

SANDRA SAMBADE NIETO

**MATEMÁTICAS E ARQUITECTURA:
FORMA E FUNCIÓN**

130c

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SANDRA SAMBADE NIETO

**MATEMÁTICAS E ARQUITECTURA:
FORMA E FUNCIÓN**

130c

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Matemáticas e Arquitectura: forma e función

Sandra Sambade Nieto

Xullo 2011

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Á idea construída.

Agradecementos

É a primeira vez que son a protagonista deste solemne acto que son os agradecementos. Non sei moi ben como se fai, pero a min aseméllaseme ao momento de recoller un premio. Xa levo practicado dabondo co bote de champú na man fronte ao espello do baño a recollida do Óscar, así que isto non debe ser moi diferente.

En primeiro lugar gustaríame agradecer a axuda prestada polo meu director Carlitos, xa que sen o seu apoio, paciencia, ánimo e axuda cos milleiros de dúbidas que lle formulaba ao día, este traballo non sería o que é. As imaxes de superficies do primeiro capítulo son unha bondadosa aportación súa.

Non quero esquecer aos compoñentes da sala “vip” de Cerceda, que fixeron que erguerse cada día para ir traballar fose unha ilusión, o que me axudou coa tarefa extra do Máster; en especial a Ana, por ter sempre un sorriso e ler os meus borradores, Patricia, que non deixou de animarme nin un momento e Luís, exemplo de entusiasmo pola docencia.

Aos amigos da alma, que sempre están cando se lles necesita, á Iria, quen mellor me coñece e comprende, Álex, Miguel e Ana.

A Manuel, que me ensinou que as cousas que están normal, están moi ben, e que me abriu as portas ao mundo da Arquitectura, ensinándome a amala.

Á miña familia de tres. Meus pais, aos que nunca rematarei de agradecer a educación que nos regalaron, dentro e fóra da casa e que sempre apoiaron as distintas aventuras que emprendín: un cambio de país, o comezo doutra carreira, ou agora o Máster. Que sería dos meus estudos sen a comida de miña nai! E Nuri, a miña outra metade, que sempre está, mesmo sen estar.

A Chus, que me axudou coas imaxes en cad do traballo e que me apoiou dende o principio como ninguén. Aínda nos quedan arestas suficientes para limar.

Índice xeral

Introdución	9
1. Curvas e superficies	11
1.1. Curvas regulares	11
1.2. Superficies regulares	14
1.2.1. Superficies regradas	17
2. Estados tensionais	21
2.1. Tracción simple	21
2.2. Compresión simple	24
2.2.1. Pandeo	25
2.3. Corte simple	28
2.3.1. Torsión	30
2.4. Flexión pura	31
2.5. Equilibrio mecánico	33
3. Forma e función	35
3.1. Cables	37
3.1.1. Catenaria	42
3.1.2. Parábola	45
3.2. Estruturas resistentes pola forma	48
3.3. Esfera	48
3.4. Cilindro	53
3.5. Hiperboloide dunha folla	56
3.6. Estruturas tesas	59
3.7. Superficies compostas	64

4. Arquitectos e obras singulares	67
4.1. Eduardo Torroja	67
4.2. Obras singulares	72
4.2.1. Eladio Dieste	72
4.2.2. Félix Candela	74
4.2.3. Antoni Gaudí	76
4.2.4. Outros arquitectos	78
Bibliografía	83

Introdución

Podemos afirmar que foi a escola da Bauhaus unha das bases do movemento arquitectónico contemporáneo. Esta escola de deseño, arte e arquitectura, fundada en 1919 polo arquitecto Walter Gropius en Weimer (Alemania) contribuíu notablemente a formular os postulados da arquitectura contemporánea. Máis que unha escola de arquitectura, deseño e artesanía, a Bauhaus foi unha forma de entender o mundo, buscando unha nova unidade entre arte e tecnoloxía e sentando as bases normativas e patróns do que hoxe coñecemos como deseño industrial e gráfico.

Un dos principios establecidos pola Bauhaus dende a súa fundación foi o coñecido como as tres F's da Bauhaus: “Form Follows Function” (“A forma segue á función”). A interpretación máis extendida desta frase entende que a forma dun edificio ou obxecto debería estar baseada primordialmente na súa función ou finalidade. E a esa interpretación nos referimos cando damos título ao presente traballo.

É ben certo que foi o uso de novos materiais como o aceiro e o formigón armado, así como a aplicación das tecnoloxías asociadas, o feito determinante que cambiou para sempre a forma de proxectar e construír os edificios ou os espazos para a vida e a actividade humana. Pero non é menos certo que o proveito que arquitectos e enxeñeiros tiraron destes novos materiais non foi nin moito menos semellante. Coa axuda das posibilidades que os materiais ofrecían, e facendo uso dun aparato matemático ás veces nada sinxelo, grandes arquitectos e enxeñeiros foron quen de atopar solucións racionais e innovadoras aos diversos problemas construtivos que atoparon.

Para comprender o funcionamento das solucións dadas é necesario entender como funcionan estruturas e materiais, formas e forzas. O primeiro capítulo do presente traballo recorda os conceptos básicos da xeometría das “formas”, curvas e superficies, mentres que o segundo incidirá sobre o funcionamento das “forzas”, estados tensionais, sobre os materiais. Será no terceiro capítulo onde analizaremos como a **forma** das distintas curvas e superficies determina a súa **función** como estrutura ou parte dunha estrutura.

Finalmente, dedicarase o cuarto capítulo a analizar obras nas que, utilizando os novos materiais e coñecementos técnicos con increíble destreza, arquitectos e enxeñeiros deron solucións de grande beleza e racionalidade.

Probablemente, a seguinte introdución que fai Eduardo Torroja ao seu libro “Razón y Ser de los tipos estructurales”, explica á perfección a idea que tratan de desenvolver as páxinas seguintes.

“Cada material tiene una personalidad específica distinta, y cada forma impone un diferente fenómeno tensional. La solución natural de un problema –arte sin artificio–, óptima frente al conjunto de impuestos previos que la originaron, impresiona con su mensaje, satisfaciendo, al mismo tiempo, las exigencias del técnico y del artista.

El nacimiento de un conjunto estructural, resultado de un proceso creador, fusión de técnica con arte, de ingenio con estudio, de imaginación con sensibilidad, escapa del puro dominio de la lógica para entrar en las secretas fronteras de la inspiración.

Antes y por encima de todo cálculo está la idea, moldeadora del material en forma resistente, para cumplir su misión.

A esa idea va dedicado este libro.”

E eu digo:

A esa idea vai dedicado este traballo.

Capítulo 1

Curvas e superficies

“As matemáticas son para o enxeñeiro e o científico, unha ferramenta, para o matemático profesional, unha relixión, para unha persoa calquera, un ladrillo.”

J.E. Gordon

Estructuras o por qué las cosas no se caen

Neste capítulo recordamos brevemente os conceptos fundamentais da xeometría diferencial de curvas e superficies, fundamentalmente co obxectivo de fixar orientación e introducir os conceptos necesarios. Para máis detalles pódese consultar calquera referencia estándar sobre curvas e superficies. Neste capítulo seguiremos fundamentalmente [2].

1.1. Curvas regulares

Unha aplicación diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa dende o punto de vista físico a traxectoria dunha partícula movéndose no espazo. Neste traballo cando consideremos curvas planas (é dicir, curvas en \mathbb{R}^2) asumiremos que están contidas en \mathbb{R}^3 sen máis que asumir que a compoñente z da curva é idénticamente nula. Aquí I denota un intervalo da recta real, e por diferenciable entenderemos, de feito, que a aplicación é infinitamente diferenciable. Desde o punto de vista da xeometría non interesa tanto a parametrización da curva como a súa traza. É dicir, non estamos interesados na cinemática, ou velocidade coa que a partícula percorre a curva, se non máis ben no debuxo que esta describe no plano ou no espazo. Ademais, para evitarmos singularidades esixiremos que a curva non teña puntos onde a derivada se anule, xa que nestes puntos a traxectoria da partícula podería cambiar subitamente de dirección.

Chamamos por tanto curva parametrizada regular, ou simplemente, *curva regular*, a unha aplicación diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Dado que a parametrización, como dicíamos, non é importante, reparametrizaremos a curva de tal xeito que esta se percorra con velocidade constante. Esta é unha propiedade particular das curvas que por exemplo non se pode xeneralizar a superficies. Dado $t_0 \in I$ definimos a aplicación

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Por ser a curva regular obtemos inmediatamente que $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ para todo t , e en consecuencia s define un difeomorfismo entre dous intervalos de números reais, poñamos $s: I \rightarrow J$. Se denotamos, abusando lixeiramente da notación, a súa inversa como $t(s)$, podemos reparametrizar α como $\tilde{\alpha}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \tilde{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$. Habitualmente, á nova curva $\tilde{\alpha}$ ségueselle denotando por α , de novo abusando lixeiramente da notación. Ao parámetro s chámasele *parámetro de lonxitude de arco*, e á nova reparametrización de α chámasele parametrización por lonxitude de arco. Dise así que con respecto ao parámetro s , α está *parametrizada por lonxitude de arco*. Para distinguir as derivadas con respecto dos parámetros t ou s empregárase unha coma ou un punto respectivamente. Así, por exemplo, α' é a aplicación $\alpha': t \in I \mapsto \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ consistente en derivar a curva orixinal α con respecto de t , mentres que $\dot{\alpha}$ é a aplicación $\dot{\alpha}: s \in J \mapsto \dot{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^3$, consistente en derivar α (ou máis concretamente $\tilde{\alpha}$) con respecto do parámetro lonxitude de arco s .

Defínese o *vector tanxente* de α como $v_1(s) = \dot{\alpha}(s)$. Este vector é unitario pois s percorre α con velocidade 1. En efecto, como $s(t)$ e $t(s)$ son aplicacións inversas temos que $t'(s) = 1/s'(t(s))$, co cal

$$v_1(s) = \dot{\alpha}(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

onde coma sempre estamos facendo o abuso de notación consistente en intercambiar os parámetros s e t .

Xa que o vector v_1 non varía en tamaño, a súa derivada danos unha idea de canto varía a súa dirección, e por tanto de como cambia de dirección a curva infinitesimalmente en cada punto. De feito, defínese a *curvatura* de α como $\kappa(s) = \|\dot{v}_1(s)\|$. Cando esta é non nula, defínese o radio de curvatura no punto $\alpha(s)$ como $R(s) = 1/\kappa(s)$. Dende o punto de vista físico, a forza centrífuga experimentada pola partícula en $\alpha(s)$ sería a mesma cá dunha

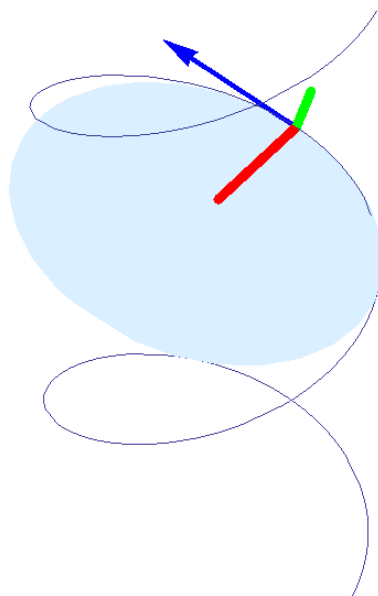


Figura 1.1: A hélice é unha curva que ten curvatura e torsión constante. No debuxo píntase o vector tanxente, o vector normal multiplicado pola curvatura, o vector binormal multiplicado pola torsión, e o círculo osculador.

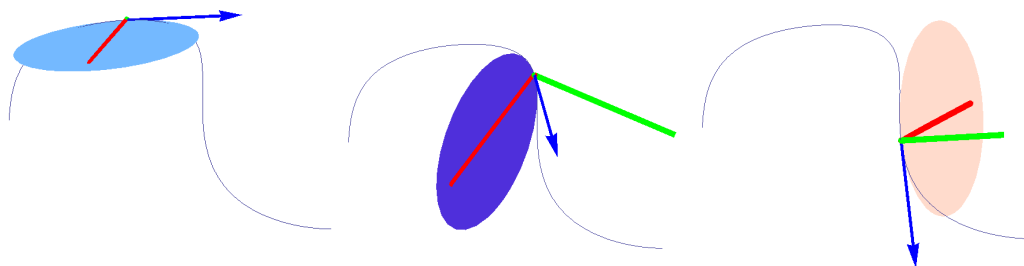


Figura 1.2: No debuxo píntase o vector tanxente, o vector normal multiplicado pola curvatura, o vector binormal multiplicado pola torsión, e o círculo osculador dunha mesma curva en tres puntos distintos. No punto da esquerda a curva esta case contida nun plano, pero despois a torsión comenza a crecer e o plano osculador varía.

partícula movéndose con velocidade 1 arredor dunha circunferencia de radio exactamente igual a $R(s)$.

O *vector normal* de α defínese como $v_2(s) = \dot{v}_1(s)/\kappa(s)$. Evidentemente, v_1 e v_2 son ortogonais, e pola definición de κ , obtemos que v_2 é unitario. O plano xerado por $v_1(s)$ e $v_2(s)$ pasando por $\alpha(s)$ chámase o plano osculador da curva en $\alpha(s)$. Á circunferencia tanxente á curva en $\alpha(s)$ contida no plano osculador e con radio $R(s)$ chámase o *círculo osculador* da curva en $\alpha(s)$. O *vector binormal* $v_3(s) = v_1(s) \times v_2(s)$ é normal a ese plano e xunto co punto $\alpha(s)$ determinan de forma biunívoca. Aquí \times denota o produto vectorial de \mathbb{R}^3 . Defínese a *torsión* de α (salvo o signo) como a variación do plano osculador, ou o que é o mesmo, como $|\tau(s)| = |\dot{v}_3(s)|$. A escolla de orientación da base $\{v_1, v_2, v_3\}$ permítenos dar un signo á torsión que por tanto vén dada por $\tau(s) = \langle \dot{v}_3(s), v_2(s) \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar de \mathbb{R}^3 .

1.2. Superficies regulares

Unha *superficie regular* é un subconxunto S de \mathbb{R}^3 tal que para cada $p \in S$ existe un aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ e unha aplicación $\mathbf{x}: U \rightarrow V \cap S$ definida nun aberto U de \mathbb{R}^2 tal que \mathbf{x} é un homeomorfismo diferenciable con diferencial inxectiva en todo punto. As aplicacións \mathbf{x} así definidas chámase *parametrizacións* e as veciñanzas $V \cap S$ chámase *veciñanzas coordenadas*. Un resultado fundamental da teoría afirma que se $\mathbf{x}: U \rightarrow S$ e $\mathbf{y}: V \rightarrow S$ son dúas parametrizacións, entón $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}: \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)) \rightarrow \mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V))$ é un difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^2 . (Figura 1.3)

Defínese o *plano tanxente* de S en $p \in S$ como $T_p S = d\mathbf{x}_p(\mathbb{R}^2)$. Unha parametrización \mathbf{x} determina unha base deste plano formada polos vectores $\mathbf{x}_1(p) = d\mathbf{x}_p(e_1)$ e $\mathbf{x}_2(p) = d\mathbf{x}_p(e_2)$. Cada plano tanxente está dotado dun produto interior que vén herdado do produto escalar habitual de \mathbb{R}^3 , $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Defínense os coeficientes da *primeira forma fundamental* como as funcións diferenciables $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Algúns autores prefiren denotar $E = g_{11}$, $F = g_{12}$, e $G = g_{22}$ [2]. Entón temos $\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, onde \times denota o produto vectorial de \mathbb{R}^3 .

Unha aplicación entre superficies $f: S_1 \rightarrow S_2$ dise *diferenciable* se para calquera parametrizacións \mathbf{x} de S_1 e \mathbf{y} de S_2 a función $\mathbf{y} \circ f \circ \mathbf{x}^{-1}$ é diferenciable. Con esta definición as parametrizacións resultan ser difeomorfismos (aplicacións bixectivas diferenciables con inversa diferenciable). A aplicación f induce unha aplicación linear $df_p \equiv f_{*p}: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ que con respecto das bases $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$ de $T_p S_1$ e $\{\mathbf{y}_1(f(p)), \mathbf{y}_2(f(p))\}$ de $T_{f(p)} S_2$ ten por

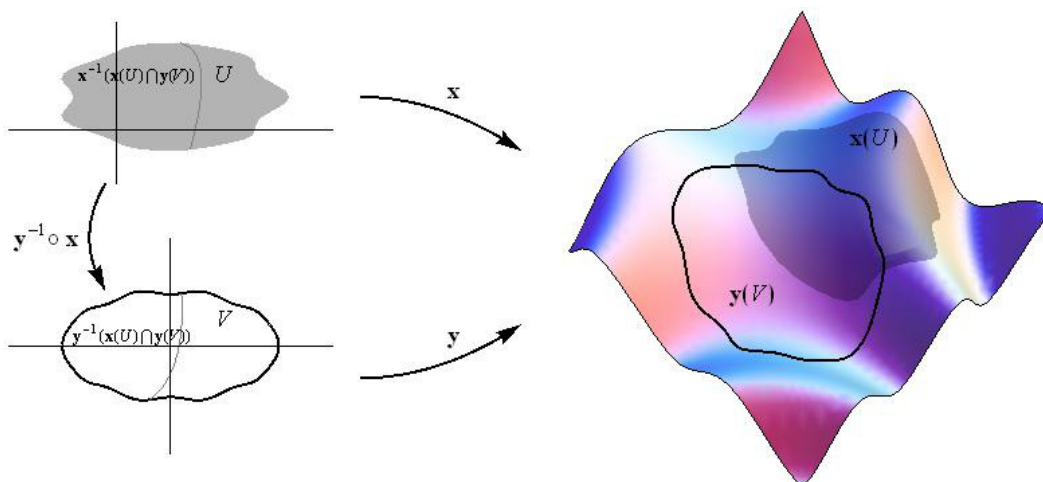


Figura 1.3: Parametrizaci3n e cambios de coordenadas.

matriz a diferencial de $\mathbf{y} \circ f \circ \mathbf{x}^{-1}$. Dita aplicaci3n lineal pode ser entendida do seguinte xeito: se α 3 un curva diferenciable en S_1 e $\alpha'(0) \in T_p S_1$ ent3n $df_p(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0)$.

Un difeomorfismo $f: S_1 \rightarrow S_2$ dise unha *isometr3a* se conserva a primeira forma fundamental. Unha *isometr3a local* 3 unha isometr3a entre d3os abertos de d3as superficies.

A *aplicaci3n de Gauss*, ou vector normal, 3 a aplicaci3n $N \equiv \mathbf{x}_3: \mathbf{x}(U) \rightarrow S^2$, en principio s3 definida nunha veciñanza coordenada, que v3n dado pola f3rmula

$$\mathbf{x}_3(p) = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}(p).$$

O vector \mathbf{x}_3 non 3 m3is que o vector unitario normal ao plano tanxente en p , $T_p S$, con respecto da orientaci3n determinada pola base ordenada do espazo \mathbb{R}^3 , $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p), \mathbf{x}_3(p)\}$.

A aplicaci3n de Gauss 3 diferenciable e a s3a diferencial $(d\mathbf{x}_3)_p: T_p S \rightarrow T_{\mathbf{x}_3(p)} S^2$ 3 linear e autoadxunta (sim3trica): $\langle (d\mathbf{x}_3)_p(v), w \rangle = \langle v, (d\mathbf{x}_3)_p(w) \rangle$. Ch3mase *segunda forma fundamental* 3 forma cuadr3tica asociada 3 matriz sim3trica $II = -d\mathbf{x}_3$. Como esta matriz 3 autoadxunta, 3 diagonalizable con autovalores reais. Ditos autovalores κ_1 e κ_2 ch3manse as *curvaturas principais* e os autovectores correspondentes son os *vectores principais*.

Sexa α unha curva en S . A *curvatura normal* de α 3 $\kappa_n = \kappa \langle v_2, \mathbf{x}_3 \rangle$, onde κ 3 a curvatura de α como curva en \mathbb{R}^3 e v_2 3 o seu vector normal. A curvatura normal de α non depende da orientaci3n de α pero si do sentido do vector

\mathbf{x}_3 . Todas as curvas contidas en S que teñen en p a mesma recta tanxente, teñen nese punto a mesma curvatura normal. Isto é consecuencia da fórmula $\kappa_n(\alpha(t)) = II(\alpha'(t))$. As curvaturas principais κ_1 e κ_2 representan respectivamente os valores máximo e mínimo que poden acadar as curvaturas normais polo punto dado.

A segunda forma fundamental ten dous invariantes alxébricos, a súa traza

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} II = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

chamada *curvatura media*, e o seu determinante

$$K = \det II = \kappa_1 \kappa_2,$$

chamado a *curvatura de Gauss*. A curvatura media depende do xeito particular no que S está contida en \mathbb{R}^3 . Non obstante, a curvatura de Gauss é un invariante intrínseco: non depende de como a superficie está mergullada no espazo euclidiano e por tanto é invariante por isometrías locais (Teorema Egregium de Gauss).

Sexa α unha curva contida en S e parametrizada por lonxitude de arco. Obviamente, o vector tanxente de α é tanxente á superficie, pero a súa aceleración (segunda derivada) ou o seu vector normal non teñen porque seguir sendo tanxentes. A aceleración intrínseca de α é a compoñente tanxente na superficie da segunda derivada da curva con respecto ao parámetro s de lonxitude de arco, é dicir, $\ddot{\alpha}(s) = \dot{\alpha}(s)^\top$, onde $(\cdot)^\top$ denota a proxección no plano tanxente á superficie. Se a curvatura normal na superficie é por así dicilo a compoñente normal da curvatura de α , a compoñente tanxente chámase *curvatura xeodésica* (véxase a Figura 1.4). Esta pode definirse como $\kappa_g(s) = \langle \ddot{\alpha}(s), \mathbf{x}_3(\alpha(s)) \times \dot{\alpha}(s) \rangle$. É doado ver que $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

Un curva α contida en S chámase *xeodésica* se $\ddot{\alpha} = 0$. Se α está parametrizada por arco, isto equivale a que a súa curvatura xeodésica sexa cero. As xeodésicas son obxectos moi importantes dentro dunha superficie. Representan curvas sen aceleración, co cal, en certo modo son as curvas que seguirían as partículas que se moven na superficie en ausencia de forzas tanxenciais (só forzas de ligadura que son normais á superficie e que simplemente forzan á partícula a estar dentro da superficie). Tamén son curvas que minimizan (localmente) a distancia dentro da superficie. Obviamente, se unha curva contida dentro dunha superficie resulta ser unha recta de \mathbb{R}^3 entón será automaticamente unha xeodésica da superficie.

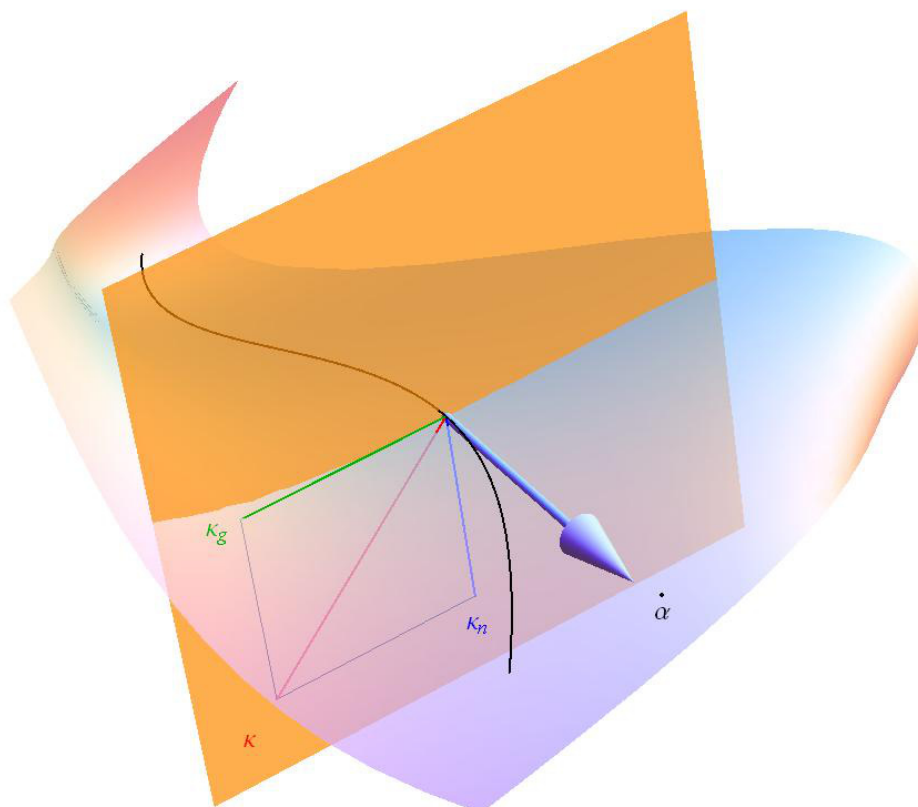


Figura 1.4: A curvatura dunha curva (en vermello), a curvatura xeodésica (en verde), e a curvatura normal (en azul) con respecto á superficie. A curvatura normal pínbase seguindo o vector normal \mathbf{x}_3 e a curvatura xeodésica segue unha dirección tanxente perpendicular ao seu vector tanxente.

1.2.1. Superficies regradas

Un exemplo dunha familia de superficies que aparecerá bastante neste traballo é a das *superficies regradas*. Dicimos que unha superficie S de \mathbb{R}^3 é regradada se para cada punto da superficie existe unha liña recta contida na superficie que pasa por ese punto. A continuación construímos unha parametrización dunha superficie regradada e estudamos algunhas das súas propiedades.

Sexa $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ unha curva regular en \mathbb{R}^3 , que podemos supoñer parametrizada por arco, e $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $v'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos

$$\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + tv(s), \quad \text{con } (s, t) \in I \times \mathbb{R}.$$

A aplicación \mathbf{x} , cando a súa diferencial é inxectiva, é unha parametrización

dunha superficie, que en principio non ten por que ser regular. Non obstante, dado que os cálculos que seguen son de natureza local, obviaremos estes problemas e asumiremos que traballamos nunha veciñanza do punto onde non hai singularidades. É claro que por cada punto $\mathbf{x}(s, t)$ da superficie pasa a recta $\lambda \mapsto \alpha(s) + (t + \lambda)v(s)$.

Un resultado fundamental sobre superficies regradas é que a súa curvatura de Gauss é sempre non positiva, é dicir, $K \leq 0$.

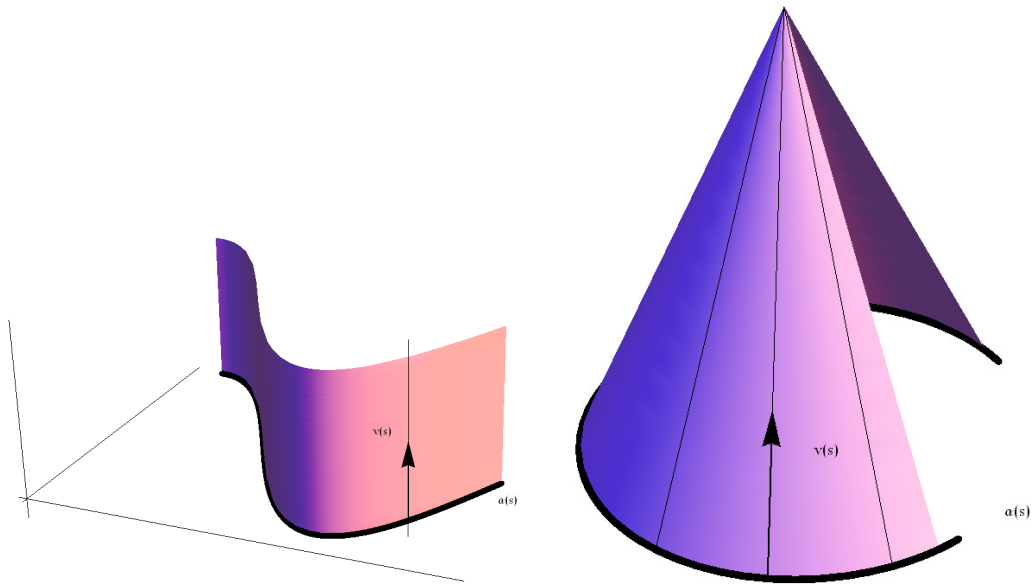


Figura 1.5: Superficies regradas.

Unha superficie dise *desenrolable* se pode ser desenrolada localmente a un plano de xeito isométrico (sen cortar nin estirar). Unha superficie desenrolable de \mathbb{R}^3 é regrada, aínda que o recíproco non é certo. Obviamente, unha superficie desenrolable ten curvatura gaussiana nula. As superficies da Figura 1.5 son desenrolables.

Unha superficie regrada pode ser dobremente regrada, entendendo por isto que a través de cada punto pasa non só unha se non polo menos dúas rectas diferentes contidas na superficie. O paraboloides hiperbólico e o hiperboloides dunha folla son dobremente regrados (Figura 1.6). Se por calquera punto dunha superficie pasasen tres ou máis rectas, a superficie tería que ser un plano.

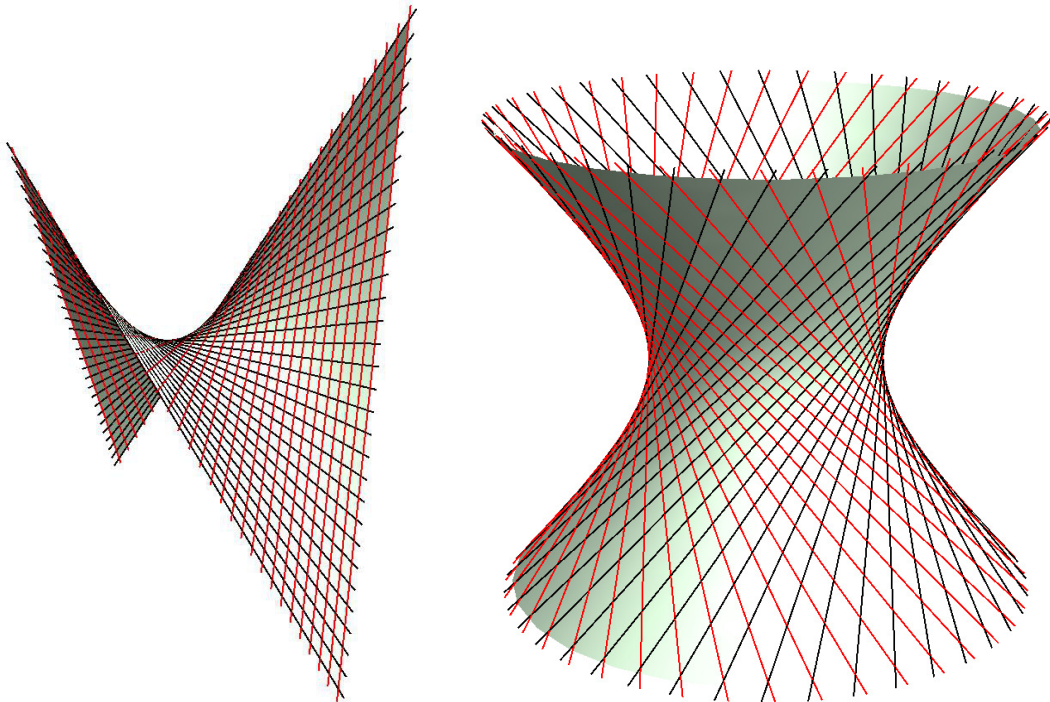


Figura 1.6: O parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide dunha folla vistos como superficies dobremente regradadas.

Capítulo 2

Estados tensionais

“Indeed people even surmised that there must be a law of least action before they know exactly how it went.”

L. Wittgenstein

Tractatus Logico Philosophicus

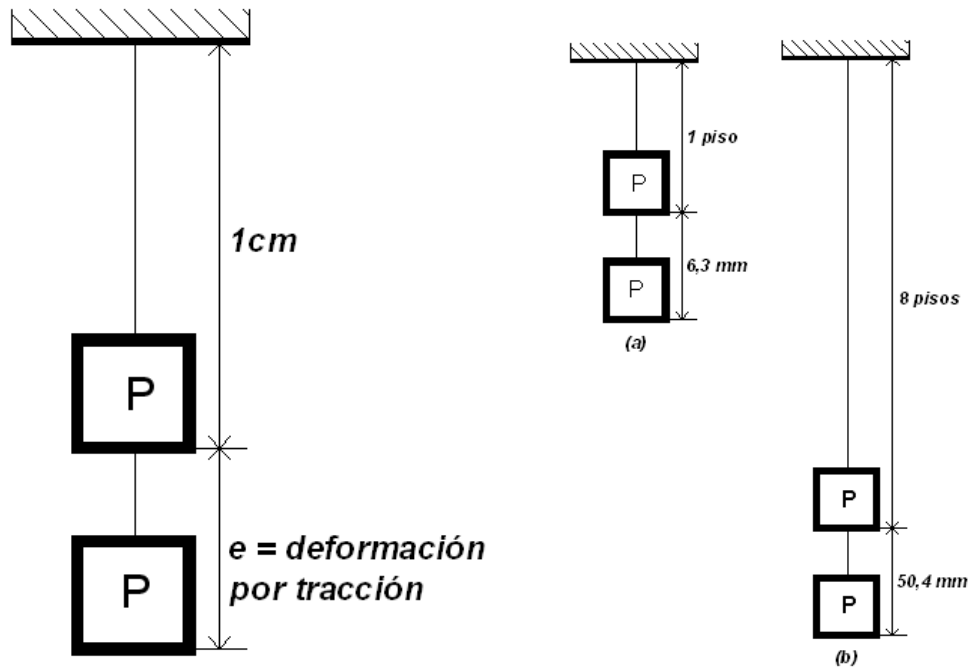
As estruturas defórmanse cando son sometidas á acción de cargas. Aínda que rara vez estas deformacións se poden apreciar a simple vista, as tensións correspondentes teñen valores mesurables. As distribucións de tensións poden ser moi complexas, con todo, cada unha consiste ao sumo en só tres estados básicos de tensión: tracción, compresión e corte. Coñecer o comportamento dos materiais fronte a distintos tipos de forzas é esencial para comprender como funciona unha estrutura. Por outro lado, o comportamento dun material sometido a diferentes tensións será o que nos fará escoller un ou outro dependendo da función que deba cumprir dentro da estrutura. Vexamos con máis detalle en que consiste cada un destes estados tensionais e cales son as súas características. Neste capítulo seguiremos fundamentalmente [11].

2.1. Tracción simple

Tracción é o estado de tensión no cal as partículas do material tenden a separarse. O peso do ascensor tende a separar as partículas do cable de aceiro usado para o ascenso ou descenso daquel. Baixo a acción do peso, os cables alónganse: o alongamento é típico da tracción. O alongamento dunha *lonxitude unitaria* de cable denomínase *alongamento específico por tracción*. (Figura 2.1(a)).

$$e = \text{alongamento específico} = \frac{\Delta L}{L}.$$

Con tal de que as tensións non sobreparen o réxime de elasticidade, o alongamento do cable depende só de tres factores: a súa sección transversal, a súa lonxitude e a magnitude da carga.



(a) Alongamento específico por tracción.

(b) Alongamento por tracción.

Figura 2.1

- Canto maior sexa o diámetro do cable (e polo tanto, a súa sección), tanto menor será o alongamento unitario
- O alongamento é proporcional á lonxitude do cable: se un cable se alonga 6 mm cando o ascensor se atopa no oitavo piso dun edificio de oito pisos, alongarase 48 mm cando se atope no piso baixo. (Figura 2.1(b)).
- O alongamento é proporcional á carga por unidade de área da sección do cable, ou *tensión de tracción* do cable. (Figura 2.2)

$$T = \text{tensión de tracción} = \frac{\text{carga}}{\text{área da sección}} = \frac{P}{A} \quad \left(\frac{MN}{m^2} \right),$$

(en meganewtons por metro cadrado).

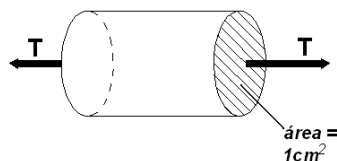


Figura 2.2: Tensión de tracción.

A relación entre a tensión e a deformación por tracción é unha característica do material, denominada *módulo de elasticidade á tracción*.

$$E = \text{módulo de elasticidade} = \frac{\text{tensión}}{\text{alargamento específico}} = \frac{T}{e} \left(\frac{MN}{m^2} \right).$$

O módulo de elasticidade é unha forza teoricamente capaz de estirar un arame cuxa sección ten unha área dun milímetro cadrado, ata unha lonxitude igual ao dobre da orixinal (dende un punto de vista teórico, pois na práctica o arame romperá antes de chegar a ese estiramento). O módulo de elasticidade é chamado tamén *módulo de Young* e debe o seu nome ao científico inglés Thomas Young.

Certos materiais, tales como o formigón, rompen facilmente por tracción; outros, como o aceiro, por exemplo, son máis resistentes. Un cable de aceiro de alta resistencia, de sección igual a un centímetro cadrado pode resistir sen perigo unha carga de 7.000 quilogramos, e romperá só baixo a acción dunha carga de 14.000 quilogramos. Como o peso unitario do aceiro é aproximadamente de 7,5 gramos por centímetro cúbico, este cable podería colgar cunha lonxitude de 8.500 metros sen romper. Un cable de aliaxe de aluminio, con igual resistencia á tracción có aceiro e un peso unitario igual á terceira parte deste material, podería ter unha lonxitude o triple que aquela, é dicir, podería colgar uns 56 quilómetros. Como tería tres veces a lonxitude do cable de aceiro, e como o aluminio se estira tres veces máis có aceiro (o seu módulo de elasticidade é tres veces menor), o cable de aluminio alongaríase nove veces máis có cable de aceiro.

O alargamento non é a única deformación que acompaña á tracción. A medición coidadosa do cable antes e despois de aplicar a carga, pon de manifesto que co *aumento* desta e o alargamento daquel, *diminúe* o diámetro. O físico francés Poisson descubriu este cambio “lateral” de dimensión a principios do século XIX. A relación entre a deformación transversal e lonxitudinal

denomínase *coeficiente de Poisson*. En case todos os materiais de construción como os metais, a pedra e o formigón, o coeficiente sempre se atopa entre $1/3$ e $1/10$.

2.2. Compresión simple

Compresión é o estado de tensión no cal as partículas do material se apertan entre si. Unha columna sobre a cal se apoia un peso atópase sometida a compresión: a súa altura diminúe por efecto da carga. O acurtamento é típico da compresión. O acurtamento dunha unidade de lonxitude, ou *deformación específica por compresión*, é proporcional á carga por unidade de área da columna, ou *tensión de compresión* (Figura 2.3). A relación entre tensión de compresión e deformación por compresión é o *módulo de elasticidade por compresión*. O módulo de elasticidade é unha forza teoricamente capaz de acurtar un arame cuxa sección ten unha área de 1 milímetro cadrado, ata unha lonxitude igual á metade da orixinal (de novo desde un punto de vista teórico, pois na práctica o arame romperá ou *pandeará* antes de chegar a ese acurtamento). As fórmulas dos anteriores conceptos omítense por ser análogas ás dadas na sección anterior para tracción.

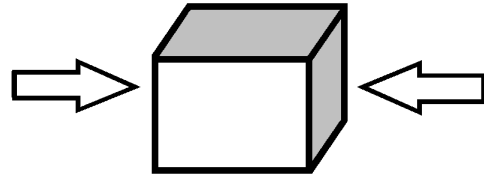


Figura 2.3: Tensión de compresión.

As deformacións provocadas por compresión son de sentido contrario ás producidas por tracción: hai un acurtamento na dirección da carga e un ancheamento perpendicular a esa dirección, debido ao efecto Poisson. Así, teoricamente podería fabricarse unha columna de aceiro, capaz de soportar o seu propio peso, dunha altura de 8,5 quilómetros, e acurtaríase tanto como se alongaría un cable de igual lonxitude.

Os elementos estruturais sometidos a compresión simple son moi comúns, xa que, en última instancia, todas as cargas deben transferirse á terra; aparecen tanto nos modernos edificios de aceiro como nos templos de pedra gregos.

Os materiais incapaces de resistir tracción son a miúdo resistentes á compresión: a pedra, o morteiro, o formigón, poden soportar tensións de compresión moi elevadas. Podería construírse unha columna de mármore cunha altura de 3.000 metros antes de provocar a súa rotura por compresión; analogamente, unha columna de formigón podería acadar unha altura de 600 metros. Os

materiais modernos de elevada resistencia á compresión, tales como o aceiro, poden usarse para construír columnas moito máis delgadas que as de pedra ou formigón, aínda que esa delgadez introducirá un novo tipo de limitación cando se proxecten elementos sometidos a compresión, o *pandeo*.

2.2.1. Pandeo

O pandeo é un fenómeno de inestabilidade elástica que pode darse en elementos comprimidos delgados, e que se manifesta pola aparición de desprazamentos importantes transversais á dirección principal de compresión. Cando a carga de compresión aumenta lentamente, chega a un valor no cal o elemento delgado, en lugar de limitarse a acurtar a súa lonxitude, “pandea” e xeralmente, rompe. Este valor perigoso denomínase *carga de pandeo* do elemento (Figura 2.4). Convírtese nun factor básico do deseño cando a resistencia dos materiais á compresión é suficientemente elevada para permitir o uso de seccións pequenas e, polo tanto, de elementos estruturais delgados.

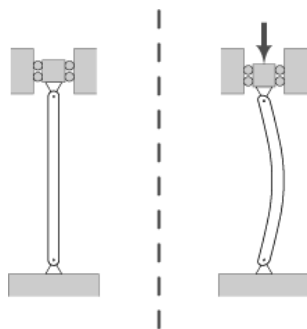


Figura 2.4: Carga de pandeo.

O fenómeno de pandeo pode apreciarse dende outro punto de vista. Unha columna delgada acúrtase ao ser comprimida por un peso aplicado na parte superior; ao comprimirse, a posición do peso desprázase cara abaixo. A tendencia de todos os pesos a desprazarse cara abaixo é unha lei básica da natureza. Segundo outra lei básica da natureza, cando é posible elixir entre varias traxectorias, todo fenómeno físico seguirá o camiño “máis doado”. Fronte á posibilidade de curvarse ou acurtarse, á columna resúltalle máis sinxelo acurtarse ante cargas relativamente pequenas e curvarse ante cargas relativamente grandes. Noutras palabras, cando a carga acada o seu valor de pandeo, á columna resúltalle máis sinxelo baixar o punto de aplicación da carga curvándose que acurtándose.

Dende o punto de vista teórico, a columna curvarase aínda cando sexa perfectamente homoxénea e aínda que a carga se atope perfectamente centrada. Na práctica, toda pequena imperfección no centrado da carga ou toda falla do material, facilitarán o pandeo.

A carga de pandeo dunha columna depende do seu material, a súa lonxitude, a forma da súa sección transversal e as restricións impostas aos seus extremos. A fórmula para o seu cálculo é chamada “fórmula de Euler da carga crítica por pandeo dun soporte” e vén dada por

$$N_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{L^2},$$

onde

N_{CR} = carga para a cal o soporte rompe a pandeo

E = módulo de elasticidade do material

I = momento de inercia da sección transversal do pilar

L = lonxitude do soporte

Resulta curioso que Euler “atopara” esta fórmula cando estaba buscando un problema ao que aplicar o seu “inventu” do cálculo variacional. Parece ser que un amigo lle suxeriu que utilizase este método para calcular a altura que debe ter unha barra delgada para pandear baixo o seu propio peso. Nesta fórmula obsérvase o seguinte:

- A carga de pandeo é proporcional ao módulo de elasticidade do material: unha columna de aceiro ten unha resistencia ao pandeo igual a tres veces o dunha columna idéntica, pero de aluminio.
- A carga de pandeo é inversamente proporcional ao cadrado da lonxitude da columna: unha columna de lonxitude igual a dúas veces a doutra e con idéntica sección, ten unha resistencia ao pandeo igual á cuarta parte da segunda.
- Para ser resistentes ao pandeo e aínda así ser eficientes, os elementos sometidos a compresión non deben ser delgados pero, ao mesmo tempo, deberían empregar unha cantidade limitada de material. Vemos na fórmula que un momento de inercia maior, implicará unha maior carga de pandeo. O perfil dobre T con alma delgada e ás anchas, o perfil caixón e, en xeral, as seccións que presentan a maior parte do material lonxe do centro, son seccións cun momento de inercia alto.(Figura 2.5).



Fig. 3.

(a) Sección dun perfil dobre T.

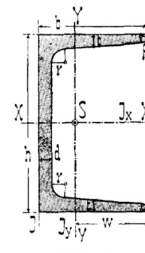


Fig. 7.

(b) Sección dun perfil caixón.

Figura 2.5: Perfís con elevado momento de inercia.

- A carga de pandeo aumenta coas restricións impostas aos extremos do elemento comprimido. (Figura 2.6). A forma que demos da fórmula de Euler supón que o soporte está articulado nos seus dous extremos. Unha columna cun extremo libre pandea como a metade dunha columna de lonxitude igual ao dobre da primeira, apoiada en ambos extremos; por conseguinte, a súa carga de pandeo é igual á cuarta parte da carga correspondente á mesma columna con apoio simple.

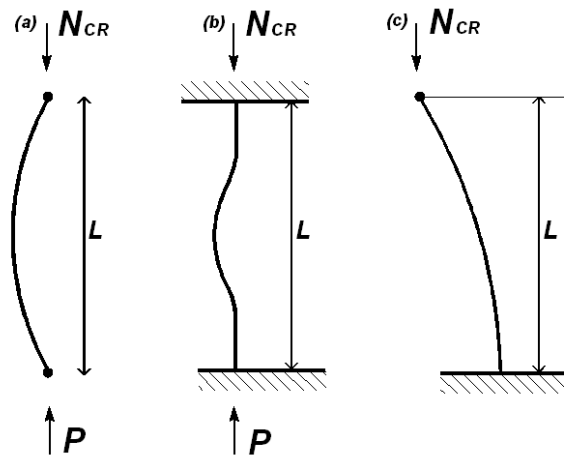


Figura 2.6: Distintas condicións nos extremos. (a) extremos articulados, (b) extremos empotrados, (c) unha articulación. Se algo (un empotramento) impide que o elemento xire nalgún dos seus extremos, a carga crítica crece. No caso de ambos bordos empotrados, a carga crítica multiplícase por catro.

2.3. Corte simple

Corte é o estado de tensión no cal as partículas do material escorregan con movemento relativo entre unhas e outras. En unións remachadas, os remaches tenden a cortarse. Unha perforadora emprega o corte para producir buracos nunha folla de papel. O peso dunha viga en voladizo, empotrada nunha parede, tende a cortar a viga pola súa “raíz”.

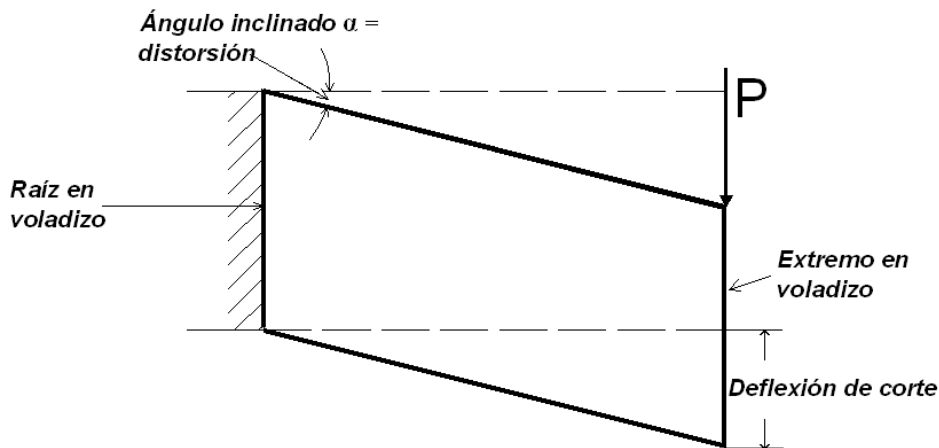


Figura 2.7: Deformación de corte dunha viga en voladizo.

O corte introduce deformacións capaces de cambiar a forma dun elemento rectangular, convertíndoo nun paralelogramo inclinado. A *distorsión* mídese polo ángulo de inclinación do rectángulo deformado e non por unha variación de lonxitude, tal como sucede no caso da tensión ou na compresión. (Figura 2.7).

As forzas que producen esta deformación actúan sobre os planos nos que se produce o escorregamento (Figura 2.8(a)); cando medimos ditas forzas sobre unha unidade de superficie, denomínanse *tensións de corte*. No intervalo de comportamento elástico, a deformación é proporcional á forza e, polo tanto, a distorsión é proporcional á tensión de corte. A relación entre tensión e distorsión denomínase *módulo de elasticidade por corte*. É unha característica do material e o seu valor é aproximadamente a metade do módulo por tracción ou compresión: o aceiro, por exemplo, ten un módulo de elasticidade por corte de 810.000 quilogramos por centímetro cadrado. Igual que pasa coa compresión, as fórmulas dos anteriores conceptos son análogas ás vistas para a tracción, por iso se omiten.

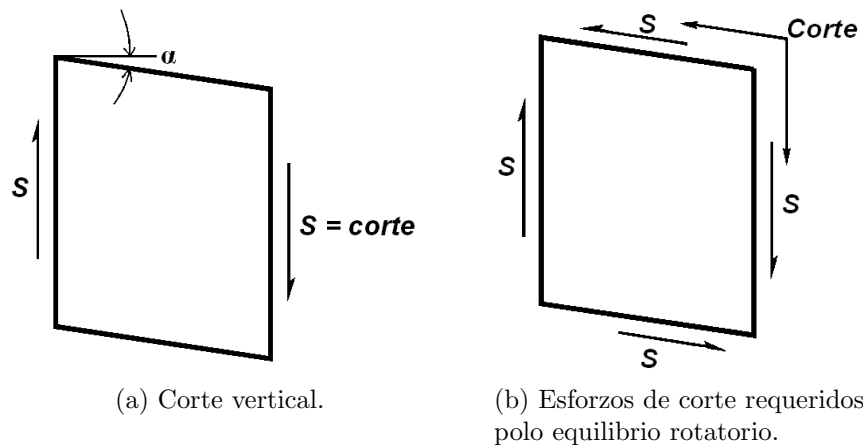


Figura 2.8: Tensións de corte.

Unha característica fundamental do corte é producir escorremento en dous planos, sempre perpendiculares entre si. Se illamos un elemento rectangular pertencente á raíz dunha viga en voladizo, vese que debido á acción do peso propio actúan forzas de corte verticais sobre as súas caras verticais. Estas forzas tenden a facer xirar o rectángulo, pero debido ao equilibrio rotatorio (equilibrio dos momentos xerados polas forzas que actúan sobre o elemento), deben actuar sobre os lados horizontais dos rectángulo dúas forzas de igual magnitude e sentidos contrarios, para contrarrestar a acción de xiro das forzas verticais (Figura 2.8(b)). As forzas horizontais necesarias para manter o equilibrio producen unha tendencia ao corte en planos horizontais. Así pois, o corte en planos verticais implica, necesariamente, corte en planos horizontais e viceversa.

Por outro lado, a inclinación do elemento produce un alongamento nunha das súas diagonais e un acurtamento na outra. Como o alongamento acompaña sempre unha tracción e o acurtamento unha compresión, a mesma deformación podería obterse comprimindo o elemento no plano da diagonal curta e someténdoo a tracción no da diagonal longa. Así o corte pode considerarse como unha combinación de tracción e compresión normais entre si, en direccións que forman 45° coa dirección do corte (Figura 2.9). A consideración do corte como efecto de compresión e tracción reviste grande importancia práctica. Un material de baixa resistencia á tracción non pode ser resistente ao corte, pois romperá por tracción nunha dirección inclinada a 45° respecto da de corte. Analogamente, unha folla delgada non pode ter resistencia ao corte, pois pandeará na dirección do esforzo de compresión equivalente. Se queremos deseñar unha malla de barras de aceiro para a alma dunha viga de formigón arma-

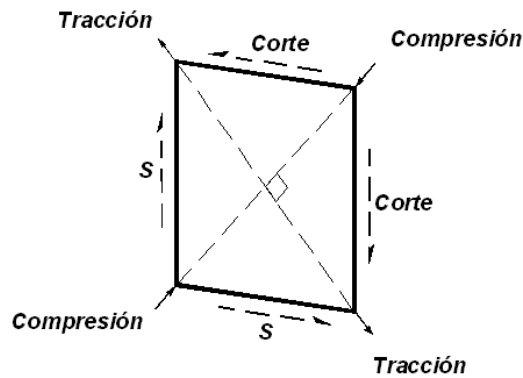


Figura 2.9: Equivalencia entre corte e tracción máis compresión.

do, esta debe ser construída de tal forma que os cordais e os tirantes estean practicamente a 45° coa directriz da viga. (Figura 2.10). Se isto non se fai, o triangulado terá pouca ou ningunha rixidez a cortante e, cando a malla se atope cargada, alabeará e probablemente a viga colapsará.

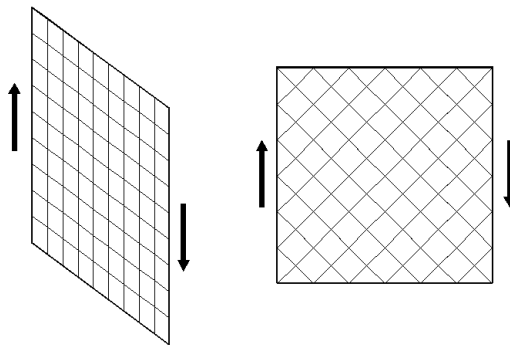


Figura 2.10: Dirección incorrecta e correcta de cordais e tirantes na malla dunha viga.

2.3.1. Torsión

A tendencia ao escorremento, característica do corte, atópase en elementos estruturais retortos por acción das cargas aplicadas. Consideremos unha barra de sección circular sobre cuxa superficie debuxamos unha malla de circunferencias e rectas. Se se torce esta barra de modo que unha das seccións extremas xire con respecto á outra, os cadrados debuxados sobre a súa superficie

transfórmanse en cuadriláteros inclinados (Figura 2.11). Como o mesmo tipo de deformación débese só ao mesmo tipo de esforzo, a torcedura debe producir distorsións e, polo tanto, tensións de corte na sección da barra; para manter o equilibrio, debe producir tamén tensións de corte nos planos perpendiculares á sección. Este estado de tensión, aínda que de corte puro, denomínase *torsión*.

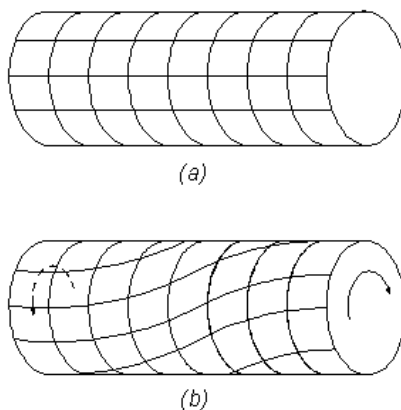


Figura 2.11: Corte na torsión.

Como a torsión desenvolve tensións de corte, debe ser equivalente a tracción e compresión perpendiculares entre si. A persoa que retorxe un trapo mollado, comproba a diario a veracidade desta afirmación: a compresión inducida pola torsión expulsa a auga do trapo.

Producirase torsión nun elemento estrutural cada vez que as cargas aplicadas tendan a torcelo. A rixidez á torsión relaciónase co módulo de corte. As seccións máis eficaces contra a torsión son as ocas, que dan ás tensións de corte o máximo brazo de palanca posible respecto ao eixe da barra.

2.4. Flexión pura

Segundo dixemos ao principio do capítulo, todos os estados complexos de tensión son combinación de só tres estados básicos: tracción, compresión e corte. A compresión e a tracción en distintas fibras do mesmo elemento estrutural é quizais a máis común destas combinacións: denomínase *flexión* e desempeña un papel fundamental na maioría dos sistemas estruturais. Considérese un taboleiro apoiado en dúas pedras, con lonxitudes iguais en voladizo (Figura 2.12(a)). Se dous pesos de igual valor se sitúan en ámbolos extremos

do taboleiro, ditos extremos desprazaranse cara abaixo, mentres que a parte comprendida entre os apoios curvarase cara arriba: a curva adoptada polo taboleiro entre as dúas pedras é un arco de circunferencia. Se trazamos liñas verticais espaciadas sobre o lado de perfil do taboleiro, notamos que ao dobrar o taboleiro estas liñas se abren na parte superior e se agrupan na inferior (Figura 2.12(b)). Pero o taboleiro ten espesor, e *todas* as súas fibras deben curvarse. Polo tanto a flexión induce tracción nas fibras superiores e compresión nas inferiores. Ademais a tracción e a compresión aumentan en proporción directa á distancia das fibras á *fibra neutra*. (Este comportamento, coidadosamente descrito no século XVI por Leonardo Da Vinci, foi redescuberto no século XIX polo físico francés Navier). O estado no cal a fibra neutra varía linearmente dende unha tracción máxima ata unha compresión máxima denomínase *flexión pura*.

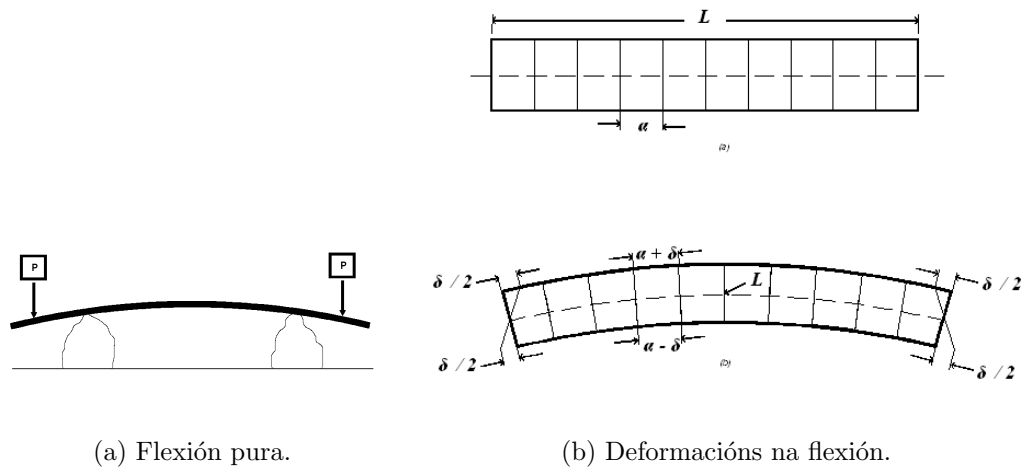


Figura 2.12: Análise da flexión.

As tensións de flexión cúrvanse seguindo un arco de circunferencia do taboleiro deformado, pero esta deformación é tan pequena comparada coa súa lonxitude, que os pesos verticais podemos dicir que case soamente producen tensións horizontais. A flexión pode considerarse como un mecanismo estrutural capaz de canalizar cargas verticais en dirección horizontal ou, dito de forma máis xeral, en dirección perpendicular ás cargas. Os pesos trásmítense horizontalmente ás dúas pedras que serven de apoio ao taboleiro.

En vista da resistencia á compresión da maior parte dos materiais usados en estruturas, é relativamente sinxelo canalizar as cargas *verticalmente* cara a terra. O problema fundamental consiste, en cambio, en transferir cargas

verticais *horizontalmente*, co fin de salvar a distancia entre apoios verticais. A flexión é entón, como vemos, factor de importancia primordial como mecanismo estrutural.

Un bo material de flexión debe ter resistencias practicamente iguais á tracción e á compresión. Isto explica o predominio da madeira entre os materiais estruturais naturais e o papel do aceiro, sen rival nas estruturas modernas. O formigón armado é o único material con propiedades de flexión comparables ás do aceiro. Neste material de factura humana, a resistencia á compresión do formigón úsase nas fibras comprimidas e a resistencia á tracción do aceiro, nas fibras sometidas a tracción. Se o taboleiro ao que nos referíamos máis arriba fose de formigón armado, tería barras de reforzo na parte superior. (Figura 2.13).

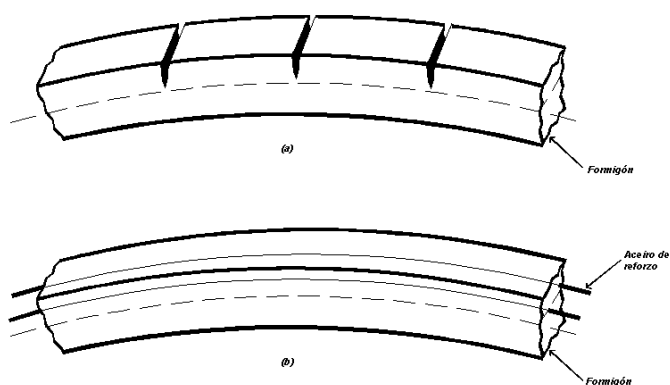


Figura 2.13: Formigón armado sometido a flexión.

2.5. Equilibrio mecánico

A mecánica é a rama da física que estuda e analiza o movemento e repouso dos corpos, e a súa evolución no tempo, baixo a acción de forzas.

Como consecuencia das leis da mecánica, unha partícula *está en equilibrio* se non sofre aceleración linear nin de rotación, pero pode estar movéndose a velocidade uniforme ou rotar a velocidade angular uniforme. Isto é ampliable a un sólido ríxido. As condicións de equilibrio mecánico poden escribirse por medio das seguintes ecuacións:

- Unha partícula ou un sólido ríxido está en equilibrio de traslación cando a suma de todas as forzas que actúan sobre o corpo é cero.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \text{ con } n \text{ dimensión coa que estamos traballando.}$$

- Un sólido ríxido está en equilibrio de rotación, se a suma de momentos sobre o corpo é cero.

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_A^i = 0, \quad \begin{array}{l} \text{con } n \text{ dimensión coa que estamos traballando e} \\ \text{A punto con respecto ao cal se calcula o momento.} \end{array}$$

Un sólido ríxido estará en equilibrio se está en equilibrio de traslación e de rotación.

Cando traballamos con corpos en equilibrio é útil o manexo dos *diagramas de corpo libre* ou *diagramas de sólido libre*. Un diagrama de corpo libre é unha representación gráfica que utilizan a miúdo físicos e enxeñeiros para analizar as forzas que actúan sobre un corpo libre. O diagrama de corpo libre é un caso particular dun diagrama de forzas. Estes diagramas son unha ferramenta para descubrir as forzas descoñecidas que aparecen nas ecuacións do movemento do corpo. O diagrama facilita a identificación das forzas e momentos que deben terse en conta para a resolución dun problema. Tamén se empregan para a análise das forzas internas que actúan nunha estrutura. Este tipo de diagramas serán os que empreguemos en distintas seccións para o cálculo de forzas ou momentos descoñecidos. Como exemplo, amosamos o seguinte, que será utilizado no Capítulo tres.

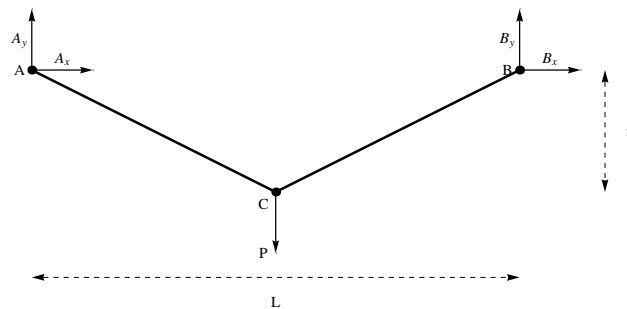


Figura 2.14: Diagrama de sólido libre dun cable sometido á carga dun peso P no seu punto medio e empotrado nos puntos A e B .

Capítulo 3

Forma e función

“La meccanica è il paradiso delle scienze matematiche perchè con quelle si viene ral frutto matematico.”

L. Da Vinci

Pode haber estrutura sen arquitectura, como en calquera máquina, pero non arquitectura sen estrutura. Pode haber estética sen arquitectura, como en calquera pintura, pero non arquitectura sen estética. Pero, existe influencia da estrutura na estética? Deberíamos estar interesados na estética da estrutura? Para responder a esta pregunta, deberemos ignorar a definición de “beleza” dada por estetas ao longo dos séculos e simplemente notar como os canons estéticos foron cambiando. Unha obra de arquitectura considerada nun certo momento como unha obra mestra é frecuentemente degradada despois; ou viceversa, pode pasar do desprezo á fama. Os canons estéticos son dinámicos, nada neles é absoluto. Porén, a humanidade tentou sempre de acadar resultados estéticos, incluso nos máis humildes artefactos, xa que a satisfacción causada polos sentimentos estéticos é unha das necesidades básicas da humanidade. Sobre esta base, non podemos ignorar aqueles aspectos da estrutura que están influenciados por e, á súa vez influencian, a beleza dun edificio.

É sinxelo probar que, esteticamente, se poden deseñar edificios agradables á vista incluso se as normas estruturais son ignoradas total ou parcialmente. Este é o caso do Partenón que, aínda coa súa fermosura divina, traslada ao mármore estruturas típicas da construción en madeira e, dende o punto de vista estrutural é “erróneo”. A madeira é un material resistente a esforzos de tracción, polo que é correcto construír con ela elementos horizontais, que requiren resistencia tanto a tracción como a compresión. A pedra resiste só esforzos de compresión, polo que será posible construír elementos horizontais con ela

só disminuindo a súa lonxitude e apoiándoos en pesados elementos verticais, tales como columnas ou piares. De aquí que os elementos horizontais de pedra sexan inadecuados.

Por outra banda, algúns enxeñeiros predicán que a estética pode ser ignorada porque, se un edificio se deseña correctamente de forma estrutural, a beleza do edificio brillará por mor da exactitude da estrutura. Con todo, os innumerables exemplos de estruturas “correctas” que moitos consideran feas, refutan esta teoría. Enxeñeiros como Nervi ou Maillart teñen deseñado maravillosas estruturas estéticas debido a que o seu innato sentimento pola beleza guiounos incluso máis alá do seu xenio estrutural.

Ademais, considerando a estética dun edificio, un pode distinguir entre eses edificios nos cales a estrutura é relativamente pouco importante e aqueles nos que a estrutura é esencial para a aparencia do edificio. Mentres que unha vivenda unifamiliar pode ser construída de moitas formas, de madeira, aceiro, ladrillo, formigón, etc., a forma e os materiais dunha ponte colgante son case exclusivamente determinados por requerimentos estruturais. Os edificios que se atopan entre estes dous extremos teñen unha compoñente estrutural que está destinada a influír, en graos distintos, na súa aparencia e, polo tanto, influír tamén na resposta estética dos seus usuarios. Pola mesma razón, limitacións debidas á estética, impostas polo deseño do arquitecto ou pola moda, a miúdo influen na solución estrutural adoptada polo enxeñeiro, e será da interacción destas dúas personalidades de diferente formación de onde saia a solución final.

A percepción visual de estruturas na natureza ten sido básica para a nosa comprensión intuitiva das estruturas feitas polo home. As ramas dunha árbore soportando o seu propio peso e o da neve ou vento, suxiren a forma e o comportamento das vigas en voladizo, que teñen a súa maior dimensión na raíz e a parte máis fina na punta. Os troncos das árbores que se dobran polo vento confirman este comportamento, á vez que a forma do tronco nos introduce na acumulación de cargas verticais. Debido a estas intuicións, consideramos unha viga en voladizo cunha sección maior na súa punta que na súa raíz como “horrible”, xa que contradí un comportamento estrutural que temos visto na natureza dende o principio da raza humana. Consideremos a acción de sacar auga dun pozo. Esta actividade, que se remonta ás orixes da civilización, proporciona unha comprensión inmediata das propiedades tensionais das cordas tanto naturais como artificiais. De modo parecido, a rotura dunha rama de árbore contra o noso xeonllo ou a sensación dos nosos músculos cando subimos ou baixamos unha pendente deixan claro que as observacións físicas, así como as reaccións musculares deron á humanidade unha idea da acción estrutural

moito antes da comprensión cuantitativa obtida a través da ciencia.

As experiencias comúns da natureza semellan estar influenciadas pola forma e non polo tamaño, como se amosa na comparación das estruturas tesas coas teas de araña. Debido á eficiencia dos campos de tensión, as estruturas tesas son excepcionalmente lixeiras e, calquera que sexa a súa forma ou tamaño, son consideradas intrigantes e fermosas por unha persoa non erudita. Ademais teñen formas ditadas polas cargas que soportan e implican ao lector da súa mensaxe unha comprensión correcta, aínda que non obvia, das estruturas de flexión.

En resumo, a mensaxe que unha estrutura comunica, está influenciada tanto pola nosa experiencia persoal como pola nosa experiencia cultural dentro da sociedade. A importancia relativa destes dous factores está perfectamente ilustrada polo exemplo da Torre Eiffel de París. Construída polo enxeñeiro francés Gustave Eiffel con motivo da Exposición Universal de 1889, pretendía ser o símbolo da exposición e a estrutura máis elevada do mundo nese momento (e así foi ata que foi superada polo edificio Chrysler en 1930). Pretendíase desarmar ao final da exposición. A campaña en contra da súa construción involucrou a algúns dos máis respectables representantes da cultura francesa, incluíndo famosos escritores, poetas, pintores e políticos que a vían como un “monstro de ferro”. Pero, como ocorre con moitas estruturas desarmables, esta tampouco se desarmou, e pasou co paso do tempo a ser un dos monumentos máis visitados do planeta (o máis visitado no ano 2007) e mesmo a converterse no símbolo de París e incluso de Francia. A mensaxe parte pura e exclusivamente dunha estrutura: a Torre Eiffel é unha obra mestra na que nada se concedeu á decoración e na que nada se usou para ocultar os seus sosténs necesarios. A súa aceptación indica o feito marabilloso de que unha estrutura *pura* poida comunicar unha mensaxe complexa.

No que segue do capítulo veremos como funcionan distintas “formas” (uni e bidimensionais) cando se adaptan a distintas funcións ou funcionamentos.

3.1. Cables

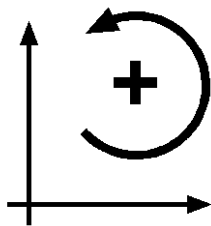
A elevada resistencia á tracción do aceiro, combinada coa eficiencia da tracción simple, fai do cable de aceiro o elemento ideal en estruturas para cubrir grandes distancias. Os cables son flexibles debido ás súas dimensións transversais pequenas, en relación coa lonxitude. Un material é *flexible* se se deforma elasticamente (de forma reversible) ao sometelo a esforzos de flexión ou torsión. A flexibilidade indica unha limitada resistencia á flexión, de feito, no

caso ideal suporemos unha resistencia nula á flexión. Dado que a flexibilidade impide tensións desiguais derivadas da flexión, a carga de tracción divídese por igual entre os fíos do cable, permitindo que cada fío quede sometido á mesma tensión admisible.

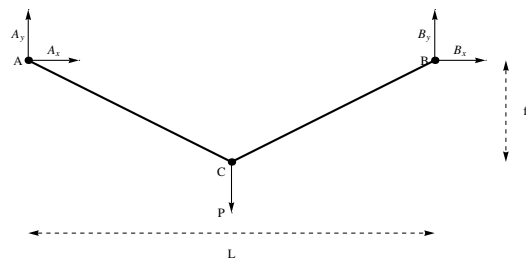
Para comprender o mecanismo polo que un cable sostén cargas verticais, consideramos primeiro un cable estirado entre dous puntos fixos, cunha soa carga aplicada no seu punto medio. A distancia entre os dous puntos fixos dos que pende o cable é coñecida como *luz do cable*. Baixo a acción da carga, o cable adopta unha forma simétrica, triangular e a cada apoio chega a metade da carga, por tracción simple ao longo de ambas metades do cable. (Figura 3.1(b)).

A forma triangular adoptada polo cable caracterízase pola *frecha*, distancia *vertical* entre os soportes e o punto máis baixo do cable. Sen frecha, o cable non podería soste a carga, pois as forzas de tracción serían horizontais e ningunha forza horizontal equilibra cargas verticais. Nos apoios, a tensión oblicua do cable pode descompoñerse en dúas forzas: unha vertical igual á metade da carga e outra horizontal dirixida cara ao outro soporte, ou *empuxe*. Se os apoios non estiveran fixos e asegurados contra desprazamentos horizontais, moveríanse por mor do empuxe e as dúas metades do cable poríanse en posición vertical.

Se probamos a tomar nas mans os extremos dunha corda cun peso fixo no punto medio, poderemos sentir fisicamente que a corda non desenvolve empuxe transversal algún cando unimos as mans e, en cambio, desenvolve un empuxe crecente mentres as separamos, reducindo desa forma a frecha da corda. Se escollemos unha corda o suficientemente débil, ao cabo de certo tempo, a corda rompe; con iso queda sinalado que, ao diminuír a frecha, a tensión chega a sobrepasar a resistencia á tracción da corda. Pode demostrarse que no cable as tensións de tracción son inversamente proporcionais á frecha: se esta diminúe á metade, a tensión do cable duplícase e, en consecuencia, duplícase o empuxe transversal nos soportes.



(a) Criterio de signos



(b) Diagrama do sólido libre

Figura 3.1

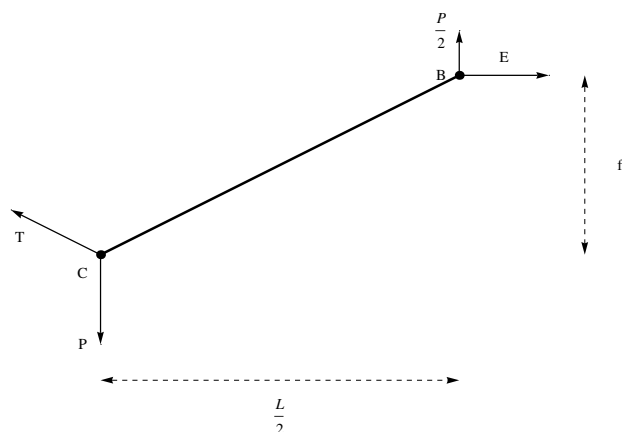


Figura 3.2: Sección do cable por C .

Demostrar isto é sinxelo usando as ecuacións xerais do equilibrio mecánico. Sabemos que un sistema está en equilibrio mecánico cando a resultante da suma de forzas é nula e a resultante da suma de momentos respecto a un punto é tamén cero. Logo basta debuxar o diagrama de sólido libre, colocando todas as forzas que nel interveñen (Figura 3.1(b)), e formular as ecuacións. Para o debuxo do diagrama temos en conta o criterio de signos que aparece na Figura 3.1(a), supoñendo positivas as forzas e os momentos nos sentidos indicados. Tamén suporemos todas as forzas que interveñen no diagrama positivas, (aínda que intuitivamente non nos pareza que teñan os sentidos indicados), cambiando o seu sentido, de ser necesario, unha vez calculadas. Polo tanto,

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_A = 0;$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow A_x = -B_x,$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y + P = 0,$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \frac{L}{2} + B_y L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{P}{2} \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}.$$

Estes resultados proban o anteriormente dito sobre as cargas que soportan os apoios do cable, é dicir, cada un dos apoios soporta unha carga vertical igual á metade da carga que pende do cable, e unha carga horizontal de igual módulo e sentido oposto en cada apoio, que chamaremos empuxe. Queremos comprobar que o empuxe é inversamente proporcional á flecha, para iso facemos a sección do diagrama do sólido libre polo punto C , Figura 3.2, e utilizando que a suma de momentos respecto ao punto C é cero, obtemos:

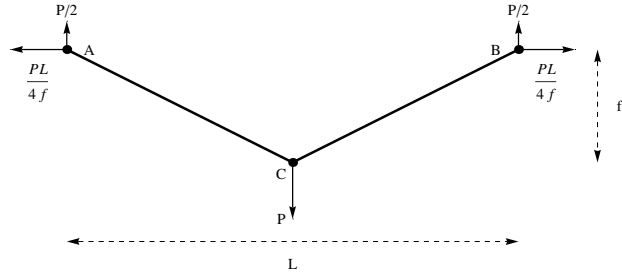


Figura 3.3: Diagrama do sólido libre final.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} \frac{L}{2} - E f = 0 \Rightarrow E = \frac{P L}{4 f}.$$

O problema do cable, que acabamos de considerar, formula unha interesante cuestión de economía. Unha frecha maior aumenta a lonxitude do cable, pero diminúe o esforzo de tracción nel e, polo tanto, permite reducir a súa sección; unha frecha menor diminúe a lonxitude do cable, pero esixe unha sección maior debido á maior tracción nel desenvolva. En consecuencia, o volume total de cable, produto de sección por lonxitude, é grande tanto para frechas moi grandes como para frechas moi pequenas. A “frecha máis económica” ou “frecha óptima” para unha luz dada entre soportes, é igual á metade desa distancia e correspóndese cunha configuración simétrica, cun ángulo de 45° no punto de aplicación da carga, e empuxe a metade desta. Isto tamén é sinxelo de demostrar facendo uso de trigonometría básica. Traballaremos cunha función proporcional ao volume do cable, $V(\alpha)$, entendendo que a sección é proporcional á tensión do cable, e minimizaremos esa función, facendo uso da derivada. O mínimo da función corresponderase cun ángulo entre horizontal e cable de 45° .

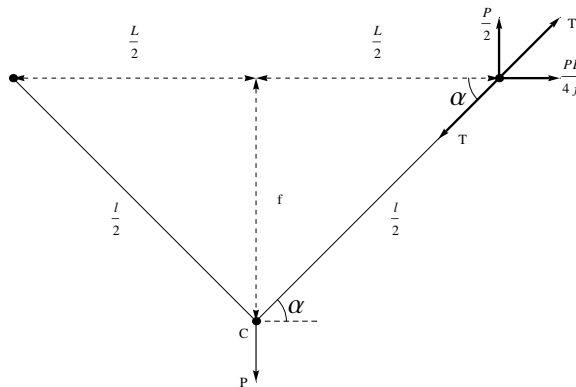


Figura 3.4: Diagrama de sólido libre.

Calculamos a tensión do cable,

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{E^2 + \left(\frac{P}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{PL}{4f}\right)^2 + \left(\frac{P}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{P^2 L^2}{16f^2} + \frac{4P^2 f^2}{16f^2}} = \\ &= \frac{P}{4f} \sqrt{L^2 + 4f^2} = \frac{P}{4f} \sqrt{l^2} = \frac{P}{4f} l = \frac{PL}{4f \cos \alpha} = \frac{PL}{4 \cos \alpha \frac{L \tan \alpha}{2}} = \\ &= \frac{2PL}{4L \cos \alpha \tan \alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha \tan \alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \end{aligned}$$

onde P e L (peso e luz) son as constantes dadas e α é o ángulo que forma o cable coa horizontal (Figura 3.4). Se tal e como supuxemos, a sección do cable é proporcional á tensión, o volume do cable será proporcional a:

$$V(\alpha) = T \cdot l = \frac{P}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{L}{\cos \alpha} = \frac{PL}{2 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Derivamos esta función buscando o punto crítico que fai o volume mínimo:

$$\begin{aligned} V'(\alpha) &= \frac{PL - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \Rightarrow [V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0], \\ \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \cos \alpha. \end{aligned}$$

Como por definición α é positivo e agudo a ecuación anterior só ten como solución: $\alpha = 45^\circ$.

Vimos de ver cal sería a frecha óptima para unha soa carga colocada na metade dun cable, pero se *desprazamos* a carga do punto medio, a forma do cable cambia, e o cable acomódase para transferir a carga por medio de dous tramos rectos de distintas inclinacións. Os dous apoios terán reaccións verticais distintas, pero igual empuxe horizontal, pois o cable debe estar en equilibrio nesa dirección. O valor do empuxe difire do correspondente a unha carga centrada, pero aínda así varía en relación inversa ao da frecha. Isto podemos comprobalo collendo de novo a corda e desprazando a carga ao longo da mesma, mentres se sostén coas dúas mans.

Fixando dúas cargas idénticas en ubicacións simétricas, o cable volve cambiar de forma e soste as cargas tomando unha nova configuración, con tres lados rectos. Se se aumenta o número de cargas, o cable toma novas configuracións de equilibrio con lados rectos entre cargas, e cambios de dirección nos puntos de aplicación destas. Baixo a acción dun conxunto de cargas concentradas, o cable adopta unha posición chamada *polígono funicular* (do vocábulo

latino *funis*: corda, e o grego *gonia*: ángulo); é a forma *natural* necesaria para soportar cargas por *tracción*.

A medida que aumenta o número de cargas, o polígono funicular toma un número crecente de lados máis pequenos e aproxímase a unha curva uniforme. Se se puidera aplicar ao cable un número infinito de cargas infinitamente pequenas, o polígono converteríase nunha *curva funicular*. Así, por exemplo, o polígono funicular correspondente a un gran número de cargas iguais separadas *horizontalmente* a distancias iguais, aproxímase a unha coñecida curva xeométrica, a *parábola*. A frecha óptima para un cable parabólico é unha terceira parte da súa luz.

Se as cargas iguais se distribúen *ao longo do cable*, e non horizontalmente, a curva funicular difire dunha parábola, se ben posúe a mesma configuración xeral: é unha *catenaria*, a forma natural que adopta un cable de sección constante sometido ao seu propio peso, o cal se distribúe de forma uniforme ao longo de toda a súa lonxitude. A frecha óptima dunha catenaria é aproximadamente un tercio da luz; de feito, para esa relación de frecha a luz, a catenaria e a parábola son curvas moi similares.

Estudaremos a parábola e a catenaria cun pouco máis de detalle, calculando as súas ecuacións.

3.1.1. Catenaria

Nesta sección estudaremos a forma dun cable que está en equilibrio sometido soamente á carga da súa propia masa. A curva resultante coñécese como a catenaria. O noso obxectivo é pois deducir explicitamente a súa ecuación. Antes de comezar a tratar o problema cómpre sinalar de antemán cales son as hipóteses que impoñemos dende o punto de vista físico:

1. o cable é inextensible, é dicir, a súa lonxitude é fixa e non se pode estirar nin contraer,
2. está contido nun plano,
3. só admite esforzos de tracción, no resiste esforzos de flexións, nin aguanta compresións,
4. a sección do cable é moi pequena en relación á súa lonxitude.
5. a única forza que actúa no cable é a debida ao seu peso propio, supoñéndose ademais a densidade de masa ao longo de todo el constante.

Como a sección do cable é desprezable, suporemos que dito cable vén dado por unha fórmula do tipo $\alpha(x) = (x, y(x))$, é dicir, a forma do cable suponse que vén dada pola gráfica da función diferenciable $x \mapsto y(x)$. Denotemos por s o parámetro de lonxitude arco de dita curva. Sabemos por tanto que

$$\frac{ds}{dx} = \|\alpha'(x)\| = \sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Así, o vector tanxente unitario á curva vén expresado en termos do parámetro x como

$$v_1(x) = \dot{\alpha}(s) = \frac{(1, y'(x))}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Véxase a Figura 3.5 para ilustrar os cálculos que seguen a continuación. Se o cable ten densidade de masa ρ , que se supón constante, a forza exercida pola gravidade en cada segmento infinitesimal de lonxitude ds será $-g\rho ds\hat{j}$, onde g é a aceleración da gravidade e $\hat{j} = (0, 1)$. Denotemos $q = g\rho$ para simplificar a notación. Por outra banda, sobre dito segmento de cable actuarán dúas tensións, que tiran do cable en direccións tanxentes á súa gráfica, e que denotamos $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{T}(s + ds)$.

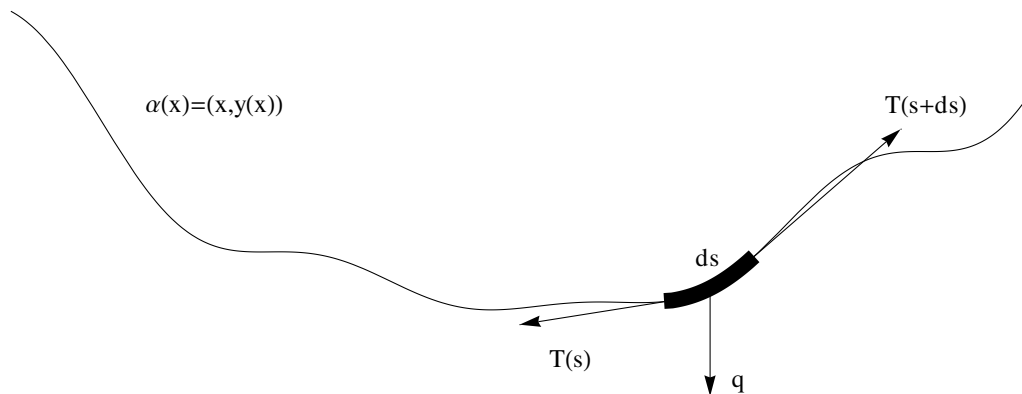


Figura 3.5: Forzas que actúan sobre un elemento infinitesimal de cable de lonxitude ds .

Dado que o cable está en equilibrio, debe cumprirse que

$$\mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s) - q ds \hat{j} = 0.$$

O teorema do valor medio asegúranos que existe $c \in (s, s + ds)$ tal que $\mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s) = \mathbf{T}'(c)ds$. Facendo tender $ds \rightarrow 0$ atopamos que a ecuación anterior

se pode escribir agora como

$$(3.1) \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} - q\hat{j} = 0.$$

Consideramos \mathbf{T} como un vector dependente do parámetro x . Como $\mathbf{T}(x)$ debe de ser tanxente ao cable podemos escribir $\mathbf{T}(x) = T(x)v_1(x)$, onde agora T é un escalar. Deste xeito,

$$0 = \frac{d\mathbf{T}}{ds} - q\hat{j} = \frac{d\mathbf{T}}{dx} \frac{dx}{ds} - q\hat{j} = \left(\frac{dT}{dx}v_1 + T \frac{dv_1}{dx} \right) \frac{dx}{ds} - q\hat{j},$$

co que insertando a expresión para v_1 e $s'(x)$, e facendo algúns cálculos obtemos o sistema de ecuación diferenciais

$$(3.2) \quad T'(x) - T(x) \frac{y'(x)y''(x)}{1 + y'(x)^2} = 0,$$

$$(3.3) \quad T'(x)y'(x) + T(x) \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} - q(1 + y'(x)^2) = 0.$$

A Ecuación (3.2) pode ser escrita como

$$\frac{T'(x)}{T(x)} = \frac{y'(x)y''(x)}{1 + y'(x)^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \log T(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log(1 + y'(x)^2).$$

Integrando ambos lados da igualdade, e expresando T en función de y obtemos

$$(3.4) \quad T(x) = k\sqrt{1 + y'(x)^2}, \quad \text{para certa constante } k > 0.$$

Substituíndo agora (3.4) en (3.3) e simplificando queda

$$ky''(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} - q(1 + y'(x)^2) = 0,$$

ou ben,

$$1 = \frac{ky''(x)}{q\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \frac{k}{q} \frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} y'(x).$$

Integrando temos que $y'(x) = \sinh\left(\frac{q}{k}x + b\right)$, e así o resultado final é

$$(3.5) \quad y(x) = a + \frac{k}{q} \cosh\left(\frac{q}{k}x + b\right).$$

para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Esta curva é a que chamamos a *catenaria*.

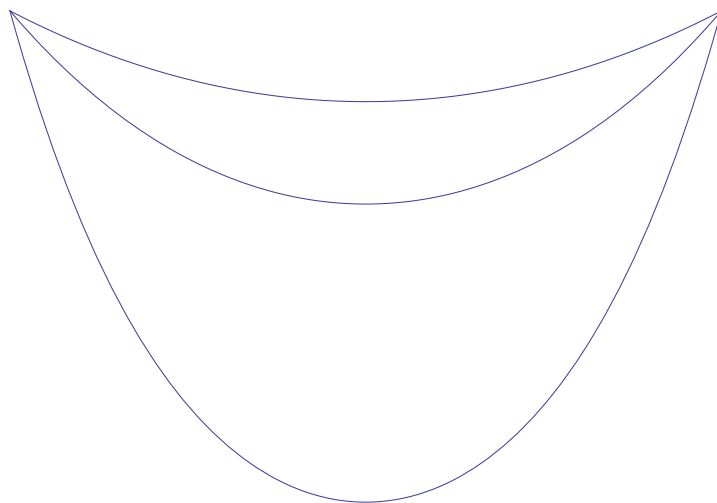


Figura 3.6: Debuxo de tres catenarias ancoradas nos mesmos puntos.

A tensión ao longo da catenaria pode obterse sen máis que substituir (3.5) en (3.4), e empregar a expresión para v_1 para a magnitude vectorial:

$$(3.6) \quad T(x) = k \cosh\left(\frac{q}{k}x + b\right), \quad \mathbf{T}(x) = \left(k, k \sinh\left(\frac{q}{k}x + b\right)\right).$$

Finalmente, o parámetro de lonxitude de arco pode ser agora calculado empregando as identidades das funcións trigonométricas hiperbólicas para obter

$$(3.7) \quad s(x) = \frac{k}{q} \sinh\left(\frac{q}{k}x + b\right),$$

de onde se pode calcular a lonxitude do cable sen máis que avaliar esta función.

3.1.2. Parábola

Mentres que a catenaria é a forma que segue un cable de densidade linear constante que soporta o seu propio peso, nesta sección estudaremos a forma dun cable que soporta un peso horizontal homoxéneo. Formalmente a ecuación obtida é moi similar, e visualmente, a solución, que resulta ser a parábola, é tamén de aparencia similar á catenaria, aínda que na realidade as curvas son ben distintas. As hipóteses iniciais son as mesmas que para a catenaria salvo a quinta e última (isto é debido a que as catro primeiras teñen que ver coa condición de cable da parábola, mentres que a última refírese á carga que soporta). Polo tanto, agora a hipótese 5 será:

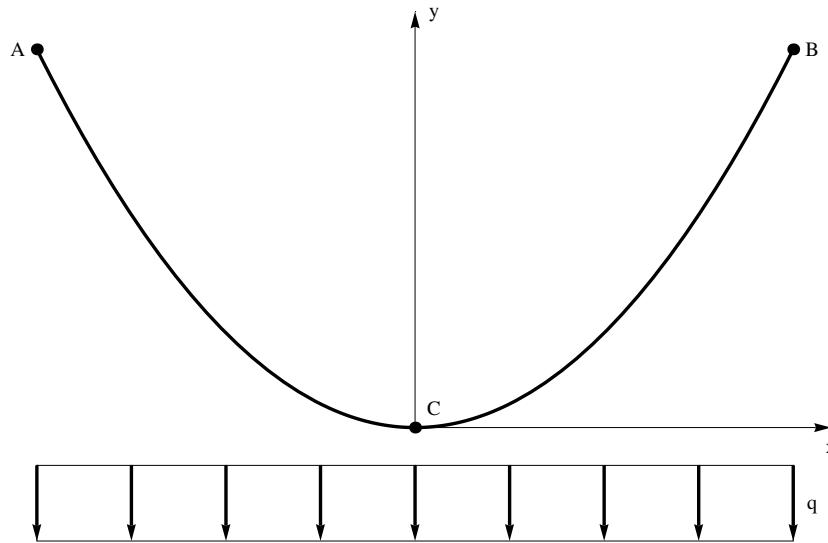


Figura 3.7: Esquema da análise efectuada nesta sección. No cable distribúese unha carga horizontal homoxénea. Esta hipótese, aínda que aproximada é por exemplo empregada na construción de pontes colgantes.

5. a única forza que actúa no cable é un peso distribuído horizontalmente de xeito homoxéneo, é dicir, de densidade horizontal constante. Véxase a Figura 3.7.

De novo sexa $\alpha(x) = (x, y(x))$ a ecuación do cable, que vén, pois, dada pola gráfica da función diferenciable $x \mapsto y(x)$. O vector tanxente unitario vén expresado en termos do parámetro x como

$$v_1(x) = \dot{\alpha}(s) = \frac{(1, y'(x))}{\sqrt{1 + y'(x)^2}},$$

ao igual que sucedía coa catenaria.

Fixemos un punto x da curva e unha lonxitude infinitesimal dx . Neste segmento de cable actúan dúas tensións $\mathbf{T}(x)$ e $\mathbf{T}(x + dx)$, que son tanxenciais e que tiran do segmento de cable desde lados opostos. Por outra banda, sobre o cable actúa un carga q vertical que non depende de x e que por tanto, para este segmento será qdx . Así obtemos a ecuación do equilibrio:

$$\mathbf{T}(x + dx) - \mathbf{T}(x) - q dx \hat{j} = 0.$$

Empregando o teorema do valor medio e facendo tender dx a cero, a ecuación anterior pódese escribir agora como

$$(3.8) \quad \frac{d\mathbf{T}}{dx} - q\hat{j} = 0.$$

Nótese que se ben esta é moi similar a (3.1), o comportamento e o xeito de resolver o problema será bastante distinto.

O vector \mathbf{T} , dependente do parámetro x , é tanxente ó cable. Así $\mathbf{T}(x) = T(x)v_1(x)$, onde T é un escalar. Por tanto,

$$0 = \frac{d\mathbf{T}}{dx} - q\hat{j} = \frac{dT}{dx}v_1 + T\frac{dv_1}{dx} - q\hat{j},$$

co que insertando a expresión para v_1 e $s'(x)$, e facendo algúns cálculos obtemos o sistema de ecuación diferenciais

$$(3.9) \quad T'(x) - T(x)\frac{y'(x)y''(x)}{1+y'(x)^2} = 0,$$

$$(3.10) \quad T'(x)y'(x) + T(x)\frac{y''(x)}{1+y'(x)^2} - q\sqrt{1+y'(x)^2} = 0.$$

A Ecuación (3.9) é idéntica a (3.2). Non obstante, (3.3) e (3.10) son diferentes, debido á presenza de ds/dx no caso da catenaria.

De (3.4) obtivemos entón que a solución de (3.9) é

$$(3.11) \quad T(x) = k\sqrt{1+y'(x)^2}, \quad \text{para certa constante } k > 0.$$

Substituíndo agora (3.11) en (3.10), sacando factor común e simplificando queda

$$ky''(x) - q = 0,$$

ecuación diferencial que se resolve integrando dúas veces para obter

$$(3.12) \quad y(x) = \frac{q}{2k}x^2 + ax + b.$$

para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Esta curva é obviamente unha parábola, e a e b son cero se colocamos a orixe do eixe de coordenadas no vértice da parábola.

A tensión ao longo da parábola obtense substituíndo (3.12) en (3.11):

$$(3.13) \quad T(x) = k\sqrt{1 + \left(a + \frac{q}{k}x\right)^2}, \quad \mathbf{T}(x) = (k, ka + qx),$$

3.2. Estruturas resistentes pola forma

Se sostemos unha folla de papel por un dos seus bordos, esta cúrvase incapaz de soste-lo seu propio peso. A mesma folla de papel, dobrada nun punto e cunha lixeira curvatura cara arriba, soporta o seu propio peso e incluso unha carga adicional como podería ser un bolígrafo. A nova capacidade portante non se obtén engadindo material, senón dándolle a forma adecuada. A curvatura cara arriba aumenta a rixidez e a capacidade portante da folla, pois dispón parte do material lonxe do eixe neutro, co que aumenta substancialmente a rixidez á flexión da folla, considerada como unha viga. Igual resultado obtemos pregando o papel, é dicir, impartíndolle cambios bruscos de pendentes, ou *curvaturas concentradas*.

Denomínanse *estruturas resistentes pola forma* a aquelas cuxa resistencia se obtén dando forma ao material segundo as cargas que deba soportar. As *cas-cas delgadas* son estruturas resistentes pola forma, suficientemente delgadas para non desenvolver tensións apreciables de flexión, pero tamén o suficientemente grosas para resistir cargas por compresión, corte e tracción. Aínda que existen cascas construídas de madeira, aceiro e materiais plásticos, son ideais para seren construídas de formigón armado. As cascas delgadas permiten a construción económica de cúpulas e outros teitos curvos de formas diversas, de gran beleza e excepcional resistencia mecánica. Esta tipoloxía construtiva figura entre as expresións máis refinadas do moderno deseño estrutural.

A natureza coñece ben o principio de resistencia dada pola curvatura e utilízao sempre que lle é posible para protexer a vida animal co mínimo de material. Un ovo é un fogar resistente durante o desenvolvemento do pito, incluso aínda que a súa casca pesa soamente uns cantos gramos. A concha dos moluscos protéxeos do seu voraz enemigo e pode, ademais, soportar a presión da auga a grandes profundidades pola súa superficie curva. A mesma protección que teñen caracois, tartarugas e armadillos, dos cales os cabaleiros medievais puideron ter copiado a súa curvada e relativamente lixeira armadura.

3.3. Esfera

Podemos definir a esfera segundo múltiples criterios. A esfera é o corpo xeométrico limitado por unha superficie curva pechada cuxos puntos equidistan doutro fixo chamado centro. Podemos tamén obter a esfera como superficie de revolución, sen máis que facer xirar unha semicircunferencia arredor do seu diámetro.

Dende un punto de vista estrutural, a esfera é unha estrutura que se sostén

pola forma, ou como chamamos na sección anterior: casca delgada. A esfera ten curvatura positiva en todos os puntos, o que a fai non desenrolable: é imposible aplanala sen cortala nunha serie de seccións, sendo isto unha consecuencia trivial de que a curvatura de Gauss sexa invariante por isometrías locais. A súa rixidez e resistencia mecánica proceden, en gran parte, da resistencia ás deformacións que tenden a aplanala, é dicir, a reducir a súa curvatura.

A esfera é a figura xeométrica que encerra un volume dado cunha superficie menor. Esta propiedade é a causa da súa omnipresencia no mundo físico: nunha gota dun líquido inmerso nun ambiente gasoso existen forzas superficiais que deformarán a gota ata atopar o valor mínimo de tensión en todos os puntos da mesma, e este correspóndese a unha esfera (en ausencia de toda perturbación exterior). A propiedade da que estamos a falar leva o nome de *propiedade isoperimétrica*, e determinará de forma única á esfera.

Pensemos agora na esfera como contedor de líquidos ou gases sometidos a certa presión. A esfera é a pel dun depósito que cumpre dúas funcións esenciais: por un lado debe conter o líquido ou gas de forma estanca, e polo outro debe soportar as tensións producidas pola presión interna. Esta pel estará sometida a tensións de tracción actuando en dúas direccións do seu plano, ou o que é o mesmo, paralelas á súa superficie. Os cálculos básicos para obter as tensións en depósitos de presión sinxelos son fáciles, tanto que ninguén se atribuíu o mérito de telos descuberto. Con todo, a obtención tecnolóxica de depósitos de presión seguros (tuberías, caldeiras, etc.) é algo relativamente moderno, e non é pequena a lista de persoas mortas por explosións accidentais dos mesmos. O cálculo das tensións que soporta unha esfera faise necesario cando quereamos calcular o volume do material que usaremos na construción dun elemento esférico baixo a acción de presións internas.

Supoñamos logo unha superficie esférica definida por unha lámina de espesor t , sometida a unha presión interna debida ao fluído, P , e sexa r o raio da lámina, medido dende a metade do espesor da súa parede. Recordando a fórmula da tensión de tracción vista no Capítulo 2 podemos calcular a tensión da lámina en todas as direccións paralelas á súa superficie como:

$$T = \text{tensión de tracción} = \frac{\text{carga}}{\text{área da sección}} = \frac{\pi r^2 P}{2\pi r t} = \frac{rP}{2t}.$$

Para estes cálculos seccionamos a esfera por un plano que pase polo centro. O cálculo da carga faise baixo a suposición de que a resultante de todas as presións que actúan contra a superficie de media esfera debe ser igual, por equilibrio, á das que actúan contra o plano correspondente á sección que pasa polo centro, e cuxo valor é $\pi r^2 P$. A área da lámina seccionada é a área dunha

coroa circular de raio grande $R_1 = r + t/2$ e raio pequeno $R_2 = r - t/2$.

Da mesma forma podemos calcular cales serían esas tensións nun depósito de forma cilíndrica. Chamemos T_1 á tensión dentro do espesor do cilindro que actúa na dirección das directrices rectas, e T_2 á tensión que actúa na dirección das circunferencias. Para calcular a tensión lonxitudinal T_1 seccionamos o cilindro perpendicularmente ao seu eixe, resultando unha sección igual á que tiñamos na esfera. Facendo cálculos análogos, temos que:

$$T_1 = \frac{rP}{2t}.$$

Para obter T_2 , tensión circunferencial, cortamos agora, imaxinariamente, o elemento de forma cilíndrica por un plano que conteña ao eixe do cilindro, como se ve na Figura 3.8, obtendo que:

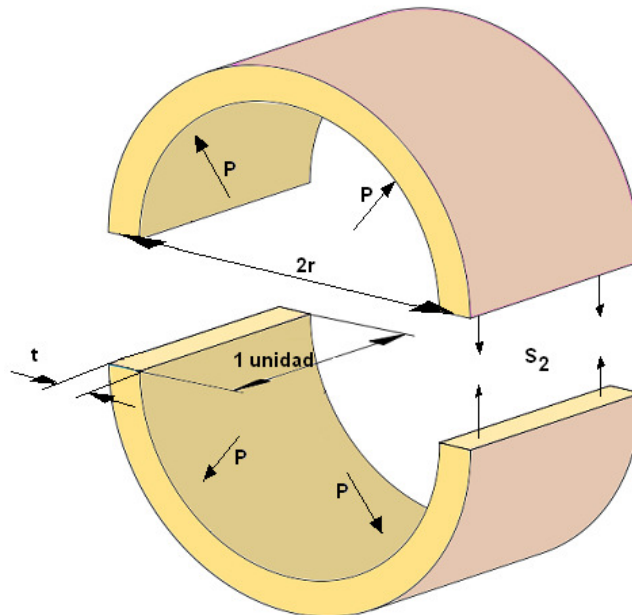


Figura 3.8: Sección do cilindro.

$$T_2 = \frac{\text{carga}}{\text{área da sección}} = \frac{2 \cdot r \cdot P \cdot 1}{2 \cdot t \cdot 1} = \frac{rP}{t}.$$

Polo tanto, a tensión circunferencial que actúa no espesor dun depósito cilíndrico é dobre que a tensión lonxitudinal, é dicir: $T_2 = 2T_1$.

Unha das consecuencias disto podería ter sido deducida por calquera que frita unha salchicha. Cando sae o recheo da salchicha porque rebenta a súa pel, a rotura é sempre lonxitudinal. Noutras palabras, a pel rompe debido á tensión circunferencial, non á tensión lonxitudinal.

Outra consecuencia dos resultados anteriores é que conter un volume dun fluído dado a unha determinada presión, require un volume maior de material se usamos un depósito cilíndrico que se usamos un esférico (xa que no caso do cilindro o espesor da lámina debe ser maior para soportar a mesma tensión). Nos casos nos que o peso é importante —como as botellas de osíxeno que usan os escaladores a gran altura ou os depósitos dos avións— o usual é utilizar depósitos esféricos. Para a maioría dos outros usos, onde o peso non é un problema importante, as botellas cilíndricas son máis adecuadas e baratas. As botellas de gas que se usan nos hospitais e talleres pertencen a esta familia.



Figura 3.9: Buque con tanques esféricos. Foto: ©Carlos Rodríguez Vidal

Con todo, a superficie utilizada para a almacenaxe de grandes cantidades de produtos químicos en estado líquido é a esfera (Figura 3.9), xeralmente apoiada sobre piares ou sostida por un aro. O por que de usar unha forma esférica e non un silo cilíndrico é algo que aínda que nunha primeira reflexión parecería razoable (debido ás propiedades da esfera que vimos de ver) non responde a ningunha das razóns anteriormente explicadas.

O uso da esfera non representa un aforro de material en canto á resistencia fronte á presión interior, pois se ben vimos que nunha esfera sometida a alta presión interior os esforzos de tracción son a metade dos esforzos transversais do cilindro para unha mesma presión, o aforro de material conseguido usando a esfera é irrisorio con respecto ao coste de deseño, fabricación e montaxe da esfera (non é desenrolable, polo que hai que deseñar moi ben os patróns de cada peza e as súas unións, o que resulta moi caro). Ademais, a esfera de por si colocada sobre un plano resulta ser inestable, polo que hai que poñerlle “patañas” para que non saia rodando, perdendo con iso o posible aforro de

material; material, por certo, que sempre é metálico (aluminio ou aceiro nalgunha aliaxe adecuada), xa que un encofrado de formigón armado de forma esférica representaría un gasto elevadísimo e, se non fose armado, vimos xa que o formigón non aguanta esforzos de tracción.



(a) Tanque cilíndrico. Foto: ©Threecharlie (cc-by-sa 4.0)

(b) Tanque esférico.

Figura 3.10: Tanques de almacenaxe de líquidos ou gases.

Por outro lado, observando os contidos de tanques esféricos e cilíndricos, resulta que os cilíndricos conteñen polo xeral produtos como o petróleo, que se recolleita a presións próximas a atmosférica; mentres que os esféricos se usan para almacenar produtos lixeiros como gasolina, propano, butano, etc., que se almacenan baixo presións por riba da presión atmosférica.

Resulta que non é o aforro de material que supón o uso da esfera sobre o cilindro, por ter a esfera a propiedade isoperimétrica ou por soportar máis presión para o mesmo espesor de lámina, o que fai que o seu uso estea estendido para a almacenaxe de gases, senón que é a superficie óptima debido ao seu deseño. Vexamos o por que. Se queremos almacenar nun cilindro un gas baixo presión, deberemos poñerlle tapas, que normalmente serán casquetes esféricos (aínda que tamén poden ser planos), e a unión entre cilindro e tapa é estruturalmente tan delicada (ademais de que esta unión ten que ser reforzada no seu interior, o que supón máis aceiro), que fai o deseño cilíndrico menos adecuado.

Non debemos confundir as necesidades estruturais da esfera como contedor de gases a presión coas da esfera traballando como cúpula sometida ao seu propio peso. Neste último caso, os esforzos predominantes son de tracción no

sentido dos paralelos e de compresión no sentido dos meridianos. Nas cúpulas de sección circular e de parede delgada prodúcense esforzos de flexión, xa que a circunferencia se alonxa da forma óptima de catenaria, caendo a resultante fora do tercio medio da sección. Este alonxamento está xeralmente por riba da catenaria, o cal permite anular esta flexión con aneis de aceiro horizontais en forma de paralelos traballando a tracción e permitindo así axustar o polígono funicular de forzas á forma circular requerida.

En cúpulas de gran diámetro existen problemas serios de cargas eventuais que poden chegar a ser moi importantes e obrigan a un estudo profundo dos esforzos de flexión ou pandeo que poden producirse. Exemplos destas cargas eventuais poden ser: presión dispar por ventos veloces, dilatacións diferenciais por diferenza de temperaturas (lado iluminado polo sol e lado en sombra), acumulacións desiguais de neve ou xeo, asentos diferenciais de cimentacións, etc.

3.4. Cilindro

O cilindro é a superficie formada polos puntos situados a unha distancia fixa dunha recta dada, chamada eixe do cilindro. É tamén unha superficie de revolución, que se obtén mediante o xiro dun rectángulo arredor dun dos seus lados.

En xeometría diferencial, un cilindro defínese de forma xeral como calquera superficie regrada xerada por unha familia uniparamétrica de rectas paralelas. Unha superficie cilíndrica estará conformada por rectas paralelas, chamadas *xeratrices*, que se moven ao longo dunha curva plana, denominada *directriz*.

Xa na sección anterior comprobamos como se comportaba o cilindro cando era utilizado como contedor de gases a presión. Recordamos que as tensións de tracción que sufría a superficie na dirección das rectas xeratrices era:

$$T_1 = \frac{rP}{2t},$$

sendo r o raio do cilindro, P a presión do gas no interior e t o espesor da lámina cilíndrica. Mentres que a tensión de tracción na dirección das circunferencias era:

$$T_2 = \frac{rP}{t},$$

que resultaba ser xustamente o dobre da anterior. Esta fórmula de fácil obtención dábanos información acerca do comportamento estrutural do cilindro, e

esta información era útil para o cálculo dos espesores da lámina superficial do mesmo.

Pero analogamente a como vimos coa esfera, o comportamento do cilindro será diferente cando traballe como contedor de gases a presión de cando traballe como bóveda. Os requerimentos estruturais da mesma superficie serán diferentes, xa que esta estará funcionando tamén de forma distinta. E aínda máis, non será o mesmo comportamento estrutural o da bóveda tradicional de canón que o da bóveda como lámina cilíndrica (estrutura que se sostén pola forma). Vexamos entón cales son as diferencias e os requerimentos estruturais de cada caso.

A bóveda é un dos elementos de máis historia na técnica da construción, e entre todas as bóvedas, á de canón correspóndelle un lugar privilexiado. A bóveda continua, sobre muros corridos, podería considerarse como unha sucesión de arcos independentes colocados un ao lado do outro. Porén, ten algo que supera este concepto simplista, e é a continuidade ao longo das xeratrices, que lle permitirá traballar a flexión ao longo desa dirección. Cada arco pode, desta forma, axudarse dos contiguos, repartindo o exceso de carga que pode concentrarse sobre el.

O concepto de bóveda foise desenvolvendo ao longo dos séculos, pasándose dos arcos contiguos con xunta completa entre uns e outros, como a construían os babilonios, á bóveda romana na que o engarce entre un arco e outro é o mesmo que se utiliza hoxe en día. Aínda que a forma inclinada das bóvedas caldeas facía sinxela a súa colocación en obra sen necesidade de cimbras ou apeos, a bóveda romana solucionaba o problema da separación e desnivelación posible entre un arco e outro. Na bóveda romana as xuntas, en lugar de ir entre arco e arco, van entre dovela e dovela, correspondéndose ao longo de toda a xeratriz.

As bóvedas, en xeral, calquera que sexa a súa directriz, proporcionan empuxes inclinados sobre os seus estribos; e, se estes van sobre muros verticais, requiren un gran espesor, para lograr que o seu propio peso centre a resultante sobre a base de sustentación. Unha forma de minimizar este problema é colocando varias bóvedas paralelamente, contrarrestando así os seus empuxes. As resultantes sobre os muros intermedios son, así, verticais, e estes poden ser entón máis lixeiros e apoiar sobre columnas sen necesidade de contrafortes.

Sabemos polo tanto como traballa unha bóveda, pero este funcionamento non ten nada que ver co funcionamento dunha lámina cilíndrica. Coa aparición do formigón armado, a lámina con el construída pasa a ser resistente a esforzos de tracción, o que permite solucións máis lixeiras, aínda que de fenómeno tensional máis complexo. A lámina cilíndrica apoiará sobre arcos ríxidos ou

muros distanciados e colocados segundo as directrices, é dicir, sen necesidade de apoio da mesma sobre as xeratrices de arranque.

Se collemos unha folla e a queremos soste horizontalmente sobre dous dos seus bordos paralelos, observamos que esta dobra e cae por falta de resistencia á flexión. Pero, se a sostemos dende os centros deses lados, deixándoa que se curve polo efecto do seu peso a un e outro lado da recta que une os puntos de apoio, sostense perfectamente gracias á forma que acaba de adoptar. A superficie cilíndrica así formada, traballa como unha viga, cuxa sección transversal vén dada pola directriz dun cilindro.

Este simple experimento amosa, por si só, cal é a vantaxe fundamental deste tipo estrutural. A lámina, aínda que teña forma de bóveda é tensionalmente unha cousa distinta; de feito, máis que a unha bóveda, pódese asimilar a unha viga. Observamos que se o cilindro fose completo ou de directriz pechada — circular, elíptica, etc.—, o equilibrio sería posible sen necesidade teórica de resistencia a flexión da lámina; por isto, admitiría un espesor todo o reducido que permitise a seguridade ao pandeo que podería producirse polo efecto das compresións que aparezan segundo as xeratrices.

Nestes casos dise que se trata dun *equilibrio díptero* ou equilibrio de membrana pura. Isto non quere dicir que non existan flexións, pois as deformacións, que se producen nas directrices, levan consigo momentos flectores tanto maiores canto máis forte sexa o espesor da lámina; pero non serán de importancia para o equilibrio xeral do sistema. Se cortamos as láminas pechadas polo plano diametral horizontal e se colocan paralelamente soportando só o peso propio, a antisimetría destes pesos fai que as tensións que aparecían nas xeratrices de bordo se anulen, e o equilibrio primitivo pode restablecerse sen máis que introducir nas xeratrices de bordo unhas armaduras postensadas que restablezan as tensións cortantes que a parte inferior exercía sobre a superior.

Esta lámina posúe grandes cualidades, como a de que permite acadar frecuentemente relacións entre espesor e luz da orde de $1/500$. Outra das súas cualidades, que veremos con máis detalle no Capítulo 4 e que xa foi comentada, é o seu funcionamento como viga. Isto permitiu ao arquitecto Carlos González Lobo desenvolver un conxunto de técnicas para crear vivendas a baixo custo, con man de obra non cualificada e resultados de gran valor estético. Carlos González Lobo desenvolve dous tipos de sistemas chamados CGL-1 e CGL-2, nos cales se utiliza a bóveda como viga díptera, construindo bóvedas de formigón sen encofrado ou creando unha especie de dovelas conformadas por ladrillos armados en forma de semibóvedas. Esta técnica outorga a usuarios de escasos recursos a posibilidade de autoconstruír as súas vivendas.

3.5. Hiperboloide dunha folla

O hiperboloide é a superficie de revolución xerada pola rotación dunha hipérbole arredor dun dos seus dous eixes de simetría. Estas superficies son de dúas clases: de unha e de dúas follas. Basta ver como exemplo a superficie que xeraría a hipérbole $y = 1/x$ dependendo de se a facemos xirar con respecto ao eixe de vector director \vec{u} ou con respecto a \vec{v} , tal e como se amosa na Figura 3.11.

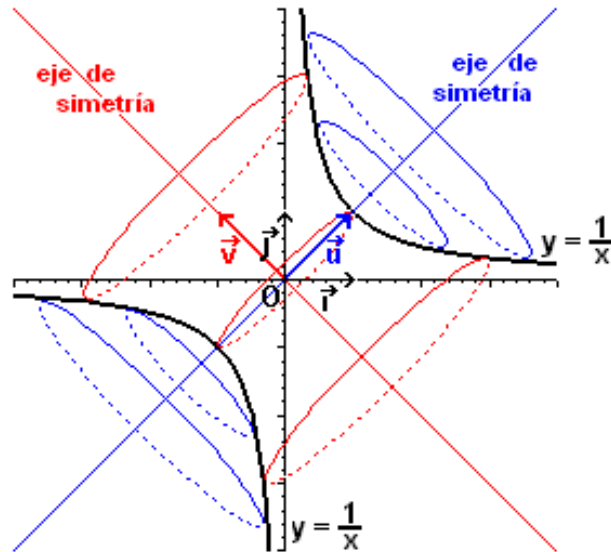


Figura 3.11: Xeración dos dous tipos de hiperboloide. Imaxe: ©M.Romero Schmidtke (cc-by-sa 3.0)

Se pensamos nun elemento arquitectónico con forma de hiperboloide dunha folla, é probable que o primeiro (e quizais o único) elemento que se nos veña á cabeza sexa a torre de refrixeración dunha central térmica. Non é, nin moito menos, a única ocasión na que se utiliza esta superficie na arquitectura, tal e como veremos no Capítulo 4, pero é probable que si sexa na que a súa utilización está máis xustificada, non funcionando como elemento puramente ornamental.

Ao tratar de buscar os motivos polos que se escolle o hiperboloide dunha folla para ditas torres, tamén nos podemos preguntar por que non se escolle o mesmo tipo de superficie para a cheminea que sempre as acompaña nas centrais térmicas. Non é a función de ambas expulsar gases á superficie?

Para tratar de respostar a esta pregunta, pensemos por un momento en cales son as premisas do problema que se debe solucionar:

- * Débense alcanzar grandes alturas (en torno aos 120 metros). Isto vén motivado pola necesidade dunha corrente de aire que expulse eficientemente os gases a atmosfera. A diferenza de presións e temperaturas entre os puntos da base e da parte superior dos elementos, será a responsable do tiro.
- * A estrutura debe ser estable. En principio podemos pensar que o hiperboloide é máis estable có cilindro por ser aquel unha superficie con dobre curvatura, pero isto non soluciona o problema de por que entón se escollen distintas superficies para a mesma función.
- * Quérese utilizar a mínima cantidade de material posible. Vimos na sección de estruturas resistentes pola forma, que gracias ao formigón armado, podíamos construír cascas delgadas que se sostiñan pola súa forma. No caso do hiperboloide dunha folla, pódense chegar a acadar os 100 metros de altura cunha lámina de formigón armado de só 5 centímetros de grosor. Con todo, parecería que para certa sección dada, o cilindro aforra material fronte ao hiperboloide, o cal tampouco resolve o problema.
- * A estrutura debe soportar cargas laterais provocadas polo vento. Ditas cargas aumentan coa altura do elemento a analizar.

As anteriores condicións non parecen dar a solución ao problema formulado. Analizándoo máis polo miúdo, decatámonos de que aínda que ambas torres expulsan gases ao exterior, a súa función dentro da central é ben diferente. A cheminea debe expulsar os gases resultado da combustión, mentres que a torre de refrixeración encárgase de expulsar o vapor de auga resultado do enfriamento do circuíto do condensador.

Vexamos con máis detalle cal é a misión da torre de refrixeración. Dentro do circuíto de vapor de auga a alta temperatura encargado de facer mover unhas turbinas que moverán o xerador de enerxía eléctrica, atópase un condensador encargado de converter ese vapor de auga en auga. Ese condensador precisa dun circuíto de auga que o “arrefría”, xa que o condensador está cedendo calor froito de facer o cambio de estado de vapor de auga (gas) a auga (líquido). A auga sae quente do condensador cara á torre de refrixeración, onde a certa altura se deixa caer en finos chorros. Dita forma de deixar caer a auga (que vén quente) fai que esta presente unha grande superficie de contacto coa corrente de aire procedente da apertura na base da torre, o que fai que a auga arrefría ao entrar en contacto coa corrente e condense. A auga, pois, condensa indo a parar a unha balsa onde será recollida para ser enviada de novo a arrefriar ao

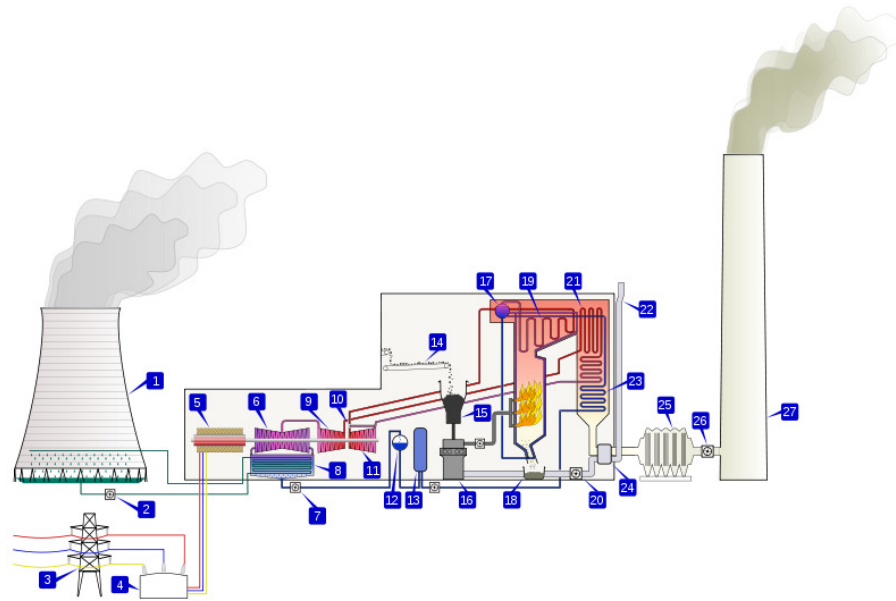


Figura 3.12: Diagrama dunha central térmica de carbón de ciclo convencional. Esquema: ©BillC - <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:PowerStation2.svg> (cc-by-sa 3.0)

1. Torre de refrixeración	10. Válvula de control de gases	19. Supercalentador
2. Bomba hidráulica	11. Turbina de vapor de alta presión	20. Ventilador de tiro forzado
3. Liña de transmisión (trifásica)	12. Desgasificador	21. Recalentador
4. Transformador (trifásico)	13. Calentador	22. Toma de aire de combustión
5. Xerador eléctrico (trifásico)	14. Cinta transportadora do carbón	23. Economizador
6. Turbina de vapor de baixa presión	15. Tolva de carbón	24. Precalentador de aire
7. Bomba de condensación	16. Pulverizador de carbón	25. Precipitador electrostático
8. Condensador de superficie	17. Tambor de vapor	26. Ventilador de tiro inducido
9. Turbina de media presión	18. Tolva de cinzas	27. Chimenea de emisións

condensador. O vapor de auga que sae pola torre é o produto da vaporización dunha fracción da auga que vén do condensador e pechar así o ciclo.

Este modo de arrefriar a auga procedente do condensador fai que se precise unha gran superficie dentro da torre para pulverizar a auga. É por iso que as torres presentan un diámetro tan grande na súa base. Como tamén vimos, a apertura da base débese á necesidade dunha corrente de aire ascendente que faga baixar a temperatura da auga. Por outro lado, a forma de hipérbole que ten a sección vertical da torre mellora a saída do vapor de auga mediante unha especie de efecto Venturi. Cando un fluído en movemento dentro dun conduto pechado, despois de pasar por unha zona de sección menor, diminúe a súa pre-

sión ao aumentar a velocidade, estamos ante o efecto Venturi. O efecto Venturi explícase polo Principio de Bernoulli e o principio de continuidade de masa. Se o caudal dun fluído é constante pero a sección diminúe, necesariamente a velocidade aumenta tras atravesar esta sección. Polo teorema da conservación da enerxía mecánica, se a enerxía cinética aumenta, a enerxía determinada polo valor da presión diminúe forzosamente.

Despois desta análise, podemos concluír que as razóns que nun principio parecían as causantes da elección do hiperboloide dunha folla para a torre de refrixeración dunha central térmica (altura, estabilidade, mínimo material, cargas de vento), non son as que motivan dita elección. Por suposto que son factores que teñen importancia na análise do comportamento estrutural do hiperboloide, pero como se explicou, serían factores que motivarían tamén a construción da cheminea con forma de hiperboloide. Será unha razón *funcional*, necesidade dunha gran superficie na base, forma que favoreza a corrente de aire ascendente e apertura na base, os motivos que fagan que a *forma* da torre de refrixeración e a cheminea sexan distintas.

3.6. Estruturas tesas

Os máis antigos documentos históricos e as narracións dos primeiros exploradores que descubriron continentes e civilizacións demostran que o home primitivo tentou realizar os seus abrigos provisionais ou definitivos tan lixeiros e á vez tan evolucionados como lle fora posible.

Así resulta que, tras o acondicionamento das cavernas e a construción de sinxelas cabanas feitas con pólas, un dos primeiros habitáculos concebidos e elaborados polo home foi a tenda. A medida que os anos e os séculos pasaban, aprendeu a dominar unha posta en obra cada vez máis fina e elaborada dos produtos naturais.

As invencións máis modernas de estruturas tesas recordan, pola súa composición e os seus principios, ás grandes tendas de coiro de camelo dos nómades saharianos. As posibilidades da tecnoloxía e dos materiais modernos permítenos chegar a día de hoxe a obras moito máis eficaces no sentido de luces e seguridade.

Con todo, fai máis de vinte séculos, os romanos tendían por riba dos estadios e dos circos enormes toldos de tea de liño, reforzados e ancorados con cordas de cânabo. Tamén atopamos a través dos anos e das civilizacións unha idea semellante nas pasarelas feitas con lianas das selvas ecuatoriais ou as máis grandes pontes colgantes modernas.

Paralelamente e de forma moito máis importante desenvolvíanse tamén durante decenas de séculos outras construcións máis pesadas. A albanelería de cantería ou de ladrillo foi a grande triunfadora. O emprego dos materiais naturais ofrecía a posibilidade de construír obras das que se agardaba que estiveran a cuberto do tempo. O problema destas construcións son as súas limitacións: gran peso, imposibilidade de crear grandes luces, perigo de desprendemento, etc.

Por fin, fai algúns anos, apareceron materiais: ferro, fundición, aceiro, formigón, formigón armado, etc., que permiten transportar forzas de compresión, flexión, cortante ou torsión. A arquitectura nacida da xeometría plana ou de simple curvatura (arco e bóveda) sustitúese por novas formas tridimensionais definidas matemática ou empiricamente sobre modelos, que resultarán dun emprego máis racional da materia. Esta será a razón principal para o uso das antigas técnicas de estruturas tesas, á noción clásica de *economía de prezo*, engádesse agora unha noción fundamental para o porvir da humanidade: *economía das materias primas e dos recursos*.

Unha das principais virtudes deste tipo de estruturas é o seu baixo peso por unidade de superficie. Se poñemos como exemplo unha cuberta na que se teñen en conta os materiais de recheo, illamento e estanqueidade, o peso propio total será duns 25 a 40 kg/m^2 . Agora ben, as cargas chamadas ecolóxicas (dependentes dos fenómenos atmosféricos como neve ou vento) son na maioría dos casos maiores có peso propio, o que crea un problema de estabilidade na estrutura.

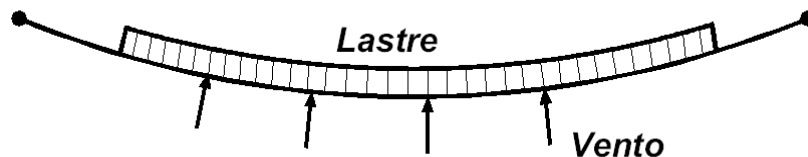


Figura 3.13: Cargas dunha cuberta.

Nestes casos é preciso asegurar a estabilidade da superficie baixo o efecto da depresión (carga vertical oposta ao peso) substituíndo o efecto do peso por unha forza externa. Esta forza externa resólvese de forma sinxela cun cable ou unha familia de cables tesos segundo unha curvatura de signo oposto á dos cables que resisten as cargas dirixidas cara abaixo. O que resulta desta solución é unha superficie de dobre curvatura inversa (superficie que contén familias de curvas con curvaturas de signos opostos), e que por tanto ten curvatura de

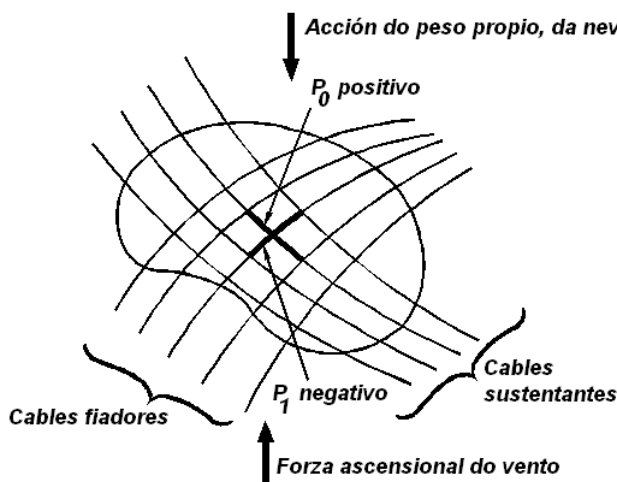


Figura 3.14: Familias de curvas con curvaturas de signos opostos.

Gauss negativa (Figura 3.14). Este principio das dúas familias de curvas con curvatura de signos opostos é moi sinxelo de levar á práctica, aínda que cunha pequena salvedade. Ao aplicar o principio a unha construción real con estrutura completamente tesa, compréndese inmediatamente que unha sobrecarga calquera aumentará a tensión dunha familia de cables e diminuírá a da familia de curvatura oposta. Esta mingua pode chegar ata a distensión completa dos cables, polo que hai perigo evidente de inestabilidade da superficie por flotación dos cables distendidos. Polo tanto, é rigurosamente indispensable o aumento, artificial e previo a toda solicitação exterior, da tensión de ambas familias de cables para evitar que baixo unha solicitação calquera, existan cables que poidan flotar. Esta tensión previa é a coñecida como *pretensión*. (Figura 3.15).

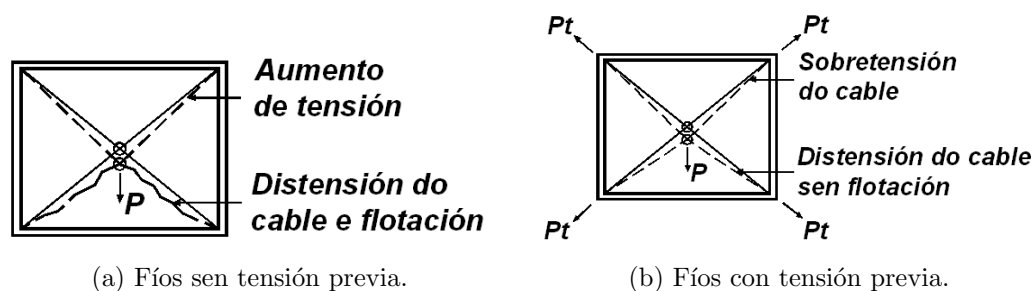


Figura 3.15: Pretensión de cables.

Existen varias superficies ás que podemos acudir para construír mallas tesas. As superficies que buscamos deben ter curvatura de Gauss negativa, e entre as máis empregadas atopamos:

- As *conoïdes* enxendradas por unha recta xeratriz que se move paralela a un plano (chamado director) seguindo unha recta fixa chamada directriz e apoiándose noutra recta ou curva. Un exemplo de conoïde é o *paraboloïde hiperbólico*. (Figura 1.6).
- O *hiperboloïde de revolución dunha folla*, enxendrado por unha hipérbola que xira ao redor dun eixe non focal. (Figura 1.6).
- O *toro*, enxendrado por unha circunferencia que xira ao redor dun eixe no seu plano.

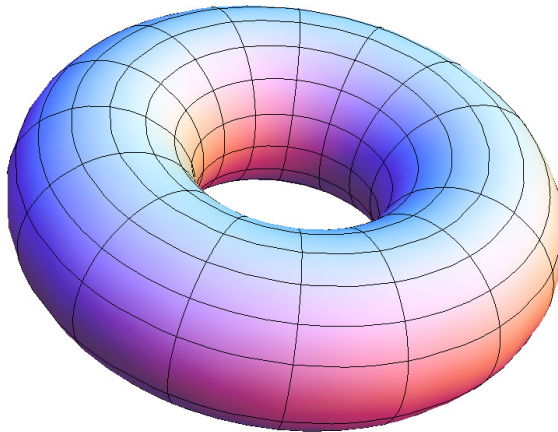


Figura 3.16: Un toro.

Unha das superficies máis utilizadas en mallas tesas polas súas propiedades é o paraboloïde hiperbólico. O trazado dos cables nestas superficies utilizan as propiedades propias do paraboloïde hiperbólico. Vexamos como. Un cable parabólico uniformemente cargado, admite unha tracción, cuxa compoñente horizontal se deduce facilmente de (3.12), e que é igual a

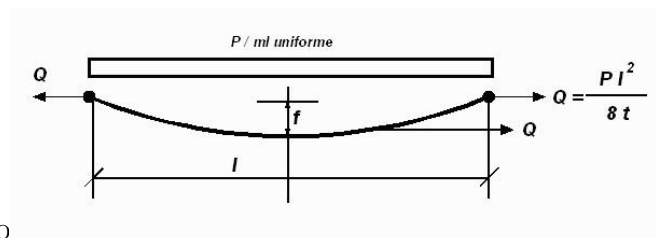
$$Q = \frac{ql^2}{8f},$$

onde:

q = carga do cable parabólico

l = luz entre os apoios

f = frecha do cable parabólico



Sección dun paraboloïde hiperbólico.

Se o cable é rectilíneo, ou o que é o mesmo, ten frecha nula, teoricamente a tensión é infinita. Na práctica un cable rectilíneo non pode encaixar ningunha forza allea á súa dirección. É por iso que, nunha superficie regrada, *os cables non deberán xamais coincidir coas xeratrices da superficie*. En cambio, cada familia de cables, sustentantes e fiadores, *deberán adoptar o máximo de frecha (ou curvatura)* para atenuar a súa tensión.

No caso do paraboloide hiperbólico poderán situarse segundo as dúas familias de parábolas (Figura 3.17). Este trazado, empregado a miúdo, ten o problema de esixir, en cada punto de contacto dos cables, unha peza de enlace que impida o escorregamento dunha familia de cables sobre a outra. Esta peza terá que posuír un eixe de rotación para que sexa posible colocala en calquera punto da superficie e deberá bloquearse en cada cable. A súa colocación exacta é difícil e a súa fabricación cara.

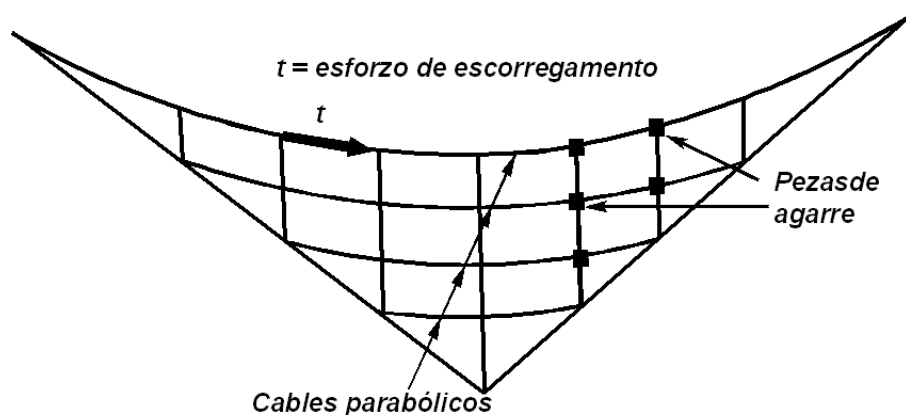


Figura 3.17: Trazado do paraboloide hiperbólico segundo as familias de parábolas.

Un trazado moi sinxelo, mecanicamente falando, consiste en dispoñer os cables ao longo de *curvas ortodrómicas* da superficie (Figura 3.18). Unha curva ortodrómica é o camiño máis curto que une dous puntos dunha superficie; en xeometría diferencial é o que denominamos unha *xeodésica*. Neste caso, os cables non poderán escorregar uns enriba dos outros.

A causa da súa definición xeométrica, adoptan unha posición tanto máis exacta canto máis alta é a tensión. Nesta técnica, só a definición matemática e gráfica do trazado do cable presentará dificultades, pero a colocación en obra simplifícase moito e abarátase (non se necesitan pezas de enlace nin man de obra de colocación das mesmas).

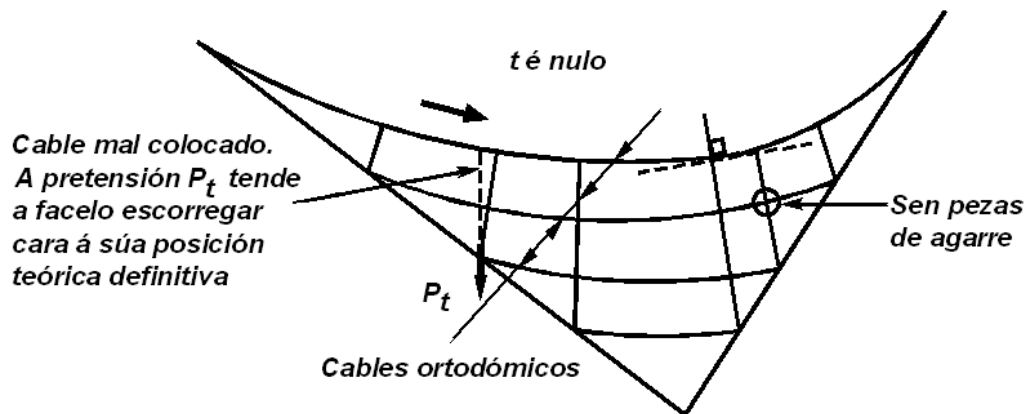


Figura 3.18: Trazado do paraboloides hiperbólico segundo as curvas ortodómicas.

3.7. Superficies compostas

As superficies elementais e definidas segundo criterios xeométricos, expostas nas seccións anteriores, poden combinarse de distintas formas para obter superficies máis complexas. Dúas cascas cilíndricas córtanse en ángulo recto para cubrir unha área cadrada ou rectangular. Unha serie de cilindros paralelos con curvatura alternada cara arriba e cara abaixo, crean un teito ondulado similar a unha placa corrugada. É posible obter teitos ondulados unindo sectores de cono con curvatura alternada cara arriba e cara abaixo. Ademais, calquera das formas elementais pode ondularse para obter cascas estruturais máis atractivas e, ás veces, máis eficientes. Un elipsoide pode ondularse para darlle curvatura ao bordo apoiado. É posible ondular un cilindro parabólico para transformalo nunha superficie con curvatura en dúas direccións, o que aumenta a súa rixidez. Tamén é posible ondular as cúpulas esféricas con igual finalidade.

Os paraboloides hiperbólicos poden usarse en diversas combinacións. Catro paraboloides idénticos forman un teito apoiado nas esquinas, que cubre unha área rectangular, unha das combinacións máis comunmente usadas desta superficie. Dous paraboloides hiperbólicos poden combinarse para formar un teito conoidal con luz do norte, ou unha casca en voladizo. Catro paraboloides apoiados nunha columna central forman un teito tipo parasol. Cando o ángulo entre os planos das dúas parábolas directrices non é recto, o paraboloides hiperbólico recibe o nome de *oblicuo* e pode usarse para cubrir áreas non

rectangulares.

Non hai motivo para limitar as cascas delgadas a formas facilmente definibles por medio de fórmulas xeométricas. É posible inventar novas formas “libres” que funcionen estruturalmente de forma correcta. Pero a imaxinación do proxectista resulta unha simple fantasía se non está familiarizado co comportamento estrutural das formas xeométricas básicas. As cascas delgadas resultan elementos estruturais de extraordinaria eficiencia, e son as consideracións estruturais as que deben ditar fundamentalmente as súas formas.

Capítulo 4

Arquitectos e obras singulares

“La mejor obra es la que se sostiene por su forma.”

E. Torroja

Razón y ser de los tipos estructurales

É complicado recoller nun só capítulo o grande número de obras arquitectónicas que destacan pola súa beleza, coherencia arquitectónica e relación coas matemáticas. Sería iluso tratar de abarcar nin unha mínima parte do construído, moito máis sabendo a velocidade coa que avanza a técnica hoxe en día e os múltiples exemplos de obras espectaculares arredor do mundo. É por iso que se decidiu dividir o capítulo en dúas seccións; unha dedicada ao arquitecto que inspirou este traballo, e outra na que se tratará de expoñer un compendio de obras que exemplifiquen como a forma e a función se unen para dar resultados eficaces estruturalmente e de grandiosa beleza.

4.1. Eduardo Torroja

Eduardo Torroja Miret naceu en Madrid o 27 de agosto de 1899. Parece que foi do seu pai, Eduardo Torroja Caballé, Catedrático de Xeometría e Arquitecto, de quen herdou o gusto pola xeometría. Estudou Enxeñería de Camiños, Canais e Portos e no ano 1927 montou o seu propio estudio, do que saíron as súas mellores obras nos anos que pasaron ata o inicio da Guerra Civil.

O interese de Eduardo Torroja pola xeometría é evidente: as famosas “costelas” do Instituto Eduardo Torroja son lemniscatas de Bernouilli; o ábside da igrexa de Pont de Suert está xerado por unha espiral logarítmica que se apoia

sobre unhas directrices circulares; os caixóns de cimentación da ponte de Sancti Petri están formados por dous hiperboloides dunha folla. A importancia que daba Torroja ao coñecemento da xeometría queda reflexada neste parágrafo:

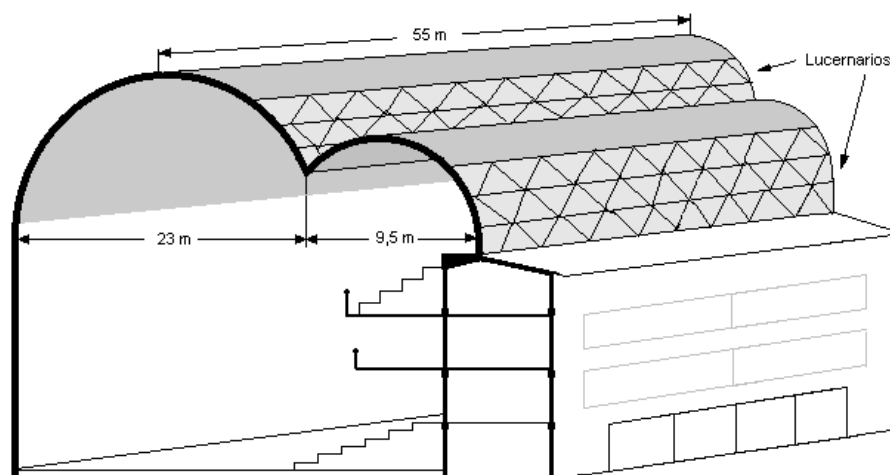
“Cada curva matemática lleva en su ser la justeza de una ley, la expresión de una idea, el pregón de una virtud; y el negarlo, sólo puede buscar excusa en el ciego reducto egoísta de una ignorancia perezosa”.

Pero non se queda Torroja simplemente coa beleza das formas, senón que a adecuación da forma resistente á función, é para el inapelable. Empeñado na mellora das técnicas de construción crea, xunto cun reputado grupo de arquitectos e enxeñeiros, a empresa ICON, da que nacerían, en 1934, o Instituto Técnico de la Construcción y la Edificación e a revista Hormigón y Acero. En 1939, pasado xa o paréntese da Guerra Civil, o Instituto Técnico de la Construcción y la Edificación (actualmente Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja) pasaría a integrarse no Consejo Superior de Investigaciones Científicas. En recoñecemento aos seus méritos científicos, Eduardo Torroja ingresou na Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas e Matemáticas en 1944.

Torroja dicía que “nunca será tan original un problema que no tenga un precedente parecido”. Polo xeral, as evolucións que se producen en arquitectura son lentas. As formas estruturais permanecen, incluso coa evolución dos materiais, tal e como sucede no paso da madeira á pedra nos templos gregos, ou da madeira ao ferro fundido na Inglaterra do século XVIII. Algo parecido sucedeu cando xurdiu o formigón armado no século XIX: os tipos estruturais mantivéronse e pasouse suavemente da pedra ao formigón. Porén, como vimos no Capítulo 3, as láminas de formigón armado presentan un carácter revolucionario, xa que introducen un novo concepto estrutural nunca utilizado anteriormente na historia da construción. Podemos afirmar que Eduardo Torroja rompe coa tradición e presenta, con estruturas como a viga díptera do frontón de Recoletos, unha verdadeira invención tipolóxica, unha creación persoal sin antecedentes previos.

O frontón de Recoletos foi construído en 1935 e representa un dos deseños máis sobresañtes de Torroja. A solución dada á cuberta do recinto (un rectángulo de 55 metros de longo por 32,5 de ancho), consistiu nunha viga díptera formada por dous arcos circulares asimétricos que se cortaban perpendicularmente ao longo dunha xeratriz, cubrindo o máis grande a zona de xogo e parte do graderío baixo e o máis pequeno o graderío alto. A lámina da cuberta era de formigón armado e tiña un espesor de 8 cm. Os únicos apoios

da cuberta son os dous muros frontais, non os laterais, como podería parecer nunha primeira ollada. A cuberta está funcionando como unha viga. Sorprende ademais que os lucernarios, orientados cara o Norte e cunha inclinación que impide a entrada directa do sol, estean colocados nos que parecen os puntos máis débiles da estrutura, a unión dos arcos de circunferencia e a unión co muro lateral.



(a)

Figura 4.1: Esquema do frontón de Recoletos.

Poderíamos dicir que con esta obra Torroja acada unha das súas aspiracións:

“Crear una forma de equilibrio espacial cubriendo un vano con el mínimo de material y aligerar o evitar la costosa cimbra provisional son dos anhelos que se repiten con todos los materiales.”

Outra das súas obras máis representativas é o Hipódromo da Zarzuela. Inaugurado no ano 1941, o seu maior atractivo represéntano as marquesiñas que cubren o graderío, formadas por seccións de hiperboloides dunha folla secantes entre si, de 5 cm. de espesor mínimo e que voan 12,8 metros. Esta cuberta está ancorada posteriormente, mediante tirantes separados 5 metros, á cuberta da sala de apostas posterior.

A marquesiña calculouse por tanteos aproximados para obter as direccións e as intensidades das tensións que se producirían. Posteriormente realizouse

un ensaio a tamaño real dun módulo que se cargou coa sobrecarga de rotura, sen que esta chegara a producirse.



Figura 4.2: Marquesiña do hipódromo da Zarzuela.

Foto: ©Outisnn (cc-by-sa/4.0)

Un exemplo de integración da estrutura e requisitos arquitectónicos é o mercado de Algeciras. A cúpula é tamén o cerramento, os soportes non necesitan de puntais exteriores, que terían ocupado un espazo non dispoñible, a luz penetra polos lunetos periféricos e polo gran lucernario central. A simplicidade é acusada: só dous elementos, a cúpula esférica e as bóvedas cilíndricas radiais que transmiten as forzas internas cara aos apoios. A verdade estrutural é evidente, así como a formal: nada superposto á desnuda superficie matemática, nin exterior nin interiormente. Neste sentido, é interesante a comparación co Palazzetto dello Sport de P. L. Nervi (Figura 4.3), cos seus soportes exteriores inclinados para absorber os empuxes da cúpula e os nervios interiores, derivados do proceso construtivo, que Nervi potenciou visualmente ao interior. Torroja admiraba profundamente a obra de Nervi, do que era un gran amigo, pero nunca utilizou os seus recursos. Para el, a forma xeométrica limpa e espida bastábase a si mesma para expresar un concepto estético.



(a) Mercado de Algeciras. Foto: ©falconaumanni (cc-by-sa/2.5)



(b) Palazzetto dello Sport. Foto: ©Blackcat (cc-by-sa/3.0)

Figura 4.3: Diferenza formal e estrutural.

Como enxeñeiro que foi, Eduardo Torroja construíu tamén un grande número de pontes, entre as que destacaremos, por unha cuestión de cercanía, a ponte do Pedrido, situada sobre a ría de Betanzos. O tramo central está constituído por unha viga atirantada parabólica de formigón armado. (Figura 4.4)

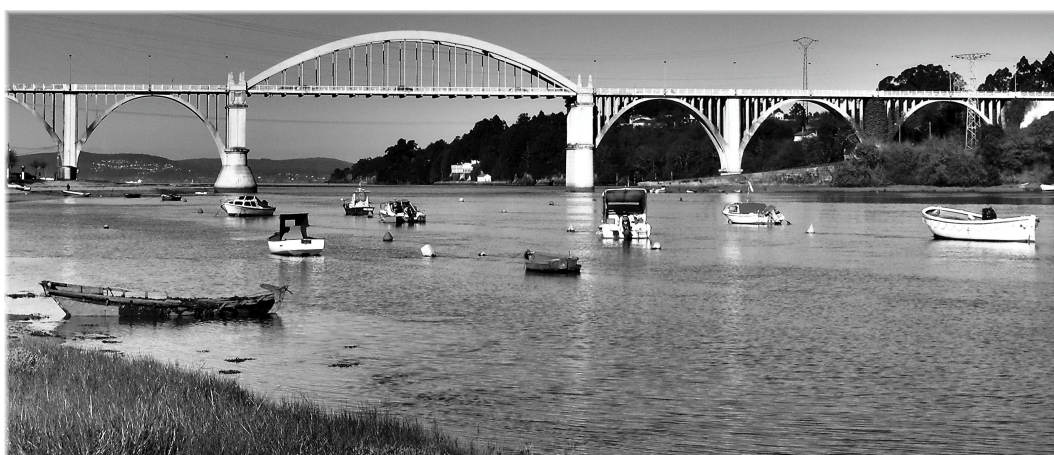


Figura 4.4: Ponte do Pedrido sobre a ría de Betanzos. Foto: ©Jose Luis Cernadas Iglesias (cc-by/2.0)

Reproducimos, para rematar, unhas palabras súas que quizais resuman a idea que Torroja tiña da arquitectura e que este traballo trata de estudar:

“La construcción, la arquitectura, no pueden prescindir de la realidad del fenómeno físico, esto es, de las leyes de la estática. Su

belleza se funda esencialmente sobre la verdad, sobre la racionalidad de la estructura; debe por tanto, poderse lograr sin adiciones ni ornamentaciones externas. Pero, para obtenerla, es necesario un esfuerzo largo y tenaz en el sentido de las íntimas razones de resistencia de las formas. El resultado genial de un momento de inspiración es siempre el epílogo de un drama, que frecuentemente está constituido por toda una vida de trabajo.”

4.2. Obras singulares

Como se explicou anteriormente, tratar de dar un listado completo de obras arquitectónicas características pola súa forma sería algo imposible. Aínda así, queremos facer unha pequena distinción entre varios arquitectos nos que a xeometría foi o fío condutor do seu traballo e outros, nos que esta aparece de forma puntual. É por iso que destacaremos aos seguintes catro arquitectos fronte ao resto.

4.2.1. Eladio Dieste

Eladio Dieste (1917, Salto – 2000, Montevideo) foi un enxeñeiro uruguaio, recoñecido mundialmente polo uso dunha técnica construtiva creada por el.

A obra de Dieste toma o ladrillo e lévao á súa máxima liviandade na creación de superficies curvas a partir dunha nova tecnoloxía, que el denominou *cerámica armada*: construcións abovedadas realizadas con ladrillo, armadura de aceiro e un mínimo de formigón. Este sistema construtivo consegue deseñar finas láminas a partir da combinación de ladrillo, ferro e morteiro, que se constrúen sobre un encofrado móvil.



Figura 4.5: Monumento homenaxe a Eladio Dieste na cidade de Salto, feito coa técnica da cerámica armada. Foto: ©Tano4595 (cc-by-sa/3.0)

A base destas superficies é o deseño; trátase de estruturas capaces de resistir as solicitacións que se exercen sobre elas gracias á súa forma e non á súa masa, o que conleva un requerimento menor de materiais.



(a) Visión frontal.

(b) Interior.

Figura 4.6: Igrexa parroquial en Atlántida (Uruguay).

Fotos: ©Nicolas Barriola (cc-by-sa/3.0)

Este tipo de construcións tivo moita aceptación xa que permiten maior liviandade, prefabricación e sistematización na repetición das súas compoñentes, con custos competitivos para o mercado. A súa obra é obxecto de estudo en distintas universidades e levouno a recibir o título de arquitecto honorario, sendo o único en posuílo en Uruguay.



Figura 4.7: Parroquia do Cristo Obreiro.

Foto: ©Andrés Franchi Ugart... (cc-by-sa/3.0)

4.2.2. Félix Candela

Félix Candela Outeriño (Madrid, 1910 – Durham, 1997) foi un arquitecto español, famoso pola creación de estruturas baseadas no uso extensivo do parabolóide hiperbólico.

Rematou a carreira de arquitectura en 1935, continuando os seus estudos na Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, momento no cal coñece a Eduardo Torroja e as súas técnicas de uso de cubertas de formigón. Despois da Guerra Civil exíliase a México. En 1950 funda cos tamén arquitectos irmáns Fernando Fernández Rangel e Raúl Fernández Rangel a empresa construtora Cubiertas Ala. Durante os 20 anos que esta durou, elaboráronse 1439 proxectos dos que se realizaron 896. A maioría foron de tipo industrial, como a estrutura en forma de paraugas cadrado de cemento co cano de auga de chuvia na columna central, que proliferan por aparcamentos, estacións de servizo e, en xeral, calquera espazo que requira dunha cuberta lixeira, barata, resistente e que ocupe pouco espazo no chan (Figura 4.9). Variantes destas estruturas (parabolóide hiperbólico), utilizáronse en igrexas, onde proporcionan un gran espazo despexado para o culto. O punto culminante da empresa é a edificación do Palacio de los Deportes para a Olimpíada de México 1968.



Figura 4.8: Igrexa de San Antonio de las Huertas en Ciudad de México.
Foto: ©ProtoplasmaKid (cc-by-sa/3.0)



(a) Almacéns John Lewis, diseñados por Félix Candela, Mardell & Rosenberg e Yorke. Foto: ©Chris James (cc-by-sa/2.0 uk)
(b) Estación de servizo diseñada por Norman Foster. Foto: ©Chesgv (cc-by-sa/3.0)

Figura 4.9: Exemplos de estruturas feita con paraboloides hiperbólicos.

Mentres realiza a súa última obra, L'Oceanogràfic, recae d'uhna vella doenza cardíaca polo que deixa Valencia para volver a Raleigh, Estados Unidos, onde falece no Hospital de Duke, Durham (Carolina do Norte).



Figura 4.10: Restaurante submarino L'Oceanografic en Valencia.
Foto: ©Felipe Gabaldón (cc-by-sa/2.0)

4.2.3. Antoni Gaudí

Antoni Gaudí i Cornet (Reus, 1852 – Barcelona, 1926) foi un arquitecto español, máximo representante do modernismo catalán.

Gaudí foi un arquitecto cun sentido innato da xeometría e o volume, así como unha gran capacidade imaxinativa que lle permitía proxectar mentalmente a maioría das súas obras antes de pasalas a planos. De feito, poucas veces realizaba planos detallados das súas obras; prefería recrealos sobre maquetas tridimensionais, moldeando todos os detalles segundo os ía ideando mentalmente. (Figura 4.12). Noutras ocasións, improvisaba sobre a marcha, dando instrucións aos seus colaboradores sobre o que tiñan que facer.

Dotado dunha forte intuición e capacidade creativa, Gaudí concebía os seus edificios dunha forma global, atendendo tanto ás solucións estruturais como ás funcionais e decorativas. Estudaba ata o máis mínimo detalle das súas creacións, integrando na arquitectura toda unha serie de traballos artesanais que dominaba el mesmo á perfección: cerámica, vidrería, forxa de ferro, carpintería, etc. Gaudí creou un estilo personal baseado na observación da natureza, froito do cal aparece a utilización de formas xeométricas regradas, como o parabolóide hiperbólico, o hiperboloide, o helicóide e o conoide.



(a) Espiral.

(b) Interior. Foto: ©SBA73 from Sabadell, Catalunya (cc-by-sa/2.0)

Figura 4.11: Igrexa da Sagrada Familia.

A arquitectura de Gaudí está marcada por un forte selo persoal, caracterizado pola búsqueda de novas solucións estruturais, que logrou despois de toda unha vida adicada á análise da estrutura óptima do edificio, integrado no seu entorno e sendo unha síntese de todas as artes e oficios. Mediante o estudo

e a práctica de novas e orixinais solucións, a obra de Gaudí culminará nun estilo orgánico, inspirado na natureza, pero sin perder a experiencia aportada por estilos anteriores, xerando unha obra arquitectónica que é unha simbiose perfecta da tradición e a innovación.

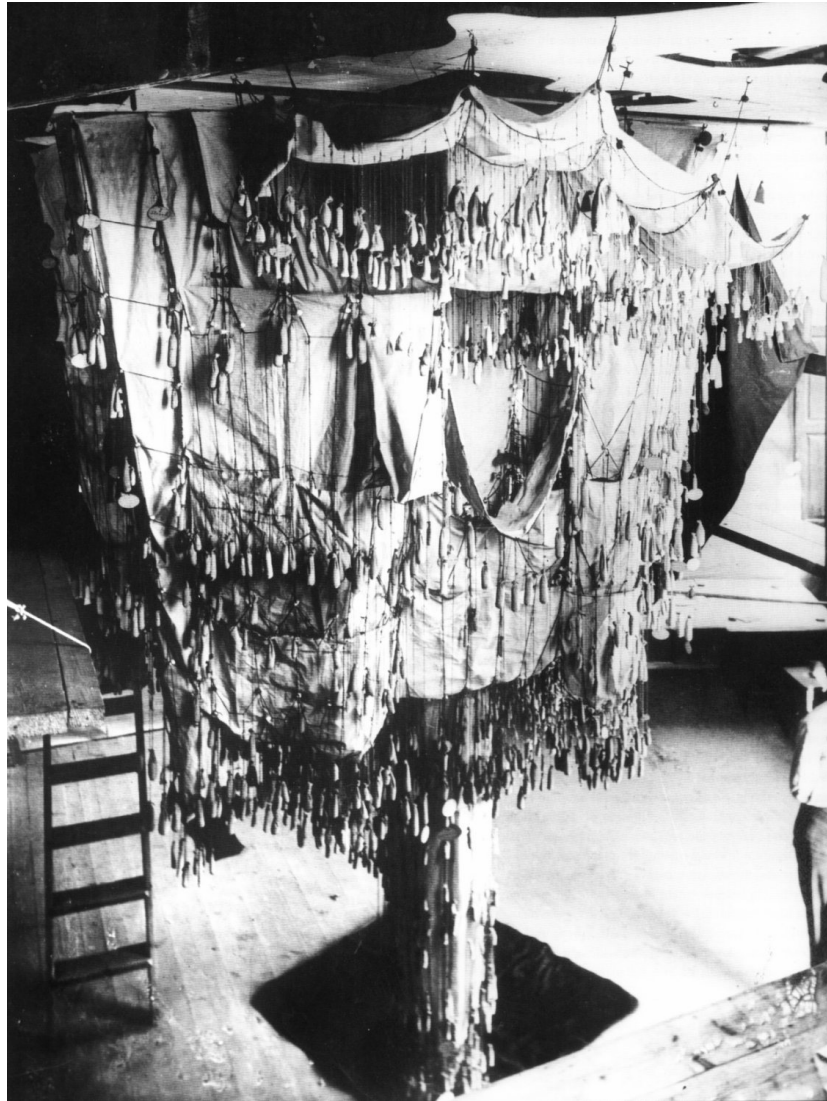


Figura 4.12: Exemplo de maqueta funicular correspondente á capela Güell.



(a) Catenaria na Pedrera.
Foto: ©Error (cc-by-sa/3.0)



(b) Parc Güell.

Figura 4.13: Curvas na arquitectura de Gaudi.

4.2.4. Outros arquitectos



Figura 4.14: Federal Reserve Bank (Minneapolis). Arq. Gunnar Birkerts.

Este edificio é o único no mundo cuxa estrutura funciona como unha ponte colgante. Necesitábase minimizar a cantidade de pilares para facer os espazos de oficinas máis diáfanos e funcionais, así que Birkerts propuxo colgar todas as plantas de dúas catenarias que colgan á súa vez das dúas estruturas monolíticas nos extremos. Para realzar máis esta idea liberáronse os dous primeiros andares permitindo que o ámbito da praza pública continuara por debaixo do edificio.

Este edificio ten entrada a través dunha ampla praza cuberta por unha imponente estrutura de formigón pretensado (malla tesa), inspirada na idea dunha folla de papel apoiada sobre dous ladrillos. Foi clasificado como Monumento de interese público (MIP) polo IGESPAR (Instituto Português do Património Arquitectónico).



Figura 4.15: Pavellón da Expo'98 (Lisboa). Arq. Álvaro Siza. Foto: ©Leon from Taipei, Taiwan (cc-by-sa/2.0)

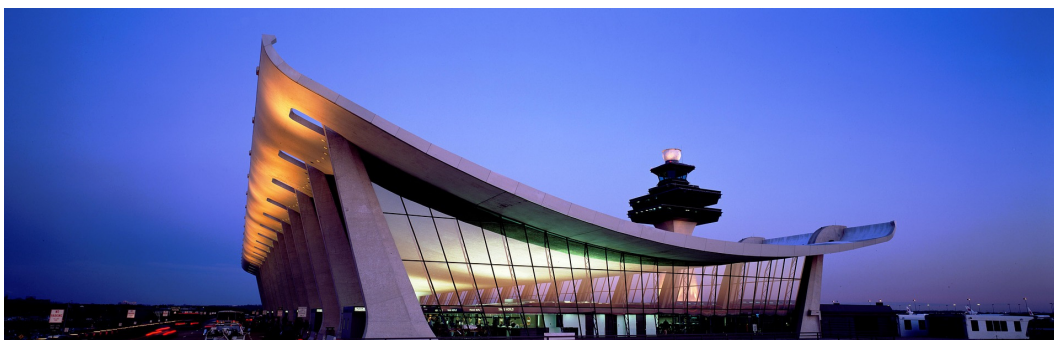


Figura 4.16: Terminal do Aeroporto Internacional de Dulles (Washington D.C.). Arq. Eero Saarinen.

O tellado con forma de catenaria é importante tanto esteticamente como funcionalmente, ademais da estabilidade, flexibilidade e firmeza da estrutura, a súa forma ten a cualidade acústica de facer que o son se disperse rapidamente, algo de gran valor nunha terminal de avións, outra cualidade é que a súa forma permite evitar algúns efectos perniciosos do vento.

Frei Otto é das máis grandes autoridades en estruturas tensadas e de membrada de baixo peso que A J.S. Dorton Arena foi unha das primeiras estruturas con cables funcionando como cuberta. Ditos cables están ancorados a dous arcos parabólicos cruzados e inclinados, de formigón armado. Esta estrutura con forma de sela de montar, cubre unha pranta elíptica aproximada de 97 m por 92 m. Os arcos teñen un ancho de 4,30 m e acadan unha altura máxima de 27,40 m, cruzándose entre si a unha altura de 7,90 m, continuando por debaixo do nivel do piso.



Figura 4.17: J.S. Dorton Arena (Raleigh). Arq. Matthew Nowicki.

Foto: ©Leah Rucker (cc-by-sa/3.0)



Figura 4.18: Estadio de fútbol de Braga. Arq. Eduardo Souto de Moura.

Foto: ©Manuel Anastácio (cc-by-sa/3.0)

Este estadio foi construído na canteira de Monte Castro, sobre a cidade de Braga, con gradas unicamente nos laterales do terreo de xogo. Detrás dun fondo está a roca da canteira e no fondo contrario hai un espazo aberto cunha vista panorámica da cidade. Cada grada lateral cúbrese cunha cuberta, conectadas entre si a través de dúas de cables de aceiro e inspiradas no deseño das pontes construídas polos incas.

Frei Otto é das máis grandes autoridades en estruturas tensadas e de membrada de baixo peso que hai actualmente. Ten encabezado avances na matemática estrutural e enxeñería civil. O seu traballo atópase bastante lonxe dos métodos tradicionais de cálculo de forzas.



Figura 4.19: Estadio olímpico de Munich. Arq. Frei Otto.

Foto: Matthias Schimmelpfennig



Figura 4.20: Millenium Dome.

Arq. Richard Rogers.

Foto: ©Stephen Nunney (cc-by-sa/2.0)

O Millennium Dome é a maior estrutura de teito único do mundo. Posúe 12 torres de suxección de 100 m de altura, unha por cada mes do ano, representando o papel xogado polo Tempo Medio de Greenwich. A súa pranta é circular, de 365 m de diámetro, un por cada día do ano.

Bibliografía

- [1] Chiorino, M. A.: *Eladio Dieste 1917-2000 / a cura di Mercedes Daguerre*, Electa, Milano (2003).
- [2] Docarmo, M.P.: *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid (1990).
- [3] El Naschie, M.S.: *Stress, stability and chaos in structural engineering an energy approach*, McGraw-Hill, cop., London (1990).
- [4] Fernández, J. A., Navarro, J.R.: *Eduardo Torroja. Ingeniero. Engineer*, Pronaos, Madrid (1999).
- [5] Gheorghiu, A., Dragomir, V.: *Geometry of structural forms*, Applied Science Publishers, cop., London (1978).
- [6] Gordon, J.E.: *Estructuras o por qué las cosas no se caen*, Celeste Ediciones, Madrid (1999).
- [7] Hugar, A., Serre, M.: *Enciclopedia de la construcción. Técnicas de construcción/II*, Editores técnicos asociados, Barcelona (1979).
- [8] Ibáñez, R.: El vientre de un arquitecto (La búsqueda de la forma) *Un paseo por la geometría 2003/04*, Departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco (2004).
- [9] Olvera, A.: *Análisis, cálculo y diseño de las bóvedas de cáscara*, CECSA, México (1982).
- [10] Salvadori, M., Levy, M.: *Diseño estructural en arquitectura*, Compañía Editorial Continental S. A., México (1978).
- [11] Salvadori, M., Heller, R.: *Estructuras para arquitectos*, CP67 Editorial, Buenos Aires (1987).

- [12] Salvadori, M.: *Why buildings stand up. The strength of Architecture*, W.W. Norton & Company, New York (1990).
- [13] Torroja, J.A.: Eduardo Torroja, *Ingeniería y territorio*, **79** (2007).
- [14] Torroja, E.: *Razón y ser de los tipos estructurales*, Textos Universitarios, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid (1996).
- [15] Torroja, E.: *Eduardo Torroja, su obra científica*, Asociación de Miembros del Instituto Eduardo Torroja, Madrid (1999).

Imaxes

As imaxes do primeiro capítulo foron creadas con Mathematica e os esquemas do segundo capítulo con AUTOCAD. As imaxes, con licencia creative commons, proveñen das páxinas seguintes:

- *Wikimedia commons*
<http://commons.wikimedia.org/>
- *Flickr*
<http://www.flickr.com/photos/>
- *Información sobre obras de enxeñería e arquitectura*
<http://en.structurae.de/>
- *Sitio web con fotos libres*
<http://www.sxc.hu/>
- *Sitio web con fotos libres de Gran Bretaña e Irlanda*
<http://www.geograph.org.uk/photo/>

Páxinas web

- *Wikipedia*
<http://es.wikipedia.org/wiki/>
- *Wikibooks*
http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Advanced_Mathematics
- *Revista del Colegio de ingenieros de caminos, canales y puertos*
<http://www.ciccp.es/revistait/>

- *Blog sobre arquitectura*
<http://postalesinventadas.blogspot.com>
- *Blog sobre curiosidades*
<http://curiosoperoinutil.com/forum/>

