

OLGA PÉREZ BARRAL

**ACCIONES ISOMÉTRICAS EN EL  
ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI**

**133b**

**2017**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

OLGA PÉREZ BARRAL

**ACCIONES ISOMÉTRICAS EN EL  
ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI**

**133b**

**2017**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2017



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

**Acciones isométricas en el  
espacio-tiempo de Minkowski**

Olga Pérez Barral

Xullo 2017

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1. Variedades pseudo-riemannianas . . . . .	13
1.2. Álgebras y grupos de Lie . . . . .	16
1.2.1. Álgebras de Lie . . . . .	16
1.2.2. Grupos de Lie . . . . .	18
1.2.3. Descomposición de álgebras de Lie . . . . .	21
1.3. Acciones de grupos de Lie sobre variedades . . . . .	24
1.3.1. Acciones propias e impropias . . . . .	25
<b>2. El espacio-tiempo de Minkowski</b>	<b>29</b>
2.1. $\mathbb{L}^{n+1}$ como variedad . . . . .	29
2.1.1. La variedad de la relatividad especial . . . . .	31
2.2. El grupo de isometrías de $\mathbb{L}^{n+1}$ . . . . .	35
<b>3. Clasificación de acciones isométricas</b>	<b>47</b>
3.1. El espacio-tiempo de Minkowski 2-dimensional . . . . .	47
3.2. El espacio-tiempo de Minkowski 3-dimensional . . . . .	50
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



## Resumen

Una acción isométrica en una variedad pseudo-riemanniana es un difeomorfismo de la variedad que preserva su tensor métrico. Una acción isométrica se dice de cohomogeneidad uno si alguna de sus órbitas tiene codimensión uno. El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad de Lorentz llana sobre la que se modela la Teoría de la Relatividad Especial. En este trabajo, presentamos una clasificación de las acciones de cohomogeneidad uno en espacio-tiempos de Minkowski y, además, estudiamos las órbitas de dichas acciones.

## Abstract

An isometric action on a pseudo-Riemannian manifold is a diffeomorphism of the manifold that preserves its metric tensor. An isometric action is said to be of cohomogeneity one if there exists an orbit of this action that has codimension one. The Minkowski spacetime is a flat Lorentzian manifold that is used to model the Special Theory of Relativity. In this work we present the classification of cohomogeneity one actions on Minkowski spacetimes up to orbit equivalence. We also study the orbits of these actions.



# Introducción

Intuitivamente, la simetría es la propiedad de los objetos que hace que, observados desde distintos puntos de vista, sean parecidos. Se trata de una cualidad importante desde el punto de vista biológico y químico: por ejemplo, la configuración simétrica de la cápside de los virus les confiere una gran capacidad de autorreplicación y la simetría de las cadenas de carbono hace del diamante el material más duro. A nivel artístico, la simetría también juega un papel relevante: por ejemplo, los 17 tipos de simetrías del plano decoran la Alhambra de Granada.

El concepto de simetría se puede formalizar desde un punto de vista matemático de manera rigurosa. Decimos que un objeto es  $G$ -simétrico si el grupo  $G$  actúa en dicho objeto dejándolo invariante. Por tanto, no existe el concepto de simetría en sí mismo, sino que siempre está vinculado a la acción de un grupo, que es el que especifica qué tipo de simetría tiene el objeto. Cabe destacar que la simetría no solamente es un concepto aplicable a figuras geométricas. Objetos matemáticos como ecuaciones pueden tener simetrías. La Teoría de Galois es un ejemplo de esto: si una ecuación polinómica no tiene las simetrías adecuadas, entonces no es resoluble por radicales. Otro ejemplo es un teorema de E. Noether que afirma que la presencia de simetrías en un sistema físico se traduce en leyes de conservación. Magnitudes como la energía, el momento lineal o angular, o los momentos de inercia de un sólido rígido, todas ellas importantes a la hora de resolver problemas concretos, no son más que una manera en que la simetría se manifiesta en la Mecánica Clásica.

La importancia de la simetría en las matemáticas ya fue enfatizada hace años por Felix Klein, que afirmó que la geometría es el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes bajo un grupo de transformaciones. En este trabajo estudiaremos la simetría desde el punto de vista de la geometría riemanniana y lorentziana. En este caso, el grupo natural a estudiar es el grupo de isometrías, es decir, el grupo de las transformaciones de la variedad que preserva la métrica. En el caso riemanniano, donde la métrica de la variedad induce una distancia, el grupo de isometrías coincide precisamente con los difeomorfismos

de la variedad que preservan las distancias entre puntos.

Desde un punto de vista general, diremos que un espacio es homogéneo si su grupo de transformaciones actúa transitivamente sobre el espacio, es decir, si preserva la estructura del espacio en cada uno de sus puntos. Como en este trabajo estamos más bien interesados en la geometría de subvariedades, el objeto principal de estudio, en este contexto, es la clasificación de las subvariedades homogéneas (o más concretamente, extrínsecamente homogéneas), es decir, aquéllas que son invariantes por la acción de un subgrupo de isometrías de la variedad ambiente. Dicho de otro modo, una subvariedad es homogénea si coincide con la órbita de una acción de un subgrupo de isometrías de la variedad ambiente.

Además de las acciones transitivas, aquéllas en que la variedad es la única órbita de la acción, las acciones de cohomogeneidad uno han atraído considerable atención. Una acción se dice de cohomogeneidad uno si sus órbitas principales tienen codimensión uno. Una amplia gama de problemas geométricos se traducen, por ejemplo, en encontrar la solución de ecuaciones en derivadas parciales. Si sobre la variedad hay una acción de cohomogeneidad uno que deja invariante esta ecuación diferencial, entonces dicha ecuación es, por así decirlo, constante en las órbitas de la acción y solo varía a lo largo de una curva ortogonal a las órbitas. Hemos, por tanto, reducido un problema complejo en una variedad a una ecuación diferencial ordinaria a lo largo de una curva, de modo que ahora tenemos resultados de existencia y unicidad de solución. Ello nos facilita la construcción de estructuras diferenciables especiales, como por ejemplo, métricas Einstein o variedades con curvatura positiva, así como el estudio de determinadas ecuaciones de interés desde el punto de vista físico, como las ecuaciones de Yang-Mills.

Un problema destacable en el estudio de las acciones de cohomogeneidad uno ha sido el de clasificar acciones de cohomogeneidad uno en una variedad dada, salvo equivalencia de órbitas. En este contexto, decimos que dos acciones son equivalentes si existe una isometría de la variedad ambiente que lleva las órbitas de una acción en las órbitas de la otra. Por tanto, no estamos tan interesados en qué grupo actúa o cómo lo hace, sino más bien en las órbitas que produce en la variedad. Así, el problema que tratamos de abordar no es de índole algebraica, sino más bien geométrica. El problema de clasificar acciones de cohomogeneidad uno salvo equivalencia de órbitas es equivalente al de clasificar hipersuperficies homogéneas salvo congruencia. Resumimos brevemente algunos de los resultados más importante relativos a la clasificación de acciones de cohomogeneidad uno en variedades riemannianas.

En espacios de curvatura constante, las acciones de cohomogeneidad uno son conoci-

das. La clasificación de hipersuperficies homogéneas en los espacios euclídeos se deduce de los trabajos de Levi-Civita [12] y Segre [14] en su estudio de hipersuperficies isoparamétricas. En esferas, es consecuencia de un trabajo de Hsiang y Lawson [8] en el que estudian subvariedades minimales, mientras que en espacios hiperbólicos reales, la clasificación fue obtenida mucho antes por Cartan [5], también en el estudio de hipersuperficies isoparamétricas.

Existen clasificaciones de acciones de cohomogeneidad uno en otras familias de variedades riemannianas, como por ejemplos los espacios simétricos de tipo compacto. No obstante, aquí nos limitamos a mencionar que las acciones de cohomogeneidad uno son conocidas también en los espacios proyectivos sobre los complejos [15], los cuaternios [9] y los octonios [10]. También están clasificadas en los espacios hiperbólicos sobre los complejos y los octonios [3], aunque sorprendentemente, no sobre los cuaternios.

El objetivo de este trabajo es presentar algunos de los resultados obtenidos recientemente en el estudio de acciones de cohomogeneidad uno en variedades de Lorentz, más concretamente, en el espacio de Minkowski, que es el análogo al espacio euclídeo en signatura lorentziana.

Es habitual suponer en el caso riemanniano que las acciones que actúan sobre las variedades son propias. El estudio de las acciones propias resulta mucho más sencillo que el de las acciones arbitrarias por las propiedades tan atractivas que satisfacen sus grupos de isotropía y sus órbitas. Sin embargo, existen ejemplos sencillos que motivan el estudio de las acciones no necesariamente propias. El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad lorentziana interesante desde el punto de vista físico, puesto que es el espacio sobre el que se modela la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein. La acción natural de  $SO(1, n)$  sobre dicha variedad es de cohomogeneidad uno y, sin embargo, no es propia. En efecto, si lo fuera, todas sus órbitas deberían ser subconjuntos cerrados embebidos, y los conos de luz son órbitas de la acción que no satisfacen dicha propiedad. En este trabajo presentaremos la clasificación de las acciones de cohomogeneidad uno, no necesariamente propias, en los espacio-tiempos de Minkowski de dimensiones dos y tres [1]. Presentamos a continuación la estructura de este trabajo.

Comenzaremos introduciendo, en el Capítulo 1, las definiciones y resultados básicos que utilizaremos a lo largo de la memoria. Recordaremos el concepto de variedad lorentziana, del cual el espacio-tiempo de Minkowski es un caso particular. Recordaremos también conceptos y resultados fundamentales sobre álgebras y grupos de Lie.

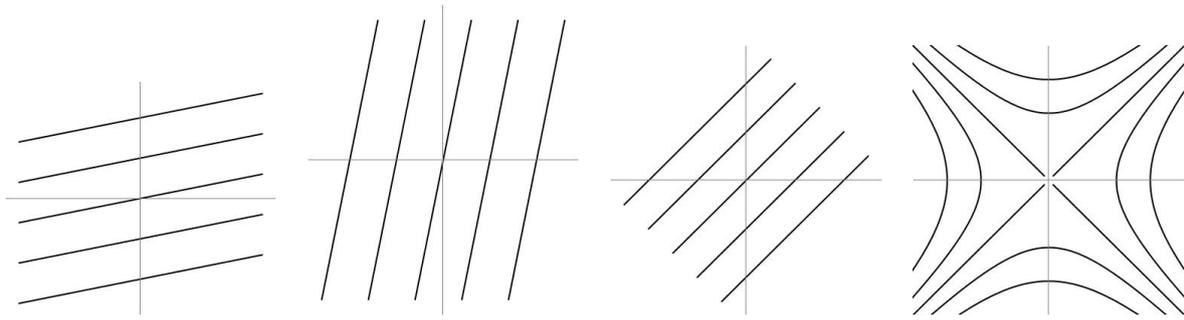


Figura 1: Representación de las órbitas de acciones de cohomogeneidad uno en  $\mathbb{L}^2$

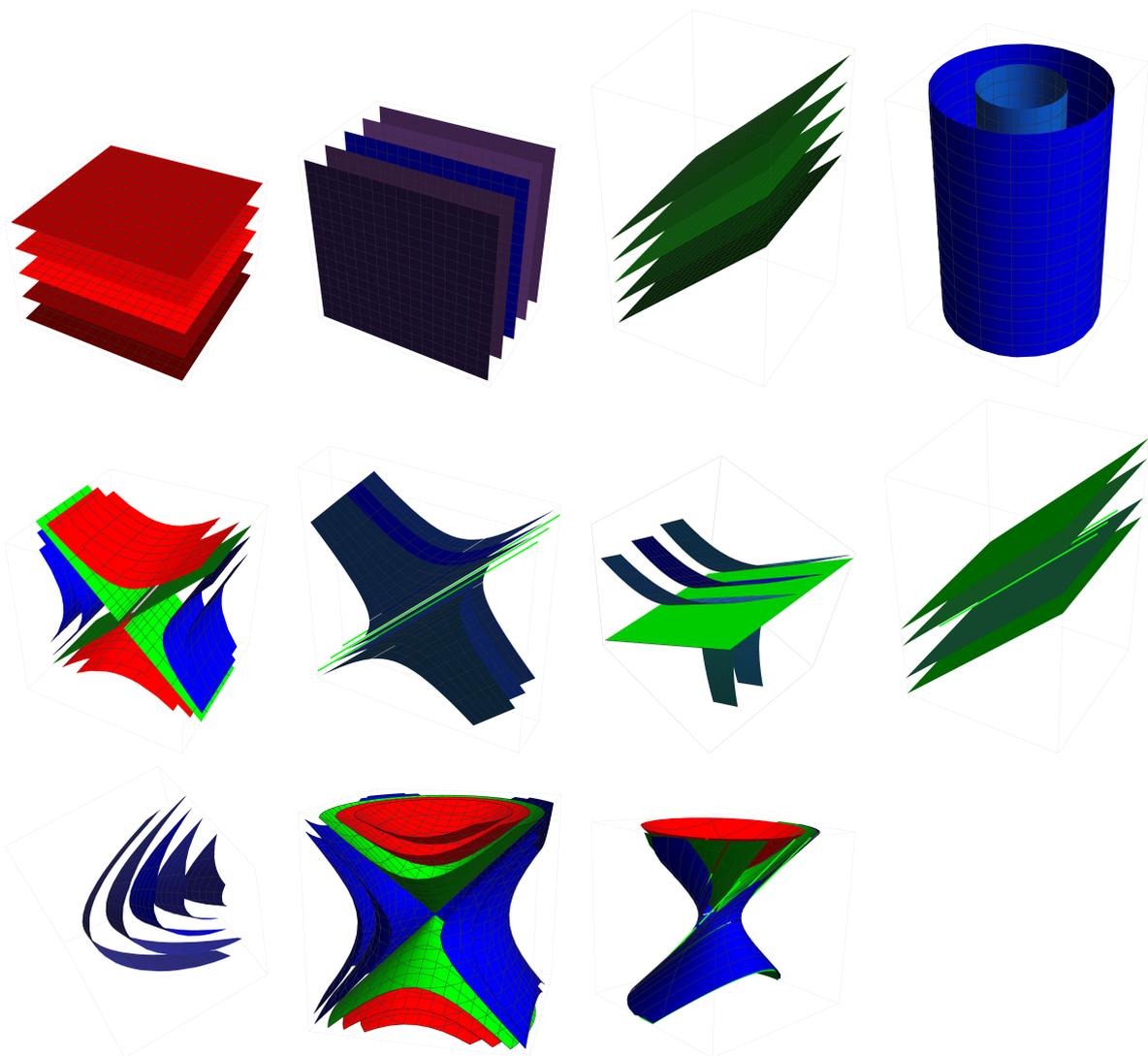


Figura 2: Representación de las órbitas de acciones de cohomogeneidad uno en el espacio-tiempo  $\mathbb{L}^3$

En un segundo capítulo, nos centraremos en el estudio del espacio-tiempo de Minkowski desde un punto de vista geométrico, como variedad pseudo-riemanniana, y desde un punto de vista físico, como el espacio sobre el que se modela la Teoría de la Relatividad Especial. Estudiaremos también las propiedades del grupo de isometrías de  $\mathbb{L}^{n+1}$ , así como las de su álgebra de Lie.

Por último, en el Capítulo 3, apoyándonos sobre los resultados expuestos en las secciones anteriores, presentaremos la clasificación de las acciones isométricas de cohomogeneidad uno en los espacio-tiempos de Minkowski de dimensiones 2 y 3.

El Teorema 3.2 está resumido en la Figura 1. Nótese que la acción de  $SO(1, 1)$  no puede ser propia ya que tiene órbitas que no son cerradas.

El Teorema 3.4, que establece la clasificación de acciones de cohomogeneidad uno en el espacio-tiempo  $\mathbb{L}^3$ , presenta mucha más casuística y está condensado en la Figura 2. Al igual que en  $\mathbb{L}^2$ , hay varias acciones que tienen órbitas no cerradas, de modo que no pueden ser las órbitas de ninguna acción propia sobre  $\mathbb{L}^3$ .



# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo introduciremos la notación y los resultados que utilizaremos a lo largo de la memoria para abordar el problema de clasificar las acciones de cohomogeneidad uno en el espacio-tiempo de Minkowski.

### 1.1. Variedades pseudo-riemannianas

Comenzaremos este capítulo recordando algunos conceptos básicos sobre variedades pseudo-riemannianas y fijando la notación que emplearemos a lo largo de la memoria. Nos apoyaremos fundamentalmente en [4] y [13].

**Definición 1.1.** Una *variedad diferenciable* de dimensión  $n$  es un espacio topológico segundo numerable, Hausdorff y localmente euclidiano de dimensión  $n$ , dotado de una estructura diferenciable, esto es, de un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  para el cual los cambios de cartas  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  son aplicaciones diferenciables  $\mathcal{C}^\infty$ .

Dada una variedad diferenciable  $M$ , denotaremos el espacio tangente a  $M$  en  $p \in M$  por  $T_p M$  y el fibrado tangente por  $TM$ . Dada una aplicación diferenciable entre variedades  $f: M \rightarrow N$ , su diferencial en  $p \in M$  se denotará por  $f_{*p}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ .

**Definición 1.2.** Un *campo de vectores* definido sobre una variedad pseudo-riemanniana  $(M, g)$  es una aplicación diferenciable que asigna a cada punto de la variedad un vector tangente en dicho punto:

$$\begin{aligned} X: M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto X_p \in T_p M. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  el conjunto de los campos de vectores definidos sobre la variedad  $M$ .

Es posible dotar a los espacios tangentes a una variedad diferenciable de una estructura métrica, lo que nos permite medir longitudes de curvas o incluso definir distancias entre puntos de la variedad.

**Definición 1.3.** Dado un espacio vectorial  $V$ , por ejemplo,  $T_pM$ , llamaremos *tensor de tipo*  $(r, s)$  en  $V$  a toda aplicación multi-lineal

$$T: V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

donde  $V^*$  denota el espacio dual de  $V$ .

Introducimos a continuación el concepto de variedad pseudo-riemanniana. Intuitivamente, es una variedad dotada de una métrica que varía diferenciablemente en cada punto.

**Definición 1.4.** Una *variedad pseudo-riemanniana* es un par  $(M, g)$ , donde  $M$  denota una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $g$  un tensor de tipo  $(0,2)$  simétrico y no degenerado, es decir:

$$\begin{aligned} g_p: T_pM \times T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto g(u, v) := \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

con  $p \in M$ ,  $v \in T_pM$  satisfaciendo  $g(u, v) = g(v, u)$  y  $g(u, v) = 0 \ \forall v \Rightarrow u = 0$ .

En estas condiciones, el Teorema de Sylvester nos garantiza que la matriz de Gramm asociada a  $g$  es de la forma

$$\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1).$$

Llamaremos *signatura de  $g$*  al par  $(r, s)$ . Si  $r = 0$ , la variedad se dice *de Riemann*. Si  $s = 1$ , diremos que la variedad es *de Lorentz*.

En el contexto de las variedades pseudo-riemannianas, resultará útil saber derivar campos de vectores en la dirección de otros campos. Para ello, introducimos el concepto de conexión.

**Definición 1.5.** Sea  $(M, g)$  una variedad pseudo-riemanniana. Una *conexión lineal* en  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades. Para cualesquiera  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\nabla_{fX+hY}Z = f\nabla_XZ + h\nabla_YZ$ ,
2.  $\nabla_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda\nabla_XY + \mu\nabla_XZ$ ,
3.  $\nabla_X(fY) = X(fY) + f\nabla_XY$ .

Diremos que una conexión es *libre de torsión* si  $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$ , para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Además, si  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$ , la conexión se dice *adaptada*.

Es un resultado conocido el hecho de que, dada una variedad pseudo-riemanniana  $(M, g)$ , existe una única conexión lineal en  $M$  libre de torsión y adaptada, conocida como *conexión de Levi-Civita*, que viene dada por la *Fórmula de Koszul*:

$$2g(\nabla_XY, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X),$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

La conexión de Levi-Civita nos permite, además, derivar campos de vectores definidos sobre una curva  $\alpha$ . En efecto, si denotamos por  $\mathfrak{X}(\alpha)$  el conjunto de campos de vectores definidos sobre la curva  $\alpha$ ,  $\nabla$  determina un único operador  $\nabla_t: \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que

- $\nabla_t(\lambda X + \mu Y) = \lambda\nabla_tX + \mu\nabla_tY$ ,
- $\nabla_t(fX) = \frac{df}{dt}X + f\nabla_tX$ ,
- $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X = \nabla_tV$ , donde  $V$  es la restricción de  $X$  a  $\gamma$ .

En relación a este concepto, cabe introducir la definición de curva geodésica

**Definición 1.6.** Sea  $(M, g)$  una variedad pseudo-riemanniana y denotemos por  $\nabla$  su conexión de Levi-Civita. Una curva  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  se dice *geodésica* si  $\nabla_t\dot{\gamma} = 0$ .

Tanto la conexión de Levi-Civita como las curvas geodésicas en una variedad pseudo-riemanniana son propiedades que se conservan por isometrías, es decir, por aquellas aplicaciones que preservan la métrica de la variedad.

**Definición 1.7.** Sean  $(M_1, g_1)$  y  $(M_2, g_2)$  dos variedades pseudo-riemannianas. Llamaremos *isometría* a todo difeomorfismo  $f: M_1 \rightarrow M_2$  verificando

$$g_2(f_*(u), f_*(v)) = g_1(u, v), \text{ para todo } u, v \in TM_1.$$

El conjunto de las isometrías sobre una variedad pseudo-riemanniana

$$I(M) = \{f: M \rightarrow M : f \text{ isometría}\}$$

tiene estructura de grupo con la operación composición de aplicaciones. Por esta razón, diremos que es el *grupo de isometrías* de  $M$ .

## 1.2. Álgebras y grupos de Lie

Dedicaremos esta sección a recordar algunas definiciones y resultados básicos sobre la teoría de grupos y álgebras de Lie. Seguiremos, para ello, [2], [6] y [16].

### 1.2.1. Álgebras de Lie

Comenzaremos definiendo el concepto de álgebra de Lie para relacionarlo, en la siguiente sección, con el de grupo de Lie.

**Definición 1.8.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo conmutativo. Una *álgebra de Lie* es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial,  $\mathfrak{g}$ , dotado de una operación interna  $[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , que llamaremos *corchete de Lie*, verificando las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad:  $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z], \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .
2. Anticonmutatividad:  $[X, Y] = -[Y, X], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ .
3. Identidad de Jacobi:  $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

**Definición 1.9.** Sean  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie y  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  un subespacio vectorial

- $\mathfrak{h}$  es una *subálgebra* de  $\mathfrak{g}$  si  $\forall H, \tilde{H} \in \mathfrak{h}, [H, \tilde{H}] \in \mathfrak{h}$ .
- Diremos que  $\mathfrak{h}$  es un *ideal* de  $\mathfrak{g}$  si  $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{h}, [X, H] \in \mathfrak{h}$ .

De entre las posibles aplicaciones entre álgebras de Lie, resultan especialmente útiles aquéllas que preservan el corchete.

**Definición 1.10.** Dadas dos álgebras de Lie,  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$ , diremos que una aplicación lineal  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un *homomorfismo de álgebras de Lie* si para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)].$$

**Ejemplo 1.11.** Sea  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces,

- $\ker(f)$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$  y
- la imagen  $f(\mathfrak{g})$  es una subálgebra de  $\mathfrak{h}$ .

Otro tipo de aplicación importante en el contexto de las álgebras de Lie es la derivación.

**Definición 1.12.** Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie. Llamaremos *derivación* a toda aplicación lineal  $\delta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfaciendo la Regla de Leibnitz:

$$\delta([X, Y]) = [\delta(X), Y] + [X, \delta(Y)],$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Denotaremos por  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  el conjunto de todas las derivaciones de  $\mathfrak{g}$ .

A continuación, introducimos la definición de representación adjunta de una álgebra de Lie. En la práctica, conocer este concepto nos permitirá dar la expresión explícita del corchete correspondiente al álgebra de Lie de un determinado grupo de Lie.

**Definición 1.13.** Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie. Se define la *representación adjunta de  $\mathfrak{g}$*  como la aplicación

$$\begin{aligned} \text{ad}: \quad G &\rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto \text{ad}(X)Y := [X, Y]. \end{aligned}$$

### Álgebras de Lie simples y semisimples

Conocido el concepto de álgebra de Lie, cabe distinguir algunos casos particulares de este tipo de espacios.

**Definición 1.14.** Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie. Llamamos *serie conmutadora* de  $\mathfrak{g}$  a la sucesión

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0], \\ \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1], \\ \vdots \end{array} \right.$$

Definimos también la *serie central inferior* de  $\mathfrak{g}$  como la sucesión decreciente

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0], \\ \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1], \\ \vdots \end{array} \right.$$

**Definición 1.15.** Una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es:

- *resoluble*, si su serie conmutadora es finita;
- *nilpotente*, si su serie central inferior es finita;

**Definición 1.16.** Dada una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , existe un único ideal resoluble que contiene a todos los ideales resolubles de  $\mathfrak{g}$ . Diremos que este ideal es el *radical* de  $\mathfrak{g}$  y lo denotaremos por  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ .

**Definición 1.17.** Una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es *simple* si su único ideal es el  $\{0\}$ . Diremos que es *semisimple* si su radical es trivial.

## 1.2.2. Grupos de Lie

Introducimos ahora una nueva definición, la de grupo de Lie, que combina los conceptos de grupo y de variedad diferenciable.

**Definición 1.18.** Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable,  $G$ , dotada de una estructura de grupo, de manera que la operación

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto \mu(x, y) := x^{-1}y \end{aligned}$$

es diferenciable respecto de la estructura diferenciable de  $G$ .

**Definición 1.19.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Diremos que  $H \subset G$  es un *subgrupo de Lie* de  $G$  si la inclusión  $i: H \hookrightarrow G$  es diferenciable  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Ejemplo 1.20.** Sea  $G$  un grupo de Lie y denotemos por  $G^0$  la componente conexa de  $G$  que contiene al elemento neutro. Entonces,  $G^0$  es un subgrupo de Lie de  $G$ .

**Definición 1.21.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie. Una aplicación  $F: G \rightarrow H$  se dice *homomorfismo de grupos de Lie* si para cualesquiera  $g, \tilde{g} \in G$ ,

$$F(g\tilde{g}) = F(g)F(\tilde{g}).$$

**Ejemplo 1.22.** Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos de Lie. La imagen  $f(G)$  es un subgrupo de Lie de  $H$ .

Puesto que un grupo de Lie es, en particular, una variedad diferenciable, cabe preguntarse cómo son los campos de vectores definidos sobre él. Existe una manera sencilla de construir campos de vectores sobre un grupo de Lie: basta con considerar un vector tangente en un punto, por ejemplo, en el elemento neutro, y realizar traslaciones de dicho vector para obtener un campo definido sobre toda la variedad. Además, los campos de vectores así contruidos nos proporcionan una manera de relacionar las álgebras y los grupos de Lie, como veremos a continuación.

**Definición 1.23.** Sea  $G$  un grupo de Lie.

- Llamaremos *traslación por la izquierda* a la aplicación

$$\begin{aligned} L_g: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto L_g(x) := gx. \end{aligned}$$

- Diremos que un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(G)$  es *invariante por la izquierda* si para cualesquiera  $g, \tilde{g} \in G$  se verifica

$$L_{g*\tilde{g}}(X_{\tilde{g}}) = X_{g\tilde{g}},$$

donde  $L_{g*}: TG \rightarrow TG$  denota la diferencial de la traslación por la izquierda  $L_g$ .

El conjunto de campos de vectores invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie  $G$  tiene estructura de álgebra de Lie con el corchete definido como el conmutador de campos de vectores, esto es,

$$[X, Y] = XY - YX, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

Diremos que este espacio es *el álgebra de Lie de  $G$*  y lo denotaremos por  $\mathfrak{g}$  o  $Lie(G)$ .

Puesto que cada campo de vectores invariante por la izquierda depende únicamente de su valor en el elemento neutro  $e \in G$ , existirá un isomorfismo de espacios vectoriales entre  $\mathfrak{g}$ , el álgebra de Lie de  $G$ , y su espacio tangente en el neutro,  $T_eG$ .

**Definición 1.24.** Diremos que un grupo de Lie  $G$  es *resoluble* (respectivamente *nilpotente*, *simple*, *semisimple*) si es resoluble (respectivamente nilpotente, simple, semisimple) su álgebra de Lie.

**Ejemplo 1.25.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie. Dado un homomorfismo  $\Phi: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ , llamaremos *producto semidirecto*, y lo denotaremos por  $G \ltimes_{\Phi} H$ , a la variedad producto  $G \times H$  dotada de la operación

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 \Phi(g_1)(h_2)).$$

Dadas dos álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$ , llamaremos *suma semidirecta*, y la denotaremos por  $\mathfrak{g} \oplus_{\phi} \mathfrak{h}$ , al espacio vectorial  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  dotado del corchete definido por

$$[X, Y] = \begin{cases} [X, Y]_{\mathfrak{g}}, & \text{si } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ [X, Y]_{\mathfrak{h}}, & \text{si } X, Y \in \mathfrak{h}, \\ \phi(X)Y, & \text{si } X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}, \end{cases}$$

donde  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{h})$  es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Consideremos ahora el producto semidirecto  $G \ltimes_{\Phi} H$  de  $G$  y  $H$ , donde  $\Phi: G \rightarrow \text{Aut}(H)$  es un homomorfismo de grupos. Entonces,  $\Phi(g): H \rightarrow H$  es un isomorfismo de grupos de Lie, y en consecuencia,  $\Phi(g)_{*e} \in \text{Aut}(\mathfrak{h})$  es un automorfismo de álgebras de Lie. Tenemos por tanto el homomorfismo de grupos  $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{h})$ ,  $g \mapsto \tau(g) = \Phi(g)_{*e}$ .

Sea  $\phi = \tau_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{h})$ . Pues bien, el álgebra de Lie de  $G \ltimes_{\Phi} H$  es  $\mathfrak{g} \oplus_{\phi} \mathfrak{h}$ .

Para llevar a cabo la descripción del álgebra de Lie conocido su grupo, o viceversa, definiremos a continuación un par de conceptos que nos facilitarán la tarea.

**Definición 1.26.** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $g \in G$ . Se define la *adjunción de  $G$  en  $g$*  como el endomorfismo de grupos de Lie dado por

$$\begin{aligned} I_g: G &\rightarrow G \\ a &\mapsto gag^{-1}. \end{aligned}$$

En relación a este concepto, cabe introducir la siguiente definición, estrechamente ligada al concepto de representación adjunta de una álgebra de Lie.

**Definición 1.27.** Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Se define la *representación adjunta de  $G$*  como la aplicación dada por

$$\begin{aligned} \text{Ad}: G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ a &\mapsto \text{Ad}(a): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ X &\mapsto \text{Ad}(a)(X) := I_{a*}(X). \end{aligned}$$

El siguiente resultado nos facilitará el cálculo de la representación adjunta de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , con ello, de la expresión explícita de su corchete de Lie: bastará realizar la diferencial de la representación adjunta del correspondiente grupo de Lie.

**Teorema 1.28.** *Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Entonces, se verifica que*

$$\text{Ad}_* = \text{ad}. \quad (1.1)$$

Otro concepto fundamental a la hora de estudiar la relación entre grupos y álgebras de Lie es el de aplicación exponencial, que establecerá un difeomorfismo entre algún entorno de  $e \in G$  y algún entorno de  $0 \in \mathfrak{g}$ .

**Definición 1.29.** *Sea  $G$  un grupo de Lie con neutro  $e$  y con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Se define la aplicación exponencial de  $G$  como*

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \exp(X) = \gamma(1), \end{aligned}$$

siendo  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$  la única curva verificando

- $\gamma(0) = e$  y
- $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ .

**Ejemplo 1.30.** *Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de matrices, entonces la exponencial de  $G$  resulta ser la exponencial de matrices usual.*

El siguiente resultado establece la relación existente entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie a partir de la aplicación exponencial.

**Teorema 1.31.** *Sea  $H$  un subgrupo de Lie de  $G$  y denotemos por  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{g}$  sus respectivas álgebras de Lie. Entonces,*

$$X \in \mathfrak{h} \text{ si, y solo si, } \exp(tX) \in H, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

### 1.2.3. Descomposición de álgebras de Lie

En esta sección, trataremos de describir una álgebra de Lie como suma directa de subespacios vectoriales, siendo el objetivo principal conocer su descomposición de Iwasawa. Comenzaremos definiendo la forma de Cartan-Killing, que resultará una herramienta fundamental a la hora de realizar dicha descomposición. Seguiremos fundamentalmente [2], [7] y [11].

**Definición 1.32.** Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie. Se define la *forma de Cartan-Killing* de  $\mathfrak{g}$  como la aplicación

$$B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)).$$

**Proposición 1.33.** Si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de matrices, entonces su forma de Cartan-Killing satisface:

$$B(X, Y) = (n - 1) \text{tr}(XY) - 2 \text{tr}(X) \text{tr}(Y).$$

Sea  $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  un automorfismo de álgebras de Lie. Entonces, se verifica

$$B(\sigma(X), \sigma(Y)) = B(X, Y).$$

**Definición 1.34.** Sea  $G$  un grupo de Lie semisimple y conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Llamaremos *involución de Cartan* sobre  $\mathfrak{g}$  a todo automorfismo involutivo  $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  que haga de la aplicación

$$B_\theta(X, Y) = -B(\theta X, Y)$$

un producto interior definido positivo sobre  $\mathfrak{g}$ .

*Observación 1.35.* Denotaremos  $\langle \cdot, \cdot \rangle := B_\theta(\cdot, \cdot)$ .

Puesto que la forma de Cartan-Killing de una álgebra de Lie semisimple es no degenerada, toda álgebra de Lie semisimple tendrá una involución de Cartan. Además, dicha involución será única salvo conjugación por elementos de la forma  $\text{Ad}(g)$ , con  $g \in G$ .

Así definida, la involución de Cartan tiene dos autovalores,  $\pm 1$ . Si denotamos los autoespacios asociados a dichos autovalores por  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$ , respectivamente, entonces podemos expresar el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como la siguiente suma directa de subespacios:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

donde  $\mathfrak{k}$  resulta ser el álgebra de Lie de un subgrupo compacto maximal y  $\mathfrak{p}$  su complemento ortogonal respecto de  $B$ . Se verifica que la forma de Cartan-Killing es definida negativa en  $\mathfrak{k}$  y definida positiva en  $\mathfrak{p}$ . Además, estos subespacios satisfacen las siguientes relaciones:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

### Descomposición de Iwasawa

Consideremos ahora  $\mathfrak{a}$  un subespacio abeliano maximal de  $\mathfrak{p}$  y denotemos por  $\mathfrak{a}^*$  su dual. La familia  $\{\text{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$  es un conjunto de operadores autoadjuntos que conmutan. En efecto, dado  $H \in \mathfrak{a}$ , para  $X, Y \in \mathfrak{g}$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}(H)X, Y \rangle &= -B(\theta \text{ad}(H)X, Y) = -B(\theta[H, X], Y) \\ &= -B([\theta H, \theta X], Y) = B([H, \theta X], Y) \\ &= B(\text{ad}(H)\theta X, Y) = -B(\theta X, \text{ad}(H)Y) \\ &= \langle X, \text{ad}(H)Y \rangle. \end{aligned}$$

Además, utilizando la identidad de Jacobi, dados  $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$ ,

$$[\text{ad}(H_1), \text{ad}(H_2)] = \text{ad}[H_1, H_2] \stackrel{(*)}{=} 0,$$

siendo  $(*)$  consecuencia de que  $\mathfrak{a}$  es abeliano.

Para cada elemento  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ , es decir, para cada aplicación lineal  $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos el espacio

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Si  $\lambda \neq 0$  y  $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ , entonces diremos que  $\lambda$  es una *raíz* y que  $\mathfrak{g}_\lambda$  es un *subespacio raíz* de  $\mathfrak{g}$ . Denotaremos por  $\Sigma$  el conjunto de raíces de  $\mathfrak{g}$ . Se verifica que  $\lambda \in \Sigma \Rightarrow -\lambda \in \Sigma$ . Además,

$$\theta \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda} \quad \text{y} \quad [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}, \forall \lambda, \mu \in \Sigma.$$

Es posible dar una descomposición de  $\mathfrak{g}$  como suma directa de este tipo de subespacios (*descomposición en espacios de raíces*):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda,$$

donde  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}$ , siendo  $\mathfrak{k}_0$  el centralizador de  $\mathfrak{a}$  en  $\mathfrak{k}$ .

Tomamos un hiperplano que no contenga ninguna raíz y llamamos *raíces positivas* a aquéllas que están de un lado de dicho hiperplano. Denotaremos por  $\Sigma^+$  el conjunto de raíces positivas. El subespacio de  $\mathfrak{g}$  definido mediante

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$$

resulta ser una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  nilpotente.

En estas condiciones, podemos dar una nueva descomposición del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Diremos que la suma directa de subespacios

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

es la *descomposición de Iwasawa* de  $\mathfrak{g}$ . Diremos también que  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  y  $\mathfrak{n}$  son, respectivamente, la parte resoluble y la parte nilpotente de la descomposición de Iwasawa.

Si denotamos por  $K, A, N$  los grupos de Lie correspondientes a las álgebras  $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ , llamaremos descomposición de Iwasawa de  $G$  al producto  $G \cong KAN$ . De nuevo, diremos que  $AN$  y  $N$  son, respectivamente, la parte resoluble y la parte nilpotente de la descomposición de Iwasawa de  $G$ .

*Observación 1.36.* La descomposición de Iwasawa para álgebras y grupos de Lie semisimples generaliza la descomposición de Gramm-Schmidt.

### 1.3. Acciones de grupos de Lie sobre variedades

Comenzaremos esta sección introduciendo la noción de acción de un grupo sobre un conjunto para centrarnos después en el caso particular de acciones de grupos de isometrías sobre variedades pseudo-riemannianas. Nos apoyaremos sobre [2].

**Definición 1.37.** Sean  $(G, \cdot)$  un grupo y  $M$  un conjunto. Una *acción* (por la izquierda) de  $G$  sobre  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

verificando:

1.  $e(x) = x, \forall x \in M$ , donde  $e$  denota el elemento neutro de  $G$ ;
2.  $(g \cdot h)(x) = g(h(x)), \forall g, h \in G, \forall x \in M$ .

*Observación 1.38.* Si  $G$  es un grupo de Lie y  $M$  una variedad pseudo-riemanniana, entonces se supondrá que la acción de  $G$  sobre  $M$  es una aplicación diferenciable.

**Definición 1.39.** Dada una acción  $G \times M \rightarrow M$  y dado  $p \in M$ , se define

- la *órbita* de  $p$  como el conjunto  $G \cdot p = \{g(p) : g \in G\}$ ;
- el *grupo de isotropía* de  $p$  como  $G_p = \{g : g(p) = p\}$ ;
- el *espacio de órbitas* como el espacio cociente de la acción como  $M/G$ .

**Definición 1.40.** Una acción  $\phi: G \times M \rightarrow M$  se dice *transitiva* si para cualesquiera  $p, q \in M$  existe  $g \in G$  tal que  $g(p) = q$ , es decir, si  $G \cdot p = M$  para todo  $p \in M$ .

En el caso particular de acciones de grupos de Lie sobre variedades, cabe introducir la siguiente definición.

**Definición 1.41.** Sean  $M$  una variedad pseudo-riemanniana y  $G$  el grupo de isometrías de  $M$ . Diremos que  $M$  es una *variedad homogénea* si  $G$  es transitivo sobre  $M$ , es decir, si para cada  $p, q \in M$  existe  $\phi \in G$  tal que  $\phi(p) = q$ .

### 1.3.1. Acciones propias e impropias

**Definición 1.42.** Una acción  $G \times M \rightarrow M$  se dice *propia* si es propia la aplicación

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, x) &\mapsto (x, g(x)), \end{aligned}$$

es decir, si la imagen recíproca de todo compacto en  $M \times M$  es un compacto en  $G \times M$ .

Dada una acción propia, tanto sus órbitas como sus grupos de isotropía verifican propiedades realmente satisfactorias, como muestra el siguiente resultado. Estas propiedades harán que el estudio de dichas acciones sea mucho más sencillo que el de una acción arbitraria.

**Proposición 1.43.** Sea  $G \times M \rightarrow M$  una acción de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable. Si la acción es propia, entonces

- las órbitas son subvariedades cerradas embebidas;
- los grupos de isotropía son compactos;
- el espacio cociente  $M/G$  es Hausdorff.

En estas condiciones, es posible definir una relación de orden parcial en el conjunto de órbitas de la acción. Más concretamente, diremos que  $G \cdot p$  es menor o igual que  $G \cdot q$ , y lo denotaremos por  $G \cdot p \leq G \cdot q$ , si  $G_q$  está contenido en alguna clase de conjugación de  $G_p$ . Diremos también que  $G \cdot q$  y  $G \cdot p$  tienen el mismo tipo de órbita si  $G_p$  y  $G_q$  son conjugadas en  $G$ , es decir, si  $G \cdot p \leq G \cdot q \leq G \cdot p$ . A la clase de equivalencia  $[G \cdot p]$  la llamaremos *tipo de órbita* de  $G \cdot p$ .

Es un resultado conocido, aunque de demostración no trivial, que existe un tipo de órbita maximal. Diremos que cada uno de sus representantes que es una *órbita principal*. Se verifica que la unión de todas las órbitas principales de una acción propia es un subconjunto abierto y denso de la variedad  $M$  y, además, toda órbita principal tiene dimensión máxima  $k$ . Se define una *órbita excepcional* como aquella órbita no principal con dimensión máxima  $k$ . Una órbita no principal con dimensión menor que  $k$  se dice *órbita singular*.

Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.44.** Consideremos la acción natural del grupo de rotaciones  $SO(2)$  sobre la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ :

$$SO(2) \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

Existen dos tipos de órbitas para esta acción: las órbitas singulares son los polos de la esfera y las órbitas principales son los paralelos.

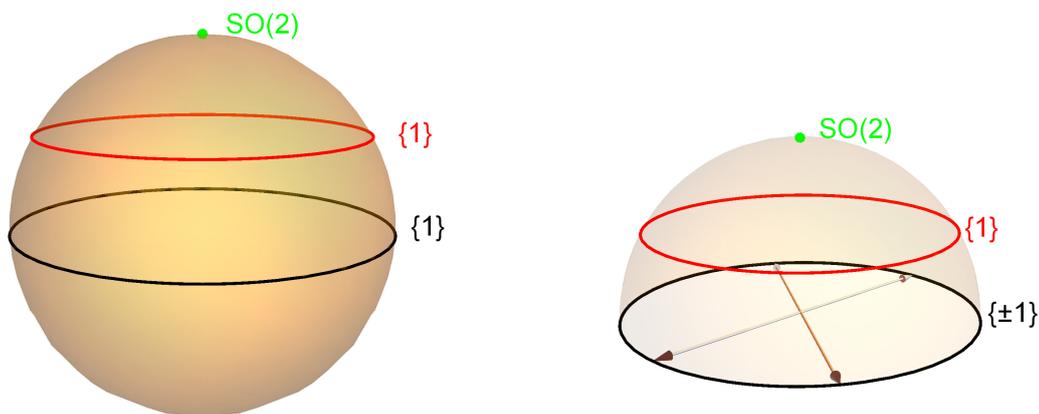


Figura 1.1: La acción de  $SO(2)$  en la esfera y en el plano proyectivo

Consideremos la acción del grupo de rotaciones  $SO(2)$ , pero ahora sobre el espacio

proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ , que podemos identificar con el cociente de la esfera por la relación antipodal  $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ :

$$SO(2) \times \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2.$$

En este caso, hay tres tipos de órbitas. La órbita singular es el polo norte del espacio proyectivo (que identificamos con el polo sur). Los paralelos resultan ser órbitas principales. El ecuador sin embargo es, en este caso, una órbita excepcional: en efecto, tiene la misma dimensión que cualquier órbita maximal y, sin embargo, no es principal (no es maximal porque sus puntos antipodales están identificados). Véase la Figura 1.1.

En estas condiciones, se define la *cohomogeneidad* de la acción propia  $G \times M \rightarrow M$  como la codimensión de una órbita principal.

El estudio de acciones impropias no es, ni mucho menos, tan sencillo. Por ejemplo, no podemos asegurar el carácter Hausdorff del espacio cociente, ni la compacidad de los grupos de isotropía, ni el hecho de que las órbitas sean conjuntos cerrados y embebidos. Sin embargo, existen ejemplos sencillos que motivan el estudio de este tipo de acciones.

**Ejemplo 1.45.** Como veremos en el Capítulo 3, la acción de  $SO^0(1, n)$ , con  $n \geq 2$ , sobre el espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$  tiene cuatro tipos de órbitas: un punto fijo, los conos de luz pasado y futuro, los espacios hiperbólicos y los espacios de De Sitter (véase la Definición 2.4 y 2.3). Puesto que los conos de luz no son cerrados, deducimos que esta acción no es propia.

**Ejemplo 1.46.** Un ejemplo más clásico es la acción de  $\mathbb{R}$  en el toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  por traslaciones:

$$t \cdot (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) = (e^{i(\alpha+t)}, e^{i(\beta+rt)}),$$

con  $r \in \mathbb{R}$ . Si la pendiente  $r$  es irracional, entonces la acción no es propia.

Nuestro objetivo será clasificar acciones, no necesariamente propias, y de cohomogeneidad uno, en el sentido de la siguiente definición.

**Definición 1.47.** Una  $G \times M \rightarrow M$  acción no necesariamente propia se dice de *cohomogeneidad*  $k$  si la mínima codimensión posible de las órbitas de la acción es  $k$ .

**Definición 1.48.** Sea  $M$  una variedad pseudo-riemanniana y consideremos  $G \times M \rightarrow M$  y  $H \times M \rightarrow M$  dos acciones sobre  $M$ . Diremos que  $G$  y  $H$  son *equivalentes* si existe algún elemento  $\phi \in I(M)$  tal que  $\phi(G \cdot p) = H \cdot \phi(p)$ , para todo  $p \in M$ .

En este trabajo no estamos, por tanto, interesados en el aspecto algebraico de las acciones, sino en el geométrico: no estudiamos qué grupo actúa ni cómo es la acción en sí, sino más bien cuáles son sus órbitas y la geometría de las mismas en relación con la variedad ambiente.

# Capítulo 2

## El espacio-tiempo de Minkowski

Puesto que el objetivo fundamental del presente trabajo es la clasificación de las acciones isométricas sobre el espacio-tiempo de Minkowski, estudiaremos, a lo largo de este capítulo, las características de esta variedad así como las de su grupo de isometrías. Para ello, seguiremos [13], fundamentalmente.

### 2.1. $\mathbb{L}^{n+1}$ como variedad

Uno de los ejemplos más sencillos de variedad de Lorentz es el *espacio-tiempo de Minkowski*  $\mathbb{L}^{n+1}$ , es decir, la variedad diferenciable  $\mathbb{R}^{n+1}$  dotada de la métrica de Minkowski:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : T\mathbb{R}^{n+1} \times T\mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle = -u_0v_0 + \sum_{i=1}^n u_i v_i, \end{aligned}$$

con  $u = (u_0, \dots, u_n)$  y  $v = (v_0, \dots, v_n)$ .

Haciendo uso de la Fórmula de Koszul, es sencillo comprobar que la conexión de Levi-Civita en el espacio-tiempo  $\mathbb{L}^{n+1}$  es la derivada direccional de campos de vectores,  $D$ . Conocido este hecho, se deduce fácilmente que las geodésicas en esta variedad son rectas.

A continuación, introducimos la notación y la terminología sobre el espacio-tiempo de Minkowski que utilizaremos en lo que sigue.

*Observación 2.1.* Las definiciones siguientes son válidas para cualquier variedad de Lorentz, no necesariamente  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

Para empezar, definimos el carácter causal de los vectores tangentes  $v \in T\mathbb{L}^{n+1}$ .

**Definición 2.2.** Un vector  $v \in T\mathbb{L}^{n+1}$  se dice *espacial*, si  $\langle v, v \rangle > 0$ ; *temporal*, si  $\langle v, v \rangle < 0$ ; *causal*,  $\langle v, v \rangle \leq 0$ ; *nulo*, si  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Así mismo, diremos que un subespacio vectorial de  $T\mathbb{L}^{n+1}$  es temporal, espacial o nulo si la métrica restringida a dichos espacios es, respectivamente, lorentziana, riemanniana o degenerada. También diremos que una curva en  $\mathbb{L}^{n+1}$  es temporal, espacial, causal o nula si lo es su vector tangente en cada uno de sus puntos.

Sean  $p, q \in \mathbb{L}^{n+1}$  y  $u, v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ . Entonces,

- la *norma* del vector  $v$  será el escalar  $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ ,
- se define el *ángulo de Lorentz* entre dos vectores temporales  $u$  y  $v$  como el único número real positivo  $\varphi$  tal que  $\langle u, v \rangle = |u||v| \cosh \varphi$ .

Introducimos a continuación algunos subespacios importantes de  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

**Definición 2.3.** Llamaremos *espacio hiperbólico* de radio  $r$  al conjunto

$$H(r) = \{v \in T_p\mathbb{L}^{n+1} : \langle v, v \rangle = -r^2\}$$

y *espacio de De Sitter* de radio  $r$  a

$$S(r) = \{v \in T_p\mathbb{L}^{n+1} : \langle v, v \rangle = r^2\}.$$

**Definición 2.4.** Sea  $p \in \mathbb{L}^{n+1}$  un vector temporal. Se define el *cono temporal* de  $p$  como el conjunto

$$\{v \in T_p\mathbb{L}^{n+1} : \langle v, v \rangle < 0\}.$$

Se define el *cono causal* de  $u$  como el conjunto

$$\{v \in T_p\mathbb{L}^{n+1} : \langle u, v \rangle \leq 0\}.$$

Por último, el *cono de luz* es el conjunto

$$\mathcal{C}_p = \{v \in T_p\mathbb{L}^{n+1} : \langle v, v \rangle = 0\}.$$

Notemos que, dado que  $T_p\mathbb{L}^{n+1} \cong p + \mathbb{L}^{n+1}$ , podemos identificar el cono de luz  $\mathcal{C}_p$  con el conjunto  $\{q \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle q - p, q - p \rangle = 0\}$ .

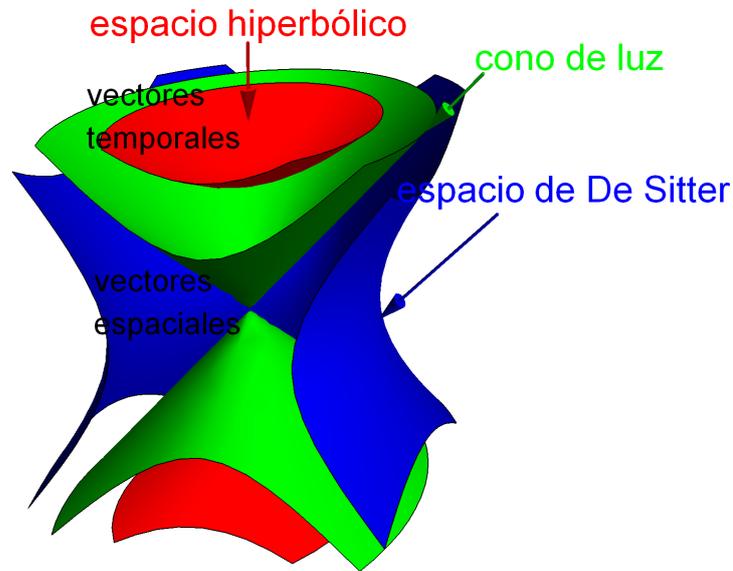


Figura 2.1: Subespacios de  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

En relación al concepto de cono causal, cabe introducir la definición de orientación temporal. Para cada  $p \in \mathbb{L}^{n+1}$  existen exactamente dos conos causales intrínsecamente indistinguibles en  $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ . Escoger uno de ellos es orientar temporalmente  $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ . En el espacio-tiempo de Minkowski, es posible hacer esta elección en cada punto de la variedad de manera continua y, por ello, diremos que  $\mathbb{L}^{n+1}$  es *temporalmente orientable*. Diremos, además, que la orientación escogida es el *futuro* y llamaremos *pasado* a la otra orientación posible.

**Definición 2.5.** Un vector causal  $v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ , con  $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ , se dice que *apunta hacia el futuro* si está contenido en el cono causal futuro de  $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ . Una curva causal  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  apunta hacia el futuro si lo hace el vector velocidad  $\alpha'$  en cada punto.

El uso de esta notación tiene una motivación física, como veremos en la siguiente sección.

### 2.1.1. La variedad de la relatividad especial

El espacio-tiempo de Minkowski resulta ser una variedad importante desde el punto de vista de la Física puesto que es el espacio sobre el que se modela la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein.

A finales del siglo XIX, las evidentes incompatibilidades entre la Mecánica Clásica de Newton y las Leyes del electromagnetismo de Maxwell motivaron la búsqueda de una teoría que diese explicación a los fenómenos físicos que ocurren a velocidades similares a la de la luz. La Teoría de la Relatividad Especial modificará ciertos aspectos de la Mecánica de Newton y la llevará a un marco más general en el que tenga cabida el estudio de este tipo de sucesos.

La base matemática de esta teoría consiste en realizar un cambio en las coordenadas del espacio y del tiempo, considerándolas combinadas en la misma manera de pensar: el espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{L}^4$ . El estudio de la geometría de esta variedad permitirá comprender la mecánica de Einstein, así como dar una explicación razonable a todos aquellos fenómenos relativistas que semejaban paradójicos desde el punto de vista de las teorías físicas más clásicas.

### Mecánica de Newton

Habitualmente, se denota por  $\mathbb{R}^4$ , con coordenadas  $(t, x, y, z)$ , el espacio-tiempo de Newton, entendido como la variedad producto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , siendo el primer factor el tiempo y el segundo, el espacio.

Un punto arbitrario del espacio-tiempo de Newton se dice *suceso* o *evento*. Dado un suceso  $p$  en  $\mathbb{R}^4$ , podemos determinar exactamente el instante y el lugar en el que ocurre sin más que considerar las proyecciones en cada uno de los factores  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^3$ . Además, podemos determinar, de esta misma manera, el tiempo transcurrido entre dos sucesos  $p, q$ , así como la distancia euclídea que los separa.

En el espacio-tiempo newtoniano se modela, desde el punto de vista clásico, el movimiento de las partículas, entendidas intuitivamente como aquellos objetos de tamaño despreciable con respecto a las distancias típicas del problema físico en el que está involucrado. Más concretamente, una *partícula* es una curva diferenciable  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  cuyo vector tangente no es nunca horizontal.

El estudio de las partículas de  $\mathbb{R}^4$  nos permite dar una interpretación de la *causalidad* en este espacio. Dados dos sucesos  $p, q \in \mathbb{R}^4$ ,  $p$  es causa de  $q$  o influye sobre  $q$  si existe una partícula desde  $p$  hasta  $q$ . De esta definición, se deduce fácilmente que dado un suceso  $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ , el plano  $t = p^0$  contiene a todos los sucesos simultáneos con  $p$  y que los subespacios que delimita,  $\{(q^0, q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{L}^4 : p^0 < q^0\}$  y  $\{(q^0, q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{L}^4 : p^0 > q^0\}$  son los conjuntos de los sucesos sobre los que influye  $p$  y de aquellos otros que influyen sobre  $p$ , respectivamente. Diremos que estos conjuntos son el *futuro* y el *pasado* de  $p$ .

## Mecánica relativista

Comparemos las nociones de la mecánica de Newton con la mecánica de Einstein.

La definición de partícula newtoniana coincide con la noción de partícula desde el punto de vista relativista. Sin embargo, en este último caso, cabe distinguir varios tipos de partículas. Diremos que una partícula  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$  es un *fotón* si es una geodésica (una recta) nula en  $\mathbb{L}^4$  que apunta hacia el futuro. Llamaremos *partícula material* a toda curva temporal apuntando hacia el futuro,  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$ , tal que  $|\alpha'(\tau)| = 1$ , con  $\tau \in \mathbb{R}$ . Diremos, además, que  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula.

El estudio de las partículas de  $\mathbb{L}^4$  nos permite dar una interpretación de la *causalidad* en este espacio. De nuevo, diremos que un suceso  $p$  influye sobre otro suceso  $q$  si existe una partícula desde  $p$  hasta  $q$ . Dados dos sucesos  $p, q \in \mathbb{L}^4$ , definimos el *vector desplazamiento* entre  $p$  y  $q$ , y lo denotamos por  $\vec{pq}$ , como  $\alpha'(0)$ , siendo  $\alpha$  la única geodésica de  $\mathbb{L}^4$  tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(1) = q$ . En estas condiciones, introducimos los siguientes subespacios de  $\mathbb{L}^4$  (compárese con la Definición 2.4): el *cono temporal de  $p$*  es el conjunto  $\{q \in \mathbb{L}^4 : \vec{pq} \text{ es temporal}\}$  y, análogamente, se definen el *cono causal de  $p$*  y el *cono de luz de  $p$* .

Se sigue fácilmente de estas definiciones que los únicos sucesos que pueden influir sobre  $p$  son aquéllos que se encuentran en su cono causal pasado y que los únicos eventos sobre los que puede influir  $p$  son los pertenecientes a su cono causal futuro. Estas observaciones justifican la terminología mencionada en la Sección (2.1). Además, no existe un espacio de sucesos simultáneos con  $p$ .

Un concepto fundamental a la hora de estudiar la mecánica relativista es el de observador. Llamaremos *observador inercial* a todo sistema coordinado  $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  de  $\mathbb{L}^4$  que preserve la orientación temporal. Notemos que el eje  $x^0$  resulta ser una recta de parametrización natural  $\alpha(t) = (t, 0, 0, 0)$  y es un cálculo sencillo la comprobación de que esta curva está parametrizada por tiempo propio  $t$ . Además, el hiperplano coordinado  $x^0 = 0$ , que usualmente se denota por  $E_0$ , es un espacio euclídeo isométrico a  $\mathbb{R}^3$ .

En el espacio-tiempo de Minkowski, el tiempo y el espacio son magnitudes interrelacionadas. Sin embargo, la lectura de los diversos sucesos y partículas de  $\mathbb{L}^4$  en estas coordenadas nos permite diferenciar el tiempo y el espacio de un suceso o de una partícula, desde el punto de vista del observador  $\xi$ .

Sea  $\alpha(s)$  una partícula de  $\mathbb{L}^4$ . Llamaremos  $\xi$ -*tiempo* de  $\alpha(s)$  a  $x^0(\alpha(s))$  y  $\xi$ -*posición* de  $\alpha(s)$  a  $\vec{\alpha}(s) = (x^1(\alpha(s)), x^2(\alpha(s)), x^3(\alpha(s))) \in E_0$ .

*Observación 2.6.* Análogamente se define el  $\xi$ -*tiempo* y la  $\xi$ -*posición* para  $p \in \mathbb{L}^4$ :  $x^0(p)$  y  $\vec{p} = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ , respectivamente.

Puesto que la composición  $x^0 \circ \alpha$  es un difeomorfismo, tendrá un difeomorfismo inverso, pongamos  $u$ , del que nos serviremos para expresar la  $\xi$ -posición de  $\alpha$  como una curva en  $E_0$  en función de la variable  $t$ . Diremos de esta curva que es la *partícula newtoniana  $\xi$ -asociada a  $\alpha$*  y la interpretaremos como aquéllo que  $\xi$  observa de la partícula  $\alpha$ , medido por su tiempo propio  $t$ .

Las conclusiones obtenidas por el observador sobre la partícula newtoniana  $\vec{\alpha}$  serán distintas dependiendo de la naturaleza de la partícula  $\alpha$ .

- Dado un fotón en  $\mathbb{L}^4$ , su partícula newtoniana  $\xi$ -asociada es una recta en  $\mathbb{R}^3$  con velocidad 1. Esto se corresponde con el segundo de los postulados de la teoría de Einstein, que afirma que la luz es constantemente igual a 1 en el vacío e independiente del movimiento de su foco emisor.
- Sea  $\alpha$  una partícula material parametrizada por tiempo propio  $\tau$ . Entonces, la velocidad de su partícula newtoniana  $\xi$ -asociada es  $v = \left| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right| = \tanh \varphi$  y la relación entre el tiempo propio  $\tau$  y el  $\xi$ -tiempo está dada por  $\frac{dt}{d\tau} = \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  (ver Figura 2.2).

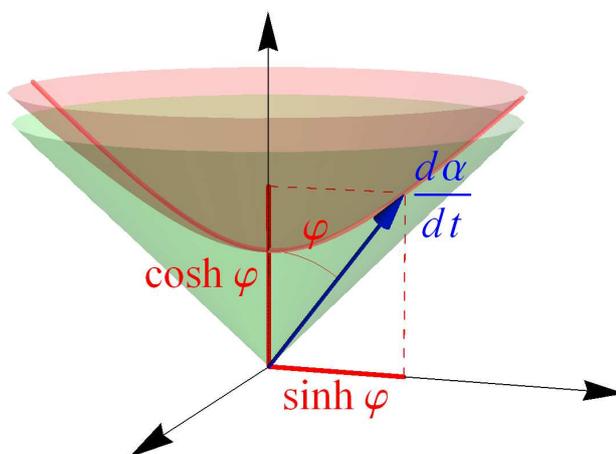


Figura 2.2: Observador inercial

Esto se corresponde con el primero de los postulados de la teoría de Einstein (o Principio de relatividad de Galileo): no existe la noción de velocidad absoluta para una partícula material.

## 2.2. El grupo de isometrías de $\mathbb{L}^{n+1}$

Dedicaremos esta sección a la descripción del grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski,  $I(\mathbb{L}^{n+1})$ , así como de la componente conexa del elemento neutro de dicho grupo. Además, puesto que el grupo de isometrías de una variedad pseudo-riemanniana conexa es un grupo de Lie, estudiaremos también las propiedades del álgebra de Lie de  $I(\mathbb{L}^{n+1})$ .

Veamos cuál es el grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski.

**Proposición 2.7.** *El grupo de isometrías de  $\mathbb{L}^{n+1}$  es el producto semidirecto*

$$I(\mathbb{L}^{n+1}) = O(1, n) \ltimes_{\Phi} \mathbb{L}^{n+1},$$

donde  $O(1, n) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A\varepsilon A^T = \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  y  $\Phi$  viene dado por

$$\begin{aligned} \Phi: O(1, n) \times \mathbb{L}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{L}^{n+1} \\ (a, v) &\mapsto \Phi(a)(v) = av. \end{aligned}$$

*Demostración.* Veamos que  $O(1, n) \ltimes_{\Phi} \mathbb{L}^{n+1} \subset I(\mathbb{L}^{n+1})$ . Sea  $F: \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  definida mediante  $F(p) = Ap + v$ , con  $A \in O(1, n)$  y  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$ . Dados  $u, v \in T\mathbb{L}^{n+1}$ ,

$$\langle F_*(u), F_*(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = u^T A^T \varepsilon Av = \langle u, v \rangle,$$

luego  $F$  es isometría.

Resta probar que  $I(\mathbb{L}^{n+1}) \subset O(1, n) \ltimes_{\Phi} \mathbb{L}^{n+1}$ . Sea  $F: \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  una isometría y veamos que, necesariamente, es de la forma  $F(p) = Ap + v$ , con  $A \in O(1, n)$  y  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$ .

Por ser  $F$  una isometría de  $\mathbb{L}^{n+1}$ ,  $\langle F_{*p}(u), F_{*p}(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ , para todo  $p \in \mathbb{L}^{n+1}$  y para cualesquiera  $u, v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ . En particular,  $F_{*p} \in O(1, n)$ . Además, puesto que  $F$  es una isometría, lleva geodésicas de  $\mathbb{L}^{n+1}$  en geodésicas de  $\mathbb{L}^{n+1}$ , es decir, lleva rectas en rectas.

Sea  $x \in \mathbb{L}^{n+1}$  y veamos que  $F(x) = F(0) + F_*(0)x \in O(1, n) \ltimes_{\Phi} \mathbb{L}^{n+1}$ . Dada la recta  $\gamma(t) = tx$ , su imagen por  $F$ ,  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$ , será también una recta y estará determinada por

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= F(\sigma(0)) = F(0) \text{ y} \\ \sigma'(0) &= F_*(\gamma(0))\gamma'(0) = F_*(0)x. \end{aligned}$$

Así,  $\sigma(t) = F(0) + F_*(0)x$  y, en particular,  $F(x) = \sigma(1) = F(0) + F_*(0)x$ , con lo que podemos concluir que el grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski es

$$I(\mathbb{L}^{n+1}) = O(1, n) \ltimes_{\Phi} \mathbb{L}^{n+1}. \quad \square$$

La operación natural del grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski es el producto definido, para  $(a, v), (b, w) \in I(\mathbb{L}^{n+1})$ , mediante

$$(a, v)(b, w) = (ab, v + aw).$$

En efecto, dado  $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ ,

$$(a, v)(b, w)p = (a, v)[(b, w)p] = (a, v)(bp + w) = a(bp + w) + v = (ab)p + (v + aw).$$

Utilizando la expresión del producto del grupo, es sencillo comprobar que el inverso de un elemento  $(a, v) \in I(\mathbb{L}^{n+1})$  tiene la forma  $(a, v)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1}v)$ .

En lo que sigue, denotaremos por  $G$  la componente conexa del elemento neutro de dicho grupo de isometrías,

$$G = I^0(\mathbb{L}^{n+1}) = SO^0(1, n) \ltimes_{\Phi} \mathbb{L}^{n+1},$$

donde  $SO^0(1, n)$  denota la componente conexa de  $O(1, n)$  que preserva la orientación y la orientación temporal.

Todo subgrupo conexo de  $I^0(\mathbb{L}^{n+1})$  actúa de manera natural sobre  $\mathbb{L}^{n+1}$  como sigue:

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{L}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{L}^{n+1} \\ ((A, v), x) &\mapsto Ax + v. \end{aligned}$$

### El álgebra de Lie de $I(\mathbb{L}^{n+1})$

Puesto que  $G = I^0(\mathbb{L}^{n+1})$  es un grupo de Lie, cabe preguntarse cuál es su álgebra de Lie. A nivel de espacios vectoriales, está claro que esta álgebra de Lie de  $G$  es, precisamente,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n) \oplus \mathbb{L}^{n+1}$ , siendo  $\mathfrak{so}(1, n) = \{X : X^T \varepsilon + \varepsilon X, \text{tr}(X) = 0\}$  el álgebra de Lie de  $SO^0(1, n)$  en virtud del Teorema 1.31. Veamos ahora que a nivel de álgebras de Lie es  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n) \oplus_{\phi} \mathbb{L}^{n+1}$ , donde

$$\begin{aligned} \phi: \mathfrak{so}(1, n) \times \mathbb{L}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{L}^{n+1} \\ (X, v) &\mapsto \phi(X)(v) = Xv. \end{aligned}$$

Para ello tenemos que calcular la expresión del corchete de Lie, siguiendo las definiciones y resultados expuestos en las Sección 1.2.

Para comenzar, la adjunción en  $G$  vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} I_{(g,v)}: G &\rightarrow G \\ (a, w) &\mapsto I_{(g,v)}(a, w) = (g, v)(a, w)(g, v)^{-1} \end{aligned}$$

o, más concretamente, por:

$$\begin{aligned} I_{(g,v)}(a, w) &= (g, v)(a, w)(g, v)^{-1} = (ga, v + gw)(g^{-1}, -g^{-1}v) \\ &= (gag^{-1}, -gag^{-1} + gw + v). \end{aligned}$$

Conocida la adjunción de  $G$ , y dado  $(g, v) \in G$ , veamos cómo es la expresión explícita de la representación adjunta de dicho grupo.

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g, v): \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, w) &\mapsto \text{Ad}(g, v)(X, w) := I_{(g,v)*}(X, w). \end{aligned}$$

Para realizar este cálculo, es necesario considerar una curva  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$  verificando  $\alpha(0) = (1, 0)$  y  $\alpha'(0) = (X, w)$ . Tomamos  $\alpha(t) = (e^{tX}, tw)$ . Así,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g, v)(X, w) &= I_{(g,v)*}(X, w) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (I_{(g,v)}(\alpha(t))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (ge^{tX}g^{-1}, v + tgw - ge^{tX}g^{-1}v) \\ &= (gXe^{tX}g^{-1}, gw - gXe^{tX}g^{-1}v) \Big|_{t=0} \\ &= (gXg^{-1}, gw - gXg^{-1}v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sea ahora  $(X, v) \in \mathfrak{g}$  y calculemos la representación adjunta del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . En virtud del Teorema (1.28),

$$\begin{aligned} \text{ad}(X, v): \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (Y, w) &\mapsto \text{ad}(X, v)(Y, w) = \text{Ad}(X, v)_*(Y, w). \end{aligned}$$

Para realizar este cálculo, tomaremos una curva  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$  tal que  $\alpha(0) = (1, 0)$  y  $\alpha'(0) = (X, v)$ . Consideramos la curva definida por  $\alpha(t) = (e^{tX}, tv)$ . Así,

$$\begin{aligned} [(X, v), (Y, w)] &= \text{ad}(X, v)(Y, w) = \text{Ad}(X, v)_*(Y, w) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\alpha(t))(Y, w) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(e^{tX}, tv)(Y, w) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{tX}Ye^{-tX}, e^{tX}w - e^{tX}Ye^{-tX}tv) \\ &= (XY - YX, Xw - Yv). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por tanto, concluimos que el álgebra de Lie del grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski es el espacio vectorial  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n) \oplus_{\phi} \mathbb{L}^{n+1}$  dotado del corchete definido por

$$[(X, v), (Y, w)] = (XY - YX, Xw - Yv),$$

para cualesquiera  $(X, v), (Y, w) \in \mathfrak{g}$ .

### La aplicación exponencial de $I^0(\mathbb{L}^{n+1})$

Trataremos ahora de encontrar la expresión de la aplicación exponencial del grupo de Lie  $G = I^0(\mathbb{L}^{n+1})$ .

Dado  $(X, v) \in \mathfrak{g} \equiv T_{(1,0)}G$ , tenemos que buscar la única curva integral  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$  tal que  $\gamma(0) = (1, 0)$  y  $\gamma'(t) = (X, v)_{\gamma(t)}$ , donde ahora  $(X, v)$  es considerado como un campo de vectores invariante por la izquierda. Para ello, dado  $(a, w) \in G$ , veamos en primer lugar cuál es la expresión de la traslación por la izquierda por el elemento  $(a, w)$  de  $(X, v)$ .

$$(X, v)_{(a,w)} = L_{(a,w)*}(X, v).$$

Para poder realizar este cálculo, tomamos una curva  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$  tal que  $\alpha(0) = (1, 0)$  y  $\alpha'(0) = (X, v)$ , por ejemplo,  $\alpha(t) = (e^{tX}, tv)$ . Así,

$$\begin{aligned} (X, v)_{(a,w)} &= L_{(a,w)*}(X, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_{(a,w)}(\alpha(t))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_{(a,w)}(e^{tX}, tv)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (ae^{tX}, tav + w) \\ &= (aXe^{tX}, av) \Big|_{t=0} = (aX, av). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora será buscar una curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ ,  $\gamma(t) = (a(t), w(t))$  tal que

- $(a(0), w(0)) = \gamma(0) = (1, 0)$  y
- $(a'(t), w'(t)) = \gamma'(t) = (X, v)_{(a(t), w(t))} = (a(t)X, a(t)v)$ .

Para ello, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} a'(t) &= a(t)X, \\ w'(t) &= a(t)v, \end{aligned}$$

con  $a(0) = 1$  y  $w(0) = 0$ . Se deduce fácilmente que  $a(t) = e^{tX}$ . En efecto,  $a(0) = e^{0X} = 1$  y, además,

$$a'(t) = Xe^{tX} \stackrel{(*)}{=} a(t)X,$$

siendo la igualdad  $(\star)$  consecuencia de la conmutatividad entre  $X$  y  $e^{tX}$ .

Ahora, resta resolver la ecuación

$$w'(t) = a(t)v = e^{tX}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} v \quad (2.3)$$

con condición inicial  $w(0) = 0$ .

*Observación 2.8.* Notemos que si  $X$  fuese inversible, el problema se reduciría a despejar  $w(t)$ :

$$w(t) = (e^{tX} - 1)X^{-1}v.$$

Si  $v \in \ker(X)$ , es decir, si  $Xv = 0$ , entonces  $w'(t) = v$  y, así,  $w(t) = tv$ . En este caso, por tanto,

$$\exp(X, v) = \gamma(1) = (e^X, v). \quad (2.4)$$

Supongamos ahora que  $v \notin \ker(X)$ . El caso en que  $\ker(X)$  es no degenerado (es decir,  $\mathbb{L}^{n+1} = \ker(X) \oplus \text{Im}(X)$ ) resulta sencillo de analizar. Sean  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$  y  $X \in \mathfrak{so}(1, n)$ . Considerando  $d \in \ker(X)$ , se verifica

$$\langle Xv, d \rangle = -\langle v, Xd \rangle = -\langle v, 0 \rangle = 0,$$

con lo que deducimos que  $X(\mathbb{L}^{n+1}) \subset (\ker(X))^\perp$ . Como, además, ambos espacios tienen la misma dimensión, se da la igualdad  $X(\mathbb{L}^{n+1}) = (\ker(X))^\perp$ . Por tanto, en este caso, todo elemento  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$  puede expresarse como

$$v = d - Xc,$$

con  $d \in \ker(X)$  y  $c \in \mathbb{L}^{n+1}$ .

En estas condiciones,

$$\begin{aligned} w'(t) &= e^{tX}v = e^{tX}(d - Xc) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} (d - Xc) \\ &= d - cX \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \\ &= d - cX e^{tX}. \end{aligned}$$

Resolviendo el problema

$$\begin{cases} w'(t) = d - cX e^{tX} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

obtenemos  $w(t) = dt - ce^{tX} + c$ . De esta manera, conseguimos una curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ , dada por  $\gamma(t) = (e^{tX}, d + c - ce^{tX})$ , verificando  $\gamma(0) = (1, 0)$  y  $\gamma'(t) = (X, v)$ .

La aplicación exponencial de  $G$ , en este caso, tendrá la forma

$$\exp(X, v) = \gamma(1) = (e^X, d + c - ce^X). \quad (2.5)$$

Si  $\ker(X)$  es degenerado, por ejemplo, si  $X \in \mathfrak{n}$ , no podemos utilizar este argumento, pues no es cierto que  $X(\mathbb{L}^{n+1}) = (\ker(X))^\perp$ . En lugar de estudiar este caso, trataremos de abordar el problema desde un punto de vista más general que cubra todas las posibilidades para  $v$  y  $X$ . Puesto que  $X$  no es necesariamente inversible, no tiene sentido, en principio, la expresión

$$w'(t) = e^{tX}v \Rightarrow w(t) = (e^{tX} - 1)X^{-1}v$$

(ver Observación 2.8). Sin embargo, podemos reescribir  $(e^{tX} - 1)X^{-1}v$  mediante la función

$$\varphi(tX)v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^{k-1}}{k!} v, \quad (2.6)$$

que es analítica, como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.9.** *La función  $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow G$  dada por*

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{k-1}}{k!}$$

*es analítica.*

*Demostración.* Puesto que la función  $\varphi$  se expresa en serie de potencias, para demostrar que es analítica bastará comprobar que dicha serie es convergente.

Es un hecho conocido que el espacio de matrices con coeficientes en un cuerpo,  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ , es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \text{ donde } A = (a_{ij}).$$

Por ello, probar la convergencia de la serie equivale a comprobar que la sucesión de sumas parciales

$$\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{X^{k-1}}{k!} \right\}_{N \in \mathbb{N}}$$

es de Cauchy en el espacio  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  con la norma  $\|\cdot\|_1$ . Es decir, tenemos que probar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\|S_{N+M} - S_N\|_1 < \varepsilon$ , para todo  $N \geq k_\varepsilon$ ,  $M \geq 0$ .

Sea entonces  $\varepsilon > 0$  fijado arbitrariamente.

$$\begin{aligned}
\|S_{N+M} - S_N\|_1 &= \left\| \sum_{k=0}^{M+N} \frac{X^{k-1}}{k!} - \sum_{k=0}^N \frac{X^{k-1}}{k!} \right\|_1 \\
&= \left\| \sum_{k=N+1}^{M+N} \frac{X^{k-1}}{k!} \right\|_1 \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=N+1}^{M+N} \frac{\|X^{k-1}\|_1}{k!} \\
&\stackrel{(**)}{\leq} \sum_{k=N+1}^{M+N} \frac{\|X\|_1^{k-1}}{k!},
\end{aligned}$$

siendo  $(*)$  consecuencia de la desigualdad triangular y  $(**)$  del hecho de que, para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ ,  $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$ .

Ahora, por ser la serie

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}$$

convergente en  $\mathbb{R}$ , necesariamente la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y, por tanto, existe  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que si  $N \geq k_\varepsilon$ , entonces  $\|S_{N+M} - S_N\|_1 < \varepsilon$ . Así,  $\varphi(X)$  es absolutamente convergente y, por tanto, convergente.  $\square$

En lo que sigue, daremos una interpretación de la aplicación exponencial que resultará más compacta.

**Proposición 2.10.** *Sea  $X \in \mathfrak{so}(1, n)$  y  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$ . Entonces,*

$$\exp \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^X & \varphi(X)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

siendo  $\varphi$  la función analítica definida en (2.6).

*Demostración.* Sean  $A \in \mathfrak{so}(1, n)$  y  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$ . Veamos, en primer lugar, que

$$\begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

- El resultado es trivial para  $k = 1$ .

- Supongamos (hipótesis de inducción) que (2.8) se verifica para  $k - 1$ , con  $k > 1$ :

$$\begin{pmatrix} X & Xv \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} X^{k-1} & X^{k-2}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Veamos que se verifica también para  $k$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^{k-1} & X^{k-2}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} X^k & X^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{k-1}}{k!}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^X & \varphi(X)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

*Observación 2.11.* Notemos que es posible incluir  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  identificando los elementos  $x \in \mathbb{R}^n$  con los elementos  $(x|1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Análogamente, podemos identificar toda aplicación lineal  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax + v$  con el siguiente producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, en cualquier caso, dados  $X \in \mathfrak{so}(1, n)$  y  $v \in \mathbb{L}^{n+1}$ , la exponencial del grupo de Lie correspondiente se calcula como

$$\exp(X, v) = (e^X, \varphi(X)v), \tag{2.9}$$

siendo  $\varphi$  la función analítica definida en (2.6).

En la práctica, el procedimiento para averiguar la exponencial de un subgrupo de Lie de  $G$  será calcular la exponencial de matrices

$$\exp \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^X & \varphi(X)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y servirnos de la Observación 2.11 anterior para concluir que, dado  $x \in \mathbb{L}^{n+1}$ , podemos identificar  $\exp(t(X, v))(x)$  con

$$\exp(t(X, v))(x) = \begin{pmatrix} e^{tX} & \varphi(tX)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tX}x + \varphi(tX)v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Descomposición de Iwasawa de $\mathfrak{so}(1, n)$

El objetivo de esta sección será conocer la descomposición de Iwasawa de  $\mathfrak{so}(1, n)$ , así como la de su grupo de Lie  $SO^0(1, n)$ .

El álgebra de Lie del grupo  $SO^0(1, n)$  es

$$\mathfrak{so}(1, n) = \left\{ M_{X,v} = \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ v & X \end{pmatrix} : X \in \mathfrak{so}(n) \text{ y } v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Con esta notación, el corchete de Lie de  $\mathfrak{so}(1, n)$  viene dado por la siguiente expresión:

$$[M_{X,v}, M_{Y,w}] = M_{XY - YX + v^T w - w^T v, Xw - Yv}.$$

En efecto, dados  $M_{X,v}, M_{Y,w} \in \mathfrak{so}(1, n)$ ,

$$\begin{aligned} [M_{X,v}, M_{Y,w}] &= M_{X,v}M_{Y,w} - M_{Y,w}M_{X,v} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ v & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w^T \\ w & Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & w^T \\ w & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ v & X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^T w - w^T v & v^T Y - w^T X \\ Xw - Yv & XY - YX + vw^T - wv^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (Xw - Yv)^T \\ Xw - Yv & XY - YX + vw^T - wv^T \end{pmatrix} \\ &= M_{XY - YX + v^T w - w^T v, Xw - Yv}. \end{aligned}$$

La forma de Cartan-Killing para  $\mathfrak{so}(1, n)$  es

$$\begin{aligned} B: \mathfrak{so}(1, n) \times \mathfrak{so}(1, n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (M_{X,v}, M_{Y,w}) &\mapsto B(M_{X,v}, M_{Y,w}) = \text{tr}(\text{ad}(M_{X,v}) \circ \text{ad}(M_{Y,w})). \end{aligned}$$

Más concretamente, desarrollando esta expresión,

$$\begin{aligned}
B(M_{X,v}, M_{Y,w}) &= \text{tr}(\text{ad}(M_{X,v}) \circ \text{ad}(M_{Y,w})) \\
&= (n-1) \text{tr}(M_{X,v}M_{Y,w}) - 2 \text{tr}(M_{X,v}) \text{tr}(M_{Y,w}) \\
&= (n-1) \text{tr}(M_{X,v}M_{Y,w}) \\
&= (n-1)(2v^T w + \text{tr}(X^T Y)).
\end{aligned}$$

A partir de la forma de Cartan-Killing, definimos el producto interior

$$B_\theta(M_{X,v}, M_{Y,w}) = B(\theta M_{X,v}, M_{Y,w}),$$

donde la involución de Cartan,  $\theta$ , está dada como sigue:

$$\begin{aligned}
\theta: \mathfrak{so}(1, n) &\rightarrow \mathfrak{so}(1, n) \\
M_{X,v} &\mapsto \theta(M_{X,v}) := -M_{X,v}^T = M_{X,-v}.
\end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que, en el caso que nos ocupa, la descomposición de Cartan de  $\mathfrak{so}(1, n)$  es

$$\mathfrak{so}(1, n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p},$$

donde podemos identificar

- $\mathfrak{so}(n) \cong \{M_{X,0} : X \in \mathfrak{so}(n)\}$  y
- $\mathfrak{p} \cong \{M_{0,v} : v \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n$ .

Así,

- $\theta|_{\mathfrak{so}(n)}(M_{X,0}) = M_{X,-0} = M_{X,0}$ , luego  $\theta|_{\mathfrak{so}(n)} = 1_{\mathfrak{so}(n)}$ ;
- $\theta|_{\mathfrak{p}}(M_{0,v}) = M_{0,-v} = -M_{0,v}$ , con lo que  $\theta|_{\mathfrak{p}} = -1_{\mathfrak{p}}$ .

Veamos cómo es la descomposición en espacios de raíces en este caso. Sea  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  el subespacio abeliano maximal dado por

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}M_{0,e_1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

El carácter abeliano de  $\mathfrak{a}$  es inmediato. Veamos que es maximal probando, para ello, que si  $[X, M_{0,e_1}] = 0$ , entonces  $X = \lambda M_{0,e_1}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En efecto, dada  $X = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$ , si

$$\begin{aligned} 0 &= [X, M_{0,e_1}] = XM_{0,e_1} - M_{0,e_1}X \\ &= \begin{pmatrix} a_{12} - a_{21} & a_{11} - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{22} - a_{11} & a_{21} - a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces  $a_{12} = a_{21}$  y  $a_{ij} = 0$  en los casos restantes. Por tanto,  $X = a_{12}M_{0,e_1}$  y el subespacio  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  es maximal.

Tenemos que calcular las raíces  $\alpha \in \Sigma$  y los subespacios  $\mathfrak{g}_\alpha$  tales que

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{so}(1, n) : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Existen exactamente dos raíces,  $\pm\alpha$ , con los siguientes espacios asociados:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^T \\ 0 & 0 & v^T \\ v & -v & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \cong \mathbb{R}^{n-1}, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha} = \theta \mathfrak{g}_\alpha.$$

Además, para  $\alpha = 0$ ,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}$ , donde

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}, \text{ con } X \in \mathfrak{so}(n-1) \right\} \cong \mathfrak{so}(n-1).$$

Definiendo  $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha$ , obtenemos la *descomposición de Iwasawa* del álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n)$ :

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

que induce una descomposición sobre los grupos de Lie correspondientes:

$$SO^0(1, n) = KAN.$$



# Capítulo 3

## Clasificación de acciones isométricas en espacio-tiempos de Minkowski

Llegados a este punto, ya disponemos de las herramientas necesarias para abordar el problema de clasificar las acciones isométricas (no necesariamente propias) de cohomogeneidad uno en el espacio-tiempo de Minkowski.

### 3.1. El espacio-tiempo de Minkowski 2-dimensional

Comenzaremos introduciendo un resultado que utilizaremos en la demostración del teorema de clasificación.

**Proposición 3.1.**  *$SO^0(1, n)$  actúa transitivamente sobre el conjunto de vectores unitarios de  $\mathbb{L}^{n+1}$  sin modificar su causalidad.*

A continuación, enunciaremos y demostramos el teorema de clasificación de acciones de cohomogeneidad uno en el espacio-tiempo 2-dimensional  $\mathbb{L}^2$ .

**Teorema 3.2.** [1] *Sea  $G$  un subgrupo conexo de  $I^0(\mathbb{L}^2)$  actuando sobre  $I^0(\mathbb{L}^2)$  con cohomogeneidad 1. Entonces, la acción de  $G$  es equivalente a una de las siguientes acciones:*

1. *La acción de una recta  $\ell \subset \mathbb{L}^2$  mediante traslaciones. Las órbitas son, en tal caso, rectas con el mismo carácter causal de  $\ell$ . Existirán, por tanto, tres clases de equivalencia correspondientes a los tres posibles caracteres causales de  $\ell$ .*
2. *La acción de  $SO^0(1, 1)$ . En este caso, las órbitas son ramas de hipérbolas centradas en el origen, 4 semirectas y un punto fijo.*

Veamos que, en efecto, es así. Sea  $\ell := G \cap \mathbb{L}^2$ , donde  $\mathbb{L}^2$  denota la parte traslación de  $I^0(\mathbb{L}^2)$ . Puesto que  $G$  actúa con cohomogeneidad 1 sobre  $I^0(\mathbb{L}^2)$ , la codimensión de  $\ell$  es, necesariamente, mayor o igual que 1 y, por tanto,  $\dim(\ell) \in \{0, 1\}$ .

- Supongamos que  $\dim(\ell) = 1$ . En tal caso, puesto que  $\ell := G \cap \mathbb{L}^2$ , se tiene que  $\ell = G$ , es decir, la acción de  $G$  es equivalente a la acción de una recta por traslaciones. Dado que  $SO^0(1, 1)$  actúa transitivamente sobre el conjunto de vectores unitarios sin modificar su carácter causal, existirán exactamente 3 clases de equivalencia para esta acción, según  $\ell$  sea espacial, temporal o nula. Esto se corresponde con el caso 1.

Sea ahora  $p = (s, x) \in \mathbb{L}^2$ . Dado que

$$\exp \left( t \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) \right) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_1 \end{pmatrix} \right),$$

se obtiene que las órbitas en el punto  $p$  son de la forma:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \ell \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s + tv_0 \\ x \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \\ &\text{si } \ell \text{ es temporal;} \\ \text{(b) } \ell \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ tv_1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ x + tv_1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \\ &\text{si } \ell \text{ es espacial;} \\ \text{(c) } \ell \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s + tv_0 \\ x + tv_0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \\ &\text{si } \ell \text{ es nula.} \end{aligned}$$

Así, las órbitas son, en este caso, rectas con el mismo carácter causal que  $\ell$ . Ver Figura 3.1.

- Supongamos ahora que  $\dim(\ell) = 0$  y denotemos por  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$ . Puesto que el álgebra de Lie de  $SO^0(1, 1)$  es  $\mathfrak{so}(1, 1) = \mathfrak{a} = \mathbb{R}B$ , deducimos que  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + v)$ , donde  $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{L}^2$ . Ahora, dado  $g = (I, (v_1, v_0))$ , se verifica que  $\text{Ad}(g)\mathfrak{g} = B$ .

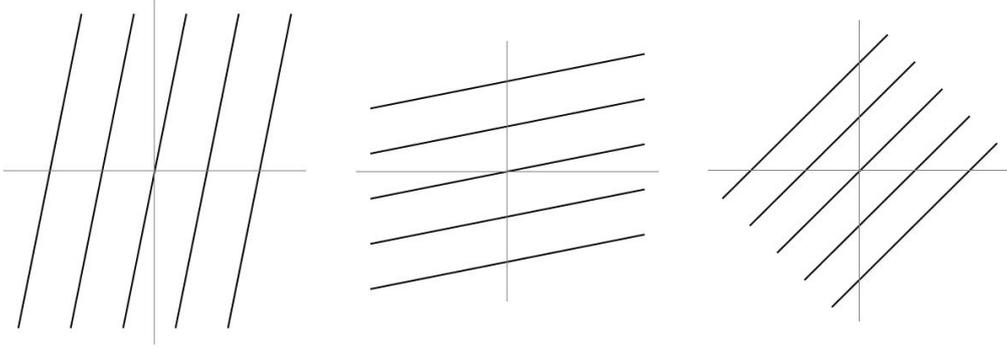


Figura 3.1: Acción de una recta por traslaciones (espacial, temporal y nula)

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}(g)(B + v) &= \text{Ad}(I, (v_1, v_0))(B, (v_0, v_1)) \\
 &= I B I^{-1} - I B I^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B.
 \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso, la acción de  $G$  es equivalente a la acción de  $SO^0(1, 1)$ , lo que se corresponde con el caso 2.

Ahora, dado que

$$\exp \left( t \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) \right) = \left( \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_1 \end{pmatrix} \right),$$

se sigue que la órbita por un punto  $p = (s, x)$  es de la forma

$$\begin{aligned}
 SO^0(1, 1) \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} s \cosh(t) + x \sinh(t) + tv_0 \\ x \cosh(t) + s \sinh(t) + tv_1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.
 \end{aligned}$$

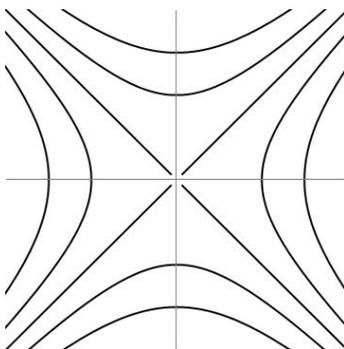


Figura 3.2: Acción de  $SO(1, 1)$ .

Por tanto, las órbitas son, en este caso, un punto fijo, cuatro semirrectas, los espacios hiperbólicos y los espacios de De Sitter (ver Figura 3.2).  $\square$

**Corolario 3.3.** *Sea  $G \subset I^0(\mathbb{L}^2)$  un subgrupo conexo de la componente del elemento neutro del grupo de isometrías de  $\mathbb{L}^2$ . Las únicas acciones propias de  $G$  sobre  $\mathbb{L}^2$  son las traslaciones por rectas.*

## 3.2. El espacio-tiempo de Minkowski 3-dimensional

Estudiamos en esta sección la clasificación de acciones isométricas de cohomogeneidad uno en el espacio-tiempo de dimensión 3.

**Teorema 3.4.** [1] *Sea  $G$  un subgrupo conexo de  $I^0(\mathbb{L}^3)$  actuando sobre  $\mathbb{L}^3$  con cohomogeneidad 1. Entonces, la acción de  $G$  es equivalente a una de las siguientes acciones:*

1. *La acción de un subespacio  $\mathfrak{v}$  de dimensión 2 (la parte traslación de  $\mathbb{L}^3$ ). Existen tres clases de equivalencia distintas para las órbitas de esta acción, correspondientes a los tres posibles caracteres causales de la métrica sobre el subespacio  $\mathfrak{v}$ .*
2. *La acción de  $SO(2) \times \ell$ , siendo  $\ell$  una recta temporal en  $\mathbb{L}^3$ . Las órbitas son cilindros elípticos con eje  $\ell$ .*
3. *La acción de  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , siendo  $\ell$  una recta espacial en  $\mathbb{L}^3$ . Las órbitas son, en este caso, cilindros hiperbólicos, cuatro semiplanos y una recta.*

4. La acción de  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , siendo  $\ell$  una recta nula en  $\mathbb{L}^3$ . En este caso, hay dos tipos de órbitas: rectas y semiplanos. Dichas órbitas están contenidas en planos de Lorentz paralelos y no son cerradas.
5. La acción de  $N \times \ell$ , donde  $N$  denota la parte nilpotente de la descomposición de Iwasawa de  $SO^0(1, 2)$  y  $\ell = \ker(\mathfrak{n})$ . En este caso, hay dos tipos de órbitas: por una parte, un plano de órbitas paralelas a  $\ell$  y, por otra parte, planos degenerados.
6. La acción del grupo de Lie cuya álgebra de Lie es  $\mathbb{R}(B + (0, 0, y)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ , donde  $y > 0$  y  $B$  es el generador del álgebra de Lie  $\mathfrak{a} = \mathfrak{so}(1, 2)$ . En este caso, una de las órbitas es un plano degenerado y las órbitas restantes son superficies asintóticas a dicho plano regladas por rectas paralelas al vector  $(1, 1, 0)$ .
7. La acción del grupo de Lie cuya álgebra de Lie es  $\mathbb{R}(\xi + (t, 0, 0)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ , siendo  $\xi$  el generador de  $\mathfrak{n}$ , la parte nilpotente de la descomposición de Iwasawa de  $\mathfrak{so}(1, 2)$ . Las órbitas de la acción son superficies degeneradas regladas por rectas paralelas al vector  $(1, 1, 0)$ .
8. La acción de  $SO^0(1, 2)$ . En tal caso, las órbitas son un punto fijo, los conos de luz pasado y futuro, los espacios hiperbólicos y los espacios de De Sitter.
9. La acción de  $AN$ , la parte resoluble de la descomposición de Iwasawa de  $SO^0(1, 2)$ . En este caso, las órbitas son: un punto fijo, dos semirectas degeneradas contenidas en los conos de luz pasado y futuro, los complementarios a dichas rectas, los espacios hiperbólicos y dos rectas degeneradas y dos conjuntos abiertos contenidos en los espacios de De Sitter. En particular, esta acción no es transitiva en los conos de luz ni en los espacios de De Sitter: en estos espacios lo que encontramos son acciones de cohomogeneidad cero.

Introducimos a continuación un lema que nos facilitará los cálculos en la demostración del resultado.

**Lema 3.5.** *Sea  $\mathfrak{v}$  un subespacio degenerado de  $\mathbb{L}^{n+1}$ . Entonces, existe un elemento  $g \in SO^0(1, n)$  tal que  $g(\mathfrak{v}) = \mathbb{R}(1, 1, 0, \dots, 0) \oplus \mathfrak{m}$ , siendo  $\mathfrak{m}$  un subespacio de  $\mathbb{L}^{n+1}$  constituido por elementos de la forma  $(0, 0, x_3, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ . En particular, la métrica es definida positiva en  $\mathfrak{m}$ .*

*Demostración.* Puesto que  $\mathfrak{v}$  es un subespacio degenerado de  $\mathbb{L}^{n+1}$ , existirá algún elemento  $u \in \mathfrak{v}$  tal que  $\langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \mathfrak{v}$ . En particular,  $\langle u, u \rangle = 0$ , luego  $u$  es un vector nulo.

Por actuar  $SO^0(1, n)$  transitivamente sobre el conjunto de los vectores nulos, podemos suponer que  $u$  es precisamente el vector  $(1, 1, 0, \dots, 0)$ , ya que de no ser así, bastaría conjugar  $u$  por un elemento de  $SO^0(1, n)$ .

Ahora, construimos una base de  $\mathfrak{v}$  que contenga a  $u$ :

$$\mathfrak{v} = \mathbb{R}u \oplus \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\},$$

donde  $w_i = (w_{i0}, w_{i1}, \dots, w_{in})$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , se verifica  $\langle u, w_i \rangle = -w_{i0} + w_{i1} = 0$ , luego  $w_{i0} = w_{i1}$ .

Definiendo  $\mathfrak{m} := \text{Span}\{w_1 - w_{10}u, \dots, w_k - w_{k0}u\}$ , se sigue el resultado.  $\square$

Comenzaremos la demostración del Teorema 3.4 fijando algunas notaciones. El álgebra de Lie de  $SO(1, 2)$  es  $\mathfrak{so}(1, 2) = \{A \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R}) : A\varepsilon A^T = \varepsilon \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}$ , siendo  $\varepsilon$  la matriz dada por

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos su descomposición de Iwasawa:

$$\mathfrak{so}(1, 2) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

donde  $\mathfrak{k} = \mathbb{R}X$ ,  $\mathfrak{a} = \mathbb{R}B$  y  $\mathfrak{n} = \mathbb{R}\xi$ , siendo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos  $\mathfrak{m} = G \cap \mathbb{L}^3$ , siendo  $\mathbb{L}^3$  la parte traslación de  $I^0(\mathbb{L}^3)$ . Puesto que  $G$  actúa con cohomogeneidad 1 sobre  $I^0(\mathbb{L}^3)$ , la codimensión de  $\mathfrak{m}$  será, necesariamente, mayor o igual que uno y, por tanto,  $\dim(\mathfrak{m}) \in \{0, 1, 2\}$ .

Supongamos, en primer lugar, que  $\dim \mathfrak{m} = 2$ . En tal caso, la acción de  $G$  es equivalente a la acción de  $\mathfrak{m}$  por traslaciones. Distinguimos varias posibilidades:

1. Si la métrica es no degenerada en  $\mathfrak{m}$ , hay dos posibles opciones:

- la métrica es riemanniana sobre  $\mathfrak{m}$ ;

- la métrica es lorentziana sobre  $\mathfrak{m}$ .

Puesto que  $SO^0(1,2)$  actúa transitivamente sobre el conjunto de vectores unitarios temporales y espaciales sin modificar su causalidad, existirán exactamente dos clases de equivalencia para la acción (dependiendo del carácter lorentziano o definido positivo de la métrica sobre  $\mathfrak{m}$ ).

2. Si la métrica es degenerada sobre  $\mathfrak{m}$ , en virtud del Lema(3.5), existirá un elemento  $g \in SO^0(1,2)$  tal que  $g(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}(1,1,0) \oplus \mathbb{R}(0,0,1)$ . Basta suponer que  $\mathfrak{m} = \mathbb{R}(1,1,0) \oplus \mathbb{R}(0,0,1)$  para obtener una tercera clase de equivalencia.

Dado  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ , veamos cómo son las órbitas por  $p$  en este caso. Puesto que

$$\exp \left( t \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \right) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} \right),$$

se obtiene que:

$$(a) \quad \mathfrak{m} \cdot p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s + tv_0 \\ x + tv_1 \\ y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

si la métrica es lorentziana en  $\mathfrak{m}$ ;

$$(b) \quad \mathfrak{m} \cdot p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ x + tv_1 \\ y + tv_2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

si la métrica es riemanniana en  $\mathfrak{m}$ ;

$$(c) \quad \mathfrak{m} \cdot p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_0 \\ tv_1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s + tv_0 \\ x + tv_0 \\ y + tv_2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

si la métrica es degenerada en  $\mathfrak{m}$ .

Esto se corresponde con el caso 1. Ver Figura 3.3.

Supongamos ahora que  $\dim \mathfrak{m} = 1$ . En tal caso, podemos escribir  $\mathfrak{m} = \mathbb{R}w$ , con  $w \in \mathbb{L}^3$ .

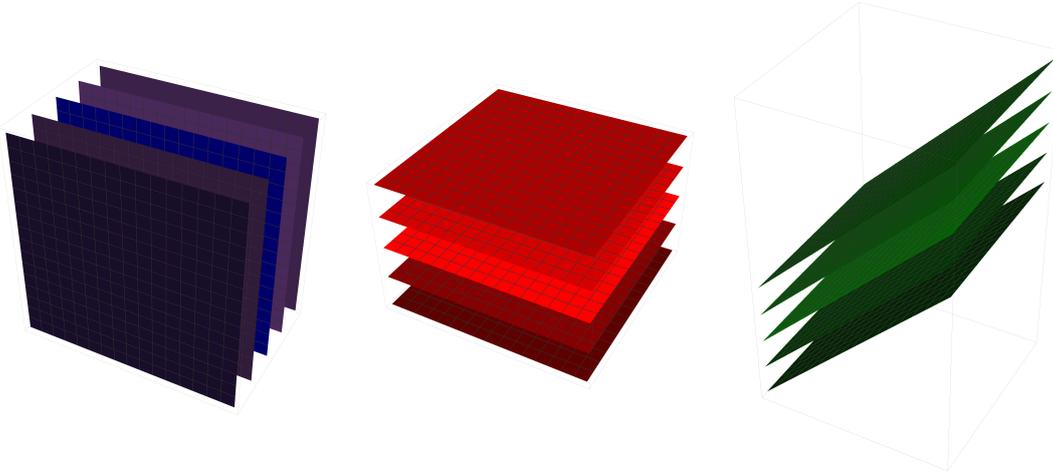


Figura 3.3: Acción de un subespacio 2-dimensional por traslaciones (por planos lorentzianos, riemannianos y degenerados)

Observemos que la proyección

$$\begin{aligned}\pi_1: \mathfrak{so}(1,2) \oplus_{\phi} \mathbb{L}^3 &\rightarrow \mathfrak{so}(1,2) \\ X + v &\mapsto \pi_1(X + v) := X,\end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie. En efecto, la aplicación  $\pi_1$  es lineal y conserva el corchete de  $\mathfrak{so}(1,2)$ :

$$\begin{aligned}[\pi_1(X + v), \pi_1(Y + w)] &= [X, Y] = XY - YX, \\ \pi_1([X + v, Y + w]) &= \pi_1(XY - YX + Xw - Yv) = XY - YX.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\pi_1(\mathfrak{g})$  será subálgebra de Lie de  $\mathfrak{so}(1,2)$ . Cabe distinguir dos posibilidades: o bien  $\dim \pi_1(\mathfrak{g}) = 1$ , o bien  $\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ .

Supongamos, en primer lugar, que  $\dim \pi_1(\mathfrak{g}) = 1$ . En tal caso, podemos expresar el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}(Y + v) \oplus \mathbb{R}w$ , con  $Y \in \mathfrak{so}(1,2)$  y  $v, w \in \mathbb{L}^3$ .

Notemos que, puesto que  $Y \in \mathfrak{so}(1,2) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ ,  $Y$  será de la forma

$$Y = aB + b\xi + cX = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b+c \\ b & -b-c & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Así mismo, denotemos  $v = (t, x, y) \in \mathbb{L}^3$ .

Dado que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, preserva el producto corchete y, por ello,

$$[Y + v, w] = Yw \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}(Y + v) \oplus \mathbb{R}w.$$

En particular,  $Yw$  ha de ser múltiplo de  $w$ . Distinguiamos 3 posibilidades, correspondientes a cada uno de los posibles caracteres causales de  $w$ .

**1.  $w$  temporal.** Podemos suponer, salvo conjugación, que  $w = (1, 0, 0)$ . En tal caso, existirá  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b+c \\ b & -b-c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = Yw = \lambda w = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene fácilmente que  $\lambda = a = b = 0$  y, con ello, que  $Y = cX$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . Así, podemos reescribir la expresión de  $\mathfrak{g}$  como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(X + (0, x, y)) \oplus \mathbb{R}(1, 0, 0).$$

Calculemos  $\text{Ad}(I, (0, -y, x))\mathfrak{g}$ . Haciendo uso de la fórmula (2.1)

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( I, \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \end{pmatrix} \right) \left( X + \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= I X I^{-1} - I X I^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \\ &= X - \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo cual,

$$\text{Ad}(I, (0, -y, x))(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}(1, 0, 0) = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}(1, 0, 0) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}(1, 0, 0).$$

Así,  $\text{Ad}(I, (0, -y, x))(\mathfrak{g})$  es, precisamente, el álgebra de Lie del grupo  $SO(2) \times \ell$ , donde  $\ell$  denota una recta temporal en  $\mathbb{L}^3$ . Esto se corresponde con el caso 2.

Para poder calcular las órbitas de la acción, veamos cómo es dicho grupo de Lie apoyándonos, para ello, en el Teorema 1.31. Ya que  $(1, 0, 0) \in \ker(X)$ ,

$$\exp(t(X + (1, 0, 0))) = (e^{tX}, (t, 0, 0)) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dado un punto  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ , la órbita por  $p$  se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} (SO(2) \times \ell) \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ x \cos(t) + y \sin(t) \\ y \cos(t) - x \sin(t) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Así, las órbitas para esta acción son cilindros elípticos con eje  $\ell$ , siendo  $\ell$  una recta temporal en  $\mathbb{L}^3$ . Véase la Figura 3.4.

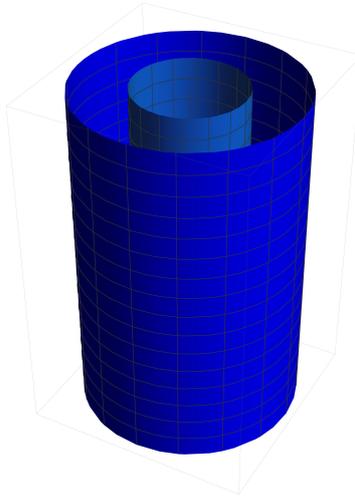


Figura 3.4: Acción de  $SO(2) \times \ell$ , con  $\ell$  temporal.

**2.  $w$  espacial.** En este caso asumiremos que, salvo conjugación,  $w = (0, 0, 1)$ . Existirá  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b+c \\ b & -b-c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b+c \\ 0 \end{pmatrix} = Yw = \lambda w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Resolviendo esta ecuación, concluimos que  $\lambda = b = c = 0$ , con lo que  $Y = aB$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Así, podemos reescribir la expresión de  $\mathfrak{g}$  como:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + (t, x, 0)) \oplus \mathbb{R}(0, 0, 1).$$

Calculemos ahora  $\text{Ad}(I, (-x, t, 0))\mathfrak{g}$ . Nuevamente, por (2.1), se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( I, \begin{pmatrix} -x \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left( B + \begin{pmatrix} t \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= I B I^{-1} - I B I^{-1} \begin{pmatrix} -x \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} t \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= B - \begin{pmatrix} t \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = B + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así,  $\text{Ad}(I, (-x, t, 0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}(0, 0, 1) = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(0, 0, 1) = \mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathbb{R}(0, 0, 1)$ . Entonces,  $\mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathbb{R}(0, 0, 1)$  es, precisamente, el álgebra de Lie del grupo  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , siendo  $\ell$  una recta espacial en  $\mathbb{L}^3$ . Esto se corresponde con el caso 3.

Veamos cómo es dicho grupo de Lie. Dado que  $(0, 0, 1) \in \ker(B)$ ,

$$\exp(t(B + (0, 0, 1))) = (e^{tB}, (0, 0, t)) = \left( \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right).$$

Consideremos ahora un punto  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$  y calculemos la órbita por  $p$ .

$$\begin{aligned} (SO^0(1, 1) \times \ell) \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} s \cosh(t) + x \sinh(t) \\ x \cosh(t) + s \sinh(t) \\ y + t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Así, las órbitas son, en este caso, cilindros hiperbólicos, cuatro semiplanos y una recta. Ver Figura 3.5.

**3.  $w$  nulo.** Supondremos que, salvo conjugación,  $w = (1, 1, 0)$ . En tal caso, existirá  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b+c \\ b & -b-c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -c \end{pmatrix} = Yw = \lambda w = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

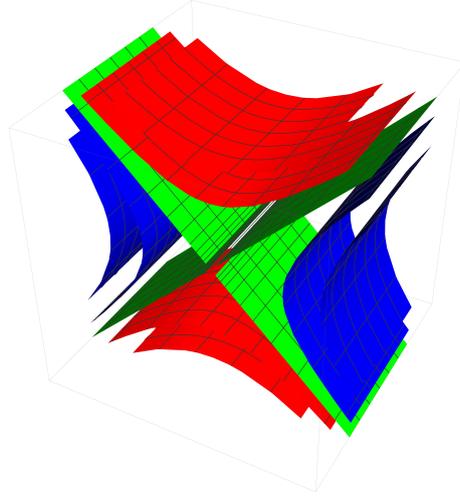


Figura 3.5: Acción de  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , con  $\ell$  espacial.

Resolviendo esta ecuación, deducimos que, necesariamente, ha de ser  $c = 0$  y, por tanto,  $Y = aB + b\xi$ . Distinguímos 3 casos, dependientes de los posibles valores de  $a$  y  $b$ .

(a) Veamos qué ocurre si  $a$  y  $b$  son ambos no nulos. Podemos suponer, y así lo haremos, que  $a = 1$ . En tal caso, reescribimos el álgebra de Lie de  $G$  como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + b\xi) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0).$$

Calculemos  $\text{Ad}\left(\mathbb{I}, \left(\frac{y}{2b}, \frac{y}{2b}, \frac{t+x}{2b}\right)\right) \mathfrak{g}$ . Denotando  $J = B + b\xi$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Ad}\left(\mathbb{I}, \begin{pmatrix} \frac{y}{2b} \\ \frac{y}{2b} \\ \frac{t+x}{2b} \end{pmatrix}\right) \left( J + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \mathbb{I} J \mathbb{I}^{-1} - \mathbb{I} J \mathbb{I}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{y}{2b} \\ \frac{y}{2b} \\ \frac{t+x}{2b} \end{pmatrix} + \mathbb{I} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= J - \begin{pmatrix} \frac{y}{2b} + \frac{t+x}{2} \\ \frac{y}{2b} + \frac{t+x}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = J + \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2b} - \frac{t+x}{2} \\ 1 - \frac{y}{2b} - \frac{t+x}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así,  $\text{Ad}\left(\mathbb{I}, \left(\frac{y}{2b}, \frac{y}{2b}, \frac{t+x}{2b}\right)\right) \mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + b\xi) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ .

Por otra parte,  $\text{Ad}(\exp(b\xi), (0, 0, 0))(\mathbb{R}(B + b\xi) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)) = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ . Veamos que, en efecto, es así. Denotemos, para ello,  $M = \exp(b\xi)$  y  $J = B + b\xi$ . Dado que

$$M = \begin{pmatrix} 1 + b^2/2 & -b^2/2 & b \\ b^2/2 & 1 - b^2/2 & b \\ b & -b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + b^2/2 & -b^2/2 & -b \\ b^2/2 & 1 - b^2/2 & -b \\ -b & b & 1 \end{pmatrix}$$

aplicando la fórmula (2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( M, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left( J + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= MJM^{-1} - MJM^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De este hecho deducimos que la acción de  $G$  es, en este caso, equivalente a la acción del grupo  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , donde  $\ell$  denota una recta nula en  $\mathbb{L}^3$ , ya que su álgebra de Lie es, precisamente,  $\mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ . Esto se corresponde con el caso 4.

Calculemos el grupo de Lie  $SO^0(1, 1) \times \ell$ . Sea entonces  $B + (1, 1, 0) \in \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ . Puesto que  $(1, 1, 0) \notin \ker(B)$ , existirán elementos  $c \in \mathbb{L}^3$  y  $d \in \ker(B)$  tales que  $(1, 1, 0) = d - Bc$ . En este caso, basta considerar  $c = (-1, -1, 0)$  y  $d = (0, 0, 0)$ . En estas condiciones, por (2.5),

$$\begin{aligned} \exp(t(B + (1, 1, 0))) &= (e^{tB}, -e^{tB}tc + td + td) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ahora, dado un punto  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ , veamos cómo es la órbita de la acción en  $p$ . Para ello, tomamos elementos  $A \in SO^0(1, 1)$  y  $v$  en la dirección de  $\ell$  y calculamos la expresión  $Ap + v$ :

$$\begin{aligned} Ap + v &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (s+1)\cosh(t) + (x+1)\sinh(t) - 1 \\ (x+1)\cosh(t) + (s+1)\sinh(t) - 1 \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La órbita por  $p$  será, entonces:

$$\begin{aligned} (SO^0(1, 1) \times \ell) \cdot p &= \{Ap + v : A \in SO^0(1, 1) v \subset \ell\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(s+1) + \sinh(x+1) - 1 \\ \cosh(x+1) + \sinh(s+1) - 1 \\ y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Así, existen dos tipos de órbitas para esta acción: rectas y semiplanos. Dichas órbitas están contenidas entre planos de Lorentz paralelos y, además, no son cerradas. Ver Figura 3.6.

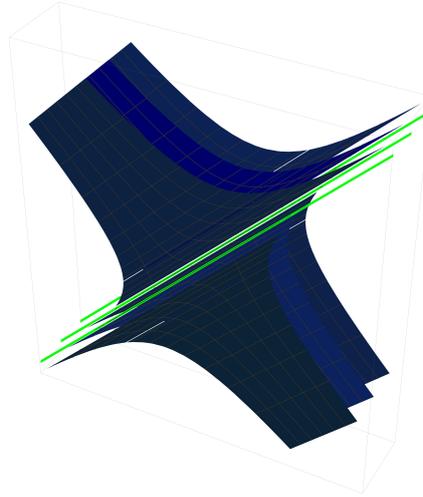


Figura 3.6: Acción de  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , con  $\ell$  nula

- (b) Supongamos ahora que  $a \neq 0$  y  $b = 0$ . En tal caso, podemos expresar el álgebra de Lie de  $G$  como  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + v) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ .

Calculemos  $\text{Ad}(I, (x, t, 0))\mathfrak{g}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( I, \begin{pmatrix} x \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left( B + \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= IBI^{-1} - IBI^{-1} \begin{pmatrix} x \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} t+1 \\ x+1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= B - \begin{pmatrix} t \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ x+1 \\ y \end{pmatrix} = B + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego  $\text{Ad}(I, (x, t, 0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + (0, 0, y)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ .

- Si  $y = 0$ , entonces  $\text{Ad}(I, (x, t, 0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$  y, por tanto, volvemos a obtener el caso 4, ya que  $\mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$  es el álgebra de Lie del grupo  $SO^0(1, 1) \times \ell$ , siendo  $\ell$  una recta nula de  $\mathbb{L}^3$ .
- Si  $y \neq 0$ , entonces  $\text{Ad}(I, (x, t, 0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + (0, 0, y)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ , y podemos suponer que  $y > 0$ . Así, en este caso, la acción de  $G$  es equivalente a la acción del grupo cuya álgebra de Lie es  $\mathbb{R}(B + (0, 0, y)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ , con  $y > 0$ . Denotemos por  $H$  dicho grupo y veamos qué forma tiene.

Dado que  $(1, 1, 0) \notin \ker(B)$ , por ser  $B$  no degenerado, existirán elementos  $c \in \mathbb{L}^3$  y  $d \in \ker(B)$  tales que  $(1, 1, 0) = d - Bc$ : basta tomar  $c = (-1, -1, 0)$  y  $d = (0, 0, y)$ . Por (2.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} \exp(t(B + (0, 0, y) + (1, 1, 0))) &= (e^{tB}, -e^{tB} + ct + dt) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ y \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ahora, dado  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ , la órbita por  $p$  se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} H \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ \cosh(t) + \sinh(t) - 1 \\ y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} (s+1)\cosh(t) + (x+1)\sinh(t) - 1 \\ (x+1)\cosh(t) + (s+1)\sinh(t) - 1 \\ 2y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Así, una órbita es un plano degenerado y las restantes órbitas son superficies asintóticas a dicho plano regladas por rectas paralelas al vector  $(1, 1, 0)$ . Esto se corresponde con el caso 6. Véase la Figura 3.7.

(c) Por último, supongamos que  $a = 0$  y  $b \neq 0$ . Podemos escribir, en tal caso,

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(\xi + v) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0).$$



Figura 3.7: Acción del grupo con álgebra de Lie  $\mathbb{R}(B + (0, 0, y)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ .

Se verifica que  $\text{Ad}(I, (y/2, -y/2, 0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + (t, x, 0)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( I, \begin{pmatrix} y/2 \\ -y/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left( \xi + \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= I \xi I^{-1} - I \xi I^{-1} \begin{pmatrix} y/2 \\ -y/2 \\ 0 \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} t+1 \\ x+1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= \xi - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ x+1 \\ y \end{pmatrix} = \xi + \begin{pmatrix} t+1 \\ x+1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Si  $t = x$ , entonces  $\text{Ad}(I, (y/2, -y/2, 0))(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}\xi \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0) = \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ . Esto se corresponde con el caso 5, ya que  $\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$  es el álgebra de Lie del grupo de Lie  $N \times \ell$ , siendo  $N$  la parte nilpotente de la descomposición de Iwasawa de  $SO^0(1, 2)$  y  $\ell = \ker(\mathfrak{n})$ . Ahora, dado que  $(1, 1, 0) \in \ker(\xi)$ , se verifica que

$$\exp(t(\xi + (1, 1, 0))) = (e^{t\xi}, t(1, 1, 0)) = \left( \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Sea ahora  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ . La órbita por  $p$  se calcula como:

$$\begin{aligned}
(N \times \ell) \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} s + \frac{(s-x)t^2}{2} + t(y+1) \\ x + \frac{(s-x)t^2}{2} + t(y+1) \\ t(s+x) + y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Así, hay dos tipos de órbitas para esta acción: un plano formado por órbitas paralelas a  $\ell$  y planos degenerados. Ver Figura 3.8.

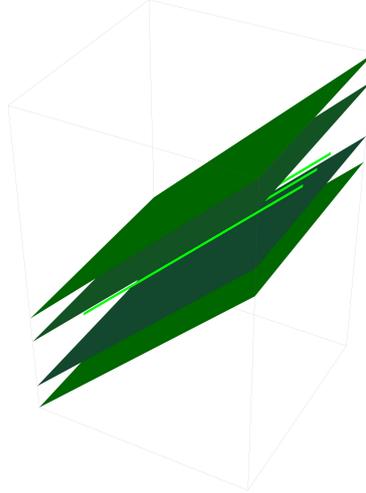


Figura 3.8: Acción de  $N \times \ell$ , con  $l$  nula.

- Si  $t \neq x$ , entonces basta tomar la combinación lineal  $(t, x, 0) - x(1, 1, 0)$  para deducir que  $\text{Ad}(I, (y/2, -y/2, 0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}(\xi + (t, 0, 0)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ . En este caso, la acción de  $G$  es equivalente a la acción del grupo de Lie cuya álgebra de Lie es  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(\xi + (t, 0, 0)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ .

Denotemos por  $H$  a dicho grupo y veamos cómo son sus elementos. Para ello, calcularemos su aplicación exponencial utilizando la función  $\varphi$  (Definición 2.6). Denotando  $v = (1, 0, 0) + (1, 1, 0)$ ,

$$\exp(t(\xi + v)) = (e^{t\xi}, \varphi(t\xi)v).$$

Ahora, en virtud de la Proposición 2.10,

$$\exp \begin{pmatrix} t\xi & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\xi} & \varphi(t\xi)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el lado izquierdo de la igualdad y obtenemos:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} t\xi & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t\xi & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 & -t^2 & t & 2t + t^3/6 \\ t^2/2 & 1 - t^2/2 & t & t + t^3/6 \\ t & -t & 1 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la exponencial del grupo de Lie  $H$  será

$$\exp(t(\xi + v)) = \left( \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 & -t^2 & t \\ t^2/2 & 1 - t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t + t^3/6 \\ t + t^3/6 \\ t^2/2 \end{pmatrix} \right).$$

Ahora, sea  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$  y calculemos la órbita de la acción por  $p$ .

$$\begin{aligned} H \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 & -t^2 & t \\ t^2/2 & 1 - t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t + t^3/6 \\ t + t^3/6 \\ t^2/2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} s + t^2/2(s - x) + t(y + 1 + t^2/6) \\ x + t^2/2(s - x) + t(y + 1 + t^2/6) \\ t(s - x + t) + y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Así, las órbitas son superficies degeneradas regladas por rectas paralelas al vector  $(1, 1, 0)$ . Esto se corresponde con el caso 7. Ver Figura 3.9.

Analicemos ahora el caso  $\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . En estas condiciones, podemos expresar el álgebra de Lie de  $G$  como  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + u) \oplus \mathbb{R}(\xi + v) \oplus \mathbb{R}w$ , con  $u, v, w \in \mathbb{L}^3$ .

Por ser  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie, es cerrada para el corchete y, por tanto,

$$[B + u, w] = Bw \in \mathfrak{g},$$

$$[\xi + v, w] = \xi w \in \mathfrak{g}.$$



Figura 3.9: Acción del grupo con álgebra de Lie  $\mathbb{R}(\xi + (t, 0, 0)) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ .

En particular, tanto  $[B + u, w]$  como  $[\xi + v, w]$  son múltiplos de  $w$ .

Puesto que  $B(\mathbb{L}^3) \cap \xi(\mathbb{L}^3) = \mathbb{R}(1, 1, 0)$ , necesariamente ha de ser  $w = \lambda(1, 1, 0)$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $w = (1, 1, 0)$ .

Denotemos  $u = (u_0, u_1, u_2)$ ,  $v = (v_0, v_1, v_2)$ . Volviendo a usar el hecho de que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 [B + u, \xi + v] &= B\xi - \xi B + Bv - \xi u \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + Bv - \xi u \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + Bv - \xi u \\
 &= \xi + Bv - \xi u \in \mathfrak{g}.
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $Bv - \xi u = v + \lambda w$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Más concretamente,

$$\begin{aligned} Bv - \xi u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - u_2 \\ v_0 - u_2 \\ u_0 - u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 + \lambda \\ v_1 + \lambda \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que  $\lambda = -u_2$ ,  $v_0 = v_1$  y  $v_2 = u_1 - u_0$ , con lo que  $v = (v_0, v_0, u_1 - u_0)$ .

Sea ahora  $p = (t, x, y) \in \mathbb{L}^3$  fijado arbitrariamente y calculemos  $T_p(G \cdot p)$ .

$$\begin{aligned} T_p(G \cdot p) &= \mathfrak{g} \cdot p = \text{Span}\{(B + u)(p), (\xi + v)(p), w(p)\} \\ &= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ v_0 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Span}\{(x + u_0, t + u_1, u_2), (y + v_0, y + v_0, t - x + u_1 - u_0), (1, 1, 0)\} \\ &= \text{Span}\{(x + u_0, t + u_1, u_2), (0, 0, t - x + u_1 - u_0), (1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que el determinante de la matriz asociada a estos tres vectores es, en general, no nulo. En efecto,

$$\det \begin{pmatrix} x + u_0 & t + u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & t - x + u_1 - u_0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (t - x + u_1 - u_0)^2,$$

es no nulo salvo si  $t - x + u_1 - u_0 = 0$ .

De este hecho deducimos que el espacio tangente  $T_p(G \cdot p)$  es, en general, de dimensión tres. Por ello, la acción del grupo  $G$  no será de cohomogeneidad uno, sino cero. Este caso particular motiva el estudio de las acciones de cohomogeneidad cero del grupo de isometrías  $I^0(\mathbb{L}^3)$  sobre  $\mathbb{L}^3$ .

Por último, analicemos el caso en que la dimensión de  $\mathfrak{m}$  sea  $\dim \mathfrak{m} = 0$ . Puesto que  $\mathfrak{m} = G \cap \mathbb{L}^3$ , necesariamente ha de ser  $\dim(\pi_1(\mathfrak{g})) \geq 2$  y, por tanto, o bien  $\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{so}(1, 2)$ , o bien  $\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ .

Supongamos primero que  $\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{so}(1, 2)$ . En tal caso, el álgebra de Lie de  $G$  puede expresarse como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + u) \oplus \mathbb{R}(\xi + v) \oplus \mathbb{R}(X + w),$$

con  $u, v, w \in \mathbb{L}^3$ ,  $u = (u_0, u_1, u_2)$ ,  $v = (v_0, v_1, v_2)$ ,  $w = (w_0, w_1, w_2)$ .

Puesto que  $\mathfrak{g}$  es álgebra de Lie, es cerrada para el corchete y, por ello,

- $[B + u, \xi + v] = B\xi - \xi B + Bv - \xi u = \xi + Bv - \xi u \in \mathfrak{g}$ ;
- $[B + u, X + w] = BX - XB + Bw - Xu = \xi - X + Bw - Xu \in \mathfrak{g}$ ;
- $[\xi + v, X + w] = \xi X - X\xi + \xi w - Xv = -B + \xi w - Xv \in \mathfrak{g}$ .

En particular,

- $Bv - \xi u = v$  o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - u_2 \\ v_0 - u_2 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix};$$

- $Bw - Xu = v - u$  o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_0 - u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 - u_0 \\ v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{pmatrix};$$

- $\xi w - Xv = -u$  o, en notación matricial,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_2 - v_2 \\ v_1 + w_0 - w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_0 \\ -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene fácilmente que  $u_0 = u_1 = -w_2$ ,  $v_0 = v_1 = w_1$  y  $u_2 = v_2 = w_0 = 0$ . Así, podemos reescribir los vectores  $u, v$  y  $w$  como

$$\begin{aligned} u &= (u_0, u_0, 0), \\ v &= (v_0, v_0, 0), \\ w &= (0, v_0, -u_0), \end{aligned}$$

y el álgebra de Lie como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + (u_0, u_0, 0)) \oplus \mathbb{R}(\xi + (v_0, v_0, 0)) \oplus \mathbb{R}(X + (0, v_0, -u_0)).$$

Veamos que  $\text{Ad}(I, (u_0, u_0, v_0))\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 2)$ . En efecto, denotando  $J = B + \xi + X$ ,

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( I, \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right) \left( J + \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_0 + 2v_0 \\ -u_0 \end{pmatrix} \right) &= I J I^{-1} - I J I^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_0 + 2v_0 \\ -u_0 \end{pmatrix} \\ &= J - \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_0 + 2v_0 \\ -u_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_0 + 2v_0 \\ -u_0 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\text{Ad}(I, (u_0, u_0, v_0))\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + \xi + X) = \mathfrak{so}(1, 2)$ . Así, en este caso, la acción de  $G$  es equivalente a la acción del grupo  $SO^0(1, 2)$ , cuya álgebra de Lie es, precisamente,  $\mathfrak{so}(1, 2)$ .

Según lo expuesto en la Sección (2.2), para describir los elementos del grupo de Lie  $SO^0(1, 2)$  tendríamos que calcular

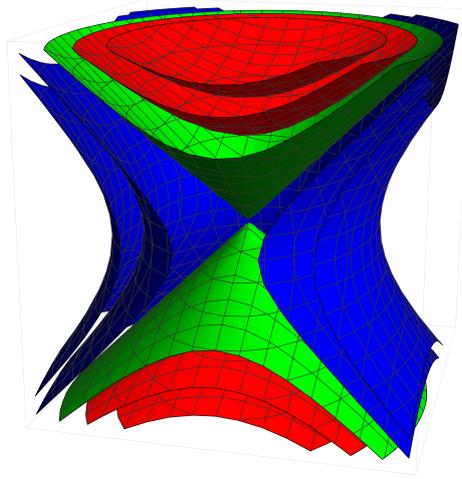
$$\exp(t(J, 0)) = (e^{tJ}, \varphi(tJ)0) = (e^{tJ}, 0),$$

con  $J \in \mathfrak{so}(1, 2)$ . Por ser  $v = 0$ , el problema se reduce a calcular la exponencial de una matriz.

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k J^k}{k!} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} + \cos(\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} + \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para conocer las órbitas de esta acción por un punto  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ , basta considerar un elemento  $M \in SO^0(1, 2)$  y calcular  $M \cdot p$ .

$$M \cdot p = \begin{pmatrix} 2s - x + y \\ s - x/2 + y/2 \\ s + x/2 - y/2 \end{pmatrix} + \cos(\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} x - s - y \\ 3x/2 - y/2 - s \\ s - x/2 + 3y/2 \end{pmatrix} + \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x + y \\ s + 2y \\ s - 2x \end{pmatrix}.$$

Figura 3.10: Acción de  $SO^0(1, 2)$ .

El conjunto de las órbitas de la acción por  $p$  sería, sencillamente,

$$SO^0(1, 2) \cdot p = \{Mp : M \in SO^0(1, 2)\}.$$

Podemos concluir que, en este caso, las órbitas son: un punto fijo, los conos de luz pasado y futuro, espacios hiperbólicos y espacios de De Sitter. Esto se corresponde con el caso 8. Ver Figura 3.10.

Ya solo resta analizar el caso en que  $\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Expresamos el álgebra de Lie de  $G$  como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}(B + u) \oplus \mathbb{R}(\xi + v),$$

con  $u, v \in \mathbb{L}^3$ ,  $u = (u_0, u_1, u_2)$ ,  $v = (v_0, v_1, v_2)$ . Por supuesto,  $\mathfrak{g}$  es cerrada para el corchete de Lie y, por ello,

$$[B + u, \xi + v] = B\xi - \xi B + Bv - \xi u = \xi + Bv - \xi u \in \mathfrak{g}.$$

En particular,  $Bv - \xi u = v$  o, más específicamente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2 \\ u_0 - u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene que  $u_2 = 0$ ,  $v_1 = v_0$  y  $v_2 = v_0 - v_1$ . Así, podemos reescribir los vectores  $u$  y  $v$  como  $u = (u_0, u_1, 0)$ ,  $v = (v_0, v_0, u_1 - u_0)$ .

En esta situación, se verifica que  $\text{Ad}(I, (u_1, u_0, v_0))\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . En efecto, denotando  $J = B + \xi$ ,

$$\begin{aligned} \text{Ad} \left( I, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right) \left( J + \begin{pmatrix} v_0 + u_0 \\ v_0 + u_1 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix} \right) &= I J I^{-1} - I J I^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} v_0 + u_0 \\ v_0 + u_1 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix} \\ &= J - \begin{pmatrix} v_0 + u_0 \\ v_0 + u_1 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 + u_0 \\ v_0 + u_1 \\ u_1 - u_0 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Por tanto, la acción de  $G$  es, en este caso, equivalente a la acción de  $AN$ , es decir, de la parte resoluble de la descomposición de Iwasawa de  $SO^0(1, 2)$ .

Veamos cómo es este grupo de Lie calculando, para ello, su aplicación exponencial. De nuevo, al igual que en el caso anterior,

$$\exp(t(J, 0)) = (e^{tJ}, \varphi(tJ)0) = (e^{tJ}, 0).$$

Calculemos entonces  $e^{tJ}$ .

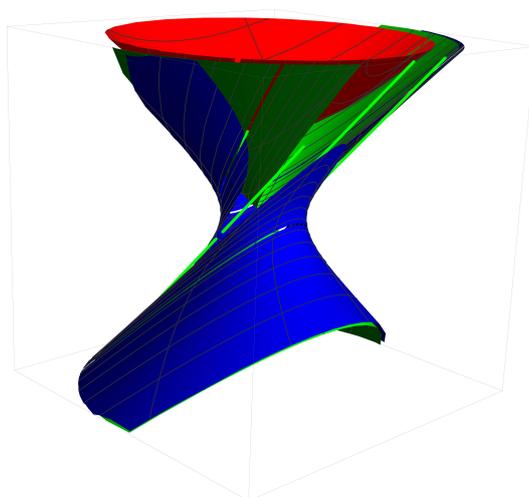
$$e^{tJ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k J^k}{k!} = \begin{pmatrix} -1 + e^{-t} + e^t & 1 - e^{-t} & -1 + e^t \\ -1 + e^t & 1 & -1 + e^t \\ 1 - e^{-t} & -1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

Así, el grupo de Lie  $H = AN$  sería

$$AN = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + e^{-t} + e^t & 1 - e^{-t} & -1 + e^t \\ -1 + e^t & 1 & -1 + e^t \\ 1 - e^{-t} & -1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Resta calcular las órbitas de la acción pasando por un punto  $p = (s, x, y) \in \mathbb{L}^3$ .

$$\begin{aligned} AN \cdot p &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 + e^{-t} + e^t & 1 - e^{-t} & -1 + e^t \\ -1 + e^t & 1 & -1 + e^t \\ 1 - e^{-t} & -1 - e^{-t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} e^t(s + y) + e^{-t}(s - x) + x - s - y \\ e^t(s + y) + x - s - y \\ e^{-t}(-s - x) + s + y - x \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Figura 3.11: Acción de  $AN$ .

Por tanto, las órbitas por  $p$  son: un punto fijo, dos semirrectas degeneradas contenidas en los conos de luz, los subespacios de los conos de luz complementarios a dichas semirrectas, espacios hiperbólicos y, por últimos, dos rectas degeneradas y dos conjuntos abiertos contenidos en los espacios de De Sitter. Esto se corresponde con el caso 9. Véase la Figura 3.11.  $\square$

*Observación 3.6.* De la clasificación dada en el Teorema 3.4 se deduce fácilmente que hay acciones isométricas en el espacio de Minkowski  $\mathbb{L}^3$  que no pueden ser propias ya que hay órbitas no cerradas. Esto sucede, por ejemplo, en los casos 4, 8 y 9.



# Bibliografía

- [1] Berndt, J., Díaz-Ramos, J.C., Vanaei, M.J., *Cohomogeneity one actions on Minkowski spaces*, a aparecer en *Monatsh. Math.*
- [2] Berndt, J., Console, S., Olmos, C.E., *Submanifolds and holonomy*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [3] Berndt, J., Tamaru, H., Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 3425–3438.
- [4] Boothby, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.
- [5] Cartan, É., Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **17** (1938), 177–191.
- [6] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups I*, Princeton University Press, 1946.
- [7] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [8] Hsiang W.-Y., Lawson Jr., H. B., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1–38.
- [9] Iwata K., Classification of compact transformation groups on cohomology quaternion projective spaces with codimension one orbits, *Osaka J. Math.* **15** (1978), 475–508.
- [10] Iwata K., Compact transformation groups on rational cohomology Cayley projective planes, *Tôhoku Math. J.* **33** (1981), 429–442.
- [11] Knapp, A.W., *Lie groups beyond an introduction*, Second edition, Progress in Mathematics **140**, Birkhäuser Boston, 2002.

- 
- [12] Levi-Civita, T., Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **26** (1937), 355–362.
- [13] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [14] Segre, B., Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **27** (1938), 203–207.
- [15] Takagi, R., On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 495–506.
- [16] Warner, F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Academic Press, 1975.