

CRISTINA VIDAL CASTIÑEIRA

**HIPERSUPERFICIES REAIS CON DÚAS
CURVATURAS PRINCIPAIS NOS PLANOS
PROXECTIVO E HIPERBÓLICO
COMPLEXOS**

134b

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

CRISTINA VIDAL CASTIÑEIRA

**HIPERSUPERFICIES REAIS CON DÚAS
CURVATURAS PRINCIPAIS NOS PLANOS
PROXECTIVO E HIPERBÓLICO
COMPLEXOS**

134b

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2018



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

**Hipersuperficies reais con dúas
curvaturas principais nos planos
proxectivo e hiperbólico complexos**

Cristina Vidal Castiñeira

Xullo 2013

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores José Carlos Díaz Ramos e Miguel Domínguez Vázquez, para obter o Título de Máster en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 22 de xullo de 2013 na Facultade de Matemáticas de dita universidade, obtendo a calificación de Matrícula de Honra.

Índice xeral

Resumo	5
Introdución	7
1. Preliminares	9
1.1. Xeometría de subvariedades	9
1.2. Espazos de curvatura seccional holomorfa constante	12
1.2.1. O espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^2$	13
1.2.2. O espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^2$	15
1.2.3. As estruturas riemannianas de $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$	16
1.3. Accións isométricas	19
2. Hipersuperficies en $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$	21
2.1. Construción dos novos exemplos	23
2.2. Ecuacións fundamentais	28
2.2.1. Resultados usando a ecuación de Codazzi	30
2.2.2. Resultados usando derivadas	30
2.2.3. Resultados usando conmutadores	31
2.2.4. Resultados usando a ecuación de Gauss	35
2.3. Propiedades xeométricas da hipersuperficie	38
2.3.1. Curvas integrais de A	38
2.3.2. Distribución integrable	41
2.3.3. Foliación de M	42
2.4. Proba do teorema principal	44
Bibliografía	47

Resumo

Co presente traballo preténdese dar resposta a un problema no que varios xeómetras levan traballando estes últimos anos, en concreto, a Cuestión 9.2 de R. Niebergall, P. J. Ryan, *Real Hypersurfaces in Complex Space Forms, Tight and Taut Submanifolds*, MSRI Publications, Volume 32, 1997. Así, construímos novos exemplos de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais nos planos proxectivo e hiperbólico complexos, e propomos unha caracterización xeométrica de tales exemplos.

Abstract

The aim of this work is to answer a problem where many geometers have worked on over the last few years, namely Question 9.2 in R. Niebergall, P. J. Ryan, *Real Hypersurfaces in Complex Space Forms, Tight and Taut Submanifolds*, MSRI Publications, Volume 32, 1997. Specifically, we construct new examples of real hypersurfaces with two principal curvatures in complex projective and hyperbolic planes. We also propose a geometric characterization of such examples.

Introdución

Orixinalmente, o interese no estudo de hipersuperficies reais en variedades de Kähler aparece na área da Análise Complexa. Na teoría de varias variables complexas, un problema importante é entender a relación entre funcións holomorfas definidas nun dominio do espazo complexo \mathbb{C}^n e o borde de tal dominio. Cando este borde é regular, resulta ser unha hipersuperficie real, isto é, unha subvariedade do espazo euclidiano \mathbb{R}^{2n} con codimensión real un. Nótese que empregamos o termo *real* para distinguir estes obxectos das hipersuperficies complexas, é dicir, subvariedades con codimensión complexa un. Véxase [12] para unha introdución ao estudo de hipersuperficies reais dende o punto de vista da Análise Complexa.

Dende o punto de vista da Xeometría Diferencial, un problema que atraeu a atención de varios matemáticos nas últimas décadas é o de clasificar hipersuperficies reais en termos de diferentes condicións xeométricas. O caso de hipersuperficies reais en espazos modelo complexos non chans, isto é, no espazo proiettivo e hiperbólico complexo ($\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$, respectivamente), merecen especial atención, xa que estes espazos son as variedades de Kähler non chás co tensor de curvatura máis simple.

A referencia principal para o estudo de hipersuperficies reais en espazos modelo complexos é o artigo [21] por Niebergall e Ryan. Nese traballo, os autores revisan a terminoloxía básica e resultados no campo, e inclúen unha lista de problemas abertos que motivaron varias liñas de investigación nos últimos anos. Un dos problemas aos que aínda non se lle deu resposta, a pesar do esforzo de varios xeómetras, é a Cuestión 9.2 en [21]. Neste traballo, daremos unha sorprendente resposta a esta cuestión:

Hai hipersuperficies en $\mathbb{C}P^2$ ou $\mathbb{C}H^2$ que teñan dúas curvaturas principais, ademais dos exemplos estándar?

Para poder explicar o problema e a nosa contribución, comezaremos introducindo algunha notación e terminoloxía. Denotamos por $\bar{M}^n(c)$ ao espazo modelo complexo non chan de dimensión complexa n e curvatura seccional holomorfa $c \neq 0$. Polo tanto, $\bar{M}^n(c)$ é isométrico ao espazo proiettivo complexo $\mathbb{C}P^n(c)$ de curvatura seccional holomorfa $c > 0$, ou ao espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n(c)$ de curvatura seccional holomorfa $c < 0$. Denotamos por J á estrutura complexa de $\bar{M}^n(c)$.

Sexa M unha hipersuperficie real de $\bar{M}^n(c)$, isto é, unha subvariedade de $\bar{M}^n(c)$ con codimensión real un. Sexa ξ o campo de vectores normal unitario ao longo de (un subconxunto aberto de) M . O campo de vectores $J\xi$ é tanxente a M , e chámase *campo de vectores*

de Hopf ou de Reeb da hipersuperficie. Diremos que M é Hopf nun punto $p \in M$ se $J\xi$ é un autovector do operador de configuración de M en p ; noutro caso, diremos que M é non Hopf en p . Se M é Hopf en todo punto, diremos simplemente que M é unha hipersuperficie Hopf.

Tashiro e Tachibana [27] probaron que non hai hipersuperficies reais umbílicas (isto é, hipersuperficies reais con exactamente unha curvatura principal) nos espazos modelo complexos non chans. Cecil e Ryan [4] amosaron que unha hipersuperficie real con exactamente dúas curvaturas principais en $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 3$, ten curvaturas principais constantes e é ademais un aberto dunha esfera xeodésica. Montiel [16] obtivo un resultado análogo para $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 3$, amosando que unha hipersuperficie real con dúas curvaturas principais distintas debe ser un aberto dunha esfera xeodésica, un tubo en torno a un $\mathbb{C}H^{n-1}$ totalmente xeodésico en $\mathbb{C}H^n$, ou unha horosfera. Nambos casos, os exemplos que aparecen nestas clasificacións son abertos de hipersuperficies Hopf que ademais son homoxéneas, isto é, órbitas de accións isométricas en $\bar{M}^n(c)$.

Os métodos usados por Cecil e Ryan, e Montiel, non funcionan se $n = 2$. A Cuestión 9.2 en [21] previamente mencionada establece o interese de estender a clasificación de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais distintas a $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$, e presenta o problema da existencia de exemplos con curvaturas principais non constantes. Neste traballo damos unha resposta afirmativa a esta cuestión, tanto para $\mathbb{C}P^2$ coma para $\mathbb{C}H^2$, e obtemos unha descrición completa de todos os exemplos para o caso proxectivo.

Antes de enunciar o noso resultado principal, precisamos recordar algúns feitos. O grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ actúa sobre $\bar{M}^2(c)$ mediante isometrías. De feito, esta acción é polar. Isto significa que admite unha sección, é dicir unha subvariedade totalmente xeodésica $\Sigma \subset \bar{M}^2(c)$ a cal interseca a todas as órbitas da acción e sempre ortogonalmente. Un punto p en Σ dise regular se a órbita a través de p é unha órbita principal da acción; neste caso, unha órbita de dimensión 2. O subconxunto de puntos regulares en Σ é aberto e denso. É tamén ben coñecido que as órbitas de dimensión máxima desta acción son toros, e a sección Σ é un plano proxectivo real totalmente xeodésico $\mathbb{R}P^2$ se $c > 0$, ou un plano hiperbólico real totalmente xeodésico $\mathbb{R}H^2$ se $c < 0$.

Enunciemos agora a contribución principal deste traballo.

Teorema Principal. *Sexa $\bar{M}^2(c)$ un espazo modelo complexo de dimensión complexa 2 e curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$. Consideremos a acción polar do grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ en $\bar{M}^2(c)$ con sección Σ .*

Entón, para calquera punto regular $p \in \Sigma$ e calquera vector tanxente $v \in T_p\Sigma$, hai exactamente dúas curvas diferentes definidas localmente $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$, con $\gamma_i(0) = p$ e $\dot{\gamma}_i(0) = v$, tal que o conxunto $H \cdot \gamma_i = \{h(\gamma_i(t)) : h \in H, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ é unha hipersuperficie real con dúas curvaturas principais en $\bar{M}^2(c)$. Xenericamente, tales hipersuperficies son non Hopf e con dúas curvaturas principais non constantes.

Reciprocamente, para o caso $c > 0$, sexa M unha hipersuperficie real analítica de $\mathbb{C}P^2(c)$ con dúas curvaturas principais non constantes e non Hopf en todo punto. Entón M é localmente congruente a un aberto dunha hipersuperficie construída como anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo introducimos a terminoloxía e notacións básicas para este traballo, relativas á xeometría de subvariedades, á construción dos espazos modelo complexos e á teoría de accións isométricas. Toda esta información foi obtida de [1], [8] e [21].

1.1. Xeometría de subvariedades

Sexa \bar{M} unha variedade de Riemann con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e M unha subvariedade mergulada. A restrición de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a M dá lugar a unha métrica inducida sobre M , que seguiremos denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por $\bar{\nabla}$ e ∇ denotaremos as conexións de Levi-Civita de \bar{M} e M , respectivamente. A exponencial riemanniana de \bar{M} denotarémola por \exp .

O fibrado normal de M , isto é, o fibrado dos vectores ortogonais aos espazos tanxentes de M , denotarase por νM , mentres que o fibrado tanxente denotarase por TM . Por $\Gamma(\nu M)$ refirirémonos ao módulo de todos os campos de vectores normais a M .

Para cada punto $p \in M$ tense o seguinte isomorfismo canónico: $T_p \bar{M} = T_p M \oplus \nu_p M$. Dado un campo de vectores $X \in \Gamma(T\bar{M})$ sobre M , poremos X^\top para refirirnos á proxección ortogonal de X sobre TM e X^\perp para a proxección ortogonal sobre νM .

Hai que destacar o concepto de curvatura dentro da Xeometría de Riemann, xa que a súa formalización e xeneralización dá lugar á coñecida definición de tensor de curvatura. Denotaremos por \bar{R} e R os tensores de curvatura de \bar{M} e M , respectivamente. Neste traballo usaremos o seguinte convenio para o tensor de curvatura de tipo $(1, 3)$ dunha variedade de Riemann \bar{M} :

$$\bar{R}_{XY}Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \Gamma(T\bar{M}).$$

O tensor de curvatura de tipo $(0, 4)$ aplicado aos campos de vectores X, Y, Z e $W \in \Gamma(T\bar{M})$ denotarémolo por $\bar{R}_{XYZW} = \langle \bar{R}_{XY}Z, W \rangle$.

O tensor de curvatura R da subvariedade M tan só depende da métrica que esteamos considerando sobre M , polo cal se di que o tensor de curvatura é un invariante xeométrico intrínseco. Pódese estudar a xeometría intrínseca tanto de \bar{M} como de M . Non obstante, outro punto de vista é o estudo da xeometría de M en relación coa xeometría de \bar{M} .

Isto chámase a xeometría extrínseca de M , da cal precisaremos para o estudo realizado neste traballo. Procedamos agora cos conceptos e ecuacións fundamentais desta xeometría extrínseca, para comprender o noso traballo. Para coñecer os fundamentos da teoría de subvariedades en máis profundidade pódense consultar [1] e [29], entre outros moitos libros de Xeometría de Riemann.

Toda a información sobre a xeometría extrínseca dunha subvariedade está codificada na súa segunda forma fundamental. A *segunda forma fundamental* II de M defínese a través da *fórmula de Gauss*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y),$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$. A fórmula de Gauss relaciona as conexións de Levi-Civita de M e \bar{M} mediante a segunda forma fundamental de M , que verifica $II(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$. Se $\{e_i\}$ é unha base ortonormal do espazo tanxente $T_p M$, defínese o vector curvatura media de M en p como $H_p = \sum_i II(e_i, e_i)$.

O *operador de configuración* de M asociado a un campo normal $\xi \in \Gamma(\nu M)$ (tamén chamado *operador de forma* ou *de Weingarten*) é o operador lineal autoadxunto sobre M definido por $\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle II(X, Y), \xi \rangle$, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$. Denotemos por ∇^\perp a conexión normal de M , é dicir, $\nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$ para todo $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Entón tense a *fórmula de Weingarten*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

A relación entre os tensores de curvatura de \bar{M} e M tamén vén dada por medio da segunda forma fundamental. Esta relación denomínase *ecuación de Gauss* e, para $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, escríbese así:

$$\bar{R}_{XYZW} = R_{XYZW} - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

Ademais, a *ecuación de Gauss* que vimos de escribir é tamén válida para subvariedades semi-riemannianas dunha variedade semi-riemanniana.

A *ecuación de Codazzi* vén dada por

$$(\bar{R}_{XY} Z)^\perp = (\nabla_X^\perp II)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp II)(X, Z),$$

onde a derivada covariante da segunda forma fundamental é

$$(\nabla_X^\perp II)(Y, Z) = \nabla_X^\perp II(Y, Z) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z).$$

Se a subvariedade M satisfai que $\nabla^\perp II = 0$ entón dise que M ten *segunda forma fundamental paralela*. Se o campo de vectores curvatura media de M é paralelo con respecto á conexión normal, entón dise que M ten *curvatura media paralela*.

Dise que unha subvariedade é *totalmente xeodésica* se a súa segunda forma fundamental se anula identicamente, $II = 0$. Isto é equivalente a dicir que toda xeodésica de M é tamén unha xeodésica de \bar{M} . Intuitivamente, a ecuación de Gauss dinos que as subvariedades totalmente xeodésicas son as que teñen a mesma curvatura có espazo ambiente.

Existe unha terceira ecuación fundamental na teoría de subvariedades chamada *ecuación de Ricci*:

$$\langle R_{XY}^\perp \xi, \eta \rangle = \bar{R}_{XY\xi\eta} + \langle [S_\xi, S_\eta]X, Y \rangle,$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi, \eta \in \Gamma(\nu M)$, e R^\perp é o tensor de curvatura do fibrado normal de M que está definido por $R_{XY}^\perp \xi = [\nabla_X^\perp, \nabla_Y^\perp]\xi - \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi$.

Diremos que dúas subvariedades M_1 e M_2 de \bar{M} son *congruentes* se existe unha isometría de \bar{M} que leva M_1 en M_2 . Se \bar{M} é hermitiana e a isometría que leva M_1 en M_2 é unha aplicación holomorfa, entón M_1 e M_2 dinse *holomorficamente congruentes*.

Supoñamos agora que M é unha hipersuperficie de \bar{M} , é dicir, unha subvariedade mergullada de codimensión un. Entón, salvo signo, localmente existe un único campo de vectores normal unitario $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Ademais, a existencia dun campo unitario normal definido globalmente sobre M equivale á orientabilidade de M , en caso de que \bar{M} sexa orientable.

Agora a segunda forma fundamental II é un múltiplo de ξ . Denotaremos por $S = S_\xi$ o operador de configuración respecto de ξ . As fórmulas de Gauss e de Weingarten escríbense agora así:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \langle SX, Y \rangle \xi, \\ \bar{\nabla}_X \xi &= -SX.\end{aligned}$$

E as ecuacións de Gauss e de Codazzi redúcense a

$$\begin{aligned}\bar{R}_{XYZW} &= R_{XYZW} - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle + \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle, \\ \bar{R}_{XYZ\xi} &= \langle (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X, Z \rangle,\end{aligned}$$

Posto que, en Xeometría de Riemann, o operador de configuración S dunha hipersuperficie $M \subset \bar{M}$ é autoadxunto, é entón diagonalizable nunha base ortonormal. A cada autovalor de S nun punto $p \in M$ chámasele curvatura principal de M no punto p . Globalmente, dicimos que $\lambda: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ é unha *curvatura principal* de M no aberto U (asociada ao campo unitario normal ξ definido, polo menos, en U) se existe un campo de vectores $X \in \Gamma(TU)$ tal que $SX = \lambda X$.

Se λ é unha curvatura principal, denotaremos por $T_\lambda(p)$ o autoespazo en $T_p M$ asociado a $\lambda(p)$ e chamáremoslle *espazo de curvatura principal* asociado a $\lambda(p)$. Se $v \in T_\lambda(p)$, $v \neq 0$, dise que v é un *vector de curvatura principal* de λ en p . Débese salientar que, en xeral, os espazos de curvaturas principais asociados a unha curvatura principal λ non teñen por que ter a mesma dimensión para todo punto da hipersuperficie. No caso de que esta dimensión sexa constante chamarase *multiplicidade* da curvatura principal λ . Nesta situación, por T_λ refirirémonos á distribución sobre M formada polos espazos de curvaturas principais de λ , e por $\Gamma(T_\lambda)$ ao conxunto de todas as seccións de T_λ , é dicir, os campos de vectores $X \in \Gamma(TM)$ tales que $SX = \lambda X$.

Unha hipersuperficie M dise con *curvaturas principais constantes* se as curvaturas principais son as mesmas para todo punto de M . É dicir, as funcións curvatura principal $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ son constantes. Neste caso os espazos de curvaturas principais asociados a un autovalor λ teñen a mesma multiplicidade en todo punto.

1.2. Espazos de curvatura seccional holomorfa constante

No ámbito xeral das variedades de Riemann, aquelas con tensor de curvatura máis sinxelo son as que teñen curvatura seccional constante, é dicir, independente do punto da variedade e do subespazo 2-dimensional do espazo tanxente escollido. Estas variedades denomínanse *espazos de curvatura constante*. É un resultado coñecido que, salvo isometría, os únicos espazos de curvatura constante completos e simplemente conexos son os espazos euclidianos \mathbb{R}^n , as esferas S^n e os espazos hiperbólicos $\mathbb{R}H^n$.

No campo das variedades de Kähler, pola contra, o concepto de espazo de curvatura constante non ten especial relevancia, debido ó seguinte resultado (véxase [29], por exemplo):

Proposición 1.1. *Sexa \bar{M} unha variedade de Kähler de dimensión real $2n$. Se \bar{M} ten curvatura seccional constante e $n > 1$, entón \bar{M} é chá.*

Debido a isto, para variedades de Kähler, introdúcese o concepto de curvatura seccional holomorfa constante. Así, se \bar{M} é unha variedade de Kähler con estrutura complexa J e tensor de curvatura \bar{R} , defínese a *curvatura seccional holomorfa* K_{hol} de \bar{M} como a restrición da curvatura seccional usual K ós subespazos 2-dimensionais J -invariantes do espazo tanxente a un punto. Posto que estes subespazos son xerados por pares $\{v, Jv\}$, con $v \in T_p\bar{M}$, $p \in \bar{M}$, pódese ver K_{hol} como unha función que asigna un número real $K_{hol}(v)$ a cada vector tanxente unitario $v \in T\bar{M}$ do seguinte xeito:

$$K_{hol}(v) = K(v, Jv) = \bar{R}_{vJvJv}.$$

Dise entón que a variedade de Kähler \bar{M} ten *curvatura seccional holomorfa constante* se $K_{hol}(v)$ é constante para todo vector unitario v tanxente a \bar{M} . Isto equivale a que exista un constante real c tal que $K_{hol}(v) = c\|v\|^4$ para todo $v \in T\bar{M}$.

O seguinte resultado dáunos unha expresión para o tensor de curvatura \bar{R} dunha variedade de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante. A súa demostración pódese atopar, por exemplo, en [10] ou [29].

Proposición 1.2. *Unha variedade de Kähler \bar{M} é de curvatura seccional holomorfa constante se, e só se, o seu tensor de curvatura \bar{R} vén dado pola seguinte fórmula:*

$$\bar{R}_{XY}Z = \frac{c}{4} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ),$$

onde c é unha constante real.

Neste caso, a constante c é a mesma cá que verifica que $K_{hol}(v) = c\|v\|^4$ para todo $v \in T\bar{M}$ e dise que \bar{M} ten curvatura seccional holomorfa constante c .

As variedades con curvatura seccional holomorfa constante son localmente simétricas. Ademais, verifícase que toda variedade completa e simplemente conexa con curvatura seccional holomorfa constante c é isométrica a un dos seguintes espazos [29]:

- o espazo euclidiano complexo \mathbb{C}^n , se $c = 0$,
- o espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$, se $c > 0$,
- o espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$, se $c < 0$

e toda variedade con curvatura seccional holomorfa constante c é localmente isométrica a un destes espazos. O primeiro deles non é máis có espazo euclidiano \mathbb{R}^{2n} dotado dunha métrica de Kähler chá. Os outros dous espazos describirémolos en detalle máis adiante nesta sección aínda que no caso no que $n = 2$, xa que é o caso que nos interesa para este traballo.

As variedades de Kähler completas e simplemente conexas con curvatura seccional holomorfa constante denominarémolas *espazos modelo complexos* ou *espazos de curvatura holomorfa constante*. Estes espazos redúcense, por tanto, ás tres familias anteriores.

Introduzamos a seguinte notación para o resto deste traballo. Poremos $\mathbb{C}P^2(c)$ para denotar o plano proxectivo complexo de curvatura seccional holomorfa $c > 0$ e $\mathbb{C}H^2(c)$ para o hiperbólico, con $c < 0$; en caso de que se sobreentenda canto vale a curvatura seccional holomorfa, poremos simplemente $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$. Por $\bar{M}^2(c)$ denotaremos o único espazo (salvo isometría) de curvatura seccional holomorfa constante c completo, simplemente conexo e de dimensión complexa 2, que se refirirá, por tanto, ou a \mathbb{C}^2 se $c = 0$, ou a $\mathbb{C}P^2$ se $c > 0$ ou a $\mathbb{C}H^2$ se $c < 0$.

Nos dous seguintes apartados, construímos (seguindo o artigo [21]) as variedades diferenciáveis $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$ e presentamos a notación e os resultados precisos para, a continuación, adoptar un enfoque unificado que nos permita introducir as súas correspondentes métricas de Kähler, para finalmente indicar por qué son espazos de curvatura seccional holomorfa constante. Os fundamentos da teoría de variedades Kähler necesarios para comprender os seguintes apartados pódense consultar, por exemplo, en [13] e [29].

1.2.1. O espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^2$

Como variedade diferenciábel, o espazo proxectivo complexo de dimensión 2 (dimensión real 4) defínese como o espazo de rectas complexas de \mathbb{C}^3 que pasan pola orixe, ou, equivalentemente, como a variedade cociente dunha esfera $S^5(r) \subset \mathbb{C}^3$ (de radio r e centrada na orixe) pola relación de equivalencia $z \sim \lambda z'$, $z, z' \in \mathbb{C}^3$, $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Denotaremos por π a proxección canónica de $S^5(r)$ sobre o espazo proxectivo complexo:

$$\pi: S^5(r) \longrightarrow \mathbb{C}P^2.$$

É coñecido que π é unha submersión diferenciábel sobrexectiva que se denomina *aplicación de Hopf*.

A métrica que consideraremos en $\mathbb{C}P^2$ será a inducida de xeito natural pola métrica usual de $S^5(r)$. Destacamos a continuación algunhas das propiedades da xeometría de $S^5(r)$ que precisaremos máis adiante.

Primeiramente, definimos

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z_0\bar{w}_0 + z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2),$$

para $z = (z_0, z_1, z_2), w = (w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^3$, onde Re denota a parte real dun complexo. A esfera 5-dimensional de radio r é entón

$$S^5(r) = \{z \in \mathbb{C}^3 : \langle z, z \rangle = r^2\}.$$

Pódese considerar \mathbb{C}^3 como \mathbb{R}^6 e definir entón $u, v \in \mathbb{R}^6$ mediante

$$\begin{aligned} z_0 &= u_0 + u_1i, & w_0 &= v_0 + v_1i \\ z_1 &= u_2 + u_3i, & w_1 &= v_2 + v_3i \\ z_2 &= u_4 + u_5i, & w_2 &= v_4 + v_5i \end{aligned}$$

É dicir, denotaremos por (u_0, u_1, \dots, u_5) as coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^6 . Así:

$$\langle z, w \rangle = \langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^5 u_k v_k,$$

isto é, estamos considerando o produto escalar usual sobre \mathbb{R}^6 . Denotaremos por \tilde{J} o operador definido en \mathbb{C}^3 consistente en multiplicar polo escalar complexo i .

Para cada $z \in S^5(r)$, o espazo tanxente á esfera é

$$T_z S^5(r) = \{w \in \mathbb{C}^3 : \langle z, w \rangle = 0\}.$$

Consideraremos sobre $S^5(r)$ a métrica de Riemann dada pola restrición de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e o campo unitario normal N dado por

$$N_z = \frac{1}{r}z.$$

Denotemos por D a conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}^6 (que actúa sobre un campo de vectores derivando as súas compoñentes cartesianas). Se S é o operador de configuración de $S^5(r)$ e X un campo tanxente ($X = \sum_{j=0}^5 x_j \frac{\partial}{\partial u_j}$ en coordenadas locais), entón

$$SX = -D_X N = -\frac{1}{r}D_X \left(\sum_{i=0}^5 u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) = -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^5 X u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 x_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_i} = -\frac{1}{r}X.$$

Así pois, a fórmula de Gauss implica que a conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $S^5(r)$ vén dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y + \frac{\langle X, Y \rangle}{r} N,$$

para X, Y campos tanxentes a $S^5(r)$. Mediante a ecuación de Gauss, obtense o tensor de curvatura \tilde{R} de $S^5(r)$:

$$\tilde{R}_{XY} Z = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Na Subsección 1.2.3 continuaremos esta exposición introducindo a estrutura riemanniana sobre o espazo proiettivo complexo, onde adoptaremos un enfoque común a $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$.

1.2.2. O espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^2$

A construción do espazo hiperbólico complexo é análoga á de $\mathbb{C}P^2$, aínda que cunhas diferenzas significativas. Para empezar, en lugar do produto escalar usual de \mathbb{C}^3 defínese

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(-z_0\bar{w}_0 + z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2),$$

para $z, w \in \mathbb{C}^3$. Usando a mesma identificación $\mathbb{C}^3 \equiv \mathbb{R}^6$ ca no apartado anterior, temos que

$$\langle z, w \rangle = \langle u, v \rangle = -u_0v_0 - u_1v_1 + \sum_{k=2}^5 u_kv_k.$$

É dicir, trátase dunha métrica semi-riemanniana de signatura $(2, 4)$. Consideremos o espazo de anti de Sitter (o análogo lorentziano do espazo hiperbólico real) de radio r en \mathbb{C}^3 , que se define como

$$AdS^5(r) = \{z \in \mathbb{C}^3 : \langle z, z \rangle = -r^2\}.$$

O espazo tanxente a $AdS^5(r)$ en z é

$$T_z AdS^5(r) = \{w \in \mathbb{C}^3 : \langle z, w \rangle = 0\}.$$

Restrinximos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $AdS^5(r)$ para obter unha métrica de Lorentz cuxa conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ vén dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{r} N,$$

para X, Y tanxentes a $AdS^5(r)$, e onde N designa o campo unitario normal definido por

$$N_z = \frac{1}{r} z.$$

A xustificación disto é análoga á do caso proxectivo, coa única diferenza de que, neste caso, $\langle N, N \rangle = -1$.

Da ecuación de Gauss obtemos o tensor de curvatura \tilde{R} de $AdS^5(r)$

$$\tilde{R}_{XY} Z = -\frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Definimos a variedade $\mathbb{C}H^2$ como a imaxe de $AdS^5(r)$ mediante a proxección canónica $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^2$ do espazo proxectivo complexo:

$$\pi: AdS^5(r) \longrightarrow \mathbb{C}H^2 \subset \mathbb{C}P^2.$$

Equivalentemente, $\mathbb{C}H^2$ é o espazo de rectas complexas negativas de \mathbb{C}^3 (respecto da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signatura $(2, 4)$).

O hiperplano complexo de \mathbb{C}^3 definido por $z_0 = 0$ non corta a $AdS^5(r)$. Polo tanto, o hiperplano proxectivo complexo de $\mathbb{C}P^2$ de ecuación $z_0 = 0$ non corta a $\mathbb{C}H^2$. Así pois, $\mathbb{C}H^2$ está contido na carta afín $z_0 \neq 0$ de $\mathbb{C}P^2$, polo que

$$\mathbb{C}H^2 = \{\pi(1, z_1, z_2) : -1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 < 0\},$$

onde aquí $\pi: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é a proxección canónica. Noutras palabras,

$$\mathbb{C}H^2 = \pi(\{1\} \times B_{\mathbb{C}^2}(0, 1)),$$

co cal $\mathbb{C}H^2$ é difeomorfo a unha bóla aberta usual de \mathbb{C}^2 .

Polo tanto, $\mathbb{C}H^2$ é unha subvariedade diferenciable aberta de $\mathbb{C}P^2$. Non obstante, no seguinte apartado dotaremos a estes dous espazos de métricas riemannianas diferentes.

1.2.3. As estruturas riemannianas de $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$

Debido ás analogías entre $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$ e para abordar nunha soa liña expositiva o estudo de ambos espazos, introducimos o símbolo ε , que valerá 1 no caso proxectivo e -1 no hiperbólico. Así, por exemplo, o tensor de curvatura virá dado por

$$\tilde{R}_{XY}Z = \frac{\varepsilon}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Tamén poremos \bar{M} en lugar de $\mathbb{C}P^2$ ou $\mathbb{C}H^2$, e \tilde{M} en vez de $S^5(r)$ ou $AdS^5(r)$. A proxección que se considerará neste apartado será $\pi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$.

Primeiramente, observemos que, nambos casos, a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é de Kähler. Para comprobalo, chega con darse conta de que, nas coordenadas habituais, os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita D son todos nulos; un sinxelo cálculo en coordenadas permite entón concluír que $D_X \tilde{J}Y = \tilde{J}D_X Y$, para calquera dous campos diferenciables X, Y sobre $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$, polo que $D\tilde{J} = 0$.

Designaremos por V o campo unitario tanxente a \tilde{M} definido por $V = \tilde{J}N$. Obsérvese que $\langle N, N \rangle = \langle V, V \rangle = \varepsilon$.

Podemos descompor ortogonalmente o espazo tanxente a \tilde{M} nas chamadas compoñentes vertical e horizontal,

$$T\tilde{M} = \mathbb{R}V \oplus V^\perp.$$

Sexa z un punto calquera de \tilde{M} .

Notemos antes de nada que $\mathbb{R}V_z$ é xusto o núcleo da diferencial π_{*z} da proxección canónica, polo que π_{*z} envía V_z^\perp isomorficamente sobre $T_{\pi(z)}\bar{M}$. Isto permite definir, para un vector $X \in T_{\pi(z)}\bar{M}$ (analogamente, para un campo $X \in \Gamma(T\bar{M})$) o *levantamento horizontal* X_z^L de X a z , como o único vector (resp. campo) en V_z^\perp (resp. en $\Gamma(V^\perp)$) que proxecta a X , i.e., $\pi_* X_z^L = X$. Nótese que o levantamento horizontal X^L está ben definido para cada punto $z \in \tilde{M}$ ó que se levanta o vector X .

Consideremos a xeodésica $t \mapsto \varphi_t(z)$ sobre \tilde{M} que parte de z con velocidade inicial $\tilde{J}z = iz = rV_z$, a cal nos dá a fibra sobre $\pi(z)$: $\pi^{-1}(\pi(z)) = \{e^{it}z : 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Nótese que $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ nos dá un grupo uniparamétrico de isometrías; de feito, φ_t pódese expresar na forma matricial $e^{it}I$, sendo I a matriz identidade (obsérvese que $e^{it}I \in U(3)$ para $\varepsilon = 1$ e $e^{it}I \in U(1, 2)$ para $\varepsilon = -1$). Ademais, por preservaren as fibras, cumpren que $\pi \circ \varphi_t = \pi$. Isto implica que, se $X \in T_{\pi(z)}\bar{M}$, entón $\pi_{*e^{it}z}(\varphi_t)_{*z}X_z^L = \pi_{*z}X_z^L = X$ e, como $(\varphi_t)_{*z}X_z^L \in V_{\varphi_t(z)}^\perp$ por ser $X_z^L \in V_z^\perp$ e φ_t isometría, temos que $X_{\varphi_t(z)}^L = (\varphi_t)_{*z}X_z^L$.

Definamos a estrutura case complexa J de \bar{M} mediante $JX = \pi_*(\tilde{J}X^L)$, para $X \in \Gamma(T\bar{M})$ ou, equivalentemente, mediante $J\pi_*X = \pi_*(\tilde{J}X)$, para $X \in \Gamma(V^\perp)$. Está ben definida porque se X_z^L e $X_{e^{it}z}^L$ (con $t \in \mathbb{R}$) son dous levantamentos horizontais de X entón $(\varphi_t)_{*z}(\tilde{J}X_z^L) = \tilde{J}X_{e^{it}z}^L$ (pois pódese facer a identificación $(\varphi_t)_{*z} \equiv e^{it}I$, co cal se ve que $(\varphi_t)_{*z}$ e \tilde{J} conmutan), e a relación $\pi \circ \varphi_t = \pi$ permite concluír que $\pi_{*z}(\tilde{J}X_z^L) = \pi_{*e^{it}z}(\tilde{J}X_{e^{it}z}^L)$. Ademais, é claro que J é lineal e, como V^\perp é \tilde{J} -invariante, séguese que $J^2 = -\text{id}$.

Para introducir unha métrica de Riemann en \bar{M} téñense descrito varios métodos. O que seguiremos nós é o de pedir que a proxección π sexa unha submersión semi-riemanniana. Isto quere dicir que cada π_{*z} envíe $(\ker \pi_{*z})^\perp = V_z^\perp$ isometricamente sobre $T_{\pi(z)}\bar{M}$. Así, para campos ou vectores tanxentes X, Y en \bar{M} definimos a métrica mediante $\langle X, Y \rangle = \langle X^L, Y^L \rangle$. É doado comprobar que é unha definición correcta, pois as isometrías φ_t actúan transitivamente nas fibras, e tamén que se trata dunha métrica hermitiana, pois se $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ entón

$$\langle JX, JY \rangle = \langle (\pi_*(\tilde{J}X^L))^L, (\pi_*(\tilde{J}Y^L))^L \rangle = \langle \tilde{J}X^L, \tilde{J}Y^L \rangle = \langle X^L, Y^L \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

As fórmulas estándar das submersións semi-riemannianas (véxase, por exemplo, [?]) permítenos obter a conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de \bar{M} , que vén dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \pi_* \left(\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L \right),$$

para campos $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$.

Ademais, a métrica que consideramos sobre \bar{M} é de Kähler. En efecto, sexan $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$. Por $(\cdot)^\top$, $(\cdot)^\perp$, $(\cdot)_{\mathbb{R}V}$ e $(\cdot)_{V^\perp}$ denotamos, respectivamente, as proxeccións sobre o tanxente a \bar{M} , o normal a \bar{M} , a distribución $\mathbb{R}V$ e a distribución V^\perp . Temos que:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X J) Y &= \bar{\nabla}_X JY - J\bar{\nabla}_X Y = \pi_* \left(\tilde{\nabla}_{X^L} (JY)^L \right) - J \left(\pi_* \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L \right) \\ &= \pi_* \left(\tilde{\nabla}_{X^L} \tilde{J}Y^L - \tilde{J}(\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L)_{V^\perp} \right) \\ &= \pi_* \left((D_{X^L} \tilde{J}Y^L)^\top - \tilde{J}(D_{X^L} Y^L)_{V^\perp} \right) \\ &= \pi_* \left((D_{X^L} \tilde{J}Y^L)_{V^\perp} + (D_{X^L} \tilde{J}Y^L)_{\mathbb{R}V} - (\tilde{J}D_{X^L} Y^L)_{V^\perp} \right) = 0, \end{aligned}$$

onde se tivo en conta que V^\perp é unha distribución invariante por \tilde{J} , que $\ker \pi_* = \mathbb{R}V$ e que a métrica en \mathbb{C}^3 é de Kähler (logo $D\tilde{J} = 0$). Dedúcese, en particular, que a estrutura case complexa J sobre \bar{M} é integrable, polo que \bar{M} é unha variedade complexa con estrutura complexa J (cf. [13], Teorema 4.3, ou [29], Teorema 3.2).

Finalmente xustificaremos por que \bar{M} ten curvatura seccional holomorfa constante. Botamos man, de novo, dun par de ecuacións da teoría de submersións semi-riemannianas

(véxase [23]):

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L &= (\bar{\nabla}_X Y)^L + \frac{1}{2} [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}, \\ \bar{K}(X, Y) &= \tilde{K}(X^L, Y^L) + \frac{3\langle [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}, [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V} \rangle}{4(\langle X^L, X^L \rangle \langle Y^L, Y^L \rangle - \langle X^L, Y^L \rangle^2)},\end{aligned}$$

onde $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$, e \bar{K} e \tilde{K} denotan as curvaturas seccionais de \bar{M} e \tilde{M} , respectivamente. Entón:

$$\begin{aligned}\langle [X^L, Y^L], V \rangle &= 2\langle \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L - (\bar{\nabla}_X Y)^L, V \rangle = 2\langle \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L, V \rangle = 2\langle (D_{X^L} Y^L)^\top, \tilde{J}N \rangle \\ &= -2\langle \tilde{J}(D_{X^L} Y^L), N \rangle = -2\langle D_{X^L} \tilde{J}Y^L, N \rangle = 2\langle \tilde{J}Y^L, D_{X^L} N \rangle \\ &= -2\langle \tilde{J}Y^L, S X^L \rangle = \frac{2}{r} \langle \tilde{J}Y^L, X^L \rangle = \frac{2}{r} \langle JY, X \rangle.\end{aligned}$$

E, por tanto, a curvatura seccional de \bar{M} asociada a unha distribución J -invariante de rango 2, xerada polo sistema ortonormal $\{X, JX\}$, é:

$$\bar{K}(X, JX) = \frac{\varepsilon}{r^2} + \frac{3}{r^2} \langle J(JX), X \rangle^2 \langle V, V \rangle = \frac{\varepsilon}{r^2} (1 + 3\langle X, X \rangle^2) = \frac{4\varepsilon}{r^2}.$$

Así pois, podemos concluír que \bar{M} é un espazo de curvatura seccional holomorfa constante $c = 4\varepsilon/r^2$ e, dacordo coa Proposición 1.2, o seu tensor de curvatura vén dado pola expresión:

$$\bar{R}_{XY}Z = \frac{c}{4} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ).$$

A métrica que se definiu no espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^2$ denomínase *métrica de Fubini-Study*, mentres que a definida no espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^2$ chámase *métrica de Bergman*.

Por último nesta sección xustificaremos por que $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$ son variedades simplemente conexas e completas. Que $\mathbb{C}H^2$ é simplemente conexo séguese do feito de ser difeomorfo a unha bóla aberta de \mathbb{C}^2 . Para deducir que $\mathbb{C}P^2$ é tamén simplemente conexo, podemos botar man da sucesión exacta longa de homotopía aplicada á fibración $\pi: S^5(r) \rightarrow \mathbb{C}P^2$ con fibra S^1 :

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(S^5(r)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}P^2) \longrightarrow \pi_0(S^1) \longrightarrow \cdots$$

Como $\pi_1(S^5(r))$ e $\pi_0(S^1)$ son triviais, séguese que $\pi_1(\mathbb{C}P^2)$ é tamén trivial.

A completitude de $\mathbb{C}P^2$ dedúcese da súa compacidade, mentres que a de $\mathbb{C}H^2$ séguese da completitude do espazo de anti de Sitter (cf. [24], Cap. 4) e de que as submersións semi-riemannianas envían xeodésicas horizontais en xeodésicas (cf. [24], Cap. 7). Non obstante, $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$ son espazos simétricos (ver [8]), do cal se segue que son completos.

1.3. Accións isométricas

Proponémonos revisar neste apartado a terminoloxía e conceptos básicos que xorden no estudo de accións isométricas en variedades Riemannianas. Unha referencia máis detallada é [1, Capítulo 3].

Sexa \bar{M} unha variedade Riemanniana e G un grupo de Lie actuando diferenciablemente sobre \bar{M} por isometrías. Isto significa que temos unha *acción isométrica*, isto é, unha aplicación diferenciable

$$\varphi: G \times \bar{M} \rightarrow \bar{M}, \quad (g, p) \mapsto gp$$

satisfacendo $(gg')p = g(g'p)$ para todo $g, g' \in G$ e $p \in \bar{M}$, e tal que a aplicación

$$\varphi_g: \bar{M} \rightarrow \bar{M}, \quad p \mapsto gp$$

é unha isometría de \bar{M} para todo $g \in G$. Se denotamos por $I(\bar{M})$ ao grupo de isometrías de \bar{M} , o cal se sabe que é un grupo de Lie [15], entón temos un homomorfismo de grupos de Lie $\rho: G \rightarrow I(\bar{M})$ dado por $\rho(g) = \varphi_g$.

Para cada punto $p \in \bar{M}$, a *órbita* da acción de G que pasa por p é

$$G \cdot p = \{gp : g \in G\}$$

e o *grupo de isotropía* ou *estabilizador* en p é

$$G_p = \{g \in G : gp = p\}.$$

Se $G \cdot p = \bar{M}$ para algún $p \in \bar{M}$, e polo tanto para calquera $p \in \bar{M}$, a acción de G dise *transitiva* e \bar{M} é un *G -espazo homoxéneo*. Se todas as órbitas son puntos, a acción dise *trivial*. Unha acción chámase *efectiva* se a anterior aplicación asociada ρ é inxectiva, o cal significa que G é isomorfo a un subgrupo de $I(\bar{M})$. Cando para todo $p \in \bar{M}$ e todos $g, h \in G$, se cumpre que a igualdade $gp = hp$ implica $g = h$, entón a acción dise *libre*.

Consideremos dúas accións isométricas $G \times \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ e $G \times \bar{M}' \rightarrow \bar{M}'$. Dise que son *conxugadas* ou *equivalentes* se hai un isomorfismo de grupos de Lie $\psi: G \rightarrow G'$ e unha isometría $f: \bar{M} \rightarrow \bar{M}'$ tal que $f(gp) = \psi(g)f(p)$ para todo $p \in \bar{M}$ e $g \in G$. Diremos que ambas accións isométricas son *orbitalmente equivalentes* se hai unha isometría $f: \bar{M} \rightarrow \bar{M}'$ que leva as órbitas da acción de G sobre \bar{M} ás órbitas da acción de G' sobre \bar{M}' . Claramente, as dúas accións conxugadas son orbitalmente equivalentes.

Nós estaremos principalmente interesados no estudo da xeometría extrínseca das órbitas das accións isométricas. Unha *subvariedade (extrínsecamente) homoxénea* de \bar{M} é unha órbita dunha acción isométrica sobre \bar{M} . En xeral, esas órbitas só serán subvariedades inmersas de \bar{M} . Respecto á métrica inducida, cada órbita $G \cdot p$ é un espazo homoxéneo Riemanniano $G \cdot p = G/G_p$, sobre o cal G actúa transitivamente por isometrías.

Sexa \bar{M}/G o conxunto de órbitas da acción de G sobre \bar{M} , e dotemos a \bar{M}/G coa topoloxía cociente relativa a proxección canónica $\bar{M} \rightarrow \bar{M}/G$, $p \mapsto G \cdot p$. En xeral, \bar{M}/G non é un espazo Hausdorff. Co fin de evitar este comportamento, introduciuse o concepto de acción isométrica propia. De feito, a acción de G sobre \bar{M} é *propia* se, para calquera par

de puntos $p, q \in \bar{M}$, existen entornos abiertos U_p e U_q de p e q en \bar{M} , respectivamente, tal que $\{g \in G : gU_p \cap U_q \neq \emptyset\}$ é relativamente compacto en G . Equivalentemente, a aplicación

$$G \times \bar{M} \rightarrow \bar{M} \times \bar{M}, \quad (g, p) \mapsto (p, gp)$$

é unha aplicación propia, é dicir, a imaxe inversa de cada conxunto compacto en $\bar{M} \times \bar{M}$ é tamén compacto en $G \times \bar{M}$. Todas as accións de grupos de Lie compactos son propias. Se G é un subgrupo de $I(\bar{M})$, entón a acción de G é propia se, e só se, G é pechado en $I(\bar{M})$. Ademais, se G actúa propiamente sobre \bar{M} , entón \bar{M}/G é un espazo Hausdorff, cada grupo de isotropía G_p é compacto, e cada órbita $G \cdot p$ é pechada en \bar{M} e polo tanto unha subvariedade mergullada. De feito, as órbitas dunha acción isométrica son pechadas se, e só se, a acción é orbitalmente equivalente a unha acción isométrica propia, ver [5].

Podemos distinguir tres tipos diferentes de órbitas dunha acción isométrica propia: órbitas principais, excepcionais e singulares. Unha órbita $G \cdot p$ dise unha *órbita principal* se para cada $q \in \bar{M}$ o grupo de isotropía G_p en p é o conxugado en G a algún subgrupo de G_q . A unión de todas as órbitas principais é un subconxunto aberto e denso de \bar{M} . Cada órbita principal é unha órbita de dimensión máxima. A codimensión de calquera órbita principal é a *cohomoxeneidade* da acción. Unha órbita non principal de dimensión máxima é chamada unha *órbita excepcional*. Finalmente, unha *órbita singular* é unha órbita cuxa dimensión é menor ca dimensión da órbita principal ou, equivalentemente, unha órbita cuxa codimensión é maior ca cohomoxeneidade.

Outro importante tipo de accións isométricas son as accións polares. Unha acción isométrica dun grupo G nunha variedade Riemanniana \bar{M} dise *polar* se existe unha subvariedade imersa Σ de M que interseque todas as órbitas da acción de G , e para cada $p \in \Sigma$, o espazo tanxente de Σ en p , $T_p\Sigma$, e o espazo tanxente da órbita a través de p en p , $T_p(G \cdot p)$, son ortogonais. En tal caso, a subvariedade Σ é totalmente xeodésica e chámase unha *sección* da acción de G . Calquera acción polar admite seccións a través de calquera punto dado.

Capítulo 2

Hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais en $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$

Denotemos $\bar{M}^2(c)$ ao espazo modelo complexo de dimensión dous non chan e con curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$. É dicir, $\bar{M}^2(c)$ é isométrico ao plano proxectivo complexo $\mathbb{C}P^2(c)$ de curvatura seccional holomorfa constante $c > 0$, ou ao plano hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^2(c)$ de curvatura seccional holomorfa constante $c < 0$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ á métrica de $\bar{M}^2(c)$, por J á súa estrutura complexa, e por $\bar{\nabla}$ á súa conexión de Levi-Civita.

Sexa M unha hipersuperficie real de $\bar{M}^2(c)$, isto é, unha subvariedade de $\bar{M}^2(c)$ con codimensión real 1. Os cálculos que faremos neste capítulo son locais, polo que suporemos que M é orientable. Polo tanto, sexa ξ un campo de vectores normal a M unitario. O campo de vectores $J\xi$ é tanxente a M , e chámase campo de vectores de Hopf ou de Reeb.

A conexión de Levi-Civita de M é denotada por ∇ , e determinada pola fórmula de Gauss:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle SX, Y \rangle \xi,$$

onde X e Y son campos de vectores tanxentes a M , e S denota o operador de configuración de M .

O operador de configuración é un endomorfismo autoadxunto respecto da métrica de M , polo que é diagonalizable con autovalores reais. Estes autovalores chámanse curvaturas principais de M , os correspondentes autoespazos chámanse os espazos de curvaturas principais, e os correspondentes autovectores chámanse os vectores de curvaturas principais (véxase Sección 1.1). Recordemos que M se di hipersuperficie de Hopf se $J\xi$ é un vector de curvatura principal en todo punto.

Unha hipersuperficie real de $\bar{M}^2(c)$ ten, xenericamente, tres curvaturas principais distintas. Tashiro e Tachibana [27] probaron que non hai hipersuperficies reais umbílicas (isto é, hipersuperficies reais con exactamente unha curvatura principal) nos espazos modelo complexos non chans. Cecil e Ryan [4] mostraron que unha hipersuperficie real con exactamente dúas curvaturas principais en $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 3$, ten curvaturas principais constantes e é ademais un aberto dunha esfera xeodésica. Montiel [16] obtivo un resultado análogo

para $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 3$, amosando que unha hipersuperficie real con dúas curvaturas principais distintas debe ser un aberto dunha esfera xeodésica, un tubo entorno a un $\mathbb{C}H^{n-1}$ totalmente xeodésico en $\mathbb{C}H^n$, ou unha horosfera. Nambos casos, os exemplos que aparecen na clasificación son abertos dunha hipersuperficie homoxénea Hopf.

Os métodos usados por Cecil e Ryan, e Montiel, non funcionan se $n = 2$. De feito, Niebergall e Ryan [21, Cuestión 9.2] mostran o interese de estender estas clasificacións das hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais distintas a $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$. De aquí o interese deste traballo, xa que o caso onde $n = 2$ é máis difícil e nós damos resposta a este problema, aportando exemplos que non aparecen se $n \geq 3$.

A clasificación de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais constantes distintas non é moi difícil de obter, e pode ser atopada en [26] para $\mathbb{C}P^2$ como un caso particular da clasificación en dimensión arbitraria, e en [2]. De novo, todos os exemplos son abertos dunha hipersuperficie real homoxénea de Hopf.

Como comentaremos na seguinte sección, o grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ actúa polarmente sobre $\bar{M}^n(c)$ mediante isometrías. Isto significa que admite unha sección Σ , que neste caso é un plano proxectivo ou hiperbólico real totalmente xeodésico, $\mathbb{R}P^2$ se $c > 0$, ou $\mathbb{R}H^2$ se $c < 0$, que interseca a todas as órbitas da acción e sempre ortogonalmente. Un punto p en Σ dise regular se a órbita a través de p é unha órbita principal da acción; neste caso, unha órbita de dimensión 2.

Neste traballo, polo tanto, centrámonos no estudo de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais distintas e non constantes en $\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}H^2$. É dicir, o obxectivo do noso traballo será dar resposta ao Problema 9.2 de Niebergall e Ryan [21], levando a cabo a proba do seguinte resultado:

Teorema Principal. *Sexa $\bar{M}^2(c)$ un espazo modelo complexo de dimensión complexa 2 e curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$. Consideremos a acción polar do grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ en $\bar{M}^2(c)$ con sección Σ .*

Entón, para calquera punto regular $p \in \Sigma$ e calquera vector tanxente $v \in T_p\Sigma$, hai exactamente dúas curvas diferentes definidas localmente $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$, con $\gamma_i(0) = p$ e $\dot{\gamma}_i(0) = v$, tal que o conxunto $H \cdot \gamma_i = \{h(\gamma_i(t)) : h \in H, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ é unha hipersuperficie real con dúas curvaturas principais en $\bar{M}^2(c)$. Xenericamente, tales hipersuperficies son non Hopf e con dúas curvaturas principais non constantes.

Reciprocamente, para o caso $c > 0$, sexa M unha hipersuperficie real analítica de $\mathbb{C}P^2(c)$ con dúas curvaturas principais non constantes e non Hopf en todo punto. Entón M é localmente congruente a un aberto dunha hipersuperficie construída como anteriormente.

Este capítulo está organizado como segue. Na Sección 2.1 presentamos os exemplos de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais mencionados na primeira parte do Teorema Principal. Na Sección 2.2 empregamos as ecuacións fundamentais das hipersuperficies para derivar a expresión concreta da conexión de Levi-Civita dunha hipersuperficie con dúas curvaturas principais, así como información sobre tales curvaturas principais. A continuación, derivamos propiedades xeométricas desta hipersuperficie na Sección 2.3. Finalmente, concluímos a demostración do Teorema Principal na Sección 2.4.

2.1. Construción dos novos exemplos

Nesta sección presentamos un método para construír hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais nun plano modelo complexo non chan. Tales hipersuperficies teñen xenericamente curvaturas principais non constantes.

A idea detrás da nosa construción é bastante simple. Consideraremos unha certa acción polar en $\bar{M}^2(c)$ cuxas órbitas principais son toros e cuxas seccións son de dimensión 2. Nunha desas seccións nós queremos atopar unha curva γ (localmente definida) tal que, se lle unimos a cada punto $\gamma(t)$ de γ o toro que pasa por $\gamma(t)$, obtemos unha hipersuperficie real de dimensión 3 de $\bar{M}^2(c)$ con dúas curvaturas principais en todo punto. Resulta que a imposición da condición das dúas curvaturas principais é equivalente ao feito de que γ satisfaga certo sistema de ecuacións diferenciais ordinarias. Usando o teorema de existencia de solucións para ecuacións diferenciais ordinarias en forma normal, deducimos a existencia da nosa hipersuperficie real.

Comezaremos por recordar que o grupo $U(3)$ de transformacións lineais unitarias de \mathbb{C}^3 deixa invariante calquera esfera centrada na orixe. Como as transformacións en $U(3)$ son aplicacións lineais complexas, séguese de aquí que a acción de $U(3)$ en \mathbb{C}^3 conmuta coa acción do subgrupo $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ de $U(3)$, o cal é isomorfo ao grupo circunferencia $U(1)$. Isto significa que a acción de $U(3)$ en \mathbb{C}^3 descende a unha acción no plano proxectivo complexo $\mathbb{C}P^2$. Ademais, esta acción é isométrica e transitiva, xa que a acción de $U(3)$ na esfera S^5 é isométrica e transitiva.

Para o caso do plano hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^2$, consideraremos o grupo $U(1, 2)$ de matrices complexas 3×3 que preserva unha métrica Hermitiana en \mathbb{C}^3 de signatura $(1, 2)$. De maneira similar a antes, a súa acción no espazo anti-de Sitter AdS^5 descende a unha acción isométrica transitiva en $\mathbb{C}H^2$.

Agora consideremos o grupo produto $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ mergullado como un subgrupo de $U(3)$, e tamén de $U(1, 2)$, de forma canónica (é dicir, por medio de matrices diagonais). Séguese da clasificación de accións polares nos espazos proxectivos complexos debida a Podestá e Thorbergsson [25] que a acción de H en $\mathbb{C}P^2$ é polar e as súas seccións son planos proxectivos reais totalmente xeodésicos $\mathbb{R}P^2$. De maneira similar, a clasificación de accións polares no plano hiperbólico complexo, debido a Berndt e Díaz-Ramos [3], mostra que H tamén actúa polarmente en $\mathbb{C}H^2$, e as seccións son planos hiperbólicos reais totalmente xeodésicos $\mathbb{R}H^2$. Vale a pena sinalar que, aínda que en xeral non existe unha correspondencia un a un entre accións polares en $\mathbb{C}P^2$ e en $\mathbb{C}H^2$, esta existe para accións de grupos compactos [6], como é o caso de $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$.

Descríbimos agora a estrutura das órbitas da acción de H en $\bar{M}^2(c)$, $c \neq 0$. A situación é bastante similar para o caso $c > 0$ e $c < 0$, aínda que hai diferencias debido a compacidade de $\bar{M}^2(c) = \mathbb{C}P^n$ cando $c > 0$.

Comezaremos considerando o subgrupo $K = U(1) \times U(2)$ de $U(3)$ e de $U(1, 2)$, mergullado de forma canónica. O grupo K actúa isometricamente en $\bar{M}^2(c)$ con cohomoxeneidade un e cun punto fixo, chamémolo o . As órbitas principais desta acción son todas as esferas xeodésicas centradas en o . Se $c < 0$, todas esas esferas xeodésicas, xunto co punto o , enchén todo $\mathbb{C}H^n$, xa que $\mathbb{C}H^n$ é unha variedade de Hadamard. En cambio, no caso $c > 0$,

o lugar xeométrico de puntos conxugados a o é non baleiro: consiste nunha liña proxectiva complexa totalmente xeodésica $\mathbb{C}P^1$ dentro de $\mathbb{C}P^2$. Polo tanto, as órbitas da acción H en $\mathbb{C}P^2$ son: o punto o , as esferas xeodésicas centradas en o , e o lugar xeométrico $\mathbb{C}P^1$ de puntos conxugados a o .

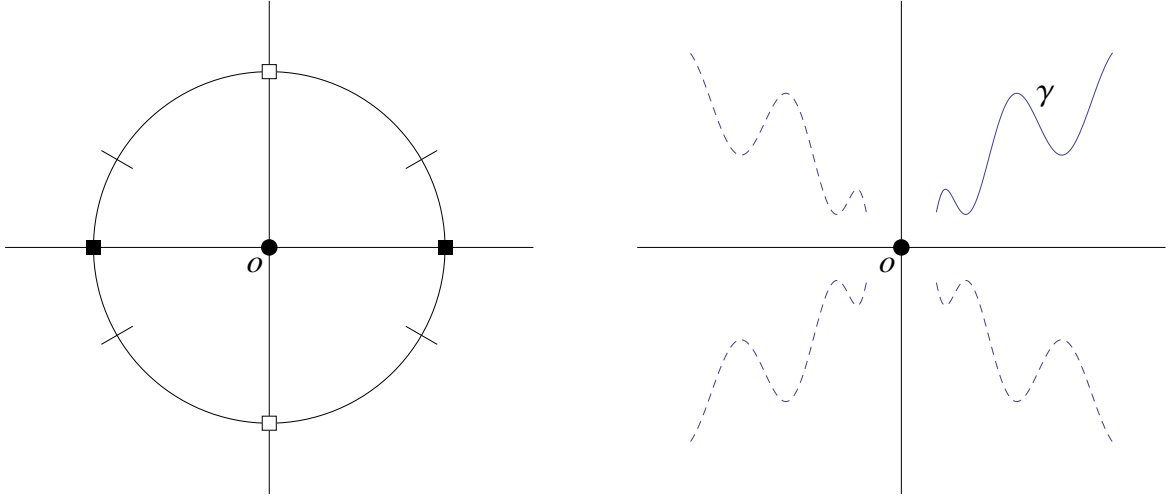
O grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ está contido no subgrupo $K = U(1) \times U(2)$. Polo tanto, as órbitas da acción de H están contidas nas órbitas da acción de K . As órbitas de H contidas nunha esfera xeodésica fixa en torno a o resultan ser toros totalmente reais $S^1 \times S^1$ chans e equidistantes entre si, e tamén dúas órbitas singulares isométricas a circunferencias S^1 . No caso proxectivo (é dicir, cando $c > 0$), temos que describir as órbitas contidas no lugar xeométrico de puntos conxugados a o . A restrición da acción de H a este lugar xeométrico de puntos conxugados (recordemos, un $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$) é equivalente á acción estándar de $SO(2)$ na esfera S^2 ; noutras palabras, as órbitas da acción de H contidas no lugar xeométrico de puntos conxugados son dous puntos e as circunferencias en $\mathbb{C}P^1$ centradas en cada un deses dous puntos. En particular, mentres a acción de H en $\mathbb{C}H^2$ só ten un punto fixo o , a acción en $\mathbb{C}P^2$ ten exactamente tres puntos fixos. Nambos casos, as restantes órbitas son ou circunferencias ou toros.

Unha forma conveniente de visualizar a acción de H é mediante a interpretación xeométrica de cada un destes puntos da sección da acción (véxase Figura 2.1(a)). Esta interpretación séguese por exemplo da teoría de accións polares e grupos de Weyl, ver [28]. Así, sexa Σ unha sección da acción polar de H . Recordemos que Σ é un $\mathbb{R}P^2$ totalmente xeodésico se $c > 0$, ou un $\mathbb{R}H^2$ totalmente xeodésico se $c < 0$. Por definición, Σ interseca todas as órbitas de acción de H polo menos unha vez, pero posiblemente máis dunha vez. Os puntos fixos da acción de H (en particular, o punto o) deben estar contidos en Σ . As interseccións das órbitas de dimensión un contidas nas esferas xeodésicas en torno a o coa sección Σ encóntranse sobre dúas xeodésicas ortogonais de Σ , as cales chamaremos eixos. Por outra banda, as interseccións das esferas xeodésicas en torno a o con Σ son circunferencias en Σ centradas en o . Fixemos a esfera xeodésica en torno a o . Entón cada unha das dúas órbitas de dimensión un nunha esfera xeodésica interseca a Σ en exactamente dous puntos, os cales son simétricos respecto do centro o . Cada un dos toros contidos na esfera xeodésica interseca Σ en exactamente catro puntos, os cales son simétricos respecto dos dous eixos en Σ .

Nós interesarámonos só na parte regular Σ_{reg} de Σ , isto é, os puntos na sección que pertencen ás órbitas de máxima dimensión da acción de H , neste caso, aos toros de dimensión dous. Esta parte regular é un subconxunto aberto e denso de Σ difeomorfo ao plano \mathbb{R}^2 menos dúas liñas ortogonais (véxase Figura 2.1(b)). Dada unha curva $\gamma: t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \gamma(t) \in \Sigma_{reg}$ na parte regular de Σ , o conxunto

$$H \cdot \gamma = \{h(\gamma(t)) : t \in (-\varepsilon, \varepsilon), h \in H\}$$

é unha hipersuperficie real de dimensión 3 en $\bar{M}^2(c)$. O espazo tanxente a $H \cdot \gamma$ no punto $h(\gamma(t))$ está xerado pola velocidade $\dot{\gamma}(t)$ da curva e o espazo tanxente ao toro $H \cdot \gamma(t)$. A hipersuperficie real $H \cdot \gamma$ está claramente foliada por toros equidistantes, e perpendicularmente, polas curvas $h \cdot \gamma: t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto (h \cdot \gamma)(t) = h(\gamma(t)) \in \Sigma_{reg}$, para cada $h \in H$.



(a) Este gráfico representa a sección Σ onde se trazaron dúas xeodésicas e unha circunferencia, a cal é a intersección de Σ cunha esfera xeodésica centrada en o . Os puntos con forma de cadrado representan as interseccións de Σ coas dúas órbitas difeomorfas a S^1 en tal esfera xeodésica. Os catro trazos son a intersección de Σ cunha órbita principal, é dicir, cun toro.

(b) Σ_{reg} é difeomorfo ao plano euclidiano menos os dous eixos de coordenadas. Buscamos unha curva conexa γ nun dos catro cuadrantes de Σ_{reg} . As curvas con trazos discontinuos obtéñense reflectindo γ con respecto aos eixos. As catro curvas resultantes representan a intersección de Σ coa hipersuperficie $H \cdot \gamma$.

Figura 2.1: Interpretación xeométrica da acción polar do grupo H .

Agora o noso propósito é determinar que curvas γ dan lugar a hipersuperficies con exactamente dúas curvaturas principais en todo punto.

A primeira observación é que as curvaturas principais de calquera órbita principal de H (de calquera toro) respecto a calquera vector normal non nulo son sempre diferentes, isto é, hai exactamente dúas. Isto séguese da expresión explícita do operador de configuración S deses toros (ver [14, p. 299] ou [11, p. 232]):

$$S_{e_3} = \begin{pmatrix} \lambda + \cos(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} & \text{sen}(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} \\ \text{sen}(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} & 3\lambda - \cos(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} \end{pmatrix},$$

$$S_{e_4} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} & \lambda + \cos(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} \\ \lambda + \cos(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} & \text{sen}(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}} \end{pmatrix},$$

onde $\{e_3, e_4\}$ é unha base ortonormal do espazo normal do toro, e λ e μ son números reais (que cambian dun toro a outro). Se tomamos un vector unitario normal xenérico $\eta = \cos(\theta)e_3 + \text{sen}(\theta)e_4$, algúns cálculos elementais amosan que os autovalores do operador de configuración respecto de ξ son $2\lambda \cos(\theta) \pm \sqrt{(\lambda')^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda' \cos(\mu + 2\theta)}$, onde $\lambda' = \sqrt{\lambda^2 + \frac{c}{8}}$. Pero, xa que $c \neq 0$, esas curvaturas principais son sempre diferentes, para todo valor de λ , μ e θ .

Fixemos agora un punto $p \in \Sigma_{reg}$ e un vector tanxente $v \in T_p \Sigma_{reg}$. Consideremos unha

curva regular γ (localmente definida) en Σ_{reg} , parametrizada por lonxitude de arco e tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Fixemos un campo de vectores unitario ξ normal ao longo de γ , é dicir $\langle \xi_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ para todo t onde γ estea definida. Consideremos tamén unha carta local \mathcal{U} para Σ_{reg} en torno a p , con coordenadas (x_1, x_2) . Sexan $\alpha, \beta : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ as funcións curvaturas principais dos toros intersecando \mathcal{U} nos puntos de \mathcal{U} . Polo explicado anteriormente, sabemos que $\alpha(w) \neq \beta(w)$ para calquera vector $w \in T\mathcal{U}$.

Queremos impoñer a condición de que a hipersuperficie $H \cdot \gamma$ ten dúas curvaturas principais. O operador de configuración S de $H \cdot \gamma$ en $\gamma(t)$ respecto ao vector unitario normal $\xi_{\gamma(t)}$ ten os seguintes autovalores: $\alpha(\xi_{\gamma(t)})$, $\beta(\xi_{\gamma(t)})$ e

$$\langle S_{\xi_{\gamma(t)}} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \xi, \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \xi \rangle.$$

Este último autovalor é precisamente a curvatura da curva γ en $\bar{M}^2(c)$ ou, equivalentemente como Σ é totalmente xeodésica, a curvatura de γ (respecto á orientación determinada polo campo normal ξ) como unha curva en Σ .

Polo tanto, $H \cdot \gamma$ terá dúas curvaturas principais nos puntos de γ se, e só se, a curvatura de γ (respecto a ξ) como unha curva en Σ coincide cunha das dúas funcións $\alpha(\xi_{\gamma(t)})$ ou $\beta(\xi_{\gamma(t)})$. Vexamos agora que esta condición determina dous posibles sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias. Se escribimos γ en coordenadas locais como $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= x_1'' \partial_1 + x_1' \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \partial_1 + x_2'' \partial_2 + x_2' \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \partial_2 \\ &= (x_1'' + f(x_1, x_2, x_1', x_2')) \partial_1 + (x_2'' + g(x_1, x_2, x_1', x_2')) \partial_2, \end{aligned}$$

onde f, g son funcións diferenciables de x_1, x_2, x_1', x_2' e dos símbolos de Christoffel de Σ . Impoñer que a curvatura de γ coincida con $\alpha(\xi_{\gamma(t)})$ significa que $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \alpha(\xi_{\gamma(t)}) \xi_{\gamma(t)}$ (similarmente con β en lugar de α). Polo tanto, existen funcións regulares F_α e G_α (dependendo de x_1, x_2, x_1', x_2' , os símbolos de Christoffel de Σ e a función α) tales que

$$\left. \begin{aligned} x_1'' &= F_\alpha(x_1, x_2, x_1', x_2') \\ x_2'' &= G_\alpha(x_1, x_2, x_1', x_2') \end{aligned} \right\}.$$

Este é un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias de segunda orde escrito en forma normal e con dúas incógnitas, x_1 e x_2 . Polo tanto, ten unha única solución para condicións iniciais dadas $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Un argumento completamente análogo aplícase a β en lugar de α . Ademais, a hipersuperficie $H \cdot \gamma$ ten dúas curvaturas principais nos puntos de γ se, e só se, γ é unha solución dun dos dous posibles sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias construídos como se explicou anteriormente.

Aínda temos que comprobar que, dada unha solución γ dun dos sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, a hipersuperficie $H \cdot \gamma$ ten dúas curvaturas principais en todos os puntos, non só ao longo de γ . Un campo de vectores normal unitario a $H \cdot \gamma$ é dado por $h_*(\xi_{\gamma(t)})$, para calquera $h \in H$ e calquera posible t . Como a acción de H é polar, este campo de vectores normal H -equivariante é paralelo respecto á conexión normal do toro $H \cdot \gamma(t)$ (ver [1, Corolario 3.2.5]). Ademais, sexa $\{U, V\}$ unha referencia ortonormal ao longo de γ

de vectores principais de $H \cdot \gamma$, ambos U e V ortogonais a $\dot{\gamma}$. Entón $\{h_*\dot{\gamma}, h_*U, h_*V\}$ é unha referencia ortonormal H -invariante de vectores tanxentes á hipersuperficie $H \cdot \gamma$. Ademais, como as isometrías preservan a conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$, séguese que as curvaturas principais de $H \cdot \gamma$ nun punto $h(\gamma(t))$ son as mesmas que as curvaturas principais nun punto $\gamma(t)$, e $\{h_*\dot{\gamma}, h_*U, h_*V\}$ é unha referencia ortonormal de campos de vectores de curvatura principal. Concluimos que $H \cdot \gamma$ ten exactamente dúas curvaturas principais en todo punto.

Ademais, observemos que as dúas posibles eleccións que temos para γ (chamémolas γ_α ou γ_β , dependendo de se eliximos α ou β para ser a curvatura principal con multiplicidade dous) proporcionan, de feito, dúas curvas diferentes $\gamma_\alpha \neq \gamma_\beta$. Se, polo contrario, γ_α coincide localmente nun entorno de p con γ_β , entón as hipersuperficies $H \cdot \gamma_\alpha$ e $H \cdot \gamma_\beta$ deberán coincidir localmente, e polo tanto deberán ter as mesmas curvaturas principais e multiplicidades. Sen embargo, isto contradí o feito de que α é unha curvatura principal de $H \cdot \gamma_\alpha$ con multiplicidade dous, mentres que ten multiplicidade un como curvatura principal de $H \cdot \gamma_\beta$.

Finalmente, temos que mostrar que os exemplos que acabamos de construír son de feito novos, isto é, que as súas dúas curvaturas principais son non constantes. Comezaremos fixando un punto $p \in \Sigma_{reg}$. Entón sabemos que para todo vector unitario $v \in T_p \Sigma_{reg}$ hai unha curva γ_v , definida localmente, tal que $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$ e $H \cdot \gamma_v$ ten dúas curvaturas principais. De feito, hai exactamente dúas curvas, pero os argumentos aplicáremolos a calquera delas. Asumamos que, para todo v nun subconxunto aberto da esfera unitaria $S^1(T_p \Sigma_{reg})$ de $T_p \Sigma_{reg}$, as hipersuperficies reais $H \cdot \gamma_v$ son Hopf en p . Por asumir isto, chegaremos a unha contradición.

Para cada hipersuperficie, sexa ξ_v un campo de vectores normal unitario ao longo de $H \cdot \gamma_v$, o cal sabemos que é H -equivariante ao longo dos toros que folian $H \cdot \gamma_v$. Observemos que o subíndice v en ξ_v só denota que o campo de vectores normal depende do valor inicial v para γ_v ; en particular, $\langle \dot{\gamma}_v(t), (\xi_v)_{\gamma_v(t)} \rangle = 0$ para cada posible t . Asumir que $H \cdot \gamma_v$ é Hopf en p significa que $(J\xi_v)_p$ é un autovector do operador de configuración de $H \cdot \gamma_v$, e polo tanto, $(J\xi_v)_p$ é tamén un autovector do operador de configuración $S_{(\xi_v)_p}$ do toro $H \cdot p$ respecto do vector normal $(\xi_v)_p$. En particular, a aplicación

$$v \in S^1(T_p \Sigma_{reg}) \mapsto \langle S_{(\xi_v)_p}(J\xi_v)_p, Jv \rangle \in \mathbb{R}$$

anúlase nun subconxunto aberto da esfera unitaria de $T_p \Sigma_{reg}$ por hipótese. Como a aplicación é analítica, séguese que é idénticamente nula, o cal significa que $(J\xi_v)_p$ é un autovector de $S_{(\xi_v)_p}$, para todo vector unitario $v \in T_p \Sigma_{reg}$. Como Jv é perpendicular a $(J\xi_v)_p$, temos que Jv é un autovector de $S_{(\xi_v)_p}$ para cada v , pois $S_{(\xi_v)_p}$ é un endomorfismo autoadxunto dun espazo vectorial bidimensional. Pero agora, se fixamos calquera v e tomamos campos de vectores normais unitarios $\xi = (\xi_v)_p$ e $\eta = v$ en p , entón $\{J\xi, Jv\}$ é unha base común de autovectores dos operadores de configuración S_ξ e S_η do toro $H \cdot p$ en p respecto de ξ e η . Isto significa que os operadores de configuración S_ξ e S_η conmutan. Usando isto e o feito de que o toro $H \cdot p$ ten un fibrado normal chan, a ecuación de Ricci de $H \cdot p$ aplicada a $J\xi, Jv, \xi$ e η implica

$$0 = \langle R^\perp(J\xi, Jv)\xi, \eta \rangle = \langle \bar{R}(J\xi, Jv)\xi, \eta \rangle + \langle [S_\xi, S_\eta]J\xi, J\eta \rangle = -\frac{c}{4},$$

o cal nos dá a desexada contradición. Ademais, as hipersuperficies reais $H \cdot \gamma_v$ son Hopf en p para todo v nun subconxunto de $S^1(T_p\Sigma_{reg})$ con medida nula. Así, xenericamente, as nosas hipersuperficies son non Hopf. Pero como teñen dúas curvaturas principais, estas non poden ser constantes, porque todas as hipersuperficies en $\bar{M}^2(c)$ con dúas curvaturas principais constantes son Hopf, como se segue da súa ben coñecida clasificación (ver [2]).

Así, acabamos de probar a primeira parte do noso Teorema Principal.

Teorema 2.1. *Sexa $\bar{M}^2(c)$ un espazo modelo complexo de dimensión complexa 2 e curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$. Consideremos a acción polar do grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ en $\bar{M}^2(c)$ con sección Σ .*

Entón, para calquera punto regular $p \in \Sigma$ e calquera vector tanxente $v \in T_p\Sigma$, hai exactamente dúas curvas diferentes definidas localmente $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$, con $\gamma_i(0) = p$ e $\dot{\gamma}_i(0) = v$, tal que o conxunto $H \cdot \gamma_i = \{h(\gamma_i(t)) : h \in H, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ é unha hipersuperficie real con dúas curvaturas principais en $\bar{M}^2(c)$. Xenericamente, tales hipersuperficies son non Hopf e con dúas curvaturas principais non constantes.

2.2. As ecuacións fundamentais dunha hipersuperficie con dúas curvaturas principais

Recordemos que $\bar{M}^2(c)$ denota ao espazo modelo complexo non chan de dimensión complexa 2 e curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$. Supoñamos que M é unha hipersuperficie real de $\bar{M}^2(c)$ orientable e non Hopf en cada punto, con dúas curvaturas principais distintas e non constantes, chamémoslas α e β . Nun entorno dun punto, α e β seguirán sendo funcións distintas, e ademais, teremos T_α a distribución sobre M formada polos espazos de curvaturas principais de α e T_β a distribución sobre M formada polos espazos de curvaturas principais de β , as cales son distribucións diferenciáveis ben definidas sobre ese entorno aberto. (Recordemos que en xeral esas distribucións poden non ter dimensión constante.) No que segue simplemente suporemos que M denota o entorno onde α e β son diferentes. De aquí en diante asumiremos sen perda de xeneralidade que $\dim T_\alpha = 1$ e $\dim T_\beta = 2$. Por $\Gamma(T_\alpha)$ e $\Gamma(T_\beta)$ denotamos as seccións de T_α e T_β , isto é, os campos de vectores regulares sobre M que son, en cada punto, campos de vectores con curvatura principal asociada a α e β respectivamente.

Tomemos ξ o campo de vectores normal á hipersuperficie. Pois ben, $J\xi$ ten proxección non trivial en T_α e T_β ,

$$J\xi = aU + bV,$$

onde $U \in \Gamma(T_\alpha)$, $V \in \Gamma(T_\beta)$ son campos de vectores unitarios, e $a, b : M \rightarrow \mathbb{R}$ son funcións diferenciáveis satisfacendo $a^2 + b^2 = 1$, con $a, b \neq 0$, debido á hipótese de que M é non Hopf.

Como T_β ten dimensión 2, consideramos outro vector unitario $A \in \Gamma(T_\beta)$ tal que A é ortogonal a V , de xeito que $\{U, V, A\}$ forman unha base ortonormal de TM en cada punto.

Temos que $-\xi = J(J\xi) = aJU + bJV$. Xa que $JU \in \text{span}\{A, \xi\}$, posto que $\langle JU, U \rangle = 0$ e $\langle JU, V \rangle = 0$, deducimos $\langle JU, \xi \rangle = -\langle U, J\xi \rangle = -a$. Grazas a que U é un vector unitario temos que $\langle JU, A \rangle = \pm b$. Cambiándolle o signo a A , se fose necesario, podemos supor que $\langle JU, A \rangle = -b$. Polo tanto obtemos que $JU = -bA - a\xi$. Análogo para JV . Destas dúas expresións anteriores, obtemos a expresión de JA , porque $\langle JA, U \rangle = -\langle A, JU \rangle = b$ e $\langle JA, V \rangle = -\langle A, JV \rangle = -a$. E así:

$$\begin{aligned} J\xi &= aU + bV, & JA &= bU - aV, \\ JU &= -bA - a\xi, & JV &= aA - b\xi. \end{aligned}$$

Estudamos agora certas propiedades destes campos de vectores, as cales nos aportarán información de como é a nosa hipersuperficie. Máis concretamente determinaremos a conexión de Levi-Civita da hipersuperficie M así como certas derivadas das funcións α , β , a e b . Para isto empregaremos as ecuacións fundamentais dunha hipersuperficie.

Proposición 2.2. *Coa notación establecida anteriormente a conexión de Levi-Civita ∇ da hipersuperficie M queda determinada polas seguintes expresións:*

$$\begin{aligned} \nabla_U U &= -\frac{b(c - 4\alpha(\alpha - \beta))}{4a(\alpha - \beta)}A, & \nabla_U V &= \frac{c}{4(\alpha - \beta)}A, \\ \nabla_V U &= \frac{c}{4(\alpha - \beta)}A, & \nabla_V V &= -\frac{a(c + 4(\alpha - \beta)\beta)}{4b(\alpha - \beta)}A, \\ \nabla_A U &= -\frac{(a^2 - 2b^2)c}{4(\alpha - \beta)}V, & \nabla_A V &= \frac{(a^2 - 2b^2)c}{4(\alpha - \beta)}U, \\ \nabla_U A &= -\frac{acV + b(c - 4\alpha(\alpha - \beta))}{4a(\alpha - \beta)}U, & \nabla_V A &= -\frac{bcU + a(c + 4(\alpha - \beta)\beta)}{4b(\alpha - \beta)}V, \\ \nabla_A A &= 0. \end{aligned}$$

Ademais, obtemos as seguintes expresións para as derivadas das funcións α , β , a e b :

$$\begin{aligned} Ua &= 0, & Va &= 0, & Aa &= -\frac{b((a^2 - 2b^2)c + 4(\alpha - \beta)\beta)}{4(\alpha - \beta)}, \\ Ub &= 0, & Vb &= 0, & Ab &= \frac{a((a^2 - 2b^2)c + 4(\alpha - \beta)\beta)}{4(\alpha - \beta)}, \\ U\alpha &= 0, & V\alpha &= 0, & A\alpha &= \frac{b((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta))}{4a}, \\ U\beta &= 0, & V\beta &= 0, & A\beta &= -\frac{3}{4}abc. \end{aligned}$$

A demostración da proposición anterior será levada a cabo como segue. Na Subsección 2.2.1 empregaremos a ecuación de Codazzi. A continuación, na Subsección 2.2.2 calcularanse as derivadas dos produtos interiores dos campos de vectores coñecidos. As derivadas cruzadas destas funcións darannos información adicional na Subsección 2.2.3. Finalmente, na Subsección 2.2.4 a ecuación de Gauss subministrará a información restante para probar a Proposición 2.2.

2.2.1. Resultados usando a ecuación de Codazzi

Vexamos primeiro, a modo de exemplo, como procedemos empregando a ecuación de Codazzi. Por unha banda:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{UVU\xi} &= \langle (\nabla_U S) V - (\nabla_V S) U, U \rangle = \langle \nabla_U S V - S \nabla_U V - \nabla_V S U + S \nabla_V U, U \rangle \\ &= \langle \nabla_U (\beta V) - S \nabla_U V - \nabla_V (\alpha U) + S \nabla_V U, U \rangle \\ &= \langle (U\beta) V + \beta (\nabla_U V) - (V\alpha) U - \alpha \nabla_V U, U \rangle + \langle -\nabla_U V, S U \rangle + \langle \nabla_V U, S U \rangle \\ &= \beta \langle \nabla_U V, U \rangle - \alpha \langle \nabla_V U, U \rangle - V\alpha,\end{aligned}$$

Tendo en conta a expresión do tensor de curvatura dun espazo modelo complexo (véxase a Sección 1.2), obtense que

$$\bar{R}_{UVU} = \frac{c}{4} (\langle V, U \rangle U - \langle U, U \rangle V + \langle J V, U \rangle J U - \langle J U, U \rangle J V - 2 \langle J U, V \rangle J U) = -\frac{c}{4} V.$$

Polo tanto:

$$\bar{R}_{UVU\xi} = \langle \bar{R}_{UVU} U, \xi \rangle = -\frac{c}{4} \langle V, \xi \rangle = 0.$$

Entón, ao igualar ambas ecuacións, obtemos que:

$$\beta \langle \nabla_U V, U \rangle - \alpha \langle \nabla_V U, U \rangle - (V\alpha) = 0.$$

Analogamente, seguindo o mesmo procedemento, pódense obter as seguintes relacións:

$$\begin{aligned}\beta \langle V, \nabla_V U \rangle - \alpha \langle V, \nabla_V U \rangle + (U\beta) &= 0, \\ \frac{c}{4} - \alpha \langle A, \nabla_V U \rangle + \beta \langle A, \nabla_V U \rangle &= 0, \\ \frac{3}{4} abc - \alpha \langle U, \nabla_U A \rangle + \beta \langle U, \nabla_U A \rangle - A\alpha &= 0, \\ -\frac{1}{4} (a^2 - 2b^2) c - \alpha \langle V, \nabla_A U \rangle + \beta \langle V, \nabla_A U \rangle &= 0, \\ -\alpha \langle \nabla_A U, A \rangle + \beta \langle \nabla_A U, A \rangle - U\beta &= 0, \\ -\frac{1}{4} (2a^2 - b^2) c + \alpha \langle \nabla_A V, U \rangle - \alpha \langle \nabla_V A, U \rangle + \beta \langle \nabla_V A, U \rangle - \beta \langle \nabla_A V, U \rangle &= 0, \\ -\frac{3}{4} abc - (A\beta) &= 0, \\ V\beta &= 0.\end{aligned}$$

2.2.2. Resultados usando derivadas

Igual ca antes daremos un exemplo de como operamos neste caso. Así, podemos calcular:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_U (\langle U, J\xi \rangle) &= \langle \bar{\nabla}_U U, J\xi \rangle + \langle U, \bar{\nabla}_U J\xi \rangle \\ &= \langle \nabla_U U + \langle S U, U \rangle \xi, J\xi \rangle + \langle U, J (\bar{\nabla}_U \xi) \rangle \\ &= \langle \nabla_U U + \alpha \xi, aU + bV \rangle + \langle U, J (-S U) \rangle \\ &= a \langle \nabla_U U, U \rangle + b \langle \nabla_U U, V \rangle + \langle U, J (-\alpha U) \rangle \\ &= b \langle \nabla_U U, V \rangle - \alpha \langle U, J U \rangle = b \langle \nabla_U U, V \rangle.\end{aligned}$$

E dado que $a = \langle U, J\xi \rangle$, concluimos que:

$$Ua = \bar{\nabla}_U (\langle U, J\xi \rangle) = b\langle V, \nabla_U U \rangle.$$

Operando analogamente coas restantes posibilidades, obtéñense as seguintes relacións:

$$\begin{aligned} Va &= \bar{\nabla}_V (\langle U, J\xi \rangle) = b\langle V, \nabla_V U \rangle, \\ Aa &= \bar{\nabla}_A (\langle U, J\xi \rangle) = -b\beta + b\langle V, \nabla_A U \rangle, \\ Ub &= \bar{\nabla}_U (\langle V, J\xi \rangle) = a\langle U, \nabla_U V \rangle, \\ Vb &= \bar{\nabla}_V (\langle V, J\xi \rangle) = a\langle U, \nabla_V V \rangle, \\ Ab &= \bar{\nabla}_A (\langle V, J\xi \rangle) = a\beta + a\langle U, \nabla_A V \rangle, \\ 0 &= \bar{\nabla}_U (\langle A, J\xi \rangle) = b\alpha + a\langle U, \nabla_U A \rangle + b\langle V, \nabla_U A \rangle, \\ 0 &= \bar{\nabla}_V (\langle A, J\xi \rangle) = -a\beta + a\langle U, \nabla_V A \rangle + b\langle V, \nabla_V A \rangle, \\ 0 &= \bar{\nabla}_A (\langle A, J\xi \rangle) = a\langle U, \nabla_A A \rangle + b\langle V, \nabla_A A \rangle. \end{aligned}$$

2.2.3. Resultados usando conmutadores

Primeiro daremos unha serie de resultados que precisaremos nas nosas operacións. Estes resultados obtéñense das relacións nas Subseccións 2.2.1 e 2.2.2. Poremos un par de exemplos de como os obtemos, e a continuación mostraremos o resto de resultados obtidos. Finalmente nesta sección empregaremos as derivadas cruzadas das funcións α e β para obter máis información.

Dado que $\langle U, V \rangle = 0$, obtemos derivando respecto de U que $\langle \nabla_U U, V \rangle + \langle U, \nabla_U V \rangle = 0$, ou equivalentemente que $\langle \nabla_U U, V \rangle = -\langle U, \nabla_U V \rangle$, e así, debido aos resultados da Subsección 2.2.1, $\langle \nabla_U U, V \rangle = \frac{V\alpha}{\alpha - \beta}$. Analogamente, como $\langle U, A \rangle = 0$, obtemos derivando respecto a U e usando de novo os resultados da Subsección 2.2.1, que $\langle \nabla_U U, A \rangle = \frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)}$. Así:

$$\nabla_U U = \frac{V\alpha}{\alpha - \beta} V + \frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)} A.$$

Por outro lado obtense da Subsección 2.2.1 que $(\beta - \alpha)\langle V, \nabla_V U \rangle + (U\beta) = 0$, e polo tanto $\langle V, \nabla_V U \rangle = \frac{U\beta}{\alpha - \beta}$. Por outra banda tamén temos da Subsección 2.2.1 que $\frac{c}{4}A + (\beta - \alpha)\nabla_V U = 0$, polo que $\langle A, \nabla_V U \rangle = \frac{c}{4(\alpha - \beta)}$. Así temos que:

$$\nabla_V U = \frac{U\beta}{\alpha - \beta} V + \frac{c}{4(\alpha - \beta)} A.$$

Operamos de xeito análogo coas restantes posibilidades, o que nos permite obter as

seguintes expresións:

$$\begin{aligned}\nabla_A U &= \frac{U\beta}{\alpha - \beta} A - \frac{(a^2 - 2b^2)c}{4(\alpha - \beta)} V, \\ \nabla_U V &= -\frac{V\alpha}{\alpha - \beta} U + \left(\alpha + \frac{a\left(\frac{3abc}{4} - A\alpha\right)}{b(\alpha - \beta)} \right) A, \\ \nabla_V V &= -\frac{U\beta}{\alpha - \beta} U - \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) A, \\ \nabla_A V &= \frac{(a^2 - 2b^2)c}{4(\alpha - \beta)} U - \frac{aU\beta}{b(\alpha - \beta)} A, \\ \nabla_U A &= -\frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)} U - \left(\alpha + \frac{a\left(\frac{3abc}{4} - A\alpha\right)}{b(\alpha - \beta)} \right) V, \\ \nabla_V A &= -\frac{c}{4(\alpha - \beta)} U + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) V, \\ \nabla_A A &= -\frac{U\beta}{\alpha - \beta} U + \frac{aU\beta}{b(\alpha - \beta)} V.\end{aligned}$$

Da Subsección 2.2.2 tense que $Ua = b\langle V, \nabla_U U \rangle$, e como $\nabla_U U = \frac{V\alpha}{\alpha - \beta} V + \frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)} A$, entón $b\langle V, \nabla_U U \rangle = b\frac{V\alpha}{\alpha - \beta}$, así xa temos que:

$$Ua = b\frac{V\alpha}{\alpha - \beta}.$$

Analogamente obtemos as restantes posibilidades:

$$\begin{aligned}Va &= \frac{bU\beta}{\alpha - \beta}, & Aa &= -\frac{b(a^2 - 2b^2)c}{4(\alpha - \beta)} - b\beta, \\ Ub &= -\frac{aV\alpha}{\alpha - \beta}, & Vb &= -\frac{aU\beta}{\alpha - \beta}, \\ Ab &= \frac{a(a^2 - 2b^2)c}{4(\alpha - \beta)} + a\beta.\end{aligned}$$

Pois ben, agora que xa temos os resultados necesarios, vexamos o que obtemos usando certas relacións entre as derivadas das funcións α e β , que se obteñen a partir dos corchetes de Lie dos campos de vectores U , V e A .

$$\begin{aligned}0 = ([U, V] - UV + VU)\alpha &= \frac{(-c + 3a^2c + 4a^2 - 4\alpha\beta)A\alpha}{4(\alpha - \beta)} - \frac{a(A\alpha)^2}{b(\alpha - \beta)} - U(V\alpha) \\ &+ \left(-\frac{U\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{U\beta}{\alpha - \beta} \right) V\alpha + V(U\alpha),\end{aligned}$$

onde este se obtén da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
([U, V] - UV + VU)\alpha &= (\nabla_U V - \nabla_V U - UV + VU)\alpha \\
&= \left(-\frac{V\alpha}{\alpha - \beta}U + \left(\alpha + \frac{a\left(\frac{3abc}{4} - A\alpha\right)}{b(\alpha - \beta)}\right)A - \frac{U\beta}{\alpha - \beta}V + \frac{-c}{4(\alpha - \beta)}A\right. \\
&\quad \left.- UV + VU\right)\alpha \\
&= -\frac{(V\alpha)(U\alpha)}{\alpha - \beta} + \left(\alpha + \frac{a\left(\frac{3abc}{4} - A\alpha\right)}{b(\alpha - \beta)}\right)A\alpha - \frac{(U\beta)(V\alpha)}{\alpha - \beta} \\
&\quad + \frac{-c}{4(\alpha - \beta)}A\alpha - U(V\alpha) + V(U\alpha) \\
&= \left(-\frac{U\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{U\beta}{\alpha - \beta}\right)V\alpha - U(V\alpha) + V(U\alpha) + \alpha(A\alpha) \\
&\quad + \frac{3a^2bc}{4b(\alpha - \beta)}A\alpha - \frac{a}{b(\alpha - \beta)}(A\alpha)^2 - \frac{c}{4(\alpha - \beta)}A\alpha \\
&= \left(\frac{4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3a^2c - c}{4(\alpha - \beta)}\right)A\alpha - \frac{a}{b(\alpha - \beta)}(A\alpha)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{U\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{U\beta}{\alpha - \beta}\right)V\alpha - U(V\alpha) + V(U\alpha).
\end{aligned}$$

Facemos igual co resto de posibilidades, e obtemos as seguintes relacións:

$$\begin{aligned}
0 &= ([U, V] - UV + VU)\beta = -\frac{3abc(-c + 3a^2c + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta)}{16(\alpha - \beta)} + \frac{3a^2c}{4(\alpha - \beta)}A\alpha \\
&\quad - \frac{(U\beta)(V\alpha)}{\alpha - \beta} + V(U\beta), \\
0 &= ([U, A] - UA + AU)\alpha = A(U\alpha) + \left(\frac{3abc}{4(\alpha - \beta)} - \frac{A\alpha}{\alpha - \beta}\right)U\alpha - \frac{(A\alpha)(U\beta)}{\alpha - \beta} \\
&\quad - U(A\alpha) - \frac{(a^2c + b^2c + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta)(V\alpha)}{2(\alpha - \beta)} + \frac{a(A\alpha)(V\alpha)}{b(\alpha - \beta)}, \\
0 &= ([U, A] - UA + AU)\beta = A(U\beta) + \left(\frac{3abc}{2(\alpha - \beta)} - \frac{A\alpha}{\alpha - \beta}\right)U\beta - \frac{3(a - b)(a + b)c}{4(\alpha - \beta)}V\alpha, \\
0 &= ([V, A] - VA + AV)\alpha = A(V\alpha) - \frac{(1 + a^2 - 2b^2)c(U\alpha)}{4(\alpha - \beta)} + \frac{a(A\alpha)(U\beta)}{b(\alpha - \beta)} \\
&\quad + \frac{a(c + 4\alpha\beta - 4\beta^2)}{4b(\alpha - \beta)}V\alpha - V(A\alpha), \\
0 &= ([V, A] - VA + AV)\beta = -\frac{(1 + 7a^2 - 5b^2)c}{4(\alpha - \beta)}U\beta.
\end{aligned}$$

Da relación anterior correspondente aos campos V e A , e á curvatura principal β , deducimos que $\frac{(1+7a^2-5b^2)c(U\beta)}{4(\alpha-\beta)} = 0$. Se $1+7a^2-5b^2 \neq 0$ xa se tería que $U\beta = 0$. Supoñamos

por tanto que $1 + 7a^2 - 5b^2 = 0$ nun aberto de M . Empregando que $V\beta = 0$, calculamos a seguinte derivada:

$$V \left(-\frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) c(U\beta)}{4(\alpha - \beta)} \right) = -\frac{(14a(Va) - 10b(Vb)) cU\beta}{4(\alpha - \beta)} - \frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) cV(U\beta)}{4(\alpha - \beta)} + \frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) c(U\beta)(V\alpha)}{4(\alpha - \beta)^2}. \quad (2.1)$$

Facendo uso da relación correspondente ao conmutador dos campos de vectores U e V , e á curvatura principal β , sabemos que:

$$V(U\beta) = \frac{3abc(-c + 3a^2c + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta)}{16(\alpha - \beta)} - \frac{3a^2c}{4(\alpha - \beta)}A\alpha + \frac{(U\beta)(V\alpha)}{\alpha - \beta}.$$

E así, dado que $Va = \frac{b(U\beta)}{\alpha - \beta}$ e $Vb = -\frac{a(U\beta)}{\alpha - \beta}$, a ecuación (2.1) queda como segue:

$$\begin{aligned} V \left(-\frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) c(U\beta)}{4(\alpha - \beta)} \right) &= -\frac{(14ba + 10ab) cU\beta^2}{4(\alpha - \beta)^2} + \frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) c(U\beta)(V\alpha)}{4(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad - \frac{3abc^2(1 + 7a^2 - 5b^2)(-c + 3a^2c + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta)}{64(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad - \frac{3a^2c^2(1 + 7a^2 - 5b^2)A\alpha}{16(\alpha - \beta)^2} + \frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) c(U\beta)(V\alpha)}{4(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{6abcU\beta^2}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{3abc^2(1 + 7a^2 - 5b^2)(-c + 3a^2c + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta)}{64(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad + \frac{3a^2c^2(1 + 7a^2 - 5b^2)A\alpha}{16(\alpha - \beta)^2}. \end{aligned}$$

Pero supoñemos que $1 + 7a^2 - 5b^2 = 0$, polo que :

$$V \left(-\frac{(1 + 7a^2 - 5b^2) c(U\beta)}{4(\alpha - \beta)} \right) = \frac{6abcU\beta^2}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

E polo tanto:

$$U\beta = 0.$$

Polo que agora, se substituímos isto na lista dos resultados dos conmutadores, obtemos

que:

$$\begin{aligned}
V(U\alpha) &= -\frac{((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta))A\alpha}{4(\alpha - \beta)} + \frac{a(A\alpha)^2}{b(\alpha - \beta)} + U(V\alpha) + \frac{(U\alpha)(V\alpha)}{\alpha - \beta}, \\
A(U\alpha) &= -\frac{3abcU\alpha}{4(\alpha - \beta)} + \frac{(A\alpha)(U\alpha)}{\alpha - \beta} + U(A\alpha) + \frac{(c + 2\alpha(\alpha - \beta))V\alpha}{2(\alpha - \beta)} - \frac{a(A\alpha)(V\alpha)}{b(\alpha - \beta)}, \\
A(V\alpha) &= \frac{(1 + a^2 - 2b^2)cU\alpha}{4(\alpha - \beta)} - \frac{a(c + 4\beta(\alpha - \beta))V\alpha}{4b(\alpha - \beta)} + V(A\alpha), \\
0 &= -\frac{3abc(-c + 3a^2c + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta)}{16(\alpha - \beta)} + \frac{3a^2c}{4(\alpha - \beta)}A\alpha, \\
0 &= -\frac{3(a - b)(a + b)c}{4(\alpha - \beta)}V\alpha
\end{aligned}$$

Desta última se $V\alpha \neq 0$ temos que $a^2 - b^2 = 0$, e dicir, $a^2 = b^2$. Neste caso, a e b son constantes nun conxunto aberto, polo que $Ua = 0$, e así $\frac{b(V\alpha)}{\alpha - \beta} = 0$, o que nos leva a dicir que $V\alpha = 0$, e isto non é certo porque a supoñemos non nula. Polo tanto $V\alpha = 0$.

Agora temos que, substituíndo que $V\alpha = 0$, os nosos resultados quedan da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V(U\alpha) &= -\frac{((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta))A\alpha}{4(\alpha - \beta)} + \frac{a(A\alpha)^2}{b(\alpha - \beta)}, \\
A(U\alpha) &= -\frac{3abc(U\alpha)}{4(\alpha - \beta)} + \frac{(A\alpha)(U\alpha)}{\alpha - \beta} + U(A\alpha), \\
A(V\alpha) &= \frac{(1 + a^2 - 2b^2)c(U\alpha)}{4(\alpha - \beta)} + V(A\alpha), \\
A\alpha &= \frac{b((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta))}{4a}.
\end{aligned}$$

2.2.4. Resultados usando a ecuación de Gauss

Primeiro, recordemos algunhas relacións xa obtidas que imos empregar neste apartado. Xa tiñamos que $U\beta = 0$, $V\beta = 0$ e $V\alpha = 0$, pero ademais:

$$\begin{aligned}
Ua &= \frac{b(V\alpha)}{\alpha - \beta} = 0, & Va &= \frac{b(U\beta)}{\alpha - \beta} = 0, \\
Ub &= -\frac{a(V\alpha)}{\alpha - \beta} = 0, & Vb &= -\frac{a(U\beta)}{\alpha - \beta} = 0.
\end{aligned}$$

Tamén temos que $V(A\alpha) = 0$, xa que derivando a última expresión da subsección

anterior con respecto a V , se ten:

$$\begin{aligned} V(A\alpha) &= \nabla_V \left(\frac{b((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta))}{4a} \right) \\ &= ((Vb((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta)) + b(6a(Va)c + 4V\alpha(\alpha - \beta) \\ &\quad + 4\alpha(V\alpha - V\beta)))4a - 4Va(b((-1 + 3a^2)c + 4\alpha(\alpha - \beta)))) \frac{1}{16a^2} = 0. \end{aligned}$$

Agora procederemos empregando a ecuación de Gauss:

$$\bar{R}_{XYZW} = R_{XYZW} - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle + \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle.$$

Por unha parte empregaremos a definición do tensor de curvatura:

$$R_{XYZW} = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle,$$

e por outra parte usaremos a expresión do tensor de curvatura \bar{R} de $\bar{M}^2(c)$, que vén dado por:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{XYZW} = \langle \bar{R}_{XY} Z, W \rangle &= \frac{c}{4} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX \\ &\quad - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ, W). \end{aligned}$$

O noso propósito será probar que $U\alpha = 0$.

Calculemos $\bar{R}_{UV}AU = \langle \nabla_U \nabla_V A - \nabla_V \nabla_U A - \nabla_{[U, V]} A, U \rangle$. Para iso fagámolo por partes:

$$\begin{aligned} \nabla_U \nabla_V A &= \nabla_U \left(\frac{-c}{4(\alpha - \beta)} U + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) V \right) \\ &= \frac{4c(U\alpha - U\beta)}{16(\alpha - \beta)^2} U + \frac{-c}{4(\alpha - \beta)} \nabla_U U + \frac{(Ua)b - a(Ub)}{b^2} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) V \\ &\quad + \frac{a}{b} \left(\frac{-4c(U\alpha - U\beta)}{16(\alpha - \beta)^2} + U\beta \right) V + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) \nabla_U V \\ &= \frac{c(U\alpha)}{4(\alpha - \beta)^2} U + \left(\frac{-c}{4(\alpha - \beta)} \right) \nabla_U U + \frac{a}{b} \left(\frac{-c(U\alpha)}{4(\alpha - \beta)^2} \right) V \\ &\quad + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) \nabla_U V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_U A &= \nabla_V \left(-\frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)} U - \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} \right) V \right) \\
&= -\frac{(-3(Va)bc - 3a(Vb)c + 4V(A\alpha))4(\alpha - \beta)}{16(\alpha - \beta)^2} U \\
&\quad - \frac{(-3abc + 4A\alpha)4(V\alpha - V\beta)}{16(\alpha - \beta)^2} U - \left(\frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)} \right) \nabla_V U - (V\alpha) V \\
&\quad + \frac{\left(Va \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right) + a \left(\frac{3(Va)bc + 3a(Vb)c}{4} - V(A\alpha) \right) \right) b(\alpha - \beta)}{b^2(\alpha - \beta)^2} V \\
&\quad - \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right) ((Vb)(\alpha - \beta) + b(\nabla_V \alpha - \nabla_V \beta))}{b^2(\alpha - \beta)^2} V \\
&\quad - \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} \right) \nabla_V V \\
&= -\left(\frac{-3abc + 4A\alpha}{4(\alpha - \beta)} \right) \nabla_V U - \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} \right) \nabla_V V, \\
[U, V] &= \nabla_U V - \nabla_V U = -\frac{V\alpha}{\alpha - \beta} U + \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} \right) A - \frac{V\beta}{\alpha - \beta} V - \frac{c}{4(\alpha - \beta)} A \\
&= \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} - \frac{c}{4(\alpha - \beta)} \right) A.
\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
\nabla_{[U, V]} A &= \nabla \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} - \frac{c}{4(\alpha - \beta)} \right) A = \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} - \frac{c}{4(\alpha - \beta)} \right) \nabla_A A \\
&= \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} - \frac{c}{4(\alpha - \beta)} \right) \left(-\frac{U\beta}{\alpha - \beta} U + \frac{aU\beta}{b(\alpha - \beta)} V \right) = 0,
\end{aligned}$$

polo que

$$\begin{aligned}
R_{UV, AU} &= \langle \nabla_U \nabla_V A - \nabla_V \nabla_U A - \nabla_{[U, V]} A, U \rangle \\
&= \frac{c(U\alpha)}{4(\alpha - \beta)^2} + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) \langle \nabla_U V, U \rangle + \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} \right) \langle \nabla_V V, U \rangle \\
&= \frac{c}{4(\alpha - \beta)^2} U\alpha + \frac{a}{b} \left(\frac{c}{4(\alpha - \beta)} + \beta \right) \left(\frac{-V\alpha}{\alpha - \beta} \right) + \left(\alpha + \frac{a \left(\frac{3abc}{4} - A\alpha \right)}{b(\alpha - \beta)} \right) \left(\frac{-U\beta}{\alpha - \beta} \right) \\
&= \frac{c}{4(\alpha - \beta)^2} U\alpha.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{UV AU} &= \frac{c}{4(\alpha - \beta)^2} U\alpha - \langle SV, A \rangle \langle SU, U \rangle + \langle SU, A \rangle \langle SV, U \rangle \\ &= \frac{c}{4(\alpha - \beta)^2} U\alpha.\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\bar{R}_{UV AU} = \langle \bar{R}_{UV} A, U \rangle = \langle -\frac{c}{4} \xi, U \rangle = 0.$$

E igualando ambas ecuacións:

$$\frac{c}{4(\alpha - \beta)^2} U\alpha = 0,$$

de onde

$$U\alpha = 0,$$

como queríamos.

A ecuación de Gauss aplicada a outros campos de vectores calcularíase de maneira análoga, aínda que non nos proporciona información a maiores.

Tendo en conta os resultados das Subseccións 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4, obtemos a Proposición 2.2.

2.3. Propiedades xeométricas da hipersuperficie

Tras todos estes cálculos previos, xa temos as ferramentas necesarias para estudar certas propiedades xeométricas da hipersuperficie M . O que faremos será descompoñer a nosa hipersuperficie en subvariedades dunha dimensión inferior e posteriormente unilas dunha determinada forma ao longo dunha curva que sexa ortogonal a elas en cada punto. Esta curva será unha curva integral de A , e as subvariedades veñen dadas por unha distribución integrable na hipersuperficie. Analicemos as súas propiedades.

2.3.1. Curvas integrais de A

Estudemos como é a curva a través da cal uniremos as subvariedades de M .

Podemos considerar unha curva integral γ de A , isto é, $\dot{\gamma}(t) = A_{\gamma(t)}$ para todo t no intervalo de definición de γ . Parte da dificultade da proba do noso Teorema Principal é ver as propiedades desta curva. En canto ao obxectivo desta sección é probar a seguinte proposición.

Proposición 2.3. *Sexa γ unha curva integral de A pasando por un punto $p \in M$. Sexa $Q_p = \exp_p(\mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p)$, onde \exp_p denota a aplicación exponencial Riemanniana de $\bar{M}^2(c)$ en p . Entón, Q_p é unha subvariedade totalmente real (é dicir, $\langle JTQ_p, TQ_p \rangle = 0$) e totalmente xeodésica de $\bar{M}^2(c)$, e γ está contida en Q_p .*

Xa vimos que $\langle JA, \xi \rangle = 0$, e polo tanto que $\mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p$ é un subespazo totalmente real de $T_p\bar{M}^2(c)$. Entón, Q_p é unha subvariedade totalmente real e totalmente xeodésica de $\bar{M}^2(c)$.

O que nos queda por probar é que γ está contida en Q_p . Para probalo farémolo por partes.

Recordemos que :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_A A &= \nabla_A A + \langle SA, A \rangle \xi = \beta \xi, \\ \bar{\nabla}_A \xi &= -SA = -\beta A.\end{aligned}$$

Lema 2.4. *Sexa $\bar{\nabla}^{(k)}$ a k -ésima derivada covariante. Entón para cada $k \geq 0$, existen funcións reais con valores reais f_k e g_k tales que:*

$$\left(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \right) (t) = f_k(t) A_{\gamma(t)} + g_k(t) \xi_{\gamma(t)}.$$

Demostración. Probarémolo por indución en k .

Para $k = 0$, simplemente temos que $\dot{\gamma}(t) = A_{\gamma(t)}$, polo que é suficiente tomar $f_0 = 1$ e $g_0 = 0$.

Supoñamos certo o enunciado para k , é dicir, $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} = f_k A + g_k \xi$, e probémolo para o caso $k + 1$:

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k+1)} \dot{\gamma} \right) (t) &= \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} (f_k A + g_k \xi) = f'_k(t) A_{\gamma(t)} + f_k(t) \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} A + g'_k(t) \xi_{\gamma(t)} + g_k(t) \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \xi \\ &= (f'_k(t) - \beta(\gamma(t)) g_k(t)) A_{\gamma(t)} + (g'_k(t) + \beta(\gamma(t)) f_k(t)) \xi_{\gamma(t)},\end{aligned}$$

co que chega con tomar $f_{k+1}(t) = f'_k(t) - \beta(\gamma(t)) g_k(t)$ e $g_{k+1}(t) = g'_k(t) + \beta(\gamma(t)) f_k(t)$. \square

Corolario 2.5. *Para cada $k \geq 0$ temos que:*

$$\langle J\dot{\gamma}, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \rangle = 0.$$

Demostración. Séguese facilmente usando o lema anterior e que $\text{span}\{A, \xi\}$ é totalmente real. \square

Tomemos agora o levantamento da nosa curva, $\dot{\gamma}^L$, á esfera $S^5(r)$ se $c > 0$ ou ao espazo de anti de Sitter AdS^5 se $c < 0$; recordemos que $c = 4\varepsilon/r^2$ onde $\varepsilon = 1$ se $c > 0$, ou $\varepsilon = -1$ se $c < 0$. Consideraremos tal levantamento como un vector no espazo (pseudo-)Euclidiano.

Proposición 2.6. *Sexa $D^{(n)}$ a n -ésima derivada covariante en \mathbb{C}^3 . Entón, para cada $n \geq 0$, existen funcións reais con valores reais $a_{n,k}$, con $0 \leq k \leq n$, e f_n tales que:*

$$D_{\dot{\gamma}^L}^{(n)} \dot{\gamma}^L(t) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}(t) \left(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \right)^L(t) + f_n(t) N_{\gamma(t)^L},$$

onde $N_{\gamma(t)^L} = \frac{1}{r} \gamma(t)$ denota o vector normal unitario en $\gamma(t)^L$ a $S^5(r)$ se $c > 0$ ou a $AdS^5(r)$ se $c < 0$.

Demostración. Recordemos que (véxase Sección 1.2):

$$D_{XL}Y^L = (\bar{\nabla}_X Y)^L - \frac{\varepsilon}{r} \langle JX, Y \rangle iN - \frac{\varepsilon}{r} \langle X, Y \rangle N, \quad (2.2)$$

onde $\varepsilon = 1$, X e Y son campos tanxentes a $S^5(r)$ e N é o campo unitario normal a $S^5(r)$ dado por $N_z = \frac{1}{r}z$ se estamos en $\mathbb{C}P^2$, ou $\varepsilon = -1$, X e Y son campos tanxentes a $AdS^5(r)$ e N é o campo unitario normal a $AdS^5(r)$ dado por $N_z = \frac{1}{r}z$ se estamos en $\mathbb{C}H^2$.

Podemos proceder agora coa proba mediante indución en n . O caso $n = 0$ é trivial. Se $n = 1$, entón:

$$D_{\dot{\gamma}^L}^1 \dot{\gamma}^L = (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^L + \frac{\sqrt{c}}{2} \langle J\dot{\gamma}^L, \dot{\gamma}^L \rangle V' - \frac{\sqrt{c}}{2} N = (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^L - \frac{\sqrt{c}}{2} N,$$

onde $a_{1,0} = 0$, $a_{1,1} = 1$ e $f_1 = -\frac{\sqrt{c}}{2}$.

Supoñamos certo o enunciado para o caso n , e probémolo para o caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} D_{\dot{\gamma}^L}^{(n+1)} \dot{\gamma}^L &= D_{\dot{\gamma}^L} \left(\sum_{k=0}^n a_{n,k} (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma})^L + f_n N \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(a'_{n,k} (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma})^L + a_{n,k} D_{\dot{\gamma}^L} (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma})^L \right) + f'_n N + f_n D_{\dot{\gamma}^L} N. \end{aligned}$$

Usando (2.2) e o Corolario 2.5, obtemos que:

$$\begin{aligned} D_{\dot{\gamma}^L}^{(n+1)} \dot{\gamma}^L &= \sum_{k=0}^n a'_{n,k} (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma})^L \\ &\quad + \sum_{k=0}^n a_{n,k} \left((\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k+1)} \dot{\gamma})^L - \frac{\varepsilon}{r} \langle J\dot{\gamma}, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \rangle V' - \frac{\varepsilon}{r} \langle \dot{\gamma}, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \rangle N \right) + f'_n N + f_n \frac{1}{r} \dot{\gamma}^L \\ &= \left(a'_{n,0} + f_n \frac{1}{r} \right) \dot{\gamma}^L + \sum_{k=1}^n (a'_{n,k} + a_{n,k-1}) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma})^L \\ &\quad + a_{n,n} (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(n+1)} \dot{\gamma})^L + \left(f'_n - \frac{\varepsilon}{r} \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle \dot{\gamma}, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \rangle \right) N \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k} (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma})^L + f_{n+1} N, \end{aligned}$$

onde $a_{n+1,0} = (a'_{n,0} + f_n \frac{1}{r})$, $a_{n+1,k} = (a'_{n,k} + a_{n,k-1})$ para $1 \leq k \leq n$, $a_{n+1,n+1} = a_{n,n}$ e $f_{n+1} = (f'_n - \frac{\varepsilon}{r} \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle \dot{\gamma}, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^{(k)} \dot{\gamma} \rangle)$. \square

Grazas a esta proposición, xa podemos rematar a proba da Proposición 2.3.

Demostración da Proposición 2.3. Sexa $z \in H_\varepsilon^5(r)$ (onde $H_\varepsilon^5(r)$ denota $S^5(r)$ se $\varepsilon = 1$ e $AdS^5(r)$ se $\varepsilon = -1$) un punto tal que $\pi(z) = p$, e denotemos por γ^L á curva en $H_\varepsilon^5(r)$ tal que $\gamma^L(0) = z$ e $\frac{d\gamma^L}{dt}(t) = \dot{\gamma}^L(t)$. Pola Proposición 2.6, todas as derivadas de γ^L están contidas no subespazo afín $z + \text{span}\{A_p^L, \xi_p^L, N_p\}$ de \mathbb{C}^3 . Se asumimos que γ é analítica, podemos concluír que γ^L está contida neste subespazo afín. Ademais, γ deberá estar contida en $\pi(z + \text{span}\{A_p^L, \xi_p^L, N_p\})$. Esta subvariedade é precisamente $Q_p = \exp_p(\mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p)$, como queríamos demostrar. \square

2.3.2. Distribución integrable

A hipersuperficie M resulta estar foliada por certas superficies. Nesta sección estudamos as súas propiedades.

Consideremos a distribución \mathfrak{D} xerada polos vectores U e V . Grazas ás nosas contas veremos que é integrable e que as súas subvariedades integrais desempeñarán un importante papel na proba do noso Teorema Principal.

Proposición 2.7. *A distribución $p \rightarrow \mathfrak{D}_p = \text{span}\{U_p, V_p\}$ de M é integrable, e as súas superficies integrais, verifican as seguintes propiedades:*

- (i) *Son chás (de feito U e V son paralelos) e subvariedades totalmente reais de $\bar{M}^2(c)$.*
- (ii) *O seu fibrado normal é chan, de feito: $\bar{\nabla}^\perp A = \bar{\nabla}^\perp \xi = 0$, onde $\bar{\nabla}^\perp$ é a conexión normal das follas.*
- (iii) *Teñen segunda forma fundamental paralela: $\bar{\nabla}^\perp II = 0$.*

Demostración. Sabemos pola Proposición 2.2

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_U U &= -\frac{b(c - 4\alpha(\alpha - \beta))}{4a(\alpha - \beta)}A + \alpha\xi, & \bar{\nabla}_V V &= -\frac{a(c + 4(\alpha - \beta)\beta)}{4b(\alpha - \beta)}A + \beta\xi, \\ \bar{\nabla}_U V &= \frac{c}{4(\alpha - \beta)}A, & \bar{\nabla}_V U &= \frac{c}{4(\alpha - \beta)}A.\end{aligned}$$

Sexa F unha subvariedade integral de \mathfrak{D} . Temos que

$$\bar{\nabla}_U U = \bar{\nabla}_U V = \bar{\nabla}_V U = \bar{\nabla}_V V = 0,$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexión de Levi-Civita de F . Entón

$$[U, V] = 0.$$

Así, grazas ao Teorema de Frobenius, xa temos que \mathfrak{D} é integrable.

Probemos agora as propiedades das subvariedades integrais de \mathfrak{D} :

- (i) Sexa F unha subvariedade integral desta distribución, e denotemos por $\bar{\nabla}$ a súa conexión de Levi-Civita. Como $\bar{\nabla}_U V = 0$ e $\bar{\nabla}_V U = 0$ temos que U e V son paralelos con respecto a $\bar{\nabla}$.

Ademais, como $[U, V] = 0$ temos que existe (E, φ) con $\varphi = (x_1, x_2)$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_1} = U$ e $\frac{\partial}{\partial x_2} = V$, polo que F é localmente isométrica a \mathbb{R}^n , é dicir, F é chá como variedade de Riemann de dimensión 2.

(ii) Consideremos $\nu_p F$ o espazo normal a F en $p \in F$, que está xerado por A_p e ξ_p .

Denotemos por $\bar{\nabla}^\perp$ á conexión normal de F como subvariedade de $\bar{M}^2(c)$. Dado que $\bar{\nabla}_U \xi = -SU = -\alpha U$ e $\bar{\nabla}_V \xi = -SV = -\beta V$, séguese que $\bar{\nabla}_U^\perp \xi = \bar{\nabla}_V^\perp \xi = 0$. Por outra banda, as fórmulas para $\bar{\nabla}_U A$ e $\bar{\nabla}_V A$ na Proposición 2.2 implican que $\bar{\nabla}_U^\perp A = \bar{\nabla}_V^\perp A = 0$. E polo tanto, o fibrado normal de F é chan, e de feito, A e ξ son campos de vectores normais paralelos ao longo de F .

(iii) Temos que:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U^\perp II)(U, U) &= \bar{\nabla}_U^\perp II(U, U) - II(\bar{\nabla}_U U, U) - II(U, \bar{\nabla}_U U) = \bar{\nabla}_U^\perp (\bar{\nabla}_U U)^\perp = 0, \\ (\bar{\nabla}_U^\perp II)(U, V) &= \bar{\nabla}_U^\perp II(U, V) - II(\bar{\nabla}_U U, V) - II(U, \bar{\nabla}_U V) = \bar{\nabla}_U^\perp (\bar{\nabla}_U V)^\perp = 0, \\ (\bar{\nabla}_U^\perp II)(V, V) &= \bar{\nabla}_U^\perp II(V, V) - II(\bar{\nabla}_U V, V) - II(V, \bar{\nabla}_U V) = \bar{\nabla}_U^\perp (\bar{\nabla}_U V)^\perp = 0. \end{aligned}$$

Análogo para $\bar{\nabla}_V^\perp II$.

Temos que $\bar{\nabla}^\perp II = 0$, polo que a segunda forma fundamental de F é paralela. \square

2.3.3. Foliación de M

Temos polo tanto que a hipersuperficie real M é foliada ortogonalmente polas subvariedades integrais da distribución de dimensión dous $\mathfrak{D} = \text{span}\{U, V\}$, e as curvas integrais do campo de vectores A . Podemos dicir así algo máis sobre as curvas integrais de A .

A partir de agora utilizaremos o seguinte convenio: $a = \cos \phi$ e $b = \sin \phi$ onde ϕ é unha función diferenciable en M e con valores en $(0, \pi/2)$.

Lema 2.8. *Sexa γ unha curva integral de A . A curva γ está determinada polas condicións iniciais $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = A_p$ e, de feito, γ é unha curva de velocidade unitaria en $Q_p = \exp_p(\mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p)$ con curvatura $\bar{\beta}$ respecto a ξ , onde $\bar{\beta}$ é unha función determinada pola seguinte ecuación diferencial:*

$$\begin{aligned} \bar{\phi}' &= \bar{\beta} + \frac{c(1 - 3\text{sen}^2 \bar{\phi})}{4(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}, \\ \bar{\alpha}' &= \frac{1}{2} \left(c(2 - 3\text{sen}^2 \bar{\phi}) + 4\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \right) \tan \bar{\phi}, \\ \bar{\beta}' &= -\frac{3c}{8} \text{sen} 2\bar{\phi}. \end{aligned}$$

Demostración. Da ecuación de Gauss, e grazas aos nosos cálculos na Proposición 2.2, temos que $\bar{\nabla}_A A = \beta \xi$. Así a curvatura de γ con respecto da orientación dada por $\{A, \xi\}$ é $K[\gamma](t) = \langle \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}, \xi_{\gamma(t)} \rangle = (\beta \circ \gamma)(t)$. Séguese tamén da Proposición 2.2 que as funcións ϕ , α e β son constantes ao longo das follas da distribución \mathfrak{D} . Polo tanto, as ecuacións dadas

na segunda parte de Proposición 2.2 trasládanse á ecuación diferencial dada no enunciado do Lema 2.8. En particular, a curvatura de γ vén dada pola función $\bar{\beta} = (\beta \circ \gamma)(t)$ baixo a condición inicial $\bar{\beta}(0) = \beta(\gamma(0)) = \beta(p)$. Como γ está contida en Q_p , e Q_p é unha variedade de Riemann de dimensión 2 completa de curvatura seccional constante pola Proposición 2.3, entón γ está determinada pola súa curvatura, un punto inicial, un vector tanxente inicial e a elección dunha orientación dada neste caso por ξ . Polo tanto, o Lema 2.8 séguese deste razoamento. \square

Estudemos agora, algunhas propiedades máis de subvariedades integrais da distribución integrable \mathfrak{D} .

Lema 2.9. *Sexa $p \in M$, $Q_p = \exp_p(\mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p)$, e γ unha curva integral de A en p . Entón, Q_p interseca as subvariedades integrais de \mathfrak{D} ao longo de $\gamma(t)$ perpendicularmente.*

Demostración. Pola Proposición 2.3, γ está contida en Q_p . Claramente, $A_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$ é tanxente a Q_p ao longo de γ . Mostremos agora que $\xi_{\gamma(t)}$ é tanxente a Q_p . Sexa η un campo de vectores ao longo de γ tal que $\eta_p \in \nu_p Q_p$ e que ademais é paralelo con respecto da conexión normal $\bar{\nabla}^\perp$ de Q_p . Entón, como Q_p é totalmente xeodésico, a fórmula de Weingarten implica que $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\eta = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}^\perp\eta = 0$. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\langle \xi, \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\eta \rangle = -\beta\langle \dot{\gamma}, \eta \rangle = 0,$$

e como $\langle \xi_{\gamma(0)}, \eta_{\gamma(0)} \rangle = 0$, e η é arbitrario, temos que $\xi_{\gamma(t)}$ é tanxente a Q_p , para todo t .

Todo isto implica que $T_{\gamma(t)}Q_p = \text{span}\{A_{\gamma(t)}, \xi_{\gamma(t)}\}$. Ademais, por construción temos que $Q_p = Q_{\gamma(t)}$ para todo t , e en particular, Q_p é perpendicular ás follas de \mathfrak{D} ao longo de $\gamma(t)$ como queríamos demostrar. \square

Temos agora as ferramentas precisas para levar a cabo o resultado clave para a proba do noso Teorema Principal:

Proposición 2.10. *Temos que:*

- (i) *As subvariedades integrais de \mathfrak{D} son subvariedades equidistantes de $\bar{M}^2(c)$.*
- (ii) *Sexa F unha subvariedade integral da distribución \mathfrak{D} , e sexa F_t unha subvariedade integral de \mathfrak{D} cuxa distancia a F é un número suficientemente pequeno t . Entón, nun entorno \mathcal{U} dun punto de F existe un campo de vectores normal paralelo η_t tal que*

$$F_t = \{\exp_p(\eta_t(p)) : p \in \mathcal{U}\}.$$

Demostración. Sexa F unha folla da distribución \mathfrak{D} . Denotaremos por $\bar{\nabla}^\perp$ á conexión normal de F . Recordemos que a Proposición 2.7 dinos que $\bar{\nabla}^\perp$ é chá, de feito, $\{A, \xi\}$ constitúe unha base paralela do fibrado normal νF de F como subvariedade de $\bar{M}^2(c)$.

Sexa $p \in F$ e sexa γ_p unha curva integral de A ao longo de p con $\gamma(0) = p$. Denotamos por F_t a variedade integral de \mathfrak{D} pasando por $\gamma_p(t)$. Como A é un campo de vectores

xeodésico en M debido á Proposición 2.2, γ_p é unha xeodésica de velocidade unitaria en M . Como γ_p é perpendicular a F e F_t , $d_M(F, F_t) = \mathcal{L}(\gamma_p|_{[0,t]})$, onde d_M denota a distancia Riemanniana de M , e $\mathcal{L}(\cdot)$ é a lonxitude da curva. O punto p é arbitrario, e por iso as subvariedades integrais de \mathfrak{D} son equidistantes en M .

Para un punto $p \in F$, consideremos a xeodésica σ_p de $\bar{M}^2(c)$ que minimiza a distancia entre $\sigma_p(0) = p$ e $\sigma_p(1) = \gamma_p(t)$. Como $Q_p = \exp_p(\mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p)$ é totalmente xeodésico, γ_p está contida en Q_p (ver Proposición 2.3), e t é suficientemente pequeno, σ_p está contida en Q_p . Definimos $\eta_t(p) = \dot{\sigma}_p(0) \in \mathbb{R}A_p \oplus \mathbb{R}\xi_p$. Como Q_p interseca a F e F_t ortogonalmente polo Lema 2.9, tamén o fai σ_p e así concluimos que σ_p é unha xeodésica minimizante de $\bar{M}^2(c)$ entre esas dúas subvariedades.

Agora sexa $q \in F$ outro punto. Polo argumento previo temos que a curva γ_q , se está definida para tempo t , realiza a distancia en M entre F e F_t . Agora, o fibrado normal de F en $\bar{M}^2(c)$ é chan respecto da conexión normal $\bar{\nabla}^\perp$, e A e ξ son paralelos. Logo, Q_q é obtido polo transportado paralelo de Q_p a q ao longo de F . Por outro lado, $\dot{\gamma}_q(0) = A_q$, e A_q é o transportado paralelo de A_p ao longo de F a q con respecto da conexión normal $\bar{\nabla}^\perp$, mentres que a curvatura de γ_q é dada pola mesma función que a de γ_p polo Lema 2.8. Hai así unha única isometría g de $\bar{M}^2(c)$ tal que $g(p) = q$, $g_{*p}(A_p) = A_q$, e $g_{*p}(\xi_p) = \xi_q$, onde g_* denota a diferencial de g (notar que $\{A, \xi\}$ é totalmente real). Entón a xeodésica σ_q que minimiza á distancia entre q e $\gamma_q(t)$ satisfai que $\dot{\sigma}_q(0) = g_{*p}(\dot{\sigma}_p(0))$, e como o transportado paralelo é unha isometría, $\dot{\sigma}_q(0)$ é precisamente o transportado paralelo de $\dot{\sigma}_p(0)$ a q . En consecuencia, η_t é un campo de vectores normal ao longo de F onde estea definido, e nós podemos concluir que $F_t = \{\exp_p(\eta_t(p)) : p \in F\}$ (polo menos localmente). Isto proba a nosa proposición. \square

2.4. Prova do teorema principal

Sexa M unha hipersuperficie real de $\mathbb{C}P^2(c)$ analítica e con dúas curvaturas principais distintas. Asumamos ademais que M é non Hopf en todo punto, o cal significa que $a, b \neq 0$ ao longo de M , segundo a nosa notación. Asumamos tamén a notación establecida neste capítulo. Xa vimos que M está foliada ortogonalmente polas subvariedades integrais dunha distribución integrable de dimensión dous, $\mathfrak{D} = \text{span}\{U, V\}$, e as curvas integrais do campo de vectores A .

As subvariedades integrais de \mathfrak{D} son subvariedades totalmente reais de dimensión 2 chás con segunda forma fundamental paralela e fibrado normal chan en $\bar{M}^2(c)$. En particular, son superficies con curvatura media paralela en $\bar{M}^2(c)$. As subvariedades con curvatura media paralela son un tema activo de estudo no que se traballa hoxe en día como unha xeneralización das subvariedades minimais; ver [9], por exemplo. Séguese dos traballos de Ogata [22], Kenmotsu e Zhou [14] e Hirakawa [11], que toda superficie chá de $\mathbb{C}P^2$ totalmente real con curvatura media paralela é un aberto dun toro chan en $\mathbb{C}P^2$, isto é, o cociente pola aplicación de Hopf dun produto adecuado de tres circunferencias en S^5 . Máis especificamente, se F é unha subvariedade integral da distribución \mathfrak{D} , entón, baixo a congruencia holomorfa en $\mathbb{C}P^2$, F é un aberto de $\pi(\tilde{F})$, o cociente baixo a aplicación

de Hopf de $\tilde{F} = S^1(r_1) \times S^1(r_2) \times S^1(r_3) \subset S^5(r)$, con $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r^2$, para números reais non negativos r_1, r_2, r_3 e r . Ademais, a subvariedade \tilde{F} é a órbita a través do punto (r_1, r_2, r_3) da acción isométrica do grupo $H = U(1) \times U(1) \times U(1)$ en \mathbb{C}^3 .

Unha acción isométrica nunha variedade de Riemann dise polar se existe unha subvariedade que interseca todas as orbitas da acción ortogonalmente. Esta subvariedade chámase unha sección. As accións polares nos espazos proxectivos complexos foron clasificadas por Podestá e Thorbergsson [25]. Eles amosaron que unha acción polar en $\mathbb{C}P^n$ é o cociente pola aplicación de Hopf da representación de isotropía dun espazo simétrico Hermitiano. A variedade produto $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ é un espazo simétrico Hermitiano cuxa representación isotropía é equivalente á acción de H en \mathbb{C}^3 . Ademais, a acción de H en \mathbb{C}^3 é polar, e o seu cociente pola aplicación de Hopf induce unha acción polar en $\mathbb{C}P^2$. A sección desta acción é un plano proxectivo real totalmente xeodésico $\mathbb{R}P^2$.

Un feito ben coñecido sobre accións polares é que os campos de vectores equivariantes son paralelos [1, Corolario 3.2.5]. Máis precisamente, sexa $H \cdot o$ unha órbita principal da acción de H , e sexa $\eta_o \in \nu_p(H \cdot o)$. Entón, η_o pode ser estendido a un campo de vectores normal η ao longo de $H \cdot o$ como segue: $\eta_{h(o)} = h_*\eta_o$, $h \in H$. O feito de que $H \cdot o$ sexa unha órbita principal implica que a definición non depende de $h \in H$. O campo de vectores η que se obtén chámase equivariante. Se ∇^\perp denota agora á conexión normal de $H \cdot o$, entón $\nabla^\perp \eta = 0$. Así, é claro que os campos de vectores equivariantes ao longo de $H \cdot o$ están en correspondencia un a un cos campos de vectores normais paralelos ∇^\perp ao longo de $H \cdot o$. Se $q \in \mathbb{C}P^2$, entón existe unha xeodésica minimizante σ dende o ata $H \cdot q$ a cal interseca a ambas órbitas $H \cdot o$ e $H \cdot q$ ortogonalmente. Podemos asumir que $\sigma(0) = o$, $\sigma(1) = q$, definir $\eta_o = \dot{\sigma}(0)$, e estender η_o a un campo de vectores normal paralelo η ao longo de $H \cdot o$. Usando que η é tamén equivariante, é sinxelo obter que

$$H \cdot q = \{h(\exp_o(\eta_o)) : h \in H\} = \{\exp_{h(o)}(\eta_{h(o)}) : h \in H\} = \{\exp_p(\eta_p) : p \in H \cdot o\}.$$

Temos así que unha subvariedade integrable F da distribución \mathfrak{D} é, salvo congruencia holomorfa, unha parte aberta dunha órbita principal da acción de H en $\mathbb{C}P^2$. Dacordo coa Proposición 2.10 o resto das subvariedades integrais suficientemente próximas de \mathfrak{D} son obtidas localmente como $\{\exp_p(\eta_t(p)) : p \in U\}$, onde U é un subconxunto aberto de F e η_t é un campo de vectores normal paralelo axeitado ao longo de $U \subset F$. Polo tanto, todas as subvariedades integrais de \mathfrak{D} son partes abertas de órbitas principais da acción de H . Se γ é unha curva integral do campo de vectores A , entón está claro que nun entorno do punto o , a hipersuperficie M é obtida como $M = H \cdot \gamma$, como se establece no Teorema Principal.

Observación 2.11. Expliquemos por que, na parte de clasificación do noso Teorema Principal, asumimos que a hipersuperficie real M é non Hopf en todo punto. Por un lado, se fose Hopf (en todo punto), arguméntase de forma similar, mostrando que M debería ter curvaturas principais constantes, dando lugar a exemplos ben coñecidos. Por outro lado, debemos considerar o caso para o cal M é Hopf só nun subconxunto de M de medida nula. Nesta situación, os campos de vectores V e A non estarían ben definidos nos puntos onde M é Hopf. Non obstante, en calquera caso sabemos que hai un subconxunto aberto e denso de $M \subset \mathbb{C}P^2$ cuxa estrutura está definida no Teorema Principal.

Observación 2.12. Na proba do Teorema Principal referímonos aos artigos [11], [14] e [22] para xustificar que as subvariedades integrais de \mathfrak{D} son abertos de toros chans. A mesma conclusión séguese do traballo de Dillen, Li, Vrancken e Wang [7], onde as subvariedades totalmente reais con segunda forma fundamental paralela en $\mathbb{C}P^n$ foron clasificadas. O estudo de subvariedades con segunda forma fundamental paralela en espazos simétricos (en particular, en espazos modelo complexos) foi iniciada por Naitoh nunha serie de artigos [17], [18], [19] e [20]. En cambio, como se sinala en [7], Naitoh ocúpase sobre todo da clasificación de subvariedades completas irreducibles con segunda forma fundamental paralela, co que hai pouca información sobre a clasificación explícita dos exemplos reducibles e, en particular, dos exemplos chans.

Observación 2.13. Aínda que o noso Teorema Principal nos proporciona novos exemplos de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais en $\mathbb{C}H^2$, a clasificación realizouse só para $\mathbb{C}P^2$ e non para $\mathbb{C}H^2$. A razón para isto é que en $\mathbb{C}H^2$ hai unha certa diversidade de subvariedades con segunda forma fundamental paralela. Como mencionamos na observación anterior, a clasificación proporcionada por Naitoh en [18] non menciona os mergullos explícitos de subvariedades chás con segunda forma fundamental paralela en $\mathbb{C}H^2$. Dacordo con Hirakawa, calquera superficie chá totalmente real de $\mathbb{C}H^2$ con curvatura media paralela é un aberto dun plano, un cilindro ou un toro en $\mathbb{C}H^2$. Non obstante, estamos investigando a posibilidade de que eses exemplos poidan ser obtidos de accións polares sobre $\mathbb{C}H^2$, o cal é preciso para xeneralizar a demostración da nosa clasificación ao caso hiperbólico. Reciprocamente, sabemos que todas as órbitas da acción polar descrita en [3, Main Theorem (ii)–(d)] son superficies chás totalmente reais con segunda forma fundamental paralela. Isto apunta á existencia de máis exemplos de hipersuperficies reais con dúas curvaturas principais no plano hiperbólico complexo.

Bibliografía

- [1] J. Berndt, S. Console, C. Olmos: *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics **434**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
- [2] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos: Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic spaces, *Ann. Global Anal Geom.* **43** (2013), 99–106.
- [3] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos: Polar actions on the complex hyperbolic plane, *J. London Math. Soc.* **74** (2006), 778–798.
- [4] T. E. Cecil, P. J. Ryan: Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), no. 2, 481–499.
- [5] J. C. Díaz-Ramos: Proper isometric actions, arXiv:0811.0547v1 [math.DG].
- [6] J. C. Díaz-Ramos, A. Kollross: Polar actions with a fixed point, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 20–25.
- [7] F. Dillen, H. Li, L. Vrancken, X. Wang: Lagrangian submanifolds in complex projective space with parallel second fundamental form, *Pacific J. Math.* **255** (2012), no. 1, 79–115.
- [8] M. Domínguez-Vázquez: *Hipersuperficies con curvaturas principales constantes nos espazos proxectivo e hiperbólico complexos*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología USC **118**, DEA (2010), ISBN:978–84–89390–35–5
- [9] D. Fetcu: Surfaces with parallel mean curvature vector in complex space forms, *J. Differential Geom.* **91** (2012), 215–232.
- [10] A. Gray: *Tubes*, Addison–Wesley Publishing Company, 1990.
- [11] S. Hirakawa: Constant Gaussian curvature surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, *Geom. Dedicata* **118** (2006), 229–244.
- [12] H. Jacobowitz: Real hypersurfaces and complex analysis, *Notices Amer. Math. Soc.* **42** (1995), no. 12, 1480–1488.
- [13] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **15**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

- [14] K. Kenmotsu, D. Zhou: The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, *Amer. J. Math.* **122** (2000), no. 2, 295–317.
- [15] S. B. Myers, N. E. Steenrod: The group of isometries of a Riemannian manifold, *Ann. of Math. (2)* **40** (1939), no. 2, 400–416.
- [16] S. Montiel: Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 515–535.
- [17] H. Naitoh: Parallel submanifolds of complex space forms I, *Nagoya Math. J.* **90** (1983), 85–117.
- [18] H. Naitoh: Parallel submanifolds of complex space forms II, *Nagoya Math. J.* **91** (1983), 119–149.
- [19] H. Naitoh: Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces, *Tsukuba J. Math.* **10** (1986), 215–242.
- [20] H. Naitoh, M. Takeuchi: Totally real submanifolds and symmetric bounded domains, *Osaka J. Math.* **19** (1982), 717–731.
- [21] R. Niebergall, P. J. Ryan: Real Hypersurfaces in Complex Space Forms, *Tight and Taut Submanifolds*, MSRI Publications, Volume **32**, 1997.
- [22] T. Ogata: Surfaces with parallel mean curvature vector in $P^2(\mathbb{C})$, *Kodai Math. J.* **18** (1995), 397–407.
- [23] B. O’Neill: The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.* **13** (1966), 459–469.
- [24] B. O’Neill: *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [25] F. Podestà, G. Thorbergsson: Polar actions on rank-one symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **53** (1999), no. 1, 131–175.
- [26] R. Takagi: Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures, *J. Math. Soc. Japan* **27**, (1975), 43–53.
- [27] Y. Tashiro, S. I. Tachibana: On Fubinian and C-Fubinian manifolds, *Kodai Math. Sem. Rep.* **15** (1963), 176–183.
- [28] G. Thorbergsson: Singular Riemannian foliations and isoparametric submanifolds, *Milan J. Math.* **78** (2010), no. 1, 355–370.
- [29] K. Yano, M. Kon: *Structures on manifolds*, Series in Pure Math. **3**, World Scientific, Singapore, 1984.