Marta Sixto Neira

APLICACIONES BIARMÓNICAS: NUEVOS EJEMPLOS

131b

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MARTA SIXTO NEIRA

APLICACIONES BIARMÓNICAS: NUEVOS EJEMPLOS

131b

2017

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Aplicaciones biarmónicas: nuevos ejemplos

Marta Sixto Neira

Xullo 2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen **5**

Introducción **7**

1. Preliminares **11**
1.1. Variedades pseudo-Riemannianas 11
1.2. Conexiones a lo largo de una aplicación 14
1.3. Segunda Forma Fundamental 17

2. Aplicaciones armónicas y biarmónicas **21**
2.1. Aplicaciones armónicas: campo de tensión 22
2.2. Biarmonicidad: campo de bitensión 24

3. Fibrados tangente y cotangente **31**
3.1. Fibrado tangente: levantamiento completo. 31
3.2. Fibrado cotangente: extensión de Riemann 34
3.3. Isomorfismos musicales 36

4. Aplicaciones en fibrados tangentes y cotangentes **41**
4.1. Transformación tangente de una aplicación 41
4.2. Campos de tensores de tipo (1,1) 44
4.3. 1-formas. Aplicación evaluación 46
4.4. Campos de vectores. Aplicación evaluación 48

Bibliografía **51**

Resumen

El objetivo de este trabajo se enmarca en el estudio de aplicaciones entre variedades pseudo-Riemannianas desde un punto de vista geométrico. Como generalización de las isometrías, las aplicaciones armónicas permiten estudiar importantes aspectos geométricos e incluso topológicos. Recientemente se ha iniciado el estudio de las aplicaciones biarmónicas, las cuales desempeñan un papel importante en el estudio de la geometría de subvariedades.

Una vez introducida una estructura matemática, la construcción de ejemplos no triviales de la misma supone un aspecto importante, por lo que en esta memoria nos hemos centrado en la construcción de nuevos ejemplos de aplicaciones biarmónicas que, en la situación genérica, no son armónicas. Hemos estudiado distintos tipos de aplicaciones entre fibrados tangentes y cotangentes (la aplicación tangente de una aplicación, campos de tensores de tipo $(1,1)$, aplicaciones evaluación e isomorfismos musicales), para lo que fue necesario considerar distintos tipos de métricas pseudo-Riemannianas en dichos espacios.

Abstract

The objective of this work fits in the study of smooth maps between pseudo-Riemannian manifolds from a geometrical point of view. As a generalization of isometries, harmonic maps have important applications when considering some geometrical or topological questions. Recently, attention has been paid to the study the biharmonic maps, which play an important role in some aspects of submanifold theory.

Once a mathematical structure is introduced, the construction of nontrivial examples is an important aspect, so herein we have focused on the construction of new examples of biharmonic maps that, in the generic situation, are not harmonic. We have studied various types of applications between tangent and cotangent bundles (the tangent map of an application, tensor fields of type $(1,1)$, evaluation maps and the musical isomorphisms), for which it was necessary to consider different types of pseudo-Riemannian metrics in such spaces.

Introducción

Una de las principales dificultades en geometría pseudo-Riemanniana, en comparación con otros campos de la matemática, es la escasez de aplicaciones entre distintas variedades que permitan comparar sus geometrías. Mientras que las isometrías (locales) proporcionan la relación de equivalencia que permite establecer distintas clases de variedades pseudo-Riemannianas, aplicaciones como las inmersiones o las submersiones tan solo permiten comparar ciertas partes de unas variedades con otras (esencialmente las que se corresponden a través del subfibrado ortogonal al núcleo de la aplicación). Aún así, una vez se dispone de una familia de aplicaciones, es importante medir el grado en el que dicha familia preserva la estructura Riemanniana objeto de estudio.

La segunda forma fundamental de una aplicación (como medida de la diferencia entre las conexiones de Levi-Civita de las variedades dominio e imagen) permite medir la diferencia entre ambas geometrías y, de hecho, las aplicaciones afines son aquellas donde la segunda forma fundamental es idénticamente nula. Generalizando esta idea se ha estudiado la energía de una aplicación (especialmente cuando el dominio es compacto), dando lugar al estudio de las aplicaciones armónicas como aquellas que son valores críticos para el funcional de energía. Este hecho está caracterizado por la anulación de la traza de la segunda forma fundamental, lo que permite establecer un cierto grado de analogía con el estudio de las subvariedades minimales. Las aplicaciones armónicas presentan un alto grado de interés motivado además por sus aplicaciones en distintas cuestiones geométricas y topológicas.

Denotando con $\mathcal{C}(M, N)$ el espacio de las aplicaciones diferenciables entre las variedades pseudo-Riemannianas (M, g) y (N, h), el funcional de energía se construye integrando la norma de la segunda forma fundamental de la aplicación, por lo que las aplicaciones armónicas son claramente generalizaciones de las aplicaciones afines. Así una generalización natural de las aplicaciones armónicas (y de las inmersiones minimales) se puede obtener considerando el funcional obtenido por integración de la norma del campo de tensión de la aplicación (respectivamente de la norma del campo de vectores curvatura media de la subvariedad). Así se introducen las aplicaciones biarmónicas como los puntos críticos del nuevo funcional de bienergía.

El estudio de las aplicaciones biarmónicas ha tenido un amplio desarrollo en los últimos años, con especial atención a dos aspectos básicos. Por un lado la construcción de nuevos ejemplos y la obtención de resultados de clasificación en base a criterios geométricos. Por otro lado, el estudio de aspectos analíticos motivados por el hecho de que las aplicaciones biarmónicas se presentan como soluciones de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden. Mientras que los estudios analíticos se han centrado en el caso Riemanniano, los aspectos geométricos han sido especialmente estudiados en el ámbito de la geometría pseudo-Riemanniana. Nuestro objetivo es contribuir al estudio de las aplicaciones biarmónicas mediante la construcción de nuevos ejemplos.

Las variedades dominio e imagen de los ejemplos que estudiaremos son el fibrado tangente TM y el fibrado contangente T^*M de una variedad dada M. En ambos casos será necesario considerar una estructura pseudo-Riemanniana en ambas variedades para lo que utilizaremos el levantamiento completo g^C a TM de una métrica pseudo-Riemanniana dada en M y la extensión de Riemann g_D a T^*M de una conexión afín sin torsión D en M. En ambos casos la estructura pseudo-Riemanniana tendrá signatura neutra. Además, las variedades (TM, g^C) y (T^*M, g_D) serán localmente isométricas si y solo si la conexión D es la conexión de Levi-Civita de g [9]. Es importante señalar que, aunque las proyecciones naturales de los fibrados tangente y cotangente no son submersiones pseudo-Riemannianas para las métricas g^C y g_D, sí son aplicaciones totalmente geodésicas, lo que las hace especialmente adecuadas para el estudio de problemas de armonicidad.

Los resultados que hemos obtenido de existencia de aplicaciones biarmónicas se resumen como sigue

Isomorfismos musicales

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana. El carácter no degenerado de la métrica permite establecer los *isomorfismos musicales*

$$\flat : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \flat(X) = g(X, \cdot) \in \wedge^1(M),$$

y

$$\sharp : \omega \in \wedge^1(M) \mapsto \sharp(\omega) \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $\sharp(\omega)$ es el campo de vectores en M determinado por la ecuación $g(\sharp(\omega), Y) = \omega(Y)$. Sea $(U, (x^1, \dots, x^m))$ un abierto coordenado en M y consideremos las coordenadas locales en TM y T^*M dadas por $(\pi^{-1}(U), (x^1, \dots, x^m, x^{\bar{1}}, \dots, x^{\bar{m}}))$ y $(\pi^{-1}(U), (x^1, \dots, x^m, x^{\hat{1}}, \dots, x^{\hat{m}}))$, respectivamente (donde denotamos con π las proyecciones naturales, tanto desde el fibrado tangente como desde el cotangente). Entonces, la aplicación $\flat$ se lee en coordenadas como

$$\flat(x^1, \dots, x^m, x^{\bar{1}}, \dots, x^{\bar{m}}) = (x^1, \dots, x^m, x^{\bar{l}} g_{1l}, \dots, x^{\bar{l}} g_{ml}),$$

y la aplicación $\sharp : T^*M \longrightarrow TM$ tiene como expresión

$$\sharp(x^1, \dots, x^m, x^{\hat{1}}, \dots, x^{\hat{m}}) = (x^1, \dots, x^m, x^{\hat{l}} g^{1l}, \dots, x^{\hat{l}} g^{ml}) .$$

Entonces se tiene

Teorema 3.8 *Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana equipada con una conexión afín sin torsión D. Los isomorfismos musicales $\flat : (TM, g^C) \longrightarrow (T^*M, g_D)$ y $\sharp : (T^*M, g_D) \longrightarrow (TM, g^C)$ son siempre aplicaciones biarmónicas.*

Obsérvese que, en la situación genérica, las aplicaciones $\flat$ y $\sharp$ no son armónicas (salvo que la conexión de Levi-Civita y la conexión afín D sean conjugadas).

Transformación tangente de una aplicación

Sea $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ una aplicación entre dos variedades pseudo-Riemannianas. La transformación tangente $f_* : (TM, g^C) \longrightarrow (TN, h^C)$ viene determinada por $f_*(\xi) = f_{*p}(v) \in T_{f(p)}M$, donde $\xi \in TM$ es de la forma $\xi = (p, v)$ para algún punto $p \in M$ y algún vector $v \in T_pM$.

Según se ha probado en [26], la aplicación $f_* : (TM, g^C) \longrightarrow (TN, h^C)$ es armónica (resp., totalmente geodésica) si y solo si la aplicación $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ es armónica (resp., totalmente geodésica). Sin embargo el comportamiento respecto a la biarmonicidad es mucho mejor, lo que proporciona nuevos ejemplos de aplicaciones biarmónicas.

Teorema 4.3 *Para cualquier aplicación $f : (M, g) \to (N, h)$, su transformación tangente $f_* : (TM, g^C) \to (TN, h^C)$ es biarmónica.*

Campos de tensores de tipo $(1, 1)$

Un campo de tensores T de tipo $(1, 1)$ sobre una variedad M puede ser interpretado como una aplicación $T : TM \longrightarrow TM$ definida por $T(\xi) = T_p(v) \in T_pM$, donde $\xi \in TM$ es de la forma $\xi = (p, v)$ para algún punto $p \in M$ y algún vector $v \in T_pM$. Si $(x^1, \ldots, x^m)$ son coordenadas locales en M, la expresión en coordenadas de la aplicación T resulta

$$T(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{m}}) = \left(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{i}}T_1^i, \ldots, x^{\bar{i}}T_m^i\right)$$

donde la funciones T_i^j son las componentes del campo de tensores T.

Teorema 4.6 *Sea T un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ en una variedad pseudo-Riemanniana (M, g). Entonces $T : (TM, g^C) \to (TM, g^C)$ es siempre una aplicación biarmónica.*

Nótese que, sin embargo la aplicación $T : (TM, g^C) \to (TM, g^C)$ no es armónica en general [9].

Aplicaciones evaluación

Las aplicaciones evaluación son la clave que permite extender objetos de una variedad a su fibrado tangente o cotangente. Toda 1-forma ω en M puede ser vista como una función $\iota\omega : TM \to \mathbb{R}$ definida por $\iota\omega(p, z) = \omega_p(z)$ que tiene como expresión en coordenadas:

$$\iota\omega(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}} \ldots, x^{\bar{m}}) = \sum_{l=1}^{m} \omega_l x^{\bar{l}}$$

donde $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i$.

Teorema 4.8 *Sea $\omega \in \wedge^1(M)$ una 1-forma en la variedad (M, g). Entonces la aplicación evaluación $\iota\omega : (TM, g^C) \to \mathbb{R}$ es una función biarmónica.*

De forma análoga, para cada campo de vectores X en la variedad base M, la aplicación evaluación $\iota X : T^*M \to \mathbb{R}$ está definida por $\iota X(p, \omega) = \omega(X_p)$. Si $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es la expresión local en coordenadas de un campo de vectores en M, su evaluación se lee en las coordenadas inducidas como $\iota X(x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{1}}, \ldots, x^{\hat{m}}) = \sum_{i=1}^m x^{\hat{i}} X^i$.

Teorema 4.10 *Sea X un campo de vectores en la variedad afín (M, D). Entonces la aplicación evaluación $\iota X : (T^*M, g_D) \to \mathbb{R}$ es una función biarmónica.*

De nuevo debe notarse que tanto la evaluación de campos de vectores como de formas no son aplicaciones armónicas en general.

Finalmente, es importante señalar que, un aspecto destacado de todas las familias de aplicaciones consideradas, es el hecho de que todas ellas son isotropicamente armónicas, es decir el campo de tensión es luminoso ($\|\tau\|^2 = 0$) pero no nulo ($\tau \neq 0$).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo fijaremos la notación que será utilizada a lo largo de la memoria y, al mismo tiempo, estableceremos las definiciones que motivan el estudio realizado en los capítulos posteriores. Las demostraciones de los resultados presentados a continuación se encuentran detalladas en monografías tanto de geometría Riemanniana como pseudo-Riemanniana [10, 19], por lo que omitiremos los detalles de las mismas.

1.1. Variedades pseudo-Riemannianas

En esta sección fijaremos el contexto de nuestro trabajo junto con los convenios que serán empleados a lo largo de la memoria. El objeto principal de interés en nuestro estudio son las variedades pseudo-Riemannianas. Una *variedad pseudo-Riemanniana* es una variedad diferenciable M de dimensión m equipada con un tensor métrico g (i.e., simétrico y no degenerado) de signatura $(\nu, m-\nu)$. El par (M, g) denotará una variedad pseudo-Riemanniana de signatura $(\nu, m-\nu)$. En el caso particular en que $\nu = 0$ diremos que (M, g) es una *variedad de Riemann* y si $\nu = 1$ (M, g) se denomina *variedad de Lorentz*. Denotaremos por T_pM el espacio tangente a M en un punto $p \in M$ y por TM el fibrado tangente a la variedad. El fibrado cotangente se denotará por T^*M. Tanto el fibrado tangente como el fibrado cotangente a una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) jugarán un papel esencial en nuestro estudio y su geometría será revisada en el Capítulo 3 de esta memoria.

Consideraremos $\Gamma(TM)$ el espacio de todos los campos de vectores tangentes a M. Como regla general, los campos de vectores vendrán representados por letras mayúsculas $X, Y, Z, \dots$ y los vectores tangentes en cada punto de la variedad por letras minúsculas $x, y, z, \dots$. Siguiendo la notación habitual en geometría pseudo-Riemanniana, heredada de la Teoría de la Relatividad, un vector distinto de cero $z \in T_pM$ diremos que es *temporal* si $g(z, z) < 0$, *espacial* si $g(z, z) > 0$ y *nulo* o *luminoso* si $g(z, z) = 0$.

Una *conexión lineal o afín* sobre una variedad diferenciable M es una aplicación: $D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ definida como $D(X, Y) = D_X Y$, verificando

1. $D_{\varphi X + \psi Y} Z = \varphi D_X Z + \psi D_Y Z$,

2. $D_X(\lambda Z + \mu W) = \lambda D_X Z + \mu D_X W$,

3. $D_X(\varphi Z) = (X\varphi)Z + \varphi \nabla_X Z$,

para cualesquiera funciones diferenciables φ y ψ, para todo X, Y, Z, $W \in \Gamma(TM)$ y para todo λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Asociado a toda conexión afín D se define la *torsión de* D, T, como el tensor de tipo $(2,1)$ dado por: $T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ del siguiente modo: $T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]$, donde $[\cdot,\cdot]$ denota el corchete de Lie de campos de vectores. Una conexión lineal se dice *libre de torsión* o *simétrica* si T es idénticamente nulo.

Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana. Diremos que una conexión lineal D *es métrica o compatible con* g si hace paralela a la métrica, $D_X g = 0$ para cualquier $X \in \Gamma(TM)$ o equivalentemente: $D_X g(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X, Z)$ para cualesquiera X, Y, Z campos de vectores en M.

Para cada variedad pseudo-Riemanniana (M,g) tenemos determinada de modo único la *conexión de Levi-Civita*, ∇, asociada a ella, como la única conexión libre de torsión que hace paralela a la métrica g. La *fórmula de Koszul* nos da la expresión de tal conexión:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(X,[Z,Y]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

donde X, Y, Z son campos de vectores sobre M

Una vez obtenida la conexión de Levi-Civita nos apoyamos en ella para construír el *operador de curvatura* R (o tensor de curvatura de tipo $(1,3)$) según el convenio

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

y definimos el *tensor curvatura* de tipo $(0,4)$ asociado como

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V).$$

El tensor curvatura presenta las siguientes simetrías algebraicas:

$$\begin{aligned} &(a) \quad R(X,Y,Z,V) = -R(Y,X,Z,V) = -R(X,Y,V,Z), \\ &(b) \quad R(X,Y,Z,V) + R(Y,Z,X,V) + R(Z,X,Y,V) = 0, \\ &(c) \quad R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

y la identidad diferencial:

$$(d) \quad (\nabla_X R)(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,U,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,U,V) = 0. \tag{1.2}$$

Nos referiremos a las identidades (b) y (d) como primera y segunda identidad de Bianchi, respectivamente. Una clase especial de variedades que verifican trivialmente la segunda identidad de Bianchi son las variedades localmente simétricas. Una variedad es *localmente* *simétrica* si las reflexiones geodésicas con respecto a cada punto son isometrías. La curvatura de dichas variedades es relativamente simple puesto que se caracterizan por la anulación de su derivada covariante, i.e. $\nabla R = 0$.

El tensor de curvatura de una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) codifica una cantidad enorme de información, la cual es tremendamente complicada de manipular. Por ello, a partir de él se definen de forma natural ciertos tensores que nos permiten extraer una parte de ella para poder obtener conclusiones sobre la geometría de la variedad. La *curvatura seccional* de una variedad Riemanniana (M, g) es una función real K definida sobre la Grassmanniana de 2-planos como

$$K(\pi) = \frac{R(x, y, x, y)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2},$$

para todo 2-plano $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$ en T_pM. En el caso pseudo-Riemanniano, la definición anterior debe restringirse a la Grassmanniana de 2-planos no degenerados (i.e., donde $g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2 \neq 0$), lo que impide garantizar la acotación puntual de dicha función. La posibilidad de extender K con continuidad a toda la Grassmanniana es equivalente a la constancia de la misma [5]. En tal caso el tensor curvatura se escribe como

$$R(x, y, z, v) = \kappa \left(g(x, z)g(y, v) - g(y, z)g(x, v)\right),$$

donde κ es la constante dada por la curvatura seccional de la variedad.

El *tensor de Ricci* ρ y la *curvatura escalar* τ se definen como las trazas

$$\rho(x, y) = \text{traza}\,\{z \mapsto R(x, z)y\}, \qquad \tau = \text{traza}\ \rho.$$

En una base arbitraria $\{v_1, \dots, v_n\}$ de T_pM, denotando con $g_{ij} = g(v_i, v_j)$, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$\rho(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R(x, v_i, y, v_j), \qquad \tau = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \rho(v_i, v_j),$$

donde (g^{ij}) denota la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica. Un tipo de variedades cuyo tensor de Ricci se expresa de un modo muy simple son las variedades de Einstein. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica. En tal caso se tiene que $\rho = \frac{\tau}{n} g$.

Se define el *tensor de Weyl* de una variedad pseudo-Riemanniana a como

$$\begin{aligned} W(x, y, z, v) = R(x, y, z, v) &+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(x, z)g(y, v) - g(y, z)g(x, v)\} \\ &- \frac{1}{n-2}\{\rho(x, z)g(y, v) - \rho(y, z)g(x, v) \\ &\qquad + \rho(y, v)g(x, z) - \rho(x, v)g(y, z)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo $x, y, z, v \in T_pM$.

El significado geométrico del tensor de Weyl aparece en el estudio de la geometría conforme. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *localmente conformemente llana* si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U, $p \in U$, y un cambio conforme e^σ, $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g = e^\sigma g_0$ donde g_0 es la métrica del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{E}^n_\nu$. El tensor de Weyl caracteriza los espacios localmente conformemente llanos en dimensión $n \geq 4$ en términos de su anulación (nótese que $W = 0$ en dimensión $n = 3$). Es por ello que las variedades 3-dimensionales localmente conformemente llanas han de ser tratadas de modo diferenciado. Una variedad de dimensión tres es localmente conformemente llana si su *tensor de Schouten*, $C = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)}g\right)$, es Codazzi, esto es $(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$.

1.2. Conexiones a lo largo de una aplicación

En esta sección mostraremos ciertos conceptos relacionados con aplicaciones definidas entre variedades pseudo-Riemannianas. Con el fin de hacer lo más autocontenida esta memoria se harán con detalle las demostraciones de los principales resultados. A lo largo de esta sección denotaremos por (M, g) y (N, h) variedades pseudo-Riemannianas de dimensiones m y n respectivamente y, sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación entre dichas variedades.

Definición 1.1. Un *campo de vectores* X *a lo largo de una aplicación* f es una aplicación $X : M \longrightarrow TN$ si para cada punto $p \in M$, se tiene que $X(p) \in T_{f(p)}N$.

Al conjunto de todos los campos de vectores a lo largo de f lo denotaremos por $\Gamma_f(TN)$. En particular se tiene que si $M = N$ y tomamos f como la aplicación identidad id entonces $\Gamma_{f=\mathrm{id}}(TM)$ es el conjunto de campos de vectores en M, $\Gamma(TM)$.

Observación 1.2. Si consideramos $f : M \longrightarrow N$ una aplicación entre variedades pseudo-Riemannianas y, $X \in \Gamma(TM)$ la aplicación $f_*X : M \longrightarrow TN$ dada por $(f_*X)(p) = f_{*_p}X(p)$ define un campo de vectores a lo largo de f, donde $f_* : TM \longrightarrow TN$ es la aplicación tangente de f. Además, si $Y \in \Gamma(TN)$ entonces $Y \circ f$ es un campo de vectores a lo largo de f.

Un concepto central para nuestro trabajo es el de una conexión a lo largo de una aplicación la cual se demuestra a continuación.

Definición 1.3. Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación entre variedades pseudo-Riemannianas. Una aplicación aplicación $\bar{\nabla} : \Gamma(TM) \times \Gamma_f(TN) \longrightarrow \Gamma_f(TN)$ es una *conexión en* N *a lo largo de* f si para cualesquiera X, $Y \in \Gamma(TM)$ y U, $V \in \Gamma_f(TN)$, verifica que:

1. $\bar{\nabla}_{X+Y}U = \bar{\nabla}_X U + \bar{\nabla}_Y U$,
2. $\bar{\nabla}_{\varphi X}U = \varphi\bar{\nabla}_X U, \quad \varphi \in C^\infty(M)$,
3. $\bar{\nabla}_X(U + V) = \bar{\nabla}_X U + \bar{\nabla}_X V$,
4. $\bar{\nabla}_X(\varphi U) = X(\varphi)U + \varphi\bar{\nabla}_X U, \quad \varphi \in C^\infty(M)$.

Como caso particular se tiene que si $f = id$ y $M = N$, $\bar{\nabla}$ es una conexión lineal en M. Es importante destacar que de la definición anterior se tiene de forma directa que cualquier conexión a lo largo de una aplicación es lineal en su primer argumento. Además, se tiene que $(\bar{\nabla}_X U)(p)$ depende únicamente del valor de X en el punto p [7, Proposition 2.1.1].

Dado una aplicación $f : M \longrightarrow N$ entre dos variedades y, dada D una conexión lineal en N, se puede determinar de forma única una conexión a lo largo de f, $\bar{\nabla}$, en N, con una buena relación de compatibilidad con la conexión lineal D en N como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación y sea ${}^N D$ una conexión lineal en N. Entonces existe una única conexión $\bar{\nabla}$ en N a lo largo de f tal que para todo $Y \in \Gamma(TN)$,*

$$\bar{\nabla}_X(Y \circ f) = {}^N D_{f_* X} Y.$$

Demostración. Unicidad: Sea $\{Y_1 \ldots , Y_n\}$ una base local en TN. Consideremos $Y \in \Gamma_f(TN)$, de modo que en coordenadas locales se expresa como $Y = \sum_{i=1}^n \varphi^i (Y_i \circ f)$, donde $\varphi^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ para todo $i = 1, \ldots , n$. Por lo tanto, si $\bar{\nabla}$ es una conexión en N a lo largo de f, entonces, para cada $X \in \Gamma(TM)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \textstyle\sum_{i=1}^n X(\varphi^i)(Y_i \circ f) + \sum_{i=1}^n \varphi^i \bar{\nabla}_X (Y_i \circ f) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n X(\varphi^i)(Y_i \circ f) + \sum_{i=1}^n \varphi^{i\,N} D_{f_* X} Y_i. \end{aligned}$$

Por lo que $\bar{\nabla}$ está completamente determinado por ∇^N, con lo que queda demostrada su unicidad.

Existencia: Definamos localmente $\bar{\nabla}$ por la fórmula anterior. Definida de esta forma es inmediato ver que $\bar{\nabla}$ es una conexión en N a lo largo de f con $\bar{\nabla}_X(Y \circ f) = {}^N D_{f_* X} Y$, donde $X \in \Gamma(TM)$ e $Y \in \Gamma(TN)$. Entonces, usando la unicidad, estas definiciones locales dan lugar a la definición global para $\bar{\nabla}$.

$\square$

Si consideramos $f : M \longrightarrow N$ una aplicación entre variedades y D una conexión en N. Entonces la única conexión $\bar{\nabla}$ en N a lo largo de f es el *pullback de D a lo largo de f*.

El siguiente resultado nos muestra ciertas propiedades de considerar $D = \nabla$ la conexión de Levi-Civita de una variedad pseudo-Riemanniana (N, h).

Teorema 1.5. *Sea M una variedad y (N, h) una variedad pseudo-Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. Si $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación entonces el pullback de ∇, el cual también denotaremos por ∇, verifica las siguientes propiedades:*

(1) $Xh(U, W) = h(\nabla_X U, W) + h(U, \nabla_X W)$, $X \in \Gamma(TM)$, U, $W \in \Gamma_f(TN)$,

(2) $\nabla_X f_* Y - \nabla_Y f_* X = f_*[X, Y]$, X, $Y \in \Gamma(TM)$.

Demostración. Empezaremos por demostrar la propiedad (1). Para ello, sean $X \in \Gamma(TM)$ y $X' \in \Gamma(TN)$ verificando que $f_*X = X' \circ f$, y sean U, $V \in \Gamma(TN)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&Xh(U \circ f, V \circ f) - h(\nabla_X(U \circ f), V \circ f) - h(U \circ f, \nabla_X(V \circ f)) \\
&= (f_*X)h(U,V) - h(\nabla_{f_*X}U, V \circ f) - h(U \circ f, \nabla_{f_*X}V) \\
&= (X' \circ f)h(U,V) - h(\nabla_{X'\circ f}U, V \circ f - h(U \circ f, \nabla_{X'\circ f}V) \\
&= (X'h(U,V)) \circ f - h(\nabla X'U, V) \circ f - h(U, \nabla_{X'}V)) \circ f \\
&= (X'h(U,V) - h(\nabla_{X'}U, V) - h(U, \nabla_{X'}V)) \circ f \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\mathcal{T} : \Gamma(TM) \times \Gamma_f(TN) \times \Gamma_f(TN) \longrightarrow C^\infty(M)$$

definida por

$$\mathcal{T}(X, U, V) = Xh(U, V) - h(\nabla_X U, V) - h(U, \nabla_X V)$$

que es lineal en todos sus argumentos. Entonces, puesto que el conjunto de todos los campos $Y \circ f \in \Gamma_f(TN)$, donde $Y \in \Gamma(TN)$, contiene una base local de campos para $\Gamma_f(TN)$ sobre $C^\infty(M)$, por lo que se sigue de la linealidad de $\mathcal{T}$ que $\mathcal{T}(X, U, V) = 0$ para todo $X \in \Gamma(TM)$, y U, $V \in \Gamma_f(TN)$.

A continuación consideramos la segunda identidad (2) en el Teorema 1.5. Sean X, $Y \in \Gamma(TM)$ y X', $Y' \in \Gamma(TN)$ tales que $f_*X = X' \circ f$ y $f_*Y = Y' \circ f$. Entonces

$$\nabla_X f_*Y = \nabla_X(Y' \circ f) = \nabla_{f_*X}Y' = \nabla_{X'\circ f}Y' = (\nabla_{X'}Y') \circ f,$$

de forma similar se tiene que

$$\nabla_Y f_*X = (\nabla_{Y'}X') \circ f, \qquad \text{y} \quad f_*[X, Y] = [X', Y'] \circ f.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\nabla_X f_*Y - \nabla_Y f_*X - f_*[X, Y] = (\nabla_{X'}Y' - \nabla_{Y'}X' - [X', Y']) \circ f = 0.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\mathfrak{T} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma_f(TN)$$

definida por

$$\mathfrak{T}(X, Y) = \nabla_X f_*Y - \nabla_Y f_*X - f_*[X, Y]$$

que se sigue inmediatamente que es lineal. Además, puesto que el conjunto de todos los $Z \circ f \in \Gamma_f(TN)$, donde $Z \in \Gamma(TN)$, contiene una base local de campos para $\Gamma_f(TN)$ sobre $C^\infty(M)$, se sigue que debido a la linealidad de $\mathfrak{T}$ que $\mathfrak{T}(X, Y) = 0$ para todo X, $Y \in \Gamma(TM)$. □

En el siguiente resultado se estudian conceptos geométricos relacionados con el pullback de la conexión de Levi-Civita a lo largo de una curva.

Proposición 1.6. *Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana y sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de (M, g). Denotaremos por ∇ el pullback de ∇ a lo largo de γ. Si $x \in T_{\gamma(t_0)}M$, donde $t_0 \in I$, entonces existe un único $X \in \Gamma_\gamma(TM)$ con $X(t_0) = x$ y tal que $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0$.*

Demostración. Consideremos $\{X_1, \ldots, X_m\}$ una base de campos para $\Gamma_\gamma(TM)$ sobre $C^\infty(\mathbb{R})$. Entonces se $\nabla_{\frac{d}{dt}} X_i$ se puede escribir con respecto a dicha base como

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X_i = \sum_{j=1}^{m} a_i^j X_j,$$

donde $a_i^j : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq m$. Fijémonos que, si $X \in \Gamma_\gamma(TM)$ entonces con respecto a la base de campos X_i se puede expresar como $X = \sum_{i=1}^m \varphi^i X_i$, donde $\varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d}{dt}} X &= \sum_{i=1}^{m} \frac{d\varphi^i}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i \nabla_{\frac{d}{dt}} X_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{d\varphi^i}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \varphi^i a_i^j X_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{d\varphi^i}{dt} + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i a_i^j X_j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\{X_1, \ldots, X_m\}$ es una base se tiene que $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0$ si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{d\varphi^i}{dt} + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i a_i^j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Este sistema es un sistema de ecuaciones de primer orden y por lo tanto dada la condición inicial $(\varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^m(t_0))$, tiene solución única. Por lo tanto, considerando el valor inicial $X(t_0) = x = \sum_{i=1}^m \varphi^i(t_0) X_i(t_0)$, existe un único campo $X \in \Gamma_\gamma(TM)$ tal que $X(t_0) = x$ y $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0$, lo cual concluye la prueba.

$\square$

1.3. Segunda Forma Fundamental

En esta sección introduciremos el concepto de segunda forma fundamental de una aplicación entre variedades pseudo-Riemannianas. La segunda forma fundamental aparece en diversos contextos pseudo-Riemannianos y fue estudiada extensivamente en la literatura. Nosotros la estudiaremos desde el punto de vista de las aplicaciones entre variedades pseudo-Riemannianas.

Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación. Como ya vimos, si $X \in \Gamma(TM)$ entonces $f_*X \in \Gamma_f(TN)$. Esto nos permite considerar f_* como una aplicación de la forma:

$$f_* : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma_f(TN).$$

Inmediatamente se obtiene que f_* es lineal en cada uno de sus argumentos. La siguiente definición es crucial en nuestro estudio.

Definición 1.7. Sea $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ una apliación entre variedades pseudo-Riemannianas. La *segunda forma fundamental de* f es la aplicación

$$\nabla f_* : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma_f(TN),$$

definida por

$$\nabla f_*(X, Y) = {}^N\nabla_X f_*Y - f_*({}^M\nabla_X Y).$$

El siguiente ejemplo justifica la nomenclatura de segunda forma fundamental.

Observación 1.8. Consideremos (M, g) y (N, h) dos variedades de Riemann de modo que $m + 1 = n$, de modo que $\iota : M \hookrightarrow N$ es una inmersión isométrica. Por lo tanto, la métrica en M se puede ver como el pullback de la métrica en N, i.e. $g = \iota^*h$. Denotaremos por ξ el campo vectorial unitario y normal a la inmersión. Por lo tanto para cada par de campos X, $Y \in \Gamma(TM)$ se verifica la ecuación de Gauss:

$${}^N\nabla_X Y = {}^M\nabla_X Y + II(X, Y)\xi,$$

donde II se denomina segunda forma fundamental y se corresponde con la componente normal a la inmersión de ${}^N\nabla_X Y$. Por otro lado es simple comprobar que II se corresponde con la segunda forma fundamental de la inmersión isométrica ι. Se dice que una hipersuperficie es *totalmente geodésica* si y sólo si toda geodésica en M en también geodésica en N. Las hipersuperficies totalmente geodésicas están caracterizadas por la anulación de su segunda forma fundamental, i.e. $II = \nabla\iota_* = 0$.

El caso en que la traza de la segunda forma fundamental de la inmersión se anule, diremos que la hipersuperficie es *minimal*. La existencia de hipersuperficies minimales está relacionada con el hecho de que la inclusión ι sea una función armónica, concepto éste que será introducido en el Capítulo 2.

Definición 1.9. Sea $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ una aplicación entre variedades pseudo-Riemannianas. Entonces, f se dice *afín* si su segunda forma fundamental se anula, i.e. $\nabla f_* = 0$.

El siguiente teorema es un resultado de caracterización geométrica de aplicaciones afines.

Teorema 1.10. *Sea $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ una aplicación entre variedades pseudo-Riemannianas. Entonces, f es una aplicación afín si y sólo si envía geodésicas de (M,g) en geodésicas en (N,h).*

A continuación, y puesto que la segunda forma fundamental jugará un papel central en nuestro estudio, analizaremos con detalle alguna de sus propiedades más relevantes.

Proposición 1.11. *La segunda forma fundamental de una aplicación $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ es tensorial.*

Demostración. A lo largo de la demostración consideraremos $\varphi, \phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección natural. Para nuestra demostración necesitaremos previamente ver la linealidad de la aplicación tangente f_*.

$$\begin{aligned} f_*(\varphi X) &= f_{*\pi(\varphi X)}\varphi(\pi(X))X(\pi(X)) \\ &= \varphi(\pi(X))f_{*\pi(X)}(X(\pi(X))) \\ &= \varphi f_* X\,. \end{aligned}$$

Por lo que ahora ya estamos en condiciones de ver que ∇f_* es lineal debido a la linealidad de la conexión de Levi-Civita de una métrica pseudo-Riemanniana y de f_*.

$$\begin{aligned} (\nabla f_*)(\phi X, \varphi Y) &= {}^N\nabla_{\phi X} f_*(\varphi Y) - f_*({}^M\nabla_{\phi X}(\varphi Y)) \\ &= \phi\left({}^N\nabla_X(\varphi f_* Y)\right) - f_*(\phi\left(X(\varphi)Y + \varphi {}^M\nabla_X Y\right)) \\ &= \phi\left(X(\varphi)f_*Y + \varphi {}^N\nabla_X f_* Y - X(\varphi)f_*Y - \varphi f_*({}^M\nabla_X Y)\right) \\ &= \phi\varphi(({}^N\nabla_X f_* Y) - f_*({}^M\nabla_X Y)) \\ &= \phi\varphi(\nabla f_*)(X,Y). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.12. *La segunda forma fundamental ∇f_*, de una aplicación $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ entre variedades pseudo-Riemannianas, es simétrica.*

Demostración. Probaremos que para cualquier par de campos $X, Y \in \Gamma(TM)$, se tiene que $\nabla f_*(X,Y) = \nabla f_*(Y,X)$. Para ello usaremos la definición de la segunda forma fundamental de una aplicación y el Teorema 1.5 en esta cadena de igualdades.

$$\begin{aligned} (\nabla f_*)(X,Y) &= {}^N\nabla_X f_* Y - f_*({}^M\nabla_X Y) \\ &= {}^N\nabla_Y f_* X + f_*[X,Y] - f_*({}^M\nabla_Y X) - f_*[X,Y] \\ &= {}^N\nabla_Y f_* X - f_*({}^M\nabla_Y X) \\ &= (\nabla f_*)(Y,X). \end{aligned}$$

□

Observación 1.13. Resulta de gran interés conocer la expresión en coordenadas de la segunda forma fundamental de una aplicación $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$. Para ello, sea $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ una carta coordenada en M y $(V, (y^1, \ldots, y^n))$ una carta coordenada en N de tal forma que $f(U) \subset V$ y $y^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^m)$ con $\alpha = 1, \ldots, n$.

Entonces la expresión en coordenadas de la segunda forma fundamental viene dada por:

$$(\nabla f_*)^\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}(x) - {}^M\Gamma^k_{ij}(x)\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k}(x) + {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(f(x))\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\right)(x),$$

en donde ${}^M\Gamma$ y ${}^N\Gamma$ denotan los símbolos de Christoffel correspondientes a las conexiones de Levi-Civita de g y h respectivamente.

Observación 1.14. Desde un punto de vista formal, la segunda forma fundamental de una aplicación $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ puede interpretarse como un campo de tensores tipo $(1, 2)$ a lo largo de la aplicación. Utilizando la métrica del dominio es posible construir su traza, que será el campo de vectores a lo largo de la aplicacion

$$\tau(f) = g^{ij}(\nabla f_*)(\partial x^i, \partial x^j).$$

El campo de vectores a lo largo de la aplicación $\tau(f)$ recibe el nombre de *campo de tensión de la aplicación* f y será el objeto central de estudio en el Capítulo 2.

Utilizando la expresión anterior en coordenadas de la segunda forma fundamental, el campo de tensión se expresa como

$$\tau(f)=\sum_\gamma g^{ij}\left\{\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}(x)-{}^M\Gamma^k_{ij}(x)\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k}(x)+{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(f(x))\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}\right)(x)\right\}\partial y^\gamma.$$

Capítulo 2

Aplicaciones armónicas y biarmónicas

Las aplicaciones armónicas y biarmónicas han sido introducidas en términos de valores críticos correspondientes a ciertos funcionales de energía para aplicaciones entre variedades. En este capítulo recordaremos dicha motivación y obtendremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para los problemas variacionales asociados a la armonicidad y biarmonicidad. Dichas ecuaciones proporcionan las definiciones actualmente utilizadas tanto para el estudio de las aplicaciones armónicas y biarmónicas entre variedades no compactas como para su extensión al ámbito de la geometría pseudo-Riemanniana.

Como ya se ha puesto de manifiesto en el capítulo anterior, el campo de tensión de una aplicación es un campo de vectores a lo largo de la aplicación, por lo que es importante analizar la extensión del teorema clásico de la divergencia para campos de vectores a lo largo de una aplicación.

Sean (M^m, g) y (N^n, h) dos variedades pseudo-Riemannianas y sea $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ una aplicación entre ambas. Denotemos por $\bar{\nabla}$ la conexión a lo largo de la aplicación f, según se ha establecido en el capítulo anterior. Denotemos por f_* la diferencial de la aplicación f. La *aplicación adjunta* de f_*, que denotamos por ${}^*f_*$, es la aplicación determinada por $g(X, {}^*f_*(Y)) = h(f_*(X), Y)$.

Se define la *divergencia* de un campo de vectores a lo largo de la aplicación $Z \in \Gamma_f(TN)$ como

$$\operatorname{div} Z = \operatorname{traza} {}^*f_* \bar{\nabla} Z.$$

Es importante señalar que este operador coincide con la divergencia usual para campos de vectores a lo largo de la aplicación identidad.

A fin de expresar el operador divergencia en términos de referencias adaptadas, consideremos una referencia local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de TM de tal manera que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(Z) = \operatorname{traza} {}^*f_* \bar{\nabla} Z &= \textstyle\sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) g(({}^*f_* \bar{\nabla} Z)(e_i), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) g({}^*f_{*\pi(e_i)} \bar{\nabla}_{e_i} Z, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) h(\bar{\nabla}_{e_i} Z, f_* e_i)
\end{aligned}$$

en donde $\pi : TM \longrightarrow M$ es la proyección.

Como consecuencia se tiene que

$$\operatorname{div}{}^* f_* Z = \operatorname{div} Z + h(Z, \tau(f)), \tag{2.1}$$

identidad que utilizaremos en el estudio de las aplicaciones armónicas. De hecho,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}{}^* f_* Z)(p) &= \textstyle\sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) g(\nabla_{e_i}({}^* f_* Z), e_i)\}(p) \\
&= \sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) e_i g({}^* f_* Z, e_i)\}(p) \\
&= \sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) e_i h(Z, f_* e_i)\}(p) \\
&= \sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) h(\bar{\nabla}_{e_i} Z, f_* e_i)\}(p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) h(Z, \bar{\nabla}_{e_i} f_* e_i)\}(p) \\
&= \sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) h(\bar{\nabla}_{e_i} Z, f_* e_i)\}(p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \{g(e_i, e_i) h(Z, (\bar{\nabla} f_*)(e_i, e_i))\}(p) \\
&= \operatorname{div} Z + h(Z, \tau(f)).
\end{aligned}$$

2.1. Aplicaciones armónicas: campo de tensión

Sea $f : (M^m, g) \to (N^n, h)$ una aplicación diferenciable. Se define la *densidad de energía de f* como

$$e(f) := \frac{1}{2} \|f_*\|^2.$$

Asumiendo ahora que la variedad M es compacta (o en su caso que la función f tiene soporte compacto), se define el *funcional de energía de la aplicación f* como

$$E(f) := \int_M e(f) dM\,,$$

siendo dM el elemento de volumen riemanniano de (M, g).

En esta situación, se dice que una aplicación f es *armónica* si es un punto crítico de su funcional de energía $E(f)$.

El objetivo de esta sección es estudiar los puntos críticos del funcional de energía, mostrando que para variedades Riemannianas compactas, la armonicidad de una aplicación es equivalente a la anulación de su campo de tensión. Una variación diferenciable F de f es una aplicación $F:(-\epsilon,\epsilon)\times M\longrightarrow N$ verificando:

$$F(0,x)=f(x)\,,\qquad F(t,x)=F_t(x)\,,$$

para todo punto $x\in M$ y todo valor $t\in(-\epsilon,\epsilon)$. Supongamos ahora que la aplicación f es un punto crítico del funcional de energía y consideremos una variación F. Puesto que f es un punto crítico de $E(f)$, se tiene que $\frac{d}{dt}E(F_t)\big|_{t=0}=0$.

Denotemos con V al campo de la variación

$$V(x)=\left.\frac{dF_t(x)}{dt}\right|_{t=0}=F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(0,x)}.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}E(F_t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M h(F_*,F_*)dM=\int_M h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*,F_*\right)dM,$$

donde

$$\begin{aligned}
h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*,F_*\right)&=\sum_{i=1}^m h\left(\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*\right)(e_i)\,,F_*\,(e_i)\right)\\
&=\sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*\,(e_i)\,,F_*\,(e_i)\right)-\sum_{i=1}^m h\left(F_*\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i\right),F_*\,(e_i)\right).
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i=0$, se tiene que

$$h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*,F_*\right)=\sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*(e_i),F_*(e_i)\right)\,,$$

y haciendo uso de las simetría de las derivadas

$$h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*,F_*\right)=\sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{e_i}F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),F_*(e_i)\right).$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(F_t)\mid_{t=0}&=\int_M\sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{e_i}F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),F_*(e_i)\right)\Big|_{t=0}dM\\
&=\int_M\sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{e_i}V,F_*\,(e_i)\right)dM\\
&=\int_M \operatorname{div}V dM.
\end{aligned}$$

Ahora bien, utilizando la identidad (2.1) para la divergencia de un campo de vectores a lo largo de una aplicación, tenemos

$$\frac{d}{dt}E(F_t)\mid_{t=0}=\int_M \operatorname{div}^* f_* V dM - \int_M h(V,\tau(f))dM,$$

con lo que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(F_t) = -\int_M h(V,\tau(f))dM.$$

Para métricas Riemannianas la igualdad anterior permite mostrar fácilmente que $\tau(f) = 0$, sin más que tomar F una variación cuyo campo de variación venga dado por $V = \tau(f)$. Así la condición $\frac{d}{dt}E(F_t)\mid_{t=0}= 0$ es equivalente a que $\int_M h(\tau(f),\tau(f)) = 0$, de donde se sigue que $\tau(f) = 0$ sin más que utilizar el carácter definido positivo de la métrica. Por tanto se tiene que

Teorema 2.1. *Una aplicación $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ entre variedades Riemannianas compactas es harmónica si $\tau(f) = 0$.*

Como ya se ha mencionado, el resultado anterior motiva el estudio de la armonicidad a través de la anulación del campo de tensión de la aplicación.

Observación 2.2. Es importante señalar la existencia de aplicaciones no armónicas entre variedades pseudo-Riemannianas para las que, sin embargo $\tau(f)$ es un campo de vectores nulo, esto es $\|\tau(f)\|^2 = 0$, pero $\tau(f) \neq 0$.

Esta situación aparecerá de forma reiterada a lo largo de este trabajo.

2.2. Biarmonicidad: campo de bitensión

Manteniendo una cierta analogía con la sección precedente, en esta sección estudiaremos la condición de biarmonicidad de una aplicación a partir del funcional de bienergía. Sea $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ una aplicación diferenciable. Se define la *densidad de bienergía de f* como

$$e^2(f) = \frac{1}{2}\|\tau(f)\|^2.$$

Así, cuando la variedad M sea compacta (o la aplicación f tenga soporte compacto), se define el *funcional de bienergía de la aplicación diferenciable f* como

$$E^2(f) = \int_M e^2(f)dM\,,$$

siendo dM el elemento de volumen Riemanniano de (M,g).

Diremos que una aplicación $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ es *biarmónica* si es punto crítico de su funcional de bienergía.

Observación 2.3. Así como el funcional de energía se puede plantear como una medida del carácter no isométrico de una aplicación, el funcional de bienergía proporciona una medida de la falta de armonicidad en la aplicación f (ya que trivialmente $E^2(f) = 0$ si f es armónica).

A continuación caracterizaremos los puntos críticos del funcional de bienergía determinando las ecuaciones de Euler-Lagrange del correspondiente funcional. Para ello, consideraremos una variación diferenciable F de f. Es decir, tomamos una aplicación $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow N$ verificando

$$F(0,x) = f(x), \qquad F(t,x) = F_t(x) \qquad \forall x \in M.$$

Como en la sección anterior, denotamos con V el campo de vectores de la variación, esto es, el campo de vectores a lo largo de al aplicación f determinado por

$$V(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_t(x) = F_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Bigg|_{(0,x)} .$$

A fin de determinar los puntos críticos de $E^2(\,\cdot\,)$, estudiaremos la derivada $\frac{d}{dt}E^2(F_t)\mid_{t=0}$. Al igual que en la sección anterior, denotamos por ∇ la conexión de Levi-Civita de la variedad producto $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ y por $\bar{\nabla}$ la conexión inducida a lo largo de la aplicación.

En lo que sigue de este capítulo denotaremos por R el tensor de curvatura de la variedad $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, $\bar{R}$ denotará el tensor de curvatura de la variedad N y utilizaremos $\tilde{R}$ para representar el tensor de curvatura correspondiente a la conexión a lo largo de la aplicación (i.e., la curvatura correspondiente a la conexión en el fibrado $T(M \times (-\epsilon, \epsilon)) \otimes F^{-1}TN$).

Lema 2.4. *Sea $f : (M,g) \to (N,h)$ una aplicación diferenciable y $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow N$ una variación de f. Entonces*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E^2(F_t) \;\; = \;\; & \int_M \sum_{i=1}^m h\Bigg(\left(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ & \qquad - \left(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j}F_*\right)(e_j)\Bigg)\, dM \\ & + \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar{R}\left(F_*(e_i), F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)F_*(e_i), \left(\bar{\nabla}_{e_j}F_*\right)(e_j)\right) dM,\end{aligned}$$

donde $e_1, \ldots, e_m$ es una referencia local ortonormal en (M,g).

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una referencia local ortonormal en (M,g), de forma que el campo de tensión de la variación F se exprese como

$$\tau(F) = \sum_{i=1}^m h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i}F_*\right)(e_i), \bar{\nabla}_{e_i}F_*(e_i)\right) .$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}E^2(F_t) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{m} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i}F_*\right)(e_i), \bar{\nabla}_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{m} h\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i}F_*\right)(e_i)\right), \bar{\nabla}_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{m} h\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar{\nabla}_{e_i}F_*(e_i), \bar{\nabla}_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&\quad -\int_M \sum_{i=1}^{m} h\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*\left(\nabla_{e_i}e_i\right), \bar{\nabla}_{e_i}F_*(e_i)\right) dM
\end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se ha hecho uso de la definición de la segunda forma fundamental.

El resultado se sigue ahora sin más que considerar las expresiones de la curvatura siguientes. En primer lugar, como consecuencia directa de la definición del tensor de curvatura se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{R}\left(X, \tfrac{\partial}{\partial t}\right)F_*\right)(Y) &= -\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*(Y) + \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar{\nabla}_X F_*(Y) + \bar{\nabla}_{[X,\frac{\partial}{\partial t}]}F_*Y) \\
&= -\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*(Y) + \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar{\nabla}_X F_*(Y)
\end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta que $\left[X, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$ para todo campo de vectores X en M. Además, considerando el tensor curvatura de la conexión a lo largo de la aplicación en el fibrado $T(M \times (-\epsilon, \epsilon)) \otimes F^{-1}TN$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{R}\left(X, \frac{\partial}{\partial t}\right)F_*\right)(Y) &= \bar{R}\left(F_*(X), F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)F_*(Y) - F_*\left(R\left(X, \frac{\partial}{\partial t}\right)Y\right) \\
&= \bar{R}\left(F_*(X), F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)F_*(Y).
\end{aligned}$$

Ahora, empleando estas dos igualdades que hemos obtenido, nuestra expresión de

$\frac{d}{dt}E_2(F_t)$ se reduce en

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}E^2(F_t) &= \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar\nabla_{e_i}F_*(e_i), \bar\nabla_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&\quad - \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*\left(\nabla_{e_i}e_i\right), \bar\nabla_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar R\left(F_*(e_i), F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) F_*(e_i)\right. \\
&\quad \left. + \bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*(e_i), \bar\nabla F_*(e_i)\right) dM \\
&\quad - \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*\left(\nabla_{e_i}e_i\right), \bar\nabla_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*(e_i) - \bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}F_*\left(\nabla_{e_i}e_i\right), \bar\nabla_{e_i}F_*(e_i)\right) dM \\
&\quad + \int_M \sum_{i=1}^m h\left(\bar R\left(F_*(e_i), F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) F_*(e_i), \bar\nabla_{e_i}F_*(e_i)\right) dM.
\end{aligned}$$

El resultado se obtiene ahora sin más que emplear la simetría de la segunda forma fundamental en el primer sumando. □

Lema 2.5. *Sea $f : (M, g) \to (N, h)$ una aplicación diferenciable y $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow N$ una variación de f. Entonces*

$$\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i,j=1}^m h\left(\left(\bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{e_i}F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(\bar\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar\nabla_{e_j}F_*\right)(e_j)\right) dM \\
&\quad = \int_M \sum_{i,j=1}^m h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde\nabla_{e_i}\tilde\nabla_{e_i}\left(\bar\nabla_{e_j}F_*\right)(e_j)\right. \\
&\qquad \left. - \tilde\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\left(\tilde\nabla_{e_j}F_*\right)(e_j)\right) dM.
\end{aligned}$$

Demostración. Para cada punto $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definimos un campo de vectores en la variedad M de la forma

$$X = \sum_{i,j=1}^m h\left(\left(\bar\nabla_{e_i}F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar\nabla_{e_j}F_*\right)(e_j)\right) e_i\,.$$

Calculando su divergencia

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \nabla_{e_i} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) g\left(\nabla_{e_i} e_i, e_i\right).
\end{aligned}$$

El primer término de la expresión anterior se puede reducir en lo siguiente, sin más que derivar con respecto a e_i y utilizar la expresión de la segunda forma fundamental.

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) &= h\left(\tilde{\nabla}_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&\quad + h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&= h\left(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&\quad + h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right).
\end{aligned}$$

El segundo elemento lo podemos reducir a lo siguiente utilizando el hecho de que $g(\nabla_{e_i} e_i, e_i) + g(e_i, \nabla_{e_i} e_i) = 0$ y la simetría de la segunda forma fundamental.

$$\begin{aligned}
& h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) g(\nabla_{e_i} e_i, e_i) \\
&\quad = -h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) g\left(e_i, \nabla_{e_i} e_i\right). \\
&\quad = -h\left(\left(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión de la divergencia del campo de vectores X es:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\left(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right).
\end{aligned}$$

Definimos ahora otro campo de vectores en M, de la forma

$$Y = \sum_{i,j=1}^{m} h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) e_i$$

de forma análoga al caso anterior, obtenemos la expresión de $\operatorname{div} Y$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Y &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} h\left(\left(\bar{\nabla}_{e_i} F_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) \\
&- \sum_{i,j=1}^{m} h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right).
\end{aligned}$$

Puesto que $\int_M \operatorname{div}(X - Y) dM = 0$, se obtiene el resultado buscado. □

Empleando los dos lemas anteriores, la derivada del funcional de bienergía se reduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E^2(F_t) &= \int_M \sum h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{e_i}\left(\left(\bar{\nabla}_{e_j}\right) F_*\right)(e_j)\right. \\
&\left. -\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}\left(\bar{\nabla}_{e_j} F_*\right)(e_j)\right) dM \\
&+ \int_M \sum h\left(\bar{R}\left(F_*(e_i), F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) F_*(e_i), \left(\bar{\nabla} F_*\right)(e_j)\right) dM.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como nuestro objetivo es estudiar $\frac{d}{dt} E^2(F_t) \mid_{t=0}$, evaluando en $t = 0$ en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E^2(F_t) &= \int_M h\left(V, -\bar{\nabla}\bar{\nabla}\tau(f)\right) dM + \int_M h\left(\bar{R}\left(F_*, V\right) F_*, \tau(f)\right) dM \\
&= \int_M h\left(V, -\bar{\nabla}\bar{\nabla}\tau(f) + \bar{R}\left(F_*, \tau(f)\right) F_*\right) dM
\end{aligned}$$

donde V representa el campo de la variación.

Como la variación F fue tomada de forma arbitraria y por ser (N, h) una variedad Riemanniana, la función f es biharmónica si y solo si $\bar{\nabla}\bar{\nabla}\tau(f) - \bar{R}\left(F_*, \tau(f)\right) F_* = 0$.

De nuevo y, manteniendo la analogía con el estudio de las aplicaciones armónicas, si dirá que una aplicación $f(M, g) \to (N, h)$ es *biarmónica* si y solo si el *campo de bitensión*

$$\tau^2(f) = \operatorname{traza}_g(\bar{\nabla}\bar{\nabla} - \bar{\nabla}_{\nabla})\tau(f) - \operatorname{traza}_g \bar{R}(f_*, \tau(f)) f_*$$

es nulo.

Observación 2.6. Al igual que en el estudio de las aplicaciones armónicas, será necesario disponer de una expresión en coordenadas del campo de bitensión. Un cálculo largo pero directo a partir de la definición anterior de $\tau^2(f)$ muestra que respecto a sistemas de coordenadas $(x^1,\ldots,x^m)$ en M e $(y^1,\ldots,y^n)$ en N

$$\begin{aligned}
\tau^2(f) &= \operatorname{traza}_g \Xi(f_*)\\
&= g^{ij}\left\{\tau^\sigma_{ij} + \tau^\alpha_j f^\beta_i \bar\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tau^\alpha f^\beta_j \bar\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \tau^\alpha f^\beta_j f^\rho_i \bar\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\bar\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^k_{ij}\left(\tau^\sigma_k + \tau^\alpha f^\beta_k \bar\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \tau^\nu f^\alpha_i f^\beta_j \bar R^\sigma_{\beta\alpha\nu}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}
\end{aligned}$$

donde $\tau(f) = \tau^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma}$ es el campo de tensión de f expresado en coordenadas, los subíndices indican derivadas parciales $f^\beta_j = \partial_{x^j} f^\beta$, $\tau^\sigma_{ij} = \partial^2_{x^i x^j}\tau^\sigma$ y los superíndices indican las componentes de las funciones consideradas $f = (f^1,\ldots,f^n)$. Además, Γ y $\bar\Gamma$ representan los símbolos de Christoffel correspondientes a las conexiones de Levi-Civita de (M,g) y (N,h), y $\bar R$ representa la curvatura de (N,h).

Capítulo 3

Métricas en fibrados tangentes y cotangentes

El *fibrado tangente* a una variedad diferenciable M es la unión disjunta de todos los espacios tangentes a M. Esto es, si T_pM denota el espacio tangente a la variedad M en el punto $p \in M$, entonces $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$. Así un elemento $\xi \in TM$ puede ser visto como un par (p, v), donde p es un punto de M y v es un vector $v \in T_pM$. La proyección natural $\pi : TM \to M$ se define como $\pi(\xi) = \pi(p, v) = p$.

El fibrado tangente a una variedad es un objeto de vital importancia, pues permite interpretar conceptos básicos de geometría como campos de vectores, ciertos tipos de tensores (por ejemplo, una sección de TM es un campo de vectores en M) y formalizar el flujo de sistemas de ecuaciones de segundo orden (como ocurre con el flujo geodésico).

De modo análogo, el *fibrado cotangente* a una variedad diferenciable M es la unión disjunta de todo los espacios cotangentes a M, esto es, $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$, donde T_p^*M es el dual de T_pM. Manteniendo una analogía con el fibrado tangente, las 1-formas en M son las secciones de T^*M. Sin embargo, el estudio del fibrado cotangente presenta una motivación adicional que proviene de su interpretación como espacio de fases. Si la variedad M representa el conjunto de las posibles posiciones en un sistema dinámico, el fibrado cotangente puede ser interpretado como el conjunto de todas las posiciones y momentos. Por ejemplo en la descripción del espacio de fases de un péndulo, el estado del péndulo está determinado por su posición (un ángulo) y su momento (o equivalentemente su velocidad si la masa es invariante). Entonces el espacio de fases tiene la apariencia de un cilindro, que es el fibrado cotangente de un círculo.

3.1. Fibrado tangente: levantamiento completo.

El fibrado tangente está equipado con una topología natural y una estructura diferenciable que le proporcionan una estructura de variedad por si misma. Su dimensión es el doble de la dimensión de la variedad base M. Si la variedad base está equipada con una estructura pseudo-Riemanniana, existe un buen número de estructuras pseudo-Riemannianas inducidas en TM.

En esta sección introduciremos una familia de métricas naturales en TM inducidas por la estructura de la base (M,g). Para definir esta estructura recurriremos a la teoría de levantamientos, que permite relacionar la geometría del fibrado tangente con la de la variedad base. Posteriormente estudiaremos la expresión de estas métricas en ciertos sistemas de coordenadas naturales.

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. El *levantamiento vertical de la función* f, que denotamos por f^V, es la función $f^V : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^V = f \circ \pi$. Considerando la aplicación evaluación, toda 1-forma ω en M puede ser vista como una función $\iota\omega : TM \to \mathbb{R}$ definida por $\iota\omega(p,v) = \omega_p(v)$ y, por tanto, para cada función $f : M \to \mathbb{R}$, $\iota(f_*)$ es la función en TM asociada a la 1-forma dada por su diferencial f_*. Este tipo de funciones tienen un signficado especial aquí, ya que si $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son campos de vectores en TM, entonces se cumple que $\tilde{X}(\iota(f_*)) = \tilde{Y}(\iota(f_*))$ para toda función f de M si y solo si $\tilde{X} = \tilde{Y}$.

Un campo de vectores $\tilde{X}$ en TM se dice vertical si $\tilde{X}(f^V) = 0$ para toda función f en M. Ahora, dado un campo de vectores X en M, definimos su *levantamiento vertical* X^V de X a TM como $X^V(\iota\omega) = \omega(X)^V$, en donde ω es una 1-forma arbitraria en M. De modo análogo una 1-forma $\tilde{\omega}$ en TM se dice que es vertical si $\tilde{\omega}(X^V) = 0$ para cualquier campo de vectores X sobre M. Para cada función f en M, el levantamiento vertical $(f_*)^V$ de su 1-forma asociada f_* en TM está definido por $(f_*)^V = (f^V)_*$. Además si $\omega = \sum \omega_i dx_i$ es una 1-forma en M, entonces el *levantamiento vertical de* ω a TM viene dado por $\omega^V = \sum \omega_i^V (dx_i)^V$, en donde (x_i) es una carta coordenada en M.

El concepto de levantamiento vertical puede ser extendido ahora a campos de tensores arbitrarios usando las ecuaciones:

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \quad (P+Q)^V = P^V + Q^V,$$

para cualesquiera campos de tensores P y Q en M.

Si f es una función en M, definimos el *levantamiento completo* f^C de f a TM por $f^C = \iota(f_*)$. Una observación importante es que dos campos de vectores $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ en TM verifican que $\tilde{X}(f^C) = \tilde{Y}(f^C)$ para toda función f de M si y solo si son iguales. Así, se define el *levantamiento completo de un campo de vectores* X de M como el campo de vectores en TM definido por $X^C(f^C) = (Xf)^C$. Además, las 1-formas en TM están caracterizadas por sus valores sobre los levantamientos completos de campos de vectores en M, esto es, dos 1-formas $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\eta}$ en TM son iguales si y solo si $\tilde{\omega}(X^C) = \tilde{\eta}(X^C)$ para cualquier campo de vectores X en M. Así, definimos el *levantamiento completo de una 1-forma* ω en M como la 1-forma en TM determinada por $\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C$.

De nuevo se extiende el concepto de levantamiento completo a campos de tensores arbitrarios usando las ecuaciones:

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C, \quad (P+Q)^C = P^C + Q^C,$$

para cualesquiera campos de tensores P y Q en M.

En lo que sigue expresaremos los levantamientos anteriores en coordenadas. Para ello consideraremos coordeandas en TM inducidas de forma natural por las coordenadas de M.

Sea $(U,(x^1,\dots,x^m))$ una carta coordenada de M y $\pi : TM \to M$ la proyección natural. En el abierto $\pi^{-1}(U) \subset TM$ se consideran las coordenadas $(x^1,\dots,x^m,x^{\bar{1}},\dots,x^{\bar{m}})$, donde $x^{\bar{1}},\dots,x^{\bar{m}}$ representan las componentes de los campos de vectores en M respecto a la base de campos coordenados $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}\}$. En lo que sigue utilizaremos la notación $\bar{i} = i+m$, donde $i = 1,\dots,m$.

Ahora si $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores en M, los levantamientos vertical y completo de X se expresan en las coordenadas $(x^1,\dots,x^m,x^{\bar{1}},\dots,x^{\bar{m}})$ de TM como:

$$X^V = (X^i\frac{\partial}{\partial x^i})^V = (X^i \circ \pi)\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}},$$
$$X^C = (X^i\frac{\partial}{\partial x^i})^C = (X^i \circ \pi)\frac{\partial}{\partial x^i} + (x^{\bar{k}}\frac{\partial X^i}{\partial x^k})\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}.$$

Sea ahora (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana. Consideraremos en TM la métrica inducida dada por el *levantamiento completo* g^C de g, que viene determinada por

$$g^C(X^C,Y^C) = g(X,Y)^C.$$

Entonces si g_{ij} son las funciones componentes de la métrica g en un sistema de coordenadas $(U,(x^1,\dots,x^m))$, el levantamiento completo viene dado por:

$$g^C = \begin{pmatrix} x^{\bar{k}}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

en el sistema de coordenadas $(\pi^{-1}(U),(x^1,\dots,x^m,x^{\bar{1}},\dots,x^{\bar{m}}))$.

Es importante señalar que la métrica g^C es siempre pseudo-Riemanniana de signatura neutra (m,m), siendo $m = \dim M$. Dicha métrica refleja muchas propiedades de la estructura pseudo-Riemanniana de la base. A modo de ejemplo se tiene (véase, por ejemplo [4, 27]).

- (TM,g^C) es localmente simétrica si y solo si lo es (M,g).
- (TM,g^C) es localmente conformemente llana si y solo si (M,g) es de curvatura seccional constante.

Para nuestro objetivo de analizar la armonicidad y biarmoniciad de ciertas aplicaciones cuyo dominio es el fibrado tangente a una variedad, necesitaremos relacionar los símbolos de Christoffel de las conexiones de Levi-Civita de la métrica levantamiento completo g^C y de la métrica g de la base.

Lema 3.1. *Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana. Los símbolos de Christoffel ${}^{g^C}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ de la conexión de Levi-Civita de (TM,g^C) vienen dados por*

$${}^{g^C}\Gamma^k = \begin{pmatrix} {}^g\Gamma_{ij}^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^{g^C}\Gamma^{\bar{k}} = \begin{pmatrix} x^{\bar{l}}\dfrac{\partial}{\partial x^l}{}^g\Gamma_{ij}^k & {}^g\Gamma_{ij}^k \\ {}^g\Gamma_{ij}^k & 0 \end{pmatrix},$$

donde ${}^g\Gamma_{ij}^k$ *representan los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de* (M, g) *respecto a sistemas de coordenadas* $(U, (x^1, \dots, x^m))$ *en* M*, y donde* $(\pi^{-1}(U), (x^1, \dots, x^m, x^{\bar{1}}, \dots, x^{\bar{m}}))$ *es el correspondiente abierto coordenado en* TM*.*

Denotemos con $\tilde{R}$ el tensor de curvatura de (TM, g^C) y R el tensor de curvatura de (M, g). Respecto a los sistemas de coordenadas considerados anteriormente se tiene

Teorema 3.2. *Las componentes de los tensores de curvatura de* (TM, g^C) *y* (M, g) *verifican*

$$\begin{aligned} &\tilde{R}^l_{ij\bar{k}} = \tilde{R}^l_{i\bar{j}k} = \tilde{R}^l_{\bar{i}\bar{j}k} = \tilde{R}^l_{i\bar{j}\bar{k}} = \tilde{R}^l_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0, \\ &\tilde{R}^l_{ijk} = \tilde{R}^{\bar{l}}_{ij\bar{k}} = \tilde{R}^{\bar{l}}_{\bar{i}jk} = R^l_{ijk}, \\ &\tilde{R}^{\bar{l}}_{\bar{i}\bar{j}k} = \tilde{R}^{\bar{l}}_{i\bar{j}\bar{k}} = \tilde{R}^{\bar{l}}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0\,, \end{aligned}$$

respecto a sistemas de coordenadas $(U, (x^1, \dots, x^m))$ *en la variedad base* M *y* $(\pi^{-1}(U), (x^1, \dots, x^m, x^{\bar{1}}, \dots, x^{\bar{m}}))$ *en* TM*.*

3.2. Fibrado cotangente: extensión de Riemann

Nuestro objetivo en esta sección será introducir una familia de métricas en el fibrado cotangente T^*M de una variedad afín (M, D). Procedemos de forma análoga a como hemos hecho con el fibrado tangente.

Sea $\pi : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección natural del fibrado cotangente (definida por $\pi(p, \omega) = p$ siendo $p \in M$ y $\omega \in T_p^*M$). El *levantamiento vertical de una función* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, denotado por f^V, se define como la función $f^V : T^*M \to \mathbb{R}$ dada por $f^V = f \circ \pi$.

Sea ahora $(U, (x^1, \dots, x^m))$ un abierto coordenado en M y consideremos las coordenadas locales en T^*M dadas por $(\pi^{-1}(U), (x^1, \dots, x^m, x^{\hat{1}}, \dots, x^{\hat{m}}))$, donde $x^{\hat{1}}, \dots, x^{\hat{m}}$ representan las funciones coordenadas de las 1-formas en la base $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ (esto es, una 1-forma ω se escribe en coordenadas locales como $\omega = \sum_{i=1}^m x^{\hat{i}} dx^i$).

Para cada campo de vectores X en la variedad base M, la aplicación evaluación $\iota X : T^*M \to \mathbb{R}$ está definida por $\iota X(p, \omega) = \omega(X_p)$. A fin de obtener su expresión en coordenadas, si $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es la expresión local en coordenadas de un campo de vectores en M, su evaluación se lee en las coordenadas inducidas como $\iota X(x^1, \dots, x^m, x^{\hat{1}}, \dots, x^{\hat{m}}) = \sum_{i=1}^m x^{\hat{i}} X^i$.

Dos campos de vectores $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ en T^*M son iguales si y solamente si $\tilde{X}(\iota Z) = \tilde{Y}(\iota Z)$ para todo campo de vectores Z en M. A partir de esto, podemos definir el *levantamiento completo de un campo de vectores* X en la variedad M al fibrado cotangente, que denotamos por X^C, por $X^C(\iota Z) = \iota[X, Z]$ para cualquier campo de vectores Z en M.

Es importentante observar que si T y S son dos campos de tensores de tipo $(0, s)$ en T^*M, entonces $T = S$ si y solamente si $T(X_1^C, \dots, X_s^C) = S(X_1^C, \dots, X_s^C)$ para cualesquiera campos de vectores $X_1, \dots, X_s$ en M.

Sea ahora D una conexión afín libre de torsión, la *extensión de Riemann* a T^*M es un tensor métrico en T^*M determinado por:

$$g_D(X^C, Y^C) = -\iota(D_X Y + D_Y X).$$

De modo análogo a como sucedía con el levantamiento completo, la extensión de Riemann de cualquier conexión es una métrica pseudo-Riemanniana en T^*M de signatura neutra.

En coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{1}}, \ldots, x^{\hat{m}})$ de T^*M, la extensión de Riemann viene expresada de la forma:

$$g_D = \begin{pmatrix} -2x^{\hat{k}}\Gamma_{ij}^k & \delta_i^j \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix},$$

donde Γ_{ij}^k representan los símbolos de Christoffel de la conexión afín D en coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m)$ M.

Los símbolos de Christoffel $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ de la extensión de Riemann se relacionan con los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de D como:

Lema 3.3. *Los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de la extensión de Riemann, tienen como expresión en coordenadas*

$$\hat{\Gamma}^k = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\Gamma}^{\hat{k}} = \begin{pmatrix} x^{\hat{l}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l + \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^l + 2\Gamma_{kt}^l\Gamma_{ij}^t\right\} & -\Gamma_{ik}^j \\ -\Gamma_{ik}^j & 0 \end{pmatrix},$$

respecto a un sistema de coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{1}}, \ldots, x^{\hat{m}})$ *de* T^*M.

En el siguiente lema ponemos de manifiesto las componentes no nulas de la curvatura de la extensión de Riemann (módulo las simetrías del tensor de curvatura).

Lema 3.4. *El tensor de curvatura de la extensión de Riemann viene determinado por las siguientes componentes no nulas*

$$\hat{R}_{ijk}^l = R_{ijk}^l,$$
$$\hat{R}_{ijk}^{\hat{l}} = x^{\hat{l}}\left\{\nabla_l R_{ijk}^t - \nabla_k R_{ijk}^l + \Gamma_{ls}^t R_{ijk}^s + \Gamma_{ls}^t R_{klj}^s + \Gamma_{js}^t R_{lki}^s + \Gamma_{ks}^t R_{ijl}^s\right\},$$
$$\hat{R}_{\hat{i}jk}^{\hat{l}} = -R_{lkj}^i, \qquad \hat{R}_{i\hat{j}k}^{\hat{l}} = -R_{lki}^j, \qquad \hat{R}_{ij\hat{k}}^{\hat{l}} = -R_{ijl}^k,$$

respecto a un sistema de coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{1}}, \ldots, x^{\hat{m}})$ *de* T^*M.

Si bien tanto las métricas levantamiento completo como las extensiones de Riemann poseen una estructura en cierto modo similar, las últimas son mucho menos rígidas que las primeras debido al mayor grado de libertad de la geometría afín. A modo de ejemplo

- (T^*M, g_D) es localmente simétrica si y solo si la conexión afín D es localmente simétrica.

- (T^*M, g_D) es localmente conformemente llana si y solo si la conexión afín D es proyectivamente llana.
- (T^*M, g_D) es Einstein (de hecho, Ricci llana) si y solo si el tensor de Ricci de la conexión afín D es totalmente anti-simétrico.

3.3. Relación entre los fibrados tangente y cotangente: los isomorfismos musicales

Asociados a cualquier métrica pseudo-Riemanniana, los isomorfimos musicales permiten intercambiar campos de vectores y 1-formas, un hecho que simplifica muy notablemente los cálculos y que, además, permite definir conceptos como son los de gradiente de una función, operador asociado a un campo de tensores, etc.

En esta sección analizaremos el comportamiento de los isomorfimos musicales como aplicaciones entre los fibrados tangente y cotangente a una variedad, lo que permitirá además relacionar ciertas cuestiones de armonicidad.

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana. El carácter no degenerado de la métrica permite establecer los *isomorfismos musicales*

$$\flat : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \flat(X) = g(X, \cdot) \in \wedge^1(M)\,,$$

y

$$\sharp : \omega \in \wedge^1(M) \mapsto \sharp(\omega) \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $\sharp(\omega)$ es el campo de vectores en M determinado por la ecuación $g(\sharp(\omega), Y) = \omega(Y)$.

Dado que las aplicaciones $\flat$ y $\sharp$ son inversas, en lo que sigue restringiremos nuestro estudio a la aplicación $\flat : TM \to T^*M$.

Sea $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ un abierto coordenado en M y consideremos las coordenadas locales en TM y T^*M dadas por $(\pi^{-1}(U), (x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{m}}))$ y $(\pi^{-1}(U), (x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{1}}, \ldots, x^{\hat{m}}))$, respectivamente (donde denotamos con π las proyecciones naturales, tanto desde el fibrado tangente como desde el cotangente). Entonces, la aplicación $\flat$ se lee en coordenadas como

$$\flat(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{m}}) = (x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{l}} g_{1l}, \ldots, x^{\bar{l}} g_{ml}).$$

La aplicación $\sharp : T^*M \longrightarrow TM$ tiene como expresión en coordenadas

$$\sharp(x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{1}}, \ldots, x^{\hat{m}}) = (x^1, \ldots, x^m, x^{\hat{l}} g^{1l}, \ldots, x^{\hat{l}} g^{ml}).$$

Teorema 3.5. [9] *Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana y D una conexión afín en M. Entonces los isomorfismos musicales entre (TM, g^C) y (T^*M, g_D) son aplicaciones totalmente geodésicas si y solo si la conexión D es la conexión de Levi-Civita de la métrica g.*

Observación 3.6. El hecho de que el carácter totalmente geodésico de $\flat$ fuerce que las conexión afín D sea la conexión de Levi-Civita de g se sigue de forma inmediata sin más que considerar las componentes de la segunda forma fundamental de $\flat$ dadas por $(\nabla\flat_*)^k_{ij} = -\Gamma^k_{ij} + {}^D\Gamma^k_{ij}$, donde Γ^k_{ij} y ${}^D\Gamma^k_{ij}$ representan los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita ∇ y la conexión afín D. Este hecho, se obtiene también para la aplicación $\sharp$ observando la componente $(\nabla\sharp_*)^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - {}^D\Gamma^k_{ij}$.

A continuación analizaremos la armonicidad de la aplicación $\flat$. Para ello, teniendo en cuenta la expresión en coordenadas de la métrica g^C, hemos de calcular

$$\tau(\flat)^k = \mathrm{tr}_{g^C}(\nabla\flat_*)^k \quad \text{y} \quad \tau(\flat)^{\hat{k}} = \mathrm{tr}_{g^C}(\nabla\flat_*)^{\hat{k}},$$

para lo que necesitamos conocer los siguientes coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$(\nabla\flat_*)^k_{i\bar{j}}, \quad (\nabla\flat_*)^k_{\bar{i}\bar{j}}, \quad (\nabla\flat_*)^{\hat{k}}_{i\bar{j}}, \quad (\nabla\flat_*)^{\hat{k}}_{\bar{i}\bar{j}}\,.$$

Ahora, un cálculo sencillo utilizando las expresiones de los símbolos de Christoffel de las conexiones de Levi-Civita de g^C y g_D muestra que

$$\begin{aligned}
(\nabla\flat_*)^k_{i\bar{j}} &= 0,\\
(\nabla\flat_*)^k_{\bar{i}\bar{j}} &= 0,\\
(\nabla\flat_*)^{\hat{k}}_{i\bar{j}} &= \tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} - \Gamma^\gamma_{ij} g_{\gamma k} - {}^D\Gamma^\gamma_{ik} g_{j\gamma},\\
(\nabla\flat_*)^{\hat{k}}_{\bar{i}\bar{j}} &= 0.
\end{aligned}$$

Así,

$$\tau(\flat)^k = 0, \qquad \tau(\flat)^{\hat{k}} = 2g^{ij}\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^t_{ij} g_{kt} - \Gamma^t_{kj} g_{ti}\}\,.$$

De la misma forma calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental de la aplicación $\sharp$ con el fin de conocer la armonicidad de dicha aplicación. Para ello solo es necesario conocer los coeficientes

$$(\nabla\sharp_*)^k_{i\hat{j}}, \quad (\nabla\sharp_*)^k_{\hat{i}\hat{j}}, \quad (\nabla\sharp_*)^{\bar{k}}_{i\hat{j}}, \quad (\nabla\sharp_*)^{\bar{k}}_{\hat{i}\hat{j}}\,.$$

Con un cálculo similar al caso anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
(\nabla\sharp_*)^k_{i\hat{j}} &= 0,\\
(\nabla\sharp_*)^k_{\hat{i}\hat{j}} &= 0,\\
(\nabla\sharp_*)^{\bar{k}}_{i\hat{j}} &= \tfrac{\partial}{\partial x^i} g^{jk} + {}^D\Gamma^j_{i\gamma} g^{\gamma k} + \Gamma^k_{i\gamma} g^{\gamma j},\\
(\nabla\sharp_*)^{\hat{k}}_{\bar{i}\bar{j}} &= 0.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\tau(\sharp)^k = 0, \qquad \tau(\sharp)^{\bar{k}} = 2\left\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} + {}^D\Gamma^t_{i\gamma} g^{k\gamma} + \Gamma^k_{i\gamma} g^{i\gamma}\right\}\,.$$

Dos conexiones afines D y D^* son *conjugadas* respecto a una forma bilineal simétrica Φ en una variedad M si y solo si (véase, por ejemplo [18, 24])

$$X\Phi(Y,Z) = \Phi(D_X Y, Z) + \Phi(X, D^*_Y Z)\,,$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z en M. Así se tiene

Teorema 3.7. *Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana equipada con una conexión afín sin torsión D. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) La aplicación $\flat : (TM, g^C) \to (T^*M, g_D)$ es armónica.

(2) La aplicación $\sharp : (T^M, g_D) \to (TM, g^C)$ es armónica.

(3) La conexión D es conjugada a la conexión de Levi-Civita de la métrica g, esto es

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, D_Y Z)$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z en M.

Teniendo en cuenta la expresión del campo de tensión de $\flat$

$$\tau(\flat)^k = 0, \qquad \tau(\flat)^{\hat k} = 2g^{ij}\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^t_{ij} g_{kt} - \Gamma^t_{kj} g_{ti}\}\,.$$

se tiene de forma inmediata que $\dfrac{\partial}{\partial x^{\bar i}}\tau(\flat)^k = \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar i}}\tau(\flat)^{\hat k} = 0$ y por tanto

Teorema 3.8. *Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana equipada con una conexión afín sin torsión D. Entonces los isomorfismos musicales $\flat : (TM, g^C) \to (T^*M, g_D)$ y $\sharp : (T^*M, g_D) \to (TM, g^C)$ son siempre aplicaciones biarmónicas.*

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión del campo de bitensión obtenida en el capítulo anterior, el hecho de que $\tau(\flat)^\sigma = 0$ muestra que $\tau^2(\flat)^\sigma = 0$. Así pues, tan sólo hemos de calcular la componente $\tau^2(\flat)^{\hat\sigma}$. Dado que dichas componentes se obtienen haciendo la traza respecto a la métrica g^C, escribiendo $\tau^2(\flat)^{\hat\sigma} = \operatorname{tr}_{g^C}\Xi(\flat)^{\hat\sigma}$ (véase la Observación 2.6), será suficiente considerar las componentes $\Xi(\flat)^{\hat\sigma}_{\bar i\bar j}$ y $\Xi(\flat)^{\hat\sigma}_{i\bar j}$ (dado que las componentes $(g^C)^{ij}$ son nulas). Ahora bien, dichas componentes están determinadas por

$$\begin{aligned}\Xi(\flat)^{\hat\sigma}_{\bar i\bar j} = \tau^{\hat\sigma}_{\bar i\bar j} + \tau^{\hat\alpha}_{\bar j}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar i}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{\bar i}}\left(\tau^{\hat\alpha}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar j}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta}\right) + \tau^{\hat\alpha}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar j}\,\flat^{\hat\rho}_{\bar i}\,\hat\Gamma^{\nu}_{\hat\alpha\hat\beta}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\nu\hat\rho}\\ - \bar\Gamma^{\bar k}_{\bar i\bar j}\left(\tau^{\hat\sigma}_{\bar k} + \tau^{\hat\alpha}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar k}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta} - \tau^{\hat\nu}\,\flat^{\hat\alpha}_{\bar i}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar j}\,\hat R^{\hat\sigma}_{\hat\beta\hat\alpha\hat\nu}\right) = 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Xi(\flat)^{\hat\sigma}_{i\bar j} = \tau^{\hat\sigma}_{i\bar j} + \tau^{\hat\alpha}_{\bar j}\,\flat^{\beta}_{i}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\tau^{\hat\alpha}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar j}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta}\right) + \tau^{\hat\alpha}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar j}\,\flat^{\rho}_{i}\,\hat\Gamma^{\nu}_{\hat\alpha\hat\beta}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\nu\rho}\\ - \bar\Gamma^{\bar k}_{i\bar j}\left(\tau^{\hat\sigma}_{\bar k} + \tau^{\hat\alpha}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar k}\,\hat\Gamma^{\hat\sigma}_{\hat\alpha\hat\beta} - \tau^{\hat\nu}\,\flat^{\alpha}_{i}\,\flat^{\hat\beta}_{\bar j}\,\hat R^{\hat\sigma}_{\hat\beta\alpha\hat\nu}\right) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\tau^2(\flat) = 0$, lo que muestra que la aplicación $\flat$ es biarmónica.

Calculando ahora dichas componentes para el caso de la aplicación $\sharp$

$$\begin{aligned}\Xi(\sharp)^{\bar{\sigma}}_{\hat{i}\hat{j}} &= \tau^{\bar{\sigma}}_{\hat{i}\hat{j}} + \tau^{\bar{\alpha}}_{\hat{j}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{i}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}}}\left(\tau^{\bar{\alpha}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{j}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right) + \tau^{\bar{\alpha}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{j}}\,\flat^{\bar{\rho}}_{\hat{i}}\,\bar{\Gamma}^{\nu}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\nu\bar{\rho}}\\ &- \hat{\Gamma}^{\hat{k}}_{\hat{i}\hat{j}}\left(\tau^{\bar{\sigma}}_{\hat{k}} + \tau^{\bar{\alpha}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{k}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \tau^{\bar{\nu}}\,\flat^{\bar{\alpha}}_{\hat{i}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{j}}\,\bar{R}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\nu}}\right) = 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Xi(\sharp)^{\bar{\sigma}}_{i\hat{j}} &= \tau^{\bar{\sigma}}_{i\hat{j}} + \tau^{\bar{\alpha}}_{\hat{j}}\,\flat^{\beta}_{i}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\tau^{\bar{\alpha}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{j}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right) + \tau^{\bar{\alpha}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{j}}\,\flat^{\rho}_{i}\,\bar{\Gamma}^{\nu}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\nu\rho}\\ &- \hat{\Gamma}^{\hat{k}}_{i\hat{j}}\left(\tau^{\bar{\sigma}}_{\hat{k}} + \tau^{\bar{\alpha}}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{k}}\,\bar{\Gamma}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \tau^{\bar{\nu}}\,\flat^{\alpha}_{i}\,\flat^{\bar{\beta}}_{\hat{j}}\,\bar{R}^{\bar{\sigma}}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\nu}}\right) = 0.\end{aligned}$$

obtenemos que $\tau^2(\sharp) = 0$, por lo tanto la aplicación $\sharp$ también es biarmónica. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones en fibrados tangentes y cotangentes

A lo largo de este capítulo estudiaremos la biarmonicidad de distintos ejemplos de aplicaciones. Todas ellas tendrán como dominio el fibrado tangente (TM, g^C) de una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) o el fibrado cotangente (T^*M, g_D) de una variedad afín (M, D). En cada uno de los casos mostraremos que tales aplicaciones son siempre biarmónicas, aunque no sean armónicas en la situación genérica. De forma más precisa estudiaremos la aplicación tangente de una aplicación dada, los campos de tensores de tipo $(1, 1)$ y las aplicaciones evaluación de 1-formas y campos de vectores. Un aspecto destacado de todos los casos estudiados es que el campo de tensión de la aplicación es siempre un campo de vectores nulo cuando la métrica de la variedad imagen sea pseudo-Riemanniana.

4.1. Transformación tangente de una aplicación

Sea $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ una aplicación entre dos variedades Riemannianas. Estudiamos la armonicidad de transformación tangente:

$$f_* : (TM, g^C) \longrightarrow (TN, h^C).$$

Un elemento $\xi \in \Gamma(TM)$ es de la forma $\xi = (p, v)$ en donde $p \in M$ y $v \in T_pM$. Con lo cual $f_*(\xi) = f_{*p}(v) \in T_{f(p)}M$.

Consideremos que la dimensión de la variedad M es m y la dimension de la variedad N es n. Si $(x^1, \ldots, x^m)$ son las coordenadas en M y $(y_1, \ldots, y^n)$ son las coordenadas en N tales que $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $i = 1, \ldots, n$. Las coordenadas en TM son $(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{m}})$ siendo $\bar{i} = i + m$.

La expresión de la aplicación f_* en coordenadas es

$$f_*(\xi) = \left(f^1, \ldots, f^m, \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f^1}{\partial x^l} x^{\bar{l}}, \ldots, \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f^n}{\partial x^l} x^{\bar{l}} \right),$$

en donde cada $f^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$.

Los coeficientes de la segunda forma fundamental de la aplicación f_* son (véase por ejemplo [26]:

$$\nabla((f_*)_*)^{\gamma}_{ij} = \nabla(f_*)^{\gamma}_{ij}$$

$$\begin{array}{lll} \nabla((f_*)_*)^{\bar\gamma}_{ij} = \nabla(f_*)^{\bar\gamma}_{ij} & \nabla((f_*)_*)^{\bar\gamma}_{\bar i j} = \nabla(f_*)^{\gamma}_{ij} & \nabla((f_*)_*)^{\bar\gamma}_{i\bar j} = \nabla(f_*)^{\gamma}_{ij} \\ \nabla((f_*)_*)^{\gamma}_{\bar i j} = 0 & \nabla((f_*)_*)^{\gamma}_{\bar i \bar j} = 0 & \nabla((f_*)_*)^{\bar\gamma}_{\bar i \bar j} = 0 \end{array}$$

con lo que se ésta se puede representar en forma matricial, respecto a las coordenadas del fibrado tangente, como

$$\nabla((f_*)_*)^{\gamma} = \begin{pmatrix} \nabla(f_*)^{\gamma}_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \nabla((f_*)_*)^{\bar\gamma} = \begin{pmatrix} \nabla(f_*)^{\bar\gamma}_{ij} & \nabla(f_*)^{\gamma}_{ij} \\ \nabla(f_*)^{\gamma}_{ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el campo de tensión de la transformación tangente es:

$$\tau(f_*)^{\gamma} = 0, \quad \tau(f_*)^{\bar\gamma} = 2\tau(f).$$

Observación 4.1. Obsérvese que el campo de tensión $\tau(f_*)$ es un campo de vectores luminoso a lo largo de la aplicación, esto es, $g^C(\tau(f_*), \tau(f_*)) = 0$.

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.2. [26] *Una aplicación $f : (M, g) \to (N, h)$ es armónica si y solo si la aplicación diferencial $f_* : (TM, g^C) \to (TN, h^C)$ es armónica.*

Para estudiar la biarmonicidad de la transformación tangente, calculamos los coeficientes del campo de bitensión, mostrando que

Teorema 4.3. *Para cualquier aplicación $f : (M, g) \to (N, h)$, su transformación tangente $f_* : (TM, g^C) \to (TN, h^C)$ es biarmónica.*

Demostración. A fin de simplificar la notación, denotaremos con $\bar\Gamma$ los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de (TN, h^C), denotaremos por $\hat\Gamma$ los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de (TM, g^C) y $\bar R$ representará el tensor de curvatura de (TN, h^C). Considerando el campo de bitensión de la transformación tangente

$$\begin{aligned} \tau^2(f_*) = (g^C)^{ab} \Big\{ & \tau^{\sigma}_{ab} + \tau^{\alpha}_{b}(f_*)^{\beta}_{a}\bar\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\tau^{\alpha}(f_*)^{\beta}_{b}\bar\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\right) + \tau^{\alpha}(f_*)^{\beta}_{b}(f_*)^{\rho}_{a}\bar\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\bar\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} \\ & - \hat\Gamma^{l}_{ab}\left(\tau^{\sigma}_{l} + \tau^{\alpha}(f_*)^{\beta}_{l}\bar\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \tau^{\nu}(f_*)^{\alpha}_{a}(f_*)^{\beta}_{b}\bar R^{\sigma}_{\beta\alpha\nu}\right)\Big\} \frac{\partial}{\partial y^{\sigma}} \end{aligned}$$

donde los índices $a, b, l, \alpha, \beta, \nu, \sigma$ toman valores en $\{1, \ldots, n, \bar 1, \ldots, \bar n\}$ y τ^{σ}_{ab} denota la correspondiente componente de campo de tensión de f_*.

Si denotamos por $\tau^2(f)^\gamma = \text{traza}_{g^C}(\Xi(f)^\gamma)$. Para probar que f_* es biarmónica basta con ver las igualdades

$$\Xi(f_*)^{\gamma}_{\bar{i}j} = 0, \qquad \Xi(f_*)^{\gamma}_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

y

$$\Xi(f_*)^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}j} = 0, \qquad \Xi(f_*)^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0.$$

Ahora bien, como el campo de bitensión es la g^C-traza de $\Xi(f_*)$, no es necesario calcular las componentes $\Xi(f_*)^{\gamma}_{ij} = 0$ y $\Xi(f_*)^{\bar{\gamma}}_{ij} = 0$ ya que al ser $(g^C)^{ij} = 0$, dichas componentes no contribuirán a la traza.

En lo que sigue explicitaremos algunos de los cálculos anteriores, obteniéndose los restantes de forma completamente análoga. Así, teniendo en cuenta la expresión en coordenadas de la transformación tangente $F = f_*$,

$$F^i = f^i, \qquad F^{\bar{i}} = x^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial x^k} f^i = x^{\bar{k}} f^i_k,$$

se tienen las siguientes derivadas

$$F^i_j = f^i_j, \quad F^i_{\bar{j}} = 0, \quad F^{\bar{i}}_j = x^{\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial x^j x^k} f^i = x^{\bar{k}} f^i_{jk}, \quad F^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i = f^i_j,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\Xi(F)^{\gamma}_{\bar{i}\bar{j}} &= \tau^{\gamma}_{\bar{i}\bar{j}} + \tau^{\alpha}_{\bar{j}} F^{\beta}_{\bar{i}} \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} + \tfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \left(\tau^{\alpha} F^{\beta}_{\bar{j}} \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} \right) + \tau^{\alpha} F^{\beta}_{\bar{j}} F^{\rho}_{\bar{i}} \bar{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\nu\rho} \\
&\quad - \hat{\Gamma}^{l}_{\bar{i}\bar{j}} \left(\tau^{\gamma}_{l} + \tau^{\alpha} F^{\beta}_{l} \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \tau^{\nu} F^{\alpha}_{\bar{i}} F^{\beta}_{\bar{j}} \bar{R}^{\gamma}_{\beta\alpha\nu} \right) \\
&= \hat{\Gamma}^{l}_{\bar{i}\bar{j}} \left(\tau^{\bar{\alpha}} F^{\beta}_{l} \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\bar{\alpha}\beta} - \tau^{\bar{\nu}} F^{\alpha}_{\bar{i}} F^{\beta}_{\bar{j}} \bar{R}^{\gamma}_{\beta\alpha\bar{\nu}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $\hat{\Gamma}^{l}_{\bar{i}\bar{j}} = 0$.

$$\begin{aligned}
\Xi(F)^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}j} &= \tau^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}j} + \tau^{\alpha}_{j} F^{\beta}_{\bar{i}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \left(\tau^{\alpha} F^{\beta}_{j} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} \right) + \tau^{\alpha} F^{\beta}_{j} F^{\rho}_{\bar{i}} \bar{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\nu\rho} \\
&\quad - \hat{\Gamma}^{l}_{\bar{i}j} \left(\tau^{\bar{\gamma}}_{l} + \tau^{\alpha} F^{\beta}_{l} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} - \tau^{\nu} F^{\alpha}_{\bar{i}} F^{\beta}_{j} \bar{R}^{\bar{\gamma}}_{\beta\alpha\nu} \right) \\
&= \tau^{\bar{\alpha}} F^{\beta}_{j} F^{\bar{\rho}}_{\bar{i}} \bar{\Gamma}^{\bar{\nu}}_{\bar{\alpha}\beta} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\nu}\bar{\rho}} - \hat{\Gamma}^{\bar{l}}_{\bar{i}j} \tau^{\bar{\alpha}} F^{\bar{\beta}}_{\bar{l}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \tau^{\bar{\nu}} F^{\bar{\alpha}}_{\bar{i}} F^{\beta}_{j} \bar{R}^{\bar{\gamma}}_{\beta\bar{\alpha}\bar{\nu}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $\bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\nu}\bar{\rho}} = 0$, $\bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$ y $\bar{R}^{\bar{\gamma}}_{\beta\bar{\alpha}\bar{\nu}} = 0$.

Como consecuencia de lo anterior se prueba que el campo de bitensión de la transformación tangente verifica

$$\tau^2(f_*)^{\gamma} = 0, \qquad \tau^2(f_*)^{\bar{\gamma}} = 0$$

lo que prueba que f_* es una aplicación biarmónica □

4.2. Campos de tensores de tipo (1,1)

Un campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre una variedad M puede ser interpretado como una transformación

$$T : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

Si $(x^1, \ldots, x^m)$ son coordenadas en un abierto de la variedad M, la expresión en coordenadas del campo de tensores es de la forma

$$T = T_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

donde las funciones T_i^j vienen dadas por $T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = T_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Sea ahora (M, g) una variedad Riemanniana. Podemos pensar el tensor de tipo $(1,1)$ como una aplicación

$$T : (TM, g^C) \longrightarrow (TM, g^C)$$

que conmuta con las proyecciones $\pi : TM \longrightarrow M$. Un elemento $\xi \in TM$ es de la forma $\xi = (p, v)$ siendo $p \in M$ y $v \in T_pM$. La aplicación T actúa sobre este elemento de la forma $T(\xi) = (p, T_p v)$, con lo que la expresión en coordenadas de la aplicación T viene dada por

$$T(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{m}}) = \left(x^1, \ldots, x^m, \sum_{i=1}^{m} x^{\bar{i}} T_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} x^{\bar{i}} T_m^i \right).$$

La segunda forma fundamental de esta aplicación está determinada por (véase [9]):

$$\begin{aligned}
&\nabla(T_*)_{ij}^{\gamma} = 0, \qquad \nabla(T_*)_{\bar{i}j}^{\gamma} = 0, \qquad \nabla(T_*)_{i\bar{j}}^{\gamma} = 0, \qquad \nabla(T_*)_{\bar{i}\bar{j}}^{\gamma} = 0,\\
&\nabla(T_*)_{ij}^{\bar{\gamma}} = x^{\bar{l}} \left\{ \frac{\partial^2 T_\gamma^l}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial T_\gamma^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} T_\gamma^k + \frac{\partial \Gamma_{ij}^\gamma}{\partial x^l} + \Gamma_{\alpha j}^\gamma \frac{\partial T_\alpha^l}{\partial x^i} + \Gamma_{i\beta}^\gamma \frac{\partial T_\beta^l}{\partial x^j} \right\},\\
&\nabla(T_*)_{\bar{i}j}^{\bar{\gamma}} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} T)_\gamma^i, \qquad \nabla(T_*)_{i\bar{j}}^{\bar{\gamma}} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T)_\gamma^j, \qquad \nabla(T_*)_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{\gamma}} = 0,
\end{aligned}$$

donde Γ son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de (M, g). Así, tenemos la siguiente expresión matricial en términos de las coordenadas del fibrado tangente TM

$$(\nabla T_*)^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\nabla T_*)^{\bar{\gamma}} = \begin{pmatrix} (\nabla T_*)_{ij}^{\bar{\gamma}} & (\nabla T_*)_{i\bar{j}}^{\bar{\gamma}} \\ (\nabla T_*)_{\bar{i}j}^{\bar{\gamma}} & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia el campo de tensión de T verifica

$$\tau(T)^\gamma = 0, \qquad \tau(T)^{\bar{\gamma}} = 2g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T)_\gamma^j,$$

por lo tanto se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.4. [9] *La aplicación $T : (TM, g^C) \longrightarrow (TM, g^C)$ es armónica si y sólo si $\delta T = g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} T)_j^\gamma = 0$.*

Observación 4.5. Obsérvese que el campo de tensión $\tau(T)$ de la aplicación $T : (TM, g^C) \longrightarrow (TM, g^C)$ es un campo de vectores luminoso a lo largo de la aplicación, para cualquier campo de tensores de tipo $(1,1)$ en M.

Respecto a la biarmonicidad, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.6. *Sea T un campo de tensores de tipo $(1,1)$ en una variedad pseudo-Riemanniana (M,g). Entonces $T : (TM, g^C) \to (TM, g^C)$ es siempre una aplicación biarmónica.*

Demostración. Denotaremos por $\bar{\Gamma}$ y $\bar{R}$ los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura respectivamente de la variedad (TM, g^C). El campo de bitensión viene expresado de la forma:

$$\begin{aligned}\tau^2(T) = (g^C)^{ab} \Big\{ & \tau^\sigma_{ab} + \tau^\alpha_b \frac{\partial T^\beta}{\partial x^a} \bar{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\tau^\alpha \frac{\partial T^\beta}{\partial x^b} \bar{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta}\right) + \tau^\alpha \frac{\partial T^\beta}{\partial x^b}\frac{\partial T^\rho}{\partial x^a} \bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}\bar{\Gamma}^\sigma_{\nu\rho} \\ & - \bar{\Gamma}^l_{ab}\left(\tau^\sigma_l + \tau^\alpha \frac{\partial T^\beta}{\partial x^l}\bar{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta} - \tau^\nu \frac{\partial T^\alpha}{\partial x^a}\frac{\partial T^\beta}{\partial x^b}\bar{R}^\sigma_{\beta\alpha\nu}\right)\Big\} \frac{\partial}{\partial y^\sigma},\end{aligned}$$

donde los coeficientes $\alpha, \beta, a, b, \sigma, \nu$ y ρ toman valores en $\{1, \ldots, m, \bar{1}, \ldots, \bar{m}\}$. Veremos que el campo de bitensión es idénticamente nulo

$$\tau^2(T)^\gamma = 0\,, \qquad \tau^2(T)^{\bar{\gamma}} = 0\,,$$

lo que prueba que $T : (TM, g^C) \to (TM, g^C)$ es una aplicación biarmónica.

Para hacer este cálculo, dado que el campo de tensión se obtiene como una traza $\tau^2(T) = \mathrm{traza}^\gamma_{g^C}(\Xi(T)^\gamma)$, bastará con probar que las componentes

$$\Xi(T)^\gamma_{\bar{i}j} = 0, \qquad \Xi(T)^\gamma_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

y

$$\Xi(T)^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}j} = 0, \qquad \Xi(T)^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0.$$

Nótese que de nuevo no será necesario el cálculo de las componentes Ξ^γ_{ij} y $\Xi^{\bar{\gamma}}_{ij}$, dado que $(g^C)^{ij} = 0$.

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales de la aplicación T vienen dadas por

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^j} = 1 \text{ si } i = j, \quad \frac{\partial T^i}{\partial x^{\bar{j}}} = 0, \quad \frac{\partial T^{\bar{i}}}{\partial x^j} = x^{\bar{l}}\frac{\partial T^i_l}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial T^{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} = T^i_j,$$

se tiene

$$\begin{aligned}\Xi(T)^\gamma_{\bar{i}j} &= \tau^\gamma_{\bar{i}j} + \tau^\alpha_j \tfrac{\partial T^\beta}{\partial x^{\bar{i}}}\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} + \tfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\left(\tau^\alpha \tfrac{\partial T^\beta}{\partial x^j}\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\right) + \tau^\alpha \tfrac{\partial T^\beta}{\partial x^j}\tfrac{\partial T^\rho}{\partial x^{\bar{i}}}\bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}\bar{\Gamma}^\gamma_{\nu\rho} \\ &\quad - \bar{\Gamma}^l_{\bar{i}j}\left(\tau^\gamma_l + \tau^\alpha \frac{\partial T^\beta}{\partial x^l}\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} - \tau^\nu \frac{\partial T^\alpha}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial T^\beta}{\partial x^j}\bar{R}^\gamma_{\beta\alpha\nu}\right) \\ &= \bar{\Gamma}^{\bar{l}}_{\bar{i}j}\left\{\tau^{\bar{\alpha}}\frac{\partial T^\beta}{\partial x^l}\bar{\Gamma}^\gamma_{\bar{\alpha}\beta} - \tau^{\bar{\nu}}\frac{\partial T^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial T^\beta}{\partial x^j}\bar{R}^\gamma_{\beta\bar{\alpha}\bar{\nu}}\right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

ya que $\bar{R}^{\gamma}_{\beta\bar{\alpha}\bar{\nu}} = 0$ y $\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\bar{\alpha}\beta} = 0$.

$$\begin{aligned}
\Xi(T)^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}\bar{j}} &= \tau^{\bar{\gamma}}_{\bar{i}\bar{j}} + \tau^{\alpha}_{\bar{j}} \tfrac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{\bar{i}}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} + \tfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \left(\tau^{\alpha} \tfrac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{\bar{j}}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} \right) + \tau^{\alpha} \tfrac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{\bar{j}}} \tfrac{\partial T^{\rho}}{\partial x^{\bar{i}}} \bar{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\nu\rho} \\
&\quad - \bar{\Gamma}^{l}_{\bar{i}\bar{j}} \left(\tau^{\bar{\gamma}}_{l} + \tau^{\alpha} \frac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{l}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} - \tau^{\nu} \frac{\partial T^{\alpha}}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{\bar{j}}} \bar{R}^{\bar{\gamma}}_{\beta\alpha\nu} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \left(\tau^{\bar{\alpha}} \frac{\partial T^{\bar{\beta}}}{\partial x^{\bar{j}}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right) + \tau^{\bar{\alpha}} \frac{\partial T^{\bar{\beta}}}{\partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial T^{\bar{\rho}}}{\partial x^{\bar{i}}} \bar{\Gamma}^{\nu}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\nu\bar{\rho}} \\
&\quad - \bar{\Gamma}^{l}_{\bar{i}\bar{j}} \left(\tau^{\bar{\gamma}}_{l} + \tau^{\bar{\alpha}} \frac{\partial T^{\beta}}{\partial x^{l}} \bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\beta} - \tau^{\bar{\nu}} \frac{\partial T^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial T^{\bar{\beta}}}{\partial x^{\bar{j}}} \bar{R}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\nu}} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ya que $\bar{\Gamma}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$, $\bar{\Gamma}^{\nu}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$ y $\bar{\Gamma}^{l}_{\bar{i}\bar{j}} = 0$.

La biarmoniciad de la aplicación se obtiene ahora de forma directa. □

4.3. 1-formas. Aplicación evaluación

Sea ω una 1-forma en una variedad Riemanniana (M, g). La aplicación evaluación de la 1-forma, como hemos definido en (3.1), es la aplicación:

$$\iota\omega : (TM, g^C) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Respecto a un sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^m)$ en un abierto de M, donde la 1-forma venga dada por $\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i dx^i$, la evaluación se lee en las coordenadas inducidas en el fibrado tangente como la función

$$\iota\omega(x^1, \ldots, x^m, x^{\bar{1}} \ldots, x^{\bar{m}}) = \sum_{l=1}^{m} \omega_l x^{\bar{l}}\,.$$

Un cálculo directo muestra que la segunda forma fundamental de esta aplicación es:

$$\begin{aligned}
(\nabla(\iota\omega)_*)_{ij} &= x^{\bar{l}} \left(\tfrac{\partial^2 \omega_l}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial \omega_l}{\partial x^k} \right) \\
(\nabla(\iota\omega)_*)_{\bar{i}j} &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \omega)_i \\
(\nabla(\iota\omega)_*)_{i\bar{j}} &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega)_j \\
(\nabla(\iota\omega)_*)_{\bar{i}\bar{j}} &= 0
\end{aligned}$$

donde Γ son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de (M, g). Así tenemos la siguiente expresión en forma matricial

$$(\nabla(\iota\omega)_*) = \begin{pmatrix} (\nabla(\iota\omega)_*)_{ij} & (\nabla(\iota\omega)_*)_{\bar{i}j} \\ (\nabla(\iota\omega)_*)_{i\bar{j}} & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, el campo de tensión de $\iota\omega$ viene determinado por:

$$\tau(\iota\omega) = \delta\omega,$$

donde δ denota el operador de coderivada en (M, g). Por tanto se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.7. *Sea ω una 1-forma en una variedad pseudo-Riemanniana (M, g). La función evaluación $\iota\omega : (TM, g^C) \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica si y solo si ω es co-cerrada.*

El estudio de la biarmonicidad de la aplicación $\iota\omega$ se establece como sigue

Teorema 4.8. *Sea $\omega \in \wedge^1(M)$ una 1-forma en la variedad (M, g). Entonces la aplicación evaluación $\iota\omega : (TM, g^C) \to \mathbb{R}$ es una función biarmónica.*

Demostración. La expresión del campo de bitensión de nuestra aplicación es

$$\tau^2(\iota\omega) = g^{ab}\left\{\tau_{ab} - \bar{\Gamma}^k_{ab}\tau_{ab}\right\}\frac{\partial}{\partial y}$$

siendo τ el campo de tensión de la aplicación $\iota\omega$ y $\bar{\Gamma}$ los símbolos de Christoffel de la conexión de levi Civita de (TM, g^C).

Para ver que la función es biarmónica debemos ver que el campo de bitensión es cero. De igual forma que en los casos anteriores, escribimos $\tau^2(\iota\omega) = \mathrm{traza}_{g^C}(\Xi(\iota\omega))$. Así, la aplicación $\iota\omega$ es biarmónica si se cumplen las igualdades

$$\Xi(\iota\omega)_{\bar{i}j} = 0, \qquad \Xi(\iota\omega)_{\bar{i}\bar{j}} = 0\,,$$

puesto que al ser $(g^C)^{ij} = 0$ podemos omitir el cálculo de Ξ_{ij}.

A continuación se muestra el cálculo de estas componentes. Para ello primero consideremos las derivadas de la aplicación $\iota\omega$:

$$\frac{\partial\iota\omega}{\partial x^i} = \frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}x^{\bar{k}}, \qquad \frac{\partial\iota\omega}{\partial x^{\bar{i}}} = \omega_i\,.$$

Entonces se tiene

$$\Xi(\iota\omega)_{\bar{i}j} = \tau_{\bar{i}j} - \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}j}\tau_{\bar{k}} = 0$$

ya que $\tau_{\bar{k}} = 0$ y $\tau_{\bar{i}j} = 0$.

$$\Xi(\iota\omega)_{\bar{i}\bar{j}} = \tau_{\bar{i}\bar{j}} - \Gamma^{k}_{\bar{i}\bar{j}}\tau_k = 0$$

ya que $\tau_{\bar{i}\bar{j}} = 0$ y $\Gamma^k_{\bar{i}\bar{j}} = 0$.

El carácter biarmónico de $\iota\omega$ se obtiene ahora por un cálculo directo. □

4.4. Campos de vectores. Aplicación evaluación

Sea X un campo de vectores de una variedad Riemanniana (M,g). La aplicación evaluación de un campo de vectores, $\iota X : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal y como la hemos definido en (3.3), viene dada por $\iota X(\xi) = \iota X(p,\omega) = \omega(X_p)$, donde $\omega \in \wedge^1(T_pM)$. Considerando la expresión del campo de vectores X como $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ respecto a un sistema de coordenadas $(x^1,\dots,x^m)$ en un abierto de M, la aplicación evaluación $\iota X : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ se lee en las coordenadas inducidas en T^*M como

$$\iota X(x^1,\dots,x^m,x^{\hat{i}},\dots,x^{\hat{m}}) = \sum_{i=1}^m x^{\hat{i}} X^i \,.$$

Un cálculo directo muestra que la segunda forma fundamental de esta aplicación es:

$$\begin{aligned}
&(\nabla(\iota X)_*)_{ij} = x^{\hat{l}} \left\{ \tfrac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial X^l}{\partial x^k} + \tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk} + \tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik} - \tfrac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^l_{ij} - 2\Gamma^l_{kt}\Gamma^l_{ij} X^k \right\}, \\
&(\nabla(\iota X)_*)_{\hat{i}j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \qquad (\nabla(\iota X)_*)_{i\hat{j}} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X, \qquad (\nabla(\iota X)_*))_{\hat{i}\hat{j}} = 0,
\end{aligned}$$

donde Γ son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de (M,g). Así se tiene la siguiente expresión matricial en las coordenadas inducidas en T^*M

$$(\nabla(\iota X)_*)) = \begin{pmatrix} (\nabla(\iota X)_*)_{ij} & (\nabla(\iota X)_*)_{\hat{i}j} \\ (\nabla(\iota X)_*)_{i\hat{j}} & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que el campo de tensión de la aplicación ιX es:

$$\tau(\iota X) = 2\,\mathrm{traza}(\nabla X)$$

con lo cual se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.9. *Sea X un campo de vectores en una variedad afín (M,D). La función evaluación $\iota X : (T^*M, g_D) \to \mathbb{R}$ es armónica si y solo si el campo de tensores ∇X tiene traza nula, i.e.,* $\mathrm{traza}(\nabla X) = 0$.

El siguiente resultado recoge el estudio de la biarmonicidad de la aplicación evaluación ιX

Teorema 4.10. *Sea X un campo de vectores en la variedad afín (M,D). Entonces la aplicación evaluación $\iota X : (T^*M, g_D) \to \mathbb{R}$ es una función biarmónica.*

Demostración. La expresión del campo de bitensión es:

$$\tau^2(\iota X) = (g_D)^{ij} \left\{ \tau_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}\tau_k \right\}$$

siendo τ el campo de tensión de ιX y $\hat{\Gamma}$ los simbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de (T^*M, g_D). De nuevo para estudiar la biarmonicidad expresamos $\tau^2(\iota X) = \mathrm{traza}_{g_D}(\Xi(\iota X))$, con lo que la aplicación será biarmónica cuando

$$\Xi(\iota X)_{\hat{i}j} = 0, \qquad \Xi(\iota X)_{\hat{i}\hat{j}} = 0.$$

De nuevo la componente $\Xi(\iota X)_{ij}$ no necesita ser calculada, ya que $(g_D)^{ij} = 0$.

Considerando las derivadas parciales de la aplicación ιX

$$\frac{\partial \iota X}{\partial x^j} = x^{\hat{l}} \frac{\partial X^l}{\partial x^j}, \qquad \frac{\partial \iota X}{\partial x^{\hat{j}}} = X^j,$$

se tiene

$$\Xi(\iota X)_{\hat{i}j} = \tau_{\hat{i}j} - \hat{\Gamma}^{\hat{k}}_{\hat{i}j} \tau_{\hat{k}} = 0$$

ya que $\tau_{\hat{i}j} = 0$ y $\tau_{\hat{k}} = 0$.

$$\Xi(\iota X)_{\hat{i}\hat{j}} = \tau_{\hat{i}\hat{j}} - \Gamma^{k}_{\hat{i}\hat{j}} \tau_{k} = 0$$

ya que $\tau_{\hat{i}\hat{j}} = 0$ y $\Gamma^{k}_{\hat{i}\hat{j}} = 0$.

De nuevo la biarmonicidad de ιX se sigue por un cálculo directo. □

Bibliografía

[1] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, Conformal and semi-conformal biharmonic maps, *Ann. Global Anal. Geom.* **34** (2008), 403–414.

[2] P. Baird, D. Kamissoko, On constructing biharmonic maps and metrics, *Ann. Global Anal. Geom.* **23** (2003), 65–75.

[3] C. L. Bejan, M. Benyounes, Harmonic φ-morphisms, *Beiträge Algebra Geom.* **44** (2003), 309–321.

[4] J. Cendán-Verdes, E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal, On the semi-Riemannian structure of the tangent bundle of a two-point homogeneous space, *Riv. Mat. Univ. Parma (5)* **3** (1994), 253–270.

[5] M. Dajczer y K. Nomizu, On sectional curvature of indefinite metrics II *Math. Ann.* **247** (1980), 279–282.

[6] D. Fetcu, Biharmonic curves in the generalized Heisenberg group, *Beiträge Algebra Geom.* **46** (2005), 513–521.

[7] E. García-Río, D. N. Kupeli, *Semi-Riemannian maps and their applications*, Mathematics and its Applications, **475**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[8] E. García-Río, L. Vanhecke, M. E. Vázquez-Abal, Notes on harmonic tensor fields, in *New developments in differential geometry*, Budapest 1996, 123–142, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[9] E. García-Río, L. Vanhecke, M. E. Vázquez-Abal, Harmonic endomorphism fields, *Illinois J. Math.* **41** (1997), 23–30.

[10] W. Kühnel, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[11] E. Loubeau, S. Montaldo, Biminimal immersions, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **51** (2008), 421–437.

[12] E. Loubeau, S. Montaldo, C. Oniciuc, The stress-energy tensor for biharmonic maps, *Math. Z.* **259** (2008), 503–524.

[13] E. Loubeau, S. Montaldo, C. Oniciuc, *The bibliography of biharmonic maps*, `http://people.unica.it/biharmonic/`

[14] E. Loubeau, Y.-L. Ou, Biharmonic maps and morphisms from conformal mappings, *Tohoku Math. J. (2)* **62** (2010), 55–73.

[15] S. Maeta, Shun; Biharmonic maps from a complete Riemannian manifold into a non-positively curved manifold, *Ann. Global Anal. Geom.* **46** (2014), 75–85.

[16] S. Montaldo, C. Oniciuc, A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds, *Rev. Un. Mat. Argentina* **47** (2006), 1–22.

[17] N. Nakauchi, H. Urakawa, S. Gudmundsson, Biharmonic maps into a Riemannian manifold of non-positive curvature, *Geom. Dedicata* **169** (2014), 263–272.

[18] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, **111**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[19] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, New York: Academic Press, 1983.

[20] Y.-L. Ou, Sh. Lu, Biharmonic maps in two dimensions, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **192** (2013), 127–144.

[21] Y.-L. Ou, Some constructions of biharmonic maps and Chen's conjecture on biharmonic hypersurfaces, *J. Geom. Phys.* **62** (2012), 751–762.

[22] Y.-L. Ou, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds, *Pacific J. Math.* **248** (2010), 217–232.

[23] T. Sasahara, Biharmonic submanifolds in nonflat Lorentz 3-space forms, *Bull. Aust. Math. Soc.* **85** (2012), 422–432.

[24] U. Simon, A. Schwenk-Schellschmidt, H. Viesel, *Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces*, Lecture Notes of the Science University of Tokyo, Science University of Tokyo, Tokyo, 1991.

[25] H. Urakawa, The geometry of biharmonic maps, *Harmonic maps and differential geometry*, 159–175, Contemp. Math., **542**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[26] M. E. Vázquez-Abal, Harmonicity on the tangent bundle of order r, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991), 131–136.

[27] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles: differential geometry*, Pure and Applied Mathematics, No. **16**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.