María José Pereira Sáez

AUTOVALORES POR LA IZQUIERDA DE LAS MATRICES CUATERNIÓNICAS DE ORDEN DOS

130b

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MARÍA JOSÉ PEREIRA SÁEZ

AUTOVALORES POR LA IZQUIERDA DE LAS MATRICES CUATERNIÓNICAS DE ORDEN DOS

130b

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Autovalores por la izquierda de las matrices cuaterniónicas de orden dos

María José Pereira Sáez

Xullo 2011

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Introducción

No es complicado percibir que los números racionales no son suficientes para estudiar la realidad que nos rodea; basta que tratemos de medir la longitud de la diagonal del cuadrado unidad (si midiésemos la longitud de la circunferencia nos encontraríamos con el tan interesante irracional π).

Hacia el s. XVI, en Italia, comenzaron a estudiarse las ecuaciones de grados 3 y 4. Poco a poco se fue viendo que, para obtener soluciones reales, a veces había que pasar por cálculos que involucraban raíces cuadradas de números negativos, que más tarde Descartes llamó imaginarias. A finales del s. XVII y en el s. XVIII se aceptaron plenamente estos nuevos números a los que se llamaron complejos.

Todo número complejo puede ser representado por un vector del plano, verificando la importante propiedad de que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (la longitud del producto de dos números complejos coincide con el producto de las longitudes de los vectores correspondientes). Así, los complejos facilitan el estudio de cuestiones geométricas en el plano. Por ejemplo, un giro en el plano no es más que la multiplicación por un complejo unitario.

En 1835, Hamilton descubrió cómo tratar a los números complejos como pares de números reales, $z = a + b\mathbf{i}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y la unidad imaginaria es $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Los complejos, con una parte real y otra imaginaria, forman un álgebra conmutativa real de dimensión 2. Viendo la relación que guardaban con la geometría en el plano, durante muchos años buscó un nuevo sistema de dimensión 3 que jugara un papel análogo para la geometría en el espacio. Buscaba un álgebra normada de dimensión 3, que no existe.

Al igual que un número complejo puede escribirse como $a + b\mathbf{i}$, Hamilton consideraba expresiones de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ unidades imaginarias. El problema que no era capaz de resolver era cómo multiplicar estas ternas (a, b, c). En 1843, paseando con su mujer por el puente de Brougham (Dublin), se dió cuenta de que si quería multiplicar dos unidades imaginarias, también debía añadir una tercera, el producto de ambas, $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$. Definió entonces Hamilton un nuevo conjunto de números para los cuales el producto no es conmutativo, los cuaternios, que en su honor se denotan por $\mathbb{H}$.

La no conmutatividad de los cuaternios lleva a que no se extiendan de manera inmediata los resultados habituales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. No se verifican las mismas propiedades y aún cuando lo hacen, no siempre es sencillo adaptar la prueba al ámbito cuaterniónico. Por ejemplo, en cuanto al estudio de polinomios cuaterniónicos ya no se verifica que un polinomio tenga tantas raíces como indica su grado; de hecho, la ecuación $x^2 = -1$, que en $\mathbb{R}$ no tiene solución y en $\mathbb{C}$ tiene dos, tiene infinitas soluciones en el caso cuaterniónico, toda una esfera S^2.

Esto afecta al estudio de los autovalores ya que, en el ámbito conmutativo, los autovalores de una matriz se obtienen como raíces de polinomios. Sin embargo, para las matrices cuaterniónicas no hay, en general, un polinomio característico y aún cuando lo haya, no siempre es posible hallar sus raíces y, por tanto, obtener los autovalores cuaterniónicos. De hecho, la propia noción de autovalor necesita ser matizada ya que, para una matriz cuaterniónica, es necesario diferenciar los autovalores por la derecha de los auotvalores por la izquierda. El caso de los autovalores por la derecha está cerrado.

Sin embargo, los autovalores por la izquierda de una matriz cuaterniónica están muy poco estudiados. En el año 1985, R.M.W. Wood [29] probó, usando métodos homotópicos, que cualquier matriz cuaterniónica tiene al menos un autovalor por la izquierda. Tenemos muy pocos resultados relativos a su cálculo. Para orden 2×2, L. Huang y W. So clasificaron completamente en [16] el espectro por la izquierda. En 2005 W. So obtuvo fórmulas explícitas para orden 3×3 recogidas en [25]. No hay nada escrito para orden 4×4 explícitamente.

Tratamos de recopilar en el siguiente trabajo los resultados conocidos hasta hoy para las matrices de orden dos. Asimismo, proponemos un nuevo método, topológico en vez de algebraico, para clasificar los posibles espectros por la izquierda de una matriz 2×2.

Comenzamos el trabajo recogiendo las propiedades fundamentales del álgebra lineal cuaterniónica basándonos en el resumen que hace F. Zhang en [30]. Es interesante notar que un cuaternio $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ puede expresarse como $q = a + \mathbf{j}b$ con $a, b \in \mathbb{C}$; esta expresión permite obtener unas cuantas propiedades interesantes.

Como veremos en este mismo capítulo, dado que los escalares no conmutan, para obtener las propiedades habituales de las aplicaciones lineales necesitamos considerar $\mathbb{H}^n$ como un $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha.

Recogemos a continuación las principales propiedades de las matrices cuaterniónicas así como su expresión en forma compleja, que permite identificar de manera unívoca una matriz cuaterniónica M de orden n con una matriz compleja, $c(M)$, de orden $2n$ (Secc. 1.2.1). Este modo de expresar las matrices nos permite calcular de modo sencillo los autovalores cuaterniónicos por la derecha. Diremos que $q \in \mathbb{H}$ es un autovalor por la derecha de $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ si existe algún $v \in \mathbb{H}^n$ no nulo tal que $Mv = vq$. Es sencillo ver que estos autovalores son precisamente la clase de similitud en $\mathbb{H}$ de los autovalores complejos de $c(M)$. Sin embargo, a la hora de trabajar con ellos, hay que tener la precaución de que los autovectores asociados a un autovalor por la derecha no forman un $\mathbb{H}$-espacio vectorial (por la derecha). Aún así, Brenner [3] prueba que puede generalizarse el lema de Schur afirmando que toda matriz cuaterniónica es triangularizable. Más aún, $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ es diagonalizable si y sólo si M es normal, es decir, $MM^* = M^*M$, donde M^* es la matriz conjugada traspuesta.

Una de las primeras cuestiones que nos planteamos al estudiar autovalores es la de si existe algún determinante cuaterniónico que nos permita dar un polinomio característico. Dedicamos el Capítulo 2.1 al determinante de Study, Sdet. No es éste un determinante en sentido estricto, ya que toma valores reales, pero es la mejor generalización conocida de los casos real y complejo. Dada $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ se define $\operatorname{Sdet}(M)$ como $|\det(c(M))|^{1/2}$. Veremos sus principales propiedades así como su relación con los determinantes cuaterniónicos que dieron Cayley y Moore [1].

No es sencillo hallar las raíces de polinomios cuaterniónicos, ni siquiera de los de grado uno, ya que, debido a la no conmutatividad, no pueden agruparse los términos del mismo grado. En 1944, S. Eilenberg e I. Niven [10] extendieron a los cuaternios el teorema fundamental del álgebra para polinomios que sólo tengan un término de mayor grado. Gordon y Motzkin probaron en 1965 que un polinomio mónico estándar (unilateral) de grado n, o tiene infinitas raíces o tiene como mucho n raíces distintas.Veremos en el Capítulo 3 un método explícito para resolver la llamada ecuación de Sylvester, $\alpha x + x\beta = \gamma$, que utilizaremos al linealizar el problema del cálculo de autovalores. Recogemos también el método de D. Janovská y G. Opfer [18] para estudiar esta ecuación identificándola con una matriz real 4×4 (Secc. 3.1.1).

Diremos que un cuaternio λ es un autovalor por la izquierda de $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ si $Mv = \lambda v$ para algún $v \in \mathbb{H}^n, v \neq 0$. Denotaremos por $\sigma_l(M)$ al espectro o conjunto de autovalores por la izquierda de la matriz M. Para estos autovalores no se pueden extender de manera sencilla los métodos propios del ámbito conmutativo y hasta hoy no hay un método sistemático que permita acometer su estudio. Como afirmaba Suzuki en 2008 [26],

> "para una matriz con entradas no conmutativas, no están definidos el determinante o la función característica por el problema del orden. Por lo tanto, los "autovalores" usados en la descomposición espectral no están definidos y, hasta ahora, no tenemos un método sistemático para calcular una función de una matriz con entradas no conmutativas."

De la definición de autovalor por la izquierda se deriva que $\lambda \in \sigma_l(M)$ si y sólo si $M - \lambda I$ es inversible. La idea que aquí proponemos es utilizar el determinante de Study (ver sección 2.1) para estudiar el espectro por la izquierda.

En principio, la ecuación $\mathrm{Sdet}(M - \lambda I) = 0$ no tiene por qué ser un polinomio y en general no se sabe resolver. En [6, 16] pueden verse dos métodos diferentes para resolverla en el caso 2×2. No está claro que todos los autovalores de una matriz cuaterniónica de orden $n \times n$ puedan hallarse resolviendo un polinomio cuaterniónico de grado menor o igual que n. Por ahora, sólo se ha podido comprobar que hasta orden tres sí es posible.

En el Capítulo 4 recogemos el resultado de R.M.W. Wood [29] y el teorema de clasificación de L. Huang y W. So [16] para orden dos según el cual $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$ puede tener uno, dos o infinitos autovalores por la izquierda. Damos una nueva prueba algebraica de este teorema basándonos en un método elegante para resolver ecuaciones propuesto por De Leo et al en [8].

Análogamente al caso complejo comprobaremos que para las matrices simplécticas, es decir, tales que $MM^* = I$, los autovalores por la izquierda son unimodulares. Veremos después que las únicas matrices de $Sp(2)$ con infinitos autovalores por la izquierda son composición de una traslación izquierda por un cuaternio unitario con una rotación real de ángulo θ tal que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, $M = L_q \circ R_\theta$. Para ello necesitamos conocer la forma explícita de las matrices simplécticas (ver Subsección 4.3.1).

En el último capítulo expondremos cómo el determinante de Study nos permite definir una función característica μ para las matrices cuaterniónicas tomando μ tal que, salvo una constante, $|\mu(\lambda)| = \mathrm{Sdet}(M - \lambda I)$. Construiremos explícitamente una función característica para orden dos (Secc. 5.2),

$$\mu(\lambda) = c - (d - \lambda)b^{-1}(a - \lambda). \tag{1}$$

Las reglas de derivación en el ámbito no conmutativo que establecemos en la Sección 5.3.2 nos permiten hacer la diferencial de (1). Obtenemos así una expresión lineal del tipo ecuación de Sylvester que nos permite estudiar su grado topológico. Estudiando el rango de la diferencial de (1) daremos un nuevo método de clasificación de las matrices $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$ según el número de autovalores (secc. 5.3.5). La ventaja de este método frente al de L. Huang y W. So es que éste es susceptible de generalizarse para matrices de órdenes superiores.

Queda probado entonces que una matriz cuaterniónica de orden dos tiene, en general, dos autovalores por la izquierda. Los casos singulares son el que llamaremos esférico, con infinitos autovalores, y el caso en el que el espectro es sólo un punto, dependiendo del rango de la función característica asociada a la matriz.

Capítulo 1

Una introducción al álgebra lineal cuaterniónica

1.1. Sobre los cuaternios

Los cuaternios forman un álgebra no conmutativa sobre $\mathbb{R}$, asociativa y con uno. Denotaremos a este anillo de división por $\mathbb{H}$,

$$\mathbb{H} = \{t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \colon t, x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} &= \mathbf{k}, \\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} &= \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Dado un cuaternio $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ denotaremos

$$\begin{aligned} \Re(q) &= t, \\ \Im(q) &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \end{aligned}$$

a las partes real e imaginaria de q respectivamente. El conjugado es

$$\overline{q} = t - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}.$$

Puede verse un buen resumen de todas sus propiedades en el artículo de Zhang [30]. Citamos aquí las que vamos a necesitar con más frecuencia.

Proposición 1.1.1 *Dado* $q \in \mathbb{H}$ *se verifica que:*

1. $tq = qt$ *para todo* $q \in \mathbb{H}$ *sii* t *es real, es decir, el centro de* $\mathbb{H}$ *es* $\mathbb{R}$*;*

2. q *puede expresarse de manera única como* $q = a + \mathbf{j}b$ *con* $a, b \in \mathbb{C}$*. En este caso, su conjugado es* $\overline{q} = \overline{a} - \mathbf{j}b$*;*

3. $\mathbf{j}z = \overline{z}\mathbf{j}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*;*

4. $q\overline{q} = |q|^2 = \overline{q}q$*, donde* $|q|$ *es la norma usual de* $\mathbb{R}^4$*;*

5. $\overline{q_1 q_2} = \overline{q}_2 \overline{q}_1$.

Definición 1.1.2 *Se dice que* $q, q' \in \mathbb{H}$ *son* similares *si existe algún cuaternio no nulo* u *tal que* $q' = uqu^{-1}$.

Teorema 1.1.3 *Dos cuaternios son similares si y sólo si tienen la misma norma y la misma parte real. En particular,*

1. *Todo cuaternio* q *es similar a su conjugado* $\overline{q}$*;*

2. *todo cuaternio* $q \in \mathbb{H}$ *es similar a un complejo,* $\Re(q) \pm \mathbf{i}|\Im(q)|$.

Sea $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$ el espacio vectorial real de los cuaternios con parte real nula. Aquí el producto escalar viene dado por $\langle \xi, \xi' \rangle = -\Re(\xi\xi')$. Una base ortonormal para este producto es $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$. Si $\xi \in \mathbb{H}_0$ tenemos que $\overline{\xi} = -\xi$ y $\xi^2 = -|\xi|^2$. Sea $\Omega = S^3 \cap \mathbb{H}_0$ el conjunto de los vectores de $\mathbb{H}_0$ con norma 1. Este conjunto coincide con el de los cuaternios similares a la unidad imaginaria $\mathbf{i}$.

El espacio cuaterniónico $\mathbb{H}^n$

Si queremos obtener en este ámbito los resultados habituales para matrices asociadas a una aplicación lineal, es necesario considerar el espacio cuaterniónico $\mathbb{H}^n$ como un $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha.

El producto hermítico que utilizaremos en $\mathbb{H}^n$ es $\langle u, v \rangle = u^* v$.

1.2. Matrices cuaterniónicas

Dada una matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$, denotaremos por $\overline{M}$ a su conjugada, M^T a la matriz traspuesta de M y $M^* = (\overline{M})^T$.

Definición 1.2.1 *Diremos que $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ es* normal *si $MM^* = M^*M$,* hermítica *si $M^* = M$,* antihermítica *si $M^* = -M$ y* simpléctica o unitaria *si $M^*M = I$; donde I denota la matriz identidad de orden n.*

Zhang [30] recoge en la siguiente proposición las principales propiedades de las matrices cuaterniónicas.

Proposición 1.2.2 *Dadas $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ se verifica que:*

1. $(\overline{M})^T = \overline{M^T}$;
2. $(MN)^* = N^*M^*$, *pero en general* $(MN)^T \neq N^TM^T$ *y* $\overline{MN} \neq \overline{N}\,\overline{M}$;
3. *si M es inversible,* $(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$.

1.2.1. Forma compleja

Dada M una matriz cuaterniónica de orden $n \times n$ puede expresarse de forma única como $M = X + \mathbf{j}Y$ con $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Definición 1.2.3 *Llamamos* forma compleja *de $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ a*

$$c(M) = \begin{pmatrix} X & -\overline{Y} \\ Y & \overline{X} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{C}). \tag{1.1}$$

Este modo de expresar las matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ es bastante efectivo pues permite aprovechar muchas de las propiedades de las matrices complejas.

Proposición 1.2.4 *Sean $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$, entonces:*

1. $c(M + N) = c(M) + c(N)$;
2. $c(tM) = tc(M)$ *para* $t \in \mathbb{R}$;
3. $c(M \cdot N) = c(M) \cdot c(N)$;

4. *en particular, $c(M)$ es inversible sii M es inversible;*

5. $c(M^*) = c(M)^*$*;*

6. *$c(M)$ es unitaria, hermítica o normal sii M es unitaria, hermítica o normal respectivamente;*

7. $\det c(M) \geq 0$ *es un número real no negativo.*

1.3. Autovalores por la derecha

La teoría de autovalores por la derecha de matrices cuaterniónicas está bien establecida, como puede verse, entre otros, en [2, 3, 30]. La existencia de estos autovalores se prueba algebraicamente pero, recientemente, Baker [2] ha proporcionado un argumento topológico basado en el teorema del punto fijo de Lefschetz.

Definición 1.3.1 *Se dice que un cuaternio $q \in \mathbb{H}$ es un* autovalor por la derecha *de la matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ si existe un vector $v \in \mathbb{H}^n$, $v \neq 0$, tal que $Mv = vq$.*

Proposición 1.3.2 *Sea $q \in \mathbb{H}$ un autovalor por la derecha de $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ y v un q-autovector. Entonces, cualquier cuaternio similar a q es también autovalor de M. En concreto, dado $x \in \mathbb{H}$ no nulo, vx es un $(x^{-1}qx)$-autovector de M.*

Demostración.– $M(vx) = (Mv)x = vqx = (vx)x^{-1}qx.$

q.e.d.

Queda claro pues que, con esta definición, el conjunto $\Sigma(q)$ de autovectores asociados a un autovalor q no es un subespacio vectorial pues, dados $v, v' \in \Sigma(q)$, la suma se mantiene dentro de $\Sigma(q)$ pero el producto por escalares no.

La siguiente proposición, consecuencia de las propiedades vistas hasta ahora, muestra que el cálculo de los autovalores por la derecha de una matriz cuaterniónica es bastante sencillo.

Proposición 1.3.3 *Los autovalores por la derecha de una matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ son los cuaternios similares a los autovalores complejos de su forma compleja $c(M)$.*

Nótese que para una matriz compleja del tipo $c(M) = \begin{pmatrix} X & -\overline{Y} \\ Y & \overline{X} \end{pmatrix}$ de orden $2n \times 2n$ cada vez que aparece un autovalor aparece también su conjugado, de modo que, como mucho, tendrá n autovalores no conjugados.

Ejemplo 1 Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se comprueba directamente que sus autovalores cuaterniónicos son las soluciones de la ecuación $q^2 = -1$, es decir, todos los cuaternios similares a $q = \mathbf{i}$, que son los cuaternios de módulo 1 en $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$.

Corolario 1.3.4 *Cualquier matriz cuaterniónica M de orden $n \times n$ tiene a n números complejos con parte imaginaria no negativa como autovalores por la derecha.*

Autovalores de las matrices simplécticas

En cuanto a los autovalores por la derecha de las matrices simplécticas se obtienen resultados análogos a los de las matrices ortogonales y unitarias en los ámbitos real y complejo.

Proposición 1.3.5 *Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ una matriz simpléctica y $q \in \mathbb{H}$ autovalor de M. Se verifica que $|q| = 1$.*

Demostración.– Si M es simpléctica, $MM^* = I$, conserva el producto hermítico $\langle v, w \rangle = w^* v$:

$$\langle Mv, Mw \rangle = (Mw)^* Mv = w^* M^* Mv = w^* v.$$

Sea v un autovector asociado al autovalor q, entonces

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Mv, Mv \rangle = \langle vq, vq \rangle = |q|^2 |v|^2$$

luego $|q| = 1$.

q.e.d.

Proposición 1.3.6 *Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ una matriz simpléctica. Si dos autovalores q, q' de M no son similares, entonces los autovectores correspondientes son perpendiculares (para el producto hermítico) y, en consecuencia, son linealmente independientes.*

Demostración.– Sean v, v' dos vectores no nulos y q, q' dos autovalores unitarios de M, $Mv = vq, Mv' = v'q'$. Tenemos entonces que

$$\langle v, v' \rangle = \langle Mv, Mv' \rangle = \langle vq, v'q' \rangle = \overline{q} v^* v' q' = \overline{q} \langle v, v' \rangle q'.$$

Si $\langle v, v' \rangle \neq 0$ entonces

$$\langle v, v' \rangle^{-1} q \langle v, v' \rangle = q',$$

es decir, q y q' serían similares.

q.e.d.

1.4. Diagonalización de matrices normales

Probemos ahora que toda matriz normal puede diagonalizarse. Utilizaremos la siguiente generalización del lema de Schur.

Lema 1.4.1 *Toda matriz cuaterniónica es triangularizable por una matriz simpléctica.*

Está probada por Brenner en [3, pag. 331].

Teorema 1.4.2 *Una matriz cuaterniónica es diagonalizable si y sólo si es normal.*

Demostración.– Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ tal que $MM^* = M^*M$. Por el teorema anterior, existen matrices T triangular superior y U unitaria tales que $M = UTU^*$. Despejando T en la igualdad anterior, $T = U^*MU$ y así,

$$\begin{aligned} TT^* &= (U^*MU)(U^*M^*U) = U^*MM^*U = \\ & U^*M^*UU^*MU = (U^*MU)^*(U^*MU) = T^*T. \end{aligned}$$

Es decir, T es una matriz normal. Además, como T es triangular superior, de esta igualdad obtenemos para $i = 1, \dots, n$ que

$$|t_{ii}|^2 = |t_{ii}|^2 + |t_{ii+1}|^2 + \cdots + |t_{in}|^2$$

por tanto, $t_{ij} = 0$ siempre que $j > i$, luego T es diagonal.

q.e.d.

Se deduce de lo que hemos dicho de autovalores por la derecha que las matrices cuaterniónicas normales no sólo son diagonalizables sino que se pueden diagonalizar a una matriz compleja.

Teorema 1.4.3 *Sean $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ matrices semejantes, es decir, tales que $N = BMB^{-1}$ con B una matriz cuadrada inversible. Entonces M y N tienen los mismos autovalores por la derecha.*

Capítulo 2

Un determinante en el caso cuaterniónico

No es fácil extender a $\mathbb{H}$ la noción de determinante debido a la no conmutatividad de los cuaternios. El primero en proponer un funcional análogo para las matrices cuaterniónicas fue A. Cayley en el año 1845, pero no logró generalizar las propiedades del determinante usual. Hasta 75 años después no hubo ningún avance considerable. En la segunda edición del *Elements of Quaternions* de W.R. Hamilton, de 1889, el editor añadió un apéndice sobre este tema que no era más que una reelaboración del artículo de Cayley. Diez años más tarde aparece un artículo de J.M. Pierce pero que, de nuevo, no pasa de una cuidada estructuración de la teoría del determinante de Cayley. Por fin, en 1920, Eduard Study propone transformar una matriz cuaterniónica $n \times n$ en una compleja de orden $2n \times 2n$ y a ésta última hacerle el determinante complejo.

2.1. Determinante de Study

Se observa sin embargo que no es posible generalizar a los cuaternios la noción de determinante. En efecto, necesariamente tomará valores en $\mathbb{R}$, pero sí se puede generalizar el módulo del determinante, $|\det|$ (es decir, con valores reales), y esto es lo que hace Study. En [1, 6] H. Aslaksen y N. Cohen resumen la teoría general de los determinantes cuaterniónicos.

Definición 2.1.1 *Dada* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ *se define el* determinante de Study *de* M

como

$$\mathrm{Sdet}(M) := (\det c(M))^{\frac{1}{2}},$$

donde $c(M)$ es la forma compleja de M.

Nótese que salvo el exponente 1/2, este determinante es el mismo que el del Teorema 8.1 de [30]. Aquí normalizamos el exponente para que $\mathrm{Sdet}(M) = |q_1 \dots q_n|$ cuando consideramos una matriz diagonal $M = \mathrm{diag}(q_1, \dots q_n)$.

Nota.— Esta definición está motivada por el caso complejo. Si $A = P + iQ$ está descompuesta en matrices $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y llamamos

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$$

a su forma real, entonces

$$\det_{\mathbb{R}}(\tilde{A}) = |\det_{\mathbb{C}}(A)|^2,$$

como se comprueba haciendo las siguientes transformaciones for filas y columnas

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} P + iQ & -Q \\ Q - iP & P \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} P + iQ & -Q \\ 0 & P - iQ \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.1.2 *El determinante de Study verifica las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{Sdet}(MN) = \mathrm{Sdet}(M)\,\mathrm{Sdet}(N)$*;*
2. $\mathrm{Sdet}(M) > 0$ *si y sólo si M es inversible;*
3. *si la matriz M es compleja* $\mathrm{Sdet}(M) = |\det(M)|$*;*
4. *si M, N son matrices semejantes, entonces* $\mathrm{Sdet}(M) = \mathrm{Sdet}(N)$.

Puede probarse que es el único funcional que verifica estas propiedades (véase [6]).

En particular, para las matrices permutación de filas y columnas P_{ij},

$$\mathrm{Sdet}(P_{ij}MP_{ij}) = \mathrm{Sdet}(M),$$

donde llamamos P_{ij} a la matriz permutación resultante de intercambiar en la matriz identidad las filas i, j.

Además de las que acabamos de ver estas otras propiedades facilitan mucho su cálculo.

Proposición 2.1.3 *Dada M una matriz cuaterniónica de orden n se tiene que:*

1. *Si E_{ij}, $i \neq j$, es una matriz elemental con todas las entradas cero excepto un 1 en la posición (i, j), entonces* $\mathrm{Sdet}(I + qE_{ij}) = 1$, $\forall q \in \mathbb{H}$*;*

2. $\mathrm{Sdet}(M)$ *no cambia si a una columna se le suma un múltiplo (por la derecha) de otra columna;*

3. $\mathrm{Sdet}(M)$ *no cambia si a una fila se le suma un múltiplo (por la izquierda) de otra fila;*

4. $\mathrm{Sdet}(M^*) = \mathrm{Sdet}(M)$*;*

5. *en particular, si M es simpléctica entonces* $\mathrm{Sdet}(M) = 1$.

Aunque no las hemos encontrado explícitamente en la literatura, también nos hacen falta las siguientes propiedades.

Propiedad 2.1.4 *Sea* $X = \left(\begin{array}{c|ccc} q & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ *con* $q \in \mathbb{H}$*;* *entonces,*

$$\mathrm{Sdet}(M) = |q|\,\mathrm{Sdet}(M).$$

Demostración.– Si $q = 0$ es trivial. Si $q \neq 0$, podemos suponer que $q = 1$. En este caso, si $m_{1k} = a_{1k} + \mathbf{j}b_{1k}$ y $M = A + \mathbf{j}B$, al desarrollar el determinante de la forma compleja $c(M)$ por la primera columna obtenemos

$$\begin{aligned} \det(c(M)) &= \det \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & 0 & & & \\ & A & & \vdots & & -\overline{B} & \\ & & & 0 & & & \\ \hline b_{12} & \cdots & b_{1n} & 1 & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ & & & 0 & & & \\ & B & & \vdots & & \overline{A} & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right) \\ &= (-1)^{2n+1} \det \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Teorema 2.1.5 *Dada una matriz formada por cajas M, N de órdenes m y n respectivamente, se verifica que*

$$\operatorname{Sdet}\begin{pmatrix} M & 0 \\ * & N \end{pmatrix} = \operatorname{Sdet}(M)\operatorname{Sdet}(N).$$

Demostración.– Una matriz de orden 2 de este tipo sólo puede ser

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

y por 2.1.4 sabemos que su Sdet es $|ad|$.

Para orden 3, los dos únicos casos posibles son

$$\left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline * & b & c \\ * & d & e \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline * & * & e \end{array}\right).$$

Para la primera matriz basta aplicar la Propiedad 2.1.4 a M^*. Si en la segunda matriz intercambiamos las columnas C_1 y C_3 y las mismas filas, por la Proposición 2.1.2 estamos también en las condiciones de 2.1.4.

Veamos qué ocurre para orden 4. Los casos $m = 1, n = 3$ ó $m = 3, n = 1$ se verifican por la propiedad 2.1.4. El único caso que queda entonces por estudiar es $n = m = 2$. Podemos suponer que el elemento m_{22} no es nulo, sino se reduciría al caso anterior. Haciendo las transformaciones permitidas para el determinante de Study por filas tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sdet}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & 0 \\ \hline * & \begin{matrix} p & q \\ r & s \end{matrix} \end{array}\right) &= \operatorname{Sdet}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ c & d \end{matrix} & 0 \\ \hline * & \begin{matrix} p & q \\ r & s \end{matrix} \end{array}\right) \\
&= |a - bd^{-1}c| \operatorname{Sdet}\left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline *' & \begin{matrix} p & q \\ r & s \end{matrix} \end{array}\right) \\
&= |ad - bd^{-1}cd| \operatorname{Sdet}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{Sdet}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \operatorname{Sdet}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Análogamente para orden n. Por transformaciones de columnas siempre podemos hacer que los elementos de la primera fila de la matriz M sean todos nulos excepto el m_{11}. Al hacerlo por columnas, estas transformaciones no interfieren en la matriz N y obtenemos así lo que buscábamos.

q.e.d.

Corolario 2.1.6 *Si* $T = (t_{ij})$ *es una matriz triangular entonces*

$$\mathrm{Sdet}(T) = |t_{11} \cdots t_{nn}|.$$

En particular, por el Lema 1.4.1, si M *es una matriz con autovalores por la derecha* $q_1 \cdots q_n$, *entonces* $\mathrm{Sdet}(M) = |q_1 \cdots q_n|$.

2.2. Relación con otros determinantes cuaterniónicos

Aslaksen resume en [1] diversos determinantes que se han ido sugiriendo para las matrices cuaterniónicas.

El primero de ellos fue el de Cayley. Se basa en el desarrollo por una fila o columna. Como en el caso cuaterniónico el resultado depende de la fila o columna que se escoja, fija una de ellas, la primera. Así, su determinante consiste en desarrollar por la primera columna tanto la matriz inicial como todos los menores. El propio Cayley percibió que no era una buena definición pues, por ejemplo, para una matriz de orden 2 con las dos columnas iguales,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$$

su determinante, $ab - ba$, no tiene porqué anularse.

Basándose en las ideas de Cayley, Moore define otro determinante pero sólo para las matrices hermíticas. Brevemente puede definirse como sigue.

Consideremos σ una permutación de $I_n = \{1, \ldots, n\}$ expresada como producto de ciclos disjuntos de manera que en cada ciclo el elemento menor sea el primero.

$$\sigma = (n_{11} \cdots n_{1l_1})(n_{21} \cdots n_{2l_2}) \cdots (n_{r1} \cdots n_{rl_r}),$$

donde para cada i tenemos que $n_{i1} > n_{ij}$ para todo $j > 1$ y $n_{11} > n_{21} > \cdots > n_{rl}$.

Definición 2.2.1 *Dada una matriz hermítica* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ *el* determinante de Moore *es*

$$\mathrm{Mdet}(M) = \sum_{\sigma\in\S_n} |\sigma| m_{n_{11}n_{12}} \cdots m_{n_{1l_1}n_{11}} m_{n_{21}n_{22}} \cdots m_{n_{rl_r}n_{r1}}.$$

Para las matrices reales simétricas y las complejas hermíticas coincide con el determinante usual.

Para cualquier $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ la matriz M^*M es hermítica. Haciendo uso del funcional de Moore se define el *doble determinante,*

$$\mathrm{ddet}(M) = \mathrm{Mdet}(M^*M).$$

Por último, haciendo uso de la forma compleja, se define el *q-determinante*

$$\mathrm{qdet}(M) = \det{}_{\mathbb{C}} c(M).$$

Las diferentes formas de calcular el determinante cuaterniónico guardan cierta relación.

Proposición 2.2.2 *Para* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ *una matriz cuaterniónica de orden* n*, se verifica que:*

1. $\mathrm{qdet}(M) = \mathrm{ddet}(M)$ *y*
2. $\mathrm{Sdet}(M)^2 = \mathrm{Mdet}(MM^*) = \mathrm{ddet}(M)$.

Finalmente, Dieudonné da una definición de determinante para el caso no conmutativo recogida en [9]. Puede probarse que coincide con $\mathrm{Sdet}(M)^4$.

Capítulo 3

Polinomios cuaterniónicos

No es sencillo hallar las raíces de un polinomio cuaterniónico. Uno de los primeros problemas que nos encontramos es que un polinomio bilateral puede tener varios términos del mismo grado. Además, ya no se verifica que un polinomio tenga tantas soluciones como indica su grado; por ejemplo, la ecuación $x^2 = -1$, que en $\mathbb{R}$ no tiene solución y en $\mathbb{C}$ tiene dos, tiene infinitas soluciones en el caso cuaterniónico, toda una esfera S^2. Esto nos lleva a plantearnos tanto si todos los polinomios cuaterniónicos tienen raíces como, en el caso de tenerlas, cuántas hay.

En 1941 Niven prueba [23], basándose en el algoritmo de la división, que toda ecuación del tipo

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

tiene alguna solución. En ese mismo artículo proporciona un método (poco práctico) para obtener las raíces de polinomios de este tipo, discute el número de soluciones y da una condición necesaria y suficiente para que tenga infinitas soluciones.

Tres años más tarde, Eilenberg y el propio Niven [10] extendieron el teorema fundamental del álgebra a los cuaternios para polinomios bilaterales pero en el caso particular de que el polinomio sólo tenga un término de mayor grado.

Teorema 3.0.3 (Eilenberg y Niven, 1944) *Sea $f(x) = a_0 x a_1 x \dots x a_n + \phi(x)$ donde $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{H}$ no nulos y $\phi(x)$ es la suma de un número finito de monomios $b_0 x b_1 x \dots x b_k$ con $k < n$. Entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución.*

En este caso la demostración es topológica. Extienden f a toda la esfera S^4 haciendo $f(\infty) = \infty$. Esta extensión es continua precisamente porque sólo tenemos un monomio de mayor grado. Construyen una homotopía entre $f(x)$ y $g(x) = x^n$ en S^4. Por último, verifican que la función g es de grado n comprobando que $\mathbf{i}$ es un valor regular (ya que $x^n = \mathbf{i}$ tiene exactamente n soluciones).

En ese mismo año 1944 se publicó un artículo de Johnson [20] en el que explica cómo resolver la ecuación $x\alpha = \gamma x + \beta$ sobre un anillo de división. Obtiene condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de este tipo tenga solución y en ese caso da un método sencillo para calcular explícitamente al menos una de las soluciones. En este mismo volumen del *Bulletin of the American Mathematical Society* está recogido el artículo de Eilenberg y Niven.

3.1. Resolución de ecuaciones lineales cuaterniónicas

A continuación veremos con un poco más de detalle cómo se resuelve la ecuación del artículo de Johnson [20] en el caso cuaterniónico, conocida hoy en día como ecuación de Sylvester.

3.1.1. La ecuación de Sylvester $\alpha x + x\beta = \gamma$

Una ecuación del tipo

$$\alpha x + x\beta = \gamma \tag{3.1}$$

tal que la variable y los coeficientes están sobre un anillo no conmutativo, recibe el nombre de ecuación de Sylvester.

El método de Johnson para resolverla puede resumirse como sigue. Dada la ecuación (3.1) multiplicamos toda la ecuación a la izquierda por $\overline{\alpha}$ y a la derecha por $\overline{\beta}$,

$$|\alpha|^2 x\overline{\beta} + \overline{\alpha} x|\beta|^2 = \overline{\alpha}\gamma\overline{\beta}.$$

Volvemos a la ecuación inicial y la multiplicamos por el módulo de α al cuadrado (podría hacerse análogamente con el de β):

$$|\alpha|^2\alpha x + |\alpha|^2 x\beta = |\alpha|^2\gamma.$$

Sumando ambas expresiones obtenemos

$$|\alpha|^2 x\,(2\Re(\beta)) + \left(|\beta|^2\overline{\alpha} + |\alpha|^2\alpha\right) x = \overline{\alpha}\gamma\overline{\beta} + |\alpha|^2\gamma,$$

es decir,

$$\left(2|\alpha|^2\Re(\beta) + |\beta|^2\overline{\alpha} + |\alpha|^2\alpha\right) x = \overline{\alpha}\gamma\overline{\beta} + |\alpha|^2\gamma$$

que se resuelve sencillamente.

El método anterior permite calcular explícitamente las soluciones de la ecuación. Para estudiar la existencia y el número de soluciones de (3.1) Janovská y Opfer [18] la identifican con una matriz real 4×4.

Dado un polinomio cuaterniónico del tipo $\alpha x + x\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, podemos asociarle un aplicación $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$. Basta considerar los cuaternios como vectores de $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \beta &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \end{aligned}$$

donde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\mathbf{i} + \alpha_3\mathbf{j} + \alpha_4\mathbf{k}$ y $\beta = \beta_1 + \beta_2\mathbf{i} + \beta_3\mathbf{j} + \beta_4\mathbf{k}$. Si desarrollamos el producto $\alpha x + x\beta$ con α y β expresados de este modo tenemos que la matriz asociada es

$$M = L_\alpha + R_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & -\alpha_2 - \beta_2 & -\alpha_3 - \beta_3 & -\alpha_4 - \beta_4 \\ \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_1 + \beta_1 & -\alpha_4 + \beta_4 & \alpha_3 - \beta_3 \\ \alpha_3 + \beta_3 & \alpha_4 - \beta_4 & \alpha_1 + \beta_1 & -\alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_4 + \beta_4 & -\alpha_3 + \beta_3 & \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 + \beta_1 \end{pmatrix}$$

donde denotamos por L_α a la matriz asociada a la traslación izquierda por el cuaternio α y R_β a la asociada a la traslación derecha por β.

Proposición 3.1.1 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$ la matriz $M = L_\alpha + R_\beta$ verifica que:*

1. $M + M^T = 2(\alpha_1 + \beta_1)I = 2\Re(\alpha + \beta)I$;
2. $\det(M) = 2\Re(\alpha + \beta)^2 \left(|\Im(\alpha)|^2 + |\Im(\beta)|^2\right) + \Re(\alpha + \beta)^4 + \left(|\Im(\alpha)|^2 - |\Im(\beta)|^2\right)^2$;
3. *Los cuatro autovalores de M son*

$$\lambda = \Re(\alpha + \beta) \pm \left(|\Im(\alpha)| \pm |\Im(\beta)|\right).$$

Donde $\Re$ e $\Im$ denotan las partes real e imaginaria respectivamente.

Proposición 3.1.2 *Consideremos la ecuación lineal cuaterniónica $\alpha x + x\beta = \gamma$. Sea $M = L_\alpha + R_\beta$ su matriz asociada. Se verifica entonces que:*

1. *El rango de M es par;*
2. $\operatorname{rang}(M) < 4$ *sii* $|\alpha| = |\beta|$ *y* $\Re(\alpha + \beta) = 0$*, es decir, sii* α *y* $-\beta$ *son similares;*
3. $\operatorname{rang}(M) = 0$ *sii* α *es real y* $\beta = -\alpha$*.*

Demostración.– Por la proposición anterior tenemos que los autovalores de M son conjugados dos a dos, luego su rango siempre es par.

De la expresión del determinante dada en 3.1.1 se deducen las otras dos afirmaciones.

q.e.d.

Capítulo 4

Autovalores por la izquierda

La teoría de autovalores por la izquierda está muy poco desarrollada. Hay un resultado de Wood [29] que garantiza su existencia pero, en general, no se sabe cuántos autovalores por la izquierda puede tener una matriz cuaterniónica de orden $n \times n$. Huang y So probaron que una matriz cuadrada de orden 2 puede tener uno, dos o infinitos autovalores (pertenecientes a diferentes clases de equivalencia) y caracterizaron este último caso [16].

F. Zhang recoge en [30, 31] sus principales propiedades y algunos ejemplos patológicos; puede verse también [15]. El propio Zhang plantea como cuestión abierta cuántos autovalores por la izquierda puede tener una matriz cuaterniónica cuadrada y sugiere investigar su espectro por la izquierda [30].

4.1. Primeras propiedades

Definición 4.1.1 *Sea M una matriz cuaterniónica de orden n. Se dice que $\lambda \in \mathbb{H}$ es un* autovalor por la izquierda *de M si existe un $v \in \mathbb{H}^n, v \neq 0$, tal que*

$$Mv = \lambda v.$$

Llamamos $\sigma_l(M)$ al espectro por la izquierda de la matriz M.

El interés de esta definición radica en que es equivalente al hecho de que la matriz $M - \lambda I$ sea singular (en el caso conmutativo no se da esta sutileza). De acuerdo con las propiedades del determinante de Study tenemos

Proposición 4.1.2 *Los autovalores por la izquierda de $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ son las raíces de la ecuación* $\operatorname{Sdet}(M - \lambda I) = 0$.

En este caso:

Proposición 4.1.3 *El conjunto $\Sigma(\lambda)$ de los autovectores asociados a un autovalor por la izquierda λ forma un subespacio vectorial (por la derecha).*

Demostración.– Sean λ un autovalor de la matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$, $v, v' \in \Sigma(\lambda)$ y $q \in \mathbb{H}$; se verifica entonces que

$$\begin{aligned} M(vq) &= (Mv)q = (\lambda v)q = \lambda(vq), \\ M(v+v') &= Mv + Mv' = \lambda(v+v'). \end{aligned}$$

q.e.d.

Nota.– Toda matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ define una aplicación $\mathbb{H}$-lineal por la derecha $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ tal que $\varphi(v) = Mv$, donde M es la matriz asociada a φ con respecto a la base canónica. Si cambiamos de base, la matriz asociada a φ con respecto de la nueva base sería

$$N = BMB^{-1}.$$

Pero como el espectro por la izquierda no es invariante por semejanza, M y N tienen autovalores distintos.

Proposición 4.1.4 *El espectro por la izquierda de una matriz cuaterniónica $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ es compacto.*

Demostración.– $\sigma_l(M)$ es cerrado por ser la imagen recíproca de un cerrado por una aplicación continua ya que la aplicación forma compleja, el determinante complejo y la raíz cuadrada del valor absoluto son aplicaciones continuas.

Además, $\sigma_l(M)$ es acotado. Sea $\lambda \in \sigma_l(M)$, entonces

$$|\lambda| = \frac{|\lambda v|}{|v|} \leq \sup_{|w|=1} \frac{|Mw|}{|w|} = ||M||.$$

q.e.d.

Proposición 4.1.5 *Los autovalores por la izquierda de una matriz simpléctica tienen módulo* 1*.*

Demostración.– Sea $A \in Sp(n)$, es decir, $A^*A = I$. Si $Av = \lambda v$ entonces

$$0 < |v|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = v^* \overline{\lambda} \lambda v = v^* |\lambda|^2 v = |\lambda|^2 |v|^2.$$

q.e.d.

Recogemos aquí el teorema de existencia de Wood [29].

Teorema 4.1.6 (Wood, 1985) *Toda matriz cuaterniónica de orden $n \times n$ tiene al menos un autovalor por la izquierda.*

Demostración.– La prueba es topológica. En primer lugar, si $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ es singular, $0 \in \sigma_l(M)$, así que toma M inversible. Supone que $M - \lambda I \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}), \forall \lambda \neq 0$ y llega a una contradicción.

Si $M - \lambda I$ es inversible para todo $\lambda \in \mathbb{H}$, podemos construir dos homotopías en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$

$$\begin{aligned} f_t(\lambda) &= M - t\lambda I, \\ g_t(\lambda) &= tM - \lambda I. \end{aligned}$$

Como $f_0(\lambda) = M$, $f_1(\lambda) = M - \lambda I = g_1(\lambda) = M - \lambda I$ y $g_0(\lambda) = -\lambda I$, las aplicaciones f_0 y g_0 son homótopas. Sin embargo, si las consideramos como aplicaciones de la esfera S^3 en $GL(n, \mathbb{H})$, en el tercer grupo de homotopía $\pi_3 \,\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) \cong \mathbb{Z}$ corresponden a los enteros 0 y n [11], luego no pueden ser homótopas.

q.e.d.

En cuanto al número de autovalores sólo tenemos el siguiente teorema de Huang y So para matrices 2×2 [16].

Teorema 4.1.7 *La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H})$ tiene uno, dos o infinitos autovalores por la izquierda. Este último caso se da si y sólo si $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$, donde $a_0 = -b^{-1}c$ y $a_1 = b^{-1}(a - d)$.*

Nota.– Llamaremos *esférico* al caso en el que hay infinitos autovalores, porque en ese caso el espectro

$$\sigma_l(A) = \{(1/2)(a + d + bq) \colon q^2 = \Delta\} \tag{4.1}$$

es difeomorfo a la esfera $S^2 \subset \mathbb{H}_0 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$.

Para orden 3 So hizo un estudio caso por caso según las relaciones entre las entradas de la matriz [25]. Obtuvo diferentes polinomios cuaterniónicos de orden menor o igual que tres tales que sus raíces son los autovalores por la izquierda.

4.2. Matrices de orden dos

Como hemos visto, para $n = 2$, Huang y So dieron en [16] una caracterización de las matrices con infinitos autovalores por la izquierda. Su resultado (ver Teorema 4.1.7) está basado en una serie de fórmulas explícitas para resolver algunas ecuaciones cuadráticas obtenidas previamente por los mismos autores [17]. Más tarde, De Leo et al. propusieron en [8] un método alternativo de resolver ecuaciones polinómicas unilaterales que reduce el problema a encontrar los autovalores por la derecha de una matriz asociada a la ecuación (matriz compañera). Proponemos aquí un método nuevo de probar los resultados de Huang y So basado en el método de De Leo et al.

A lo largo de toda la sección A denota una matriz cuaterniónica 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Si la matriz es triangular (es decir, $bc = 0$), los autovalores de A son los elementos de la diagonal. Para una matriz A no triangular Huang y So [16] obtuvieron el siguiente resultado que nosotros probaremos de manera diferente.

Proposición 4.2.1 *Si $bc \neq 0$, los autovalores por la izquierda de A son de la forma $\lambda = a + bp$, donde p es cualquier solución del polinomio cuadrático unilateral*

$$p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \tag{4.2}$$

con $a_1 = b^{-1}(a - d)$ y $a_0 = -b^{-1}c$.

Demostración.– Los autovalores de A vienen dados por $\mathrm{Sdet}(A - \lambda I) = 0$. En este caso, si λ es un autovalor por la izquierda de A, $\lambda \neq a, d$. Entonces, utilizando las propiedades de Sdet podemos transformar la matriz $A - \lambda I$ de manera que

$$\mathrm{Sdet}(A - \lambda I) = \mathrm{Sdet} \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ 0 & (d - \lambda) - c(a - \lambda)^{-1} b \end{pmatrix}.$$

Esta matriz será no inversible si y sólo si

$$(d - \lambda) - c(a - \lambda)^{-1} b = 0$$

es decir,

$$(d - \lambda) b^{-1} (a - \lambda) = c.$$

Si ahora hacemos el cambio $p = b^{-1}(\lambda - a)$ nos da el polinomio cuadrático unilateral que buscábamos

$$-bp^2 + (d - a)p - c = 0.$$

q.e.d.

4.2.1. Clasificación algebraica

El Teorema 4.1.7 de Huang y So caracteriza completamente las matrices de orden 2×2 con infinitos autovalores. La prueba original consiste en ir estudiando qué ocurre en cada caso utilizando las fórmulas que habían obtenido en [16] para resolver ecuaciones del tipo (4.2). En particular probaron que, en el caso de que haya infinitos autovalores, éstos vienen dados por la expresión $(a + d + b\xi)/2$, donde ξ es un cuaternio sin parte real, $\xi \in \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$, tal que el cuadrado del módulo es $|\xi|^2 = |\Delta|$ con $\Delta = a_1^2 - 4a_0$.

Es fácil ver que las condiciones del Teorema 4.1.7 son suficientes. De hecho, si $a_0 = s$, $a_1 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$, entonces, la definición de autovalor nos da la expresión $\lambda^2 + t\lambda + s = 0$, que, después de hacer el cambio $p = \lambda + t/2$, nos da la ecuación $p^2 = \Delta/4 < 0$ que tiene infinitas soluciones del tipo

$$p = (\sqrt{-\Delta}/2)\omega, \quad \omega \in \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle, |\omega| = 1.$$

En cuanto a la necesidad de las condiciones daremos una prueba alternativa. La construimos basándonos en un método elegante para resolver ecuaciones, propuesto por De Leo et al en [8], como mejora de un algoritmo previo de Serôdio et al. [24]. Veamos explícitamente en qué consiste este algoritmo.

Algoritmo de De Leo

Sea

$$M = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la *matriz compañera* de la ecuación (4.2). Entonces

$$M \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 p - a_0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} p,$$

lo cual nos muestra que, si queremos encontrar soluciones de (4.2) debemos buscar autovalores *por la derecha* p de M correspondientes a autovectores de la forma $(p, 1)$. Siguiendo a [8] llamaremos a p autovalor por la derecha *especial*.

Luego, para resolver la Ecuación (4.2) necesitamos, en primer lugar, encontrar los autovalores por la derecha de la matriz compañera M. Según la proposición 1.3.3, éstos se corresponden con la clase de similitud de los autovalores de su forma compleja 4×4, $c(M)$, y se pueden calcular resolviendo la ecuación característica

$\det(c(M) - qI) = 0$. Como ya habíamos visto, debido a la forma de $c(M)$ sus autovalores aparecen en pares $q_1, \overline{q_1}, q_2, \overline{q_2}$ [30].

Autovectores por la derecha. Para calcular los autovectores, consideremos el $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$(z', z) \in \mathbb{C}^2 \mapsto z' + jz \in \mathbb{H}. \tag{4.3}$$

Proposición 4.2.2 *$(u', u, v', v) \in \mathbb{C}^4$ es un λ-autovector de la forma compleja $c(M)$ si y sólo si $(u' + \mathbf{j}v', u + \mathbf{j}v)$ es λ-autovector de M.*

Soluciones de la ecuación. Pasemos entonces a calcular las soluciones de (4.2). Una vez que hayamos encontrado un autovalor complejo q de la matriz compañera M y algún q-autovector (u', u) observamos que, debido a la forma específica de M, $u' = uq$. Por tanto, por la Proposición 1.3.2, el vector

$$\begin{pmatrix} u' \\ u \end{pmatrix} u^{-1} = \begin{pmatrix} uqu^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un uqu^{-1}-autovector, esto es $p = uqu^{-1}$ es un autovalor especial de la clase de similitud de $[q]$ y por tanto, es la solución deseada.

Nótese que, por la Proposición 1.3.2, dos autovectores $\mathbb{H}$-linealmente dependientes dan lugar al mismo autovalor especial

Número de autovalores de las matrices 2×2 Estamos ahora en condiciones de discutir el número de soluciones de la ecuación (4.2). Esto es lo que nos dará una nueva prueba del Teorema 4.1.7.

Cada uno de los autovalores q de la forma compleja $c(M) \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tiene asociado un espacio vectorial complejo de autovalores al que denotaremos por $V(q) \subset \mathbb{C}^4$. Sabiendo que sus dimensiones complejas suman 4 podemos ver cuáles son las posibles dimensiones de $V(q_k)$ y $V(\overline{q_k})$, $1 \leq k \leq 2$.

1. Si los cuatro autovalores $q_1, \overline{q_1}, q_2, \overline{q_2}$ son diferentes, entonces cada $V(q_k)$ tiene dimensión 1. Es el caso en el que nos dan dos complejos diferentes y sus conjugados. Los espacios de autovectores $V(q_1), V(q_2)$ son rectas y nos dan dos autovalores especiales p_1 y p_2. Las rectas de sus conjugados nos darán los mismos autovalores especiales, por tanto, M tiene exactamente dos autovalores especiales, es decir, hay exactamente dos soluciones.

2. Si algún autovalor es real, por ejemplo $q_1 \in \mathbb{R}$, entonces el único cuaternio similar vq_1v^{-1} es él mismo y $p_1 = q_1$, independientemente de la dimensión de $V(q_1)$. Entonces habrá una o dos soluciones dependiendo de que $q_1 = q_2$ o no.

3. El único caso en el que pueden aparecer infinitos autovalores especiales es cuando los autovalores son iguales y complejos no reales, $q_1 = q_2 \notin \mathbb{R}$, lo que lleva consigo que $\dim_{\mathbb{C}} V(q_1) = 2 = \dim_{\mathbb{C}} V(\overline{q_1})$.

El caso infinito. Nos fijamos entonces en el tercer caso que es en el único en el que puede haber infinitos, cuando $c(M)$ sólo tiene como autovalores un complejo y su conjugado $q_1, \overline{q_1}$. La siguiente proposición prueba que en este caso tenemos realmente un número infinito de soluciones (nótese que $q_1 \notin \mathbb{R}$).

Proposición 4.2.3 *En el tercer caso todos los cuaternios similares a q_1 son autovalores especiales por la derecha de M.*

Demostración.– Tomemos una $\mathbb{C}$-base $\tilde{u}, \tilde{v}$ del espacio de autovectores $V(q_1) \subset \mathbb{C}^4$ y los correspondientes vectores v, w en $\mathbb{H}^2$ por el ismorfismo (4.3). Como éstos últimos son de la forma (uq, q), se tiene que las segundas coordenadas v_2, w_2 de v y w son $\mathbb{C}$-independientes en $\mathbb{H}$ y por tanto, una $\mathbb{C}$-base. Esto significa que los autovalores especiales $p = uq_1u^{-1}$, donde u es una $\mathbb{C}$-combinación lineal de v_2 y w_2, recorren todos los posibles cuaternios de la clase de similitud de q_1.

q.e.d.

Las condiciones de Huang y So. Queda ahora comprobar que en el caso 3 se verifican las condiciones del Teorema 4.1.7 de Huang y So.

Sea $q_1 = x+iy$, $y \neq 0$, uno de los dos autovalores complejos de $c(M)$ y sea $p \in [q_1]$ cualquier autovalor especial de M. Como $\Re(p) = \Re(q_1)$ y $|p| = |q_1|$, podemos escribir $p = x + |y|\omega$, donde $\omega \in \mathbb{H}_0 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ con $|\omega| = 1$.

Pongamos $a_1 = t + \xi_1$, con $t \in \mathbb{R}$ y $\xi_1 \in \mathbb{H}_0$. Si escribimos la ecuación (4.2) de la forma $a_0 = -(p + a_1)p$ podemos deducir que

$$\Re(a_0) = xt + x^2 - |y|^2 + |y|\Re(\xi_1\omega).$$

Por tanto, $|y|\langle \xi_1, \omega \rangle$ no depende de ω. Como $y \neq 0$, el siguiente Lema 4.2.4 afirma que $\xi_1 = 0$, i.e. $a_1 \in \mathbb{R}$.

Lema 4.2.4 *Sea $\xi \in \mathbb{H}_0$ verificando que para cualquier par de vectores $\omega, \omega' \in \Omega$, se anula el producto $\langle \xi, \omega - \omega' \rangle = 0$. Entonces $\xi = 0$.*

Demostración.– Sea $\xi = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \neq 0$. Podemos suponer que $x \neq 0$ (los otros casos son análogos). Tomemos cualquier $\omega \in \Omega$ ortogonal a ξ y $\omega' = \mathbf{i}$. Entonces $\langle \xi, \omega - \omega' \rangle = x \neq 0$.

q.e.d.

Una consecuencia de la Proposición 4.2.3 es que $p = q_1$ es un autovalor especial de M, de manera que, por la ecuación (4.2), a_0 es un número complejo. Como $\overline{q_1}$ es también una solución, deducimos que $a_0 = \overline{a_0}$ es un número real. Finalmente, de que $q_1^2 + a_1 q_1 + a_0 = 0$ se sigue que $a_1^2 - 4a_0 < 0$ porque $q_1 \notin \mathbb{R}$.

Esto completa la verificación de las condiciones de Huang y So dadas en el Teorema 4.1.7.

4.3. Autovalores por la izquierda de las matrices simplécticas

Ya hemos visto la clasificación general de las matrices de orden 2 según el número de autovalores. La usamos ahora para caracterizar las matrices de $Sp(2)$ cuyo espectro por la izquierda es infinito. Asimismo, damos la forma explícita de los autovalores de estas matrices. Con esta caracterización probaremos que dados cuatro cuaternios arbitrarios de norma 1 siempre hay alguna matriz de $Sp(2)$ para la cual estos cuaternios son autovalores por la izquierda.

4.3.1. Forma general de las matrices de $Sp(2)$

Consideremos el grupo de Lie 10-dimensional $Sp(2)$ formado por las matrices simplécticas 2×2, es decir, matrices cuaterniónicas A tales que $A^*A = I$. Desde el punto de vista geométrico, estas matrices corresponden a los endomorfismos $\mathbb{H}$-lineales por la derecha de $\mathbb{H}^2$ que conservan el producto hermítico $\langle u, v \rangle = u^*v$. Así, una matriz es simpléctica si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal para este producto hermítico.

Buscamos una expresión general de una matriz simpléctica cualquiera.

Proposición 4.3.1 *Una matriz simpléctica $A \in Sp(2)$ o bien es diagonal o bien es de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta}\gamma \\ \beta & \beta\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma/|\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\gamma| = 1.$$

Demostración.– Por definición, las dos columnas A_1, A_2 de A forman una base ortonormal de $\mathbb{H}^2$ para el producto hermítico. Sea la primera

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{H}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Si $\beta = 0$, A es una matriz diagonal $\operatorname{diag}(\alpha, \delta)$ con $|\alpha| = 1 = |\delta|$.

Si $\beta \neq 0$, consideremos la alicación $\mathbb{H}$-lineal por la derecha $\langle A_1, - \rangle \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$, que es sobre porque $|A_1| = 1$. Entonces su núcleo $K = (A_1)^\perp$ tiene dimensión $\dim_{\mathbb{H}} K = 1$. Claramente, el vector

$$u = \begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \beta\overline{\alpha}\overline{\beta}/|\beta|^2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

con $|u| = 1$, es ortogonal a A_1, de manera que cualquier otro vector en K debe ser un múltiplo cuaterniónico de u. Además, como A_2 tiene norma 1, tenemos

$$A_2 = u\gamma = \begin{pmatrix} -\overline{\beta}\gamma \\ \beta\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma/|\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{H}, \quad |\gamma| = 1.$$

q.e.d.

4.3.2. Matrices simplécticas con infinitos autovalores

Pasamos entonces a aplicar el Teorema 4.1.7 a las matrices simplécticas.

Teorema 4.3.2 *Las únicas matrices simplécticas $A \in Sp(2)$ con infinitos autovalores por la izquierda son de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} q\cos\theta & -q\operatorname{sen}\theta \\ q\operatorname{sen}\theta & q\cos\theta \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{H}, |q| = 1, \quad \theta \in \mathbb{R}, \operatorname{sen}\theta \neq 0.$$

Es decir, A es la matriz correspondiente a la composición $L_q \circ R_\theta$ de una rotación real de ángulo θ, $R_\theta \neq I$, con una traslación por la izquierda L_q por un cuaternio unitario, $|q| = 1$.

Demostración.– Claramente, este tipo de matrices cumplen las condiciones de Huang y So recogidas en el Teorema 4.1.7. Recíprocamente, teniendo en cuenta la forma de estas matrices (Prop. 4.3.1), tenemos que comprobar estas condiciones para

$$\begin{aligned} a &= \alpha, \qquad & b &= -\overline{\beta}\gamma, \\ c &= \beta, \qquad & d &= \beta\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma/|\beta|^2, \end{aligned}$$

con $\beta \neq 0$. Como

$$a_0 = -b^{-1}c = \overline{\gamma}\beta^2/|\beta^2| = s \in \mathbb{R},$$

tenemos que $s = |\gamma| = 1$ (nótese que la condición $a_1 - 4a_0 < 0$ implica $a_0 > 0$). Entonces

$$\gamma = \left(\frac{\beta}{|\beta|}\right)^2.$$

Sustituyendo γ obtenemos $b = -\beta$ y $d = \beta\overline{\alpha}\beta/|\beta|^2$. Por tanto,

$$a_0 = -b^{-1}c = -\beta^{-1}\beta = 1.$$

Si ahora calculamos a_1 queda

$$a_1 = b^{-1}(a-d) = -\beta^{-1}(\alpha - \beta\overline{\alpha}\beta/|\beta|^2) = \frac{-1}{|\beta|^2}(\overline{\beta}\alpha - \overline{\alpha}\beta).$$

De donde $\Re(\alpha_1) = 0$, de modo que la condición $a_1 \in \mathbb{R}$ implica $a_1 = 0$. Luego $\overline{\beta}\alpha$ es igual a su conjugado, $\overline{\alpha}\beta$, *i.e.* es un número real, $\overline{\beta}\alpha = r \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $\beta \neq 0$, se verifica que $0 < |\beta| \leq 1$. Tomamos un ángulo cualquiera θ tal que $|\beta| = \sin\theta, \sin\theta \neq 0$ y definimos $q = \beta/|\beta|$ de manera que $\beta = q\sin\theta$ con $|q| = 1$. Por otro lado, las relaciones $|\alpha| = |\cos\theta|$ y $|r| = |\overline{\beta}||\alpha|$ implican que $r = \pm\sin\theta\cos\theta$. Podemos asumir, cambiando el ángulo si fuera necesario pero sin cambiar $\sin\theta$, que $r = \sin\theta$. Entonces,

$$\alpha = r(\overline{\beta})^{-1} = r\beta/|\beta|^2 = q\cos\theta.$$

Finalmente, como $d = \beta\overline{\alpha}\beta/|\beta|^2 = q\cos\theta$, queda completa la prueba.

q.e.d.

Proposición 4.3.3 *Dada $A = L_q \circ R_\theta \in Sp(2)$ sus autovalores por la izquierda son de la forma*

$$p = q(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\omega)$$

con $\omega \in \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\rangle = \mathbb{H}_0, |\omega| = 1$ y $|q| = 1$.

Demostración.– El polinomio compañero de A es $r^2+1=0$ de manera que sus autovalores p son de la forma $p = q\cos\theta - q\,\mathrm{sen}\,\theta\omega$, donde $\omega \in \mathbb{H}$ es raíz de $r^2+1=0$.

q.e.d.

Corolario 4.3.4 *Un cuaternio $p \in \mathbb{H}$ es autovalor por la izquierda de $A = L_q \circ R_\theta$ si y sólo si $|p| = 1$ y $\Re(\overline{q}p) = \cos\theta$.*

Demostración.– Los autovalores por la izquierda de una matriz simpléctica tienen módulo 1 (ver proposición 4.1.5).

Si p es un autovalor de A, por la proposición 4.3.3 se verifica que

$$\begin{aligned}\Re(\overline{q}p) &= \overline{q}q(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\omega)\\ &= |q|^2(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\omega),\end{aligned}$$

luego

$$\Re(\overline{q}p) = \cos\theta.$$

Recíprocamente, si tenemos que

$$\Re(\overline{q}p) = \cos\theta$$

entonces

$$\overline{q}p = \cos\theta + v, \text{ con } v \in \mathbb{H}_0.$$

Así

$$p = q\overline{q}p = q(\cos\theta + v), \text{ con } v \in \mathbb{H}_0.$$

Como $|p| = 1$ y $|q| = 1$, entonces $|\cos\theta + v| = 1$ donde el primer sumando es real y el segundo está en $\mathbb{H}_0$, de manera que

$$1 = |\cos\theta + v|^2 = |\cos\theta|^2 + |v|^2 = \cos^2\theta + |v|^2,$$

luego

$$|v|^2 = \mathrm{sen}^2\,\theta$$

y por tanto,

$$v = \mathrm{sen}\,\theta\omega, \text{ con } \omega \in \mathbb{H}_0, |\omega| = 1.$$

q.e.d.

Nota.— Por este corolario tenemos entonces que los autovalores por la izquierda de $A = L_q \circ R_\theta$ son todos los p tales que $\overline{q}p$ es similar a $e^{i\theta}$.

Ejemplo 2 Matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$ con $|\omega| = 1, \omega \in \mathbb{H}_0$.

En este caso tenemos $\cos\theta = 0, \sin\theta = -1$ y $\omega = a + jb$ con $a, b \in \mathbb{C}$, a imaginario puro. Sean λ_1, λ_2 dos autovalores por la derecha, entonces:

$$\begin{aligned} \Re(\lambda_1) + \Re(\lambda_2) &= 0 \\ \Re(\lambda_1)\Re(\lambda_2) &= -1 \end{aligned}$$

luego $1 = \Re(\lambda_1) = -\Re(\lambda_2)$ de manera que estas matrices sólo tienen dos autovalores por la derecha y son reales, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Capítulo 5

Funciones características de las matrices cuaterniónicas

Al final del artículo [29] al que nos referíamos al introducir los autovalores por la izquierda, Wood hace notar que

> "en el caso 2×2 de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hay un determinante parcialmente definido $b - ac^{-1}d$ y una función característica parcialmente definida
>
> $$\lambda c^{-1}\lambda - \lambda c^{-1}d - ac^{-1}\lambda - b + [ac^{-1}d] = 0 \tag{5.1}$$
>
> que reduce el problema de los autovalores al teorema fundamental [del álgebra]. Las dificultades empiezan con las matrices 3×3".

Wood dice también que

> "desafortunadamente, parece no haber una función determinante adecuada en el caso cuaterniónico para reducir el problema de los autovalores al teorema fundamental del álgebra."

5.1. Definición

Con estos antecedentes pasamos a introducir la noción de función característica para una matriz cuaterniónica, que generaliza el polinomio característico usual de los casos real y complejo. En particular, sus raíces son los autovalores por la izquierda.

Como veremos, esta definición concuerda de manera natural con la ecuación para orden 2 que da Wood (5.1), así como con el método propuesto por W. So en [25] para calcular los autovalores de matrices de orden 3. Además muestra que, en contra de lo que dice Wood, sí hay una función que permita acometer el estudio de los autovalores.

En el caso 2×2 queda así reducido el problema del cálculo de los autovalores izquierda de este orden al teorema fundamental del álgebra ([29], 1985). Esta función característica nos permitirá probar de un modo geométrico el resultado de Huang y So (Teorema 4.1.7).

Definición 5.1.1 *Una aplicación* $\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *es una* función característica *de la matriz* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ *si, salvo una constante,* $|\mu(\lambda)| = \operatorname{Sdet}(M - \lambda I)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{H}$.

Nótese que λ es un autovalor por la izquierda de M si y sólo si $\mu(\lambda) = 0$.

Nota.– Como ya dijimos, es un hecho conocido que el espectro por la izquierda no es invariante por semejanza. Sin embargo, por la Proposición 2.1.2, si P es una matriz real inversible,

$$\operatorname{Sdet}(M - \lambda I) = \operatorname{Sdet}(PMP^{-1} - \lambda I).$$

Es decir, M y PMP^{-1} tienen las mismas funciones características.

Ejemplo 3 Matrices diagonales y triangulares. Si

$$D = \operatorname{diag}(q_1, \ldots, q_n)$$

entonces

$$\mu(\lambda) = (q_1 - \lambda)\cdots(q_n - \lambda)$$

es una función característica para D. Análogamente para una matriz triangular.

5.2. Una función característica para orden dos

El determinante de Study nos permite dar, para orden 2, una función característica polinómica de grado 2.

El comentario de Wood citado en 5 puede reformularse así:

Teorema 5.2.1 *Toda matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$ *tiene una función característica polinómica* $\mu(\lambda)$.

Si $b = 0$ *viene dada por*

$$\mu(\lambda) = (d - \lambda)(a - \lambda).$$

Si $b \neq 0$,

$$\mu(\lambda) = c - (d - \lambda)b^{-1}(a - \lambda).$$

Demostración.– Si $b = 0$, $A - \lambda I$ es una matriz triangular,

$$\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = |(d - \lambda)(a - \lambda)|.$$

Si $b \neq 0$, por las propiedades de Sdet podemos hacer la siguiente transformación

$$\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c - db^{-1}a & d \end{pmatrix} = |b||c - db^{-1}a|.$$

luego $\mathrm{Sdet}(A - \lambda I) = 0$ equivale a que

$$c - (d - \lambda)b^{-1}(a - \lambda) = 0.$$

q.e.d.

Nota.— Huang [15] da otra ecuación característica para las matrices de orden 2. Separa el caso $c = 0$ y para $c \neq 0$ dice que $\lambda \in \sigma_l(A)$ si y sólo si:

$$(\lambda - a)c^{-1}(\lambda - d) - b = 0.$$

Este polinomio se obtiene también de manera inmediata sumándole $(\lambda - a)c^{-1}f_2$ a la fila f_1 en la matriz $\lambda I - A$. Esta expresión es equivalente a

$$b - (a - \lambda)c^{-1}(d - \lambda) = 0,$$

que es la expresión que da Wood en la Eq. (1) de [29] (hay un error tipográfico en el original).

5.3. Estudio topológico

En [16] Huang y So probaron que una matriz 2×2 puede tener uno, dos o infinitos autovalores. En la sección 4.2.1 propusimos una nueva prueba de ese mismo resultado. Ambos métodos, aparentemente, son difíciles de generalizar para orden $n > 2$.

Frente a estos estudios, ambos de naturaleza algebraica, proponemos aquí una visión más topológica. La idea fundamental consiste en linealizar la función característica 5.2.1 y estudiar su grado topológico. El caso de la matrices 2×2 queda completamente cerrado ya que podemos resolver las ecuaciones cuaterniónicas que obtenemos al linealizar.

5.3.1. Teoría del grado

Veamos a continuación algunos resultados topológicos que necesitamos para nuestro estudio.

El grado topológico (también llamado grado de Brouwer) de una aplicación continua puede definirse utilizando técnicas o bien de topología algebraica [9] o bien del análisis funcional [7]. Nuestra intención es aplicar los siguientes resultados conocidos (ver, por ejemplo, [22, pag 101]).

Definición 5.3.1 *Dada una aplicación diferenciable ente variedades, $\rho : M \to N$ con $\dim M = \dim N$, diremos que $r \in N$ es un* valor regular *de ρ si la diferencial $\rho_{*q} : T_qM \to T_rN$ es de rango máximo para todo $q \in \rho^{-1}(r)$.*

Lema 5.3.2 (de Sard) *El conjunto de valores regulares es denso en N.*

Teorema 5.3.3 *Sea M una variedad orientable conexa y cerrada y $\nu\colon M \to M$ un aplicación diferenciable de grado k. Sea $m \in M$ un valor regular tal que la diferencial $\nu_{*\lambda}$ conserva la orientación para cualquier λ de la fibra $\nu^{-1}(m)$. Entonces, la imagen recíproca $\nu^{-1}(m)$ es un conjunto finito con k elementos.*

En el libro de Eilenberg-Steenrod se puede encontrar una prueba rigurosa del siguiente resultado [11, pags 304–310].

Proposición 5.3.4 *Dos aplicaciones continuas en la esfera $S^n \to S^n$ son homótopas si y sólo si tienen el mismo grado.*

5.3.2. Reglas de derivación

La existencia de una norma multiplicativa $|q| = (q\overline{q})^{1/2}$ en $\mathbb{H}$ garantiza que la prueba usual de la regla de Leibniz sigue pudiendo aplicarse en este contexto. Veamos con detalle cómo obtener las reglas de derivación en el ámbito no conmutativo.

Observemos que, siempre que respetemos el orden, en el caso cuaterniónico se conservan las reglas de derivación del producto y del cociente:

Lema 5.3.5 *Sean $A, B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ diferenciables. Entonces*

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Demostración.–

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[A(t+h)B(t+h) - A(t)B(t)] &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[A(t+h)B(t+h) - A(t)B(t+h) + A(t)B(t+h) - A(t)B(t)] &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(A(t+h) - A(t))B(t+h) + A(t)(B(t+h)) - B(t))] &= \\
A'(t)\lim_{h\to 0}B(t+h) + A(t)B'(t) &= \\
A'(t)B(t) + A(t)B'(t). &
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lema 5.3.6 *Sea $B : \mathbb{R} \longrightarrow GL$, entonces*

$$\frac{d}{dt}B(t)^{-1} = -B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1}.$$

Demostración.–

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B(t)^{-1} &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[B(t+h)^{-1} - B(t)^{-1}] &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[B(t+h)^{-1}B(t)B(t)^{-1} - B(t+h)^{-1}B(t+h)B(t)^{-1}] &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[B(t+h)^{-1}(B(t)B(t)^{-1} - B(t+h)B(t)^{-1})] &= \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[B(t+h)^{-1}(B(t) - B(t+h))B(t)^{-1}] &= \\
\lim_{h\to 0}B(t+h)^{-1}(\frac{B(t) - B(t+h)}{h})B(t)^{-1} &= \\
\lim_{h\to 0}B(t+h)^{-1}[-B'(t)]B(t)^{-1} &= \\
-B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

A partir de estas propiedades podemos establecer una fórmula para la diferencial del producto de aplicaciones cuaterniónicas.

Lema 5.3.7 *Sean $f, g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dos aplicaciones diferenciables. Entonces, la diferencial del producto viene dada por*

$$(fg)_{*\lambda}(X) = f_{*\lambda}(X)g(\lambda) + f(\lambda)g_{*\lambda}(X).$$

5.3.3. Linealización

Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{H}$ como una variedad diferenciable difeomorfa a $\mathbb{R}^4$. Entonces, la diferencial $\rho_{*\lambda}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ en cualquier punto $\lambda \in \mathbb{H}$ puede calcularse con la siguiente fórmula

$$\rho_{*\lambda}(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\rho(\lambda + tX) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\rho(\lambda + tX) - \rho(\lambda)\right).$$

Dada una función característica μ clasificaremos las matrices en función de que 0 sea o no un valor regular para μ. Hacemos la diferencial de μ para calcular su rango.

Proposición 5.3.8 *Para cualquier autovalor izquierda λ de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, la diferencial de su función característica $\mu : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ viene dada por*

$$\mu_{*\lambda}(X) = Xb^{-1}(a - \lambda) + (d - \lambda)b^{-1}X. \tag{5.2}$$

La prueba es una aplicación directa de las reglas de derivación del producto y del inverso en el caso cuaterniónico.

La expresión obtenida es un polinomio cuaterniónico lineal tipo ecuación de Sylvester. Utilizamos algunos resultados conocidos recogidos en la Sección 3.1.1 para calcular el rango de esta aplicación; podemos clasificar los posibles espectros de una matriz 2×2 según los valores que tome este rango. El método es completamente nuevo; la clasificación que damos coincide con la de L. Huang y W. So [16].

5.3.4. El caso 2×2

A continuación desarrollamos con detalle el caso 2×2, interpretando los resultados conocidos desde un punto de vista geométrico. Sea la matriz cuaterniónica de orden dos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

El caso $b = 0$ está completamente cerrado, A es una matriz triangular y sus autovalores son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = c$. Así que, a partir de ahora podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $b \neq 0$ ya que para cualquier matriz real inversible P, $\sigma_l(PAP^{-1}) = \sigma_l(A)$, lo que permite permutar filas y columnas.

Como habíamos visto en la Sección 5.2, calcular el espectro es equivalente a encontrar las raíces de la función característica

$$\mu(\lambda) = c - (d - \lambda)b^{-1}(a - \lambda). \tag{5.3}$$

Nótese que, como veremos a continuación, esta función característica polinómica $\mu\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ se puede extender de manera continua (e incluso diferenciable) a una aplicación $\mu\colon S^4 \to S^4$ en la esfera $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$. Esto se debe a que $\lim |\mu(\lambda)| = \infty$ cuando $|\lambda| \to \infty$.

Para este caso puede reformularse la Proposición 5.3.4 como sigue.

Proposición 5.3.9 *Una aplicación polinómica como μ y la aplicación λ^2 son homótopas en la esfera S^4, por tanto, tienen el mismo grado topológico,* 2.

Demostración.– Probamos que podemos extender la función característica a $\mu : \mathbb{H} \cup \{\infty\} \mapsto \mathbb{H} \cup \{\infty\}$. En efecto,

$$|\mu(\lambda)| \geq |(d-\lambda)b^{-1}(a-\lambda)| - |c|$$

pero

$$|(d-\lambda)b^{-1}(a-\lambda)| = |(d-\lambda)| \cdot |b^{-1}| \cdot |(a-\lambda)|$$

y como a, d son constantes,

$$\begin{aligned} \lim_{|\lambda|\to\infty} |d-\lambda)| &= \infty \\ \lim_{|\lambda|\to\infty} |a-\lambda)| &= \infty \end{aligned}$$

por tanto,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |\mu(\lambda)| = \infty.$$

Veamos ahora que μ es homótopa a $-\lambda^2$. Podemos tomar en $\mathbb{H}$ los caminos $a(t) = at$, $c(t) = ct$ y $d(t) = dt$ que llevan a, c y d en 0 respectivamente. Así,

$$\mu(\lambda) \simeq ct - (dt-\lambda)b^{-1}(at-\lambda),$$

de modo que nos queda sólo el término de mayor grado, $-\lambda b^{-1}\lambda$. Ahora bien, como $\mathbb{H} - \{0\}$ es conexo por caminos, podemos encontrar un camino $\gamma(t)$ de b^{-1} a 1 sin pasar por 0, por tanto, $\mu(\lambda) \simeq -\lambda^2$ y la homotopía conserva el punto del infinito.

q.e.d.

Como consecuencia obtenemos el resultado que queríamos.

Corolario 5.3.10 *Si* 0 *es un valor regular de* μ*, entonces*

$$\mu^{-1}(0) = \sigma_l(A)$$

está formado por dos puntos.

5.3.5. Clasificación

Sea λ un autovalor de A, es decir $\mu(\lambda) = 0$ para la aplicación μ en (5.3). Siguiendo la notación que hemos usado para la ecuación de Sylvester en la Sección 3.1.1 llamaremos $\alpha = (d-\lambda)b^{-1}$ y $\beta = b^{-1}(a-\lambda)$.

Proposición 5.3.11 *Si* $\operatorname{rang}\mu_{*\lambda} = 0$*, entonces* a_0, a_1 *son números reales y* $\Delta = 0$*. Más aún,* $\lambda = (a+d)/2$ *y la matriz tiene un único autovalor*

Demostración.– Sea $\lambda \in \sigma_l(A)$ y supongamos $\operatorname{rang}\mu_{*\lambda}$ es nulo. Por la Proposición 3.1.2, esto se da cuando y sólo cuando

$$\begin{aligned}(d-\lambda)b^{-1} &= s \in \mathbb{R}\\ b^{-1}(a-\lambda) &= -s.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Como λ es autovalor, $c = (d-\lambda)b^{-1}(a-\lambda) = -bs^2$. Además, de (5.4) se deduce que $-2sb = a - d$ y por tanto, $\lambda = \frac{1}{2}(a-d)$ es el único autovalor.

q.e.d.

Lema 5.3.12 *Sean* q_1, q_2 *dos cuaternios similares que no conmutan. Entonces, la ecuación* $\lambda^2 - (q_1+q_2)\lambda + q_1 q_2 = 0$ *tiene una única solución* $\lambda = q_2$*.*

Demostración.– Si $\lambda \neq q_2$ es una solución, de la igualdad $(\lambda - q_2)\lambda = q_1(\lambda - q_2)$ se sigue que λ y q_1 son similares, entonces, $\Re(\lambda) = \Re(q_1) = \Re(q_2)$ y $|\lambda| = |q_1| = |q_2|$. Sustituyendo en la ecuación, se van las partes reales y las normas, así que podemos suponer que q_1, q_2, λ son imaginarios puros unitarios. Esto es, $q_1, q_2, \lambda \in S^2 \subset \mathbb{H}_0$. Por tanto, $\lambda^2 = -1 = q_2^2$, de manera que la ecuación se reduce a $(q_1+q_2)\lambda = (q_1+q_2)q_2$ es decir, $\lambda = q_2$, pero esto es una contradicción.

q.e.d.

Proposición 5.3.13 *Si* $\operatorname{rang}\mu_{*\lambda} = 2$ *pueden ocurrir dos cosas:*

1. *El espectro es esférico tipo (4.1) y todos los autovalores de* A *son de rango* 2*;*
2. *o la matriz* A *sólo tiene un autovalor.*

Demostración.– Usando el difeomorfismo $a + b\sigma_l(A') = \sigma_l(A)$ podemos sustituir A por su "matriz compañera"

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Como el rango es 2, por la Proposición 3.1.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha &= t + \omega_1,\\ \beta &= -t + \omega_2\end{aligned}$$

con $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{H}_0 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$, $|\omega_1| = |\beta\omega_2 \neq 0$. Entonces

$$a_1 = -2t + \omega_2 - \omega_1.$$

La primera posibilidad es que $\omega_2 = \omega_1$, entonces $a_1 = -2t$. Como los autovalores anulan la función característica, $\mu(\lambda) = 0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= t^2 + |\omega_2|^2 \neq 0, \\ \Delta &= -4|\omega_2|^2 < 0. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos el caso esférico (4.1). En particular,

$$2\lambda = -a_1 + q$$

con $q = -2\omega_2$. Los otros autovalores son de la forma

$$(-a_1 + q)/2$$

con $q^2 = -4|\omega_2|^2$, entonces la diferencial de μ verifica que

$$\begin{aligned} \alpha &= t - q^{-1}/2 \text{ y} \\ \beta &= -t - q/2 \end{aligned}$$

de modo que todos los demás autovalores también tienen rango 2.

La segunda posibilidad es que $\omega_2 \neq \omega_1$. Entonces

$$\begin{aligned} a_1 &= -2t + \omega_2 - \omega_1, \\ a_0 &= (t + \omega_1)(t - \omega_2) \end{aligned}$$

y el Lema 5.3.12 nos muestra que el único autovalor es $\lambda = t - \omega_2$.

q.e.d.

Proposición 5.3.14 *El rango de la diferencial es máximo,* $\operatorname{rang} \mu_{*\lambda} = 4$*, sii la matriz tiene exactamente dos autovalores.*

Demostración.– Como para un autovalor λ la diferencial es de rango máximo, la matriz A no puede estar en las condiciones de las Proposiciones 5.3.11 o 5.3.13, por lo tanto, todos sus autovalores son de rango máximo.

Entonces, por el teorema de la función inversa, la fibra $\nu^{-1}(0)$ es discreta (de hecho, compacta) y por el Teorema 5.3.3, su cardinal es igual al grado de la aplicación μ , que es 2 (Prop. 5.3.4).

q.e.d.

Nota.– En [19], Janovská y Opfer consideran polinomios cuaterniónicos y muestran que hay varios tipos de ceros según el rango de ciertas matrices reales de orden 4×4, pero su procedimiento no parece tener ningún significado geométrico.

Obsérvese que en el caso particular en el que la matriz sea triangular, es decir, $bc=0$, $\sigma_l(A)=\{a,d\}$. Como

$$\mu_{*\lambda}(x)=x(a-\lambda)+(d-\lambda)x,$$

El rango de la diferencial sólo puede ser 0 ó 4. $\operatorname{rang}(\mu_{*a})=4$ sii $a\neq d$. Luego $\operatorname{rang}(\mu_{*a})=0$ sii $\sigma_l(A)=\{a\}$.

Ejemplo 4 Una matriz con un sólo autovalor para la que la diferencial de la función característica es de rango 2.

Sea $M=\begin{pmatrix}\mathbf{j} & 1\\ \mathbf{k} & \mathbf{i}\end{pmatrix}$. Tomamos como función característica

$$\mu(\lambda)=-\lambda^2+\lambda\mathbf{j}+\mathbf{i}\lambda.$$

La ecuación $\mu(\lambda)=0$ tiene como única raíz $\lambda=0$, es decir, $\sigma_l(M)=\{0\}$. La diferencial es $\mu_{*0}(x)=x\mathbf{j}+\mathbf{i}x$ con matriz asociada

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5 Una matriz con infinitos autovalores.

Sea $M=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & 1\\ -1 & \mathbf{i}\end{pmatrix}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &= \mathbf{i}\lambda+\lambda\mathbf{i}-\lambda^2,\\ \mu_{*\lambda}(x) &= x(\mathbf{i}-\lambda)+(\mathbf{i}-\lambda)x.\end{aligned}$$

En este caso $b^{-1}c=-1$, $b^{-1}(a-d)=0\in\mathbb{R}$ y $\Delta=-4<0$. El conjunto de sus autovalores por la izquierda está formado por una esfera centrada en $\mathbf{i}$ de radio 2.

$$\sigma_l(M)=\{\mathbf{i}+\frac{q}{2}:\Re(q)=0,|q|^2=4\}.$$

Si fijamos $\lambda \in \sigma_l(M)$, $\lambda = \mathbf{i} + \frac{q}{2}$ con $q = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, la matriz real asociada a $\mu_{*\lambda}(x)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -2q_1 & -2q_2 & -2q_3 \\ 2q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2q_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es siempre de rango 2, ya que $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 4$.

Bibliografía

[1] Aslaksen, H. Quaternionic determinants. *Math. Intell.* **18**, No. 3, 57-65 (1996).

[2] Baker, A. Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach. *Linear Algebra Appl.* **286**, No. 1-3, 303-309 (1999).

[3] Brenner, J. L. Matrices of quaternions. *Pac. J. Math.* **1**, No. 3, 329-335 (1951).

[4] Cayley, A. Sur quelques propriétés des déterminants gauches. *J. Reine Angew. Math.* **32**, 119-123 (1846).

[5] Chevalley, C. *Theory of Lie groups I.* Princeton Mathematical Series, Vol. 8. Princeton University Press (1946).

[6] Cohen, N.; De Leo, S. The quaternionic determinant. *Electron. J. Linear Algebra* **7**, 100-111 (2000).

[7] Deimling, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer, Berlin (1985).

[8] De Leo, S., Ducati, G. y Leonardi, V. Zeros of unilateral quaternionic polynomials. *Electron. J. Linear Algebra* **15** 297-313 (2006).

[9] Dieudonné, J. *A history of algebraic and differential topology 1900–1960.* Modern Birkhäuser Classics, Boston (2009).

[10] Eilenberg, S.; Niven, I. The "fundamental theorem of algebra"for quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **50**, No. 4, 246-248 (1944).

[11] Eilenberg, S.; Steenrod, N. *Foundations of algebraic topology.* Princeton (1952).

[12] Farenick, D. R.; Pidkowich, B. A. F. The spectral theorem in quaternions. *Lin. Alg. Appl.* **371**, 75-102 (2003).

[13] Gelfand, I.; Gelfand, S.; Retakh, V.; Lee Wilson, R. Quasideterminants. *Advances in Mathematics* **193**, 56-141 (2005).

[14] Gelfand, I.M.; Retakh, V.S. A Theory of Noncommutative Determinants and Chracterisitic Functions of Graphs *Funct. Anal. Appl* **26**, No. 4, 1-20 (1992).

[15] Huang, L. On two questions about quaternion matrices. *Linear Algebra Appl.* **318**, No.1-3, 79-86 (2000).

[16] Huang, L.; So, W. On left eigenvalues of a quaternionic matrix. *Linear Algebra Appl.* **323**, No.1-3, 105-116 (2001).

[17] Huang, L.; So, W. Quadratic formulas for quaternions. *Appl. Math. Lett.* **15**, 5, 533-540 (2002).

[18] Janovská, D.; Opfer, G. Linear equations in quaternionic variables. *Mitt. Math. Ges. Hamb.*, **27** 223-234 (2008).

[19] Janovská, D.; Opfer, G. The classification and the computation of the zeros of quaternionic, two-sided polynomials. *Numer. Math.*, **115**, No. 1, 81-100 (2010).

[20] Johnson, R.E. On the equation $\chi\alpha = \gamma\chi + \beta$ over an algebraic division ring. *Bull. Amer. Math. Soc.* **50**, No. 4, pp. 202-207 (1944).

[21] Kyrchei, I. I. Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules. *Linear and Multilinear Algebra* **59**, No. 4 , 413-431 (2011).

[22] Madsen, I.; Tornehave, J. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* Cambridge University Press (1997).

[23] Niven, I. Equations in quaternions. *The American Mathematical Monthly* **48**, No. 10, 654-661 (1941).

[24] Serôdio, R., Pereira, E. y Vitória, J. Computing the zeros of quaternion polynomials. *Comput. Math. Appl.* **42**, No. 8–9, 1229-1237 (2001).

[25] So, W. Quaternionic left eigenvalue problem. *Southeast Asian Bull. Math.* **29**, No. 3, 555-565 (2005).

[26] Suzuki, T. Noncommutative spectral decomposition with quasideterminant. *Advances in Mathematics* **217**, 2141-2158 (2008).

[27] R. L. Wilson and V. Retakh. Advanced course on Quasideterminants and Universal Localization *Quaderns* **41**, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona (2007).

[28] Wiegmann, N.A. Some theorems on matrices with real quaternion elements, *Canad. J. Math.* **7**, 191-201 (1955).

[29] Wood, R.M.W. Quaternionic eigenvalues. *Bull. Lond. Math. Soc.* **17**, 137-138 (1985).

[30] Zhang, F. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra Appl.* **251**, 21-57 (1997).

[31] Zhang, F. Geršgorin type theorems for quaternionic matrices. *Linear Algebra Appl.* **424**, No. 1, 139-153 (2007).