FRANCISCO MANUEL CASTAÑO GARRIDO

LA GEOMETRÍA DEL PROBLEMA INVERSO DE LA MECÁNICA LAGRANGIANA

134a

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Francisco Manuel Castaño Garrido

LA GEOMETRÍA DEL PROBLEMA INVERSO DE LA MECÁNICA LAGRANGIANA

134a

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

La geometría del problema inverso de la mecánica lagrangiana

Francisco Manuel Castaño Garrido

Febreiro 2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen

Es bien conocido que las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son la base de la mecánica clásica, pueden ser obtenidas a partir del principio variacional de Hamilton. Dicha formulación variacional es de vital importancia en la física teórica.

El problema inverso de la mecánica lagrangiana consiste en lo siguiente: establecer cuando se le puede asociar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden un principio variacional, es decir ver si estas ecuaciones se pueden reescribir como las ecuaciones de Euler-Lagrange para un cierto lagrangiano. Dicho problema esta caracterizado por la existencia de una matriz de funciones verificando las famosas condiciones de Helmholtz (1821-1894).

El objetivo de este trabajo es analizar el problema desde una perspectiva geométrica, y llegar a una versión de las condiciones de Helmholtz independiente de las coordenadas.

Esta memoria se puede considerar como una posible extensión de parte de los conocimientos adquiridos en la materia del Master en Matemáticas: Métodos Matemáticos de la Física.

Abstract

It´s well known that the Euler-Lagrange equations, which are the basis of classical mechanics, can be obtained from Hamilton's variational principle. This variational formulation is very important in theorical physics.

The inverse problem of lagrangian mechanics consists of: finding out when we can associate a variational principle to a given system of second order diferencial equations, namely find out if the given system can be obtained as the Euler-Lagrange equations of a certain lagrangian. This problem is characterised by the existence of a function matrix verifying the famous Helmholtz (1821-1894) conditions.

The objective of this dissertation is to analyze the problem from a geometric point of view, and arrive to a free coordinate version of Helmholtz conditions.

This memory can be considered as a posible extension of part of the knowledge obtained in the subject of the Master in Mathematics: Mathematical methods of Physics.

Introducción

El problema inverso de la mecánica lagrangiana consiste en determinar cuando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\ddot{x}^i = f(t, x, \dot{x}) \qquad 1 \leq i \leq n\,, \tag{1}$$

está caracterizado porque sus soluciones coincidan con las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad 1 \leq i \leq n,$$

asociadas a un cierta función L, llamada función lagrangiana. Dicho problema esta caracterizado por la existencia de una matriz de funciones $g = (g_{ij}(t, x, \dot{x}))$ cumpliendo las famosas condiciones de Helmholtz. Dichas condiciones fueron obtenidas primeramente por Helmholtz en [Hel87] como condiciones necesarias para la solución del problema inverso. Posteriormente A. Mayer en [May96] probó la suficiencia, y que por lo tanto caracterizaban el problema.

Se considera que la contribución más importante a este campo la hizo el medallista Fields J. Douglas en [Dou41], publicado el año 1941, donde caracteriza el problema inverso para el caso $n = 2$, es decir distingue cuando un sistema del tipo (1) con dos grados de libertad es un sistema del tipo Euler-Lagrange y cuando no. El problema en dimensión $n > 2$ todavía sigue abierto a pesar de los numerosos intentos de generalizar la solución de Douglas.

A partir del artículo [Sar82] de W. Sarlet, diversos autores empiezan a estudiar el problema inverso desde un punto de vista geométrico, a diferencia de las aportaciones anteriores que eran sobre todo de tipo analítico. El análisis geométrico permitió entonces identificar ciertas estructuras geométricas que son de utilidad en el análisis del problema inverso, que se espera puedan jugar un papel importante a la hora de abordar el problema en dimensiones superiores. Por ejemplo en [CSM+94] se clarifica la solución de Douglas utilizando técnicas geométricas.

El objetivo de este trabajo es llegar a una formulación independiente de las coordenadas de las condiciones de Helmholtz, usando la teoría de tensores a lo largo de aplicaciones introducida en [MCS92, MCS93a] por E. Martínez. Un esquema general del trabajo es el siguiente:

- **Capítulo 1: Preliminares**
  En este capítulo se introducen los conceptos geométricos que se necesitaran a lo largo

del trabajo. En particular se introducen los objetos básicos del fibrado tangente TM, de $\mathbb{R} \times TM$ y posteriormente el concepto de conexión de Ehresmann.

- **Capítulo 2: El problema inverso de la mecánica lagrangiana en $\mathbb{R}^n$**
  En este capítulo se introduce el problema inverso en el espacio más sencillo posible, es decir en $\mathbb{R}^n$.

  Primero se obtendrán las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del principio variacional de Hamilton. Luego se expone de forma sencilla el problema inverso, para posteriormente llegar hasta las condiciones de Helmholtz, que caracterizan dicho problema.

- **Capítulo 3: La geometría del problema inverso, caso autónomo**
  En este capítulo se exponen las condiciones de Helmholtz para el caso autónomo de manera independiente de las coordenadas. Para ello se introduce el endomorfismo de Jacobi, la derivada covariante dinámica, así como las derivadas covariantes vertical y horizontal.

- **Capítulo 4: La geometría del problema inverso, caso no autónomo**
  En este capítulo se recuperan los resultados del capítulo 3, para el caso no autónomo.

Agradecimientos: Me gustaría agradecer a los directores: Modesto R. Salgado Seco, del departamento de Geometría y Topología de la USC, y Silvia Vilariño Fernández, del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, por el tiempo dedicado en la elaboración de este trabajo. Su apoyo y ayuda han sido imprescindibles en la realización del mismo.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este trabajo supondremos que el lector posee conocimientos básicos de geometría diferencial como: concepto de variedad, campos de vectores, formas diferenciales, fibrado tangente y cotangente, concepto de (sub)fibrado y (sub)fibrado vectorial, teorema de Frobenius, campos de tensores, derivada de Lie e integración en variedades. Se supondrá cuando no se diga lo contrario que todas las variedades y funciones son de clase infinito.

1.1. Geometría del fibrado tangente y SODEs

Recordemos que dada una variedad diferenciable M de dimensión en n con coordenadas (x^i) en un entorno coordenado $U \subset M$, en su fibrado tangente

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

tenemos coordenadas (x^i, v^i) inducidas en $TU \subset TM$, dadas por

$$x^i(v_x) = x^i(x) \qquad v^i(v_x) = dx^i(v_x)\,,$$

donde $1 \leq i \leq n$ y $v_x \in T_x U = T_x M$.

En el fibrado tangente, para $v_x \in T_x M$ tenemos definido de manera natural el levantamiento vertical de v_x a $w_x \in T_x M$ como

$$(v_x)^V_{w_x} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (w_x + s v_x) \in T_{w_x} M\,.$$

En coordenadas locales si $v_x = a^i \partial/\partial x^i(x)$, entonces

$$(v_x)^V_{w_x} = a^i \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{w_x}\,.$$

Denotaremos por

$$\tau : TM \longrightarrow M\,,$$

a la proyección canónica del fibrado tangente.

El levantamiento vertical de campos de vectores a TM nos permite construir el siguiente campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre TM.

Definición 1.1. La **estructura tangente canónica de** TM es el campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre TM definido como

$$\begin{aligned} J(v_x) : T_{v_x}(TM) &\longrightarrow T_{v_x}(TM) \\ Z_{v_x} &\to \left(\tau_*\left(v_x\right)\left(Z_{v_x}\right)\right)^{\mathrm{V}}_{v_x} , \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\tau_*\left(v_x\right)$ es la diferencial de τ en el punto v_x.

En coordenadas canónicas, obtenemos que

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{v_x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right)^V_{v_x} = \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_x} \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_x}\right) = 0\,,$$

y por lo tanto

$$J = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i\ . \tag{1.2}$$

Se dice que un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(TM)$ es vertical si

$$T\tau \circ X = 0\,,$$

donde $T\tau : T(TM) \to TM$ es la diferencial global de τ. Denotaremos por $\mathfrak{X}^V(M)$ a los campos de vectores verticales. En coordenadas locales (x^i, v^i) del fibrado tangente, tenemos que un campo de vectores vertical es de la forma

$$X(v_x) = X^i(v_x)\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_x}\ .$$

Los campos de vectores verticales se pueden caracterizar a partir de la estructura tangente canónica de la siguiente manera: $X \in \mathfrak{X}(TM)$ es vertical si y solo si $JX = 0$.

Otro de los objetos geométricos importantes del fibrado tangente es el campo de vectores de Liouville.

Definición 1.2. Definimos el **campo de vectores de Liouville** C sobre TM como el generador infinitesimal del flujo

$$\phi : \mathbb{R} \times TM \longrightarrow TM\,, \tag{1.3}$$

dado por $\phi(t, v_x) = e^t v_x$.

En coordenadas canónicas el campo de vectores de Liouville se expresa como

$$C = v^i\frac{\partial}{\partial v^i}\ . \tag{1.4}$$

Estamos en disposición de definir lo que es un SODE en TM.

Definición 1.3. Un campo de vectores $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ es un SODE, si y solo sí $J\xi = C$, donde J es la estructura tangente canónica y C el campo de vectores de Liouville.

Observación 1.4. El término SODE proviene de la expresión inglesa *second order differential equation*.

En coordenadas locales, tenemos que ξ es un SODE si y solo si

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial v^i} \,. \tag{1.5}$$

Recordemos que el levantamiento tangente de una curva $\alpha : \mathbb{R} \to M$ es la curva $\dot{\alpha} : \mathbb{R} \to TM$, donde $\dot{\alpha}(t)$ es el vector tangente a la curva α en el instante t. Tenemos entonces que las curvas integrales $\beta : \mathbb{R} \to TM$ de ξ, son levantamientos tangentes de curvas α en M, es decir $\dot{\alpha} = \beta$. Llamamos a dichas curvas soluciones del SODE. Se tiene entonces que α es una solución del SODE (1.5) si y solo si verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\ddot{x}^i(t) = f^i(x^j(t), \dot{x}^j(t)) \,, \tag{1.6}$$

donde $\alpha(t) = (x^i(t))$ es la expresión local de α. Es por eso que los SODEs se consideran la versión libre de coordenadas de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo (1.6).

1.2. Geometría de $\mathbb{R} \times TM$ y SODEs

En esta sección introducimos las estructuras básicas de $\mathbb{R}\times TM$ y los SODEs dependientes del tiempo, que son las versiones geométricas de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo de segundo orden.

Dado el sistema de coordenadas (x^i) sobre el entorno $U \subset M$, definimos las coordenadas canónicas inducidas en $\mathbb{R} \times TU \subset \mathbb{R} \times TM$ como (t, x^i, v^i), dadas por

$$t\,(t, v_x) = t \quad x^i\,(t, v_x) = x^i\,(x)\,, \quad v^i\,(t, v_x) = v_x\left(x^i\right)\,, \tag{1.7}$$

con $i = 1, \ldots, n$ y $(t, v_x) \in \mathbb{R} \times T_x M$.

A partir de la estructura tangente canónica J de TM, definimos el campo de tensores J sobre $\mathbb{R}\times TM$, como el único campo de tensores del tipo $(1,1)$ en $\mathbb{R}\times TM$ que bajo cada sistema de coordenadas locales canónicas (t, x^i, v^i), tiene como expresión local

$$J = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dx^i \,, \tag{1.8}$$

es decir su expresión local coincide con la de la estructura tangente canónica de TM.

Definimos el campo de vectores de Liouville C sobre $\mathbb{R} \times TM$, como el generador infinitesimal del flujo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times TM) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times TM \\ (s, (t,\, v_x)) & \to & (t, e^s v_x)\,. \end{array} \tag{1.9}$$

En coordenadas locales canónicas tenemos

$$C = v^i \frac{\partial}{\partial v^i} . \tag{1.10}$$

Definimos el siguiente campo de tensores del tipo $(1,1)$

$$S = J - C \otimes dt . \tag{1.11}$$

Así si consideramos las expresiones locales (1.8) y (1.10), de J y C, obtenemos

$$S = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes \theta^i , \tag{1.12}$$

donde $\theta^i = dx^i - v^i dt$ son las llamadas **formas de contacto**.

Definición 1.5. Un campo de vectores $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times TM)$ es un **SODE (dependiente del tiempo)** si

$$S(\xi) = 0 , \quad i_\xi dt = dt(\xi) = 1 .$$

La expresión local de un SODE en $\mathbb{R} \times TM$ es de la forma

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial v^i} . \tag{1.13}$$

Se dice que una curva $\alpha : I \longrightarrow M$ es **solución del SODE** ξ si su levantamiento a $\mathbb{R} \times TM$, esto es

$$\alpha^{[1]} : t \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (t, \dot{\alpha}(t)) \in \mathbb{R} \times TM , \tag{1.14}$$

es curva integral de ξ. En coordenadas locales α es una solución del SODE (1.13) si y solo si se verifica el sistema

$$\ddot{x}^i(t) = f^i(t, x^j(t), \dot{x}^j(t)) ,$$

donde $\alpha(t) = (x^i(t))$ es la expresión local de α. Por lo tanto decimos que los SODEs en $\mathbb{R} \times TM$ son la versión libre de coordenadas de los sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no autónomos.

1.3. Conexiones de Ehresmann

En esta sección vamos a introducir primero el concepto de conexiones de Ehresmann, también llamadas conexiones no lineales, en una variedad fibrada, para más tarde desarrollarlo para el caso del fibrado tangente. A partir de ahora cuando hablemos de conexiones nos referiremos a conexiones de Ehresmann. Los contenidos de esta sección se pueden encontrar en [DLR11, GM00].

Supongamos que tenemos una variedad fibrada $\pi : E \longrightarrow M$ y consideramos su diferencial $\pi_*(e) : T_eE \longrightarrow T_{\pi(e)}M$ en el punto $e \in E$. Se define la fibra vertical al fibrado en el punto $e \in E$ como el subespacio vectorial $V_eE = ker\, \pi_*(e)$ de T_eE. Definimos también

$$VE = \bigcup_{e \in E} V_eE ,$$

que es un subfibrado vectorial de TE, al cual llamaremos **fibrado** o **distribución vertical**. Si tenemos coordenadas locales

$$(x^i, u^\alpha) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq \alpha \leq k\,,$$

en E adaptadas al fibrado π, esto es verificando que

$$\pi(x^i, u^\alpha) = (x^i)\,,$$

entonces se tiene que

$$\pi_*(e)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_e\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(e)} \qquad \pi_*(e)\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big|_e\right) = 0\,.$$

Luego

$$V_e(E) = < \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big|_e > \,.$$

De esto deducimos que en VE tenemos coordenadas locales $(x^i, u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ dadas por

$$x^i(v_e) = x^i(e) \qquad u^\alpha(v_e) = u^\alpha(e) \qquad \dot{u}^\alpha(v_e) = du^\alpha(e)(v_e)$$

para $v_e \in V_eE \subset T_eE$.

Habiendo definido lo que es la distribución vertical a un fibrado podemos definir el concepto de conexión en una variedad fibrada.

Definición 1.6. Sea $\pi : E \longrightarrow M$ una variedad fibrada y VE su distribución vertical. Decimos que un subfibrado vectorial (distribución) H de TE es una **conexión** en la variedad fibrada E si para todo $e \in E$.

$$T_eE = H_e \oplus V_eE\,, \tag{1.15}$$

donde $H = \bigcup_{e\in E} H_e$. A H también se le llama el **fibrado** o **distribución horizontal** de la conexión.

Dada una conexión H en $\pi : E \longrightarrow M$, si $X_e \in T_eE$ entonces se puede descomponer de manera única como

$$X_e = vX_e + hX_e\,,$$

donde $vX_e \in V_eE$ y $hX_e \in H_e$. Se deduce que una distribución induce tensores

$$v : TE \longrightarrow VE \qquad h : TE \longrightarrow H\,,$$

que se denominan **proyectores vertical** y **horizontal** respectivamente. Supongamos que en coordenadas locales

$$H = < A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} >\,, \tag{1.16}$$

como $V = < \partial/\partial u^\alpha >$, a partir de (1.15) se deduce que la matriz A_i^j es invertible y por lo tanto H esta generado por

$$H = < \frac{\partial}{\partial x^i} + D_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} >\,, \tag{1.17}$$

para unas ciertos funciones D_i^α. Por lo tanto podemos expresar $X_e \in T_eE$ con coordenadas locales como se sigue

$$\begin{aligned} X_e =& a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_e + b^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big|_e \\ =& a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_e + D_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big|_e \right) + (b^\alpha - a^i D_i^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big|_e . \end{aligned}$$

Por lo tanto deducimos que las expresiones en coordenadas locales de h y v son

$$h = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + D_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) \otimes dx^i \qquad v = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \otimes \left(du^\alpha - D_i^\alpha dx^i \right) . \tag{1.18}$$

Nótese que $(\partial/\partial x^i + D_i^\alpha \partial/\partial u^\alpha)$ es una referencia local de la distribución H, mientras que $(du^\alpha - D_i^\alpha dx^i)$ es una referencia local de la codistribución anuladora de H, que recordemos viene definida por

$$H_e^0 = \{\alpha_e \in T_e^*E \,:\, \alpha_e(v_e) = 0 \;\; \forall v_e \in H_e\} \subset T_e^*E \,,$$

para todo $e \in E$.

1.3.1. Conexiones de Ehresmann en el fibrado tangente

Vamos a estudiar ahora las conexiones de Ehresmann en el fibrado tangente $\tau : TM \longrightarrow M$. Supongamos que tenemos una conexión en TM con proyecciones horizontal h y vertical v. En TM tenemos definida de manera natural la estructura tangente canónica $J = \partial/\partial v^i \otimes dx^i$, que verifica que $V = V(TM) = ker\, J = Im\, J$, por lo tanto se tiene que

$$Jh = J \quad hJ = 0 \quad Jv = 0 \quad vJ = J \,.$$

Si definimos el tensor $\Gamma = h - v$, tenemos que va a verificar las igualdades

$$J\Gamma = J \qquad \Gamma J = -J \,. \tag{1.19}$$

Recíprocamente si tenemos un tensor Γ del tipo $(1,1)$ en TM verificando (1.19) este va a definir una conexión en el fibrado tangente con proyecciones

$$h = \frac{1}{2}(I_{TM} + \Gamma) \qquad v = \frac{1}{2}(I_{TM} - \Gamma) \,,$$

a partir de las cuales podemos recuperar las distribuciones vertical y horizontal como $V = Im\, v$ y $H = Im\, h$. Por eso se define:

Definición 1.7. Una conexión en el fibrado tangente es un tensor Γ del tipo $(1,1)$ en TM, verificando (1.19).

Observación 1.8. Esta caracterización de las conexiones en el fibrado tangente fue introducida por J. Grifone en [Gri72].

A continuación obtendremos la expresión local de Γ. Se verifica que

$$\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = \Gamma\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) = -J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial v^i} .$$

Por otro lado si $\Gamma(\partial/\partial x^i) = A_i^j \partial/\partial x^j + B_i^j \partial\ \partial v^j$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial v^i} = J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = J\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = J\left(A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^j \frac{\partial}{\partial v^j}\right) = A_i^j \frac{\partial}{\partial v^j} ,$$

de lo que se deduce que $A_i^j = \delta_i^j$. Por lo tanto si definimos $-2\Gamma_i^j = B_i^j$, se obtiene que

$$\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial v^j} ,$$

de lo que se deduce que su expresión en coordenadas locales es

$$\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - 2\Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial v^j}\right) \otimes dx^i - \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dv^i . \tag{1.20}$$

Las funciones Γ_i^j son de clase infinito en su dominio de definición $TU \subset TM$ (siendo U abierto de M), y se las llama las **componentes de Christoffel** de la conexión. A partir de la expresión (1.20) y de (1.18) se deduce que

$$h = H_i \otimes dx^i \qquad v = \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes V^j , \tag{1.21}$$

donde recordemos

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial v^j} \\ V^j &= dv^j + \Gamma_i^j dx^i , \end{aligned} \tag{1.22}$$

son referencias locales de H y H^0.

Consideremos ahora la proyección canónica del fibrado tangente $\tau : TM \longrightarrow M$, su diferencial en un punto $w_x \in TM$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\tau_*(w_x)_{|H_{w_x}} : H_{w_x} \subset T_{w_x}TM \longrightarrow T_xM \quad .$$

Esto permite definir el **levantamiento horizontal** de un vector $v_x \in T_xM$ a w_x como

$$(v_x)^H_{w_x} = (\tau_*(w_x)_{|H_{w_x}})^{-1}(v_x) \tag{1.23}$$

De manera natural definimos el **levantamiento horizontal** de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ como el campo de vectores $X^H \in \mathfrak{X}(TM)$ definido por

$$X^H_{v_x} = (X_x)^H_{v_x} .$$

En coordenadas locales si $X = X^i \partial/\partial x^i$, entonces

$$X^H = X^i H_i = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial v^j}\right) .$$

Vamos ahora a definir un concepto muy importante asociado a una conexión no lineal.

Definición 1.9. La tensión de una conexión Γ en TM es el campo de tensores del tipo $(1,1)$ en TM dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_C\Gamma\,, \tag{1.24}$$

donde C es el campo de vectores de Liouville y $\mathcal{L}$ denota la derivada de Lie.

Se tiene entonces que

$$\mathbf{H}(X) = \frac{1}{2}([C,\Gamma X] - \Gamma[C,X])$$

para $X \in \mathfrak{X}(TM)$. Además como

$$\mathcal{L}_C h = \mathcal{L}_C\left(\frac{1}{2}(I_{TM} + \Gamma)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_C I_{TM} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_C\Gamma = \frac{1}{2}\mathcal{L}_C\Gamma\,,$$

se deduce que

$$\mathbf{H}(X) = \mathcal{L}_C h(X) = [C,hX] - h[C,X]\,.$$

De (1.4) y (1.21) se obtiene que

$$\mathbf{H} = \left(\Gamma_i^j - v^k\Gamma_{ik}^j\right)\frac{\partial}{\partial v^j}\otimes dx^i\,, \tag{1.25}$$

donde $\Gamma_{ik}^j = \partial\Gamma_i^j/\partial v^k$.

Observación 1.10. De manera análoga se prueba que

$$\mathbf{H} = -\mathcal{L}_C v\,.$$

Definición 1.11. Una conexión Γ es **lineal** si su tensión $\mathbf{H}$ se anula.

En coordenadas locales, si Γ es lineal se verifica, en virtud de (1.25), que

$$\Gamma_i^j(x,v) = v^k\Gamma_{ik}^j(x)\,.$$

Nótese que las funciones Γ_{ik}^j no dependen de v, hecho que se puede deducir con un simple cálculo.

Derivada covariante

Primero consideramos el isomorfismo de espacios vectoriales inducido por el levantamiento vertical de vectores tangentes a M a TM, esto es

$$z \in T_xM \longrightarrow z_w^v \in V_w \subset T_w(TM)$$

donde $w \in T_xM$. Denotamos por $\phi_w : V_w \longrightarrow T_xM$ su inversa, que en coordenadas locales viene dado por

$$\phi_w\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_w\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$$

Entonces definimos:

Definición 1.12. Dada una conexión Γ en el fibrado tangente, se define la **derivada covariante** del campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ con respecto a $X \in \mathfrak{X}(M)$ como el campo de vectores $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$(\nabla_X Y)_x = \phi_{Y_x}(v(Y_*(x)\,X_x)) \quad x \in M\,, \tag{1.26}$$

donde v es el proyector vertical de Γ, y $Y_*(x) : T_xM \longrightarrow T_{Y_x}(TM)$ es la diferencial del campo de vectores Y visto como aplicación entre M y TM.

Si en coordenadas locales $X = X^i\,\partial/\partial x^i$ e $Y = Y^i\,\partial/\partial x^i$, utilizando la expresión en coordenadas locales (1.21) del proyector v obtenemos que

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_i^j \circ Y \right) \frac{\partial}{\partial x^j}\,. \tag{1.27}$$

Si la conexión es lineal obtenemos que la expresión anterior se transforma en

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^k \Gamma_{ik}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j}\,. \tag{1.28}$$

Proposición 1.13. La derivada covariante satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \quad X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
3. $(\nabla_X Y)_x$ solo depende del valor de X en x y de los valores de Y en un entorno de $x \in M$.

Si además la conexión es lineal se tiene:

4. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \quad X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$
5. $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f(\nabla_X Y) \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Demostración. Las tres primeras afirmaciones se siguen directamente de la definición de derivada covariante. Las dos últimas se siguen de (1.28). □

En virtud del punto 3 de la proposición anterior se define la derivada covariante de un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ con respecto a un vector tangente $z_x \in T_xM$ como

$$\nabla_{z_x} Y = (\nabla_X Y)_x\,,$$

siendo X un campo de vectores cualquiera verificando $X_x = z_x$.

Dada una curva $\alpha : \mathbb{R} \to M$, entonces se dice que $\sigma : \mathbb{R} \to TM$ es un campo de vectores a lo largo de α si $\alpha = \tau \circ \sigma$, es decir si $\sigma(t) \in T_{\alpha(t)}M$.

Definición 1.14. La **derivada covariante** de σ a lo largo de α es la curva

$$\nabla_{\dot\alpha}\sigma(t) = \nabla_{\dot\alpha(t)}Y\,,$$

donde Y es un campo de vectores cualquiera extendiendo a σ en un entorno de t, es decir verificando que para un cierto $\epsilon > 0$

$$Y(\alpha(s)) = \sigma(s) \quad \forall s \in (t-\epsilon, t+\epsilon)\,.$$

Decimos que σ es **paralelo** a lo largo de α si su derivada covariante se anula, es decir

$$\nabla_{\dot\alpha}\sigma = 0\,.$$

Definimos entonces:

Definición 1.15. Dada una curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow M$, decimos que α es un **camino** de la conexión Γ si $\dot\alpha$ es paralelo a lo largo de α, esto es si

$$\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha = 0\,.$$

Si la conexión es lineal a los caminos se los llama **geodésicas**.

Por definición de derivada covariante (1.26), una curva es un camino de Γ si

$$\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha(t) = \nabla_{\dot\alpha(t)}Y = \phi_{\dot\alpha(t)}(v(Y_*(\alpha(t))\,\dot\alpha(t))) = 0\,.$$

Por otro lado se tiene que

$$Y_*(\alpha(t))\,\dot\alpha(t) = Y_*(\alpha(t)) \circ \alpha_*(t)\,\frac{d}{dt}\Big|_t = (Y\circ\alpha)_*(t)\,\frac{d}{dt}\Big|_t = \dot\alpha_*(t)\,\frac{d}{dt}\Big|_t = \ddot\alpha(t)\,,$$

por lo tanto, como $\phi_{\dot\alpha(t)}$ es un isomorfismo, tenemos que α es un camino de Γ si y solo si

$$v(\ddot\alpha(t)) = 0\,,$$

es decir si $\ddot\alpha(t) \in H$ donde recordemos H era la distribución horizontal de la conexión.

Por otro lado partiendo de la expresión en coordenadas locales de la derivada covariante (1.27) obtenemos que para $\alpha(t) = (x^i(t))$

$$\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha(t) = \left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\Big|_t + \Gamma^i_j\left(x(t), \frac{dx}{dt}\Big|_t\right)\frac{dx^j}{dt}\Big|_t\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)}\,.$$

Se deduce entonces :

Proposición 1.16. α es camino de Γ si y solo si verifica el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias de segundo orden

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}\Big|_t + \Gamma^i_j\left(x(t), \frac{dx}{dt}\Big|_t\right)\frac{dx^j}{dt}\Big|_t = 0 \qquad 1 \le i \le n\,, \tag{1.29}$$

que cuando Γ es lineal se transforma en

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}\Big|_t + \Gamma^i_{jk}(x(t))\frac{dx^j}{dt}\Big|_t\frac{dx^k}{dt}\Big|_t = 0 \qquad 1 \le i \le n\,,$$

que coinciden con las ecuaciones usuales de las geodésicas.

Conexiones y SODEs

En esta sección, vamos a asociar a todo SODE Γ una conexión Γ_ξ, que no va a ser necesariamente lineal, y viceversa, esto es asociar a cada conexión Γ un SODE ξ_Γ.

Sea Γ una conexión en TM y $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ un SODE arbitrario. Definimos $\xi_\Gamma \in \mathfrak{X}(TM)$ como

$$\xi_\Gamma = h(\xi)\,,$$

y comprobamos que es un SODE, puesto que

$$J\xi_\Gamma = Jh(\xi) = J\xi = C\,.$$

Además si ξ' es otro SODE, entonces $h(\xi) = h(\xi')$, ya que $\xi - \xi'$ es un campo de vectores vertical y por lo tanto

$$h(\xi - \xi') = h(\xi) - h(\xi') = 0\,.$$

Esto implica que la conexión Γ define un SODE ξ_Γ de manera única a través de su proyección horizontal, de donde se deduce además que el SODE ξ_Γ es un campo de vectores horizontal. A partir de la expresión local (1.21) de h , se obtiene que

$$\xi_\Gamma = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j\frac{\partial}{\partial v^j}\right)\,, \tag{1.30}$$

si además la conexión es lineal entonces

$$\xi_\Gamma = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} - v^iv^k\Gamma_{ik}^j\frac{\partial}{\partial v^j}\,.$$

Proposición 1.17. Las soluciones $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow M$ del SODE ξ_Γ coinciden con los caminos de la conexión Γ.

Demostración. Si escribimos las ecuaciones de las soluciones del SODE (1.30) asociado a Γ

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = -\Gamma_i^j\frac{dx^i}{dt}\,,$$

vemos que coinciden con las ecuaciones (1.29) de los caminos de Γ. □

Sea ξ un SODE, consideramos el tensor $\Gamma_\xi = -\mathcal{L}_\xi J$, es decir el tensor del tipo $(1,1)$ dado por

$$\Gamma_\xi(X) = -\mathcal{L}_\xi J(X) = J[\xi, X] - [\xi, JX]\,,$$

donde $X \in \mathfrak{X}(TM)$.

Proposición 1.18. El tensor Γ_ξ define una conexión en TM.

Demostración. Lo único que tenemos que comprobar es que se cumplen las igualdades (1.19). Para cualquier SODE ξ', se verifica que

$$J[\xi', JX] = -JX$$

para todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(TM)$, dicha comprobación se puede hacer en coordenadas locales sin ninguna dificultad. Por lo tanto

$$\begin{aligned} J\Gamma_\xi(X) &= J^2[\xi, X] - J[\xi, JX] = -J[\xi, JX] = JX \\ \Gamma_\xi J(X) &= J[\xi, JX] - [\xi, J^2 X] = J[\xi, JX] = -JX\,, \end{aligned} \tag{1.31}$$

de lo que se deduce que se cumplen las igualdades (1.19). □

Por lo tanto todo SODE define una conexión en TM. En coordenadas locales si ξ viene dado por (1.5), entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= J[\xi, \frac{\partial}{\partial x^i}] - [\xi, J\frac{\partial}{\partial x^i}] = -\frac{\partial f^j}{\partial x^i} J\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) - [\xi, \frac{\partial}{\partial v^i}] = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j} \\ \Gamma_\xi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) &= J(-\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f^j}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}) = -\frac{\partial}{\partial v^i}\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos que la expresión en coordenadas locales de Γ_ξ es

$$\Gamma_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f^j}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \otimes dx^i - \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dv^i\,. \tag{1.32}$$

Usando (1.20) vemos que los símbolos de Christoffel de la conexión son

$$(\Gamma_\xi)_i^j = -\frac{1}{2}\frac{\partial f^j}{\partial v^i}\,. \tag{1.33}$$

Dado un SODE ξ, si consideramos su conexión asociada Γ_ξ, uno esperaría que el SODE asociado a Γ_ξ fuese el proprio ξ, sin embargo esto no se da en general como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.19. Consideremos el SODE

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x)\frac{\partial}{\partial v^i} \in \mathfrak{X}(T\mathbb{R}^n) \equiv \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})\,,$$

entonces los símbolos de Christoffel de la conexión son $(\Gamma_\xi)_i^j = 0$, y la conexión que induce es lineal. Tenemos entonces según (1.30) que el SODE asociado a la conexión es

$$\xi_{\Gamma_\xi} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

que es distinto de ξ.

La siguiente proposición estable la relación entre el SODE ξ , que determina la conexión Γ_ξ, y el SODE que se obtiene a partir de ella ξ_{Γ_ξ}.

Proposición 1.20. Sea ξ un SODE y $\Gamma_\xi = -L_\xi J$ su conexión asociada. Entonces el SODE asociado a Γ_ξ es

$$\xi_{\Gamma_\xi} = \xi + \frac{1}{2}\xi^*\,,$$

donde

$$\xi^* = [C,\xi] - \xi\,. \tag{1.34}$$

Demostración. Primero vamos a ver que ξ^* es un campo de vectores vertical, y que por lo tanto ξ_{Γ_ξ} es un SODE. Como C es vertical tenemos que $J[C,\xi] = C$, y por lo tanto

$$J\xi^* = J[C,\xi] - J\xi = C - C = 0\,,$$

es decir ξ^* es campo de vectores vertical. Por otro lado tenemos que si ξ_{Γ_ξ} es el SODE asociado a la conexión Γ

$$\begin{aligned}\xi_{\Gamma_\xi} = h\xi &= \frac{1}{2}(I_{TM} + \Gamma)\xi = \frac{1}{2}(\xi + \Gamma\xi) = \frac{1}{2}(\xi - (L_\xi J)\xi)\\ &= \frac{1}{2}(\xi - [\xi, J\xi] + J[\xi,\xi]) = \frac{1}{2}(\xi - [\xi, C]) = \frac{1}{2}(\xi + [C,\xi]) =\\ &= \frac{1}{2}(2\xi + \xi^*) = \xi + \frac{1}{2}\xi^*.\end{aligned}$$

□

Observación 1.21. Al campo de vectores ξ^* se le llama desviación del SODE ξ. Decimos que ξ es un SODE cuadrático si su desviación se anula, es decir si $\xi^* = 0$. En coordenadas locales tenemos que

$$\xi^* = \left(v^j\frac{\partial f^i}{\partial v^j} - 2f^i\right)\frac{\partial}{\partial v^i}\,.$$

Es decir un SODE es cuadrático si y solo sí

$$v^j\frac{\partial f^i}{\partial v^j} = 2f^i\,. \tag{1.35}$$

Esto ocurre por ejemplo si $f^i(x,v) = v^k v^j f^i_{kv}(x)$ con $f^i_{kv} = f^i_{vk}$.

Proposición 1.22. Si ξ es un SODE cuadrático, entonces $\Gamma_\xi = -L_\xi J$ es una conexión lineal.

Demostración. Se acaba de ver que ξ es cuadrático si y solo sí se verifica (1.35). Tenemos que comprobar que la tensión $\mathbf{H}$ se anula. Utilizando la expresión en coordenadas locales (1.25) de $\mathbf{H}$ y el hecho de que $(\Gamma_\xi)^j_i = -1/2\,\partial f^j/\partial v^i$, se llega a que

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^j}{\partial v^i} - v^k\frac{\partial^2 f^j}{\partial v^k\partial v^i}\right)\frac{\partial}{\partial v^j}\otimes dx^i\,,$$

a partir de (1.35), derivando se deduce que

$$\frac{\partial f^j}{\partial v^i} = v^k\frac{\partial^2 f^j}{\partial v^i\partial v^k}\,,$$

por lo tanto la tensión se anula y la conexión es lineal. □

Torsión y curvatura

Asociados al concepto de conexión tenemos los conceptos de torsión fuerte y débil, y el concepto de curvatura, que juegan un papel de vital importancia en el estudio de las conexiones. Ambos conceptos están basados en el concepto de torsión de Nijenhius, que definimos a continuación:

Definición 1.23. Sean A, B campos de tensores del tipo $(1,1)$ en una variedad M arbitraria. La **torsión de Nijenhius** de A y B es el campo de tensores del tipo $(1,2)$

$$[A,B] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)\,,$$

definido como

$$\begin{aligned} [A,B](X,Y) =& [AX,BY] + [BX,AY] + AB[X,Y] + BA[X,Y] - A[X,BY] \\ & - A[BX,Y] - B[X,AY] - B[AX,Y]\,. \end{aligned} \tag{1.36}$$

La torsión de Nijenhius es una operación conmutativa es decir

$$[A,B] = [B,A]\,,$$

y además verifica la identidad de Jacobi

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0\,.$$

Se define la torsión de Nijenhius de A como

$$N_A = \frac{1}{2}[A,A]\,.$$

Una propiedad muy conocida es que la torsión de Nijenhius de la estructura tangente canónica J se anula, es decir $N_J = 0$. Como consecuencia de eso se tiene que

$$[JX,JY] = J[X,JY] + J[JX,Y]\,. \tag{1.37}$$

Torsión fuerte y débil

En esta sección vamos a tratar el concepto de torsión asociada a una conexión.

Definición 1.24. Sea Γ una conexión en TM con proyector horizontal h. La **torsión débil** es el campo de tensores t del tipo $(1,2)$ sobre TM

$$t = [J,h] : \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)\,. \tag{1.38}$$

Es decir

$$t(X,Y) = [JX,hY] + [hX,JY] - J[hX,hY] - h[X,JY] - h[JX,Y] \tag{1.39}$$

Nótese que t es antisimétrico. En coordenadas locales se tiene que

$$\begin{aligned} t &= \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^i \wedge dx^j \,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

La torsión débil verifica la siguiente propiedad.

Proposición 1.25. La conexión Γ proviene de un SODE si y solo si su torsión débil t se anula.

Demostración. El hecho de que las conexiones provenientes de SODEs tienen torsión débil nula se deduce de (1.40) y (1.33). Para el recíproco nos remitimos a [GM00]. □

A partir del concepto de torsión débil definimos:

Definición 1.26. La **torsión fuerte** T de la conexión Γ es el campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre TM dado por

$$T = t^0 - \mathbf{H}\,, \tag{1.41}$$

donde t^0 es la contracción por ξ de t, siendo ξ un SODE arbitrario en TM, es decir

$$t^0 = i_\xi t = t(\xi, -)\,.$$

Observación 1.27. En la definición viene implícito que $t^0 = i_\xi t$ no depende del SODE ξ escogido. En efecto se tiene que si $\xi = v^i\,\partial/\partial x^i + f^i\,\partial/\partial v^i$, usando (1.40) obtenemos que

$$t^0 = v^i \left(\frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} - \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} \right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^j \tag{1.42}$$

que no depende de las funciones f^i y por lo tanto es independiente del SODE escogido.

Usando (1.25) y (1.42) concluimos que

$$T = \left(v^i \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} - \Gamma^k_j \right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^j\,. \tag{1.43}$$

Se dice que la conexión es libre de torsión si $T = 0$.

Proposición 1.28. Se verifica

$$\xi^* + T^0 = 0$$

Demostración. Se tiene que

$$T^0 = v^j \left(v^i \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} - \Gamma^k_j \right) \frac{\partial}{\partial v^k}\,.$$

De la expresión local (1.30) de ξ obtenemos que

$$\xi^* = [C, \xi] - \xi = \left(v^j \Gamma^k_j - v^j v^i \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} \right) \frac{\partial}{\partial v^i}\,,$$

de donde se deduce el resultado. □

El siguiente resultado expresa una importante relación que existe entre t y T.

Proposición 1.29. Si la torsión fuerte se anula entonces la torsión débil también se anula, es decir si $T = 0$ entonces $t = 0$.

Demostración. Supongamos $T = 0$ entonces por (1.43) sabemos que

$$v^i \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} = \Gamma^k_j .$$

En virtud de la igualdad anterior, derivando Γ^k_j con respecto a v^i obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} &= \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} + v^l \frac{\partial^2 \Gamma^k_l}{\partial v^i \partial v^j} \\ \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} &= \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} + v^l \frac{\partial^2 \Gamma^k_l}{\partial v^j \partial v^i} . \end{aligned}$$

Si ahora le restamos a la segunda ecuación la primera obtenemos

$$\frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} - \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} = \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} - \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} = -\left(\frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} - \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} \right)$$

de donde se deduce que

$$\frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial v^j} - \frac{\partial \Gamma^k_j}{\partial v^i} = 0$$

lo cual implica por (1.40) que $t = 0$. □

Para el caso lineal las torsiones débil y fuerte se transforman en

$$\begin{aligned} t &= \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \\ T &= v^i \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^j , \end{aligned}$$

donde $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x)$ Entonces en el caso lineal, si una se anula la otra también. En este caso definimos el **tensor de torsión T en** M, como el campo de tensores del tipo $(1,2)$ en M

$$\mathbf{T} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) ,$$

dado por

$$\mathbf{T}(X,Y)_x = \phi_w(t(X^H, Y^H)_w) \quad w \in T_xM , \ x \in M . \tag{1.44}$$

Nótese que en (1.44) estamos suponiendo que la definición no depende del $w \in T_xM$ escogido. En efecto si $X = X^i \partial/\partial x^i$ e $Y = Y^i \partial/\partial x^i$ tenemos que

$$t(X^H, Y^H)_w = X^i(x) Y^j(x) \left(\Gamma^k_{ij}(x) - \Gamma^k_{ji}(x)\right) \frac{\partial}{\partial v^k}\Big|_w ,$$

y por lo tanto

$$\phi_w(t(X^H, V^H)_w) = X^i(x) Y^j(x) \left(\Gamma^k_{ij}(x) - \Gamma^k_{ji}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_x ,$$

que no depende del $w \in T_xM$ escogido.

Observación 1.30. Si la conexión no fuese lineal la expresión anterior dependería del $w \in T_xM$ escogido y por lo tanto no se podría definir el tensor de torsión $\mathbf{T}$ en M.

Proposición 1.31. Se tiene que

$$\mathbf{T}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1.45}$$

Demostración. Si usamos la expresión en coordenadas locales (1.28) de $\nabla_X Y$ y que

$$[X,Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

se deduce inmediatamente (1.45). □

Observación 1.32. Nótese que el tensor de torsión definido aquí coincide con el tensor de torsión clásico definido por una conexión lineal en M, véase [KN63].

Curvatura

A continuación introducimos el concepto de curvatura.

Definición 1.33. Sea Γ una conexión en TM con proyector horizontal h, definimos su **curvatura** como el campo de tensores de tipo $(1,2)$ en TM dado por

$$R = -N_h = -\frac{1}{2}[h,h] : \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)\,, \tag{1.46}$$

donde $[-,-]$ es la torsión de Nijenhius Es decir

$$R(X,Y) = -[hX,hY] + h[hX,Y] + h[X,hY] - h[X,Y]$$

A partir de la la definición se ve claramente que la curvatura es un tensor antisimétrico. Se comprueba con facilidad que

$$R(X,Y) = -v[hX,hY]\,. \tag{1.47}$$

La expresión anterior es importante por que expresa que R es la obstrucción a la integrabilidad de R, es decir:

Proposición 1.34. Sea Γ una conexión en TM con distribución horizontal H. Entonces se tiene que H es integrable si y solo sí $R = 0$.

Demostración. Por el teorema de Frobenius, H es integrable si y solo si para cada par de campos de vectores $X, Y \in Secc(H)$, se tiene que $[X,Y] \in Secc(H)$, donde $Secc(H)$ son las secciones del fibrado vectorial $H \longrightarrow TM$. Por lo tanto el resultado se sigue de (1.47). □

En coordenadas locales se tiene que

$$\begin{aligned} R &= \left(H_i(\Gamma^k_j) - H_j(\Gamma^k_i)\right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \\ &= \frac{1}{2} \left(H_i(\Gamma^k_j) - H_j(\Gamma^k_i)\right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^i \wedge dx^j \,, \end{aligned} \tag{1.48}$$

donde H_i viene dado por (1.22).

Las siguientes identidades son fáciles de probar usando la identidad de Jacobi y la conmutatividad de la torsión de Nijenhius

$$[J, R] = [h, t] \qquad\qquad [h, R] = 0 \,,$$

y son conocidas como las identidades de Bianchi para conexiones no lineales.

Si la conexión es lineal se tiene

$$R = v^r \left(H_i(\Gamma^k_{jr}) - H_j(\Gamma^k_{ir})\right) \frac{\partial}{\partial v^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \,. \tag{1.49}$$

Definimos para el caso lineal, el **tensor de curvatura R en** M como el campo de tensores

$$\mathbf{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

del tipo $(1,3)$ en M dado por

$$\mathbf{R}_x(X, Y, Z) = \phi_{Z_x}(R(X^H, Y^H)_{Z_x}) \,.$$

Proposición 1.35. Se verifica que

$$\mathbf{R}(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \,.$$

La demostración se puede ver en ([DLR11]).

Observación 1.36. Por lo tanto tenemos que el tensor de curvatura en M coincide con el tensor de curvatura clásico definido por una conexión lineal en M, véase [KN63].

Capítulo 2

El problema inverso de la mecánica lagrangiana en $\mathbb{R}^n$

El objetivo de este capítulo es dar una introducción intuitiva al problema inverso, en el contexto más sencillo posible, es decir en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que surge de manera natural en el marco del cálculo de variaciones como una caracterización de los extremales del principio variacional de Hamilton. El problema inverso de la mecánica lagrangiana consiste en determinar cuando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden explícito

$$\ddot{x}^i = f(t, x, \dot{x}) \qquad 1 \leq i \leq n\,,$$

está caracterizado porque sus soluciones sean extremales del principio variacional de Hamilton para un cierto lagrangiano L, es decir que sus soluciones coincidan con las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L.

2.1. Las ecuaciones de Euler-Lagrange y el cálculo de variaciones

Consideremos una función

$$L : \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que llamaremos **función lagrangiana**. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a $L = L(t, x, \dot{x})$ son el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad 1 \leq j \leq n\,, \tag{2.1}$$

cuyas soluciones son curvas $t \in I \to (x(t)) \in \mathbb{R}^n$, siendo I un intervalo real. Si desarrollamos los términos, obtenemos que el sistema anterior se transforma en :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ddot{x}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{x}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0\,,$$

es decir el sistema (2.1) se puede reescribir como

$$g_{ij}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\ddot{x}^i(t) + h_j\left(t, x(t),\ \dot{x}(t)\right) = 0 \quad 1 \le j \le n, \tag{2.2}$$

donde g_{ij}, h_j, son funciones en $\mathbb{R}^{2n+1}$ dadas por

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \quad h_j = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{x}^i - \frac{\partial L}{\partial x^j} \qquad 1 \le i, j \le n. \tag{2.3}$$

Si el Lagrangiano es regular, esto si la matriz hessiana con respecto a las velocidades

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\right), \tag{2.4}$$

es no singular en todo punto, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir de manera inmediata como

$$\ddot{x}^i \ = \ f^i(t, x, \dot{x}) \qquad 1 \le i \le n\,, \tag{2.5}$$

donde $f^i = -g^{ji}h_j$, siendo (g^{ij}) la matriz inversa de (g_{ij}).

Por el bien conocido teorema de Picard-Lindelöf sabemos que dada una condición inicial sobre la función x y su derivada $\dot{x}$ existe solución local única $t \in I \to (x(t)) \in \mathbb{R}^n$ del sistema de ecuaciones ordinarias (2.5).

Principio variacional de Hamilton

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden obtener a partir de un principio variacional que vamos a describir a continuación.

Definición 2.1. Sean $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ con $t_0 < t_1$. Denotemos por $\mathcal{D}$ el conjunto de curvas de clase 2

$$\alpha : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

tales que $\alpha(t_0) = x_0$ y $\alpha(t_1) = x_1$. Sea $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ un lagrangiano, se define la acción integral

$$\mathcal{A} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

asociada a L por

$$\mathcal{A}[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \alpha(t), \dot{\alpha}(t))\, dt.$$

donde $\dot{\alpha}$ es la derivada de α con respecto a t.

Definición 2.2. Sea $\alpha \in \mathcal{D}$, diremos que

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,$$

de clase 2 y con $\epsilon > 0$, es una **variación de** α si:

1. $\alpha_0 = \alpha\,,$

2. $\alpha_s \in \mathcal{D}$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$,

siendo $\alpha_s = \alpha(s, -)$.

Definición 2.3. Una curva $\alpha \in \mathcal{D}$ es un extremal de $\mathcal{A}$ si para cada variación α_s se verifica

$$\delta\mathcal{A}[\alpha_s] = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathcal{A}[\alpha_s] = 0\,.$$

El problema variacional, asociado a un lagrangiano L, consiste en encontrar los extremales de la acción integral $\mathcal{A}$.

A continuación caracterizamos los extremales de la acción del lagrangiano como soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Proposición 2.4. Sea $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ un lagrangiano y $\alpha \in \mathcal{D}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. α es un extremal del problema variacional asociado a L.

2. α verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.6}$$

Demostración. Sea $\alpha_s(t) = (x_s^i(t))$ una variación de α, entonces tenemos que $\dot{\alpha}_s(t) = (x_s^i(t), \dot{x}_s^i(t))$, donde $\dot{x}_s^i(t)) = d/dt\, x_s^i(t)$. Durante la demostración vamos a utilizar la notación

$$\delta = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\,.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}[\alpha_s] &= \delta\int_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{\alpha}_s(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t, \dot{\alpha}_s(t))\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\delta x_s^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\delta \dot{x}_s^i(t)\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\delta x_s^i(t)\,dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\delta x_s^i(t)\Big|_{t_0}^{t^1} \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\right)\delta x_s^i(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Como $x_s^i(t_0)$, $x_s^i(t_1)$ son constantes para todo s, se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\delta x_s^i(t)\Big|_{t_0}^{t^1} = 0\,,$$

y por lo tanto

$$\delta\mathcal{A}[\alpha_s] = \int_{t_0}^{t_1} \delta x_s^i(t)\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha})(t)} - \frac{d}{dt}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\Big|_{(t,\dot{\alpha}(t))}\right)\right)dt. \tag{2.7}$$

Por lo tanto si se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange α es un extremal. Ahora supongamos que α es un extremal. Si variamos las funciones

$$\delta x^i_s(t)$$

de manera diferenciable, respetando siempre que α_s siga siendo variación de α, se seguirá cumpliendo que $\delta\mathcal{A}[\alpha_s] = 0$. Utilizando (2.7) concluimos que se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange. □

2.2. El problema inverso

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del tipo

$$\ddot{x}^i = f^i(t, x, \dot{x}) \qquad 1 \leq i \leq n\,, \tag{2.8}$$

con $f^i : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

El **problema inverso** o **problema de los multiplicadores** consiste en hallar un lagrangiano

$$L : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

regular tal que el sistema (2.8), se pueda escribir como las ecuaciones de Euler-Lagrange. Recordamos que las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ddot{x}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{x}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0\,. \tag{2.9}$$

Denotamos por $g_{ij} = \partial^2 L/\partial \dot{x}^i \dot{x}^j$, matriz que llamaremos matriz de multiplicadores. Se tiene entonces que para un lagrangiano regular las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden reescribir como

$$\ddot{x}^i = g^{ij}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^j}\dot{x}^k - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^j} + \frac{\partial L}{\partial x^j}\right),$$

donde g^{ij} es la matriz inversa de g_{ij}. Lo que se quiere es que el sistema (2.8) coincida con (2.9), y esto ocurre si y solo sí

$$f^i = g^{ij}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^j}\dot{x}^k - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^j} + \frac{\partial L}{\partial x^j}\right).$$

Es decir, dado el sistema (2.8), el problema inverso consiste en encontrar un lagrangiano $L = L(t, x, \dot{x})$ regular tal que

$$-g_{ij} f^j = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}\dot{x}^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} \tag{2.10}$$

para $1 \leq i \leq n$, donde $g_{ij} = \partial^2 L/\partial \dot{x}^i \dot{x}^j$.

La manera correcta de interpretar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del tipo (2.8) a nivel geométrico, es como el campo de vectores

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+1}), \tag{2.11}$$

es decir un SODE. A partir de ahora, llamaremos a (2.11) SODE asociado al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (2.8).

A continuación introducimos una notación que nos permitirá simplificar la condición (2.10).

Definición 2.5. Sea $K : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+1})$ el SODE asociado al sistema (2.8). Definimos las funciones

$$\Lambda_i^K = \xi\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial x^i} \quad 1 \le i \le n. \tag{2.12}$$

Si desarrollamos la expresión anterior, obtenemos que

$$\Lambda_i^K = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} f^j + \dot{x}^j \frac{\partial^2 K}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} + \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial \dot{x}^i} - \frac{\partial K}{\partial x^i} \qquad 1 \le i \le n \tag{2.13}$$

De (2.10) se deduce :

Proposición 2.6. El problema inverso para el sistema (2.8), es equivalente a encontrar un lagrangiano $L = L(t, x, \dot{x})$ tal que

$$\Lambda_i^L = 0 \qquad 1 \le i \le n, \tag{2.14}$$

donde recordemos Λ_i^L viene definido en (2.12).

Recordemos que una forma diferencial $\alpha \in \Lambda^r(M)$ en una variedad diferenciable M es cerrada si $d\alpha = 0$, y es exacta si existe $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $d\beta = \alpha$. El lema de Poincaré relaciona ambos conceptos en el caso de $M = \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.7. ***(Lema de Poincaré).*** *Toda forma $\alpha \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ con $n > 0$ es exacta, es decir que existe $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $d\beta = \alpha$.*

Demostración. Ver [War71, MT97]. □

La siguiente proposición, basada en el lema de Poincaré, nos será de utilidad en varias ocasiones:

Proposición 2.8. Dada una matriz de funciones $g = (g_{ij}(t, x, \dot{x}))$, existe un lagrangiano $L = L(t, x, \dot{x})$ tal que

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

si y solo si

$$g_{ij} = g_{ji} \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} \qquad 1 \le i, j, k \le n. \tag{2.15}$$

Demostración. Suponemos que se cumple (2.15), definimos las 1-formas $\alpha_i(\dot{x}) = g_{ij}(\dot{x})d\dot{x}^j$, donde consideramos que las funciones g_{ij} dependen únicamente de $\dot{x}$ dejando t y x fijos. Se tiene entonces que

$$d\alpha_i = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} d\dot{x}^k \wedge d\dot{x}^i ,$$

luego $d\alpha_i = 0$ si y solo si $\partial g_{ij}/\partial \dot{x}^k = \partial g_{ik}/\partial \dot{x}^j$. Por el Lema de Poincaré (2.7), sabemos que existen $h_i = h_i(\dot{x})$ definidas en $\mathbb{R}$, tales que $dh_i = \alpha_i$ es decir tal que $\partial h_i/\partial \dot{x}^j = g_{ij}$. De hecho podemos calcular explícitamente ciertas h_i verificando que $dh_i = \alpha_i$, estas son

$$h_i(t,x,\dot{x}) \;=\; \dot{x}^j \int_0^1 g_{ij}(t,x,s\dot{x})ds ,$$

de donde se deduce que h_i va ser diferenciable también con respecto a las variables t y x. De manera análoga consideramos la 1-forma $\alpha(\dot{x}) = h_i(\dot{x})d\dot{x}^i(\dot{x})$, tendremos que será exacta si y solo si

$$\frac{\partial h_i}{\partial \dot{x}^j} = g_{ij} = g_{ji} = \frac{\partial h_j}{\partial \dot{x}^i} .$$

Luego existirá L tal que $dL(\dot{x}) = h(\dot{x})$, además podemos obtener cierta L de la manera siguiente

$$L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^i \int_0^1 h_i(t,x,\tau\dot{x})d\tau = \dot{x}^i\dot{x}^j \int_0^1 \int_0^1 g_{ij}(t,x,\tau s\dot{x})dsd\tau$$

Por la expresión anterior vemos que L también va a ser diferenciable con respecto a las variables t y x y además se tiene que $\partial^2 L/\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i = \partial h_i/\partial \dot{x}^j = g_{ij}$, luego L es la función deseada. El recíproco es directo. □

Observación 2.9. Nótese que si $K = K(t,x,\dot{x})$ verifica que $g_{ij} = \partial^2 K/\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j$, entonces

$$L(t,x,\dot{x}) = K(t,x,\dot{x}) + A_i(t,x)\dot{x}^i + C(t,x)$$

también, para cualesquiera funciones A_i, C.

Solución del problema inverso para el caso $n = 1$

Cuando f es analítica, se tiene que el problema inverso asociado a

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}) \tag{2.16}$$

tiene siempre respuesta positiva, es decir siempre existe un lagrangiano $L = L(t,x,\dot{x})$ tal que el la ecuación (2.16) es equivalente a la ecuacion de Euler-Lagrange asociada a L

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)) \right) - \frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),\dot{x}(t)) = 0 .$$

Veámoslo, sea

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \tag{2.17}$$

el SODE asociado a (2.16). Sea $K = K(t, x, \dot{x})$ una función arbitraria, y $g = \partial^2 K/\partial \dot{x}^2$. Se deduce luego a partir de (2.13) y (2.17) que

$$\Lambda^K = gf + \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial \dot{x}} - \frac{\partial K}{\partial x},$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial \Lambda^K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} f + g\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} = \xi(g) + g\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}. \tag{2.18}$$

Entonces se tiene que $\partial \Lambda^K/\partial \dot{x}$ solo depende de g. Si igualamos (2.18) a 0, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales que tiene como incógnita g

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} f + g\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} = 0. \tag{2.19}$$

Enunciamos ahora el clásico teorema de Cauchy-Kowaleska:

Teorema 2.10. ***(Teorema de Cauchy-Kowaleska).*** *Consideremos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales*

$$\frac{\partial z^\mu}{\partial x^n} = \Phi^\mu(x, z, \frac{\partial z}{\partial x^i}), \tag{2.20}$$

con $1 \le i \le n-1$, $1 \le \mu \le m$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $z = (z^1, \ldots, z^m)$ *y las funciones* Φ^μ *analíticas en un entorno de* $(0, A^\mu, A_i^\mu)$. *Dadas funciones analíticas* $f^\mu = f^\mu(x^1, \ldots, x^{n-1})$ *tales que*

$$f^\mu(0) = A^\mu \qquad \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\right|_0 = A_i^\mu,$$

entonces existe una única solución analítica $z = F(x^1, \ldots, x^n)$ *de (2.20) en un entorno del* $0 \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$z^\mu(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) = f^\mu(x^1, \ldots, x^{n-1}).$$

Demostración. Véase [Joh82]. □

Aplicando el teorema de Cauchy-Kowaleska al sistema (2.19), obtenemos que al menos localmente siempre existe una función g analítica satisfaciendo (2.19), de hecho existen infinitas una para cada condición inicial. Si solo se le hubiese exigido a la función f ser diferenciable (es decir de clase infinito) entonces no tendríamos asegurado que la ecuación 2.19 tenga solución. De hecho en [Lew57] se prueba la existencia de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales regulares pero sin solución.

Por la Proposición 2.8, para dicha función g existe una función $K = K(t, x, \dot{x})$ tal que $g = \partial^2 K/\partial \dot{x}^2$ y por lo tanto, por el razonamiento que se acaba de hacer se tiene que $\partial \Lambda^K/\partial \dot{x} = 0$, es decir

$$\Lambda^K(t, x, \dot{x}) = C(t, x),$$

para cierta función C diferenciable. Escogemos $V = V(t, x)$ tal que

$$C = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Luego se deduce que si tomamos

$$L = K - V\,,$$

obtenemos que

$$\Lambda^L = \Lambda^K - \Lambda^V = C + \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,,$$

y por lo tanto L es una solución del problema inverso.

Observación 2.11. En la práctica la ecuación en derivadas parciales (2.19) puede ser reducida a una sistema más fácil de la siguiente manera. Tomamos $g = e^G$ siendo $G = G(t, x, \dot{x})$, entonces para K tal que $g = \partial^2 K/\partial \dot{x}^2$

$$\frac{\partial \Lambda^K}{\partial \dot{x}} = \xi\left(e^G\right) + e^G \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = e^G\left(\xi\,(G) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right),$$

por lo tanto se tiene que (2.19) se transforma en

$$\xi\,(G) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} f + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\dot{x} = 0$$

que también tiene siempre solución analítica G y de la que se puede recuperar una solución g de la ecuación original (2.19) haciendo simplemente $g = e^G$.

Ejemplo 2.12. (El oscilador armónico).Consideremos la ecuación clásica del oscilador armónico

$$\ddot{x} = -kx\,,$$

cuyo SODE asociado es $\xi = \partial/\partial t + \dot{x}\,\partial/\partial x - kx\,\partial/\partial \dot{x}$. La función $G = 0$ nos da una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\xi\,(G) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} - kx\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = 0\,.$$

Tomándose $g = e^G = 1$, tenemos que $K = 1/2\,\dot{x}^2$ verifica $\partial^2 K/\partial \dot{x}^2 = g$. Calculamos ahora

$$\Lambda^K = -kx$$

por lo tanto si se coge $V = kx^2$, se tiene que $\partial V/\partial x = -\Lambda^K$ y por lo tanto el lagrangiano buscado es

$$L = K - V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - kx^2\,,$$

que es el lagrangiano clásico del oscilador armónico es decir energía cinética menos potencial

Ejemplo 2.13. (El oscilador armónico amortiguado). Se considera la ecuación del oscilador armónico con un término de amortiguamiento

$$\ddot{x} = -kx - b\dot{x}\,,$$

En este caso

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} - (kx + b\dot{x})\frac{\partial}{\partial \dot{x}},$$

y tenemos que una solución par la ecuación

$$\xi(G) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

viene dada por $G = bt$. Tomamos luego $g = e^{bt}$ y $K = 1/2\,\dot{x}^2 e^{bt}$ llegamos a que

$$\Lambda^K = -e^{bt} kx.$$

Deducimos entonces que el lagrangiano buscado es

$$L = e^{bt}(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - kx^2).$$

2.3. Condiciones de Helmholtz

En esta sección vamos a exponer las condiciones de Helmholtz, que caracterizan cuando hay solución al problema inverso para el sistema (2.8).

Primero, definimos las funciones

$$\Phi^i_j = \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j}\right) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.21}$$

Mas adelante en el capítulo 3 daremos significado geométrico a dichas funciones.

Teorema 2.14. ***(Condiciones de Helmholtz)*** *Consideremos el SODE*

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} + f^i\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$$

asociado a (2.8). Entonces dado $x \in M$, existe un entorno U de x y un lagrangiano $L : \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ regular solución al problema inverso si y solo si, existe un entorno W de x y una matriz de funciones $g = (g_{ij}(t, x, \dot{x}))$, con dominio de definición $\mathbb{R} \times W \times \mathbb{R}^n$, simétrica no degenerada verificando las condiciones de Helmholtz:

H1 $\quad g\Phi = (g\Phi)^t \quad (\Leftrightarrow g_{ik}\Phi^k_j = g_{jk}\Phi^k_i)$,

H2 $\quad \xi(g_{ij}) + \frac{1}{2}g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq n$,

H3 $\quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} \qquad 1 \leq i, j, k \leq n$.

A las condiciones H_1, H_2, H_3 se las llama condiciones de Helmholtz.

Dichas condiciones fueron obtenidas primeramente por Helmholtz en [Hel87] como condiciones necesarias para la solución del problema inverso. Posteriormente A.Mayer en [May96] probó la suficiencia, con técnicas que no trataremos aquí. En este trabajo obtendremos dichas condiciones siguiendo el razonamiento que hizo Douglas en [Dou41], usando las identidades del siguiente lema:

Lema 2.15. ***(Douglas 1941)*** *Sea $K = K(t,x,\dot{x})$ una función arbitraria y $\xi = \partial/\partial t + \dot{x}^i\,\partial/\partial x^i + f^i\,\partial/\partial \dot{x}^i \in \mathfrak{X}(X^{2n+1})$ el SODE asociado al sistema (2.8). Se tiene que si definimos las funciones*

$$\Lambda_{ij} = \xi(g_{ij}) + \frac{1}{2}g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}$$
$$m_{ij} = g_{ik}\Phi^k_j - g_{jk}\Phi^k_i\,,$$

siendo $g_{ij} = \partial^2 K/\partial \dot{x}^i \dot{x}^j$, entonces se verifican las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial \Lambda^K_j}{\partial \dot{x}^i}\right) = \Lambda_{ij}$

2. $\displaystyle \frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Lambda^K_j}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \Lambda^K_j}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j}\Lambda_{ki} + \frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\Lambda_{kj}\right) - m_{ij}$

Demostración. Se tiene a partir de 2.13 que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial \dot{x}^j} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j}f^k + g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial^2 K}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} + \dot{x}^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^j \partial x^i}\\ &= \xi(g_{ij}) + g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^j \partial x^i}\right)\end{aligned} \tag{2.22}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial \Lambda^K_j}{\partial \dot{x}^i}\right) = \xi(g_{ij}) + \frac{1}{2}\left(g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right) = \Lambda_{ij}$$

de donde obtenemos el punto 1. A partir de (2.22) se deduce que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \Lambda^K_j}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{1}{2}g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} - \frac{1}{2}g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial^2 K}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^j \partial x^i} = 0$$

Si le aplicamos ξ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial \Lambda^K_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \Lambda^K_j}{\partial \dot{x}^i}\right) &= \frac{1}{2}\left(\xi(g_{ik})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + g_{ik}\xi\left(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j}\right) - \xi(g_{jk})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right.\\ &\left.-g_{jk}\xi\left(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right)\right) + \frac{\partial^3 K}{\partial t \partial x^j \partial \dot{x}^i} + \dot{x}^k\frac{\partial^3 K}{\partial x^k \partial x^j \partial \dot{x}^i} + f^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\\ &- \frac{\partial^3 K}{\partial t \partial x^i \partial \dot{x}^j} - \dot{x}^k\frac{\partial^3 K}{\partial x^k \partial x^i \partial \dot{x}^j} - f^k\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0\,.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora calculamos

$$\frac{\partial \Lambda_i^K}{\partial x^j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} f^k + g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} + \dot{x}^k \frac{\partial^3 K}{\partial x^j \partial x^k \partial \dot{x}^i} + \frac{\partial^3 K}{\partial x^j \partial t \partial \dot{x}^i} - \frac{\partial^2 K}{\partial x^j \partial x^i},$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda_i^K}{\partial x^j} - \frac{\partial \Lambda_j^K}{\partial x^i} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} f^k - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} f^k + g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} - g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \\ &+ \frac{\partial^3 K}{\partial x^j \partial t \partial \dot{x}^i} - \frac{\partial^3 K}{\partial x^i \partial t \partial \dot{x}^j} + \dot{x}^k \frac{\partial^3 K}{\partial x^j \partial x^k \partial \dot{x}^i} - \dot{x}^k \frac{\partial^3 K}{\partial x^i \partial x^k \partial \dot{x}^j}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Tenemos luego que si a (2.24) le restamos (2.23) obtenemos que

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \Lambda_i^K}{\partial x^j} - \frac{\partial \Lambda_j^K}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial \Lambda_i^K}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \Lambda_j^K}{\partial \dot{x}^i}\right) = g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} - g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \\ &- \frac{1}{2}\left(\xi(g_{ik})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + g_{ik}\xi\left(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j}\right) - \xi(g_{jk})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} - g_{jk}\xi\left(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right)\right) \\ &= g_{ik}\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j}\right)\right) - g_{jk}\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right)\right) \\ &- \frac{1}{2}\xi(g_{ik})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\xi(g_{jk})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\end{aligned} \tag{2.25}$$

Por definición de Λ_{ik} se tiene que

$$\xi(g_{ik}) = \Lambda_{ik} - \frac{1}{2}g_{i\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k} - \frac{1}{2}g_{k\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^i},$$

de donde se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned}&- \frac{1}{2}\xi(g_{ik})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\xi(g_{jk})\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{1}{2}\Lambda_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{4}g_{i\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} \\ &+ \frac{1}{4}g_{k\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\Lambda_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} - \frac{1}{4}g_{j\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} - \frac{1}{4}g_{k\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} \\ &= -\frac{1}{2}\Lambda_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{4}g_{i\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\Lambda_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} - \frac{1}{4}g_{j\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Si ahora aplicamos (2.26) en 2.25 obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \Lambda_i^K}{\partial x^j} - \frac{\partial \Lambda_j^K}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial \Lambda_i^K}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \Lambda_j^K}{\partial \dot{x}^i}\right) = g_{ik}\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\xi(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j}) + \frac{1}{4}g_{i\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j}\right) \\ &- g_{jk}\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi(\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}) + \frac{1}{4}g_{j\gamma}\frac{\partial f^\gamma}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{1}{2}\Lambda_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\Lambda_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} \\ &= -\frac{1}{2}\Lambda_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\Lambda_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} - g_{ik}\Phi_j^k + g_{jk}\Phi_i^k = -\frac{1}{2}\Lambda_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^j} + \frac{1}{2}\Lambda_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial \dot{x}^i} - m_{ij}\end{aligned}$$

de donde se obtiene la igualdad 2. □

Demostración. ***(Prueba del teorema 2.14)***

Antes de nada nótese que la igualdad **H2** es equivalente a $\lambda_{ij} = 0$ y la igualdad **H1** a $m_{ij} = 0$. Supongamos que L es solución del problema inverso, tomamos $g_{ij} = \partial^2 L/\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j$, por lo tanto es evidente que se verifica **H3**. Además se tiene entonces que $\Lambda_i^L = 0$ y por lo tanto en virtud del lema 2.15 se tiene que $\lambda_{ij} = 0$ y $m_{ij} = 0$, por lo que se cumplen las condiciones **H1** y **H2**.

Supongamos ahora que se cumplen las condiciones de Helmholtz, entonces como g es simétrica y $\partial g_{ij}/\partial\dot{x}^k = \partial g_{ik}/\partial\dot{x}^j$ se tiene en virtud de la proposición (2.8) que existe una función diferenciable $K = K(t, x, \dot{x})$ tal que $g_{ij} = \partial^2 K/\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j$. Por otro lado a partir de la igualdad 1 del lema 2.15 sabemos que

$$\frac{\partial\Lambda_i^K}{\partial\dot{x}^j} + \frac{\partial\Lambda_j^K}{\partial\dot{x}^i} = 0\,,$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2\Lambda_i^K}{\partial\dot{x}^k\partial\dot{x}^j} = -\frac{\partial^2\Lambda_j^K}{\partial\dot{x}^k\partial\dot{x}^i} = \frac{\partial^2\Lambda_k^K}{\partial\dot{x}^j\partial\dot{x}^i} = -\frac{\partial^2\Lambda_i^K}{\partial\dot{x}^j\partial\dot{x}^k}\,,$$

de lo que se deduce que $\partial^2\Lambda_i^K/\partial\dot{x}^k\partial\dot{x}j = 0$, es decir que

$$\Lambda_i^K(t, x, \dot{x}) = A_{ij}(t, x)\dot{x}^j + B_i(t, x)\,, \tag{2.27}$$

donde además se tiene que $A_{ij} = -A_{ji}$. Ahora a partir de la igualdad 2 del lema 2.15 sabemos que

$$\frac{\partial\Lambda_i^K}{\partial x^j} - \frac{\partial\Lambda_j^K}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial\Lambda_i^K}{\partial\dot{x}^j} - \frac{\partial\Lambda_j^K}{\partial\dot{x}^i}\right) = 0$$

que usando (2.27) se transforma en

$$\begin{aligned}&\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^k + \frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^k - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\xi(2A_{ij}) = -\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + \\ &\dot{x}^k\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\right) + \frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = 0\,.\end{aligned}$$

Esto solo puede ocurrir si

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = 0 \tag{2.28}$$

$$-\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = 0\,. \tag{2.29}$$

Definimos la 1-forma $\alpha = \sum_{i>j} A_{ij}dx^i \wedge dx^j$ donde consideramos que A_{ij} solo como función de x. Tenemos entonces que

$$d\alpha = \sum_{i>j>k}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}\right)dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

luego tenemos en virtud de (2.28), tenemos que α es cerrada y por el lema de Poincaré es exacta, por lo tanto existen $D_i = D_i(t,x)$ diferenciables tales que $A_{ij} = \partial D_i/\partial x^j - \partial D_j/\partial x^i$. Entonces si definimos $C_i = -\partial D_i/\partial t + B_i$, la igualdad (2.29) se transforma en

$$\frac{\partial C_i}{\partial x^j} - \frac{\partial C_j}{\partial x^i} = 0\,,$$

lo cual implica por el lema de Poincaré que existe $V = V(t,x)$ tal que $-\partial V/\partial x^i = C_i$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\Lambda_i^K &= A_{ij}\dot{x}^j + B_i = \left(\frac{\partial D_i}{\partial x^j} - \frac{\partial D_j}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j + (C_i + \frac{\partial D_i}{\partial t})\\ &= \left(\frac{\partial D_i}{\partial x^j} - \frac{\partial D_j}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j + \frac{\partial D_i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x^i}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto si definimos $L = K - D_i\dot{x}^i - V$ llegamos a que

$$\begin{aligned}\Lambda_i^L &= \Lambda_i^K - (\Lambda_i^{D_j\dot{x}^j} + \Lambda_i^V)\\ &= \Lambda_i^K - \left(\frac{\partial D_i}{\partial t} + \dot{x}^j\left(\frac{\partial D_i}{\partial x^j} - \frac{\partial D_j}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial V}{\partial x^i}\right) = 0\,,\end{aligned}$$

y por lo tanto L es solución del problema inverso para ξ. □

Las condiciones de Helmholtz nos dan una condición necesaria y suficiente para la existencia de un lagrangiano solución del problema inverso. Además en la demostración del teorema (2.14) que acabamos de hacer viene implícito como construir dicho lagrangiano a partir de una matriz g verificando las condiciones de Helmholtz. Los pasos para construir dicho L son los siguientes:

PASO 1 Encontrar $g = (g_{ij} = (t,x,\dot{x}))$ simétrica no degenerada verificando las condiciones de Helmholtz.

PASO 2 Encontrar una función $K = K(t,x,\dot{x})$ verificando que $g_{ij} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$.

PASO 3 Calcular Λ_i^K y encontrar funciones $D_i = D_i(t,x)$ y $V = V(t,x)$ verificando que $\Lambda_i^{D_j\dot{x}^i + V} = \Lambda_i^K$.

PASO 4 El lagrangiano deseado es $L = K - D_i\dot{x}^j - V$.

Aunque pueda parecer fácil lo cierto es que el paso 1 conlleva una dificultad importante pues las condiciones de Helmholtz, vistas como ecuaciones sobre la variable $g = (g_{ij})$ son un sistema mixto de ecuaciones algebraicas y ecuaciones en derivadas parciales lineales, que es en general un problema muy difícil de resolver. Sin embargo esto no quita que no se puedan estudiar en casos particulares con éxito.

Ejemplo 2.16. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden dado por por

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= y\\ \ddot{y} &= -x\,.\end{aligned}$$

Se tiene que el SODE asociado al sistema es

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - x\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\,.$$

Es fácil comprobar que la matriz

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

verifica las condiciones de Helmholtz. Definimos $K = 1/2(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)$, cuya matriz hessiana con respecto a las velocidades coincide con g. Tenemos que

$$\Lambda_1^K = y \qquad \Lambda^K = x\,,$$

luego definimos $V = -xy$. Tenemos entonces que el lagrangiano deseado es

$$L = K - V = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + xy\,.$$

Capítulo 3

La geometría del problema inverso, caso autónomo

El objetivo de este capítulo es llegar a una formulación libre de coordenadas de las condiciones de Helmholtz. En principio vamos a centrarnos en el problema inverso autónomo, es decir cuando el sistema es de la forma

$$\ddot{x}^i = f^i(x, \dot{x}) \quad 1 \le i \le n\,,$$

y en el capítulo 4 recuperaremos los resultados para el caso dependiente del tiempo. Por lo tanto vamos a considerar que el sistema de ecuaciones esta definido sobre una variedad diferenciable general M, es decir consideramos un SODE arbitrario $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$. En coordenadas locales

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial v^i}\,. \tag{3.1}$$

El problema inverso local consiste en averiguar si dado un punto $x \in M$ existe un entorno U de x, y una función lagrangiana $L : TU \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que localmente las soluciones de ξ verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L. En este caso diremos que el SODE ξ es **localmente lagrangiano** o **localmente variacional**. Los contenidos y resultados de este capítulo se encuentran en [MCS93b, DLR11, GM00].

3.1. Secciones a lo largo de aplicaciones. Campos de tensores a lo largo de la proyección del fibrado tangente

En esta sección se introduce el concepto de secciones a lo largo de aplicaciones. Como referencias básicas ponemos [MCS92, MCS93a].

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado y $f : N \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable. Consideremos el pullback del fibrado mediante f, es decir el fibrado

$$f^*\pi : f^*E \longrightarrow N\,,$$

donde
$$f^*E = N \times_M E = \{(n,e) \in N \times E :\ f(n) = \pi(e)\}\,,$$
y $f^*\pi(n,e) = n$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f^*\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"] & M\,, \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

donde p es la proyección natural. La propiedad fundamental del pullback del fibrado dice que dadas un par de aplicaciones diferenciables $h : A \to E$ y $g : A \to N$, tales que $\pi \circ h = f \circ g$, entonces existe una única aplicación $l : A \to f^*E$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "l"] \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & f^*E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f^*\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & N \arrow[r, "f"] & M\,, \end{tikzcd}$$

es decir haciendo que $p \circ l = h$ y $f^*\pi \circ l = g$. Dicha l viene dada por $l(a) = (g(a), h(e))$.

Definición 3.1. Una sección del E a lo largo de f es una sección del fibrado $f^*\pi : f^*E \longrightarrow N$.

Consideremos el diagrama conmutativo (3.2). A partir de una sección $\widetilde{\sigma} : N \to f^*E$ de $f^*\pi$, se puede definir la aplicación
$$\sigma = p \circ \widetilde{\sigma} : N \longrightarrow E\,,$$
que verifica que $\pi \circ \sigma = f$. Recíprocamente, supongamos ahora que tenemos una aplicación diferenciable $\sigma : N \longrightarrow E$ verificando que $\pi \circ \sigma = f$. Consideramos las aplicaciones
$$\sigma : N \longrightarrow E \qquad 1_N : N \longrightarrow N\,,$$
que claramente verifican que $\pi \circ \sigma = f \circ 1_N$. Entonces por la propiedad fundamental del pullback existe una única $\widetilde{\sigma} : N \longrightarrow M$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dashed, "\widetilde{\sigma}"] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] \arrow[dr, bend right, "1_N"'] & f^*\pi \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f^*\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & N \arrow[r, "f"] & M\,, \end{tikzcd}$$

es decir existe una única $\widetilde{\sigma}$ verificando que $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$ y $f^*\pi \circ \widetilde{\sigma} = 1_N$. Entonces es evidente que $\widetilde{\sigma}$ es una sección de $f^*\pi$.

Deducimos por lo tanto que toda sección de $f^*\pi$ se puede obtener a partir de una aplicación diferenciable $\sigma : N \longrightarrow E$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "f"'] & M, \end{tikzcd}$$

y viceversa. De ahora en adelante cuando hablemos de secciones a lo largo de f nos referiremos a estas últimas.

Proposición 3.2. Cuando $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial, las secciones de E a lo largo de f forman un $\mathcal{C}^\infty(N)$-módulo.

Demostración. Sean $\sigma_1, \sigma_2 : N \longrightarrow E$ verificando que $\pi \circ \sigma_1 = \pi \circ \sigma_2 = f$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Tenemos que $\sigma_1(n), \sigma_2(n) \in \pi^{-1}(f(n))$ que es un espacio vectorial, y por lo tanto tiene sentido la suma y el producto por escalares. Definimos entonces $\sigma = \sigma_1 + g\sigma_2$ como

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) + g(n)\sigma_2(n)\,,$$

que claramente es una sección de E a lo largo de f. □

Campos de tensores a lo largo de la proyección del fibrado tangente

En general, vamos a considerar que f es la proyección del fibrado tangente $\tau : TM \to M$, y E algún fibrado tensorial sobre M. Es decir vamos a tener que $E = T^p_q(M)$ donde $T^p_q(M)$ es el espacio de tensores dado por

$$T^p_q(M) = \overbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}^{p} \otimes \overbrace{TM^* \otimes \ldots \otimes TM^*}^{q}\,.$$

Se denotaran entonces por $\mathcal{T}^p_q(\tau)$ a las secciones de a lo largo de τ de $T^p_q(M)$. Los casos más sencillos son cuando $E = T^1_0(M) = TM$ o $E = T^0_1(M) = T^*M$, es decir cuando E es el fibrado tangente o cotangente. Denotaremos entonces por $\mathfrak{X}(\tau)$ y por $\Lambda^1(\tau)$ a las secciones a lo largo de τ de TM y de T^*M respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(\tau) &= \{X : TM \longrightarrow TM \;:\; \tau \circ X = \tau\} \\ \Lambda^1(\tau) &= \{\alpha : TM \longrightarrow T^*M \;:\; \pi \circ \alpha = \tau\}\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

siendo $\pi : T^*M \to M$ la proyección del fibrado cotangente. Llamaremos a $\mathfrak{X}(\tau)$ campos de vectores a lo largo de τ y a $\Lambda^1(\tau)$ 1-formas a lo largo de τ. En coordenadas locales (x^i) tenemos que los campos de vectores y 1-formas a lo largo de la proyección del fibrado tangente se expresan como

$$X(x,v) = X^i(x,v)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \qquad \alpha(x,v) = \alpha_i(x,v)dx^i(x)\,.$$

En general no nos vamos a limitar a estos dos últimos casos, si no que vamos a trabajar con campos de tensores a lo largo de τ más complicados. Concretamente nos interesan los casos $\mathcal{T}_1^1(\tau)$ y $\mathcal{T}_2^0(\tau)$ que van a ser claves en la reformulación de las condiciones de Helmholtz que estamos buscando. Tendremos que las expresiones locales de $T \in \mathcal{T}_1^1(\tau)$ y $S \in \mathcal{T}_2^0(\tau)$ son del tipo

$$T(x,v) = T^i_j(x,v)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \otimes dx^j(x) \quad S(x,v) = S_{ij}(x,v)dx^i(x)\otimes dx^j(x)\,.$$

También podemos considerar $E = T^*_*(M)$, donde recordamos

$$T^*_*(M) = \bigoplus_{p=0}^{\infty}\bigoplus_{q=0}^{\infty} T^p_q(M)$$

es el fibrado tensorial global sobre M. Entonces obtenemos el espacio de secciones de $E = T^*_*(M)$ a lo largo de τ, que denotaremos por $\mathcal{T}(\tau)$. En general hemos visto que posee estructura de $\mathcal{C}^\infty(TM)$-módulo, por lo tanto de manera inducida tiene estructura de $\mathbb{R}$-módulo. Tenemos además que $\mathcal{T}(\tau)$ va a poseer estructura de $\mathbb{R}$-álgebra dada por el producto tensor

$$[T\otimes S](v_q) = T(v_q)\otimes S(v_q)\,,$$

con $v_q \in T_qM$. Llamaremos entonces a $\mathcal{T}(\tau)$ el álgebra tensorial de M a lo largo de τ. La razón por la que se introduce dicha álgebra es porque vamos a estar especialmente interesados en sus derivaciones.

Al igual que los elementos de $\mathcal{T}(M)$ pueden ser vistos como operadores $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineales en $\mathfrak{X}(M)$, los elementos de $\mathcal{T}(\tau)$ se pueden interpretar como operadores $\mathcal{C}^\infty(TM)$-multilineales en $\mathfrak{X}(M)$. Esto se debe al hecho de que han sido definidos como secciones de un cierto fibrado sobre $\mathcal{C}^\infty(TM)$, el fibrado pullback. Dicho hecho nos servirá más adelante para comprobar que cierta aplicación es realmente un tensor.

Derivaciones de $\mathcal{T}(\tau)$

Recordemos que las derivaciones de un k-álgebra, con k cuerpo, son las aplicaciones k-lineales que cumplen la regla del producto de Leibniz. Por lo tanto tenemos la siguiente definición:

Definición 3.3. Una derivación D del $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{T}(\tau)$ es una aplicación $D:\mathcal{T}(\tau)\to\mathcal{T}(\tau)$, tal que

1. $D(\alpha T + S) = \alpha DT + DS$ (linealidad),
2. $D(T\otimes S) = DT\otimes S + T\otimes DS$ (regla de Leibniz),

para $T, S \in \mathcal{T}(\tau)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Tenemos que además la derivación D será de grado cero si lleva tensores de tipo (p,q) en tensores de tipo (p,q), es decir si $D(\mathcal{T}^p_q(\tau)) \subset \mathcal{T}^p_q(\tau)$.

Se tiene que las derivaciones de $\mathcal{T}(\tau)$ son operadores locales, es decir que si dos campos de tensores $T, S \in \mathcal{T}(\tau)$ coinciden en un entorno de un punto $x \in M$ entonces $DT(x) = DS(x)$. Esto permite definir la acción de una derivación D de $\mathcal{T}(\tau)$ sobre un campo de tensores a lo largo de τ definido localmente en un entorno $TU \subset TM$. Se prueba entonces con facilidad:

Proposición 3.4. Una derivación D queda determinada por su acción en $\mathcal{C}^\infty(TM)$, $\mathfrak{X}(\tau)$ y $\Lambda^1(\tau)$.

Demostración. Sean D_1 y D_2 derivaciones cuya acción coincide en $\mathcal{C}^\infty(TM)$, $\mathfrak{X}(\tau)$ y $\Lambda^1(\tau)$. Para probar el resultado bastará ver que $D = D_1 - D_2$ es cero. Sea $x \in M$ y (U, x^i) un entorno coordenado de x, como D es un operador local bastará ver que

$$D(K^{i_1\dots i_p}_{j_i\dots j_q}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_q}) = 0\,,$$

para toda elección de funciones $(K^{i_1\dots i_p}_{j_i\dots j_q})$, lo cual se sigue de la regla de Leibniz y del hecho de que D se anula en $\mathcal{C}^\infty(TM)$, $\mathfrak{X}(\tau)$ y $\Lambda^1(\tau)$. □

Se dice además que una derivación D de grado 0 es **autoadjunta** si se verifica que

$$D(\alpha(X)) = D(\alpha)X + \alpha D(X)\,, \tag{3.4}$$

para $X \in \mathfrak{X}(\tau)$, $\alpha \in \Lambda^1(\tau)$. Se tiene entonces trivialmente que en las derivaciones autoadjuntas, la acción en $\Lambda^1(\tau)$ queda determinada por la acción en $\mathcal{C}^\infty(TM)$ y $\mathfrak{X}(\tau)$. Es decir una derivación autoadjunta queda determinada por su acción en funciones y campos de vectores. Como consecuencia de las consideraciones anteriores tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.5. *Una aplicación $D : \mathcal{C}^\infty(TM) \oplus \mathfrak{X}(\tau) \to \mathcal{T}(\tau)$ verificando las propiedades 1, 2 de la definición 3.3, y que además lleva funciones en funciones y campos de vectores en campos de vectores, induce una derivación D autoadjunta en $\mathcal{T}(\tau)$. Además vendrá determinada por la expresión*

$$\begin{aligned}[DT](\alpha^1,\dots,\alpha^p,X_1\dots,X_q) =& D(T(\alpha^1,\dots,\alpha^p,X_1\dots,X_q))\\ &-\sum_{i=1}^q T(\alpha^1,\dots,\alpha^p,X_1\dots,DX_i,\dots,X_q)\\ &-\sum_{i=1}^p T(\alpha^1,\dots,D\alpha^i,\dots,\alpha^p,X_1\dots,X_q,)\end{aligned} \tag{3.5}$$

$T \in \mathcal{T}^p_q(\tau)$, $X_1,\dots,X_q \in \mathfrak{X}(\tau)$ y $\alpha^1,\dots,\alpha^p \in \Lambda^1(\tau)$.

Demostración. Basta comprobar que la expresión anterior define una derivación. □

Observación 3.6. Nótese que la condición de autoadjunción es fundamental a la hora de obtener la expresión (3.5).

Observación 3.7. Dado un tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(\tau)$, si definimos su acción sobre $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ como $T(f) = 0$, entonces T define una derivación de $\mathcal{T}(\tau)$.

A continuación vamos a recordar lo que es la contracción de un tensor, que nos va a ser útil más adelante. Sea V espacio vectorial real y $T \in T_q^p(V)$, donde recordemos

$$T_q^p(V) = \overbrace{V \oplus \ldots \oplus V}^{p} \oplus \overbrace{V^* \oplus \ldots V^*}^{q}$$

es el espacio de los tensores sobre V p-contravariantes y q-covariantes. Tenemos entonces que

$$T = v_1 \oplus \ldots \oplus v_p \oplus \alpha^1 \oplus \ldots \oplus \alpha^q\,, \tag{3.6}$$

con $v_1, \ldots v_p \in V$ y $\alpha^1, \ldots, \alpha^q \in V^*$. Sean r, s tales que $1 \leq r \leq p$ y $1 \leq s \leq q$, definimos entonces la contración de T en los indices (r,s) como el tensor $C_r^s(T) \in T_{q-1}^{p-1}(V)$, dado por

$$C_r^s(T) = \alpha^s(v_r) v_1 \oplus \ldots \oplus \widehat{v_r} \oplus \ldots \oplus v_p \oplus \alpha^1 \oplus \ldots \oplus \widehat{\alpha^s} \oplus \ldots \oplus \alpha^q\,,$$

donde $\widehat{\ }$ indica omisión del susodicho término. Se comprueba fácilmente que $C_r^s(T)$ no depende del representante escogido (3.6) de T, y que por lo tanto define una aplicación

$$C_r^s : T_q^p(V) \longrightarrow T_{q-1}^{p-1}(V)\,,$$

que además va a ser un homomorfismo de espacios vectoriales. Dicha operación se puede extender de manera natural a campos de tensores a lo largo de τ como

$$\begin{array}{rcl} C_r^s : \mathcal{T}_q^p(\tau) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}(\tau) \\ T & \to & C_r^s(T)\,, \end{array}$$

para $1 \leq r \leq p$, $1 \leq s \leq q$, y donde $[C_r^s(T)](v_x) = C_r^s(T(v_x))$ para $v_x \in TM$.

La introducción del concepto de contracción viene motivada por el siguiente resultado

Proposición 3.8. Las derivaciones autoadjuntas de $\mathcal{T}(\tau)$ conmutan con cualquier contracción. Además se cumple el recíproco, es decir si conmuta con cualquier contracción, entonces la derivación es autoadjunta.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{T}_q^p(\tau)$, y $1 \leq r \leq p$, $1 \leq s \leq q$, tenemos que ver que $D(C_r^s T) = C_r^s(DT)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r = s = 1$, y por lo tanto $C_r^s = C_1^1$. Recordemos que $D(C_r^s T)(v_q)$ solo depende del valor de $C_r^s T$ en un entorno TU abierto de v_q, entonces podemos escribir localmente

$$T = X_1 \otimes S \otimes \alpha^1 \otimes W\,,$$

con $X_1 \in \mathfrak{X}(\tau_{|TU})$,$\alpha^1 \in \Lambda^1(\tau_{|TU})$, $S \in \mathcal{T}_0^{p-1}(\tau_{|TU})$ y $W \in \mathcal{T}_{q-1}^0(\tau_{|TU})$. Luego tenemos que

$$D(C_r^s T) = D(\alpha^1(X_1) S \otimes W) = D(\alpha^1(X_1)) S \otimes W + \alpha^1(X_1) D(S \otimes W)\,.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}C_r^s(DT) &= C_r^s(DX_1 \otimes S \otimes \alpha^1 \otimes W + X_1 \otimes DS \otimes \alpha^1 \otimes W \\ &\quad + X_1 \otimes S \otimes D\alpha^1 \otimes W + X_1 \otimes S \otimes \alpha^1 \otimes DW) \\ &= [\alpha^1(DX_1) + D\alpha^1(X_1)]S \otimes W \\ &\quad + \alpha^1(X_1)[DS \otimes W + S \otimes DW] \\ &= D(\alpha^1(X_1))S \otimes W + \alpha^1(X_1)D(S \otimes W)\,,\end{aligned}$$

de donde se deduce la igualdad. El recíproco es evidente. □

Otra operación que va conmutar con las derivaciones autoadjuntas es la transposición. La transposición de un tensor $g \in \mathcal{T}_2^0(\tau)$ se define como el tensor g^t dado por

$$g^t(X, Y) = g(Y, X)\,,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\tau)$. Por lo tanto tenemos en virtud de la expresión (3.5) que para una derivación D autoadjunta de $\mathcal{T}(\tau)$, tenemos que

$$\begin{aligned}[D(g^t)](X, Y) &= D(g(Y, X)) - g(DY, X) - g(Y, DX) = [Dg](Y, X) \\ &= [Dg]^t(X, Y)\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

De hecho la propiedad anterior no solo sirve para la transposición de un tensor de tipo $(0, 2)$, si no que se puede deducir una propiedad análoga para tensores covariantes de cualquier orden, esto es si

$$T(X_1, \ldots, X_q) = T(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(q)})\,, \tag{3.8}$$

para $T \in \mathcal{T}_q^0(\tau)$ y σ una permutación cualquiera de $\{1, \ldots, q\}$, entonces se verifica

$$[DT](X_1, \ldots, X_q) = [DT](X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(q)}) \tag{3.9}$$

para cualquier D derivación autoadjunta. Por definición un tensor es simétrico si se verifica (3.8) para toda permutación σ, entonces deducimos que la derivación autoadjunta de un tensor simétrico es simétrico.

Isomorfismos inducidos por los levantamientos horizontales y verticales

Los levantamientos verticales de vectores tangentes a M, inducen un isomorfismo natural de módulos entre los campos de vectores verticales en TM y campos de vectores a lo largo de τ

$$\mathfrak{X}(\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}^V(TM)\,, \tag{3.10}$$

dado por

$$(X^V)_{v_x} = (X_{v_x})^V_{v_x}\,. \tag{3.11}$$

En coordenadas locales si $X(x,v) = X^i(x,v)\,\partial/\partial x^i(x)$, entonces

$$X^V(x,v) = X^i(x,v)\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_x}. \tag{3.12}$$

Recordamos que dada una conexión Γ en TM, entonces en (1.23) tenemos definido un levantamiento horizontal de vectores tangentes a M. Se tiene entonces que dicho levantamiento induce un isomorfismo módulos

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(\tau) &\longrightarrow Sec(H) \subset \mathfrak{X}(TM) \\ X \ &\to \ X^H, \end{aligned}$$

donde recordemos $Secc(H)$ son las secciones del fibrado H, dado por

$$X^H(v_x) = (X(v_x))^H_{v_x},$$

donde recordemos $Secc(H)$ son las secciones del fibrado $H \longrightarrow TM$. En coordenadas locales si $X(x,v) = X^i(x,v)\,\partial/\partial x^i(x)$, entonces

$$X^H(x,v) = X^i(x,v)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x,v)} - \Gamma^j_i\frac{\partial}{\partial v^j}\Big|_{(x,v)}\right). \tag{3.13}$$

Denotaremos de ahora en adelante por

$$\phi_V : \mathfrak{X}^V(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(\tau) \qquad \phi_H : Secc(H) \longrightarrow \mathfrak{X}(\tau),$$

a los isomorfismos inversos del levantamiento vertical y horizontal respectivamente.

Campos de tensores semibásicos en TM

Vamos a considerar ahora campos de tensores en TM. Concretamente vamos a considerar un tipo especial de campos de tensores que llamamos semibásicos. Dichos campos de tensores van a identificarse con los campos de tensores a lo largo de una aplicación, y por lo tanto vamos a poder identificar indistintamente unos con otros.

Definición 3.9. Sea $T \in \mathcal{T}(TM)$ un tensor en TM. Recordemos que T puede identificarse con un operador $\mathcal{C}^\infty(TM)$-multilineal

$$\begin{aligned} T : \overbrace{\mathfrak{X}(TM) \times \ldots \times \mathfrak{X}(TM)}^{q} &\longrightarrow \overbrace{\mathfrak{X}(TM) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}(TM)}^{p} \\ (X_1,\ldots,X_q) \quad &\to T_1(X_1,\ldots,X_q) \otimes \ldots \otimes T_p(X_1,\ldots,X_q), \end{aligned}$$

donde $p,q \in \{0,1,\ldots\}$. Se dice entonces que T es **semibásico** si:

1. $T(X_1,\ldots,X_q) = 0$ siempre que algún X_i sea vertical, es decir $X_i \in \mathfrak{X}^V(TM)$,

2. $T_1(X_1,\ldots,X_q),\ldots,T_p(X_1,\ldots,X_q)\in\mathfrak{X}^V(TM)$, es decir que todos los campos $T_i(X_1,\ldots,X_q)$ sean verticales.

En coordenadas locales los campos de tensores semibásicos son del tipo

$$T = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots j_q}\frac{\partial}{\partial v^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial v^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_q}\,. \tag{3.14}$$

Los campos de tensores semibásicos forman un subálgebra, que denotaremos por $\mathcal{T}_{sb}(TM)$, de $\mathcal{T}(TM)$. Sea $\phi_V:\mathfrak{X}^V(TM)\longrightarrow\mathfrak{X}(\tau)$ el isomorfismo inverso al levantamiento vertical (3.10) entre campos de vectores a lo largo de τ, y campos de vectores verticales en TM. Tenemos entonces el isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(TM)$-módulos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{sb}(TM) &\overset{\cong}{\longrightarrow} \mathcal{T}(\tau)\\ T &\to \overline{T}\,,\end{aligned}$$

dada por

$$\overline{T}(v)(w_1,\ldots,w_q)=\phi_V(T_1(v)(W_1,\ldots,W_q))\otimes\ldots,\otimes\phi_V(T_p(v)(W_1,\ldots,W_q))\,,$$

donde los vectores $W_i\in T_vTM$ se proyectan en $w_i\in T_xM$, es decir $\tau_*(v)(W_i)=w_i$. La condición 1 de la definición 3.9 implica que $\overline{T}$ está bien definido, pues la diferencia de dos vectores que proyectan en w_i es vertical. En coordenadas locales tenemos que si la expresión local de $T\in\mathcal{T}_{sb}(TM)$ es (3.14) entonces

$$\overline{T}(x,v)=T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots j_q}(x,v)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_x\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\Big|_x\otimes dx^{j_1}(x)\otimes\ldots\otimes dx^{j_q}(x)\,.$$

Esta identificación nos permite considerar tensores semibásicos de TM como tensores en M a lo largo de τ. En concreto podemos considerar el campo de vectores de Liouville o la estructura tangente canónica a lo largo de τ, cuyas expresiones en coordenadas locales son

$$\overline{C}=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad \overline{J}=\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^i\,.$$

Observación 3.10. Como tanto J y C son objetos canónicos de TM, tenemos que $\overline{J}$ y $\overline{C}$ van a ser tensores a lo largo de τ canónicos, es decir no dependen de elementos externos al espacio de tensores $T^*_*(M)$ total.

También tenemos, asociados a una conexión Γ en el fibrado tangente, ciertos tensores semibásicos : la tensión (1.24), la torsión débil (1.38) y fuerte (1.41), y la curvatura (1.46). A partir de sus expresiones en coordenadas locales ((1.25), (1.40), (1.43), (1.46)), se deduce que:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{H}}(x,v) &= \left(\Gamma_i^j(x,v) - v^k \frac{\partial \Gamma_i^j}{\partial x^k}(x,v)\right) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x \otimes dx^i(x) \\
\bar{t}(x,v) &= \left(\frac{\partial \Gamma_i^k}{\partial v^j}(x,v) - \frac{\partial \Gamma_j^k}{\partial v^i}(x,v)\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_x \otimes dx^i(x) \otimes dx^j(x) \\
\overline{T}(x,v) &= \left(v^i \frac{\partial \Gamma_i^k}{\partial v^j}(x,v) - \Gamma_j^k(x,v)\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_x \otimes dx^j(x) \\
\overline{R}(x,v) &= \left(\frac{\partial \Gamma_j^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_i^k}{\partial x^j} + \Gamma_j^l \left(\frac{\partial \Gamma_i^k}{\partial v^l}\right) - \Gamma_i^l \left(\frac{\partial \Gamma_j^k}{\partial v^l}\right)\right)(x,v) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_x \otimes dx^i(x) \otimes dx^j(x) \,.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.2. Las condiciones de Helmholtz en forma implícita

Esta sección va a constar de tres partes. En la primera introducimos el endomorfismo de Jacobi y la derivada covariante dinámica, en la segunda las derivadas covariantes horizontal y vertical, y en la tercera vemos la forma implícita de las condiciones de Helmholtz.

3.2.1. El endomorfismo de Jacobi y la derivada covariante dinámica

Sea $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ SODE, y Γ_ξ su conexión asociada. Sea $X \in \mathfrak{X}(\tau)$, consideremos el campo de vectores $[\xi, X^H] \in \mathfrak{X}(TM)$, que como es un campo de vectores en TM, se puede escribir de manera única como suma de campos de vectores de las distribuciones vertical V y horizontal H asociadas a la conexión Γ_ξ

$$[\xi, X^H] = h[\xi, X^H] + v[\xi, X^H] \,.$$

Para $X \in \mathfrak{X}(\tau)$ definimos ΦX como el único campo de vectores a largo de $\tau : TM \longrightarrow M$ tal que

$$(\Phi X)^V = v[\xi, X^H] \,,$$

donde estamos usando que el levantamiento vertical induce un isomorfismo (3.10) entre campos de vectores verticales en TM y campos de vectores a lo largo de τ.

Por lo tanto Φ va a ser una aplicación

$$\Phi : \mathfrak{X}(\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}(\tau) \,.$$

Proposición 3.11. Φ es un morfismo de $\mathcal{C}^\infty(TM)$-módulos y por lo tanto define un campo de tensores del tipo $(1,1)$ a largo de τ.

Demostración. Por la $\mathbb{R}$-linealidad del proyector v y del levantamiento horizontal, y la $\mathbb{R}$-bilinealidad del corchete de Lie, que

$$\Phi(X+Y) = \Phi X + \Phi Y \,.$$

Por otro lado para $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ y $X \in \mathfrak{X}(\tau)$, se tiene que $(fX)^H = fX^H$ y por lo tanto

$$\Phi(fX)^V = v[\xi, fX^H] = v(f[\xi, X^H] + \xi(f)X^H) = fv([\xi, X^H]) = f\Phi(X)^V,$$

puesto que $vX^H = 0$. Luego se deduce que $\Phi(fX) = f\Phi(X)$. □

A Φ se le llama **endomorfismo de Jacobi** o alternativamente **tensor de Douglas**. Dicho endomorfismo nos da mucha información sobre ξ y va a estar estrechamente relacionado con el problema inverso.

Análogamente, para cada $X \in \mathfrak{X}(\tau)$ se define $\nabla X \in \mathfrak{X}(\tau)$, como el único campo de vectores a lo largo de τ verificando que

$$(\nabla X)^H = h([\xi, X^H]).$$

Tenemos entonces que ∇X y ΦX son los únicos campos de vectores a lo largo de τ verificando que

$$[\xi, X^H] = (\nabla X)^H + (\Phi X)^V.$$

La aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}(\tau)$$

es, al igual que Φ, $\mathbb{R}$-lineal, pero no va a definir un tensor ya que no va a ser $\mathcal{C}^\infty(TM)$-lineal, es decir no va a "sacar fuera" las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$. A pesar de esto va a verificar una propiedad muy importante, una especie de regla de Leibniz:

Proposición 3.12. Se verifica que

$$\nabla(fX) = f\nabla X + \xi(f)X, \tag{3.16}$$

para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ y cada $X \in \mathfrak{X}(\tau)$.

Demostración. Tenemos que como $hX^H = X^H$, se tiene que

$$\begin{aligned}(.\nabla(fX))^H = h[\xi, (fX)^H] &= h(f[\xi, X^H] + \xi(f)X^H) = fh[\xi, X^H] + \xi(f)hX^H \\ &= f\nabla X^h + \xi(f)X^H = (f\nabla X + \xi(f)X)^H,\end{aligned}$$

de donde se deduce (3.16).

□

Por lo tanto si definimos la acción de ∇ sobre $\mathcal{C}^\infty(TM)$ como $\nabla(f) = \xi(f)$, entonces en virtud del corolario (3.5), ∇ se extiende de manera única a una derivación autoadjunta de $\mathcal{T}(\tau)$. Llamaremos a esa derivación

$$\nabla : \mathcal{T}(\tau) \to \mathcal{T}(\tau),$$

la **derivada covariante dinámica**.

En coordenadas locales si

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial v^i} \qquad X(x,v) = X^i(x,v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x ,$$

tenemos que

$$X^H = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - (\Gamma_\xi)_i^j \frac{\partial}{\partial v^j} \right) .$$

Entonces se deduce utilizando las propiedades de Φ y ∇ que

$$\begin{aligned} \Phi X &= X^j \left(-\xi((\Gamma_\xi)_j^i) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} - (\Gamma_\xi)_j^k (\Gamma_\xi)_k^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \nabla X &= (\xi(X^i) + X^k (\Gamma_\xi)_k^i) \frac{\partial}{\partial x^i} . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por lo tanto, la expresión en coordenadas locales de Φ es

$$\Phi = \left(-\xi((\Gamma_\xi)_j^i) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} - (\Gamma_\xi)_j^k (\Gamma_\xi)_k^i \right) dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Observación 3.13. Nótese que si desarrollamos Φ en términos de f, es decir si usamos que $(\Gamma_\xi)_j^i = -1/2\, \partial f^i / \partial v^j$, obtenemos que

$$\Phi = \left(\frac{1}{2} \xi \left(\frac{\partial f^i}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} - \frac{1}{4} \frac{\partial f^i}{\partial v^k} \frac{\partial f^k}{\partial v^j} \right) dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} . \tag{3.18}$$

Por lo tanto las componentes del endomorfismo de Jacobi son

$$\Phi_j^i = \frac{1}{2} \xi \left(\frac{\partial f^i}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} - \frac{1}{4} \frac{\partial f^i}{\partial v^k} \frac{\partial f^k}{\partial v^j} ,$$

que coinciden con las componentes de la matriz introducida en (2.21) que utilizábamos para enunciar la primera condición de Helmholtz vista en 2.14. De hecho si para un tensor g del tipo $(0,2)$ a lo largo de τ definimos $\Phi \lrcorner g$ como

$$[\Phi \lrcorner g](X,Y) = g(\Phi(X), Y) ,$$

que es un tensor de tipo $(0,2)$ a lo largo de τ, deducimos que en coordenadas locales

$$\Phi \lrcorner g = g_{ik} \Phi_j^k . \tag{3.19}$$

Es decir, podemos enunciar la condición de Helmholtz **H1** como que el tensor $\Phi \lrcorner g$ sea simétrico. Tenemos por lo tanto que:

*Exigir que $\Phi \lrcorner g$ sea simétrico, es la versión libre de coordenadas de la condición del Helmholtz **H1**.*

Observación 3.14. Considérese un tensor g del tipo $(0,2)$ a lo largo de τ, y le aplicamos la derivación ∇, entonces en virtud de (3.5) se verifica que
con $X, Y \in \mathfrak{X}(\tau)$

$$\nabla g(X,Y) = \xi(g(X,Y)) - g(\nabla X, Y) - g(X, \nabla Y)\,,$$

. En coordenadas locales

$$\nabla g(X,Y) = X^i Y^j \left(\xi(g_{ij}) - g_{kj}(\Gamma_\xi)^k_i - g_{ik}(\Gamma_\xi)^k_j\right)\,.$$

Como $(\Gamma_\xi)^i_j = -1/2\,\partial f^i/\partial v^j$, obtenemos que

$$\nabla g(X,Y) = X^i Y^j \left(\xi(g_{ij}) + \frac{1}{2} g_{kj}\frac{\partial f^k}{\partial v^i} + \frac{1}{2} g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial v^j}\right)\,.$$

Por lo tanto, en coordenadas locales la condición $\nabla g = 0$ se escribe como

$$\xi(g_{ij}) + \frac{1}{2} g_{kj}\frac{\partial f^k}{\partial v^i} + \frac{1}{2} g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial v^j} = 0\,, \tag{3.20}$$

que coincide con la condición **H2** de Helmholtz vista en 2.14. Tenemos por lo tanto:

*La condición $\nabla g = 0$ es la versión libre de coordenadas de la condición de Helmholtz **H2**.*

3.2.2. Las derivadas covariantes horizontal y vertical

En esta sección vamos a realizar una construcción similar al de la sección anterior. Consideremos $X, Y \in \mathfrak{X}(\tau)$, definimos $D^H_X Y, D^V_Y X \in \mathfrak{X}(\tau)$ como los únicos campos de vectores a lo largo de $\tau : TM \to M$ tales que

$$[X^H, Y^V] = (D^H_X Y)^V - (D^V_Y X)^H\,, \tag{3.21}$$

y por lo tanto definen aplicaciones

$$D^H, D^V : \mathfrak{X}(\tau) \times \mathfrak{X}(\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}(\tau)\,.$$

Proposición 3.15. Se verifican las siguientes propiedades

1. $D^H_{fX_1+X_2} Y = f D^H_{X_1} Y + D^H_{X_2} Y \qquad D^V_{fX_1+X_2} Y = f D^V_{X_1} Y + D^V_{X_2} Y$
2. $D^H_X(Y_1 + Y2) = D^H_X Y_1 + D^H_X Y_2 \qquad D^V_X(Y_1 + Y2) = D^V_X Y_1 + D^V_X Y_2$
3. $D^H_X(fY) = f D^H_X Y + X^H(f) Y \qquad D^V_X(fY) = f D^V_X Y + X^V(f) Y$

para $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y \in \mathfrak{X}(\tau)$.

Demostración. Los dos primeros puntos se prueban con facilidad. El ultimo punto se sigue de las igualdades

$$\begin{aligned}(D^H_X(fY))^V &= v[X^H, fY^V] = v(f[X^H,Y^V] + X^H(f)Y^V) \\ &= fv[X^H,Y^V] + X^H(f)Y^V = (fD^H_X Y + X^H(f)Y)^V \\ (D^V_X Y)^H &= -h[fY^H, X^V] = -h(f[Y^H,X^V] + X^V(f)Y^H) \\ &= -fh[Y^H,X^V] + X^V(f)Y^H = (fD^V_X Y + X^V(f)Y)^H\,.\end{aligned}$$

□

La propiedad 3, junto al corolario 3.5 indica que si definimos

$$D^H_X(f) = X^H(f) \quad D^V_X(f) = X^V(f)\,,$$

para $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$, entonces D^H_X y D^V_X se pueden extender de manera única a derivaciones autoadjuntas de $\mathcal{T}(\tau)$, que llamaremos **derivada covariante horizontal** y **vertical** respecto a X

$$D^H_X, D^V_X : \mathcal{T}(\tau) \longrightarrow \mathcal{T}(\tau)\,.$$

Supongamos que en coordenadas locales

$$X(x,v) = X^i(x,v)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \qquad Y(x,v) = Y^i(x,v)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\,,$$

entonces utilizando las propiedades que acabamos de probar se ve que

$$\begin{aligned} D^H_X Y &= X^i(Y^k(\Gamma_\xi)^j_{ik} + H_i(Y^j))\frac{\partial}{\partial x^j} \\ D^V_X Y &= X^j\left(\frac{\partial Y^i}{\partial v^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $H_i = \partial/\partial x^i - (\Gamma_\xi)^k_j\,\partial/\partial v^k$, es una referencia local de H y $(\Gamma_\xi)^j_{ik} = \partial(\Gamma_\xi)^j_i/\partial v^k$

Cuando tenemos un tensor $g \in \mathcal{T}^0_2(\tau)$ obtenemos que

$$(D^V_X g)(Y,Z) = X^V(g(Y,Z)) - g(D^V_X Y, Z) - g(X, D^V_X Z) \tag{3.23}$$

para $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\tau)$. Se deduce fácilmente que en coordenadas locales

$$D^V_X g = X^V(g_{ij})dx^i \otimes dx^j \tag{3.24}$$

donde $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$.Podemos entonces definir las operaciones

$$D^H, D^V : \mathcal{T}^p_q(\tau) \longrightarrow \mathcal{T}^p_{q+1}(\tau)$$

dadas por

$$\begin{aligned}(D^V W)(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,X_0,\ldots,X_q) &= [D^V_{X_0}](\alpha_1,\ldots,\alpha_p,X_1,\ldots,X_q) \\ (D^H W)(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,X_0,\ldots,X_q) &= [D^H_{X_0}](\alpha_1,\ldots,\alpha_p,X_1,\ldots,X_q)\,.\end{aligned}$$

De (3.24) se deduce que para $g \in \mathcal{T}^0_2(\tau)$, la expresión local de $D^V g$ es

$$D^V g = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} dx^k \otimes dx^i \otimes dx^j\,. \tag{3.25}$$

Observación 3.16. Si suponemos que el tensor g es simétrico entonces, se deduce fácilmente a partir de (3.25) que $D^V g$ es simétrico si y solo si

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial v^j} \, ,$$

lo cual coincide con la condición de Helmholtz **H3** vista en 2.14. Por lo tanto:

*Exigir que $D^V g$ sea simétrico es la versión libre de coordenadas de la condición de Helmholtz **H3**.*

Equivalentemente tenemos que la condición $D^V g$ simétrico, se puede expresar en términos de la derivación vertical D^V_X, como

$$D^V_X g(Y,Z) = D^V_Y g(X,Z) \, , \tag{3.26}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\tau)$, donde hemos usado que una derivación autoadjunta de un tensor simétrico es un tensor simétrico.

3.2.3. Las condiciones de Helmholtz en forma implícita

En esta sección se recogen las condiciones de Helmholtz (2.14), obtenidas en las secciones anteriores, en su forma geométrica o implícita, es decir de manera independiente de las coordenadas. Además se van a realizar algunos cálculos para derivar nuevas condiciones necesarias para la solución del problema inverso. En último lugar se expondrá brevemente el análisis de Douglas del problema inverso para el caso 2-dimensional.

Las condiciones de Helmholtz implícitas ya se han presentado por separado en las observaciones (3.13), (3.14) y (3.16). Lo que se hace ahora es presentarlas todas juntas y obtener así un punto de vista global del problema inverso.

Se tiene entonces que el problema inverso, consiste en encontrar un tensor g simétrico 2-covariante no degenerado a lo largo de $\tau : TM \longrightarrow M$ tal que:

H1 $\Phi \lrcorner g$ es simétrico,

H2 $\nabla g = 0$,

H3 $D^V g$ es simétrico,

que son las condiciones de Helmholtz en su forma implícita, es decir libre de coordenadas. Además se tiene que el lagrangiano L y g están relacionados por

$$g = D^V D^V L \, .$$

Estas condiciones son locales no globales, en el siguiente sentido:

Proposición 3.17. Sea M variedad de dimensión n, ξ un SODE en TM, y g en las condiciones anteriores. Entonces existe para todo punto $x \in M$ un entorno coordenado

(U, x^i) y una función $L : TU \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que las soluciones $\alpha : I \to U$ del SODE ξ verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{\dot\alpha(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j}\Big|_{\dot\alpha(t)} = 0 \quad 1 \le j \le n \,. \tag{3.27}$$

Demostración. La demostración es directa considerando el teorema 2.14, y las observaciones (3.13), (3.14) y (3.16). □

Observación 3.18. Por supuesto se puede considerar que g esta definido únicamente en un entorno del punto $x \in M$ en consideración y el teorema sigue funcionando.

La condiciones necesarias de Sarlet

Una de las mayores dificultades para encontrar una solución g de las condiciones de Helmholtz, es que hace falta resolver una serie de ecuaciones en derivadas parciales. Mas concretamente las condiciones **H2** y **H3**, en coordenadas locales dan lugar a dos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales sobre los coeficientes (g_{ij}) de g. Por otro lado la condición **H1** da un sistema sistema de ecuaciones algebraicas sobre (g_{ij}), que suele ser más fácil de tratar.

En [Sar82] W. Sarlet obtuvo una serie de condiciones necesarias para la existencia de g de naturaleza algebraica. Dichas nuevas condiciones aunque no caracterizan el problema inverso, como las condiciones de Helmholtz, suelen servir para estudiar problemas concretos. Concretamente son útiles para probar la no existencia de g. La aproximación de Sarlet fue en coordenadas locales mientras que en este trabajo se va a a usar una aproximación implícita, basada en el concepto de derivación.

Para empezar nótese que, usando el concepto de contracción de un tensor, podemos reescribir

$$\Phi \lrcorner\, g = C_1^2(\Phi \oplus g) \,,$$

en efecto, si en coordenadas locales $\Phi = \Phi^i_j \partial/\partial x^i \otimes dx^j$ y $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$, entonces

$$\begin{aligned} C_1^2(\Phi \otimes g) &= C_1^2(\Phi^i_j g_{\alpha\beta} \partial/\partial x^i \otimes dx^j \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta) \\ &= dx^\alpha(\frac{\partial}{\partial x^i})\Phi^i_j g_{\alpha\beta} dx^j \otimes dx^\beta = \Phi^i_j g_{i\beta} dx^j \otimes dx^\beta = \Phi \lrcorner\, g \,. \end{aligned}$$

Utilizando ahora que la derivada covariante dinámica es una derivación autoadjunta de $\mathcal{T}(\tau)$, y que por lo tanto conmuta con las contracciones (corolario 3.8) obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla[\Phi \lrcorner\, g] &= \nabla(C_1^2(\Phi \otimes g)) = C_1^2(\nabla(\Phi \otimes g)) = C_1^2(\nabla\Phi \otimes g + \Phi \otimes \nabla g) \\ &= C_1^2(\nabla\Phi \otimes g) = \nabla\Phi \lrcorner\, g \,, \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\nabla g = 0$. Por otro lado, en (3.7) se ha visto que las derivaciones conmutan con la transposición de tensores, de lo que se deduce

$$\nabla[\Phi \lrcorner\, g] = \nabla[\Phi \lrcorner\, g]^t = (\nabla[\Phi \lrcorner\, g])^t = (\nabla\Phi \lrcorner\, g)^t \,.$$

Por lo tanto hemos deducido, a partir de las condiciones **H1** y **H2**, una nueva condición, esta es que $\nabla\Phi \lrcorner g$ sea simétrico. Dicho proceso se puede iterar diferenciando sucesivamente $\Phi \lrcorner g$ con respecto a ∇ y obteniendo una sucesión infinita

$$\Phi \lrcorner g\,,\ \nabla\Phi \lrcorner g\,,\ \nabla^2\Phi \lrcorner g\,,\ \nabla^3\Phi \lrcorner g\,,\ \dots$$

de tensores simétricos. Estas nuevas condiciones son ecuaciones algebraicas en la variable g_{ij} y son más fáciles de tratar que las condiciones **H2** y **H3**.

La siguiente proposición está motivada por las consideraciones anteriores:

Proposición 3.19. Para un tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(\tau)$ y una derivación autoadjunta D de $\mathcal{T}(\tau)$, se verifica que

$$[DT]X = D(TX) - T(DX)\,.$$

Demostración. Por la fórmula (3.5), obtenemos que

$$\begin{aligned}
[DT](\alpha, X) = \alpha([DT]X) &= D(T(\alpha, X)) - T(D\alpha, X) - T(\alpha, DX)\\
&= D(\alpha(TX)) - D(\alpha)(TX) - \alpha(T(DX))\\
&= D(\alpha)(TX) + \alpha(D(TX)) - D(\alpha)(TX) - \alpha(T(DX))\\
&= \alpha(D(TX) - T(DX))\,,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $[DT]X = D(TX) - T(DX)$. □

A partir de la proposición anterior se pueden ir calculando sucesivamente las derivadas covariantes dinámicas de Φ, estas son $\nabla^{(n)}\Phi$ para $n = 0, 1, \dots$. Por ejemplo, en coordenadas locales la primera derivada es

$$\nabla\Phi = (\xi(\Phi^i_j) + \Phi^k_j(\Gamma_\xi)^i_k - \Phi^i_k(\Gamma_\xi)^k_j)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\,. \tag{3.28}$$

La clasificación de Douglas

En [Dou41] J. Douglas dio una clasificación general de los sistemas de orden 2, es decir sistemas de la forma

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\\
\ddot{y} &= G(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

en variacionales o no variacionales. El análisis de Douglas es realmente complicado y pasa por el estudio de muchos subcasos.

En [CSM+94] M. Crampim, W. Sarlet, E. Martínez, G. B. Byrnes y G. E. Prince, analizaron el procedimiento de Douglas de manera implícita. No vamos a entrar en detalle en dicho análisis, pero vamos a enunciar los principales casos que distingue Douglas en nuestro lenguaje, para ver que las herramientas que hemos introducido son útiles en casos prácticos. Douglas distingue cuatro casos principalmente

CASO I Φ es un múltiplo del tensor identidad I,

CASO II $\nabla\Phi$ es una combinación lineal de Φ e I,

CASO III $\nabla^2\Phi$ es una combinación lineal de $\nabla\Phi$, Φ e I,

CASO IV $\nabla^2\Phi$, $\nabla\Phi$, Φ e I son linealmente independientes.

En el caso I el sistema (3.29) es siempre variacional, en el caso IV nunca lo es. Los casos II y III se dividen en varios subcasos en los cuales en algunos es variacional y en otros no. Aunque no vamos a enunciarlos, cabe destacar que dichos subcasos se describen al igual que los principales en términos geométricos.

3.3. El problema inverso desde el punto de vista de la mecánica geométrica

En esta sección vamos a analizar el problema inverso desde el punto de vista de la mecánica geométrica. La sección esta dividida en dos partes. En la primera se introducen los conceptos necesarios de mecánica lagrangiana en el fibrado tangente, y en la segunda se analiza el problema inverso desde este punto de vista.

Mecánica lagrangiana en el fibrado tangente

Con los instrumentos geométricos de TM que hemos construido en 1.1, se puede desarrollar en términos de la geometría simpléctica un formalismo natural en TM para la mecánica lagrangiana.

Sea $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano, se define la 1-forma lagrangiana asociada a L como

$$\theta_L = J^*(dL)\,,$$

donde J^* es la acción de la estructura tangente J sobre $\Lambda^1(TM)$, y se define la 2-forma lagrangiana como $\omega_L = -d\theta_L$. En coordenadas locales

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v^i}dx^i \qquad \omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i}dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}dx^i \wedge dv^j\,.$$

Se tiene que si L es regular entonces ω_L es una forma simpléctica, es decir una 2-forma en TM verificando:

1. si $\omega_L(X,Y) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(TM)$, entonces $Y = 0$,

2. ω_L es exacta.

Se tiene entonces que ω_L induce un isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(TM)$-módulos

$$\flat : \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \Lambda^1(TM)\,,$$

dado por $\flat(X) = i_X\omega_L$, donde

$$(i_X\omega_L)Y = \omega_L(X,Y)\,.$$

Asociado al lagrangiano L también hay una función importante, llamada energía lagrangiana, dada por

$$E_L = C(L) - L\,,$$

donde C es el campo de vectores de Liouville. En coordenadas locales

$$E_L = v^i\frac{\partial L}{\partial v^i} - L\,.$$

Se tiene entonces que si el lagrangiano es regular, existe un único campo de vectores $\xi_L \in \mathfrak{X}(TM)$ dado por

$$i_{\xi_L}\omega_L = dE_L\,.$$

Se puede probar entonces que ξ_L es un SODE, y que además sus soluciones $\alpha : \mathbb{R} \to M$, bajo un sistema de coordenadas local, verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L, es decir

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{\dot\alpha(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^j}\Big|_{\dot\alpha(t)} = 0\,, \quad 1 \le j \le n\,. \tag{3.30}$$

Se le llama entonces a ξ_L el **SODE de Euler-Lagrange** asociado a L. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores.

Definición 3.20. Se dice que un SODE $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ es **lagrangiano** o variacional si $\xi = \xi_L$ para algún L. Se dice que ξ es **localmente lagrangiano** o localmente variacional en el punto $x \in M$, si existe un entorno U de x y un lagrangiano $L : TU \to \mathbb{R}$, tal que

$$\xi_{|U} = \xi_L\,.$$

Observación 3.21. La definición de localmente lagrangiano coincide con la utilizada hasta ahora.

El problema inverso

El carácter variacional de un SODE se puede expresar en términos de la derivada de Lie.

Proposición 3.22. Se tiene que ξ es localmente lagrangiano si y solo si existe $\alpha \in \Lambda^1(TM)$ cerrada no degenerada tal que

$$\mathcal{L}_\xi(J^*\alpha) = \alpha\,,$$

donde no degenerada quiere decir que $d(J^*\alpha)$ sea simpléctica. Además si θ es cerrada, ξ es globalmente lagrangiano.

Demostración. Por ser α cerrada, por el lema de Poincaré se sabe que existe para cada $x \in M$ existe un entorno U de x y $L \in \mathcal{C}^\infty(TU)$ tal que $\alpha_{|U} = dL$. Tenemos entonces que $\theta_L = J^*(\alpha)_{|U}$, y por lo tanto

$$\mathcal{L}_\xi \theta_L = i_\xi d\theta_L + di_\xi \theta_L = i_\xi d\theta_L + d(\theta_L(\xi))\,,$$

pero $\theta_L(\xi) = C(L)$, de lo que se deduce

$$dL = -i_\xi \omega_L + dC(L)\,,$$

que es equivalente a que ξ sea el SODE de Euler-Lagrange de L. El caso globalmente lagrangiano es análogo. □

En virtud de la proposición anterior, el conjunto

$$\Lambda^1_\xi(TM) = \{\alpha \in \Lambda^1(TM) \,:\, \mathcal{L}_\xi(J^*\alpha) = \alpha\}\,,$$

juega un papel fundamental en el problema inverso. Las formas no degeneradas cerradas/exactas de $\Lambda^1_\xi(TM)$ equivalen a soluciones locales/globales del problema inverso asociado a ξ. Se tiene por lo tanto que el problema inverso global viene a ser en esencia un problema de tipo cohomológico, y por lo tanto la existencia de soluciones globales dependerá en gran medida de la topología de la variedad. En coordenadas locales $\alpha \in \Lambda^1_\xi(TM)$ se expresa como

$$\alpha = \alpha_i dv^i + \xi(\alpha_i)dx^i\,, \tag{3.31}$$

además es no degenerada si y solo si $(\partial\alpha_i/\partial v^j)$ es no singular.

El principal defecto de $\Lambda^1_\xi(TM)$ es que aunque es un $\mathbb{R}$-módulo no va a ser un $\mathcal{C}^\infty(TM)$-módulo, debido a que $\mathcal{L}_\xi$ es únicamente $\mathbb{R}$-lineal. Sin embargo si que va a ser un módulo sobre las constantes del movimiento de ξ, es decir sobre la funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ tales que

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi(f) = 0\,.$$

Capítulo 4

La geometría del problema inverso, caso no autónomo

En esta capítulo vamos a caracterizar los las condiciones de Helmholtz para el caso no autónomo en su forma implícita. Dicha caracterización va a ser muy similar a la del caso autónomo, y lo objetos geométricos utilizados para ella van a ser análogos. La diferencia más sustancial es que, mientras que en el caso autónomo los coeficientes de la matriz de multiplicadores (g_{ij}) eran los coeficientes de un tensor g del tipo $(0,2)$ en la referencia local (dx^i), es decir $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, en este caso dichos coeficientes van a venir determinados por las formas de contacto $\theta^i = dx^i - v^i dt$, es decir

$$g = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \,.$$

Por lo tanto, debido a la similitud de ambas formulaciones, la estructura de esta capítulo va a ser similar a la del anterior, por lo que muchos cálculos y conceptos análogos serán omitidos, intentando recalcar las diferencias entre ambos casos. La referencia principal utilizada en este capítulo es [SVCM95].

Conexiones en $\mathbb{R} \times TM$

Denotamos por $\rho : \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R} \times M$ la proyección natural de $\mathbb{R} \times TM$ en $\mathbb{R} \times M$, que es claramente un fibrado. Sea $V(\mathbb{R} \times TM)$ la distribución vertical, que en coordenadas locales (t, x^i, v^i) viene dada por

$$V(\mathbb{R} \times TM) = < \frac{\partial}{\partial v^i} > \,.$$

Entonces una conexión en $\mathbb{R} \times TM$, es una distribución H de $\mathbb{R} \times TM$ complementaria a $V(\mathbb{R} \times TM)$, es decir tal que

$$T(\mathbb{R} \times TM) = V(\mathbb{R} \times TM) \oplus H \,.$$

En coordenadas locales según (1.17), se tiene que H está generada por

$$H = < \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial v^j}, \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^j \frac{\partial}{\partial v^j} > ,$$

para ciertas funciones $\Gamma_i^j(t,x,v), \Gamma_0^j(t,x,v)$.

Vamos a estudiar como son los levantamientos de vectores de $\mathbb{R}\times M$ a H. El levantamiento horizontal de un vector $w_{(t,x)}$ a (t,v_x), con $w_{(t,x)}\in T_{(t,x)}(\mathbb{R}\times M)$ y $v_x\in T_xM$, es la imagen inversa de $w_{(t,x)}$ por el isomorfismo

$$\rho_*(t,v_x)_{|H_{(t,v_x)}} : H_{(t,v_x)} \longrightarrow T_{(t,x)}(\mathbb{R}\times M)\,,$$

es decir

$$(w_{(t,x)})^H_{(t,v_x)} = (\rho_*(t,v_x)_{|H_{(t,v_x)}})^{-1}(w_{(t,x)})\,. \tag{4.1}$$

En coordenadas locales se tiene que si $w_{(t,x)} = T\partial/\partial t(t,x) + A^i\partial/\partial x^i(t,x)$, entonces

$$(w_{(t,x)})^H_{(t,v_x)} = T\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,v_x)} - \Gamma_0^j\frac{\partial}{\partial v^j}\Big|_{(t,v_x)}\right) + A^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,v_x)} - \Gamma_i^j\frac{\partial}{\partial v^j}\Big|_{(t,v_x)}\right).$$

De manera análoga al caso autónomo, un SODE $\xi\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}\times TM)$ define una conexión en $\mathbb{R}\times TM$ dada por los proyectores horizontal y vertical

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\left(I_{\mathbb{R}\times TM} - \mathcal{L}_\xi S + \xi\otimes dt\right)\\ v &= \frac{1}{2}\left(I_{\mathbb{R}\times TM} + \mathcal{L}_\xi S - \xi\otimes dt\right)\,, \end{aligned}$$

donde $I_{\mathbb{R}\times TM}$ es el tensor identidad y S viene definido en (1.11). Cuando se define una conexión a través de su proyector horizontal, lo que se quiere decir es que la distribución horizontal es $H = Imh$. Por lo tanto, lo que hay que comprobar para ver que la distribución esta bien definida es: que Imh esta formado por vectores que proyectan en 0 por $T\pi$, y que $h^2 = h$, es decir que h sea efectivamente el proyector horizontal asociado a Imh. Ambas cosas se pueden comprobar sin dificultad a partir de la expresión en coordenadas locales

$$h = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(f^j - \frac{1}{2}v^k\frac{\partial f^j}{\partial v^k}\right)\frac{\partial}{\partial v^j}\right)\otimes dt + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial f^j}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\right)\otimes dx^i$$

donde las funciones f^i son los coeficientes no triviales del SODE ξ, es decir

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + v^i\frac{\partial}{\partial x^i} + f^i\frac{\partial}{\partial v^i}\,.$$

Se llega entonces a que los coeficientes de la conexión asociada a ξ son

$$(\Gamma_\xi)_i^j = -\frac{1}{2}\frac{\partial f^j}{\partial v^i} \qquad (\Gamma_\xi)_0^i = -f^i - v^k(\Gamma_\xi)_k^i\,.$$

Campos de tensores a lo largo de la proyección $\rho:\mathbb{R}\times TM\to\mathbb{R}\times M$

De igual manera que definíamos el álgebra $\mathcal{T}(\tau)$ de los campos de tensores a lo largo de la proyección del fibrado tangente, podemos considerar el álgebra $\mathcal{T}(\rho)$ de los campos de tensores a lo largo de ρ, es decir aplicaciones diferenciables T haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & T^*_*(\mathbb{R}\times M) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}\times TM \arrow[ur, "T"] \arrow[r, "\rho"] & \mathbb{R}\times M\,. \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Existe de manera canónica un campo de vectores $\mathbf{T}$ a lo largo de ρ que se construye de la siguiente manera: usando que $T(\mathbb{R}\times M)$ se identifica de manera natural con $T\mathbb{R}\times TM$, se tiene que la variedad $\mathbb{R}\times TM$ puede ser embebida en $T(\mathbb{R}\times M)$ mediante la aplicación

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}\times TM \longrightarrow T\mathbb{R}\times TM\,,$$

dada por

$$\mathbf{T}(t, v_x) = (\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t, v_x)\,,$$

con $t\in\mathbb{R}$, $v_x\in TM$. Se tiene entonces que $\mathbf{T}$ es un campo de vectores a lo largo de ρ, cuya expresión en coordenadas locales es

$$\mathbf{T}(t,x,v) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,x)} + v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,x)}\,.$$

Una propiedad importante de $\mathbf{T}$ es que junto a los campos de vectores coordenados $\{\partial/\partial x^i\}$ forman una referencia local de $\mathfrak{X}(\rho)$, es decir $X\in\mathfrak{X}(\rho)$ en un entorno coordenado se escribe de manera única como combinación $\mathcal{C}^\infty(TM)$-lineal de $\{\mathbf{T}, \partial/\partial x^i\}$, es decir

$$X(t,x,v) = T(t,x,v)\mathbf{T}_{(t,x)} + \overline{X}^i(t,x,v)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,x)}\,. \tag{4.3}$$

Vamos a tener isomorfismos análogos al caso autónomo entre campos de vectores verticales/horizontales y campos de vectores a lo largo de ρ.

Definimos el levantamiento vertical

$$\mathfrak{X}(\rho) \longrightarrow Secc(V(\mathbb{R}\times TM))\,,$$

como

$$Z^V_{(t,v_x)} = S(Z^{(1)}(t,x,v))\,,$$

donde S viene definido en (1.11) y $Z^{(1)}$ es el único campo de vectores de $\mathbb{R}\times TM$ cuya expresión en coordenadas locales viene dada por

$$Z^{(1)}(t,x,v) = T(t,x,v)\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,x,v)} + X^i(t,v,x)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,x,v)}\,, \tag{4.4}$$

siendo

$$Z(t,v,x) = T(t,v,x)\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,x)} + X^i(t,v,x)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,x)}\,, \tag{4.5}$$

la expresión local de Z. Es fácil comprobar que (4.4) es invariante bajo cambios de coordenadas del tipo

$$t' = t'(t) \qquad x' = x'(x) \qquad v' = v'(x,v)\,,$$

y que por lo tanto $Z^{(1)}$ está bien definido.

Por otro lado el lev antamiento horizontal asociado a una conexión H

$$\mathfrak{X}(\rho) \longrightarrow Secc(H)\,,$$

se define puntualmente a partir del levantamiento horizontal definido en (4.1) como

$$[Z^H]_{(t,v_x)} = (Z_{(t,v_x)})^H_{(t,v_x)}\,.$$

En coordenadas locales para los levantamientos verticales y horizontales de $Z \in \mathfrak{X}(\rho)$, con expresión local (4.5), son

$$Z^V = (X^i - v^i T)\frac{\partial}{\partial v^i} \qquad Z^H = T\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma^j_0 \frac{\partial}{\partial v^j}\right) + X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^j_i \frac{\partial}{\partial v^j}\right)\,.$$

El levantamiento horizontal define un isomorfismo, pero el levantamiento vertical no, lo cual no es satisfactorio. Para que defina un isomorfismo definimos el siguiente espacio $\overline{\mathfrak{X}}(\rho)$ como el espacio de clases de equivalencia de campos de vectores a lo largo de ρ módulo $\mathbf{T}$, es decir $Z, X \in \mathfrak{X}(\rho)$ determinan la misma clase si

$$Z - X \in <\mathbf{T}>\,.$$

Observando que $\mathbf{T}^V = 0$, es evidente que el levantamiento vertical induce ahora un isomorfismo entre $\overline{\mathfrak{X}}(\rho)$ y $Secc(V(\mathbb{R}\times TM))$. Con ambos isomorfismos en mente se deduce entonces que dado un campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times TM)$, existen de manera única un $[X] \in \overline{\mathfrak{X}}(\rho)$ e $Y \in \mathfrak{X}(\rho)$ tales que

$$Z = [X]^V + Y^H\,.$$

Si además exigimos que X verifique una relación del tipo $i_X dt = dt(X) = f$, con f cierta función en $\mathbb{R}\times TM$, tendremos que solo un representante de la clase verificará la propiedad anterior. Recapitulando dado $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times TM)$ y f función en $\mathbb{R}\times TM$, existen de manera única un $X, Y \in \mathfrak{X}(\rho)$ tales que

$$Z = X^V + Y^H \qquad i_X dt = f\,.$$

Endomorfismo de Jacobi y derivadas covariante dinámica horizontal y vertical

Con la descomposición anterior en mente vamos a construir, de manera análoga al caso autónomo, los elementos geométricos necesarios para la expresión implícita de las condiciones de Helmholtz.

Dado $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times TM)$ SODE, consideramos su conexión asociada que define levantamientos verticales y horizontales. Entonces, para $X \in \mathfrak{X}(\rho)$ definimos ΦX y ∇X como los únicos elementos de $\mathfrak{X}(\rho)$ verificando

$$[\xi, X^H] = (\Phi X)^V + (\nabla X)^H \qquad i_{\Phi X} dt = 0\,.$$

Se tiene entonces que Φ va a definir un tensor del tipo $(1,1)$ a lo largo de ρ, el cual se llama **endomorfismo de Jacobi** o tensor de Douglas, cuya expresión en coordenadas locales viene dada por

$$\Phi = \left(\frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial f^j}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial f^j}{\partial x^i} - \frac{1}{4}\frac{\partial f^j}{\partial v^k}\frac{\partial f^k}{\partial v^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \oplus \theta^i\,. \tag{4.6}$$

Por otro lado si X tiene expresión local (4.3), entonces

$$\nabla X = \xi(T)\mathbf{T} + (\xi(\overline{X}^i) + \Gamma^i_k \overline{X}^k)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{4.7}$$

El concepto de derivación autoadjunta de $\mathcal{T}(\rho)$ es análogo al de $\mathcal{T}(\tau)$, y cumple propiedades similares. En particular una derivación autoadjunta de $\mathcal{T}(\rho)$ queda determinada por su acción en campos de vectores y funciones y viene expresada en términos de la fórmula (3.5).

Se tiene entonces que si definimos la acción de ∇ en funciones como $\nabla(f) = \xi(f)$, entonces de manera análoga al caso autónomo, ∇ se puede extender a una derivación autoadjunta de $\mathcal{T}(\rho)$ llamada **derivada covariante dinámica**, cuya acción en un tensor $g = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j$ del tipo $(0,2)$ viene dada por

$$\nabla g = \left(\xi(g_{ij}) + \frac{1}{2}g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right)\theta^i \otimes \theta^j\,. \tag{4.8}$$

Por último, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\rho)$, definimos $D^H_X Y$ y $D^V_Y X$ como los únicos elementos de $\mathfrak{X}(\rho)$ verificando

$$[X^H, Y^V] = (D^H_X Y)^V - (D^V_Y X)^H \qquad i_{D^H_X Y} dt = X^H(i_Y dt)\,.$$

Entonces si

$$X = T_X\mathbf{T} + \overline{X}^i\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = T_Y\mathbf{T} + \overline{Y}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

se tiene que

$$D^V_Y X = Y^V(T_X)\mathbf{T} + (Y^V(\overline{X}^i) + T_X\overline{X}^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$D^H_X Y = X^H(T_Y)\mathbf{T} + X^H(\overline{Y}^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + \overline{Y}^i[\overline{X}^j(\Gamma_\xi)^k_{ji} + T_X((\Gamma_\xi)^k_{ji}v^j + (\Gamma_\xi)^k_{0i})]\frac{\partial}{\partial x^k}\,,$$

donde recordemos $\Gamma^k_{ij} = \partial\Gamma^k_i/\partial x^j$.

Se tiene que si definimos $D^V_X f = X^V(f)$ y $D^H_X = X^H(f)$ para una función $f : \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R}$, podemos extender D^V_X y D^H_X a derivaciones autoadjuntas de $\mathcal{T}(\rho)$. Se deduce entonces, usando la fórmula (3.5), que la acción de D^V_X sobre un tensor del tipo $(0,2)$ a lo largo de τ con expresión local $g(t,x,v) = g_{ij}(t,x,v)\theta^i \otimes \theta^j$, viene dada por

$$D^V_X g = X^V(g_{ij})\theta^i \otimes \theta^j - g_{ij}(\overline{X}^i \theta^j + \overline{X}^j \theta^i) \otimes dt\,.$$

Si definimos, de manera análoga al caso autónomo

$$D^V g(X,Y,Z) = D^V_X g(Y,Z)\,,$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\rho)$, se tiene que

$$D^V g = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k - g_{ij}(\theta^i \otimes \theta^j + \theta^j \otimes \theta^i) \otimes dt\,.$$

Para conseguir la condición de Helmholtz **H3** tenemos que retocar un poco $D^V g$. Para ello definimos el conjunto

$$\mathfrak{X}^0(\rho) = \{X \in \mathfrak{X}(\rho) \,:\, i_X dt = 0\}\,.$$

Tenemos entonces que

$$D^V g_{|\mathfrak{X}^0(\rho)} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k\,, \tag{4.9}$$

y por lo tanto ahora al exigir que $D^V g_{|\mathfrak{X}^0(\rho)}$ sea simétrico recuperamos la condición de Helmholtz **H3**.

Condiciones de Helmholtz implícitas

A partir de las expresiones en coordenadas locales (4.6), (4.8) y (4.9), obtenemos que la versión implícita del problema inverso dependiente del tiempo es:

Encontrar un tensor g simétrico 2-covariante no degenerado a lo largo de $\rho : \mathbb{R} \times TM \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que:

H1 $\quad \Phi \lrcorner\, g$ es simétrico,

H2 $\quad \nabla g = 0$,

H3 $\quad D^V g_{|\mathfrak{X}^0(\rho)}$ es simétrico,

que son las condiciones de Helmholtz en su forma implícita, es decir libre de coordenadas. Además se tiene que el lagrangiano L y g están relacionados por

$$g = D^V D^V L\,.$$

Proposición 4.1. Sea M variedad de dimensión n, ξ un SODE en $\mathbb{R} \times TM$ y g en las condiciones anteriores. Entonces existe para todo punto $x \in M$ un entorno coordenado (U, x^i) y una función $L : \mathbb{R} \times TU \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que las soluciones $\alpha : I \to U$ del SODE ξ verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{\alpha^{[1]}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j}\Big|_{\alpha^{[1]}(t)} = 0 \quad 1 \le j \le n \,, \tag{4.10}$$

donde recordemos $\alpha^{[1]}(t) = (t, \dot{\alpha}(t))$.

Demostración. La demostración es directa considerando el teorema 2.14 y las expresiones locales (4.6), (4.8) y (4.9). □

Bibliografía

[CSM+94] M. Crampin, W. Sarlet, E. Martínez, G. B. Byrnes y G. E. Prince. Towards a geometrical understanding of Douglas's solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Inverse problems*, 10(2):245, 1994.

[DLR11] Manuel De León y Paulo R. Rodrigues. *Methods of differential geometry in analytical mechanics*. Elsevier, 2011.

[Dou41] Jesse Douglas. Solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 50(1):71–128, 1941.

[GM00] Joseph Grifone y Zoltán Muzsnay. *Variational principles for second-order differential equations*. World Scientific, 2000.

[Gri72] Joseph Grifone. Structure presque tangente et connexions i. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 22, pages 287–334. Institut Fourier, 1972.

[Hel87] H. Helmholtz. Ueber die physikalische bedeutung des prinzips der kleinsten wirkung. *J. fur die reine u. angewandte Math*, 100:137–166, 1887.

[Joh82] Fritz John. Partial differential equations, volume 1 of applied mathematical sciences, 1982.

[KN63] Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, 1963.

[Lew57] Hans Lewy. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Annals of Mathematics*, 66(1):pp. 155–158, 1957.

[May96] A. Mayer. Die existenzbedingungen eines kinetischen potentiales. *Leipzig, Math. Phys.*, 1896.

[MCS92] Eduardo Martínez, José F. Cariñena y Willy Sarlet. Derivations of differential forms along the tangent bundle projection. *Differential Geometry and its Applications*, 2(1):17–43, 1992.

[MCS93a] Eduardo Martínez, José F. Cariñena y Willy Sarlet. Derivations of differential forms along the tangent bundle projection ii. *Differential Geometry and its Applications*, 3(1):1–29, 1993.

[MCS93b] Eduardo Martínez, José F. Cariñena y Willy Sarlet. Geometric characterization of separable second-order differential equations. In *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*, volume 113, pages 205–224, 1993.

[MT97] Ib Henning Madsen y Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* Cambridge University Press, 1997.

[Sar82] Willy Sarlet. The Helmholtz conditions revisited. A new approach to the inverse problem of lagrangian dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15(5):1503, 1982.

[SVCM95] Willy Sarlet, Ann Vandecasteele, Frans Cantrijn y Eduardo Martínez. Derivations of forms along a map: the framework for time-dependent second-order equations. *Differential Geometry and its Applications*, 5(2):171–203, 1995.

[War71] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer, 1971.