si el conjunto $A \in \mathbb{R}^n$ es definible en una estructura o-minimal, entonces también lo son su clausura y su interior topológicos.*

Ejemplo 2.38. Puesto que los símlices abiertos son conjuntos semilineales [Van98], entonces los complejos simpliciales incompletos son conjuntos definibles. Como consecuencia de la proposición anterior los complejos simpliciales completos son conjuntos definibles.

Ejemplo 2.39. Las variedades algebraicas afines reales son definibles.

2.6. Aplicaciones definibles

Definición 2.40. Consideremos una estructura o-minimal. Sea $A \in \mathbb{R}^n$. Una aplicación $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice definible en la estructura o-minimal si su grafo es un conjunto definible. Una biyección definible es una aplicación definible y biyectiva. Un homeomorfismo definible es una aplicación definible y homeomorfismo topológico.

Proposición 2.41 ([Van98]). *Sea $A \in \mathbb{R}^n$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación definible. Entonces:*

1. *El dominio de la aplicación f , el conjunto A , es definible.*
2. *La restricción de f a conjuntos definibles es definible.*
3. *La imagen por f de un conjunto definible es definible.*
4. *La preimagen por f de un conjunto definible es definible.*
5. *Si f es inyectiva, entonces f^{-1} es definible.*
6. *La aplicación f es definible si y solo si lo son cada una de sus funciones componentes.*

Lema 2.42 ([Van98]). *Se tiene:*

1. *La composición de dos aplicaciones definibles es una aplicación definible.*
2. *La aplicación identidad en un conjunto definible es una aplicación definible.*

Ejemplo 2.43. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto definible $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación cuyas componentes son funciones polinómicas (en una o varias variables). Entonces f es definible pues su grafo es un conjunto algebraico.

Ejemplo 2.44. Sea $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ una proyección. Entonces π es definible. Por tanto, las proyecciones entre conjuntos definibles son definibles.

Lema 2.45 (Propiedad de haz, [Van98, p. 15]). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto definible y sean A_1, \dots, A_k una colección de conjuntos definibles tales que $A = \cup_i A_i$. Entonces una aplicación $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es definible si y solo si cada restricción $f|_{A_i}$ es definible.*

Ejemplo 2.46. Las aplicaciones simpliciales son definibles. Ello se sigue de combinar la propiedad de haz de las aplicaciones definibles con el Ejemplo 2.43.

Ejemplo 2.47. Una aplicación se dice semialgebraica si su grafo es un conjunto semialgebraico. Las aplicaciones semialgebraicas son definibles.

Como consecuencia del Ejemplo 2.43 se tiene el siguiente par de ejemplos:

Ejemplo 2.48. Un morfismo de conjuntos algebraicos es una aplicación definible.

Ejemplo 2.49. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos semialgebraicos, y $f: A \rightarrow B$ una aplicación regular racional, es decir, cada una de sus componentes es una función racional (el cociente de dos polinomios de forma que el denominador no se anule en A). Entonces f es una aplicación definible.

2.7. Característica de Euler en conjuntos definibles

A continuación presentamos una definición de la característica de Euler-Poincaré combinatoria en conjuntos definibles. Seguimos [Van98; CGR12; BG09b].

Definición 2.50. Dado un conjunto definible X , una triangulación definible de X es un par (\mathcal{K}, ϕ) formado por un complejo simplicial (incompleto) finito y un homeomorfismo definible $\phi: X \rightarrow |\mathcal{K}|$.

Observación 2.51. Dada una triangulación definible de X , (\mathcal{K}, ϕ) , la familia

$$\phi^{-1}(\mathcal{K}) = \{\phi^{-1}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{K}\}$$

es una partición finita de X .

Definición 2.52. Dado un conjunto definible X , una triangulación definible (\mathcal{K}, ϕ) y un subconjunto definible A de X , la triangulación se dice compatible con A si A es unión de elementos de $\phi^{-1}(\mathcal{K})$.

Teorema 2.53 (Teorema de triangulación definible, [Van98, Teorema 1.7, Capítulo 8]). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto definible y sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ una familia finita de subconjuntos definibles de X . Entonces existe una triangulación definible de X compatible con la familia de subconjuntos.*

Definición 2.54. Definimos la característica de Euler de un conjunto definible como la característica del complejo simplicial asociado por el teorema de triangulación definible.

Observación 2.55. En virtud de la invariancia de la característica por biyecciones definibles [Van98, Proposición 2.4, Capítulo 4] la característica está bien definida.

Teorema 2.56. *Sea A un conjunto definible compacto. Entonces A admite una triangulación definible utilizando un complejo simplicial completo.*

Demostración. En virtud del teorema de triangulación definible existe una triangulación definible de A . Denotamos el poliedro correspondiente al complejo simplicial \mathcal{K} de la triangulación por $|\mathcal{K}|$. Se tiene que $|\mathcal{K}|$ es compacto. Puesto que los conjuntos compactos en un espacio Hausdorff son cerrados, $|\mathcal{K}|$ es cerrado, y por tanto es un complejo simplicial completo. \square

En virtud de la coincidencia de la característica combinatoria y homológica en complejos celulares finitos se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.57. *Sea A un conjunto definible compacto. Entonces sus características combinatoria y (co)homológica coinciden.*

Repitiendo el mismo argumento combinatorio utilizado en el caso de CW-complejos, se obtiene el principio de inclusión exclusión para conjuntos definibles (pues admiten una triangulación). También admite la generalización natural a cualquier número finito de conjuntos.

Teorema 2.58 (Principio de inclusión exclusión). *Sean X y Y conjuntos definibles. Entonces:*

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

Como consecuencia del teorema de triangulación y la definición de la característica combinatoria en complejos simpliciales incompletos se tiene:

Teorema 2.59 (Escisión de la característica). *Sean $A \subset X$ dos conjuntos definibles. Entonces:*

$$\chi(X - A) = \chi(X) - \chi(A).$$

Otro resultado relevante es la generalización de la multiplicatividad de la característica de Euler a conjuntos definibles.

Proposición 2.60 ([Van98, Corolario 2.11, Capítulo 4]). *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos definibles. Entonces:*

$$\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B).$$

Observación 2.61. Nótese que en el caso de conjuntos definibles compactos el resultado se sigue de la interpretación homológica de la característica y del Teorema 1.70.

2.8. Definición de la integral

En esta sección introducimos el conjunto de funciones integrables respecto a la característica de Euler-Poincaré en el contexto de estructuras o-minimales y conjuntos definibles. También definimos la integral.

Definición 2.62. Sea X un conjunto definible de \mathbb{R}^n . Denotamos por $CF(X)$ el \mathbb{Z} -módulo de funciones construibles, es decir, funciones $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ con rango acotado, soporte compacto y conjuntos de nivel definibles.

Observación 2.63. Cuando digamos que una función con codominio un subconjunto de los enteros es construible entenderemos que tras extender el codominio a los enteros la función es construible.

Observación 2.64. Al contrario que en la teoría de la medida estudiada en contextos de análisis, en un principio nosotros no pedimos que X sea localmente compacto. Por ejemplo los conjuntos semilineales no necesariamente lo son como es el caso del conjunto representado en la Ilustración 2.1.

De la definición de función construible se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.65. *Sea X un conjunto definible de \mathbb{R}^n . El producto de un número finito de funciones construibles es una función construible.*

Dada una función construible $h \in CF(X)$, puesto que sus conjuntos de nivel son definibles, su rango acotado, la unión finita de conjuntos definibles es un conjunto definible y la clausura de un conjunto definible es definible, entonces el soporte de h , denotado $\text{sop } h$, es un conjunto definible (y compacto). Como consecuencia del teorema de triangulación se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.66 (Deconstrucción de funciones construibles). *Sea X un conjunto definible y $h \in CF(X)$ una función construible. Entonces h puede descomponerse como combinación lineal finita de funciones características en los símlices de una triangulación definible compatible con el soporte de h , es decir: $h = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbb{1}_{\sigma_{\alpha}}$ con $c_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, donde σ_{α} son los símlices abiertos de la triangulación. También se puede escribir la función h como combinación lineal de funciones características en los conjuntos de nivel.*

Observación 2.67. En el enunciado del teorema abusamos del lenguaje. Formalmente, el teorema de triangulación definible garantiza que cualquier función en $CF(X)$ puede descomponerse como combinación lineal finita de funciones características en la descomposición inducida en X por los símlices de una triangulación. Sin embargo, la invariancia de la característica por homeomorfismos definibles justifica el abuso del lenguaje, el cual cometeremos con frecuencia.

Definición 2.68. Se define la integral de Euler como el homomorfismo denotado por

$$\int_X (\bullet) d\chi: CF(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

tal que dada $h = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbb{1}_{\sigma_{\alpha}} \in CF(X)$, entonces $\int_X h d\chi = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \chi(\sigma_{\alpha})$.

Observación 2.69. Recordamos que dos complejos simpliciales completos finitos con el mismo poliedro subyacente admiten una subdivisión simplicial común [FP90, Corolario 3.2.18]. Como consecuencia de ello se tiene que la integral de Euler está bien definida.

De nuevo, si U es un subconjunto definible de X , notamos por $\mathbb{1}_U$ la aplicación:

$$\mathbb{1}_U: X \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ donde } \mathbb{1}_U(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al igual que en el contexto de complejos simpliciales incompletos la característica de Euler es una χ -medida con el álgebra de subconjuntos definibles de \mathbb{R}^n y es inmediato que $\mathbb{1}_U \in CF(X)$ y que

$$\int_X \mathbb{1}_U d\chi = \chi(U).$$

Puesto que la característica es un homomorfismo también se cumple que dadas una familia finita $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos definibles de X , y $h = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha} \mathbb{1}_{U_{\alpha}}$ con $c_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_X h d\chi = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha} \chi(U_{\alpha}).$$

Al igual que antes, podemos adaptar ideas de la integral de Lebesgue:

- Dada una familia finita $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos definibles de X y $h = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha} \mathbb{1}_{U_{\alpha}}$ con $c_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_X h d\chi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \chi(\{h = k\})$$

donde $\{h = k\} := \{x \in X : h(x) = k\}$.

Capítulo 3

Propiedades de la integral

Comenzamos este capítulo demostrando algunas propiedades de la integral respecto a la característica de Euler. Primero exponemos resultados de aditividad de la integral respecto al conjunto de integración y al integrando. Segundo, estudiamos un teorema de Fubini en el contexto del cálculo de Euler. A continuación presentamos un problema de enumeración que motivará la teoría posterior, y una posible solución. Dedicamos el resto del capítulo a desarrollar métodos de cálculo, los cuales se dividen en dos tipos: los generales y válidos en cualquier dimensión, y un método que explota la dualidad de Alexander en dimensión dos.

3.1. Aditividad de la integral

Como consecuencia de que la integral sea un homomorfismo se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1 (Aditividad de la integral respecto al integrando). *Sea X un conjunto definible y $\{h_i\}_i$ un conjunto finito de funciones construibles. Entonces*

$$\int_X \left(\sum_i h_i \right) d\chi = \sum_i \int_X h_i d\chi.$$

Presentamos una consecuencia de la aditividad de la característica de Euler.

Lema 3.2. *Sea X un conjunto definible y sea $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una función construible en X . Sea $\{A, B\}$ un recubrimiento de X formado por conjuntos definibles. Entonces*

$$\int_X h d\chi = \int_A h d\chi + \int_B h d\chi - \int_{A \cap B} h d\chi.$$

Demostración. Combinando el teorema de triangulación aplicado a X y los subconjuntos A , B y $A \cap B$, y el teorema de deconstrucción de funciones construibles se sigue que existe una partición de X en subconjuntos definibles $\{U_\alpha\}_\alpha$ que satisface:

- Una subfamilia $\{U_\beta\}_\beta$ es una partición de A .
- Una subfamilia $\{U_\gamma\}_\gamma$ es una partición de B .
- Una subfamilia $\{U_{\beta,\gamma}\}_{\beta,\gamma}$ de ambas subfamilias es una partición de $A \cap B$.

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_X h d\chi &= \int_{\cup_\alpha U_\alpha} \left(\sum_\alpha c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha} \right) d\chi \\
&= \sum_\alpha c_\alpha \int_{\cup_\alpha U_\alpha} \mathbb{1}_{U_\alpha} d\chi \\
&= \sum_\alpha c_\alpha \int_{U_\alpha} \mathbb{1}_{U_\alpha} d\chi \\
&= \sum_\beta c_\beta \int_{U_\beta} \mathbb{1}_{U_\beta} d\chi + \sum_\gamma c_\gamma \int_{U_\gamma} \mathbb{1}_{U_\gamma} d\chi - \sum_{\beta,\gamma} c_{\beta,\gamma} \int_{U_{\beta,\gamma}} \mathbb{1}_{U_{\beta,\gamma}} d\chi \\
&= \int_A h|_A d\chi + \int_B h|_B d\chi - \int_{A \cap B} h|_{A \cap B} d\chi. \quad \square
\end{aligned}$$

De la misma forma que extendíamos la aditividad de la característica a familia finitas de subcomplejos celulares también se extiende la aditividad respecto al conjunto de integración.

Teorema 3.3 (Aditividad respecto al conjunto de integración). *Sea X un conjunto definible y sea $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una función construible en X . Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de X formado por conjuntos definibles. Entonces*

$$\begin{aligned}
\int_X h d\chi &= \sum_i \int_{X_i} h d\chi - \sum_{i \neq j} \int_{X_i \cap X_j} h d\chi \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \int_{X_i \cap X_j \cap X_k} h d\chi - \dots + (-1)^{m+1} \int_{X_1 \cap \dots \cap X_m} h d\chi.
\end{aligned}$$

3.2. El teorema de Fubini

A continuación exponemos una versión del teorema de Fubini en el contexto del cálculo de Euler. Presentamos una demostración utilizando propiedades de los conjuntos definibles. Para ello enunciamos el teorema de trivialización para aplicaciones definibles, una versión del teorema de triangulación para aplicaciones definibles:

Teorema 3.4 (Teorema de trivialización para aplicaciones definibles, [Van98, Teorema 1.2, Capítulo 9]). *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y definible entre conjuntos definibles. Entonces existen una partición finita de Y en conjuntos definibles $\{Y_i\}_{i=1}^m$ y homeomorfismos definibles $g_i: f^{-1}(Y_i) \rightarrow U_i \times Y_i$, donde los conjuntos $\{U_i\}_{i=1}^m$ son definibles*

y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Y_i) & \xrightarrow[\cong]{g_i} & U_i \times Y_i \\ & \searrow f & \swarrow \pi_2 \\ & & Y_i \end{array}$$

Observación 3.5. De la misma forma que el teorema de triangulación proporciona una triangulación compatible con una familia de subconjuntos, el Teorema 3.4 también admite una versión de compatibilidad con subconjuntos [Van98, Teorema 1.7, Capítulo 9].

Lema 3.6. Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y definible entre conjuntos definibles y sea $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación característica en un subconjunto definible $A \subset X$, $h = \mathbb{1}_A \in CF(X)$. Supongamos que existe un homeomorfismo definible $g: A \rightarrow U \times Y$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\cong]{g} & U \times Y \\ h|_A \downarrow & \searrow f & \swarrow \pi_2 \\ \mathbb{Z} & & Y \end{array}$$

Entonces

$$\int_X h d\chi = \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} h d\chi(x) \right) d\chi(y).$$

Observación 3.7. Estamos abusando de notación pues en el lado derecho habríamos de escribir la restricción de la aplicación h a la fibra, pero lo hacemos así para no sobrecargar la expresión.

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_X h d\chi &= \chi(A) = \chi(U \times Y) = \chi(U) \int_Y \mathbb{1}_Y d\chi \\ &= \int_Y \chi(U) \mathbb{1}_Y d\chi \quad (\text{la integral es un homomorfismo}) \\ &= \int_Y (\chi(U) \cdot 1) \mathbb{1}_Y d\chi \\ &= \int_Y \chi(U) \cdot \chi(y) \mathbb{1}_Y d\chi \\ &= \int_Y \chi(U \times \{y\}) \mathbb{1}_Y d\chi \\ &= \int_Y \chi(\pi_2^{-1}(y)) \mathbb{1}_Y d\chi \\ &= \int_Y \chi(g^{-1} \circ \pi_2^{-1}(y)) \mathbb{1}_Y d\chi \quad (\text{invariancia de } \chi) \\ &= \int_Y \chi(f^{-1}(y)) \mathbb{1}_Y d\chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} \mathbb{1}_{f^{-1}(y)} d\chi(x) \right) \mathbb{1}_Y d\chi(y) \\
&= \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} h d\chi(x) \right) d\chi(y). \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.8 (Fubini). *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y definible entre conjuntos definibles, y sea $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación construible, $h \in CF(X)$. Entonces*

$$\int_X h d\chi = \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} h d\chi(x) \right) d\chi(y).$$

Demostración. Por ser $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación construible, entonces existe una representación de h en una triangulación finita, $h = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{\sigma_\alpha}$ con $c_\alpha \in \mathbb{Z}$ y siendo σ_α los simplices de la triangulación. Utilizando que la integral respecto a la característica de Euler es un homomorfismo la demostración se reduce a probar el teorema en el caso de una aplicación definible con dominio un simple abierto y codominio Y , y una función característica en el simple. En virtud del teorema de trivialización 3.4 existe una partición finita de Y en conjuntos definibles $\{Y_{\alpha_i}\}_{i=1}^{m_\alpha}$ y homeomorfismos definibles $f^{-1}(Y_{\alpha_i}) \cong U_{\alpha_i} \times Y_{\alpha_i}$ donde los conjuntos $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{m_\alpha}$ son definibles, y el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(Y_{\alpha_i}) & \xrightarrow[g_{\alpha_i}]{\cong} & U_{\alpha_i} \times Y_{\alpha_i} \\
& \searrow f & \swarrow \pi_2 \\
& & Y_{\alpha_i}
\end{array}$$

Además la familia $\{f^{-1}(Y_{\alpha_i})\}_{i=1}^{m_\alpha}$ es una partición del simple. La aditividad finita de la integral respecto al conjunto de integración garantiza que es suficiente demostrar el resultado para un miembro de la partición $\{f^{-1}(Y_{\alpha_i})\}_{i=1}^{m_\alpha}$. Y esto último se sigue del lema. Es decir:

$$\begin{aligned}
\int_X h d\chi &= \chi(X) \\
&= \int_X \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{\sigma_\alpha} d\chi \quad (\text{la integral es un homomorfismo}) \\
&= \sum_{\alpha} c_\alpha \int_X \mathbb{1}_{\sigma_\alpha} d\chi \\
&= \sum_{\alpha} c_\alpha \sum_i \int_{f^{-1}(Y_{\alpha_i})} \mathbb{1}_{f^{-1}(Y_{\alpha_i})} d\chi(x) \\
&= \sum_{\alpha} c_\alpha \sum_i \int_{Y_{\alpha_i}} \left(\int_{f^{-1}(y)} \mathbb{1}_{f^{-1}(y)} d\chi(x) \right) \mathbb{1}_{Y_{\alpha_i}} d\chi(y) \quad (\text{Lema 3.6})
\end{aligned}$$

usando aditividad respecto al conjunto de integración:

$$= \sum_{\alpha} c_\alpha \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} \mathbb{1}_{f^{-1}(y)} d\chi(x) \right) \mathbb{1}_Y d\chi(y)$$

$$= \sum_{\alpha} c_{\alpha} \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} \mathbb{1}_{\sigma_{\alpha}} d\chi(x) \right) \mathbb{1}_Y d\chi(y)$$

usando que la integral es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} &= \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbb{1}_{\sigma_{\alpha}} d\chi(x) \right) \mathbb{1}_Y d\chi(y) \\ &= \int_Y \left(\int_{f^{-1}(y)} h d\chi(x) \right) \mathbb{1}_Y d\chi(y). \quad \square \end{aligned}$$

En el teorema de Fubini va implícito el siguiente resultado, que por su importancia resaltamos.

Teorema 3.9. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y definible entre conjuntos definibles, y sea $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación construible, $h \in CF(X)$. Entonces la función $g: Y \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por*

$$g(y) = \int_{f^{-1}(y)} h d\chi$$

es construible.

Demostración. Mantenemos la notación de la demostración del teorema de Fubini. Utilizando un argumento idéntico al usado en el citado teorema se tiene que es suficiente demostrar el resultado en el caso de una función $h \in CF(X)$ constante e igual a C en el miembro $f^{-1}(Y_{\alpha_i})$ de la partición $\{f^{-1}(Y_{\alpha_i})\}_{i=1}^m$. Puesto que $f^{-1}(y) \cong U_{\alpha_i}$, entonces para $y \in Y_{\alpha_i}$, la integral sobre la fibra:

$$g(y) = \int_{f^{-1}(y)} h d\chi$$

es constante e igual a $\chi(U_{\alpha_i}) \cdot C$. Por tanto el rango de g es acotado. Puesto que el soporte de g está contenido en la imagen por f del soporte de h , entonces el soporte de g es compacto. Por construcción los conjuntos de nivel son definibles. \square

3.3. Un problema de enumeración

A continuación exponemos una aplicación de la teoría que hemos desarrollado hasta el momento y que motiva la teoría que sigue. Presentamos un problema de enumeración simplificado.

Sea W un espacio topológico y consideremos un conjunto finito de objetivos (puntos) $\{\mathcal{O}_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ en W . Sea X un espacio topológico formado por sensores. Para cada objetivo \mathcal{O}_{α} definimos su soporte U_{α} como el conjunto de puntos en X que detectan \mathcal{O}_{α} . Pensemos en el caso concreto de una terminal de un aeropuerto. El suelo de la terminal, X , está cubierto con sensores de presión o movimiento. Cada uno de ellos detecta el número de personas en su región de cobertura pero no identifica a las personas. Las regiones de cobertura

se solapan y por ello estamos contando algunas personas varias veces. Por simplicidad podemos incluso asumir que el espacio X de sensores es un continuo, es decir, que en el ejemplo concreto es un abierto de \mathbb{R}^2 [BG08]. El problema consiste en contar el número de personas en la terminal. Ilustramos el caso de la terminal en la Figura 3.1.

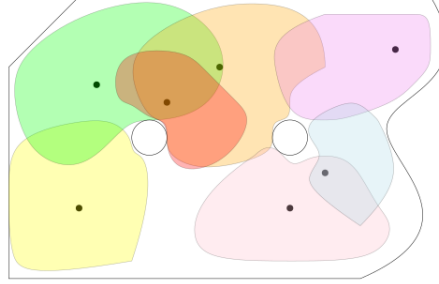


Figura 3.1: Terminal con dos obstáculos (por ejemplo columnas). Se muestran unos objetivos y sus soportes.

Comenzamos con una versión simplificada y formalizada del problema:

Problema 1. *En el espacio topológico W , abierto de \mathbb{R}^n y conjunto definible, está un conjunto finito (pero de cardinalidad desconocida) de puntos $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Cada punto \mathcal{O}_α tiene un entorno definible U_α . El espacio topológico X coincide con W . Cada sensor $x \in X$ detecta al objetivo \mathcal{O}_α si y solo si $x \in U_\alpha$. Determinar la cardinalidad $|I|$ del conjunto de puntos $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in I}$.*

De ahora en adelante llamaremos funciones de conteo a aplicaciones $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ que devuelvan las mediciones de sensores. Tanto en el ejemplo de la terminal como en el caso general definimos una función de conteo $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ que a cada punto de X le asigne el número de soportes a los que pertenece. Es decir, $h = \sum_{\alpha \in I} \mathbb{1}_{U_\alpha}$. De ahora en adelante cuando digamos que una función es construible sobreentendemos que lo es al extender su codominio a \mathbb{Z} .

Teorema 3.10 ([CGR12]). *Sea $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ una función de conteo construible, $h = \sum_{\alpha \in I} \mathbb{1}_{U_\alpha}$, donde los soportes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son conjuntos definibles. Asumamos que la característica de Euler de todos los soportes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ coincide y es distinta de cero. Si denotamos tal característica por N , entonces el número de objetivos es:*

$$|I| = \frac{1}{N} \int_X h d\chi.$$

Demostración. El resultado se sigue de la aditividad finita de la integral y la definición de $h: X \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\int_X h d\chi = \int_X \sum_{\alpha \in I} \mathbb{1}_{U_\alpha} d\chi = \sum_{\alpha \in I} \int_X \mathbb{1}_{U_\alpha} d\chi = \sum_{\alpha \in I} \chi(U_\alpha) = N \cdot |I|. \quad \square$$



Figura 3.2: Una función de conteo definida en soportes con característica cero. Ilustración tomada de [BG09b].

Observación 3.11. Si nos situamos en el problema de redes wifi presentado en la Introducción, este resultado generaliza el allí expuesto pues no se necesitan métricas, simplemente una relación entre sensores y objetivos que permita definir la función de conteo h . El resultado de la Introducción es un caso particular en el que los soportes son bolas.

Observación 3.12. La restricción en el valor de la característica no se debe solo a un problema algebraico en el sentido de que cero no sea una unidad en el cuerpo de los números reales, sino que tiene una manifestación geométrica ejemplificada en la Figura 3.2. En la ilustración de la izquierda expresamos la función como suma de funciones características sobre cuatro conjuntos de característica cero mientras que en la ilustración de la derecha la función se expresa como suma de funciones características sobre seis conjuntos (diferenciados por el color) de característica cero. Como no hay unicidad en la expresión de la función, son admisibles varios valores para el número de objetivos.

Corolario 3.13 ([BG08]). *Sea $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ una función de conteo construible, $h = \sum_{\alpha \in I} \mathbb{1}_{U_\alpha}$, donde los soportes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son conjuntos definibles compactos y contráctiles. Entonces el número de objetivos es:*

$$|I| = \int_X h d\chi.$$

3.4. Métodos de cálculo

En el Teorema 3.10 se enuncia una expresión que permite calcular el número de objetivos integrando una función de conteo. Ahora estudiaremos procedimientos para calcular integrales de funciones de conteo. Seguiremos [BG09b; CGR12].

3.4.1. Conjuntos de recorrido

Comenzamos introduciendo notación que clarificará las demostraciones de esta subsección. Dada una aplicación $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ y un entero k definimos:

- El conjunto de nivel $\{x \in X: h(x) = k\}$, que abreviaremos $\{h = k\}$.

- El conjunto de recorrido superior $\{x \in X : h(x) > k\}$, que abreviaremos $\{h > k\}$.
- El conjunto de recorrido inferior $\{x \in X : h(x) < k\}$, que abreviaremos $\{h < k\}$.

Observación 3.14. En el caso de funciones construibles los conjuntos de recorrido son definibles pues son una unión finita de conjuntos definibles.

Proposición 3.15. *Sea $h \in CF(X)$. Entonces la integral de h respecto a la característica de Euler puede calcularse como sigue:*

$$\int_X h d\chi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \chi\{h = k\} \quad (\text{como suma de conjuntos de nivel}) \quad (3.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{h > k\} - \chi\{h < -k\} \quad (\text{usando conjuntos de recorrido}). \quad (3.2)$$

Demostración. Puesto que los conjuntos de nivel son definibles, entonces podemos escribir $h \in CF(X)$ como $h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \mathbb{1}_{\{h=k\}}$. Ahora la primera forma de calcular la integral es consecuencia de que la integral de una función característica en un conjunto definible es la característica de Euler del conjunto. Para obtener la expresión de la integral usando conjuntos de recorrido comenzamos escribiendo h de forma adecuada:

$$\begin{aligned} h &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \mathbb{1}_{\{h=k\}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k (\mathbb{1}_{\{h \geq k\}} - \mathbb{1}_{\{h > k\}}) + \sum_{k=-\infty}^0 k (\mathbb{1}_{\{h \leq k\}} - \mathbb{1}_{\{h < k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k (\mathbb{1}_{\{h \geq k\}} - \mathbb{1}_{\{h > k\}}) + \sum_{k=0}^{\infty} k (-\mathbb{1}_{\{h \leq -k\}} + \mathbb{1}_{\{h < -k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k (\mathbb{1}_{\{h > k-1\}} - \mathbb{1}_{\{h > k\}}) + \sum_{k=0}^{\infty} k (-\mathbb{1}_{\{h < -k+1\}} + \mathbb{1}_{\{h < -k\}}). \end{aligned}$$

Desarrollando los sumatorios y utilizando sumas telescópicas obtenemos:

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{1}_{\{h > k\}} - \mathbb{1}_{\{h < -k\}}).$$

Para terminar utilizamos de nuevo que la integral de una función característica en un conjunto definible es la característica de Euler del conjunto. \square

Es pertinente hacer unos comentarios acerca de las expresiones (3.1) y (3.2). Primero, en la práctica, trabajamos con funciones de conteo con codominio los números naturales, y por tanto la expresión utilizando conjuntos de recorrido se simplifica. Segundo, las funciones de conteo están definidas como suma de funciones características en subcomplejos (incompletos) de complejos celulares completos. Los conjuntos de recorrido serán compactos (lo

veremos más adelante) mientras que los conjuntos de nivel suelen ser solo relativamente compactos. En estas circunstancias la expresión del cálculo de la integral utilizando conjuntos de recorrido es ventajosa en la medida en la que sobre conjuntos compactos todas las características de Euler que hemos definido coinciden, por lo que podemos utilizar técnicas homológicas y cohomológicas. Tercero, en algunas ocasiones los conjuntos de nivel de las funciones de conteo son frágiles en el sentido de que una pequeña perturbación en $h^{-1}(s)$ con la métrica de Hausdorff [Hen99] cambia la característica de Euler del conjunto de nivel [BG09b]. Por el contrario, los conjuntos de recorrido son más robustos frente a tales cambios. Esta apreciación se visualiza en la Ilustración 3.4 del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.16. En la Figura 3.3 se muestra una familia de soportes contráctiles en una región de \mathbb{R}^2 . En las aplicaciones prácticas lo frecuente es que los sensores proporcionen una función de conteo $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ y la única información sobre los soportes sea su carácter contráctil (generalmente estrellado) y compacto.

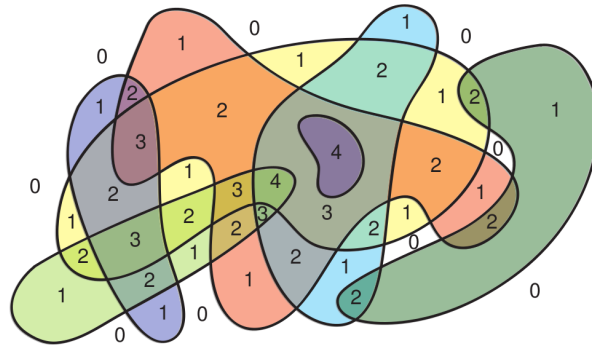


Figura 3.3: Una función de conteo definida en soportes con característica uno. Sin embargo algunos conjuntos de nivel tienen característica distinta de uno. Ilustración tomada de [BG09b].

Procedemos a calcular la integral de la función mediante ambos métodos. En la Figura 3.4 se muestra la familia de conjuntos de recorrido, lo que justifica el segundo cálculo.

$$\begin{aligned} \int_X h d\chi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \chi\{h = k\} \quad (\text{cálculo utilizando conjuntos de nivel}) \\ &= 1 \cdot \chi\{h = 1\} + 2 \cdot \chi\{h = 2\} + 3 \cdot \chi\{h = 3\} + 4 \cdot \chi\{h = 4\} \\ &= (2 - 6) + 2 \cdot (4 - 4) + 3 \cdot (3 - 2) + 4 \cdot 2 = 7. \end{aligned}$$

Para calcular la característica de los conjuntos de nivel hemos usado que eran compactos y la interpretación homológica. En breve veremos que esta idea puede generalizarse.

$$\int_X h d\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{h > k\} \quad (\text{cálculo utilizando conjuntos de recorrido})$$

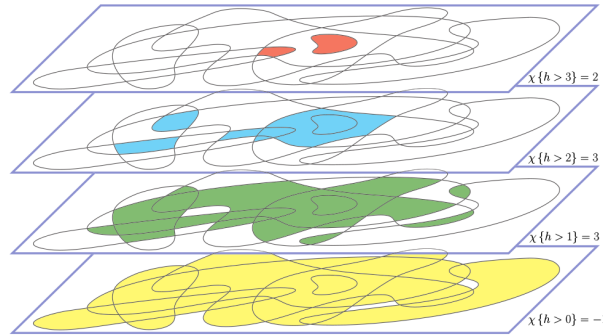


Figura 3.4: Ilustración de los conjuntos de recorrido en la función de conteo. Ilustración tomada de [BG09b].

$$\begin{aligned}
 &= \chi\{h > 0\} + \chi\{h > 1\} + \chi\{h > 2\} + \chi\{h > 3\} \\
 &= -1 + 3 + 3 + 2 = 7.
 \end{aligned}$$

3.4.2. Dualidad y homología

En el cálculo de la integral de la función de conteo del Ejemplo 3.16 hemos utilizado homología para facilitar las cuentas. A continuación intentaremos generalizar este procedimiento. Comenzamos recordando algunas definiciones de [Bou95].

Definición 3.17. Sea X un espacio topológico y $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de los números reales con la topología relativa. Decimos que la función $h: X \rightarrow S$ es semicontinua superiormente en $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto $U_x \subset X$ de x tal que $h(U_x) \subset (-\infty, f(x) + \epsilon)$. Decimos que la función $h: X \rightarrow S$ es semicontinua superiormente en el espacio X si lo es en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 3.18. La función suelo que a cada número real x asigna el mayor entero menor o igual que x , denotado $\lfloor x \rfloor$, es semicontinua superiormente.

En los términos de la definición, una función $h: X \rightarrow S$ es semicontinua superiormente en X si y solo si para todo $s \in S$ la imagen recíproca $f^{-1}((-\infty, s))$ es abierta en X . Por tanto, un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si su función característica es semicontinua superiormente en X . Además, la suma y producto de funciones semicontinuas superiormente son funciones semicontinuas superiormente (asumiendo que estén definidas) [Bou95, Proposición 2, p. 362]. Se sigue que las combinaciones lineales finitas de funciones semicontinuas superiormente son semicontinuas superiormente. En virtud de estas observaciones se tiene:

- Las funciones de conteo expresadas como combinación lineal de funciones características en subcomplejos simpliciales completos son semicontinuas superiormente.
- Las funciones construibles de la forma $h = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$ con $c_\alpha \in \mathbb{Z}$, donde los soportes $\{U_\alpha\}_\alpha$ son cerrados, son semicontinuas superiormente.

A continuación exponemos una consecuencia de una de las formas de dualidad entre homología y cohomología. Obtendremos una forma de calcular integrales respecto a la característica contando componentes conexas.

Lema 3.19. *Sea $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ una función construible y semicontinua superiormente en \mathbb{R}^2 . Entonces dado $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\}$ es compacto.*

Demostración. Comenzamos con algo de notación. Dado un conjunto A , notamos su clausura por $\text{cl}(A)$. Por ser la función $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ construible se tiene que el soporte

$$\text{cl}(\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) \neq 0\}) = \text{cl}(\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > 0\})$$

es compacto. Si vemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > 0\}$$

es cerrado habremos terminado. Recordemos que una función $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ es semicontinua superiormente en \mathbb{R}^2 si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}$ la imagen recíproca $h^{-1}((-\infty, s))$ es abierta en X . Notemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\} = \{x \in \mathbb{R}^2: h(x) \geq k + 1\} = \mathbb{R}^2 - h^{-1}((-\infty, k + 1)). \quad \square$$

Enunciamos un resultado no trivial y demostrado en [Zas99, Teorema 1.2].

Teorema 3.20. *Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^2 , entonces la homología singular de A en dimensiones mayores o iguales que dos es trivial.*

Observación 3.21. Nótese que el Teorema 3.20 no se extiende a dimensión mayor que dos [BM62].

Consideremos un espacio topológico X tal que sus módulos de homología sean de rango finito. Los rangos de los módulos de homología $H_i(X)$ se denominan números de Betti β_i . En particular β_0 es el número de componentes conexas por caminos del espacio.

Teorema 3.22. *Sea $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ una función construible y semicontinua superiormente en \mathbb{R}^2 . Si los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\}$ son localmente contráctiles para todo número natural k , entonces*

$$\int_X h d\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta_0(\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\}) - \beta_0(\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) \leq k\}) + 1 \right).$$

Demostración. Dado un número natural arbitrario k , denotemos $A = \{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\}$. Con esta notación es suficiente demostrar que

$$\chi(A) = \beta_0(A) - \beta_0(\mathbb{R}^2 - A) + 1.$$

Se tiene que el conjunto A :

- es definible por ser una unión finita de conjuntos de nivel (conjuntos definibles),

- es compacto en virtud del Lema 3.19,
- es un subconjunto de \mathbb{R}^2 y por tanto su homología en dimensión mayor o igual que dos es trivial.

El Teorema 2.57 garantiza que la característica de Euler combinatoria de A coincide con su característica de Euler homológica, la cual calcularemos con coeficientes en el cuerpo de los números reales. Por tanto,

$$\chi(A) = \beta_0(A) - \beta_1(A).$$

Veamos ahora que

$$\beta_1(A) = \beta_0(\mathbb{R}^2 - A) - 1.$$

Por una parte, la dualidad de Alexander (para homología singular pues asumimos que A es localmente contráctil) [Hat02, Proposición 3.46] garantiza el isomorfismo

$$H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - A) \cong H^1(A).$$

Por otra parte, la sucesión exacta larga de homología reducida [Hat02] garantiza que tenemos la sucesión exacta:

$$\cdots \rightarrow H_1(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - A) \rightarrow \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^2 - A) \rightarrow \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow \cdots$$

Es decir:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - A) \rightarrow \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^2 - A) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Entonces se tiene el isomorfismo

$$H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - A) \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^2 - A).$$

Además, por la relación entre homología reducida y sin reducir [Hat02] se tiene el isomorfismo

$$H_0(\mathbb{R}^2 - A) \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^2 - A) \oplus \mathbb{R}.$$

Como estamos considerando coeficientes en el cuerpo \mathbb{R} y estamos trabajando con homología y cohomología singulares, del teorema de coeficientes universales de cohomología (Teorema 1.51) se sigue el isomorfismo

$$H_1(A) \cong H^1(A).$$

Y combinando los isomorfismos que hemos obtenido hasta el momento se tiene el isomorfismo

$$H_0(\mathbb{R}^2 - A) \cong H_1(A) \oplus \mathbb{R}.$$

Por tanto

$$\beta_1(A) = \beta_0(\mathbb{R}^2 - A) - 1,$$

como queríamos demostrar. □

Observación 3.23. Procede hacer unos comentarios acerca del Teorema 3.22:

- Nótese que cualquier función construible semicontinua superiormente definida en un subconjunto del plano \mathbb{R}^2 puede extenderse a una función construible y semicontinua superiormente en \mathbb{R}^2 .
- Sea $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ una función construible, semicontinua superiormente en \mathbb{R}^2 , y de conteo sobre un complejo simplicial (la situación frecuente en las aplicaciones). Entonces dado $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\}$ es localmente contráctil en virtud de la finitud local de los complejos simpliciales. Por lo tanto la hipótesis no supone una restricción en las aplicaciones.
- Los resultados [BG09b, Teorema 4.3] y [CGR12, Teorema 17.1], aparentemente más fuertes, en los que se prescinde de la hipótesis de contractibilidad local, precisan de usar la dualidad de Alexander con teorías de cohomología distintas de la singular y no isomorfas en general. En tales artículos no se menciona este problema ni se detalla la demostración. En caso de que tal demostración siguiese las mismas líneas que las aquí presentadas, el argumento problemático sería la utilización del teorema de coeficientes universales de cohomología pues las teorías de cohomología a las que hacemos referencia no son isomorfas en general.
- La fórmula de cálculo de integrales obtenida en el Teorema 3.22 se ha implementado en una aplicación informática, Eucharis, que permite calcular integrales de funciones de conteo respecto a la característica, entre otras funcionalidades [BG].

Ejemplo 3.24. Aplicando el resultado en el caso del Ejemplo 3.16 y utilizando la Figura 3.4 como referencia tenemos:

$$\begin{aligned} \int_X h d\chi &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta_0(\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) > k\}) - \beta_0(\{x \in \mathbb{R}^2: h(x) \leq k\}) + 1 \right) \\ &= \underbrace{(1 - 3 + 1)}_{s=0} + \underbrace{(4 - 2 + 1)}_{s=1} + \underbrace{(3 - 1 + 1)}_{s=2} + \underbrace{(2 - 1 + 1)}_{s=3} = 7. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Funciones \mathbb{R} -valuadas y teoría Morse

En este capítulo extendemos la teoría de integración a funciones \mathbb{R} -valuadas no negativas y probamos algunos resultados que simplifican el cálculo de la integral bajo ciertas hipótesis sobre las funciones a integrar. En particular, definimos la integración en variedades y probamos un resultado de localización que simplifica el cálculo si las funciones objeto de estudio son de Morse.

En líneas generales, nos hemos basado en los trabajos de Baryshnikov, Curry, Ghrist y Robinson [CGR12; BG08; BG10]. Sin embargo, hemos introducido bastantes modificaciones en su exposición. En particular, nosotros construimos la teoría para funciones no negativas y proponemos demostraciones alternativas a muchos resultados. Además definimos la integración en variedades sin necesidad de recurrir a la teoría de Morse estratificada.

4.1. Integral de funciones \mathbb{R} -valuadas no negativas

En esta sección definimos la integración de funciones \mathbb{R} -valuadas no negativas.

Definición 4.1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos definibles en la misma estructura o-minimal. Denotamos por $\text{Def}(A, B)$ el conjunto de aplicaciones definibles $f: A \rightarrow B$ con soporte compacto. Notamos por $\text{Def}(X)$ el conjunto $\text{Def}(X, \mathbb{R})$ y por $\text{Def}_{\geq 0}(X)$ el conjunto $\text{Def}(X, [0, \infty))$.

Integral de funciones \mathbb{R} -valuadas semilineales

Al igual que introdujimos la integración respecto a la característica de funciones \mathbb{Z} -valuadas en la estructura o-minimal de los conjuntos semilineales, ahora volveremos sobre tal estructura minimal para introducir la integración de funciones \mathbb{R} -valuadas. De momento trabajamos en la estructura o-minimal formada por las álgebras de conjuntos semilineales. En particular, asumiremos que X es un complejo simplicial.

Lema 4.2. *Sea $h \in \text{Def}_{\geq 0}(X)$ una función simplicial no negativa y $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces $\lfloor n \cdot h \rfloor$ y $\lceil n \cdot h \rceil$ son funciones construibles.*

Demostración. Probamos que $\lfloor n \cdot h \rfloor$ es construible, el otro caso es análogo. Primero, el rango de $\lfloor n \cdot h \rfloor$ es acotado. Segundo, veamos que el soporte de $\lfloor n \cdot h \rfloor$ es compacto:

$$\begin{aligned} \text{sop } \lfloor n \cdot h \rfloor &= \text{cl}(\{x \in X : \lfloor n \cdot h \rfloor(x) \neq 0\}) \\ &= \text{cl}(\{x \in X : n \cdot h(x) \geq 1\}) \\ &= \text{cl}(\{x \in X : h(x) \geq 1/n\}). \end{aligned}$$

Se tiene que $\text{sop } \lfloor n \cdot h \rfloor$ es cerrado en $\text{sop } h$, que es compacto. Por consiguiente, $\text{sop } \lfloor n \cdot h \rfloor$ es compacto. Tercero, veamos que los conjuntos de nivel de $\lfloor n \cdot h \rfloor$ son definibles. Como la aplicación h es simplicial, trabajamos con complejos simpliciales finitos, y la unión finita de conjuntos definibles es un conjunto definible, es suficiente probar que los conjuntos de nivel de la restricción de $\lfloor n \cdot h \rfloor$ a un símplice son definibles. Se tiene que

$$\{x \in \sigma : \lfloor n \cdot h \rfloor = k\} = \{x \in \sigma : \frac{k}{n} \leq h(x) < \frac{k+1}{n}\}.$$

Puesto que h_σ es definible, entonces los conjuntos

$$\{x \in \sigma : \frac{k}{n} < h(x) < \frac{k+1}{n}\} \quad \text{y} \quad \{x \in \sigma : h(x) = k\}$$

son definibles. En consecuencia, el conjunto

$$\{x \in \sigma : \frac{k}{n} \leq h(x) < \frac{k+1}{n}\}$$

es definible. □

Definición 4.3. Sea X un complejo simplicial. Dada $h \in \text{Def}_{\geq 0}(X)$, definimos:

$$\int_X h \lfloor d\chi \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \lfloor nh \rfloor d\chi, \quad (4.1)$$

$$\int_X h \lceil d\chi \rceil = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \lceil nh \rceil d\chi. \quad (4.2)$$

Lema 4.4 ([BG10, Lema 1]). *Sea Δ un m -símplice completo y σ su interior (un m -símplice abierto). Sea $h \in \text{Def}_{\geq 0}(\Delta)$ una función afín no negativa. Entonces:*

$$\int_\sigma h \lfloor d\chi \rfloor = (-1)^m \text{ínf}_\sigma h, \quad (4.3)$$

$$\int_\sigma h \lceil d\chi \rceil = (-1)^m \text{sup}_\sigma h. \quad (4.4)$$

Demostración. Probamos la primera expresión, la segunda es análoga. En virtud de la Proposición 3.15 se tiene:

$$\int_\sigma h \lfloor d\chi \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_\sigma \lfloor nh \rfloor d\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{\lfloor nh \rfloor > k\}.$$

Si $k < n \cdot \text{ínf}_\sigma h$, entonces $\chi\{\lfloor n \cdot h \rfloor > k\} = \chi(\sigma) = (-1)^k$. Sea $k \geq n \cdot \text{ínf}_\sigma h$. Notemos que h es afín, por tanto sus conjuntos de nivel son la intersección de hiperplanos con el símplice. En consecuencia, si $\lfloor n \cdot h \rfloor > k$, es decir, $n \cdot h \geq k + 1$, entonces $\chi\{\lfloor n \cdot h \rfloor > k\} = 0$. □

Ejemplo 4.5. Los límites (4.1) y (4.2) de la Definición 4.3 no necesariamente coinciden. Consideremos la aplicación identidad en el intervalo $[0, 1]$. Se tiene:

$$\lfloor n \cdot \text{id}_{[0,1]} \rfloor = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ n-1, & \frac{n-1}{n} \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

$$\lceil n \cdot \text{id}_{[0,1]} \rceil = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \vdots & \\ n-1, & \frac{n-2}{n} < x \leq \frac{n-1}{n} \\ 1, & \frac{n-1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_{[0,1]} \text{id}_{[0,1]} \lfloor d\chi \rfloor = 1, \quad (4.5)$$

$$\int_{[0,1]} \text{id}_{[0,1]} \lceil d\chi \rceil = 0. \quad (4.6)$$

Integral de funciones \mathbb{R} -valuadas

Ahora trabajamos en una estructura o-minimal arbitraria. Intentaremos tanto seguir el trabajo de Baryshnikov y Ghrist [BG10] como simplificarlo en algunos puntos que entendemos delicados, dejando constancia de ello cuando lo hagamos.

Definición 4.6. Sea X un conjunto definible. Dada $h \in \text{Def}_{\geq 0}(X)$, definimos:

$$\int_X h \lfloor d\chi \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \lfloor nh \rfloor d\chi. \quad (4.7)$$

$$\int_X h \lceil d\chi \rceil = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \lceil nh \rceil d\chi. \quad (4.8)$$

De la invariancia de la característica de Euler por biyecciones definibles [Van98, Proposición 2.4, Capítulo 4] y la invariancia de la integral en $CF(X)$ por biyecciones definibles se sigue:

Lema 4.7 ([BG10, Lema 2]). *La integración en $\text{Def}_{\geq 0}(X)$ respecto a $\lfloor d\chi \rfloor$ y $\lceil d\chi \rceil$ es invariante por biyecciones definibles.*

Demostración. Supongamos que existe una biyección definible $\phi: X \rightarrow Y$. Sea $h \in \text{Def}_{\geq 0}(X)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_Y h \circ \phi [d\chi] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_Y [n(h \circ \phi)] d\chi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X [nh] d\chi. \end{aligned}$$

Y análogamente para $[d\chi]$. □

Lema 4.8. *Sea X un conjunto definible. Sea $h \in \text{Def}_{\geq 0}(X)$ y continua. Entonces los límites (4.7) y (4.8) de la definición 4.6 están bien definidos. Además, existe una triangulación definible de forma que h sea afín en cada símplice de la triangulación.*

Idea de la demostración. Se sigue de combinar: el teorema de triangulación (Teorema 2.53), el teorema de trivialización en $\text{Def}(X)$, la aditividad de la integral respecto al conjunto de integración, el Lema 4.7 y que la función tiene soporte compacto. □

Exponemos también el resultado, más general, presentado en [BG10].

Lema 4.9 ([BG10, Lema 3]). *Los límites (4.7) y (4.8) de la definición 4.6 están bien definidos. Además, existe una triangulación definible de forma que h sea afín en cada símplice de la triangulación.*

Idea de la demostración. Usamos el teorema de descomposición celular [Van98, (2.11) p. 52] y aditividad finita de la integral respecto al conjunto de integración para estar en las hipótesis del lema anterior. □

Observación 4.10. La demostración esbozada en [BG10] hace referencia directa al teorema de trivialización en $\text{Def}(X)$. Sin embargo, la función h no es necesariamente continua. En nuestra demostración utilizamos previamente el teorema de descomposición celular para obtener una descomposición de X en celdas relativa al soporte de la función de forma que la restricción de la función a cada celda sea continua.

Observación 4.11. Como consecuencia del Lema 4.8 y la aditividad de la integral respecto al conjunto de integración es suficiente demostrar las propiedades de la integral para una función afín en un símplice de una triangulación.

A continuación demostraremos un caso particular del resultado [BG10, Proposición 2].

Teorema 4.12. *Sea X un conjunto definible y sea $h \in \text{Def}_{\geq 0}(X)$ una función \mathbb{R} -valuada no negativa. Entonces:*

$$\int_X h [d\chi] = \int_{s=0}^{\infty} \chi\{h \geq s\} ds. \quad (4.9)$$

Demostración. En virtud de la observación 4.11 es suficiente probar el resultado para una función h afín y no negativa en un símplice σ . Se tiene:

$$\int_{\sigma} h [d\chi] = (-1)^k \inf_{\sigma} h = \int_{s=0}^{\infty} \chi(\sigma \cap \{h \geq s\}) ds. \quad \square$$

4.2. Integración en variedades

En [BG10] se integra en variedades sin demostrar que son conjuntos definibles. Nosotros exponemos un enfoque alternativo. Guiados por las mismas ideas que nos llevarán a exponer los conjuntos homeomorfos a definibles en el Capítulo 6 e inspirándonos en el Teorema 4.12, definiremos la integración en variedades. Recordamos que una aplicación se dice propia si las imágenes inversas de conjuntos compactos son conjuntos compactos.

Definición 4.13. Sea M una variedad diferenciable con borde. Una subvariedad con borde embebida $S \subset M$ se dice propiamente embebida si la inclusión $i: S \hookrightarrow M$ es una aplicación propia.

Definición 4.14. Sea M una variedad diferenciable con borde. Un dominio regular en M es una subvariedad con borde propiamente embebida y de codimensión cero.

Teorema 4.15 ([Lee12, Proposición 5.47]). *Sea M una variedad diferenciable y sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Entonces para cada valor regular b de h , los conjuntos $h^{-1}((-\infty, b])$ y $h^{-1}([b, \infty))$ son dominios regulares en M . Además, si $a < b$ es también un valor regular, entonces $h^{-1}(a, b)$ también es un dominio regular en M .*

Lema 4.16 ([Lee12, Proposición 5.49]). *Sea M una subvariedad con borde. Una subvariedad con borde embebida $S \subset M$ es propiamente embebida si y solo si es cerrada como subconjunto.*

Como consecuencia de los resultados previos y del teorema de Sard [Lee12, Teorema 6.10] es pertinente la siguiente definición de integral de una función diferenciable y no negativa en una variedad respecto a la característica de Euler-Poincaré.

Definición 4.17. Sea M una variedad diferenciable compacta y $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y no negativa. Entonces definimos:

$$\int_M h [d\chi] = \int_{s=0}^{\infty} \chi\{h \geq s\} ds. \quad (4.10)$$

4.3. Teoría de Morse

En esta sección enunciamos algunos resultados y definiciones tomados de [Mil63] y que utilizaremos más adelante.

Definición 4.18. Sea M una variedad diferenciable y sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto crítico $p \in M$ de h se dice no degenerado si y solo si la matriz

$$H(p) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} (p) \right)$$

es no singular.

Definición 4.19. Sea M una variedad diferenciable, sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $p \in M$ un punto crítico de h . Se define el índice de h en p , denotado $\mu(p)$, como la dimensión del subespacio maximal de $T_p M$ en el que $H(p)$ es definida negativa.

Definición 4.20. Sea M una variedad diferenciable. Sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. La función h se dice de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Observación 4.21. Dada una variedad diferenciable M . Existen funciones de Morse [Mil63, Teorema 6.6].

Teorema 4.22 ([Mil63, Teorema 3.1]). *Sea M una variedad diferenciable y sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sean $a < b$ y supongamos que $h^{-1}([a, b])$ es compacto y no contiene puntos críticos de h . Entonces $h^{-1}((-\infty, a])$ y $h^{-1}((-\infty, b])$ son homótopos.*

Teorema 4.23 ([Mil63, Teorema 3.2]). *Sea M una variedad diferenciable, sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea p un punto crítico no degenerado con índice $\mu(p)$. Denotemos $h(p) = s$ y supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $h^{-1}([s - \epsilon, s + \epsilon])$ es compacto y no contiene otros puntos críticos de h distintos de p . Entonces, para todo $\delta \in (0, \epsilon)$, el conjunto $h^{-1}((-\infty, s + \delta])$ tiene el tipo de homotopía de $h^{-1}((-\infty, s - \delta])$ tras adjuntarle una celda de dimensión $\mu(p)$.*

4.4. Integración en variedades y teoría de Morse

En esta sección relacionamos la integración en variedades previamente definida con la teoría de Morse mediante un resultado de localización, el cual reducirá el cálculo de la integral a un número finito de cálculos en unos valores singulares. En los trabajos de Baryshnikov y Ghrist [BG08; BG10] se presenta el resultado que nosotros exponemos. En [BG10] se demuestra utilizando técnicas de teoría de Morse estratificada, mientras que en [BG08] se esboza una posible demostración sin apenas proporcionar detalles, utilizando métodos de teoría de Morse clásica. Nuestra exposición está influenciada por [Sch17].

Teorema 4.24. *Sea M una variedad diferenciable cerrada (compacta sin borde) de dimensión m . Sea $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse no negativa y supongamos que h toma valores distintos en los puntos críticos. Entonces*

$$\int_M h [d\chi] = \sum_{p \in \mathcal{C}(h)} (-1)^{\mu(p)} h(p)$$

donde $\mathcal{C}(h)$ denota el conjunto finito de puntos críticos no degenerados de h .

Demostración. Por definición se tiene:

$$\int_M h [d\chi] = \int_{s=0}^{\infty} \chi\{h \geq s\} ds. \quad (4.11)$$

Estudiemos la función $\Psi: M \rightarrow [0, \infty)$ dada por $\Psi(s) = \chi\{h \geq s\}$. Puesto que h es Morse y está definida en una variedad compacta, entonces el Teorema 4.22 garantiza que

Ψ es continua a trozos con un número finito de saltos. Además, las discontinuidades se producen en las imágenes de los puntos críticos no degenerados de h (Teorema 4.23). Los puntos críticos no degenerados están aislados unos de otros, es decir, podemos separarlos por entornos abiertos [Mil63, Corolario 2.3]. Sea $p \in \mathcal{C}(h)$ un punto crítico de índice $\mu(p)$ y tomemos $\epsilon > 0$ tal que p sea el único punto crítico no degenerado en $(s - \epsilon, s + \epsilon)$. Entonces para todo $\delta < \epsilon$ y $\delta > 0$, el conjunto $h^{-1}((-\infty, s + \delta])$ tiene el tipo de homotopía de $h^{-1}((-\infty, s - \delta])$ tras adjuntarle una celda de dimensión $\mu(p)$.

Comenzamos con $\chi\{h \geq 0\} = \chi(M)$. Denotemos $\mathcal{C}(h) = \{p_1, \dots, p_k\}$ donde

$$s_1 = h(p_1) < \dots < s_k = h(p_k).$$

Al alcanzar s_i se produce un salto en el tipo de homotopía. Puesto que (salvo homotopía y siendo todos los espacios que intervienen compactos) quitamos una celda, entonces

$$\chi\{h \geq s_i + \epsilon_i\} = \chi\{h \geq s_i - \epsilon_i\} - (-1)^{\mu(p_i)} = \chi\{h \geq s_i - \epsilon_i\} + (-1)^{\mu(p_i)+1}$$

para $\epsilon_i > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto:

$$\chi(h \geq s) = \chi(M) + \sum_{i, s_i < s} (-1)^{\mu(p_i)+1} \mathbb{1}_{[s_i, \infty)}(s).$$

Sea $S > s_k$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{s=0}^{\infty} \chi\{h \geq s\} ds &= \int_{s=0}^{\infty} \chi(M) + \sum_{i, s_i < s} (-1)^{\mu(p_i)+1} \mathbb{1}_{[s_i, \infty)} ds \\ &= \int_{s=0}^S \chi(M) + \sum_{i, s_i < s} (-1)^{\mu(p_i)+1} \mathbb{1}_{[s_i, \infty)} ds \\ &= S \cdot \chi(M) + \sum_i (-1)^{\mu(p_i)+1} \int_{s=0}^S \mathbb{1}_{[s_i, \infty)} ds \\ &= S \cdot \chi(M) - \sum_i (-1)^{\mu(p_i)} \int_{s=0}^S \mathbb{1}_{[s_i, \infty)} ds \\ &= S \cdot \chi(M) - \sum_i (-1)^{\mu(p_i)} (S - s_i) \\ &= S \cdot \chi(M) - S \cdot \left(\sum_i (-1)^{\mu(p_i)} \right) + \sum_i (-1)^{\mu(p_i)} h(p_i) \\ &= S \cdot \chi(M) - S \cdot \chi(M) + \sum_i (-1)^{\mu(p_i)} h(p_i) \\ &= \sum_i (-1)^{\mu(p_i)} h(p_i) \quad \square \end{aligned}$$

Observación 4.25. La hipótesis sobre los valores de h en los puntos críticos simplifica la demostración pero no es necesaria. La demostración se adapta en el caso de prescindir de ella siguiendo [Mil63, Observación 3.3].

Observación 4.26. Hemos obtenido un resultado distinto al planteado en [BG10], en tal referencia obtienen:

$$\int_M h [d\chi] = \sum_{p \in \mathcal{C}(h)} (-1)^{m-\mu(p)} h(p).$$

Es decir, obtienen coíndices donde nosotros obtenemos índices. Ello parece deberse a que los autores tomaron la función de Morse “al revés”.

Capítulo 5

Aplicaciones del cálculo de Euler en redes de sensores

En este capítulo exponemos algunas aplicaciones de la teoría previamente desarrollada. Primero abordamos varios problemas de cuantificación de objetivos que surgen como modificaciones o generalizaciones del problema de enumeración tratado en el Capítulo 3. Segundo, estudiamos la discretización de los sensores y apuntamos procedimientos para adaptar los resultados matemáticos a las aplicaciones.

5.1. Problemas de enumeración con objetivos móviles

Denotemos por $\{\mathcal{O}_\alpha\}_\alpha$ una colección finita de objetivos en movimiento en $W \subset \mathbb{R}^n$, por ejemplo vehículos circulando por carreteras. Notamos por $\mathcal{O}_\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow W$, siendo I un intervalo de \mathbb{R} , cada una de las curvas continuas asociadas a los objetivos. Asumimos que W es un subespacio con propiedades razonables: un abierto conexo, una variedad topológica conexa, o un complejo simplicial finito conexo, por ejemplo. La hipótesis de conexión no supone pérdida de generalidad pues en otro caso se estudiaría cada una de las componentes conexas por separado y se sumaría el número de objetivos detectados en cada una de ellas. También asumimos, de momento, que el espacio W está cubierto por sensores, como un continuo. El problema a resolver consiste en determinar la cantidad de objetivos.

Podemos abordar el problema desde dos enfoques distintos, el presente en la bibliografía [BG09b; BG10] o una aportación original. La primera posibilidad consiste en asumir que el tiempo es un continuo, como se hace en [BG09b], o bien podemos considerar un número finito de mediciones realizadas en un número finito de instantes, lo frecuente en las aplicaciones. En ambos casos notemos por $U_\alpha(t)$ el conjunto de los puntos de W que detectan a \mathcal{O}_α en el instante t . Puesto que W está cubierto por sensores, entonces $U_\alpha(t) \neq \emptyset$ para todo α y todo instante. Discutiremos ambos enfoques comenzando por el segundo.

Tiempo discreto

Denotemos por $T = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_m\}$ el conjunto finito de los instantes de tiempo (en orden creciente) en los que se realizan las mediciones. Para simplificar la notación denotaremos por t un elemento arbitrario de T . A partir de las mediciones de los sensores se tiene una función de conteo: $h: W \rightarrow \mathbb{N}$ donde $h(w)$ es el número de pares (α, t) tales que $w \in U_\alpha(t)$.

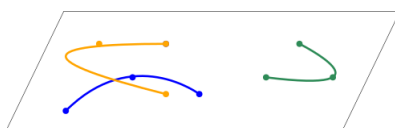


Figura 5.1: Los recorridos de los objetivos.

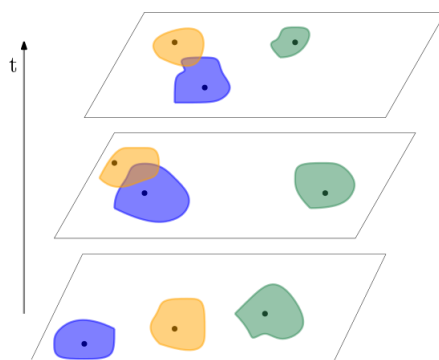


Figura 5.2: Los soportes de los objetivos para tres instantes de tiempo: el inicial, uno intermedio y el final.

Teorema 5.1. *En las condiciones previas asumamos además:*

1. Cada conjunto $U_\alpha(t)$ es definible, compacto y contráctil.
2. El conjunto W es definible.
3. La función de conteo $h: W \rightarrow \mathbb{N}$ es construible.

Entonces el número de objetivos es $\frac{1}{|T|} \int_W h d\chi$.

Demostración. Denotemos por X el nuevo espacio de sensores $X = W \times T$ y consideremos la proyección $\pi: X \rightarrow W$. Los soportes de los objetivos en X son los conjuntos $U_\alpha = \bigcup_t U_\alpha(t) \times \{t\}$. Además:

- Cada conjunto $U_\alpha(t)$ es definible. Como los puntos son conjuntos definibles y el producto de conjuntos definibles es definible, entonces también son definibles los conjuntos $U_\alpha(t) \times \{t\}$. Por tanto es definible el conjunto $U_\alpha = \bigcup_t U_\alpha(t) \times \{t\}$.
- Cada conjunto U_α es la unión disjunta de $|T| = m + 1 \geq 1$ conjuntos contráctiles.
- Cada uno de los conjuntos $U_\alpha(t) \times \{t\}$ es compacto, por tanto también lo es el conjunto U_α por ser unión disjunta de un número finito de compactos.
- En consecuencia, $\chi(U_\alpha) = |T| > 0$, pues la característica de Euler es un invariante homotópico en los conjuntos compactos.

Consideremos la función de conteo $g: X \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g = \sum_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$. El Teorema 3.10 garantiza que el número de objetivos es $\frac{1}{|T|} \int_X g d\chi$. Utilizando que la integración respecto a la característica es un homomorfismo, que T es un conjunto finito, la multiplicatividad de la característica, y la aditividad finita respecto al conjunto de integración se tiene:

$$\int_X g d\chi = \int_W \left(\int_{\pi^{-1}(w)} g d\chi \right) d\chi.$$

Para cada α , el conjunto

$$\pi^{-1}(w) \cap U_\alpha = (\{w\} \times T) \cap \left(\bigcup_t U_\alpha(t) \times \{t\} \right) = \bigcup_t ((w \cap U_\alpha(t)) \times \{t\})$$

es la unión disjunta finita de conjuntos compactos. Cada conjunto de la unión corresponde a la detección en w del objetivo \mathcal{O}_α . Por lo tanto:

$$h(w) = \int_{\pi^{-1}(w)} g d\chi.$$

En consecuencia:

$$\int_W h d\chi = \int_W \left(\int_{\pi^{-1}(w)} g d\chi \right) d\chi = \int_X g d\chi.$$

Por consiguiente, el número de objetivos es $\frac{1}{|T|} \int_W h d\chi$. □

Observación 5.2. Nótese que la hipótesis de contractibilidad no es restrictiva en las aplicaciones pues lo habitual es que los objetivos actúen como puntos distinguidos en conjuntos estrellados.

Tiempo continuo

Exponemos el enfoque con un intervalo de tiempo continuo. Seguiremos [BG09b; CGR12]. Sin embargo, añadiremos hipótesis adicionales al teorema para poder dar una demostración rigurosa. Finalmente discutiremos tales hipótesis. Consideremos un intervalo de tiempo $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Cada vez que $w \in W$ detecta un objetivo, es decir, está en un soporte $U_\alpha(t)$, el sensor en w incrementa su contador en una unidad. Se tiene una función de conteo $h: W \rightarrow \mathbb{N}$ donde $h(w)$ es el número de veces que w ha entrado en algún soporte $U_\alpha(t)$.

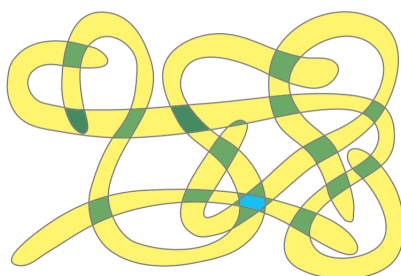


Figura 5.3: Los recorridos de los objetivos en el caso de tiempo continuo. Ilustración tomada de [BG09b].

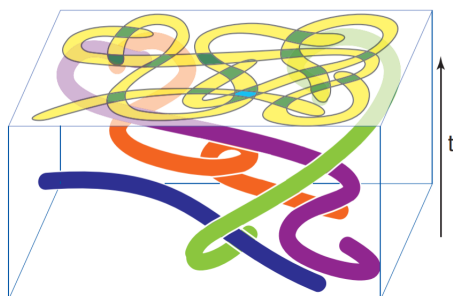


Figura 5.4: Los soportes de los objetivos en el caso de tiempo continuo. Ilustración tomada de [BG09b].

Teorema 5.3. *En las condiciones previas asumamos además:*

1. Cada conjunto $U_\alpha(t)$ es una bola cerrada de dimensión n . Y los radios de las bolas $U_\alpha(t)$ varían de forma continua respecto a t .
2. El conjunto W es definible.
3. La función de conteo h es construible.
4. Cada conjunto $U_\alpha = \bigcup_{t \in [0, T]} U_\alpha(t) \times \{t\}$ es definible.

Entonces el número de objetivos es $\int_W h d\chi$.

Demostración. Primero, las bolas cerradas de dimensión n son conjuntos definibles pues son semialgebraicos. Además son compactos y contráctiles. Notemos por $r_\alpha: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ la función que a cada instante de tiempo le asocia el radio de la bola $U_\alpha(t)$. Al igual que en la demostración anterior, denotemos por X el nuevo espacio de sensores $X = W \times [0, T]$ y consideremos la proyección $\pi: X \rightarrow W$. Los soportes de los objetivos en X son los conjuntos $U_\alpha = \bigcup_t U_\alpha(t) \times \{t\}$. Además:

- Cada conjunto $U_\alpha = \bigcup_t U_\alpha(t) \times \{t\}$ es cerrado y acotado como subespacio de un espacio euclidiano, por tanto compacto. Además U_α es contráctil.
- En consecuencia, $\chi(U_\alpha) = 1$, pues la característica de Euler es un invariante homotópico en los conjuntos compactos.

Consideremos la función de conteo $g: X \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g = \sum_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$. El Teorema 3.10 garantiza que el número de objetivos es $\int_X g d\chi$. En virtud del teorema de Fubini:

$$\int_X g d\chi = \int_W \left(\int_{\pi^{-1}(w)} g d\chi \right) d\chi.$$

Para cada α , el conjunto

$$\pi^{-1}(w) \cap U_\alpha = (\{w\} \times [0, T]) \cap \left(\bigcup_t U_\alpha(t) \times \{t\} \right)$$

es la unión disjunta finita de conjuntos compactos. Cada conjunto de la unión corresponde a una entrada de w en alguno de los soportes $U_\alpha(t)$. Por lo tanto:

$$h(w) = \int_{\pi^{-1}(w)} g d\chi.$$

En consecuencia:

$$\int_W h d\chi = \int_W \left(\int_{\pi^{-1}(w)} g d\chi \right) d\chi = \int_X g d\chi. \quad \square$$

Observación 5.4. Las hipótesis del teorema pueden debilitarse, es suficiente que cada conjunto $U_\alpha(t)$ sea compacto, definible y contráctil siempre que mantengamos la hipótesis sobre la definibilidad de los conjuntos:

$$U_\alpha = \bigcup_{t \in [0, T]} U_\alpha(t) \times \{t\}.$$

En [BG09b] no se asume la hipótesis sobre la definibilidad de los conjuntos U_α a pesar de que es necesaria para que g sea una función construible.

Ejemplo 5.5. Los resultados que acabamos de plantear pueden aplicarse al problema de cuantificación del número de vehículos circulando por una región, por ejemplo un conjunto de carreteras o una ciudad. Para ello se podrían utilizar sensores acústicos o colocar chips en los vehículos que emitiesen unas ondas detectables por los sensores a emplear.

5.2. Problemas de enumeración con frentes de onda

Denotemos por $\{\mathcal{O}_\alpha\}_\alpha$ una colección finita de puntos en $W \subset \mathbb{R}^n$. De nuevo asumimos que W es un subconjunto o subespacio “razonable” de \mathbb{R}^n . Cada \mathcal{O}_α representa un evento o foco emisor de ondas, y no necesariamente todos los eventos ocurren simultáneamente. Ahora bien, asumimos que están temporalmente próximos, y puede ocurrir que unos sean causados por los otros. Por ejemplo este es el caso de un terremoto donde uno de los eventos es el foco del terremoto y otros eventos son los focos de las réplicas. Cada evento se propaga en forma de ondas que se van atenuando hasta ser indetectables. Cada sensor de W detecta los frentes de onda que pasan por él y va incrementando un contador con cada uno de ellos. Finalmente esto se refleja en una función de conteo construible $h: W \rightarrow \mathbb{N}$. El problema a resolver consiste en calcular el número de eventos.

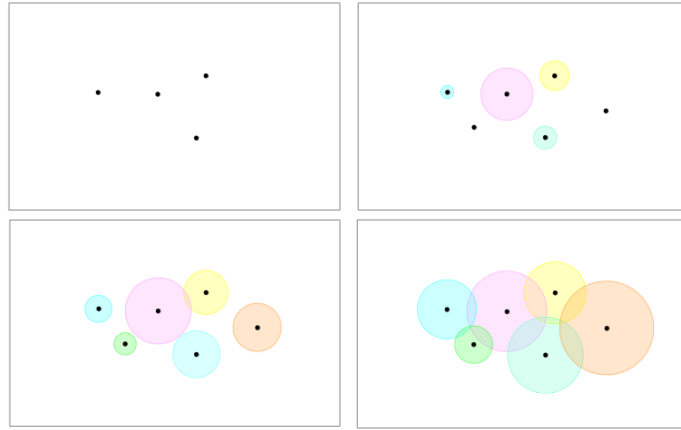


Figura 5.5: Frentes de onda y las bolas asociadas a cada evento para distintos tiempos en el caso de una región del plano. En la ilustración superior izquierda se muestra el instante inicial y en la figura inferior derecha se muestra el instante final.

Primero, asumimos que las perturbaciones generadas en los eventos pueden representarse mediante funciones continuas y definibles, y que los conjuntos de nivel de estas funciones, es decir, los frentes de onda, son esferas $\partial\mathbb{B}_\alpha^n$ (\mathbb{B}_α^n es una bola compacta de dimensión n) cuyo radio depende del tiempo, aunque no indicamos tal dependencia para no sobrecargar la notación. Puesto que los frentes de onda se van atenuando hasta ser indetectables, estas aplicaciones son “funciones meseta” con soporte la bola compacta correspondiente al conjunto de nivel de mayor radio. El último frente de onda detectable proveniente de cada evento induce una aplicación continua y definible $F_\alpha: \mathbb{B}_\alpha^n \rightarrow W$, que lleva cada rayo geodésico desde el origen de la bola al punto correspondiente de la frontera (el frente de ondas). Formalizamos el problema:

Problema 2. *El espacio W es definible. En él están una familia finita (pero de cardinalidad desconocida) de puntos \mathcal{O}_α y unas aplicaciones continuas y definibles asociadas $F_\alpha: \mathbb{B}_\alpha^n \rightarrow W$. Cada sensor de W detecta los frentes de onda que pasan por él y va incrementando*

un contador con cada uno de ellos. Finalmente esto se refleja en una función de conteo construible $h: W \rightarrow \mathbb{N}$. Determinar la cardinalidad de la familia $\{\mathcal{O}_\alpha\}_\alpha$.

Teorema 5.6. *En las condiciones anteriores, si cada sensor en $w \in W$ incrementa su contador interno en $\chi(F_\alpha^{-1}(w))$ cuando el frente de ondas correspondiente a \mathcal{O}_α lo alcanza, entonces el número de eventos es $\int_W h d\chi$.*

Demostración. Sea $X = \cup_\alpha \mathbb{B}_\alpha^n \subset W$. Denotemos por $\tilde{h}: X \rightarrow \mathbb{N}$ la función dada por:

$$\tilde{h}(x) = \sum_\alpha \mathbb{1}_{\mathbb{B}_\alpha^n}.$$

La función $\tilde{h}: X \rightarrow \mathbb{N}$ es construible, está en las hipótesis del Teorema 3.10, y la característica de todos los soportes es uno. Por tanto el número de objetivos es $\int_X \tilde{h} d\chi$. Además:

$$\begin{aligned} \int_X \tilde{h} d\chi &= \sum_\alpha \int_W \left(\int_{F_\alpha^{-1}(w)} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_\alpha^n} d\chi \right) d\chi \quad (\text{Fubini}) \\ &= \int_W \sum_\alpha \left(\int_{F_\alpha^{-1}(w)} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_\alpha^n} d\chi \right) d\chi \\ &= \int_W \sum_\alpha \left(\chi(F_\alpha^{-1}(w)) d\chi \right) d\chi \\ &= \int_W h d\chi. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 5.7. En vista de la demostración del Teorema 5.6, notemos que el resultado puede generalizarse y trabajar con conjuntos estrellados respecto a los focos en lugar de bolas.

5.3. Aproximaciones simpliciales

Hasta el momento hemos estudiado problemas de conteo de objetivos asumiendo que el espacio de sensores era “un continuo”. Lo habitual en las aplicaciones es disponer de un número finito de sensores, normalmente en el mismo espacio donde están los objetivos. Por ello, a continuación exponemos una adaptación de la teoría desarrollada al supuesto de finitud del número de sensores.

Notemos el espacio donde están los objetivos por \mathcal{W} y el conjunto finito de sensores por $\mathcal{N} \subset \mathcal{W}$. Seguimos [BG09a].

Consideremos una aproximación simplicial (utilizando complejos simpliciales incompletos) de \mathcal{W} que tenga como vértices los elementos de \mathcal{N} . Para ello estamos utilizando el teorema de triangulación y estamos asumiendo que los sensores están razonablemente distribuidos. Denotemos el complejo simplicial por X . Conocemos el valor de la función de

conteo h en los vértices de X y la extendemos a todo el complejo utilizando la interpolación lineal a trozos que denotamos $h_{PL}: X \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, h_{PL} es una función afín en cada símplice. Mediante este procedimiento hemos obtenido una función con valores en el cuerpo de los números reales. De momento no hemos definido una teoría de integración para estas funciones. Así que, para resolver este problema consideramos la parte entera o función suelo de la función $h_{PL}: X \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $\lfloor h_{PL} \rfloor: X \rightarrow \mathbb{N}$. Puesto que la interpolación lineal a trozos de la función de conteo en los vértices de una triangulación es una función continua, y la función suelo es semicontinua superiormente, entonces $\lfloor h_{PL} \rfloor$ es semicontinua superiormente.

Utilizando un argumento análogo al presentado en la demostración del Lema 4.2 se tiene:

Lema 5.8. *La función $\lfloor h_{PL} \rfloor$ es construible.*

Veamos que la integral de $\lfloor h_{PL} \rfloor$ proporciona una buena estimación del número de objetivos.

Teorema 5.9. *Sea $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ una función de conteo construible y semicontinua superiormente satisfaciendo*

$$\{h \geq k\} = \text{cl}(\text{int}(\{h \geq k\})). \quad (5.1)$$

Entonces para una triangulación suficientemente densa y regular:

$$\int_X \lfloor h_{PL} \rfloor d\chi = \int_X h d\chi.$$

Demostración. Primero, notemos que el soporte de la función $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ es la clausura de la unión de un número finito de conjuntos de nivel, y por tanto es definible y compacto. Por tanto es triangulable y la triangulación es finita y compacta. Durante el resto de la demostración denotemos por σ un símplice abierto arbitrario de la triangulación y por Δ su clausura. Afirmamos que existe una triangulación que verifica las siguientes condiciones:

1. El máximo de la aplicación $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ restringida a Δ se alcanza en alguno de los vértices de Δ . Esto se sigue de que la función $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ es semicontinua superiormente y la hipótesis (5.1).
2. Los conjuntos de recorrido de $h|_{\Delta}: \Delta \rightarrow \mathbb{N}$ son contráctiles. Partimos de una triangulación, y si esta condición fallase para algún símplice, entonces refinaríamos la triangulación mediante subdivisiones baricéntricas en ese símplice (y posteriormente en el resto de símplices para obtener una triangulación) hasta que la condición se cumpliera. Como la triangulación es finita (y por tanto también el número de símplices), acabaremos este proceso en un número finito de pasos.

Sea $M = \max_{\Delta} h$ y sea $m = \max_{\Delta} \lfloor h_{PL} \rfloor$. Dada una triangulación que satisfaga las condiciones anteriores, el resultado 3.15 sobre los métodos de cálculo de integrales garantiza que:

$$\int_{\Delta} h d\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{h > k\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{M-1} \chi\{h > k\} + \sum_M^{\infty} \chi\{h > k\} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \chi\{h > k\} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} 1 = M.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} [h_{PL}] d\chi &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{[h_{PL}] > k\} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \chi\{[h_{PL}] > k\} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} 1 = M.
\end{aligned}$$

Por tanto, para un s3mplice arbitrario se tiene:

$$\int_{\Delta} h d\chi = \int_{\Delta} [h_{PL}] d\chi.$$

Y de la aditividad de la integral respecto al conjunto de integraci3n se sigue el resultado. \square

Observaci3n 5.10. Es posible combinar la aproximaci3n simplicial que acabamos de exponer con las ideas de la teor3a de Morse expuestas en el Cap3tulo 4. Concretando un poco, se puede definir una teor3a de Morse para funciones lineales a trozos (PL para abreviar) definidas en complejos simpliciales finitos completos [Rom17], por ejemplo la funci3n h_{PL} restringida a su soporte. Asumiendo que la funci3n h_{PL} fuese de Morse en el sentido PL [Rom17] y que sus valores en los distintos v3rtices fuesen distintos, entonces se tienen resultados an3logos al Teorema 4.22 y al Teorema 4.23 ([Rom17, Teorema 5.1] y [Rom17, Teorema 5.2], respectivamente) en el contexto PL, los cuales permiten reproducir el argumento utilizado en la demostraci3n del Teorema 4.24.

Ejemplo 5.11. En la Figura 5.6 mostramos una funci3n de conteo definida en un subconjunto del plano y la aproximaci3n lineal a trozos sobre una triangulaci3n. Calculando ambas integrales, $\int_{\Delta} h d\chi$ y $\int_{\Delta} [h_{PL}] d\chi$ utilizando el resultado de dualidad 3.22 se obtiene que la integral vale cuatro. Por ambos procedimientos se obtiene lo mismo.

Observaci3n 5.12. Aplicar el Teorema 5.9 puede ser problem3tico y producir errores en las integrales si las curvas de nivel de los soportes son tangentes. V3ase la Figura 5.7 para una ilustraci3n.

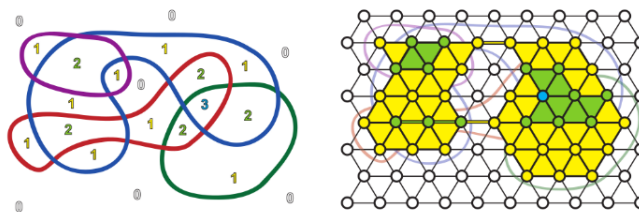


Figura 5.6: Conjuntos de nivel de la función y la triangulación asociada. Figuras tomadas de [BG09b].

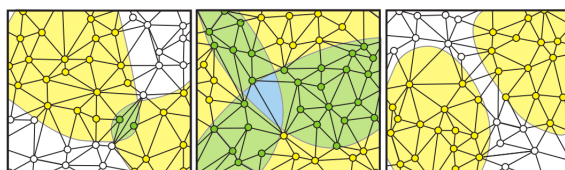


Figura 5.7: Ilustración de triangulaciones inadecuadas. Figuras tomadas de [BG09b].

Hemos visto que las aplicaciones simpliciales son definibles. Del teorema de aproximación simplicial [Bre93, Teorema 22.10] se sigue que las aplicaciones continuas entre conjuntos definibles compactos pueden aproximarse por aplicaciones simpliciales (por tanto continuas y definibles). Con más precisión:

Teorema 5.13. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre conjuntos definibles. Denotemos por $|\mathcal{K}|$ y $|\mathcal{K}'|$ los poliedros asociados a X e Y , respectivamente, por el teorema de triangulación definible. Entonces existe una aplicación simplicial $g: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{K}'|$ satisfaciendo:*

1. *Las aplicaciones f y g son homótopas.*
2. *Dado $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que tras iterar r subdivisiones baricéntricas sucesivas en ambos complejos, se tiene $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in X$.*

Observación 5.14. La hipótesis de compacidad garantiza la existencia del r .

Capítulo 6

Aplicaciones del cálculo de Euler en geometría y topología

Comenzamos el capítulo extendiendo la definición de característica de Euler-Poincaré y la integración respecto a la característica a espacios homeomorfos a conjuntos definibles, unos objetos que permiten justificar rigurosamente algunos resultados enunciados en los trabajos de Baryshnikov, Curry, Ghrist y Robinson [BG09b; CGR12], por ejemplo [BG09b, Proposición 15.1]. Sin embargo, tales objetos no fueron mencionados ni estudiados explícitamente en tales artículos.

A continuación presentamos un resultado clásico acerca de la característica de Euler de los espacios de revestimiento. Finalmente, utilizamos los espacios homeomorfos a conjuntos definibles para demostrar, utilizando la integración respecto a la característica, dos resultados que lo generalizan. Primero exponemos una demostración alternativa a las que hemos encontrado en la literatura consultada de la relación entre las características de Euler-Poincaré de los espacios que intervienen en un fibrado localmente trivial. Segundo, exponemos una demostración de la fórmula de Riemann-Hurewitz alternativa a la expuesta en [Vir88].

6.1. Espacios homeomorfos a conjuntos definibles, característica, integración y resultados de enumeración

En esta sección exponemos ideas originales. Primero presentamos algunos ejemplos de espacios homeomorfos a conjuntos definibles. A continuación introducimos una noción de característica de Euler para tales espacios. Finalmente desarrollamos una teoría de integración en los citados espacios, la cual nos permitirá demostrar la relación entre las características de Euler-Poincaré de los espacios que intervienen en un fibrado localmente trivial y la fórmula de Riemann-Hurewitz.

Ejemplos de espacios homeomorfos a conjuntos definibles

Se tienen los siguientes ejemplos de espacios homeomorfos a conjuntos definibles:

1. Los subcomplejos de un complejo simplicial incompleto son conjuntos definibles.
2. Los subcomplejos de un CW-complejo finito y regular son espacios homeomorfos a conjuntos definibles pues son triangulables y la triangulación es finita (Teorema 1.28).
3. Las variedades diferenciables compactas son espacios homeomorfos a conjuntos definibles, pues son triangulables (Teorema 1.29).
4. Las variedades topológicas (con o sin borde) de dimensión uno, dos o tres son espacios homeomorfos a conjuntos definibles pues son triangulables (Teorema 1.30).

Característica de los espacios homeomorfos a definibles

El siguiente resultado de Beke [Bek11] permite definir la característica de Euler-Poincaré de espacios homeomorfos a conjuntos definibles.

Teorema 6.1 ([Bek11, Teorema 2.2]). *Sean X e Y dos conjuntos definibles. Si X e Y son homeomorfos (sin necesidad de que el homeomorfismo sea definible), entonces sus características de Euler coinciden.*

Idea de la demostración. Primero expresamos X como unión de estratos (esta descomposición de X es una generalización de la descomposición celular de un CW-complejo):

$$X = \bigsqcup_{i=0}^n X^i.$$

Además lo hacemos de tal forma que cada estrato X^i sea un espacio localmente compacto. Recordamos que dado un espacio localmente compacto Z , podemos definir su cohomología con soporte compacto $H_c^*(Z)$ y su característica homológica que denotaremos $\chi_H(Z)$ [Hat02; Bek11; CGR12]. Además, la característica (co)homológica con coeficientes en un cuerpo y la característica combinatoria coinciden en espacios localmente compactos [Bek11; CGR12]. Sea $h: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. El homeomorfismo nos proporciona una estratificación [Bek11] de Y y se restringe a homeomorfismos $h_i: X_i \rightarrow Y_i$ entre los estratos. A continuación utilizamos la aditividad de la característica combinatoria y que los estratos son espacios localmente compactos:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n \chi(X^i) = \sum_{i=0}^n \chi_H(X^i) = \sum_{i=0}^n \chi_H(Y^i) = \sum_{i=0}^n \chi(Y^i) = \chi(Y). \quad \square$$

Definición 6.2. Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible. Se define $\chi(X)$ como la característica de Euler combinatoria de uno de los conjuntos definibles a los que X es homeomorfo.

Observación 6.3. Como consecuencia del Teorema 6.1 la característica de los espacios homeomorfos a conjuntos definibles está bien definida.

Como consecuencia de los resultados enunciados para conjuntos definibles se tiene el siguiente teorema:

Teorema 6.4. *Sean X, Y, A y B espacios homeomorfos a conjuntos definibles. Se tiene:*

1. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ una familia finita de subconjuntos de X homeomorfos a conjuntos definibles. Entonces existe una triangulación de X compatible con la familia de subconjuntos.*
2. *Si X es compacto, entonces X admite una triangulación utilizando un complejo simplicial completo.*
3. *Si X es compacto, entonces sus características combinatoria y (co)homológica coinciden.*
4. *(Principio de inclusión exclusión). Se tiene:*

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

5. *(Escisión de la característica). Si $A \subset X$, entonces:*

$$\chi(X - A) = \chi(X) - \chi(A).$$

6. *(Multiplicatividad de la característica). Se tiene:*

$$\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B).$$

Integración en los conjuntos homeomorfos a definibles

Definición 6.5. Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible Y y denotemos por $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ el homeomorfismo. Denotamos por $HCF(X)$ el \mathbb{Z} -módulo de funciones $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ con rango acotado, soporte compacto y conjuntos de nivel homeomorfos a subconjuntos definibles de Y mediante restricciones de h .

Se tiene una extensión inmediata del teorema de deconstrucción de funciones construibles (Teorema 2.66):

Teorema 6.6. *Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible y $h \in HCF(X)$. Entonces h puede descomponerse de forma única como combinación lineal finita de funciones características en los símlices abiertos de una triangulación compatible con el soporte de h , es decir: $h = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbb{1}_{\sigma_{\alpha}}$ con $c_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, donde σ_{α} son los símlices de la triangulación. También se puede escribir la función h como combinación lineal de funciones características en los conjuntos de nivel.*

Análogamente, se tiene una extensión inmediata de la definición de integral respecto a la característica de Euler-Poincaré de funciones construibles (Definición 2.68):

Proposición 6.7. *Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible y $h \in HCF(X)$. Entonces está bien definida la integral respecto a la característica de Euler-Poincaré de la función h . Con más precisión, si $h = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbb{1}_{\sigma_{\alpha}} \in HCF(X)$, entonces*

$$\int_X h d\chi = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \chi(\sigma_{\alpha}).$$

De nuevo, si U es un subespacio de X homeomorfo a un conjunto definible, $\mathbb{1}_U \in HCF(X)$ y $\int_X \mathbb{1}_U d\chi = \chi(U)$. Puesto que la característica es un homomorfismo también se cumple que dadas una familia finita $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de X homeomorfos a conjuntos definibles, y $h = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha} \mathbb{1}_{U_{\alpha}}$ con $c_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_X h d\chi = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha} \chi(U_{\alpha}).$$

Los resultados de aditividad de la integral también se adaptan sin apenas modificar las demostraciones al contexto de conjuntos homeomorfos a definibles:

Teorema 6.8 (Aditividad de la integral respecto al integrando). *Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible y $\{h_i\}_i$ un conjunto finito de funciones en $HCF(X)$. Entonces*

$$\int_X \sum_i h_i d\chi = \sum_i \int_X h_i d\chi.$$

Teorema 6.9 (Aditividad respecto al conjunto de integración). *Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible y sea $h: X \rightarrow \mathbb{Z}$ una función en $HCF(X)$. Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento finito de X formado por subespacios homeomorfos a definibles. Entonces*

$$\begin{aligned} \int_X h d\chi &= \sum_i \int_{X_i} h d\chi - \sum_{i \neq j} \int_{X_i \cap X_j} h d\chi \\ &+ \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \int_{X_i \cap X_j \cap X_k} h d\chi - \dots + (-1)^{m+1} \int_{X_1 \cap \dots \cap X_m} h d\chi. \end{aligned}$$

Resultados de enumeración

El Teorema 3.10 se generaliza sin apenas cambios en la demostración dando lugar al siguiente resultado de enumeración de objetivos:

Teorema 6.10. *Consideremos el contexto de la Sección 3.3. Sea X un espacio homeomorfo a un conjunto definible y sea $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ una función de conteo en $HCF(X)$, $h = \sum_{\alpha \in I} \mathbb{1}_{U_{\alpha}}$, donde los soportes $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ son subespacios homeomorfos a conjuntos definibles. Asumamos*

que la característica de Euler de todos los soportes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ coincide y es distinta de cero. Si denotamos tal característica por N , entonces el número de objetivos es:

$$|I| = \frac{1}{N} \int_X h d\chi.$$

El Teorema 5.1 también se generaliza sin apenas cambios en la demostración dando lugar al siguiente resultado de enumeración de objetivos en movimiento utilizando un número finito de instantes de tiempo:

Teorema 6.11. *En el contexto de la sección 5.1 asumamos:*

1. Cada subespacio $U_\alpha(t)$ es homeomorfo a un conjunto definible, compacto y contráctil.
2. El espacio W es homeomorfo a un conjunto definible.
3. La función de conteo $h: W \rightarrow \mathbb{N}$ está en $HCF(W)$.

Entonces el número de objetivos es $\frac{1}{|T|} \int_W h d\chi$.

Observación 6.12. En el caso de suponer que el tiempo es un continuo la generalización no es inmediata pues precisamos el teorema de Fubini.

6.2. Característica de Euler-Poincaré de un fibrado localmente trivial

En esta sección aplicamos la generalización de la integración a espacios homeomorfos a conjuntos definibles para demostrar la relación entre las características de Euler-Poincaré de los espacios que intervienen en un fibrado localmente trivial.

Definición 6.13. Sean E , B y F espacios topológicos, y sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. La aplicación $p: E \rightarrow B$ se dice un fibrado localmente trivial de fibra genérica F si para todo $y \in B$ existen un entorno abierto $U \subset B$ de y (llamado abierto de trivialización) y un homeomorfismo $h: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{h} & F \times U \\ & \searrow p & \swarrow \pi_2 \\ & & U \end{array}$$

En el caso de que la fibra sea discreta, entonces el fibrado es un espacio de revestimiento. Y en estas circunstancias se tiene un resultado clásico sobre la característica de Euler-Poincaré. Recordamos que dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre CW-complejos, decimos que f es celular si manda el i -esqueleto de X en el i -esqueleto de Y .

Teorema 6.14 ([Bre93, p. 215]). *Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación de revestimiento con cardinalidad de la fibra finita igual a k y B un CW-complejo finito. Entonces, E puede dotarse de una estructura de CW-complejo finito de forma que la aplicación $p: E \rightarrow B$ sea celular y $\chi(E) = k \cdot \chi(B)$.*

Idea de la demostración. Primero se levanta la estructura celular de B inductivamente, comenzando por el 0-esqueleto. Para levantar cada celda se utiliza el criterio de levantamiento de aplicaciones [Lee11, Teorema 11.18]. Mediante este procedimiento, por cada celda en B tendremos k celdas en E . Además la aplicación $p: E \rightarrow B$ es celular. De la definición de característica de Euler-Poincaré se sigue el resultado. \square

Teorema 6.15. *Sea $p: E \rightarrow B$ un fibrado localmente trivial de fibra genérica F donde los espacios E , B y F son homeomorfos a conjuntos definibles y B es compacto. Entonces $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.*

Demostración. Puesto que B es compacto podemos recubrirlo con una familia finita de abiertos de trivialización que denotaremos $\{U_i\}_{i \in I}$. Denotemos $I = \{1, \dots, m\}$. Consideremos una triangulación de B y realizamos subdivisiones baricéntricas hasta obtener una familia finita $\{B_i\}_{i \in I}$ de subespacios de B homeomorfos a conjuntos definibles, que recubra B y satisfaga $B_i \subset U_i$ para todo $i \in I$. En estas condiciones se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_X \mathbb{1}_E d\chi &= \sum_i \int_{p^{-1}(B_i)} \mathbb{1}_E d\chi - \sum_{i \neq j} \int_{p^{-1}(B_i) \cap p^{-1}(B_j)} \mathbb{1}_E d\chi \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \int_{p^{-1}(B_i) \cap p^{-1}(B_j) \cap p^{-1}(B_k)} \mathbb{1}_E d\chi - \dots \\
&\quad + (-1)^{m+1} \int_{p^{-1}(B_1) \cap \dots \cap p^{-1}(B_m)} \mathbb{1}_E d\chi \\
&= \sum_i \int_{p^{-1}(B_i)} \mathbb{1}_E d\chi - \sum_{i \neq j} \int_{p^{-1}(B_i \cap B_j)} \mathbb{1}_E d\chi \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \int_{p^{-1}(B_i \cap B_j \cap B_k)} \mathbb{1}_E d\chi - \dots + (-1)^{m+1} \int_{p^{-1}(B_1 \cap \dots \cap B_m)} \mathbb{1}_E d\chi \\
&= \sum_i \chi(p^{-1}(B_i)) - \sum_{i \neq j} \chi(p^{-1}(B_i \cap B_j)) \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \chi(p^{-1}(B_i \cap B_j \cap B_k)) - \dots + (-1)^{m+1} \chi(p^{-1}(B_1 \cap \dots \cap B_m)) \\
&= \sum_i \chi(B_i \times F) - \sum_{i \neq j} \chi((B_i \cap B_j) \times F) \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \chi((B_i \cap B_j \cap B_k) \times F) - \dots + (-1)^{m+1} \chi((B_1 \cap \dots \cap B_m) \times F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \chi(B_i) \cdot \chi(F) - \sum_{i \neq j} \chi(B_i \cap B_j) \cdot \chi(F) \\
&\quad + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \chi(B_i \cap B_j \cap B_k) \cdot \chi(F) - \cdots + (-1)^{m+1} \chi(B_1 \cap \cdots \cap B_m) \cdot \chi(F) \\
&= \chi(F) \cdot \left(\sum_i \chi(B_i) - \sum_{i \neq j} \chi(B_i \cap B_j) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \chi(B_i \cap B_j \cap B_k) - \cdots + (-1)^{m+1} \chi(B_1 \cap \cdots \cap B_m) \right) \\
&= \chi(F) \cdot \chi(B). \quad \square
\end{aligned}$$

Observación 6.16. El Teorema 6.15 generaliza los resultados relacionados acerca de la característica de Euler-Poincaré de un fibrado localmente trivial [Ser51; Spa50; Shi17] o simplifica las demostraciones.

6.3. La fórmula de Riemann-Hurwitz

En esta sección exponemos la aplicación clásica del “Euler Calculus”, la demostración del teorema de Riemann-Hurwitz sobre aplicaciones de revestimiento ramificado entre superficies de Riemann. De hecho, los orígenes del “Euler Calculus” se remontan a [Vir88], donde se demuestra la fórmula de Riemann-Hurwitz, además de otros resultados. Allí el enfoque es propio de la geometría algebraica. Nosotros presentamos un enfoque original para probar el resultado, desde el punto de vista de la topología, y utilizando la generalización de la integración respecto a la característica en conjuntos homeomorfos a definibles.

Preliminares sobre superficies de Riemann

Nos basaremos en la exposición sobre superficies de Riemann en [Ful95]. En lo que resta, por variedad entenderemos variedad sin borde.

Definición 6.17. Una superficie de Riemann es una variedad topológica S compleja de dimensión uno y real de dimensión dos, conexa y con cambios de cartas biholomorfos.

Definición 6.18. Una aplicación continua entre variedades de Riemann se dice holomorfa si lo es al leerla en coordenadas.

Dada una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann $f: S \rightarrow \tilde{S}$ y un punto $x \in S$ siempre existen cartas (U, ϕ) y $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ de S y \tilde{S} , respectivamente, de forma que la

lectura local en coordenadas de f alrededor de x , $g = \tilde{\phi} \circ f \circ \phi^{-1}$, se exprese como una serie convergente [Ful95]:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \quad (6.1)$$

Dada la expresión (6.1), el menor número natural e tal que $a_e \neq 0$ (no depende de la lectura en coordenadas [Ful95]) se llama índice de ramificación de la aplicación f en x y se nota $e_f(x)$ o $e(x)$ si sobreentendemos la aplicación. En caso de no existir tal número natural (la aplicación es localmente constante en x , y por tanto constante por ser una función holomorfa), entonces el índice es infinito. No estaremos interesados en aplicaciones constantes. Dada la aplicación analítica entre superficies de Riemann $f: S \rightarrow \tilde{S}$, diremos que un punto $x \in S$ es de ramificación si $e_f(x) > 1$.

Definición 6.19. Dada una aplicación $f: S \rightarrow \tilde{S}$ sobreyectiva y continua entre superficies de Riemann, decimos que es una aplicación de revestimiento ramificado si existe un subconjunto finito $R \subset \tilde{S}$ tal que la restricción

$$f|_{S-f^{-1}(R)}: S - f^{-1}(R) \rightarrow \tilde{S} - R$$

es una aplicación de revestimiento (conexa).

Ejemplo 6.20. Sean r_1 y r_2 números reales tales que $0 \leq r_1 < r_2$, y denotemos

$$\mathbb{A}(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r_1 < |z| < r_2\}.$$

Consideremos la aplicación:

$$f: \mathbb{A}(r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{A}(r_1^3, r_2^3)$$

dada por $f(z) = z^3$. Se tiene que es una aplicación de revestimiento. Si $r_1 = 0$ y añadimos el origen a ambos discos punteados, entonces obtenemos una aplicación de revestimiento ramificado.

Dadas dos superficies de Riemann compactas S y \tilde{S} hay una correspondencia entre revestimientos ramificados y aplicaciones holomorfas no constantes. Con más precisión enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración se sigue de combinar [Ful95, Proposición 19.3, p. 266] y [Ful95, Proposición 19.9, p. 271].

Teorema 6.21 (Correspondencia entre revestimientos ramificados y aplicaciones holomorfas no constantes). *Sea $f: S \rightarrow \tilde{S}$ una aplicación holomorfa y no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces:*

1. *Hay un número finito de puntos de ramificación. Sea $T \subset S$ el conjunto de los puntos de ramificación y notemos $R = f(T) \subset \tilde{S}$.*
2. *La restricción de f entre $S - f^{-1}(R)$ y $\tilde{S} - R$ es una aplicación de revestimiento conexa con cardinalidad de la fibra constante, digamos n , que también llamamos grado.*

3. Para cualquier punto $y \in \tilde{S}$,
$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x) = n.$$

Recíprocamente, sea \tilde{S} una superficie de Riemann, R un subconjunto finito de \tilde{S} , S° un espacio topológico y $f: S^\circ \rightarrow \tilde{S} - R$ una aplicación de revestimiento conexa con cardinalidad de la fibra finita. Entonces existe un embebimiento de S° como abierto en una superficie de Riemann S , que es unión de S° y un conjunto finito, de forma que f se extienda a una aplicación analítica y propia de S a \tilde{S} . En particular, si \tilde{S} es compacta, entonces también lo será S .

La fórmula de Riemann-Hurwitz

Las superficies de Riemann compactas son espacios homeomorfos a conjuntos definibles pues son triangulables (con una triangulación completa). Sea $f: S \rightarrow \tilde{S}$ una aplicación de revestimiento ramificado entre dos superficies de Riemann compactas, o equivalentemente, una aplicación holomorfa no constante.

Consideremos la restricción de f a $S - f^{-1}(R)$ siendo R la imagen de los puntos de ramificación. El Teorema 6.21 garantiza que es una aplicación de revestimiento conexa con cardinalidad de la fibra constante, digamos n . Sea (\mathcal{K}, ϕ) una triangulación de \tilde{S} tal que en los puntos de R haya vértices. Podemos obtener una triangulación que satisfaga tal condición partiendo de una triangulación finita y aplicando subdivisiones.

Subdividimos de nuevo la triangulación para que una vez suprimidos los puntos de R , los restantes símlices de la triangulación sean compatibles con el recubrimiento finito por abiertos lisos de $\tilde{S} - R$. Ahora levantamos la triangulación de \tilde{S} a S [Ful95, p. 273-p. 274]. La triangulación (incompleta) de $\tilde{S} - R$ se levanta por una aplicación de revestimiento, y por tanto en la triangulación correspondiente de $S - f^{-1}(R)$ hay n símlices por cada uno de abajo. Sin embargo el número de vértices en S correspondientes a cada vértice en R es variable, y está determinado por su índice de ramificación. Con más precisión, el teorema anterior garantiza que dado $y \in \tilde{S}$, se tiene

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x) = n.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in f^{-1}(y)} (e_f(x) - 1) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x) - |f^{-1}(y)| \\ &= n - |f^{-1}(y)|. \end{aligned}$$

Por tanto, dado $y \in \tilde{S}$, el número de puntos de $f^{-1}(y)$ es

$$n - \sum_{x \in f^{-1}(y)} (e_f(x) - 1).$$

Denotamos $R = \{y_1, \dots, y_m\}$. Notemos que $S - f^{-1}(R)$ y $f^{-1}(R)$ son conjuntos homeomorfos a conjuntos definibles. Ahora operamos y usamos aditividad respecto al conjunto de integración:

$$\begin{aligned}
\chi(S) &= \int_S \mathbb{1}_S d\chi \\
&= \int_{S-f^{-1}(R)} \mathbb{1}_S d\chi + \int_{f^{-1}(R)} \mathbb{1}_S d\chi \\
&= \chi(S - f^{-1}(R)) + \int_{f^{-1}(R)} \mathbb{1}_S d\chi \\
&= \chi(\tilde{S} - R) \cdot n + \int_{f^{-1}(R)} \mathbb{1}_S d\chi \\
&= \chi(\tilde{S} - R) \cdot n + \sum_{j=1}^m \int_{p^{-1}(y_j)} \mathbb{1}_S d\chi \\
&= \chi(\tilde{S} - R) \cdot n + \sum_{j=1}^m \chi(p^{-1}(y_j)) \\
&= \chi(\tilde{S} - R) \cdot n + \sum_{j=1}^m \left(n - \sum_{x \in f^{-1}(y_j)} (e_f(x) - 1) \right) \\
&= \chi(\tilde{S} - R) \cdot n + m \cdot n - \sum_{j=1}^m \sum_{x \in f^{-1}(y_j)} (e_f(x) - 1) \\
&= \chi(\tilde{S} - R) \cdot n + \chi(R) \cdot n - \sum_{j=1}^m \sum_{x \in f^{-1}(y_j)} (e_f(x) - 1) \\
&= \chi(\tilde{S}) \cdot n - \sum_{j=1}^m \sum_{x \in f^{-1}(y_j)} (e_f(x) - 1) \\
&= \chi(\tilde{S}) \cdot n - \sum_{x \in f^{-1}(R)} (e_f(x) - 1) \\
&= n\chi(\tilde{S}) - \sum_{x \in S} (e_f(x) - 1).
\end{aligned}$$

Como consecuencia de lo expuesto se tiene el teorema de Riemann-Hurwitz.

Teorema 6.22 (Riemann-Hurwitz). *Sea $f: S \rightarrow \tilde{S}$ una aplicación de revestimiento ramificado entre dos superficies de Riemann compactas (sin borde), o equivalentemente, una aplicación holomorfa no constante. Entonces las características de Euler de las superficies S y \tilde{S} están relacionadas por la siguiente expresión:*

$$\chi(S) = n\chi(\tilde{S}) - \sum_{x \in S} (e_f(x) - 1).$$

Bibliografía

- [Bek11] T. Beke. Topological invariance of the combinatorial Euler characteristic of tame spaces. *Homology, Homotopy, Appl.* 13.2 (2011), págs. 165-174.
- [BG] Y. Baryshnikov y R. Ghrist. *Eucharis: Euler Characteristic Integration Software*: URL: <http://www.math.upenn.edu/~ghrist/eucharis/eucharis.jar>.
- [BG08] Y. Baryshnikov y R. Ghrist. Target enumeration via integration over planar sensor networks. *Proceedings of Robotics: Science and Systems* (2008).
- [BG09a] Y. Baryshnikov y R. Ghrist. Target enumeration via Euler characteristic integrals. *Preprint* (2009). URL: <https://www.math.upenn.edu/~ghrist/preprints/eulerenumerationpart1.pdf>.
- [BG09b] Y. Baryshnikov y R. Ghrist. Target enumeration via Euler characteristic integrals. *SIAM J. Appl. Math.* 70.3 (2009), págs. 825-844.
- [BG10] Y. Baryshnikov y R. Ghrist. Euler integration over definable functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 107.21 (2010), págs. 9525-9530.
- [BM62] M.G. Barratt y J. Milnor. An example of anomalous singular homology. *Proc. Am. Math. Soc.* 13.2 (1962), págs. 293-297.
- [Bou95] N. Bourbaki. *General Topology. Chapters 1-4, Elements of Mathematics*. Springer, 1995.
- [Bre93] G.E. Bredon. *Topology and Geometry*. Grad. Texts in Math. Springer, 1993.
- [CGR12] J. Curry, R. Ghrist y M. Robinson. Euler calculus with applications to signals and sensing. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. Vol. 70. 2012, págs. 75-146.
- [Ear99] E. Early. On the Euler characteristic. *MIT Undergr. J. Math* 1 (1999), págs. 37-48.
- [EH10] H. Edelsbrunner y J. Harer. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2010.
- [FP90] R. Fritsch y R. Piccinini. *Cellular Structures in Topology*. Vol. 19. Cambridge University Press, 1990.
- [Ful95] W. Fulton. *Algebraic Topology: A First Course*. Vol. 153. Grad. Texts in Math. Springer, 1995.
- [Ghr14] R. Ghrist. *Elementary Applied Topology*. Createspace, 2014.

- [Ham76] A.J.S. Hamilton. The triangulation of 3-manifolds. *Q. J. Math.* 27.1 (1976), págs. 63-70.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hat13] A. Hatcher. The Kirby torus trick for surfaces. *arXiv preprint arXiv:1312.3518* (2013).
- [Hen99] J. Henrikson. Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics* (1999).
- [KR97] D.A. Klain y G. Rota. *Introduction to geometric probability*. Cambridge University Press, 1997.
- [KS69] R.C. Kirby y L.C. Siebenmann. On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung. *Bull. Amer. Math. Soc.* 75.4 (1969), págs. 742-749.
- [Lee11] J. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. 2nd ed. Vol. 940. Grad. Texts in Math. Springer, 2011.
- [Lee12] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd ed. Vol. 940. Grad. Texts in Math. Springer, 2012.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse Theory*. Vol. 51. Princeton University Press, 1963.
- [Mun66] J.R. Munkres. *Elementary Differential Topology*. Vol. 54. Princeton University Press, 1966.
- [Pro02] J. Propp. Euler measure as generalized cardinality. *arXiv preprint math/0203289* (2002).
- [Rob17] M. Robinson. Comunicación personal. 2017.
- [Rom17] G. Romain. *Piecewise Linear Morse Theory*. Tesis doct. Freie Universität Berlin, 2017.
- [Sch17] C. Schommer-Pries. Comunicación personal. 2017. URL: <https://mathoverflow.net/questions/270709/relation-between-morse-theory-and-integration-against-euler-characteristic>.
- [Sch91] P. Schapira. Operations on constructible functions. *J. Pure Appl. Algebra* 72.1 (1991), págs. 83-93.
- [Sch95] P. Schapira. Tomography of constructible functions. *International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Codes*. Springer. 1995, págs. 427-435.
- [Ser51] J.P. Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. *Annals of Math.* (1951), págs. 425-505.
- [Sha16] A.R. Shastri. *Basic Algebraic Topology*. CRC Press, 2016.
- [Shi17] T. Shifrin et al. Comunicación personal. 2017. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/2341063/euler-characteristic-of-fiber-bundle-using-differential-geometry>.

-
- [Spa50] E. Spanier. Homology theory of fiber bundles. *Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge, Mass.* 1950, págs. 390-396.
- [Van17] L. Van den Dries. Comunicación personal. 2017.
- [Van98] L. Van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*. Vol. 248. London Mathematical Society Lecture Notes Series. Cambridge University Press, 1998.
- [Vir88] O. Viro. Some integral calculus based on Euler characteristic. *Topology and geometry—Rohlin seminar*. Springer. 1988, págs. 127-138.
- [Zas99] A. Zastrow. *The higher homology groups of planar sets do not behave anomalously*. 1999. URL: <https://mat.ug.edu.pl/~zastrow/Nnonano.htm>.

