Carlos Franco Sanmartín

TEOREMA DO ÍNDICE PARA OPERADORES DE DIRAC

135a
2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

CARLOS FRANCO SANMARTÍN

TEOREMA DO ÍNDICE PARA OPERADORES DE DIRAC

135a

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Teorema do índice para operadores de Dirac

Carlos Franco Sanmartín

Xullo 2015

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice xeral

Resumo **5**

Introdución **7**

1. Xeometría de Riemann **11**

2. Clases características **21**
- 2.1. Conexións en fibrados principais 21
- 2.2. Clases características 27

3. Álxebras de Clifford e operadores de Dirac **33**

4. Xeometría spin **45**
- 4.1. O grupo Spin(k) 45
- 4.2. Representacións da álxebra de Clifford 50
- 4.3. Estruturas spin sobre variedades 52

5. Análise do operador de Dirac **57**
- 5.1. Estimación elíptica 57
- 5.2. Espectro do operador de Dirac 59
- 5.3. O cálculo funcional 64

6. Teoría de Hodge **67**

7. A ecuación da calor **73**
- 7.1. Operador e núcleo da calor 73
- 7.2. Núcleo da calor aproximado 75
- 7.3. Expansión asintótica do núcleo da calor 77

8. Operadores de tipo traza e autovalores **83**
- 8.1. Operadores de tipo traza 83
- 8.2. Autovalores do Laplaciano 87

9. Índice do operador de Dirac **91**
9.1. Graduación de fibrados de Clifford 91
9.2. Índice do operador de Dirac dun fibrado de Clifford graduado 94
9.3. Índice e ecuación da calor 97

10. Teorema do índice **99**
10.1. Símbolos de Getzler 99
10.2. Símbolo de Getzler do núcleo da calor 104
10.3. Teorema do índice de Atiyah-Singer 107

A. Fibrados **113**

B. Espazos de Sobolev **119**

Bibliografía **123**

Resumo

O obxectivo deste traballo consiste en describir unha demostración do teorema do índice de Atiyah-Singer para operadores de Dirac, obtida mediante o uso de ideas físicas, como a expansión asintótica do núcleo de Schwartz da ecuación da calor e o cálculo simbólico de Getzler. Este teorema aplícase a variedades de Riemann compactas sen bordo, orientables, de dimensión par e dotadas de certos fibrados de Clifford. O correspondente operador de Dirac actúa nas súas seccións diferenciables; máis concretamente, aplica o espazo das seccións pares no das seccións impares, respecto dunha graduación do fibrado de Clifford. Este operador é elíptico, e polo tanto Fredholm; é dicir, con núcleo e conúcleo de dimensión finita. Obtense así un índice analítico definido como a diferencia entre as dimensións do núcleo e o conúcleo. O teorema do índice establece que este índice analítico é igual á evaluación de certa clase característica, o $\hat{\mathcal{A}}$-xénero, na clase de homoloxía fundamental da variedade (integral do $\hat{\mathcal{A}}$-xénero na variedade). Tomando coeficientes arbitrarios, trátase dun resultado moi xeral que inclúe importantes teoremas como os de Gauss-Bonnet, da signatura e Riemann-Roch, e que ten utilidade tanto en Xeometría e Topoloxía como na Física Teórica.

Na demostración aquí desenvolvida interveñen unha ampla variedade de conceptos, como a curvatura, as clases características, as álxebras de Clifford, os operadores de Dirac, as estruturas spin, os espazos de Sobolev, a descomposición espectral, a descomposición de Hodge, operadores de tipo traza, núcleos de Schwartz, expansións asintóticas e cálculo simbólico. Deste xeito, manéxanse numerosas ferramentas xeométricas, topolóxicas, analíticas e alxébricas.

Abstract

This work describes a proof for the Atiyah-Singer index theorem related to Dirac operators, obtained using physical ideas, like the Schwartz kernel's asymptotic expansion of the heat equation and the Getzler symbolic calculus. This theorem concerns compact, even-dimensional, oriented Riemannian manifolds without boundary, and equipped with certain Clifford bundles. The corresponding Dirac operator acts over its smooth sections; more precisely, it applies the space of even sections to the space of odd sections, with respect to a grading of the Clifford bundle. It is an elliptic operator, and thus it is Fredholm; what means that the kernel and cokernel are finite dimensional. So the analytical index can be defined as the difference between these two dimensions. The index theorem gives an equality between this analytical index and the evaluation of a certain characteristic class, the $\hat{\mathcal{A}}$-genus, in the fundamental homology class of the manifold (integral of the $\hat{\mathcal{A}}$-genus over the manifold). Considering arbitrary coefficients, the index theorem is a very general result which includes other important theorems like Gauss-Bonnet, signature and Riemann-Roch ones, and it is useful in Geometry, Topology and Theoretical Physics.

The proof presented here involves a wide variety of different concepts, like curvature, characteristic classes, Clifford algebras, Dirac operators, spin structures, Sobolev spaces, spectral decomposition, Hodge decomposition, trace-class operators, Schwartz kernels, asymptotic expansions and symbolic calculus. Consequently, a lot of geometric, topological, analytical and algebraic tools are required.

Introdución

O obxectivo principal deste traballo é describir con detalle a denominada demostración física do teorema do índice de Atiyah-Singer para operadores de Dirac, na cal interveñen moi diversos conceptos xeométricos, topolóxicos, analíticos e alxébricos. Dito teorema fai referencia a variedades de Riemann compactas sen bordo, orientables, de dimensión par e dotadas de certos fibrados de Clifford.

O problema do índice para operadores diferenciais elípticos foi plantexado por vez primeira polo matemático Israel Gelfand en 1960. A cuestión consiste en caracterizar o índice do operador de Dirac asociado a un fibrado de Clifford en termos topoloxicamente invariantes, como son as clases características do fibrado tanxente e do fibrado de Clifford. A primeira demostración foi obra de Michael Atiyah e Isadore Singer, no ano 1963. Empregaron a información que do índice aportan as ecuacións en derivadas parciais, para as cales existen determinadas solucións baixo as hipóteses topolóxicas axeitadas. Ten unha grande importancia na demostración orixinal de Atiyah e Singer o uso da topoloxía alxébrica, xa que empregaron como ferramentas fundamentais a K-teoría e a teoría do cobordismo. Mediante estas técnicas lograron reducir o teorema do índice a unha mera comprobación sobre certos xeradores. Trátase entón dunha proba esencialmente topolóxica.

Existen moitas demostracións posterires do teorema do índice, pero a que se desenvolve neste traballo ten un punto de vista físico, xa que se basea na expansión asintótica do núcleo de Schwartz da ecuación da calor e no cálculo simbólico de Getzler. Nela relaciónase, a través da fórmula de McKean-Singer, o índice do operador de Dirac coa supertraza local de certos coeficientes que aparecen na expansión asintótica do núcleo da calor. Deste xeito, na proba aquí presentada resulta fundamental o papel xogado pola ecuación da calor.

Os catro primeiros capítulos do traballo teñen un contido de carácter xeométrico, os catro seguintes son de corte analítico e os dous últimos son aqueles nos que se presentan os resultados topolóxicos desexados.

No primeiro capítulo inclúense aspectos básicos de xeometría de Riemann, os cales son constantemente empregados no resto do traballo. Destacan as nocións de conexión nun fibrado vectorial (prestando especial atención á conexión de Levi-Civita), os operadores de curvatura, a derivada exterior e o operador de Hodge para formas diferenciais.

No segundo capítulo introdúcense as clases características, para o cal é preciso manexar conexións sobre fibrados principais. Xogan un papel importante as formas equivariantes con respecto a unha representación do grupo de Lie correspondente. As clases de Chern obtéñense ao aplicar series de potencias formais invariantes á curvatura dun fibrado vectorial, e serven para clasificar ditos fibrados. Explícanse tamén as clases de Pontrjagin, os xéneros de Chern e Pontrjagin e o carácter de Chern.

É no terceiro capítulo onde se expón o concepto de operador de Dirac asociado a un fibrado de Clifford, facendo uso das álxebras de Clifford. Destacan aquí a fórmula de Weitzenbock e a relación existente entre os fibrados de Clifford e a curvatura. Ao final do capítulo preséntanse dous exemplos básicos de operadores de Dirac: o operador de de Rham e o operador de Dolbeault.

O cuarto capítulo está adicado ás estruturas spin, que se definen sobre variedades de Riemann a partir de determinados fibrados principais con grupos spin como fibra estándar. Son de gran relevancia nisto as superálxebras, a forma de volume e as representacións irreducibles da álxebra de Clifford.

O Capítulo 5 aborda un estudo analítico do operador de Dirac, que é igualmente válido para os operadores de Dirac xeralizados, e de feito tamén para operadores elípticos con símbolo principal simétrico. Ao comezo demóstranse un par de desigualdades para normas de seccións diferenciables do fibrado de Clifford. Posteriormente preséntanse algúns resultados relacionados co grafo do operador de Dirac, co ánimo de probar un teorema que fai referencia ao espectro de dito operador. Os conceptos de operador suavizante e de núcleo de Schwartz que se inclúen neste punto son imprescindibles nos capítulos posteriores. Ao final exponse o cálculo funcional definido mediante o espectro do operador de Dirac.

No sexto capítulo preséntase o teorema de Hodge, xunto con algunhas das súas consecuencias, entre as que resaltan a dualidade de Poincaré e algúns resultados de carácter xeométrico relativos á curvatura das métricas existentes sobre certas variedades. O teorema de Hodge permitirá, no Capítulo 9, relacionar o índice do operador de de Rham coa característica de Euler da variedade.

O Capítulo 7 céntrase no estudo da ecuación da calor, aportando a solución única da mesma e introducindo o núcleo da calor asociado. O resto do capítulo está adicado á construción dunha expansión asintótica para o núcleo da calor, por ser o punto de vista dende o cal se aborda a demostración do teorema do índice descrita neste traballo.

No oitavo capítulo manéxanse os operadores de tipo traza, obtidos como composición de dous operadores de Hilbert-Schmidt definidos entre espazos de Hilbert. Preséntanse aquí algúns resultados relativos á traza deste tipo de operadores. Finalmente inclúese a fórmula asintótica de Weyl, que permite estimar a distribución dos autovalores do Laplaciano de Dirac na semirrecta real positiva. Para isto faise uso do teorema de Karamata, un resultado de teoría abstracta de Tauber.

É no noveno capítulo onde se introduce o concepto de índice dun operador de Dirac asociado a un fibrado de Clifford canonicamente graduado. Tamén se fala da supertraza dos operadores suavizantes e relaciónase o índice coa ecuación da calor. Asimesmo, arguméntase o xeito en que o teorema de Gauss-Bonnet aparece como resultado destas consideracións, aplicadas ao índice do operador de de Rham.

Finalmente, o Capítulo 10 presenta a demostración do teorema do índice de Atiyah-Singer, empregando as ideas procedentes da Física relativas ao símbolo de Getzler. Recóllense as nocións básicas sobre símbolos definidos entre álxebras filtradas e álxebras graduadas que permiten definir o símbolo de Getzler. A clave da demostración do teorema do índice exposta neste traballo é a maneira en que se aplica o símbolo de Getzler á expansión asintótica do núcleo da calor asociado ao operador de Dirac.

O que se inclúe en último lugar son un par de apéndices nos que se detallan algúns obxectos e resultados que aparecen repetidamente no corpo do traballo pero que se desvían da liña do mesmo. O primeiro deles contén os conceptos básicos relacionados cos fibrados sobre variedades, como son os fibrados vectoriais, principais e asociados. No segundo apéndice introdúcense os espazos de Sobolev, definidos en primeiro lugar como complecións do espazo de funcións diferenciables sobre o toro n-dimensional e logo xeralizados para seccións de fibrados vectoriais sobre variedades compactas arbitrarias, e que son imprescindibles para facer análise sobre as variedades de Riemann.

Capítulo 1

Xeometría de Riemann

Sexa M unha variedade diferenciable C^∞ e V un fibrado vectorial sobre M de rango k (véxase a Definición A.11). Denotarase por $C^\infty(V)$ (ou por $\Gamma(V)$) ao $C^\infty(M)$-módulo das seccións diferenciables C^∞ de V. En particular, TM é o fibrado tanxente de M e $\mathfrak{X}(M) \equiv C^\infty(TM)$ o $C^\infty(M)$-módulo formado polos campos de vectores C^∞ sobre M.

Definición 1.1. Unha conexión en V é unha aplicación $\mathbb{R}$-linear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes C^\infty(V) \to C^\infty(V)$$

que asigna a cada campo de vectores X e a cada sección s de V unha nova sección $\nabla_X s$ de V, de xeito que para calquera $f \in C^\infty(M)$ se verifican as propiedades:

(i) $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$;

(ii) $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (Xf)s$.

A condición (i) da definición anterior pódese expresar tamén dicindo que, dada unha sección s de V, a aplicación $X \mapsto \nabla_X s$ é un homomorfismo de módulos sobre o anel $C^\infty(M)$, pois ∇ é linear en $\mathfrak{X}(M)$. Desto dedúcese que $(\nabla_X s)_p$ só depende de X_p, para todo $p \in M$, así como dos valores que toma a sección s nunha veciñanza de p. Polo tanto, pódese considerar ∇ como unha aplicación de $C^\infty(V)$ en $\Omega^1(V) := C^\infty(T^*M \otimes V)$ (o espazo das formas de grao 1 con valores en V). A condición (ii) é unha variante da regra de Leibniz que pon de manifesto que ∇ non é homomorfismo de fibrados vectoriais (ver Definición A.12) senón un operador diferencial de grao 1.

Por outra parte, se V está expresado en coordenadas locais as súas seccións pódense identificar con funcións de M con valores en $\mathbb{R}^k$, e un exemplo de conexión no fibrado trivial (ver Exemplo A.9) $\mathbb{R}^k$ é $\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes C^\infty(M;\mathbb{R}^k) \to C^\infty(M;\mathbb{R}^k)$, onde $\nabla_X s = Xs$. Polo tanto, sempre existen conexións localmente. Ademais, para aquelas variedades diferenciables que sexan paracompactas sempre é posible definir unha conexión global a partir de conexións locais empregando unha partición da unidade.

Observación 1.2. Para dúas conexións, ∇ e ∇', como $(\nabla_X s - \nabla'_X s)_p$ depende só dos valores de X e s en cada $p \in M$, $\nabla - \nabla'$ trátase dunha 1-forma con valores en $\mathrm{End}(V)$. Isto quere dicir que o espazo das conexións en V é un espazo afín sobre o espazo vectorial $\Omega^1(M, \mathrm{End}(V))$. Así, respecto dunha trivialización local de V sobre un aberto coordenado de M con coordenadas $x^1, \dots, x^n$, para calquera conexión ∇ tense que

$$\nabla_i = \partial_i + \Gamma_i,$$

onde Γ_i é unha sección diferenciable de $\mathrm{End}(V)$, e $\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$. As funcións Γ_i determinan a conexión completamente e dependen do sistema coordenado local escollido para M.

Observación 1.3. Unha definición alternativa das conexións parte da idea de transporte paralelo. Sexa γ unha curva diferenciable sobre M. Pódese establecer a ecuación $\nabla_{\dot{\gamma}} s = 0$, que se trata dunha ecuación diferencial ordinaria de primeira orde no conxunto de seccións de V, ao longo de γ. Polo tanto, dado un valor inicial $s(0)$, existe unha única solución s de tal ecuación. Dise entón que a sección s é *paralela* ao longo de γ ou que s foi obtida a partir do valor inicial $s(0)$ mediante *transporte paralelo*. Desta maneira a conexión determina a noción de transporte paralelo e, recíprocamente, o transporte paralelo tamén determina a conexión ∇.

Definición 1.4. O *operador curvatura* K dunha conexión ∇ defínense como segue. Se X e Y son campos de vectores sobre M e s unha sección de V, entón

$$K(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s,$$

onde $[\ ,\ ]$ denota o corchete de Lie en $\mathfrak{X}(M)$.

A curvatura $K(X,Y)s$ nun punto $p \in M$ depende unicamente dos valores de X, Y e s en p. Como consecuencia deste feito tense que K está inducida por un homomorfismo de fibrados vectoriais $TM \otimes TM \to \mathrm{End}(V)$. Considerarase entón a K como unha 2-forma sobre M con valores en $\mathrm{End}(V)$. En coordenadas locais x^i expresarémola do xeito

$$K = \sum_{i<j} K(\partial_i, \partial_j)\, dx^i \wedge dx^j.$$

Por outra parte, as conexións do fibrado tanxente teñen un interés particular. Supoñamos que M é unha variedade de dimensión n. En tal caso, empregando coordenadas locais x^i e a correspondente referencia local ∂_i, os n endomorfismos Γ_i de TM que aparecen na Observación 1.2 poden ser expresados como matrices $n \times n$. Desta maneira, defínense os símbolos de Christoffel como[1]

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

A partir desta expresión e das condicións (i) e (ii) da Definición 1.1, dados dous campos de vectores, $X = X^i \partial_i$ e $Y = Y^i \partial_i$, tense que

$$\nabla_X Y = X^i Y^j_{;i} \partial j,$$

[1]De aquí en diante, ao igual que nas expreseións anteriores, será empregada a chamada notación de Einstein para indicar os sumatorios. Deste xeito, entenderase que se está a sumar con respecto a aqueles índices que aparezan á vez coma subíndices e coma superíndices nunha mesma expresión.

sendo
$$Y^j_{,i} = \partial_i Y^j + \Gamma^j_{ia} Y^a.$$
Consecuentemente, os Γ^k_{ij}, chamados *símbolos de Christoffel*, determinan a conexión completamente en cada aberto coordenado. Polo tanto, unha conexión sobre o fibrado tanxente de M vén dada localmente mediante as n^3 funcións Γ^k_{ij}. Nótese que os símbolos de Christoffel dependen tanto do sistema coordenado local escollido para M como da expresión local de TM tomada. Os símbolos de Christoffel defínense de xeito similar para un fibrado vectorial V arbitrario, caso no que tamén dependen da referencia local de V escollida.

Observación 1.5. Nas consideracións anteriores tomouse a referencia local $\{\partial_i\}$ do espazo tanxente inducida polas coordenadas locais x^i, pero o razoamento é igualmente válido para calquera referencia local.

Definición 1.6. O *operador torsión* T dunha conexión ∇ no fibrado tanxente de M defínense mediante
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Definición 1.7. Unha conexión ∇ en TM dise que é *simétrica* (ou *libre de torsión*) se a súa torsión é nula; é dicir, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, para todo par de campos de vectores X e Y.

Observación 1.8. Esta definición é equivalente a que os símbolos de Christoffel verifiquen a condición de que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, en calquera sistema de coordenadas.

Supoñerase de aquí en diante que M é unha variedade de Riemann cuia métrica $g \in C^\infty(T^*M \otimes T^*M)$ no fibrado tanxente TM denotarase ocasionalmente por $(\ ,\ )$. Para coordenadas locais $x^1, \dots, x^n$, usarase a notación $g_{ij} = (\partial_i, \partial_j)$ e $(g^{ji}) = (g_{ij})^{-1}$.

Definición 1.9. Considerando que as funcións son tensores de tipo $(0,0)$ e os vectores tanxentes tensores de tipo $(1,0)$, cada conexión ∇ en TM executándese a unha única conexión no fibrado tensorial de cada tipo dado, determinada polas propiedades seguintes:

(i) $\nabla_X f = Xf$, para toda $f \in C^\infty(M)$;

(ii) $\nabla_X(A \otimes B) = (\nabla_X A) \otimes B + A \otimes (\nabla_X B)$, para todo par A e B de tensores;

(iii) ∇ é compatible coas contraccións
$$C : \bigotimes_l TM \otimes \bigotimes_k T^*M \to \bigotimes_{k-l} T^*M, \quad C(Y \otimes A)(Z) = A(Y \otimes Z),$$
$$Y = Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_l, \quad Z = Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_{k-l}, \quad k \geq l,$$
no sentido seguinte:
$$\nabla_X C(Y \otimes A) = C(\nabla_X Y \otimes A) + C(Y \otimes \nabla_X A),$$
para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $A \in C^\infty(\bigotimes_k T^*M)$.

Observación 1.10. Na definición anterior, chega con considerar o caso $k = l = 1$ na propiedade (iii) para determinar a extensión de ∇. Nese caso, a contracción é o produto interior usual de 1-formas por campos de vectores. A condición de compatibilidade con C significa que C é paralelo, pensado como sección de $\bigotimes_l T^*M \otimes \bigotimes_k TM \otimes \bigotimes_{k-l} T^*M$.

Definición 1.11. Dise que unha conexión ∇ é *compatible coa métrica* g de M, ou simplemente que ∇ é *métrica*, se g é paralela ($\nabla g = 0$); é dicir, para calquera terna de campos de vectores X, Y_1 e Y_2, se cumpre que

$$(\nabla_X Y_1, Y_2) + (Y_1, \nabla_X Y_2) = X(Y_1, Y_2).$$

Proposición 1.12 (Véxase [4, Capítulo 2, Corolario 3.3])**.** *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e ∇ unha conexión en TM. As seguintes afirmacións son equivalentes:*

(*i*) *∇ é compatible coa métrica g;*

(*ii*) *O transporte paralelo ao longo de calquera curva é unha isometría.*

Teorema 1.13 (Levi-Civita)**.** *Unha variedade de Riemann posúe unha única conexión métrica simétrica.*

Demostración. Traballarase en coordenadas locais. A condición de compatibilidade da métrica implica que

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma^a_{ij} g_{ak} + \Gamma^a_{ik} g_{aj}.$$

Permutando os índices tense

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma^a_{jk} g_{ai} + \Gamma^a_{ji} g_{ak} \quad \text{e} \quad \partial_k g_{ij} = \Gamma^a_{ki} g_{aj} + \Gamma^a_{kj} g_{ai}.$$

Sumando e restando estas tres expresións entre si e empregando o feito de que a métrica é simétrica obtense

$$2\,\Gamma^a_{ij} g_{ak} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij},$$

e polo tanto

$$\Gamma^a_{ij} = \frac{1}{2} g^{ka}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad \square$$

A conexión dada polo teorema anterior chámase *conexión de Levi-Civita*. A partir de agora, as variedades de Riemann consideraranse sempre xunto coa súa conexión de Levi-Civita. Posto que a métrica determina a conexión de Levi-Civita, tamén determina a súa curvatura.

Observación 1.14. Pola Definición 1.9-(iii), sucede que

$$(\nabla_i\, dx^j)(\partial_k) = \partial_i(dx^j(\partial_k)) - dx^j(\nabla_i \partial_k) = -\Gamma^a_{ik}\, dx^j(\partial_a) = -\Gamma^j_{ik},$$

e, polo tanto,

$$\nabla_i\, dx^j = -\Gamma^j_{ik}\, dx^k.$$

Ademais, empregando esta expresión e usando que a conexión de Levi-Civita é compatible coa métrica, dedúcese que

$$\partial_i g^{jk} = \partial_i(dx^j, dx^k) = (\nabla_i\, dx^j, dx^k) + (dx^j, \nabla_i\, dx^k) = -\Gamma^j_{ia} g^{ak} - \Gamma^k_{ia} g^{ja}.$$

Definición 1.15. O operador curvatura da conexión de Levi-Civita dunha variedade de Riemann chámase *operador curvatura de Riemann*, o cal se denota por R. Relativamente a unha referencia local e_i do fibrado tanxente escribirase

$$R(e_j, e_k)e_l = \sum_i R^i_{ljk} e_i.$$

Se e_i é unha referencia local correspondente ás coordenadas locais x^i, a partir da definición de operador curvatura, resulta que

$$R^i_{ljk} = \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{kl}\Gamma^i_{jm} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{kl}.$$

Tamén é frecuente traballar coa versión da curvatura de Riemann definida por

$$R_{iljk} = (R(e_j, e_k)e_l, e_i).$$

Proposición 1.16 (Véxase [4, Capítulo 4, Proposicións 2.5]). *O operador curvatura de Riemann posúe as seguintes simetrías:*

(i) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$ (i.e. $R^i_{ljk} + R^i_{lkj} = 0$);

(ii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (i.e. $R^i_{ljk} + R^i_{jkl} + R^i_{klj} = 0$), chamada *primeira identidade de Bianchi*;

(iii) $(R(X,Y)Z, W) + (R(X,Y)W, Z) = 0$ (i.e. $R_{iljk} + R_{lijk} = 0$);

(iv) $(R(X,Y)Z, W) = (R(Z,W)X, Y)$ (i.e. $R_{iljk} = R_{jkil}$).

Definición 1.17. O *tensor de curvatura de Ricci* é a forma bilinear Ric en TM definida por

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = \mathrm{tr}[X \mapsto R(X,Y)Z].$$

En compoñentes, $\mathrm{Ric}_{ab} = R^i_{aib}$. A propiedade (iv) anterior evidencia que o tensor curvatura de Ricci é simétrico.

Definición 1.18. Defínese a *curvatura escalar* como $\kappa = g^{ab}\,\mathrm{Ric}_{ab}$, a traza do tensor curvatura de Ricci. No caso de que se empregue unha referencia local ortonormal sucede que $\kappa = \sum_{i,a} R_{iaia}$.

Definición 1.19. Unha curva γ sobre unha variedade de Riemann M é unha *xeodésica* se cumpre que $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, é dicir, se $\dot\gamma$ é paralelo ao longo de γ (tamén se di que $\dot\gamma$ é *autoparalela*).

Posto que a ecuación que determina unha xeodésica é unha ecuación diferencial de orde 2, dadas unhas condicións iniciais $\gamma(0)$ e $\dot\gamma(0)$, existe unha única solución definida nun intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Isto quere dicir que existe unha única xeodésica de M que pasa por cada punto en cada dirección. Ademais, se $t \mapsto \gamma(t)$ é unha solución, tamén o será $t \mapsto \gamma(ct)$, para toda constante c. Polo tanto, dado un punto $p \in M$, nalgunha veciñanza aberta estrelada U dá orixe en T_pM, ten sentido definir a *aplicación exponencial* $\exp_p : U \subset T_pM \to M$ por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, para todo $v \in U$, sendo γ_v a única xeodésica de M tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$. A aplicación exponecial trátase dun difeomorfismo entre veciñanzas do cero en T_pM e de p en M. De feito, escollida unha base ortonormal de T_pM, tense un sistema coordenado nunha veciñanza de p chamado *sistema coordenado xeodésico* ou *normal*.

Proposición 1.20. *Na orixe dun sistema coordenado xeodésico tódolos símbolos de Christoffel se anulan.*

Demostración. Hai que comprobar que $\nabla_i \partial_j = 0$ na orixe, para todo i e j. Como $\nabla_i \partial_j = \nabla_j \partial_i$ debido á simetría da conexión, bastará ver que $\nabla_X X = 0$ na orixe para todo campo de vectores $X = X^j \partial_j$, sendo X^j funcións constantes. Nun sistema coordenado xeodésico as rectas que pasan pola orixe de T_pM son xeodésicas con velocidade unitaria. Entón X é tanxente á xeodésica que pasa pola orixe na dirección de X, e ten lonxitude constante. Logo debe verificar a ecuación $\nabla_X X = 0$. $\square$

Definición 1.21. Sexa $\gamma : [0,1] \to M$ unha curva na variedade de Riemann M. Defínese a súa *lonxitude* como

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \, dt,$$

sendo $|\gamma'(t)| = (\gamma'(t), \gamma'(t))^{\frac{1}{2}}$. Así, defínese a *distancia* entre dous puntos p e q de M como

$$d(p,q) = \operatorname{ínf}\{\, L(\gamma) \mid \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q \,\}.$$

Proposición 1.22 (Véxase [4, Capítulo 7, Proposicións 2.5 e 2.6])**.** *A aplicación $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é unha distancia en M que induce a propia topoloxía de M.*

Teorema 1.23 (Hopf-Rinow. Véxase [4, Capítulo 7, Teorema 2.8])**.** *M é un espazo métrico completo se e só se o dominio de toda xeodésica de M pode ser extendido a $\mathbb{R}$.*

O *fibrado exterior* de M, $\bigwedge^m T^*M$, é o fibrado vectorial sobre M cuia fibra sobre cada punto p é o producto exterior $\bigwedge^m T_p^*M$, cuios elementos se identifican coas aplicacións m-lineais e antisimétricas $\alpha : (T_pM)^m \to \mathbb{R}$.

Definición 1.24. Unha *forma diferencial de grao k* sobre M é unha sección diferenciable C^∞ de $\bigwedge^m T^*M$. Denótase $\Omega^m(M) = C^\infty(\bigwedge^m T^*M)$. Pódese identificar cada $\alpha \in \Omega^m(M)$ cun tensor antisimétrico A de tipo $(0,m)$ mediante

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} A_{i_1 \dots i_m} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m} A_{i_1 \dots i_m} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m},$$

usando coordenadas locais.

Observación 1.25. As formas diferenciais tamén poden tomar valores noutro espazo vectorial F distinto de $\mathbb{R}$ ou nun fibrado vectorial F sobre M, e en tal caso escríbese $\alpha \in \Omega^m(M; F)$.

Toda aplicación C^∞ $f : M \to N$ induce unha aplicación $f^* : \Omega^m(N) \to \Omega^m(M)$ definida, para cada $p \in M$, mediante

$$(f^*\alpha)_p(X_1, \dots, X_m) = \alpha_{f(p)}(f_*X_1, \dots, f_*X_m).$$

Se α é unha forma diferenciable de grao m con tensor antisimétrico asociado A, para os vectores $X_1, \dots, X_m$ defínese

$$\alpha(X_1, \dots, X_m) = A(X_1 \otimes \dots \otimes X_m).$$

En particular, para $m = 2$, tense localmente

$$\alpha(X, Y) = X^i Y^j A_{ij}.$$

Un exemplo disto é a expresión do operador curvatura K anteriormente mencionado. En particular, a curvatura de Riemann pode ser entendida localmente coma unha matriz formada polas formas R_{il} de grao 2 dadas por

$$R_{il} = \sum_{j<k} R_{iljk}\, dx^j \wedge dx^k.$$

Notación 1.26. O *símbolo de Kronecker xeralizado* vén dado por:

$$\delta^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_m} = \begin{vmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \cdots & \delta^{j_1}_{i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{j_m}_{i_1} & \cdots & \delta^{j_m}_{i_m} \end{vmatrix}.$$

Este símbolo vale 1 se os índices j son todos distintos e forman unha permutación de signatura par dos índices i; vale -1 se os índices j son todos distintos e forman unha permutación de signatura impar dos índices i; e vale 0 se os índices i e j non forman o mesmo conxunto de m elementos. O símbolo de Kronecker xeralizado emprégase para expresar o produto exterior de formas diferenciais.

Dadas dúas formas diferenciais, $\alpha \in \Omega^p(M)$ e $\beta \in \Omega^q(M)$, cuios tensores antisimétricos correspondentes son A e B, respectivamente, exprésase o seu *produto exterior* $\alpha \wedge \beta$ mediante o tensor antisimétrico C dado por

$$C_{k_1 \dots k_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} \delta^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}_{k_1 \dots k_{p+q}}\; A_{i1, \dots, i_p}\; B_{j_1, \dots, j_k}.$$

A *derivada exterior* $d\alpha \in \Omega^{p+1}(M)$ correspóndese co tensor antisimétrico D, sendo

$$D_{k_1 \dots k_{p+1}} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \delta^{j i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_{p+1}}\; \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^j}.$$

Definición 1.27. Sexa M unha variedade de Riemann orientada de dimensión n. Sexan $x^1, \dots, x^n$ coordenadas locais orientadas e $g = \det(g_{ij})$. Defínese a *forma de volume* vol $\in \Omega^n(M)$ como

$$\mathrm{vol} = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Tal expresión de vol é independente das coordenadas locais, polo que define unha forma sobre M de xeito global.

Por outra banda, pódese definir un produto interior no espazo $\Omega^k(M)$ das formas diferenciables sobre M. Dadas $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ correspondentes aos tensores antisimétricos A e B, establécese

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k} g^{i_1 j_1} \dots\ g^{i_k j_k}\ A_{i_1,\dots,i_k}\ B_{j_1,\dots,j_k}.$$

En particular, tense que $(dx^i, dx^j) = g^{ij}$ e $(\mathrm{vol}, \mathrm{vol}) = 1$.

Definición 1.28. Sexa $\alpha \in \Omega^k(M)$. Defínese $\star\alpha$ coma a única forma diferenciable de grao $n-k$ tal que para calquera $\beta \in \Omega^k(M)$ verifica

$$(\alpha, \beta)\, \mathrm{vol} = \beta \wedge \star\alpha.$$

A operación $\star$ así definida é linear e cumpre que $\star\star\,\alpha = (-1)^{kn+k}\alpha$. Entón $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ é un isomorfismo linear, chamado *operador de Hodge*.

Definición 1.29. Dada $\alpha \in \Omega^k(M)$, defínese a forma $d^\dagger\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ mediante

$$d^\dagger\alpha = (-1)^{nk+n+1} \star d \star \alpha.$$

Tense que $(d^\dagger)^2 = 0$.

Pódese establecer un produto escalar no espazo $\Omega_c^k(M)$ das formas diferenciables de grao k sobre M con soporte compacto, do seguinte xeito:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha, \beta)\, \mathrm{vol} = \int_M \beta \wedge \star\alpha = \int_M \alpha \wedge \star\beta.$$

Dito produto escalar induce unha norma en $\Omega_c^k(M)$ dada por

$$\|\alpha\| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_M \alpha \wedge \star\alpha.$$

Así, $\Omega_c^k(M)$ pode ser completado a un espazo de Hilbert, que será formado polas formas medibles con norma finita.

Obsérvese que $\Omega_c^k(M) = \Omega^k(M)$ se M é compacta. Cando as formas non teñen soporte compacto, a expresión do producto escalar segue sendo válida sempre que a integral estea ben definida. Por exemplo, basta que unha das dúas formas teña soporte compacto, e tamén é válida para as formas no correspondente espazo de Hilbert.

Proposición 1.30. *Sexan α e β formas diferenciais sobre unha variedade de Riemann orientada de graos k e $k-1$, respectivamente. Se algunha delas ten soporte compacto cúmprese que*
$$\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^\dagger \alpha, \beta \rangle.$$

Demostración. Polo teorema de Stokes, dado que $\partial M = \varnothing$,

$$\begin{aligned} 0 = \int_M d(\beta \wedge \star\alpha) &= \int_M d\beta \wedge \star\alpha \; + \; (-1)^{k-1} \int_M \beta \wedge d(\star\alpha) \\ &= \langle \alpha, d\beta \rangle \; + \; (-1)^{k-1+(n-k+1)n+(n-k+1)} \int_M \beta \wedge \star\star\, d(\star\alpha) \\ &= \langle \alpha, d\beta \rangle - \langle d^\dagger \alpha, \beta \rangle. \qquad \square \end{aligned}$$

O contido da Proposición 1.30 adóitase expresar decindo que $d^\dagger$ é o *simétrico* da derivada exterior d.

Definición 1.31. O *Laplaciano* é o operador $\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d = (d + d^\dagger)^2$.

Exemplo 1.32. Sexa $\alpha = \sum_{i=1}^n A_i dx^i$ unha forma diferenciable de grao 1. Entón $d^\dagger\alpha$ é unha función que se chama *diverxencia* de α. A partir do teorema de Stokes dedúcese que $\int_M d^\dagger\alpha \,\mathrm{vol} = 0$, o cal se coñece como teorema da diverxencia. Unha expresión explícita de $d^\dagger\alpha = -\star d \star \alpha$ obtense da maneira seguinte. É doado comprobar a partir da Definición 1.28 que
$$\star\alpha = \sum_{i,j} (-1)^{j+1} A_i\, g^{ij} \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$
de onde
$$d(\star\alpha) = \sum_{i,j} \partial_j (A_i\, g^{ij} \sqrt{g})\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Como α é unha 1-forma, $d^\dagger\alpha$ será unha función. Empregando a Definicións 1.28 e 1.29 e facendo $\beta = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, tense que

$$\begin{aligned} (d^\dagger\alpha)\, \beta = \beta \wedge d^\dagger\alpha = (d^\dagger\alpha, \beta)\, \mathrm{vol} &= (-d(\star\alpha), \beta)\, \mathrm{vol} \\ &= -\sum_{i,j} g^{11} \cdots g^{nn} \left(\partial_j (A_i\, g^{ij} \sqrt{g})\right) \mathrm{vol} = -\frac{\sqrt{g}}{g} \left(\sum_{i,j} \partial_j (A_i\, g^{ij} \sqrt{g}) \right) \beta \end{aligned}$$

e, consecuentemente,
$$d^\dagger\alpha = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_j (A_i\, g^{ij} \sqrt{g}). \tag{1.1}$$

Aplicando a regra de Leibniz na anterior expresión obtense

$$d^\dagger\alpha = -\sum_{i,j} \left(g^{ij}\, \partial_j A_i + A_i\, \partial_j g^{ij} + A_i\, g^{ij}\, \partial_j \log \sqrt{g} \right).$$

Segundo a Observación 1.14 tense a expresión

$$\sum_j \partial_j g^{ij} = -\sum_{a,j}(\Gamma^j_{ja} g^{ai} + \Gamma^i_{ja} g^{aj}).$$

Para calcular $\partial_j \log \sqrt{g}$ hai que derivar o determinante g. Nótese que, segundo o método de cálculo da inversa dunha matriz por adxuntos, $g^{ab} g$ é o cofactor de g_{ab}. Polo tanto,

$$\partial_j g = \sum_{a,b} g^{ab} g \, \partial_j g_{ab},$$

de onde, empregando a fórmula para os símbolos de Christoffel dada no Teorema 1.13, séguese que

$$\partial_j \log \sqrt{g} = \frac{1}{2g} \partial_j g = \frac{1}{2} \sum_{a,b} g^{ab} \, \partial_j g_{ab} = \sum_a \Gamma^a_{ja}.$$

Finalmente, xuntando as distintas expresións obtidas e tendo en conta a símetría dos símbolos de Christoffel (véxase a Observación 1.8), conclúese que

$$\begin{aligned} d^\dagger \alpha &= -\sum_{i,j} g^{ij} \, \partial_j A_i + \sum_{i,j,a} A_i \, (g^{ai} \Gamma^j_{ja} + g^{aj} \Gamma^i_{ja} - g^{ij} \Gamma^a_{ja}) \\ &= -\sum_{i,j} g^{ij} \, \partial_j A_i + \sum_{i,j,a} A_i \, g^{ja} \, \Gamma^i_{ja}. \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Capítulo 2

Clases características

2.1. Conexións en fibrados principais

Considérese un G-fibrado principal E sobre unha variedade M con proxección canónica π (véxase a Definición A.17). Cada elemento u da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G ten asociado un campo vectorial G-invariante $X_u \in \mathfrak{X}(E)$. Ademais xeran un subfibrado VE de TE, chamado *fibrado dos vectores tanxentes verticais*, que coincide co núcleo da aplicación $\pi^* : TE \to TM$, polo que cada fibra de VE se identifica canónicamente con $\mathfrak{g}$.

Definición 2.1. Unha forma diferencial $\alpha \in \Omega^p(E)$ dise que é *horizontal* se para toda colección de vectores $X_1, \dots, X_p$ que conteña algún vector vertical verifícase que $\alpha(X_1, \dots, X_p) = 0$.

Dada unha forma $\beta \in \Omega^p(M)$ é evidente que $\pi^*\beta \in \Omega^p(E)$ é unha forma horizontal e invariante. De feito, π^* establece unha bixección entre as formas diferenciais de M e as formas horizontais e invariantes de E.

Para xeralizar o concepto de formas invariantes procederase da forma seguinte. Sexa (F, ρ) unha representación de G. É doado comprobar que o espazo de funcións da forma $f : E \to F$ ten unha acción de G definida para cada f e cada $g \in G$ mediante

$$(g \cdot f)(e) = \rho(g) f(eg),$$

para todo $e \in E$. Así, unha función f dirase que é *ρ-equivariante* cando sexa invariante para esta acción, o cal é equivalente a que $\rho(g^{-1}) f(e) = f(eg)$, para todo $e \in E$ e todo $g \in G$. Dun xeito similar pódense definir as *formas diferenciais ρ-equivariantes* de E con valores en F. Unha 1-forma $\alpha : TE \to F$ dise que é ρ-equivariante se[1] $\rho(g^{-1})\alpha(\xi) = \alpha(\xi g)$, para todo $\xi \in TE$ e todo $g \in G$. A xeralización a formas de grao superior é inmediata. Asimesmo, dirase que unha función ou forma é G-equivariante cando sexa ρ-equivariante para algunha representación ρ de G.

No seguinte lema emprégase o concepto de fibrado vectorial asociado, o cal se introduce no Exemplo A.19.

[1] Se para cada $g \in G$ denotamos $\mu_g : e \in E \to eg \in E$, tense que a acción de G en E induce unha acción de G en TE mediante $\xi g = (\mu_g)_* \xi$, para todo $\xi \in TE$.

Lema 2.2. *Hai unha correspondencia bixectiva entre funcións ρ-equivariantes de E en F e seccións do fibrado vectorial asociado $E \times_\rho F$. De forma semellante, existe unha correspondencia bixectiva entre formas horizontais e ρ-equivariantes de $\Omega^m(E;F)$ e formas diferenciais sobre M con valores en $E \times_\rho F$.*

Demostración. A cada función ρ-equivariante $f : E \to F$ asóciaselle a sección $\overline{f} : M \to E \times_\rho F$ que asigna a cada $p \in M$ o vector $[(e, f(e))]$, sendo $e \in E_p$. Posto que $h \in G \mapsto hg \in G$ é un difeomorfismo para todo $g \in G$, dados $e, e' \in E_p$ existirá un $g \in G$ tal que $e' = eg$, de onde

$$(e, f(e))g = (eg, \rho(g^{-1})f(e)) = (e', f(e')),$$

seguíndose que $[(e, f(e))] = [(e', f(e'))]$. Logo a aplicación está ben definida.

Supoñamos agora que $\overline{f_1} = \overline{f_2}$. Entón para todo $p \in M$ tense $[(e, f_1(e))] = [(e, f_2(e))]$, con $e \in E_p$. Razoando dun xeito similar ao anterior, tense que existe un $g \in G$ tal que

$$(e, f_2(e)) = (e, f_1(e))g = (eg, \rho(g^{-1})f_1(e)),$$

polo que g é o elemento neutro e $f_1(e) = f_2(e)$. Como $e \in E_p$ é arbitrario sucede que $f_1 = f_2$ e a correspondencia é inxectiva.

Por último, comprobarase a sobrexectividade. Considérese unha sección $p \in M \mapsto [(e_p, f_p)] \in E \times_\rho F$, con $e_p \in E_p$. Tómese a función $f(e'_p) = \rho(g^{-1})f_p$, sendo $g \in G$ tal que $e'_p = e_p g$, con $e'_p \in E_p$. É obvio que f é ρ-equivariante e que $\overline{f}$ coincide coa sección inicial. □

Por outra banda, considerando o subfibrado vertical $\ker(\pi_* : TE \to TM) = VE$, pódese construír a sucesión exacta corta de fibrados vectoriais sobre E,

$$0 \longrightarrow VE \longrightarrow TE \longrightarrow \pi^*TM \longrightarrow 0, \tag{2.1}$$

onde o primeiro homomorfismo está definido pola inclusión, e o segundo está inducido por $\pi_* : TE \to TM$.

Definición 2.3. Unha *conexión* no fibrado principal E consiste nunha escisión G-equivariante da sucesión exacta corta (2.1).

Debido ás propiedades das sucesións exactas cortas, unha conexión en E pode vir dada mediante un homomorfismo equivariante $\pi^*TM \to TE$ sección de $TE \to \pi^*TM$, ou un homomorfismo equivariante $TE \to VE$ retracción de $VE \to TE$. Equivalentemente, quedará determinada por unha elección G-equivariante dun subfibrado HE complementario a VE, é dicir, tal que $TE = VE \oplus HE$. O subfibrado HE recibe o nome de *fibrado dos vectores tanxentes horizontais*, ou simplemente *fibrado horizontal*.

Considérese o caso en que E é o fibrado principal de referencias para un fibrado vectorial V (ver Exemplo A.19). Segundo a Observación 1.3, unha conexión en V vén determinada polo seu transporte paralelo, o cal pode ser pensado coma un xeito G-equivariante de levantar camiños de M a E. Diferenciando obtense unha maneira de levantar vectores tanxentes a M a vectores tanxentes a E, é dicir, obtense un homomorfismo $\pi^*TM \to TE$

sección de $TE \to \pi^*TM$. Dunha forma semellante, unha conexión nun fibrado vectorial euclidiano ou hermitiano que sexa compatible coa métrica determina unha conexión no fibrado principal de bases ortonormais.

Tomarase agora unha conexión no fibrado principal E, e considérese a correspondente proxección $TE \to VE$ (retracción de $VE \to TE$). Posto que as fibras de VE se identifican canonicamente coa álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, pódese pensar dita proxección coma unha 1-forma en E con valores en $\mathfrak{g}$, a cal recibirá o nome de *forma de conexión*.

Proposición 2.4 (Véxase [11, Capítulo II, Proposición 1.1])**.** *Unha* 1*-forma ω en E con valores en $\mathfrak{g}$ é unha forma de conexión se e só se verifica as condicións seguintes:*

(i) *ω é* Ad*-equivariante: $\omega(\xi g) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega(\xi)$ para todo $\xi \in TE$, sendo* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *a representación adxunta*[2] *de G en $\mathfrak{g}$; e,*

(ii) *dado $u \in \mathfrak{g}$, cúmprese que $\omega(X_u) = u$; en particular, ω é unha proxección.*

Por último, asociada á descomposición $TE = VE \oplus HE$, existe unha proxección P_ω do espazo de formas diferenciables en E no subespazo de formas horizontais. Sucede que HE, a 1-forma ω e a proxección P_ω se determinan mutuamente debido a que todas dan lugar a unha escisión G-equivariante de (2.1).

Verifícase que para cada camiño $\gamma : [0,1] \to M$ e cada punto $e \in E_{\gamma(0)}$, existe un único camiño $\overline{\gamma} : [0,1] \to E$ comezando en e, cumprindo $\pi \circ \overline{\gamma} = \gamma$ e tal que $\overline{\gamma}'(t)$ é un vector horizontal para todo $t \in [0,1]$ (véxase [11, Capítulo II, Proposición 3.1]).

Definición 2.5. Dise que $\overline{\gamma}$ é o *levantamento horizontal* do camiño γ. Sexa $W = E \times_\rho F$ un fibrado vectorial asociado, e sexa un vector $w_0 \in W_{\gamma(0)}$ fixo, con representante (e, f). Defínese o *transporte paralelo* de w_0 ao longo de γ coma o vector $w_1 \in W_{\gamma(1)}$ representado por $(\overline{\gamma}(1), f)$.

Empregando a ρ-equivarianza pódese comprobar que w_1 é independente do representante de w_0 escollido, debido a que os levantamentos de γ correspondentes a distintos representantes de w_0 determinan o mesmo isomorfismo entre $W_{\gamma(0)}$ e $W_{\gamma(t)}$, porque os seus vectores tanxentes son horizontais e teñen a mesma proxección $\gamma'(t)$, para todo $t \in [0,1]$. Esta noción de transprote paralelo serve para definir unha conexión no fribrado vectorial W.

Definición 2.6. Sexan $p \in M$, un $X \in T_pM$ e w unha sección de W. Considérese unha curva γ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X$, e o isomorfismo $\theta_t : W_{\gamma(t)} \to W_{\gamma(0)}$ inducido polo transporte paralelo. Defínese entón

$$\nabla_X w = \frac{d}{dt}\theta_t(w_{\gamma(t)})\bigg|_{t=0}.$$

Proposición 2.7. *Verifícanse as seguintes afirmacións:*

[2] Ver [9, Sección 1.10].

(i) *A expresión de* $\nabla_X w$ *é independente da curva* γ *escollida, e define unha conexión en* W.

(ii) *Se se identifican as seccións de* W *coas funcións* ρ*-equivariantes de* E *en* F *segundo indica o Lema 2.2, tense que* ∇_X *se corresponde coa derivada direccional ao longo do levantamento horizontal* $\overline{X}$ *de* X.

(iii) *Equivalentemente, o operador* $\nabla : \Omega^0(W) \to \Omega^1(W)$ *correspóndese coa aplicación que a cada función* ρ*-equivariante* f *sobre* E *con valores en* F *lle asigna a* 1*-forma horizontal e* ρ*-equivariante* $P_\omega df$.

Demostración. Bastará con probar (ii). En efecto, se ∇_X é a derivada direccional ao longo de $\overline{X}$, a fórmula da definición anterior só depende do vector X, e é sinxelo comprobar que determina unha conexión en W. Ademais, a partir das consideracións anteriores sobre P_ω, (iii) é un enunciado equivalente a (ii).

Para probar (ii) tomarase unha función f que se corresponda coa sección $w = [(e, f(e))]$. Se $\overline{\gamma}$ é o levantamento horizontal de γ comenzando én e, cúmprese

$$\theta_t(w_{\gamma(t)}) = \theta_t(\overline{\gamma}(t), f(\overline{\gamma}(t)) = (e, f(\overline{\gamma}(t))),$$

de onde

$$\nabla_X w = \frac{d}{dt}\theta_t(w_{\gamma(t)})\bigg|_{t=0} = (e, df(\overline{\gamma}'(0))) = (e, \overline{X}f(e)). \quad \square$$

O operador $P_\omega d$, que toma a parte horizontal da derivada exterior dunha forma diferencial sobre E con valores en F, recibe o nome de *derivada exterior covariante* en E. A afirmación (iii) anterior indícanos que se corresponde coa derivada covariante ∇ das seccións do fibrado vectorial asociado.

Proposición 2.8. *Sexa* $\alpha \in \Omega^p(E; F)$ ρ*-equivariante horizontal. Verifícase que*

$$P_\omega d\alpha = d\alpha + \rho_*\omega \wedge \alpha.$$

Demostración. Obsérvese que $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(F) = \mathrm{End}(F)$ é o isomorfismo de álxebras de Lie inducido polo homomorfismo de grupos de Lie ρ, de maneira que $\rho_*\omega$ é unha 1-forma en E con valores en $\mathrm{End}(F)$. O produto exterior

$$\Omega^1(E; \mathrm{End}(F)) \otimes \Omega^p(E; F) \to \Omega^{p+1}(E; F)$$

obtense ao empregar o homomorfismo evaluación $\mathrm{End}(F) \otimes F \to F$.

Nesta demostración farase uso da fórmula de Cartan para a derivada exterior (véxase [11, Capítulo I, Proposición 3.11]), que vén dada por

$$d\alpha(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i \; \alpha(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p) \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \; \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_p),$$

onde $X_i \in \mathfrak{X}(E)$ e o sombreiro indica que o termo en cuestión é omitido.

Bastará ver que os dous membros da expresión do enunciado dan o mesmo ao lles aplicar a $(p+1)$-tupla de campos de vectores $X_0, \dots, X_p$. Debido á multilinearidade e alternidade, e á descomposición $TE = VE \oplus HE$, pódese supoñer que para algún $0 \leq r \leq p$ os r primeiros son campos inducidos por elementos de $\mathfrak{g}$ (e, polo tanto, verticais e G-invariantes) e que os restantes son horizontais e G-invariantes. Téñense os 3 casos seguintes.

Se $r = 0$ todos os campos son horizontais, polo que se anula $\rho_*\omega \wedge \alpha$ ao se anular ω. Ademais neste caso $P_\omega d\alpha = d\alpha$ e tense a igualdade.

Se $r \geq 2$ tanto X_0 como X_1 serán campos inducidos por elementos de $\mathfrak{g}$, e todo termo da fórmula de Cartan terá algún campo vertical. Logo $d\alpha(X_0, \dots, X_p) = 0$ e ambos membros son cero ao ser $\rho_*\omega \wedge \alpha = 0$ por ser α horizontal.

Se $r = 1$ o campo X_0 é inducido por algún elemento de $\mathfrak{g}$ e os restantes son horizontais. Logo o primeiro membro é nulo por ser $P_\omega d\alpha$ unha forma horizontal. A fórmula de Cartan redúcese entón a

$$d\alpha(X_0, \dots, X_p) = X_0 \cdot \alpha(X_1, \dots, X_p).$$

Por ser α ρ-equivariante pódese concluír que

$$X_0 \cdot \alpha(X_1, \dots, X_p) + \rho_*(\omega(X_0))(\alpha(X_1, \dots, X_p)) = 0. \quad \square$$

Definición 2.9. A *curvatura* de ω (1-forma sobre E con valores en $\mathfrak{g}$) defínese como a 2-forma Ω sobre E con valores en $\mathfrak{g}$ dada por

$$\Omega(X_1, X_2) = d\omega(X_1, X_2) + [\omega(X_1), \omega(X_2)],$$

onde $[\ ,\ ]$ é o corchete de Lie de $\mathfrak{g}$.

Observación 2.10. Supoñerase de aquí en diante que $\mathfrak{g}$ é unha álxebra de Lie de matrices, é dicir, unha subálxebra de $\mathfrak{gl}(n)$. As formas diferenciais con valores matriciais forman unha álxebra asociativa co produto

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, X_2) = \omega_1(X_1)\omega_2(X_2) - \omega_1(X_2)\omega_2(X_1)$$

obtido ao combinar o produto exterior e o produto usual de matrices. Así,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Proposición 2.11. *Dada $\alpha \in \Omega^p(E; F)$ ρ-equivariante horizontal cúmprese*

$$P_\omega d P_\omega d\alpha = \rho_*\Omega \wedge \alpha.$$

En particular, Ω é unha forma horizontal e Ad*-equivariante sobre E.*

Demostración. Aplicando dúas veces a expresión da Proposición 2.8, tense que

$$\begin{aligned} P_\omega d P_\omega d\alpha &= d^2\alpha + d(\rho_*\omega \wedge \alpha) + \rho_*\omega \wedge d\alpha + \rho_*\omega \wedge \rho_*\omega \wedge \alpha \\ &= \rho_*(d\omega) \wedge \alpha - \rho_*\omega \wedge d\alpha + \rho_*\omega \wedge d\alpha + \rho_*\omega \wedge \rho_*\omega \wedge \alpha \\ &= (\rho_*(d\omega) + \rho_*\omega \wedge \rho_*\omega) \wedge \alpha = \rho_*\Omega \wedge \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Sexa agora E o fibrado principal de referencias para un fibrado vectorial V sobre M (ver Exemplo A.19). Sexa s unha referencia local de V, que se pode considerar como unha sección local de E. Unha conexión en E con forma de conexión ω pode ser expresada mediante a 1-forma local $s^*\omega$ en M con valores en $\mathrm{End}(V)$. A curvatura de dita conexión vén dada localmente entón pola 2-forma $s^*\Omega$ sobre M con valores en $\mathrm{End}(V)$. En efecto, se usamos s para dar unha trivialización local de V (de xeito que as seccións de V se correspondan con funcións con valores en $\mathbb{R}^m$), a Proposición 2.8 permite expresar a conexión respecto de dita trivialización local da forma

$$\nabla = d + s^*\omega.$$

Ademais considerando coordenadas locais x^i, tense que

$$s^*\omega = \Gamma_i dx^i.$$

Definición 2.12. Unha referencia local de V dise que é *sincrónica arredor de p* (respecto das coordenadas locais dadas) se é paralela ao longo das liñas radiais que saen da orixe p.

É obvio que para obter unha referencia sincrónica en torno a p basta tomar unha vase de V_p e extendela mediante transporte paralelo ao longo das liñas radiais. Ademais, se V posúe unha métrica coa cal a conexión determinada pola referencia é compatible, pódese escoller unha referencia ortonormal, debido a que o transporte paralelo conserva o produto interior. Empregando un razoamento semellante ao da Proposición 1.20 obtense o resultado seguinte.

Proposición 2.13. *Na orixe dunha referencia sincrónica os símbolos de Christoffel anúlanse.*

A continuación expoñerase a noción de conexión plana nun fibrado principal.

Definición 2.14. Unha conexión en E dise que é *plana* se todo $p \in M$ ten unha veciñanza U tal que a conexión inducida en $\pi^{-1}(U)$ é isomorfa á conexión plana canónica de $U \times G$. Esta condición significa que existe un isomorfismo de trivialidade $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ que aplica o subespazo horizontal en cada $u \in \pi^{-1}(U)$ no subespazo horizontal en $\psi(u)$ da denominada *conexión plana canónica* de $U \times G$, cuio subfibrado horizontal está dado polos tanxentes ás fibras $U \times \{a\}$, para $a \in G$.

Teorema 2.15 (Véxase [11, Capítulo II, Teorema 9.1])**.** *Unha conexión en E é plana se e só se a forma de curvatura é nula.*

Corolario 2.16 (Véxase [11, Capítulo II, Corolario 9.2])**.** *Sexa unha conexión en E cuia forma de curvatura é nula e supoñamos que M é simplemente conexa. Entón E é isomorfo ao fibrado trivial $M \times G$ e a conexión é isomorfa á conexión plana canónica en $M \times G$.*

2.2. Clases características

Introducirase aquí a noción das clases características, cuia primeira utilidade é a de determinar cando dous fibrados vectoriais sobre unha variedade non son isomorfos.

Definición 2.17. Unha *clase característica* c é unha correspondencia que a cada fibrado vectorial V sobre unha variedade M lle asocia un elemento $c(V) \in H^*(M)$, de xeito que se $V_1 \cong V_2$ entón $c(V_1) = c(V_2)$, e $c(f^*V) = f^*c(V)$ para toda aplicación diferenciable $f : N \to M$.

Observación 2.18. Considérense as categorías Set e Man de aplicacións entre conxuntos e aplicacións diferenciables entre variedades diferenciables, respectivamente. Cada clase característica c pódese interpretar como unha transformación natural $c : F \to G$, onde $F, G : \text{Man} \to \text{Set}$ os funtores que asocian:

- a cada variedade M os conxuntos[3], $F(M)$ das clases de isomorfía de fibrados vectoriais diferenciables (reais ou complexos) sobre M, e $G(M)$ subxacente a cohomoloxía de de Rham $H^*(M)$ (con coeficientes reais ou complexos), e,
- a cada aplicación diferenciable $f : M \to N$ as aplicacións $f^* : F(N) \to F(M)$ e $f^* : G(N) \to G(M)$ inducidas pola imaxe recíproca de fibrados vectoriais e formas diferenciables, respectivamente.

Observación 2.19. Máis xeralmente, poderíase definir clases características de fibrados vectoriais sobre espazos topolóxicos, considerando a categoría Top, de aplicacións continuas entre espazos topolóxicos, en vez de Man, e os funtores contravariantes $F, G : \text{Top} \to \text{Set}$, onde F se define análogamente sen usar diferenciabilidade, e G é subxacente ó funtor cohomoloxía singular. Pero para os obxetivos deste traballo chega con restrinxirse ao caso diferenciable.

Entre as moitas aproximacións á teoría de clases características, aquí empregarase a de Chern-Weil. Consideraranse clases características con coeficientes complexos e fibrados vectoriais complexos. Recórdese que a *cohomoloxía de de Rham* $H^*(M)$ é o espazo vectorial das formas *pechadas* ($\ker d$) módulo as formas *exactas* ($\operatorname{im} d$), segundo se obtén a partir do complexo de de Rham:

$$0 \xrightarrow{d} C^\infty(M) \equiv \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

Recórdese que toda forma exacta é pechada debido a que $d^2 = 0$, e que a cohomoloxía de de Rham se anula para aqueles graos maiores cá dimensión de M.

A idea do método de Chern-Weil é a seguinte. O Teorema 2.15 indícanos que, para todo fibrado vectorial V sobre M que teña unha conexión, a curvatura de dita conexión

[3] Sen pérdida de xeralidade, pódense considerar só fibrado vectoriais definidos como cocientes asociados da forma usual a cociclos con valores en grupos lineais xerais, obtendo que $F(M)$ é un conxunto ben definido.

mide localmente canto se desvía a mesma da condición de ser plana. Ademais, segundo o Corolario 2.16, se a conexión de V é plana e M é simplemente conexa, sucede que V é un fibrado trivial. Este feito suxire que a curvatura e as clases características deben estar relacionadas dalgún xeito que mida canto se separa V da condición de trivialidade. Dita relación virá dada polos polinomios invariantes.

Definición 2.20. Sexa $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ a álxebra de Lie das matrices cadradas non singulares de tamaño m sobre $\mathbb{C}$. Un *polinomio invariante* sobre $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ é unha función polinómica $P : \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ (cuia expresión vén dada por un polinomio formado coas compoñentes das matrices) tal que $P(XY) = P(YX)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$. Unha *serie de potencias formal invariante* é unha serie de potencias formal sobre $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ verificando que cada unha das súas compoñentes homoxéneas é un polinomio invariante.

A traza e o determinante dunha matriz son polinomios invariantes.

Lema 2.21. *O conxunto de polinomios invariantes en $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ é un anel de polinomios xerado polos $c_k(X) = (-2\pi i)^{-k} \operatorname{tr}(\bigwedge^k X)$, onde $\bigwedge^k X$ denota o endomorfismo de $\bigwedge^k \mathbb{C}^m$ inducido por X.*

Demostración. É inmediato comprobar que a suma e o produto son operacións pechadas no conxunto dos polinomios invariantes, polo que forman un anel. Sexa P un polinomio invariante. A conxugación de matrices non afecta a P, pois

$$P(YXY^{-1}) = P(Y^{-1}YX) = P(X).$$

Se nos restrinximos a matrices diagonais, P será unha función polinómica dos elementos da diagonal. Logo ten que ser simétrica debido a que os elementos da diagonal se poden permutar por conxugación empregando matrices de cambio de fila. En particular, ten que ser unha función polinómica simétrica dos autovalores de toda matriz con autovalores distintos, xa que o teorema de diagonalización indica que ditas matrices son conxugadas de matrices diagonais. Pero tal conxunto de matrices é denso en $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$, polo que a continuidade de P implica que P é unha función polinónmica simétrica dos autovalores de calquera matriz. Ademais $\operatorname{tr}(\bigwedge^k X)$ é o k-ésimo *polinomio simétrico elemental*. Finalmente, existe un teorema (véxase [12, Capítulo V, Teorema 11]) que indica que o anel de polinomios simétricos está xerado polos polinomios simétricos elementais, polo que estará xerado tamén polos c_k, que son múltiplos deles. □

Observación 2.22. Os polinomios simétricos elementais en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ son

$$s_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Considerando unha referencia local nun fibrado vectorial complexo V sobre M que posúa unha conexión, pódese pensar a 2-forma de curvatura K en M con valores en $\operatorname{End}(V)$ coma unha matriz cadrada de 2-formas ordinarias. Aplicándolle un polinomio invariante P

obtense unha forma par $P(K)$. Debido a que os cambios de base se fan mediante conxugación, $P(K)$ é independente da referencia local escollida e, polo tanto, pode ser definida globalmente.

Sexa E o fibrado principal de referencias para V e Ω a 2-forma de curvaura da conexión inducida en E, a cal toma valores en $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ e é horizontal e Ad-equivariante, segundo a Proposición 2.11. Entón $P(\Omega)$ é unha forma horizontal invariante sobre E que é precisamente o levantamento a E da forma $P(K)$ de M.

Cabe destacar tamén que o carácter nilpotente[4] das 2-formas fai que toda serie de potencias formal que teña 2-formas por variables sexa converxente. Por iso, a construción anterior é válida tamén para series de potencias formais.

Proposición 2.23. *Para todo polinomio invariante (ou serie de potencias formal) P, tense que $P(K)$ é unha forma pechada e que a súa clase de cohomoloxía de de Rham é independente da conexión tomada en V.*

Demostración. Establecerase que P é *respectable* se verifica as teses desta proposición. É obvio que a suma e o produto de series respectables tamén o é. Logo bastará probar que os xeradores $c_k(K) = (-2\pi i)^{-k}\operatorname{tr}(\bigwedge^k K)$ da Proposición 2.21 son respectables. Posto que

$$\det(1+qK) = \sum_k q^k \operatorname{tr}\left(\bigwedge\nolimits^k K\right),$$

é suficiente ver que $\det(1+qK)$, considerado como serie de potencias formal con parámetro q, é respectable. Ademais a composición dunha serie de potencias formal respectable cunha función holomorfa nunha veciñanza do termo constante da serie dá lugar a outra serie respectable. Consecuentemente, chega con probar que $\log\det(1+qK)$ é respectable.

Tomarase o fibrado principal de referencias E para V, a 1-forma da conexión con valores matriciais ω, e a correspondente 2-forma da curvatura Ω. Partirase da fórmula

$$\Omega = d\omega + \omega^2$$

da Observación 2.10, onde o produto considerado no anel de formas con valores matriciais resulta de tensorizar o produto exterior coa multiplicación usual de matrices.

Supoñamos que ω depende dun parámetro t, polo que Ω tamén dependerá de tal parámetro. Derivando con respecto a t obtense

$$\dot{\Omega} = d\dot{\omega} + \omega\dot{\omega} + \dot{\omega}\omega.$$

Deste xeito, tense que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log\det(1+q\,\Omega) &= \operatorname{tr}\left\{\frac{d}{dt}\log(1+q\,\Omega)\right\} = q\operatorname{tr}\left\{(1+q\,\Omega)^{-1}\dot{\Omega}\right\}\\ &= q\operatorname{tr}\left\{\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(q\,\Omega)^l\right)\dot{\Omega}\right\} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l q^{l+1}\operatorname{tr}\{\,\Omega^l\,(d\dot{\omega}+\omega\dot{\omega}+\dot{\omega}\omega)\,\}.\end{aligned}$$

[4] Aquí, este término significa que algunha potencia se anula.

Por outra banda, tendo en conta que $d\omega = \Omega - \omega^2$, dedúcese que

$$d\Omega = d^2\omega + d(\omega^2) = d\omega\,\omega + (-1)^1\,\omega\,d\omega = (\Omega - \omega^2)\,\omega - \omega\,(\Omega - \omega^2) = \Omega\omega - \omega\Omega.$$

Cabe destacar que a expresión $d\Omega = \Omega\omega - \omega\Omega$ recibe o nome de *segunda identidade de Bianchi*, a cal pode ser xeralizada por inducción facendo

$$d(\Omega^l) = d(\Omega\,\Omega^{l-1}) = d\Omega\,\Omega^{l-1} + (-1)^2\,\Omega^{l-1}\,d\Omega = \Omega^l\omega - \omega\Omega^l.$$

Empregando a simetría da traza e a segunda identidade de Bianchi obtense

$$\mathrm{tr}\{\,\Omega^l(\omega\dot\omega + \dot\omega\omega)\,\} = \mathrm{tr}\{\,\Omega^l\omega\dot\omega - \omega\Omega^l\dot\omega\,\} = \mathrm{tr}\{\,(d\Omega^l)\,\dot\omega\,\},$$

de onde

$$\mathrm{tr}\{\,\Omega^l\,\dot\Omega\,\} = \mathrm{tr}\{\,\Omega^l\,(d\dot\omega + \omega\dot\omega + \dot\omega\omega)\,\} = \mathrm{tr}\{\,\Omega^l d\dot\omega\,\} + \mathrm{tr}\{\,(d\Omega^l)\,\dot\omega\,\} = d\,\mathrm{tr}\{\,\Omega^l\dot\omega\,\}.$$

Substituíndo na expresión do comezo, conclúese que

$$\frac{d}{dt}\log\det(1 + q\,\Omega) \;=\; d\,\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l q^{l+1}\,\mathrm{tr}\{\,\Omega^l\dot\omega\,\}$$

é unha forma exacta. De feito, trátase da derivada exterior dunha forma horizontal e invariante de E, xa que Ω é unha forma horizontal e invariante (véxase a Proposición 2.11). Polo tanto, a súa proxección en M

$$\frac{d}{dt}\log\det(1 + q\,K)$$

é tamén unha forma exacta. Como todo fibrado é localmente un produto (véxase a Definición A.1), toda conexión pode ser deformada localmente ata facerse plana. Logo $\log\det(1 + q\,K)$ é localmente exacta e, consecuentemente, é unha forma pechada. Ademais unha conexión pódese transformar en calquera outra mediante o segmento que as une no espazo afín das conexións (véxase a Observación 1.2), polo que a clase de cohomoloxía de de Rham de $\log\det(1 + q\,K)$ é independente da conexión tomada. □

Como consecuencia da Proposición 2.23, toda serie de potencias formal invariante define unha clase característica para fibrados vectoriais complexos, pois basta considerar unha conexión calquera e aplicar P á súa curvatura. Deste xeito, os xeradores c_k correspóndense con clases caracaterísticas que reciben o nome de *clases de Chern*. Segundo a Proposición 2.21, toda clase característica definida por un polinomio invariante é un polinomio sobre as clases de Chern.

Supóñase agora que V é un fibrado vectorial real e sexa $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a súa complexificación. Pódense tomar en V unha métrica e unha conexión compatible con ela. A súa curvatura K é unha 2-forma con valores en $\mathfrak{o}(m)$. As clases de Chern impares de $V_{\mathbb{C}}$ anúlanse debido ao carácter antisimétrico de K, pois

$$\mathrm{tr}\left(\bigwedge\nolimits^k K\right) = (-1)^k\,\mathrm{tr}\left(\bigwedge\nolimits^k K\right).$$

Chámanse *clases de Pontrjagin* de V ás clases de Chern pares de $V_{\mathbb{C}}$, e escríbese

$$p_k(V) = (-1)^k c_{2k}(V_{\mathbb{C}}).$$

Por outra banda, dada unha función $f(z)$ holomorfa nunha veciñanza de $z = 0$, pódese construír unha serie de potencias formal invariante Π_f mediante

$$\Pi_f(X) = \det\left(f\left(\frac{-1}{2\pi i}X\right)\right).$$

A clase característica asociada a Π_f denomínase o *f-xénero de Chern*, o cal cumpre as seguintes propiedades relativas a fibrados vectoriais complexos:

(i) para todo fibrado unidimensional V, $\Pi_f(V) = f(c_1(V))$;

(ii) para todo par de fibrados V_1 e V_2, $\Pi_f(V_1 \oplus V_2) = \Pi_f(V_1)\Pi_f(V_2)$.

A propiedade (i) é consecuencia inmediata de que $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. Na demostración de (ii) emprégase o *principio de escisión* (véxase [16, Capítulo IV, Proposición 5.5]), o cal di que para todo fibrado vectorial V sobre unha variedade M, existe un espazo X e unha aplicación $g : X \to M$ cumprindo que g^*V escinde como suma directa de fibrados unidimensionais, e que $g^* : H^*(M) \to H^*(X)$ é un monomorfismo.

No caso de que os autovalores da matriz $\frac{-1}{2\pi i}X$ se denoten por x_j, tense que $\Pi_f(X) = \prod f(x_j)$, xa que o determinante da matriz $f\left(\frac{-1}{2\pi i}X\right)$ vén dado polo produto dos seus autovalores. Logo $\Pi_f(X)$ é unha serie simétrica, polo que se pode expresar mediante polinomios simétricos elementais das variables formais x_j, é dicir, mediante as clases de Chern. Así, é frecuente escribir $\Pi_f(V) = \prod f(x_j)$, sendo as x_j variables formais cumprindo as relacións impostas polas clases de Chern.

Exemplo 2.24. A *clase total de Chern* dun fibrado vectorial V defínese por $c(V) = 1 + c_1(V) + c_2(V) + \cdots$. Trátase do xénero de Chern correspondente a $f(z) = 1 + z$, xa que

$$\Pi_f(V) = \det\left(1 + \frac{-1}{2\pi i}K\right) = \sum_k \left(\tfrac{-1}{2\pi i}\right)^k \operatorname{tr}\left(\textstyle\bigwedge^k K\right) = \textstyle\sum_k c_k(V) = c(V).$$

Así, a propiedadee (ii) anterior asegúranos que $c(V_1 \oplus V_2) = c(V_1)c(V_2)$. Esta fórmula recibe o nome de *suma de Whitney* para as clases de Chern.

Exemplo 2.25. Dado un fibrado V, o xénero asociado a $f(z) = (1 + z)^{-1}$ é

$$\Pi_f(V) = \prod (1 + x_j)^{-1} = (1 - x_1 + x_1^2)(1 - x_2 + x_2^2)(\cdots) = 1 - c_1 + (c_1^2 - c_2).$$

Definición 2.26. O *carácter de Chern* dun fibrado V é a clase característica correspondente á serie de potencias $X \mapsto \operatorname{tr}(\exp(\frac{-1}{2\pi i}X))$, é dicir, $\operatorname{ch}(V) = \sum_j e^{x_j}$.

Observación 2.27. O carácter de Chern non é o xénero de Chern asociado á unha función exponencial, pois aparece unha suma en lugar dun produto debido a que se toma a traza en vez do determinante. Sen embargo, trátase dunha especie de homomorfismo de aneis porque verifica que

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(V_1 \oplus V_2) &= \mathrm{ch}(V_1) + \mathrm{ch}(V_2), \\ \mathrm{ch}(V_1 \otimes V_2) &= \mathrm{ch}(V_1)\,\mathrm{ch}(V_2). \end{aligned}$$

Desenvolvendo e^{x_j} como serie de potencias, pódense calcular os seus primeiros termos, resultando $\mathrm{ch}(V) = \dim(V) + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2) + \cdots$.

Centrarémonos agora no caso de fibrados vectoriais reais, para os cales existe unha definición análoga do xénero. Sexa g unha función holomorfa nunha veciñanza do cero, tal que $g(0) = 1$. Denotarase por f á rama da función

$$z \;\mapsto\; \left(g\left(z^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

que verifica $f(0) = 1$. Dado que g non se anula na orixe, f é unha función holomorfa arredor do cero que resulta ser par. Logo o f-xénero de Chern só involucra clases de Chern pares. Defínese o *g-xénero de Pontrjagin* dun fibrado vectorial real V como o f-xénero de Chern de $V_{\mathbb{C}}$.

Lema 2.28. *O g-xénero de Pontrjagin dun fibrado vectorial real V vén dado pola expresión*

$$\Pi_f(V_{\mathbb{C}}) = \prod_j g(y_j),$$

onde as y_j son variables formais suxeitas ás relacións marcadas polas clases de Pontrjagin.

Demostración. Como consecuencia do teorema espectral, toda matriz de $\mathfrak{o}(n)$ é semellante sobre $\mathbb{R}$ a unha matriz diagonal por bloques de tamaño 2 da forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalores $\pm i\lambda$. Considerada como matriz complexa, X é semellante a

$$\begin{pmatrix} -i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix},$$

de onde

$$c_2(X) = \frac{1}{(2\pi i)^2}(-i\lambda)(i\lambda) = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2}.$$

A condición (ii) que verifica o xénero de Chern indícanos que os dous membros da igualdade son multiplicativos para sumas directas, polo que basta probala para X. Posto que $y = p_1(X) = -c_2(X)$ e f é unha función par, tense que

$$\Pi_f(X) = f\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) f\left(\frac{-\lambda}{2\pi}\right) = \left(f\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right)^2 = g\left(\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\right) = g(y). \quad \square$$

Capítulo 3

Álxebras de Clifford e operadores de Dirac

Definición 3.1. Sexa K un corpo e V un K-espazo vectorial dotado dunha forma bilinear simétrica $(\ ,\ )$. Unha *álxebra de Clifford*[1] para V consiste nunha K-álxebra unitaria[2] $\mathcal{A}$ xunto cunha aplicación $\varphi : V \to \mathcal{A}$ cumprindo que $\varphi(v)^2 = -(v,v)1$, e tal que $\mathcal{A}$ é universal entre todas as K-álxebras equipadas con ditas aplicacións.

Observación 3.2. A condición de universalidade anterior significa que, se $\mathcal{A}'$ xunto con $\varphi' : V \to \mathcal{A}'$ é outra K-álxebra tal que $\varphi'(v)^2 = -(v,v)1$, entón existirá un único homomorfismo de álxebras de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ facendo conmutativo o diagrama seguinte:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathcal{A}' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.3. Se a forma bilinear de V é idénticamente nula, a álxebra exterior $\bigwedge V^*$ é unha álxebra de Clifford. En efecto, definindo $\varphi(v) = v^* \in V^*$ para todo $v \in V$, tense que

$$\varphi(v)^2 = v^* \wedge v^* = 0 = -(v,v)1.$$

Proposición 3.4. *Para todo K-espazo vectorial V cunha forma bilinear existe unha única álxebra de Clifford, salvo isomorfismo.*

Demostración. A unicidade dedúcese inmediatamente a partir da propiedade universal detallada na Observación 3.2. Para construír unha álxebra de Clifford basta tomar unha base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V e considerar $\mathcal{A}$ xerada polos 2^n produtos posibles $\varphi(e_1)^{k_1} \cdots \varphi(e_n)^{k_n}$,

[1] As álxebras de Clifford pódense definir equivalentemente como un certo cociente da álxebra tensorial de V (véxase [13, Capítulo I, Proposición 1.1]).

[2] Isto quere dicir que existe un homomorfismo de aneis unitarios conmutativos de K en $\mathcal{A}$.

con $k_i \in \{0,1\}$ para todo i; e estando a regra de multiplicación en $\mathcal{A}$ dada por (supoñendo que a característica de K non é 2)

$$\varphi(v_1)\varphi(v_2) + \varphi(v_2)\varphi(v_1) = -2(v_1, v_2). \quad \square \tag{3.1}$$

Observación 3.5. A expresión $\varphi(v)^2 = -(v,v)1$ obtense directamente de (3.1) e, recíprocamente, dita expresión dá lugar a (3.1) ao desenvolver os produtos

$$(\varphi(v_1) + \varphi(v_2))^2 = \varphi(v_1 + v_2)^2 = -(v_1 + v_2, v_1 + v_2)1.$$

A álxebra de Clifford dun espazo vectorial V de dimensión n cunha forma bilinear denótase por $\mathrm{Cl}(V)$ e ten dimensión 2^n. Pola construción de $\mathrm{Cl}(V)$, a aplicación $\varphi : V \to \mathrm{Cl}(V)$ é inxectiva e, polo tanto, poderase considerar V como subespazo vectorial da súa álxebra de Clifford ao identificar cada $v \in V$ coa súa imaxe $\varphi(v)$.

Sexa agora V un espazo vectorial real con produto interior, e sexa $\{e_1, \dots, e_n\}$ unha base ortonormal. Considérese outro espazo vectorial real S que sexa tamén un módulo pola esquerda sobre $\mathrm{Cl}(V)$, e tómese o espazo $C^\infty(V;S)$ as funcións diferenciables en V convalores en S. Considerando unha conexión no fibrado vectorial trivial $V \times S$ sobre V, cada elemento básico e_i se corresponde cun operador diferencial ∂_i en $C^\infty(V;S)$.

Definición 3.6. O *operador de Dirac* D de $C^\infty(V;S)$ é aquel que, para cada $s \in C^\infty(V;S)$, adopta a expresión

$$Ds = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \partial_i s,$$

onde "$\cdot$" denota a accion de $\mathrm{Cl}(V)$ sobre S.

O operador D^2 recibe o nome de *Laplaciano de Dirac* porque ten un comportamento análogo ao Laplaciano euclidiano, xa que

$$D^2 s = \sum_{i,j} e_j \partial_j (e_i \partial_i s) = \sum_{i,j} e_j e_i \partial_j \partial_i s = -\sum_i \partial_i^2 s.$$

Observación 3.7. Cabe destacar que, a pesar de que S pode ser un espazo vectorial real, é máis cómodo traballar con módulos complexos. Por iso, cando se fale do *módulo de Clifford* dun espazo vectorial real V con produto interior referirase a un módulo pola esquerda sobre a álxebra complexa $\mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. De maneira equivalente, tamén se pode referir a un espazo vectorial complexo S xunto cunha aplicación $\mathbb{R}$-linear $c : V \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ que verifique $c(v)^2 = -(v,v)1$, para todo $v \in V$.

A continuación, xeralizarase esta construción para unha variedade de Riemann M, sobre a cal ten sentido considerar o fibrado de álxebras de Clifford $\mathrm{Cl}(TM)$ debido a que o seu fibrado tanxente é unión disxunta dos espazos con produto interior T_pM. Deste xeito, un *fibrado de módulos de Clifford* S será aquel que cumpra que cada fibra S_p, con $p \in M$, é un módulo pola esquerda sobre a álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(T_pM) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. As seccións do fibrado S de M xogarán o papel de funcións en TM (constantes en cada T_pM) con valores en S. Logo necesitamos definir unha conexión en S para poder diferenciar ditas seccións.

Definición 3.8. Sexa S un fibrado de módulos de Clifford sobre M. Dise que S é un *fibrado de Clifford* se posúe unha métrica hermitiana e una conexión compatible con ela verificando as propiedades seguintes:

(i) A acción de Clifford de cada vector $v \in T_pM$ sobre a fibra S_p é antisimétrica, é dicir, $(v \cdot s_1, s_2) + (s_1, v \cdot s_2) = 0$.

(ii) A conexión en S é compatible coa conexión de Levi-Civita de M no sentido de que $\nabla_X(Ys) = (\nabla_X Y)s + Y\nabla_X s$, para todo par de campos de vectores X e Y sobre M e toda sección $s \in C^\infty(S)$.

Consideraranse habitualmente fibrados de Clifford que sexan $\mathbb{Z}_2$-graduados, é dicir que admitan unha descomposición $S = S^+ \oplus S^-$. Ademais esixirase que tanto a métrica como a conexión respecten dita descomposición. Respectivamente, estas condicións significan que $(s_1, s_2) = (s_1^+, s_2^+) + (s_1^-, s_2^-)$, para todo $s_1, s_2 \in S$; e que $\nabla_X s^\pm \in C^\infty(S^\pm)$, para toda $s^\pm \in C^\infty(S^\pm)$. Dirase que a acción de Clifford dun $v \in T_pM$ sobre S é *par* se aplica cada sumando $S^\pm$ de S en si mesmo, e que é *impar* se aplica S^+ en S^-, e viceversa. Impoñerase tamén que a acción de Clifford sexa impar.

Definición 3.9. O *operador de Dirac D* dun fibrado de Clifford S é o operador diferencial de primeira orde en $C^\infty(S)$ dado pola composición

$$C^\infty(S) \longrightarrow C^\infty(T^*M \otimes S) \longrightarrow C^\infty(TM \otimes S) \longrightarrow C^\infty(S),$$

onde a primeira frecha se corresponde coa conexión, a segunda coa métrica (identificando $TM \equiv T^*M$) e a terceira coa acción de Clifford.

Dado que a conexión e a métrica respectan a descomposición e que a acción de Clifford é impar, no caso $\mathbb{Z}_2$-graduado o operador de Dirac é impar, é dicir, leva seccións de S^+ en seccións de S^-, e viceversa. Con respecto a unha referencia local ortonormal e_i de TM, tense a expresión

$$Ds = \sum_{i=1}^{n} e_i \nabla_i s.$$

Definición 3.10. Sexan S un fibrado de Clifford e $K \in \Omega^2(\mathrm{End}(S))$ unha 2-forma en M con valores en $\mathrm{End}(S)$. Sexa e_i unha referencia local ortonormal de TM. O endomorfismo de S (suma de composicións de endomorfismos de S) dado por

$$\mathsf{K} = \sum_{i<j} c(e_i)c(e_j)K(e_i, e_j)$$

chámase *contracción de Clifford* de K; e non depende da referencia escollida.

Proposición 3.11. *O Laplaciano de Dirac dun fibrado de Clifford S vén dado pola expresión*

$$D^2 s = \nabla^\dagger \nabla s + \mathsf{K}s,$$

a cal recibe o nome de fórmula de Weitzenbock.

Demostración. Considérese unha referencia local ortonormal e_i que sexa sincrónica arredor dun punto $p \in M$. Pola Proposición 2.13, os símbolos de Christoffel anúlanse en p, de onde $\nabla_i e_j = 0$ en p. Como se está a considerar a conexión de Levi-Civita en M, no punto p cúmprese que

$$[e_i, e_j] = \nabla_i e_j - \nabla_j e_i = 0.$$

Consecuentemente, empregando a propiedade (ii) da Definición 3.8, obtense

$$D^2 s = \sum_{i,j} e_j \nabla_j (e_i \nabla_i s) = \sum_{i,j} e_j e_i \nabla_j \nabla_i s = -\sum_i \nabla_i^2 s + \sum_{j<i} e_j e_i (\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) s,$$

en p. O primeiro sumando desta expresión é o resultado de aplicar á sección s un operador de orde 2 análogo ao Laplaciano euclidiano, e denótase por $\nabla^\dagger \nabla$. O segundo sumando da mesma trátase dun endomorfismo de S porque coincide coa contracción de Clifford K da curvatura da súa conexión, pois

$$\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j + \nabla_{[e_j, e_i]} = K(e_j, e_i). \quad \square$$

Explicarase agora o motivo da notación $\nabla^\dagger \nabla$. Lémbrese que a conexión ∇ interprétase como un operador diferencial de $C^\infty(S)$ en $C^\infty(T^*M \otimes S)$, onde eses dous fibrados posúen sendas métricas, polo que os seus espazos de seccións diferenciables presentan produtos interiores dun xeito natural. A proposición seguinte indícanos cal é o simétrico $\nabla^\dagger$ de ∇ con respecto a ditos produtos interiores. Logo $\nabla^\dagger \nabla$ é un operador diferencial de $C^\infty(S)$ en si mesmo, que será precisamente o que aparece na fórmula de Weitzenbock.

Proposición 3.12. *O operador $\nabla^\dagger : C^\infty(T^*M \otimes S) \to C^\infty(S)$ está dado, en coordenadas locais, pola expresión*

$$\nabla^\dagger (dx^j \otimes s_j) = -\sum_k g^{jk} (\nabla_j s_k - \Gamma^i_{jk} s_i).$$

En particular, na orixe dunha referencia local ortonormal sincrónica e_i, tense

$$\nabla^\dagger (\sum_i e_i \otimes s_i) = -\sum_i \nabla_i s_i.$$

Demostración. Supoñamos que o enunciado é certo e vexamos que $\nabla^\dagger$ efectivamente é o simétrico de ∇. Trátase de probar que

$$\langle s, \nabla^\dagger \varphi \rangle = \langle \nabla s, \varphi \rangle,$$

sendo $s \in C^\infty(S)$, $\varphi = dx^j \otimes s_j \in C^\infty(T^*M \otimes S)$ tales que algunha delas teña soporte compacto. A función diferenciable de M dada pola diferencia dos produtos interiores locais verifica que

$$\begin{aligned}(s, \nabla^\dagger \varphi) - (\nabla s, \varphi) &= \sum_k \left(-g^{jk} (s, \nabla_j s_k) + g^{jk} \Gamma^i_{jk} (s, s_i) - g^{jk} (\nabla_j s, s_k) \right) \\ &= \sum_k \left(-g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^j} (s, s_k) + g^{jk} \Gamma^i_{jk} (s, s_i) \right).\end{aligned}$$

A partir da fórmula (1.2) do Exemplo 1.32, considerando nela j constante, dedúcese que o último termo da anterior expresión coincide con $d^\dagger\omega$, onde ω é a 1-forma $\omega(X) = (X \otimes s, \varphi)$, pois

$$\omega(X) = (X \otimes s, \varphi) = (X \otimes s, dx^j \otimes s_j) = (s, s_j)dx^j.$$

Integrando e aplicando o teorema da diverxencia (ver Exemplo 1.32) obtense

$$\langle s, \nabla^\dagger\varphi\rangle - \langle \nabla s, \varphi\rangle = \int_M (s, \nabla^\dagger\varphi)\,\mathrm{vol} - \int_M (\nabla s, \varphi)\,\mathrm{vol} = \int_M d^\dagger\omega\,\mathrm{vol} = 0. \quad \square$$

En particular, tense que $\nabla^\dagger\nabla$ é un *operador positivo*, é dicir, cumpre que

$$\langle \nabla^\dagger\nabla s, s\rangle = \langle \nabla s, \nabla s\rangle = \|\nabla s\|^2 \geq 0.$$

Teorema 3.13 (Bochner)**.** *Se en cada punto dunha variedade compacta M con fibrado de Clifford S o menor autovalor de K é estritamente positivo, entón non existen solucións non triviais da ecuación $D^2 s = 0$.*

Demostración. Para cada $p \in M$ sexa $c_p > 0$ o menor autovalor de K en p, o cal verifica que $\langle \mathsf{K}s, s\rangle \geq c_p\|s\|^2$ para todo $s \in S_p$. Dado que K é un operador continuo, a aplicación $p \in M \to c_p \in \mathbb{R}^+$ é continua sobre a variedade compacta M. Logo existe $c = \min\{\, c_p \mid p \in M \,\} > 0$, tal que $\langle \mathsf{K}s, s\rangle \geq c\|s\|^2$. Pola fórmula de Weitzenbock (ver Proposición 3.11), se $D^2 s = 0$, chégase á contradición

$$\langle \mathsf{K}s, s\rangle = \langle D^2 s, s\rangle - \|\nabla s\|^2 \leq 0. \quad \square$$

Proposición 3.14. *O operador de Dirac dun fibrado de Clifford S é un operador simétrico.*

Demostración. Sexan s_1 e s_2 seccións diferenciables de S, sendo algunha delas de soporte compacto. Probarase que

$$\langle Ds_1, s_2\rangle = \langle s_1, Ds_2\rangle$$

empregando o mesmo razoamento ca na Proposición 3.12, é dicir, comprobando que a expresión local correspondente é unha diverxencia. Considérese unha referencia local ortonormal sincrónica e_i arredor dun punto p. Como a acción de Clifford de cada vector en calquera fibra é antisimétrica, sucede que

$$\begin{aligned}(Ds_1, s_2) - (s_1, Ds_2) &= \sum_i (e_i\nabla_i s_1, s_2) - \sum_i (s_1, e_i\nabla_i s_2)\\ &= \sum_i (\nabla_i e_i s_1, s_2) + \sum_i (e_i s_1, \nabla_i s_2) = \sum_i \nabla_i (e_i s_1, s_2),\end{aligned}$$

en p. Aplicando a fórmula (1.1) do Exemplo 1.32, o último termo desta expresión coincide con $d^\dagger\omega$, sendo ω a 1-forma $\omega(X) = -(Xs_1, s_2)$. $\square$

Sexa S un fibrado de Clifford sobre unha variedade de Riemann M na que se considera unha referencia local ortonormal e_i, e sexa $c : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{End}(S)$ a correspondente acción de Clifford. Denotarase por R ao operador curvatura de TM e por K ao operador curvatura de S.

Lema 3.15. *Como endomorfismos de S, verifícase que*

$$[K(X,Y),c(Z)] = c(R(X,Y)Z).$$

para calesquera campos de vectores X, Y e Z.

Demostración. Basta comprobar a igualdade punto a punto, polo que se pode tomar unha referencia sincrónica e_i nun punto $p \in M$ e facer $X = e_i$, $Y = e_j$ e $Z = e_k$ arredor de p. A partir da Definición 3.8-(ii) obtense que

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j(e_k s) = (\nabla_i\nabla_j e_k)s + (\nabla_j e_k)(\nabla_i s) + (\nabla_i e_k)(\nabla_j s) + e_k\nabla_i\nabla_j s\\ = (\nabla_i\nabla_j e_k)s + e_k\nabla_i\nabla_j s,\end{aligned}$$

xa que os símbolos de Christoffel se anulan en p por tratarse dunha referencia sincrónica. Razoando do mesmo xeito ca na Proposición 3.11, dedúcese que tanto a curvatura de TM como a de S en P están dadas por $\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i$ con respecto ás conexións correspondentes. Polo tanto,

$$\begin{aligned}[K(e_i,e_j),c(e_k)]s &= K(e_i,e_j)c(e_k)s - c(e_k)K(e_i,e_j)s\\ &= (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)(e_k s) - e_k(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)s\\ &= (\nabla_i\nabla_j e_k)s - (\nabla_j\nabla_i e_k)s = c(R(e_i,e_j)e_k)s. \quad \square\end{aligned}$$

Definición 3.16. O *endomorfismo de Riemann* R^S do fibrado de Clifford S defínese como a 2-forma sobre M con valores en $\mathrm{End}(S)$

$$R^S(X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{k,l} c(e_k)c(e_l)(R(X,Y)e_k, e_l).$$

Esta definición é independente da referencia ortonormal escollida.

Lema 3.17. *Como endomorfismos de S, verifícase que*

$$[R^S(X,Y),c(Z)] = c(R(X,Y)Z),$$

para calesquera campos de vectores X, Y e Z.

Demostración. Pódese supoñer sen perda de xeralidade que $X = e_i$, $Y = e_j$ e $Z = e_a$. Dado que c é unha aplicación $\mathbb{R}$-linear, empregando a fórmula da Definición 1.15, tense que

$$\begin{aligned}[R^S(e_i,e_j)c(e_a)] &= R^S(e_i,e_j)c(e_a) - c(e_a)R^S(e_i,e_j)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k,l} R_{lkij}(c(e_k)c(e_l)c(e_a) - c(e_a)c(e_k)c(e_l)) = \frac{1}{4}\sum_{k,l} R_{lkij}c([e_k e_l, e_a]).\end{aligned}$$

Posto que e_i é unha referencia ortonormal, cúmprese que

$$\begin{aligned} e_k e_k = e_k^2 = -(e_k, e_k)1 = -1, \\ e_l e_a + e_a e_l = -2(e_l, e_a) = 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente, o conmutador $[e_k e_l, e_a]$ anúlase se $k = l$ ou se os tres índices son distintos. Logo só quedan os termos correspondentes a $a = k \neq l$ ou a $a = l \neq k$. Como

$$[e_a e_l, e_a] = e_a e_l e_a - e_a e_a e_l = -2 e_a e_a e_l = 2e_l,$$

séguese que

$$[R^S(e_i, e_j) c(e_a)] = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{laij} c(2e_l) = c\left(\sum_l R_{laij} e_l \right) = c((e_i, e_j) e_a). \quad \square$$

Proposición 3.18. *A 2-forma da curvatura dun fibrado de Clifford S pódese descompoñer do xeito $K = R^S + F^S$, onde R^S é o endomorfismo de Riemann e F^S é un endomorfismo de S que conmuta coa acción de Clifford.*

Demostración. Polos Lemas 3.15 e 3.17, tense que

$$Kc - cK = R^S c - cR^S.$$

Logo $F^S = K - R^S$ é un endomorfismo que conmuta coa acción de Clifford. $\square$

Definición 3.19. F^S recibe o nome de *curvatura torcida*.

Proposición 3.20. *Verifícase a igualdade seguinte:*

$$\sum_{i,j,k} R_{lkij} c(e_i e_j e_k) = -2 \sum_a \operatorname{Ric}_{la} c(e_a)$$

Demostración. Se os índices i, j, k son distintos tense que $e_i e_j e_k = e_k e_i e_j = e_j e_k e_i$. A primeira identidade de Bianchi (ver Proposición 1.16) indica que $R_{lkij} + R_{lijk} + R_{ljki} = 0$, polo que os correspondentes sumandos do primeiro termo anúlanse. Os sumandos con $i = j$ tamén se anulan debido á antisimetría de R_{lkij} en ditos índices. Só hai que considerar entón os casos $i = k \neq j$ e $i \neq k = j$, que dan lugar a sumandos iguais. O resultado segue do feito de que

$$\sum_{i,j} R_{liij} c(e_j) = -\sum_a \operatorname{Ric}_{la} c(e_a),$$

empregando de novo a Proposición 1.16. $\square$

Utilizando a descomposición da curvatura de S dada na Proposición 3.18 obtense unha versión máis refinada da fórmula de Weitzenbock.

Proposición 3.21. *Sexa S un fibrado de Clifford con operador de Dirac D. Cúmprese que*

$$D^2 = \nabla^\dagger \nabla + \mathsf{F}^S + \frac{1}{4}\kappa,$$

sendo F a contracción de Clifford da curvatura torcida e κ a curvatura escalar da curvatura de Riemann.

Demostración. Considerando a versión da fórmula de Weitzewnbock dada pola Proposición 3.11, basta con probar que

$$\sum_{i<j} c(e_i)c(e_j)R^S(e_i, e_j) = \frac{1}{4}\kappa.$$

Tomando a Definición 3.16, como o caso $i = j$ é nulo, o primeiro membro da anterior expresión é igual a

$$\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} R_{lkij} c(e_i e_j e_k e_l),$$

o cal, debido á Proposición 3.20, coincide con

$$-\frac{1}{4}\sum_{a,l} \mathrm{Ric}_{la}\, c(e_a e_l).$$

Posto que a curvatura de Ricci é un tensor simétrico, tódolos termos se cancelan excepto para $a = l$. Entón resulta $\frac{1}{4}\kappa$, porque $c(e_a e_a) = -1$. □

Estudiarase a continuación o fibrado exterior dunha variedade de Riemann M. Mediante a métrica identifícase o fibrado tanxente TM co fibrado cotanxente T^*M. Considérese o fibrado vectorial $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$, que é naturalmente isomorfo a $\mathrm{Cl}(TM) \otimes \mathbb{C}$. Dada unha referencia ortonormal e_i de TM, o isomorfismo consiste en levar o elemento $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ da álxebra exterior no elemento $e_i \cdots e_k$ da álxebra de Clifford (trátase dun isomorfismo de fibrados vectoriais, mais non dun isomorfismo de álxebras). Logo a estrutura natural que ten $\mathrm{Cl}(TM) \otimes \mathbb{C}$ como módulo pola esquerda sobre si mesmo transmíteselle a $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$, convertíndoo nun fibrado de módulos de Clifford.

Para a álxebra exterior $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$ defínese o *produto interior* dun covector e cunha k-forma ω como

$$e \lrcorner\, \omega = (-1)^{nk+n+1} \star (e \wedge \star\omega).$$

Lema 3.22. *A acción de Clifford dun covector e sobre a forma $\omega \in \bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$ vén dada por*

$$c(e)\omega = e \wedge \omega + e \lrcorner\, \omega.$$

Demostración. Sexa e_i unha referencia ortonormal de TM, e denotarase tamén por e_i á referencia de T^*M dual da mesma. Tómense o covector $e = e_j$ e a k-forma $\omega = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \equiv e_{i_1} \cdots e_{i_k}$. Pódese supoñer que $i_1 < \cdots < i_k$. Cúmprese que $e_j \lrcorner = -\iota_{e_j}$, onde ι denota ao produto interior con respecto a e_j. Distínguense dous casos:

- Se $j = i_r$, tense que $e_j\omega = 0$ por haber repetición de índices, e tamén
$$c(e)\omega = (-1)^r e_{i_1} \cdots \widehat{e_{i_r}} \cdots e_{i_k} = e_j \lrcorner e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = e_j \lrcorner \omega.$$
- Se $j \notin \{i_1 \cdots i_k\}$, sucede que
$$c(e)\omega = e_j \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = e_j \wedge \omega,$$
mentres que
$$e_j \lrcorner \omega = e_j \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = -\iota_{e_j}(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = 0,$$
pois ao desenvolver en sumandos a última expresión todos resultan nulos porque $(e_{i_r}, e_j) = 0$. □

Lema 3.23. *O fibrado $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$, considerado coa súa métrica e conexión naturais, é un fibrado de Clifford.*

Demostración. Hai que comprobar que se verifican as propiedades da Definición 3.8. A métrica de $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$ defínese mediante o operador de Hodge de xeito que $(\omega_1, \omega_2)\,\mathrm{vol} = \omega_1 \wedge \star\omega_2$. Sexan ω_1 unha k-forma e ω_2 unha $(k-1)$-forma. Entón o carácter antisimétrico da acción de Clifford séguese do seguinte (pois $n^2 + 3n$ é sempre par):

$$\begin{aligned}(\omega_2, e \lrcorner \omega_1)\,\mathrm{vol} &= (-1)^{nk+n+1} \omega_2 \wedge \star\star(e \wedge \star\omega_1) \\ &= (-1)^{nk+n+1+n(n-k+1)+(n-k+1)} \omega_2 \wedge e \wedge \star\omega_1 \\ &= (-1)^{n^2+3n-k+2} \omega_2 \wedge e \wedge \star\omega_1 \\ &= (-1)^{n^2+3n-1} e \wedge \omega_2 \star \omega_1 = -(e \wedge \omega_2, \omega_1)\,\mathrm{vol}\end{aligned}$$

Como consecuencia do Lema 3.22 conclúese tamén que o produto interior é o simétrico do produto exterior, obviando o signo. Dado que a conexión de Levi-Civita é compatible co produto exterior e coa métrica, tamén deberá ser compatible co produto interior. □

Proposición 3.24. *O operador de Dirac do fibrado de Clifford $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$ coincide con $d + d^\dagger$.*

Demostración. Sexa e_i unha referencia ortonormal local sincrónica nun punto $p \in M$. Polo Lema 3.22, dada unha forma ω tense que

$$D\omega = \sum_i c(e_i)\nabla_i \omega = \sum_i e_i \wedge \nabla_i \omega + \sum_i e_i \lrcorner \nabla_i \omega.$$

O primeiro sumando trátase de $d\omega$, pois no punto p cúmprese que

$$\sum_i e_i \wedge \nabla_i \omega = \sum_i dx^i \wedge \left(\partial_i \omega + \Gamma^k_{ij} A_k\right) = \sum_i dx^i \wedge \partial_i \omega = d\omega,$$

sendo A o tensor antisimétrico que define á forma ω. Este razoamento só é válido no punto p porque fai uso da Proposición 2.13, pero pódese aplicar a toda a variedade debido a que todo punto é orixe dalgunha referencia sincrónica. Basta comprobar entón que, se ω é unha forma de grao k, o segundo sumando coincide con $d^\dagger\omega$. Tendo en conta a Definición 1.29, sucede que

$$\begin{aligned}\sum_i e_i \lrcorner \nabla_i\omega &= (-1)^{nk+n+1}\sum_i \star(e_i\wedge\star\nabla_i\omega)\\ &= (-1)^{nk+n+1}\star\sum_i e_i\wedge\nabla_i\star\omega = (-1)^{nk+n+1}\star d\star\omega = d^\dagger\omega.\end{aligned}$$

Aquí empregouse o feito de que o operador de Hodge é paralelo, xa que está definido mediante a métrica g, a cal é paralela polo Teorema 1.13. □

Neste caso o operador $D = d + d^\dagger$ recibe o nome de *operador de de Rham*. O Laplaciano correspondente é $D^2 = dd^\dagger + d^\dagger d$.

Introducirase agora o caso das variedades complexas. Para as variedades reais o operador de de Rham foi construído coa representación regular da álxebra $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$, é dicir, facendo que a álxebra actuase sobre si mesma por multiplicación. Para obter outros exemplos de fibrados de Clifford é preciso considerar outras representacións. Ten especial importancia a representación spin, que se ten cando V é espazo vectorial de dimensión real par con produto interior, e tal que estea dotado dunha *estrutura complexa*, o cal consiste nun operador $J : V \to V$ tal que $J^2 = -1$. Pódese impoñer ademais que J sexa compatible coa métrica, i.e. $(Jx, Jy) = (x, y)$. Dado que os autovalores de J son $\pm i$, tense unha descomposición

$$V\otimes\mathbb{C} = P\oplus Q,$$

onde P e Q son os autoespazos de $J\otimes 1$ asociados a ditos autovalores. Sexan $p_1, p_2 \in P$. Sucede que

$$(p_1, p_2) = (Jp_1, Jp_2) = (ip_1, ip_2) = -(p_1, p_2),$$

de onde $(p_1, p_2) = 0$. Dise entón que P é un subespazo *isotrópico* de $V\otimes\mathbb{C}$. Razoando do mesmo xeito para Q obtense que P e Q son subespazos isotrópicos transversais maximais. Ademais o produto interior de $V\otimes\mathbb{C}$ establece unha dualidade entre P e Q.

A álxebra exterior $\bigwedge^* P$ pode ser dotada de estrutura de módulo sobre $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$ como segue. Dados $x\in\bigwedge^* P$ e $p+q\in V\otimes\mathbb{C}$, con $p\in P$ e $q\in Q$, defínese

$$(p+q)x = \sqrt{2}(p\wedge x + q\lrcorner x).$$

Isto exténdese a unha acción da álxebra de Clifford debido a que se satisfai a propiedade básica da álxebra exterior $p^2 = q^2 = 0$, e a regra para o produto de Clifford $pq + qp = -2(p, q)$. Deste xeito, $\bigwedge^* P$ trátase dunha representación de $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$, que recibe o nome de *representación spin*. Obsérvese que, se $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m$, a representación regular ten dimensión $2^{\dim_{\mathbb{R}} V} = 2^{2m}$, mentres que esta nova representación terá dimensión

$$\dim\bigwedge^* P = 2^{\dim P} = 2^{\frac{1}{2}\dim(V\otimes\mathbb{C})} = 2^{\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V} = 2^m.$$

Sexa agora M unha variedade de Riemann de dimensión $2m$. Como xa se indicou anteriormente, o fibrado de Clifford $\bigwedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$ ten as fibras en cada punto isomorfas á álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(TM) \otimes \mathbb{C}$. Sen embargo, pode existir ou non un fibrado S sobre M de dimensión 2^m tal que, para cada $p \in M$, a acción de $\mathrm{Cl}(T_pM) \otimes \mathbb{C}$ sobre S_p veña dada pola representación spin.

No caso de que M sexa unha variedade complexa hermitiana compróbase que isto si é posible. En efecto, cada espazo tanxente T_pM ten entón estrutura de espazo vectorial complexo e pódese definir o operador J_p en T_pM como a multiplicación por i (así, $J_p^2 = -1$). Aplicando a construción da representación spin,

$$S = \bigwedge^* TM \cong \bigwedge^* \overline{T}^* M$$

adquire unha métrica hermitiana e unha conexión que o convirten en fibrado de Clifford, pois verifica as propiedades da Definición 3.8. Por construción, considerando a (p,q)-descomposición de formas sobre a variedade complexa M, resulta o isomorfismo

$$C^\infty(S) \cong \bigoplus_q \Omega^{0,q}(M).$$

Isto débese a que S fai o papel de P, o cal cumpre que $\bigwedge^* P \cong \bigwedge^* Q^*$, segundo a dualidade que establece o produto interior entre os subespazos P e Q. Ademais as $(0,q)$-formas sobre M, xunto co operador $\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$ forman un complexo chamado *complexo de Dolbeault*, que é da forma

$$\Omega^{0,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,2}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

Por analoxía co complexo de de Rham xorde a pregunta de que relación existe entre o operador de Dirac D e o operador de Dolbeault $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$. Na seguinte proposición establécese dita relación, facendo referencia ás variedades de Kähler (véxase [20, Definición 8.39]).

Proposición 3.25 (Véxase [10, Capítulo 0, § 7])**.** *Se M é unha variedade de Kähler, entón $D = \overline{\partial} + \overline{\partial}^*$. Esta igualdade non se verifica para variedades complexas arbitrarias, pero a diferenza entre os dous membros é un endomorfismo de S.*

Capítulo 4

Xeometría spin

4.1. O grupo $\mathrm{Spin}(k)$

Definición 4.1. Unha álxebra $\mathcal{A}$ (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dise que é unha *superálxebra*, ou unha *álxebra $\mathbb{Z}_2$-graduada*, se pode ser expresada como suma directa de dous subespazos $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ tales que

$$\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0, \quad \mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_1\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1.$$

Os subespazos $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ reciben o nome de *parte par* e *parte impar* da superálxebra $\mathcal{A}$, respectivamente. Os elementos de $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ chámanse *homoxéneos* e, se $x \in \mathcal{A}_i$, dise que x ten *grao* i, e escríbese $\deg(x) = i$. Por convenio, $\deg(0) = 0$.

Observación 4.2. A Definición 4.1 é equivalente a que $\mathcal{A}$ estea dotada dun automorfismo ε tal que $\varepsilon^2 = 1$, o cal denomínase *automorfismo graduado*. Coa notación anterior, ε vén dado por $\varepsilon(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, sendo $a_0 \in \mathcal{A}_0$, $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Ademais, se $\mathcal{A}$ é unha superálxebra, basta definir os operadores lineares sobre $\mathcal{A}$ só nos elementos homoxéneos, e logo extendelos por linearidade a todo $\mathcal{A}$.

Proposición 4.3. *Sexa V un espazo vectorial equipado cunha forma bilinear simétrica, denotada por $(\ ,\ )$. A álxebra de Clifford de V é unha superálxebra, na cal os elementos de V son impares.*

Demostración. Considérese unha base ortonormal (e_j) de V e defínase a parte par (respectivamente, impar) de $\mathrm{Cl}(V)$ como a xerada linearmente polos elementos $e_{j_1} \cdots e_{j_l}$, sendo l par (respectivamente, impar). É obvio que os elementos de V son impares ($l = 1$) e que se respectan as catro inclusións da Definición 4.1. A multiplicación de Clifford garante que a estrutura de superálxebra así definida é independente da escolla da base. En efecto, se (v_j) é outra base de V, poderá ser expresada en función dos e_j reordeando os elementos da base segundo indica dita lei. Deste xeito consérvase a paridade, xa que en cada paso só cambia o signo ou se engade unha función $-2(e_i, e_j) = -2\delta_{ij}$. $\square$

Definición 4.4. Sexan $x, y \in \mathcal{A}$ elementos homoxéneos dunha superálxebra. Defínese o *superconmutador* de x e y como

$$[x, y]_s = xy - (-1)^{\deg(x)\deg(y)} yx.$$

O *supercentro* de $\mathcal{A}$ é o subespazo definido por

$$\mathfrak{Z}_s(\mathcal{A}) = \{\, x \in \mathcal{A} \mid [x, y]_s = 0,\ \forall y \in \mathcal{A} \,\}.$$

Lema 4.5. *Se V é un espazo vectorial con forma bilinear simétrica real, entón $\mathfrak{Z}_s(\mathrm{Cl}(V))$ coicide con $\mathbb{R}$ e $\mathfrak{Z}_s(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})$ coicide con $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sexa (e_j) unha base ortonormal de V. Dado $x \in \mathfrak{Z}_s(\mathrm{Cl}(V))$, escribirase $x = a + e_1 b$, onde a e b se expresan como combinación linear de elementos básicos de $\mathrm{Cl}(V)$ tales que non involucran a e_1. Pódese supoñer sen perda de xeralidade que x é un elemento homoxéneo da superálxebra $\mathrm{Cl}(V)$. Logo

$$\deg(x) = \deg(a) = \deg(b) + 1,$$

de onde

$$\begin{aligned} ae_1 &= (-1)^{\deg(a)} e_1 a = (-1)^{\deg(x)} e_1 a, \\ be_1 &= (-1)^{\deg(b)} e_1 b = -(-1)^{\deg(b)} e_1 b. \end{aligned}$$

Como $e_1^2 = -1$ tense que $e_1 x = e_1 a - b$, pero tamén que

$$xe_1 = ae_1 + e_1 b\, e_1 = (-1)^{\deg(x)}(e_1 a - e_1^2 b) = (-1)^{\deg(x)}(e_1 a + b).$$

Por definición de supercentro, cúmprese que

$$0 = [x, e_1]_s = xe_1 - (-1)^{\deg(x)} e_1 x = (-1)^{\deg(x)} 2b.$$

Dedúcese entón que $b = 0$, polo que x non depende de e_1. Do mesmo xeito compróbase que x non depende de ningún outro elemento básico, concluíndose que é un escalar. O razoamento para o caso complexo é análogo. $\square$

Definición 4.6. Considérese unha orientación en V e sexa $\{e_1, \dots, e_k\}$ unha base ortonormal positivamente orientada. Defínese o *elemento de volume* en $\mathrm{Cl}(V)$ como $\omega = e_1 \cdots e_k$.

Cun razoamento similar ao da Proposición 4.3 obtense que esta definición é independente da base escollida. Ademais tense que

$$\omega^2 = e_1 \cdots e_k e_1 \cdots e_k = (-1)^k e_2 \cdots e_k e_2 \cdots e_k = \ \cdots\ = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}},$$

e, para todo $v \in V$,

$$\omega v = (-1)^{k-1} v \omega.$$

No caso de que $k = 2m$ os cálculos anteriores implican que $\omega^{-1} = (-1)^m\omega$ e que o automorfismo graduado cumpre $\varepsilon(x) = \omega x \omega^{-1}$. No caso de que $k = 2k + 1$ o elemento de volume é central en $\mathrm{Cl}(V)$, pois, dado $x = e_{j_1} \cdots e_{j_l}$, verifícase que

$$\begin{aligned}[\omega, x] = \omega x - x\omega = e_1 \cdots e_k e_{j_1} \cdots e_{j_l} - e_{j_1} \cdots e_{j_l} e_1 \cdots e_k \\ = e_1 \cdots e_k e_{j_1} \cdots e_{j_l} - (-1)^{(k-1)l} e_1 \cdots e_k e_{j_1} \cdots e_{j_l} = \omega x - \omega x = 0.\end{aligned}$$

De feito, é doado probar que o centro de $\mathrm{Cl}(V)$ é o subespazo xerado polo conxunto $\{1, \omega\}$ se V ten dimensión impar, e redúcese ao conxunto de escalares se V ten dimensión par.

De aquí en diante denotarase por $\mathrm{Cl}(k)$ á álxebra de Clifford de $\mathbb{R}^k$ coa forma bilinear definida positiva usual. Trataranse a continuación uns certos subgrupos do grupo de elementos invertibles de $\mathrm{Cl}(k)$. Para cada $v \in \mathbb{R}^k$, tense que a multiplicación de Clifford cumpre que

$$v \cdot v = -(v, v)1 = -\|v\|^2 1,$$

polo que todo vector $v \neq 0$ é invertible en $\mathrm{Cl}(k)$ e ten inverso $-\|v\|^{-2} v$.

Definición 4.7.

(i) O grupo $\mathrm{Pin}(k)$ é o subgrupo multiplicativo de $\mathrm{Cl}(k)$ xerado polos vectores unitarios de $\mathbb{R}^k$.

(ii) O grupo $\mathrm{Spin}(k)$ é a parte par de $\mathrm{Pin}(k)$.

Por definición, $\mathrm{Spin}(k) = \mathrm{Pin}(k) \cap \mathrm{Cl}(k)_0$. Logo $\mathrm{Spin}(k)$ é un pechado de $\mathrm{Pin}(k)$ porque se obtén ao intersecalo cun subespazo linear de $\mathrm{Cl}(k)$. Asimesmo, a parte impar de $\mathrm{Pin}(k)$ é $\mathrm{Pin}(k) \cap \mathrm{Cl}(k)_1$, polo que ambos conxuntos son abertos e pechados de $\mathrm{Pin}(k)$. De feito, trátanse das súas compoñentes conexas.

Sexa agora $v \in \mathbb{R}^k$ un vector unitario e $x \in \mathbb{R}^k$ calquera. Como $v^{-1} = -v$, empregando a multiplicación de Clifford, tense que

$$-vxv^{-1} = vxv = v(-vx - 2(x, v)) = x - 2(x, v)v.$$

Así, obtense unha descomposición de x en compoñentes paralela e perpendicular a v dada por

$$x = (x, v)v + (vxv + (x, v)v).$$

Nótese que vxv é a reflexión de x con respecto ao hiperplano de $\mathbb{R}^k$ perpendicular a v. Posto que os vectores unitarios xeran o grupo $\mathrm{Pin}(k)$, séguese que a *representación adxunta torcida* $\rho : \mathrm{Pin}(k) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}(k))$ definida por

$$\rho(y)x = yx\varepsilon(y)$$

aplica o subespazo $\mathbb{R}^k$ de $\mathrm{Cl}(k)$ en si mesmo mediante unha transformación ortogonal, é dicir, mediante unha composición de reflexións. En efecto, para $y = v_1 \cdots v_j$, satisfaise que

$$\rho(y)x = v_1 \cdots v_j x \varepsilon(v_1) \cdots \varepsilon(v_j) = v_1 \cdots v_j x v_j \cdots v_1.$$

Desta maneira, $\rho : \mathrm{Pin}(k) \to O(k)$ é un homomorfismo. Como $\mathrm{Spin}(k)$ está formado por produtos dun número par de vectores unitarios, tense a restrición $\rho : \mathrm{Spin}(k) \to \mathrm{SO}(k)$.

Proposición 4.8. *A seguinte sucesión é exacta curta:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \operatorname{Spin}(k) \xrightarrow{\rho} \operatorname{SO}(k) \longrightarrow 0$$

Demostración. Os elementos de $\operatorname{SO}(k)$ son rotacións, i.e. composición dun número par de reflexións. Logo a aplicación ρ é claramente sobrexectiva, pois cos vectores unitarios de $\mathbb{R}^k$ fórmanse tódalas reflexións posibles. Ademais todo elemento $y \in \ker(\rho)$ (é dicir, tal que $\rho(y) = \mathrm{id}$) superconmuta con calquera vector $x \in \mathbb{R}^k$, pois, tomando $y = v_1 \cdots v_j$, obtense

$$[y, x]_s = v_1 \cdots v_j x - (-1)^j x v_1 \cdots v_j = v_1 \cdots v_j x - v_1 \cdots v_j x = 0,$$

debido a que

$$\rho(y)x = x \iff v_1 \cdots v_j x = x v_1^{-1} \cdots v_j^{-1} = (-1)^j x v_1 \cdots v_j.$$

Así, todo elemento do núcleo de ρ está no supercentro $\mathfrak{Z}_s(\mathrm{Cl}(k))$ e, polo Lema 4.5, é necesariamente un escalar.

Falta comprobar que os únicos escalares de $\operatorname{Spin}(k)$ son $\{\pm 1\}$. Para isto introdúcese o *antiautomorfismo de transposición* de $\mathrm{Cl}(k)$, o cal, dado un produto de vectores básicos $x = v_1 \cdots v_j$, defínese por $x^t = v_j \cdots v_1$. Para todo xerador $v \in \operatorname{Spin}(k)$ é obvio que $v^{-1} = v^t$, de onde se deduce que $x^{-1} = x^t$, para todo $x \in \operatorname{Spin}(k)$. En particular, se x é un escalar, tense que $x^{-1} = x^t = x$, é dicir, que $x^2 = 1$. $\square$

A importancia da proposición anterior é que establece que $\operatorname{Spin}(k)$ é un revestimento de dúas follas de $\operatorname{SO}(k)$, por ser cociente dun grupo de Lie por un grupo discreto (véxase [19, Capítulo 2, § 6]). Ademais $\operatorname{Pin}(k)$ é compacto porque se obtén multiplicando os elementos do compacto S^{k-1}. Polo tanto, $\operatorname{Spin}(k)$ trátase dun grupo de Lie compacto, debido a que é subgrupo pechado do compacto $\operatorname{Pin}(k)$.

Proposición 4.9. *Para* $k \geq 2$ *o grupo* $\operatorname{Spin}(k)$ *é conexo. Para* $k \geq 3$ *é ademais simplemente conexo, e a sucesión exacta da Proposición 4.8 determina que* $\operatorname{Spin}(k)$ *é o revestimento universal de* $\operatorname{SO}(k)$.

Demostración. A sucesión exacta de homotopía correspondente á fibración

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \operatorname{Spin}(k) \xrightarrow{\rho} \operatorname{SO}(k) \longrightarrow 0$$

introducida na Proposición 4.8 dá lugar á sucesión exacta seguinte (véxase [1, Corolario 4.2.19]):

$$\pi_1\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi_1 \operatorname{Spin}(k) \longrightarrow \pi_1 \operatorname{SO}(k) \longrightarrow \pi_0\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi_0 \operatorname{Spin}(k) \longrightarrow \pi_0 \operatorname{SO}(k).$$

En xeral, tense que os grupos $\pi_1\mathbb{Z}_2$ e $\pi_0 \operatorname{SO}(k)$ son triviais, e que $\pi_0\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$. Para $k \geq 3$ verifícase tamén que $\pi_1 \operatorname{SO}(k) = \mathbb{Z}_2$. Bastará con probar que a aplicación $\pi_0\mathbb{Z}_2 \to \pi_0 \operatorname{Spin}(k)$ é trivial, porque entón

$$\ker(\pi_0 \operatorname{Spin}(k) \to \pi_0 \operatorname{SO}(k)) = \operatorname{im}(\pi_0\mathbb{Z}_2 \to \pi_0 \operatorname{Spin}(k)) = 0,$$

de onde se concluirá que Spin(k) é conexo por camiños e, polo tanto, conexo. Ademais se $k \geq 3$ terase a sucesión exacta curta

$$\pi_1 \operatorname{Spin}(k) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

obténdose que $\pi_1 \operatorname{Spin}(k) = 0$, o cal implicará entón que Spin(k) é simplemente conexo. Para comprobar a trivialidade da aplicación citada é preciso ver que os puntos $+1$ e -1 están conectados en Spin(k) por un camiño. Supoñendo que $k \geq 2$, é válido o camiño dado por

$$t \in [0,1] \longmapsto \cos t + e_1 e_2 \operatorname{sen} t \in \operatorname{Pin}(k) \cap \operatorname{Cl}(k)_0 = \operatorname{Spin}(k). \quad \square$$

Posto que $\rho : \operatorname{Spin}(k) \to \operatorname{SO}(k)$ é un revestimento, existe unha identificación natural entre as súas correspondentes álxebras de Lie (véxase [19, Teorema 2.8.2]). A de SO(k) é a álxebra $\mathfrak{o}(k)$ das matrices cadradas antisimétricas de tamaño k. Por outra banda, dado que Spin(k) é unha subvariedade do espazo vectorial Cl(k), a súa álxebra de Lie $\mathfrak{spin}(k)$ identifícase cun subespazo vectorial de Cl(k). O lema seguinte establece a relación entre estas dúas identificacións.

Lema 4.10. *A álxebra de Lie $\mathfrak{spin}(k)$ identifícase co subespazo de* Cl(k) *xerado polos produtos $e_i e_j$, con $i \neq j$. Dita identificación asocia a cada matriz antisimétrica (a_{ij}) o elemento $\frac{1}{4}\sum_{i,j} a_{ij} e_i e_j \in \operatorname{Cl}(k)$.*

Demostración. Como $(e_i e_j)^2 = -1$, tense que

$$\exp(t e_i e_j) = \cos t + e_i e_j \operatorname{sen} t \in \operatorname{Spin}(k).$$

Logo $e_i e_j$ pertence á álxebra de Lie. De feito, os $e_i e_j$ xeran a álxebra de Lie $\mathfrak{o}(k)$ porque ten dimensión $\frac{1}{2}k(k-1) = \binom{k}{2}$.

Dado $x \in \operatorname{Spin}(k)$, cúmprese que $\rho(x)v = xvx^{-1} = \operatorname{Ad}(x)v$, para todo $v \in \operatorname{Cl}(k)$. Polo tanto, se u pertence á álxebra de Lie, tense que $\rho_*(u)v = \operatorname{ad}(u)v = [u,v]$. Facendo, por exemplo, $u = e_1 e_2$ verifícase que

$$\operatorname{ad}(u)e_1 = [e_1 e_2, e_1] = e_1 e_2 e_1 - e_1 e_1 e_2 = -2 e_1 e_1 e_2 = 2 e_2.$$

Analogamente,

$$\operatorname{ad}(u)e_2 = -2e_1, \qquad \operatorname{ad}(u)e_i = 0 \quad (i \neq 1,2).$$

Entón a compoñente j-ésima de $\operatorname{ad}(u)e_i$ coincide con $a_{ij} = 2(\delta_{i1}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j1})$. Así, $\operatorname{ad}(u)$ queda representada pola matriz (a_{ij}). Consecuentemente,

$$\sum_{i,j} a_{ij} e_i e_j = 2(e_1 e_2 - e_2 e_1) = 4 e_1 e_2 = 4u. \quad \square$$

4.2. Representacións da álxebra de Clifford

Esta sección céntrase no estudo das representacións do grupo Spin e da álxebra de Clifford, para o cal se empregarán resultados da teoría de representación de grupos finitos.

Sexa $\{e_1, \dots, e_k\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^k$ e sexa $E_k \subset \mathrm{Pin}(k)$ o subgrupo de orde 2^{k+1} formado polos elementos $\pm e_1^{i_1} e_2^{i_2} \cdots e_k^{i_k}$, sendo cada un dos índices $i_1, \cdots i_k$ pertencente a $\{0, 1\}$. En particular, $-1 \in E_k$, ao cal se denotará por ν cado se considere como elemento de E_k.

Proposición 4.11. *Existe unha correspondencia bixectiva entre os conxuntos seguintes:*

(i) *Representacións da álxebra de Clifford* $\mathrm{Cl}(k)$*;*

(ii) *Representacións de* $\mathrm{Pin}(k)$ *nas que* ν *fai o papel de* -1*;*

(iii) *Representacións de* E_k *nas que* ν *fai o papel de* -1.

Este resultado é consecuencia inmediata da Proposición 3.4. A pesar de que a proposición anterior é válida sobre o corpo $\mathbb{R}$, no que resta de capítulo consideraranse representacións complexas. Deste xeito, aplicaremos o estudo das representacións complexas de E_k ao estudo das de $\mathrm{Cl}(k) \otimes \mathbb{C}$.

Posto que ν é unha involución central no grupo finito E_k, deberá actuar como $+1$ ou como -1 en cada representación irreducible de E_k. As representacións de E_k nas que ν actúa como $+1$ son aquelas nas que se despreza o signo, é dicir, son representacións do grupo abeliano $E_k/(\nu)$. Dito grupo ten orde 2^k, polo que existen tal cantidade delas (as cales teñen dimensión 1). A continuación, tratarase de determinar cantas máis representacións irreducibles de E_k existen.

Lema 4.12. *Verifícanse as afirmacións seguintes:*

(i) *Se k é par, o centro de E_k é* $\{1, \nu\}$.

(ii) *Se k é impar, o centro de E_k é* $\{1, \nu, \omega, \nu\omega\}$.

Demostración. Sexa $x = e_1^{i_1} \cdots e_k^{i_k}$. Tomando $i_r = 1$ e $i_s = 0$ cóbrense tódolos elementos positivos de E_k salvo 1 e ω. Escribindo $t = i_1 + \cdots + i_k$ tense que

$$e_r e_s x = (-1)^{2t-1} x e_r e_s = \nu x e_r e_s.$$

Logo os únicos elementos centrais posibles son os do conxunto $\{1, \nu, \omega, \nu\omega\}$. Para k impar xa se comprobou anteriormente que ω é un elemento central de $\mathrm{Cl}(k)$. Sen embargo, se k é par iso non sucede, xa que $e_1\omega = (-1)^{k-1}\omega e_1 = \nu\omega e_1$. □

Determinaranse agora o número de clases de conxugación que hai en E_k. Debido a que $E_k/(\nu)$ é un grupo abeliano, para todo par $x, y \in E_k$, cúmprese que $xy = \pm yx$. Disto dedúcese que a clase de conxugación dun elemento central x é $\{x\}$, e será $\{x, \nu x\}$ noutro caso. Empregando o número de elementos centrais indicado polo Lema 4.12 para cada caso, temos que o número de clases de conxugación para k par vén dado por

$$\frac{2^{k+1}-2}{2}+2=2^k+1,$$

mentres que se k é impar coincide con

$$\frac{2^{k+1}-4}{2}+4=2^k+2.$$

Posto que o número de clases de conxugación é igual ao número de representacións irreducibles (véxase [12, Capítulo XVIII, Proposición 4]) e que xa se indicou anteriormente que E_k ten 2^k representacións irreducibles nas que ν actúa como $+1$, séguese que se k é par E_k terá unha representación irreducible na que ν actúa como -1, e se k é impar E_k terá dúas.

De aquí en diante tratarase unicamente o caso par, con $k=2m$. Segundo a Proposición 4.11, $\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}$ ten exactamente unha representación irreducible, que recibe o nome de *representación spin* e se denota por Δ. Para calcular a súa dimensión é preciso empregar un resultado que indica que a suma dos cadrados das dimensións das representacións dun grupo é igual á orde do grupo (véxase [12, Capítulo XVIII]). Neste caso cúmprese que

$$2^k+(\dim\Delta)^2=2^{k+1}\implies\dim\Delta=2^{\frac{k}{2}}=2^m.$$

Ademais, como Δ é a única representación irreducible de $\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}$, sucede que

$$\dim(\mathrm{End}(\Delta))=(2^m)^2=2^k=\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Cl}(k)=\dim(\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}),$$

o cal significa que $\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}$ é isomorfo á álxebra de matrices $\mathrm{End}(\Delta)$. Ao final do Capítulo 3 expúxose a construción dunha representación (tamén denominada spin) de $\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}$ de dimensión 2^m, a cal deberá ser isomorfa á que aquí se presenta porque só existe unha con tal dimensión.

Observación 4.13. Como representación complexa do grupo finito E_k, Δ posúe unha métrica hermitiana con respecto á cal E_k actúa mediante transformacións unitarias. Dado que cada xerador e_i de E_k é unitario sobre Δ e ten cadrado -1, para todo $x_1,x_2\in\Delta$, tense que

$$(e_ix_1,x_2)=(e_i^2x_1,e_ix_2)=-(x_1,e_ix_2).$$

Logo a acción de Clifford é antisimétrica en Δ, verificándose así a primeira condición da Definición 3.8.

É importante destacar tamén que toda representación W de $\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}$ é unha suma de copias de Δ, é dicir, que $W=\Delta\otimes V$, para algún espazo vectorial auxiliar V. Obsérvese que, dado W, pódese recuperar V porque coincide con $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cl}(k)}(\Delta,W)$. Asimesmo, tense que

$$\mathrm{End}(W)=\mathrm{End}(\Delta)\otimes\mathrm{End}(V)=\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathrm{End}(V)=\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}}(W).$$

Definición 4.14. Sexa F un endomorfismo de módulos de Clifford dunha representación $W = \Delta \otimes V$ de $\mathrm{Cl}(k) \otimes \mathbb{C}$. Defínese a súa *traza relativa* $\mathrm{tr}^{W/\Delta}(F)$ como a traza do $\mathbb{C}$-endomorfismo de V correspondente a F mediante a identificación $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}(k)\otimes\mathbb{C}}(W) = \mathrm{End}(V)$.

A Proposición 4.11 indica que Δ tamén é unha representación irreducible de $\mathrm{Pin}(k)$. Logo existen dúas posibilidades para a súa restrición ao subgrupo normal $\mathrm{Spin}(k)$ de índice 2: ou ben a representación é irreducible ou ben é suma directa de dúas representacións irreducibles non isomorfas da mesma dimensión. Comprobaremos que se dá o segundo caso. Como estamos no caso par, o elemento de volume cumpre que $\omega^2 = (-1)^m$, polo que $i^m\omega$ é unha involución de Δ. Denotaranse entón por Δ^+ e Δ^- aos autoespazos de $i^m\omega$ asociados aos autovalores $+1$ e -1, respectivamente. Polo tanto, $\mathrm{Cl}(k) \otimes \mathbb{C}$ actúa sobre $\Delta = \Delta^+ \oplus \Delta^-$ de maneira que os elementos pares da álxebra de Clifford conservan esta descomposición e os elementos impares invírtena. En particular, tanto Δ^+ como Δ^- son representacións irreducibles de $\mathrm{Spin}(k)$, e reciben o nome de *semirepresintacións spin positiva e negativa*, respectivamente. Habitualmente tamén se fala de que $\Delta = \Delta^+ \oplus \Delta^-$ é unha *representación graduada* da álxebra de Clifford.

4.3. Estruturas spin sobre variedades

Considerarase unha variedade de Riemann orientada M de dimensión n par, e denotarase por E ao $\mathrm{SO}(n)$-fibrado principal de referencias ortonormais positivamente orientadas.

A Proposición 4.9 establece que, para $n \geq 3$, $\mathrm{Spin}(n)$ é o revestimento universal de $\mathrm{SO}(n)$ mediante o homomorfismo $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$, que ten por núcleo a $\mathbb{Z}_2$.

Definición 4.15. Para $n \geq 3$, unha *estrutura spin* sobre M consiste nun $\mathrm{Spin}(n)$-fibrado principal $\widetilde{E}$ sobre M xunto cun revestimento de dúas follas $\xi : \widetilde{E} \to E$ tal que $\xi(ax) = \xi(a)\rho(x)$, para todo $a \in \widetilde{E}$ e todo $x \in \mathrm{Spin}(n)$. Esta última condición exprésase dicindo que ξ é ρ-equivariante.

Para $n = 2$ a definición é análoga, substituíndo $\mathrm{Spin}(n)$ por $\mathrm{SO}(2)$ e tomando o revestimento de dúas follas $\rho : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(2)$.

Para $n = 1$ tense que $E \cong M$, e unha estrutura spin sobre M simplemente é un revestimento de dúas follas de M.

Se M admite unha estrutura spin dise que é unha *variedade spin*.

Observación 4.16. Dada unha estrutura spin sobre M, tense o diagrama conmutativo seguinte (onde π e π' son as proxeccións de E e $\widetilde{E}$, respectivamente):

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E} \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nótese tamén que ao restrinxir ξ a cada fibra obtense o revestimento ρ.

Non se tratará aquí a cuestión da existencia e unicidade das estruturas spin (véxase [13, Capítulo II, § 1]), pero inclúese o seguinte resultado, o cal pon de manifesto que son estruturas usuais.

Proposición 4.17. *Se M é 2-conexa, admite unha única estrutura spin.*

Demostración. Os revestimentos de dúas follas do espazo conexo E están clasificadas polo grupo de homomorfismos do grupo fundamental $\pi_1 E$ en $\mathbb{Z}_2$ (véxase [13, Capítulo II, Lema 1.1]). Como as fibras de E son isomorfas a $\mathrm{SO}(n)$, os 2-revestimentos de E que se restrinxen en cada fibra a ρ son aqueles que se corresponden con homomorfismos de $\pi_1 E$ en $\mathbb{Z}_2$ tales que a composición

$$\pi_1 \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \pi_1 E \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

é un isomorfismo. Debido a que M é 2-conexa, a sucesión exacta de homotopía para a fibración $\mathrm{SO}(n) \to E \to M$ resulta

$$0 = \pi_2 M \longrightarrow \pi_1 \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \pi_1 E \longrightarrow \pi_1 M = 0,$$

de onde $\pi_1 \mathrm{SO}(n) \to \pi_1 E$ é un isomorfismo. Así, as estruturas spin sobre M quedan clasificadas polos isomorfismos $\pi_1 \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{Z}_2$. Pero $\pi_1 \mathrm{SO}(n) = \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 3$, e conclúese que M admite unha única estrutura spin. □

Definición 4.18. Sexa M unha variedade spin. O *fibrado spin* Δ de M é o fibrado vectorial asociado ao $\mathrm{Spin}(n)$-fibrado principal $\widetilde{E}$ mediante a representación spin (véxase o Exemplo A.19).

Definición 4.19. Sexa M variedade spin. A *conexión spin* no $\mathrm{Spin}(n)$-fibrado principal $\widetilde{E}$ é o levantamento da conexión inducida no $\mathrm{SO}(n)$-fibrado principal E pola conexión de Levi-Civita en TM. A *conexión spin* no fibrado spin Δ é a conexión asociada á conexión spin en $\widetilde{E}$ mediante a representación spin.

Sucede que a conexión spin é compatible coa métrica hermitiana de Δ, é dicir, verifícase a segunda condición da Definición 3.8. Empregando a Observación 4.13, obtense o resultado seguinte.

Proposición 4.20. *O fibrado spin Δ dunha variedade spin M, equipado coa súa métrica hermitiana e coa conexión spin, é un fibrado de Clifford.*

Proposición 4.21. *A curvatura torcida do fibrado spin asociado a unha estrutura spin é cero.*

Demostración. Sexa $\{e_k\}$ unha referencia ortonormal local de TM. Segundo se indica no Capítulo 2, a 1-forma da conexión spin toma valores na álxebra de Lie $\mathfrak{spin}(n) \equiv \mathfrak{o}(n)$. Ademais a forma da curvatura é unha 2-forma con valores na álxebra de Lie $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ das matrices antisimétricas, e vén dada polas compoñentes (Re_k, e_l), onde R é o operador curvatura de Riemann. Polo Lema 4.10, a correspondente 2-forma con valores en $\mathfrak{spin}(n)$, que é a que dá a curvatura da conexión spin, vén dada por

$$\frac{1}{4}\sum_{k,l}(Re_k, e_l)e_k e_l.$$

Isto actúa sobre a representación spin mediante

$$\frac{1}{4}\sum_{k,l}(Re_k, e_l)c(e_k)c(e_l),$$

que é precisamente a 2-forma R^Δ con valores en $\mathrm{End}(\Delta)$, denominada endomorfismo de Riemann de Δ (véxase a Definición 3.16). Entón $K^\Delta = R^\Delta$ e, consecuentemente, $F^\Delta = 0$. □

Sexa agora S un fibrado de Clifford arbitrario sobre unha variedade spin M. Entón existe un fibrado vectorial $V = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cl}}(\Delta, S)$, equipado cunha métrica hermitiana e unha conexión, tal que se ten o isomorfismo de fibrados de Clifford

$$S \cong \Delta \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cl}}(\Delta, S) = \Delta \otimes V.$$

A curvatura da conexión natural neste produto tensor é

$$K^S = K^\Delta \otimes 1 + 1 \otimes K^V.$$

A Proposición 4.21 identifica o primeiro sumando co endomorfismo de Riemann R^S e o segundo coa curvatura torcida F^S.

A continuación expoñerase a relación que existe entre os fibrados spin e as clases características. Supoñerase que M é unha variedade spin de dimensión $2m$ con fibrado spin Δ.

Teorema 4.22. *O carácter de Chern* $\mathrm{ch}(\Delta)$ *é igual a* $2^m\mathfrak{G}(TM)$*, onde* $\mathfrak{G}$ *denota ao xénero de Pontrjagin asociado á función holomorfa* $g(z) = \cosh(\frac{1}{2}\sqrt{z})$*.*

Demostración. En xeral, un fibrado vectorial real euclidiano orientado e de dimensión par dise que é un *fibrado vectorial spin* se existe un revestimento de dúas follas do SO-fibrado principal de referencias ortonormais verificando as condicións da Definición 4.15. Desta maneira, o fibrado tanxente a unha variedade spin é un fibrado vectorial spin. Ademais, dado un fibrado vectorial spin V, pódese considerar o correspondente fibrado spin $\Delta(V)$ dun xeito análogo ao da Definición 4.18.

Escribirase o g-xénero de Pontrjagin mediante $V \mapsto \mathfrak{G}(V)$. Probando que

$$\mathrm{ch}(\Delta(V)) = 2^{\frac{1}{2}\dim V}\mathfrak{G}(V),$$

o resultado séguese de tomar $V = TM$. Considerarase a expresión anterior como unha igualdade punto a punto entre unhas certas funcións polinómicas da curvatura de V. Polo principio de escisión (véxase [16, Capítulo IV, Proposición 5.5]), pódese supoñer que a curvatura é diagonal por bloques, sendo V suma directa de fibrados vectoriais de dimensión 2. Sexa entón $V = V_1 \oplus V_2$, con V_1 e V_2 de dimensión par. Así, $\Delta(V) = \Delta(V_1) \otimes \Delta(V_2)$ e, pola Observación 2.27, $\mathrm{ch}(\Delta(V_1 \oplus V_2)) = \mathrm{ch}(\Delta(V_1))\,\mathrm{ch}(\Delta(V_2))$. Ademais, segundo as propiedades do xénero de Chern, $\mathfrak{G}(V_1 \oplus V_2) = \mathfrak{G}(V_1)\mathfrak{G}(V_2)$. Logo os dous membros da igualdade a probar son multiplicativos respecto ás sumas directas, polo que se supoñerá que V ten dimensión 2. En tal caso $\Delta(V)$ é un fibrado vectorial complexo de dimensión 2, que se descompón como suma directa de dúas compoñentes unidimensionais $\Delta^+(V)$ e $\Delta^-(V)$ (as cales, por simplificar, denotaranse por Δ^+ e Δ^-, respectivamente). Escribirase V_c para considerar V como fibrado complexo de dimensión un.

É preciso comprobar os isomorfismos de fibrados vectoriais, ou, equivalentemente, isomorfismos de representacións de Spin(2) (ou, pola Proposición 4.11, isomorfismos de representacións de $\mathrm{Cl}(2) \otimes \mathbb{C}$), seguintes:

$$\Delta^+ \otimes_{\mathbb{C}} \Delta^+ \cong V_c^* \qquad \Delta^- \otimes_{\mathbb{C}} \Delta^- \cong V_c$$

Posto que teñen a mesma dimensión, a álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(2) \otimes \mathbb{C}$ é isomorfa á álxebra de matrices $M_2(\mathbb{C})$, a cal ten por base ás *matrices de Pauli*:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e_1e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir da definición compróbase facilmente que nesta representación Spin(2) é o grupo das rotacións dado polas matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Tamén é doado ver que, considerando a representación adxunta torcida, a acción dun elemento de Spin(2) sobre $\mathbb{R}^2$ consiste na rotación de ángulo 2θ. En efecto, os elementos de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ poden ser expresados mediante

$$i\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix},$$

e, polo tanto, tense que

$$\begin{aligned} \rho(\theta)(x,y) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O automorfismo graduado neste caso é $i\omega = ie_1e_2$ e, razoando do mesmo xeito ca na sección anterior, dedúcese que os autoespazos asociados a ± 1 son

$$\Delta^+ = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ iz \end{pmatrix} z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \Delta^- = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix} z \in \mathbb{C} \right\}.$$

A acción dun elemento de Spin(2) sobre Δ^- vén dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ -iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)z \\ -i(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)z \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

que se corresponde coa rotación de ángulo θ. Logo tense o isomorfismo de Spin(2)-representacións $\Delta^- \otimes_{\mathbb{C}} \Delta^- \cong \mathbb{R}^2 \cong V_c$ e, análogamente, $\Delta^+ \otimes_{\mathbb{C}} \Delta^+ \cong V_c^*$.

Por outra banda, denotando $c_1(\Delta^+) = -c_1(\Delta^-) = x$, e facendo uso da Observación 2.27, obtense

$$\mathrm{ch}(\Delta) = \mathrm{ch}(\Delta^+) + \mathrm{ch}(\Delta^-) = e^x + e^{-x} = 2\cosh x.$$

Asimesmo, dado que

$$c_1(V_c) = c_1(\Delta^- \otimes_{\mathbb{C}} \Delta^-) = c_1(\Delta^-) + c_1(\Delta^-) = -2x,$$

(e, análogamente $c_1(V_c^*) = 2x$) tense que[1]

$$p_1(V) = -c_2(V \otimes \mathbb{C}) = -c_2(V_c \oplus V_c^*) = -c_1(V_c)c_1(V_c^*) = 4x^2.$$

Logo, polo Lema 2.28, dáse que $\mathfrak{G}(V) = g(p_1(V)) = \cosh x$. Conclúese entón que $\mathrm{ch}(\Delta(V)) = 2\mathfrak{G}(V)$. □

Definición 4.23. Sexa S un fibrado de Clifford xeral sobre M. O *carácter de Chern relativo* de S é a clase de cohomoloxía representada pola forma

$$\mathrm{ch}(S/\Delta) = \mathrm{tr}^{S/\Delta}(\exp(-F^S/2\pi i)).$$

Obsérvese que se $S = \Delta \otimes V$, sucede que $\mathrm{ch}(S/\Delta)$ é o carácter de Chern de V. De feito, dado que tal descomposición de S sempre existe localmente, está garantido que $\mathrm{ch}(S/\Delta)$ é unha forma pechada e, polo tanto, representa unha clase de cohomoloxía. Segundo o Teorema 4.22, verifícase que

$$\mathrm{ch}(S) = \mathrm{ch}(\Delta)\,\mathrm{ch}(V) = 2^m \mathfrak{G}(TM)\,\mathrm{ch}(S/\Delta).$$

Observación 4.24. Cabe destacar a existencia do *grupo spin complexo* $\mathrm{Spin}^c(k)$, que é o subgrupo de $\mathrm{Cl}(k) \otimes \mathbb{C}$ xerado por $\mathrm{Spin}(k)$ e a circunferencia S^1 dos números complexos unitarios. Verifícase que

$$\mathrm{Spin}^c(k) \cong \mathrm{Spin}(k) \times_{\{\pm 1\}} S^1,$$

onde tal notación fai referencia ao cociente de $\mathrm{Spin}(k) \times S^1$ polo subgrupo $\{\pm(1,1)\}$, que é o núcleo da proxección $\mathrm{Spin}(k) \times S^1 \to \mathrm{Spin}^c(k)$.

[1] Nas seguintes igualdades emprégase que $V \otimes \mathbb{C}$ e $V_c \oplus V_c^*$ son isomorfos como SO(2)-representacións, debido ao seu comportamento con respecto ás rotacións do plano complexo (o cal se deduce da ecuación (4.1)).

Capítulo 5

Análise do operador de Dirac

Introdúcense neste capítulo as propiedades analíticas básicas que posúe o operador de Dirac asociado a un fibrado de Clifford S sobre unha variedade de Riemann compacta M de dimensión n. Lémbrese que, segundo a Proposición 3.11, o cadrado do operador de Dirac cumpre unha expresión que involucra á contracción de Clifford K dun certo operador de curvatura. Sen embargo, as propiedades analíticas que aquí se presentarán serán válidas para calquera operador de primeira orde D definido sobre un fibrado S (que posúa unha métrica hermitiana e unha conexión compatible) tal que se verifique

$$D^2 = \nabla^\dagger \nabla + B, \tag{5.1}$$

sendo B un operador de primeira orde sobre S. Falarase entón de que D é un *operador de Dirac xeralizado*. Empregaranse ao longo do capítulo numerosos resultados de análise funcional relativos a espazos de Sobolev, os cales se recollen no Apéndice B.

Un caso destacado é o da forma $D + A$, onde D é o operador de Dirac que cumpre a fórmula de Witzenbock e A é un endomorfismo de S. Por exemplo, tal e como indica a Proposición 3.25, o operador de Dolbeault $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ sobre unha variedade complexa non Kähler pertence a dita familia.

5.1. Estimación elíptica

Posto que D é un operador de primeira orde, o Corolario B.11 establece que existe unha constante C tal que

$$\|Ds\| \leq C\|s\|_1.$$

Teorema 5.1 (Desigualdade de Gårding)**.** *Sexa D un operador de Dirac xeralizado sobre unha variedade compacta. Existe unha constante C tal que, para toda sección $s \in C^\infty(S)$,*

$$\|s\|_1 \leq C(\|s\| + \|Ds\|).$$

Demostración. Empregando unha partición da unidade pódese supoñer que s ten soporte contido nunha carta coordenada. Dado que D é un operador simétrico (ver Proposición 3.14), aplicando á expresión (5.1) o produto interior de L^2 con s, tense que

$$\|Ds\|^2 = \|\nabla s\|^2 + \langle Bs, s\rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o feito de que B é operador de primeira orde séguese que existe unha constante C_1 tal que

$$\|\nabla s\|^2 \leq \|Ds\|^2 + |\langle Bs, s\rangle| \leq \|Ds\|^2 + \|Bs\|\,\|s\| \leq C_1\left(\|Ds\|^2 + \|s\|\,\|s\|_1\right).$$

Interpretando ∇ como operador de $C^\infty(S)$ en $C^\infty(TM \otimes S)$ obtense que, en coordenadas locais, $\nabla s = dx^i \otimes \nabla_i s$. Tamén se pode escribir $\nabla_i s = \partial_i s + \Gamma_i s$ (ver Observación 1.2), considerando s como función con valores vectoriais e onde os símbolos de Christoffel Γ_i son endomorfismos de S. Así, debido ao carácter hermitiano da métrica, resulta que

$$\begin{aligned}\|\nabla s\|^2 &= \left\langle dx^i \otimes \nabla_i s, dx^j \otimes \nabla_j s\right\rangle = \left\langle dx^i \otimes (\partial_i s + \Gamma_i s), dx^j \otimes (\partial_j s + \Gamma_j s)\right\rangle \\ &= \sum_{i,j}\left(\int g^{ij}(\partial_i s, \partial_j s) + \int g^{ij}(\partial_i s, \Gamma_j s) + \int g^{ij}(\Gamma_i s, \partial_j s) + \int g^{ij}(\Gamma_i s, \Gamma_j s)\right) \\ &= \sum_{i,j}\left(\int g^{ij}(\partial_i s, \partial_j s) + 2\int g^{ij}\operatorname{Re}(\partial_i s, \Gamma_j s) + \int g^{ij}(\Gamma_i s, \Gamma_j s)\right).\end{aligned}$$

A partir desta expresión e da Proposición B.10, dedúcese que

$$\|\nabla s\|^2 \geq C_2\|s\|_1^2 - C_3\|s\|\,\|s\|_1,$$

para algunhas constantes C_2 e C_3. Facendo $C_4 = \frac{C_2}{C_1}$, $C_5 = \frac{C_3}{C_1} + 1$ e despexando dunha desigualdade anterior, obtense

$$\|Ds\|^2 \geq C_4\|s\|_1^2 - C_5\|s\|\,\|s\|_1.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $ab \leq \varepsilon a^2 + Kb^2$ para todo $a, b > 0$. Polo tanto, conclúese que

$$\|Ds\|^2 \geq \frac{1}{2}C_4\|s\|_1^2 - C_6\|s\|^2,$$

para algunha constante C_6. Agora resulta doado arranxar esta expresión para obter a desigualdade do enunciado. □

A seguinte proposición xeraliza á Desigualdade de Gårding.

Proposición 5.2 (Estimación elíptica)**.** *Para todo enteiro $k > 0$ existe unha constante C_k verificando que, para toda $s \in C^\infty(S)$,*

$$\|s\|_{k+1} \leq C_k(\|s\|_k + \|Ds\|_k).$$

Demostración. Farase inducción en k. O caso $k = 0$ é a Desigualdade de Gårding. De novo, empregando unha partición da unidade, supoñerase que s ten o soporte contido nunha carta coordenada. Da Proposición B.10 dedúcese que

$$\|s\|_{k+1} \leq \sum_{1\leq|\beta|\leq k+1} \|\partial_\beta s\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial_\alpha \partial_i s\| \leq A_1 \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i s\|_k,$$

para algunha constante A_1. Por hipótese de inducción tense que

$$\|\partial_i s\|_k \leq C_{k-1}(\|\partial_i s\|_{k-1} + \|D\partial_i s\|_{k-1}).$$

Como ∂_i é un operador de primeira orde, existe unha constante A_2 para a cal

$$\|\partial_i s\|_{k-1} \leq A_2 \|s\|_k.$$

Pero $[D, \partial_i]$ é tamén operador de primeira orde, polo que existirá unha constante A_3 cumprindo que

$$\|D\partial_i s\|_{k-1} \leq \|\partial_i D s\|_{k-1} + \|[D, \partial_i]s\|_{k-1} \leq A_2\|Ds\|_k + A_3\|s\|_k.$$

Consecuentemente,

$$\|s\|_{k+1} \leq nA_1C_{k-1}\left(A_2\|Ds\|_k + (A_2 + A_3)\|s\|_k\right),$$

e o resultado segue de tomar $C_k = nA_1(A_2 + A_3)C_{k-1}$. □

Observación 5.3. Do Teorema 5.1 e a Proposición 5.2 séguese facilmente que, para cada enteiro positivo k, existen constantes $C'_k, C''_k \geq 1$ tales que, para toda $s \in C^\infty(S)$,

$$\frac{1}{C'_k}\|s\|_k \leq \|(1 + D)^k s\| \leq C'_k\|s\|_k,$$
$$\frac{1}{C''_k}\|s\|_k \leq (\|s\| + \|D^k s\|) \leq C''_k\|s\|_k.$$

5.2. Espectro do operador de Dirac

Un *operador* (posiblemente non limitado) sobre un espazo de Hilbert H é unha aplicación linear definida nun subespazo denso de H, chamado *dominio* do operador, en H (véxase [3, Capítulo 2, § 6]). Os operadores non limitados non teñen por que ser continuos (limitados). Sen embargo, neste tipo de operadores o carácter pechado do seu grafo en $H \oplus H$ compórtase dun xeito similar á continuidade. Se un operador densamente definido é limitado, entón exténdese de forma única por continuidade a todo H.

Á hora de facer un estudo analítico do operador de Dirac xeralizado, considérase que é un operador non limitado do espazo de Hilbert $H = L^2(S) \equiv W^0(S)$ (véxase o Apéndice B) con dominio $\operatorname{dom} D = C^\infty(S)$. D é un operador linear non limitado porque cada Ds depende localmente das derivadas parciais de s, que non interveñen en $\|s\|$.

Definición 5.4. O *simétrico* $D^\dagger$ de D, é o operador diferencial en $C^\infty(S)$ determinado por

$$\langle Ds_1, s_2\rangle = \langle s_1, D^\dagger s_2\rangle,$$

para todo par de seccións $s_1, s_2 \in C^\infty(S)$. Existe un único $D^\dagger$, que se pode describir localmente a partir de D usando integración por partes. Dise que D é *simétrico* se $D^\dagger = D$.

Observación 5.5. D é simétrico se é operador de Dirac. Os conceptos da Definición 5.4 son, de feito, válidos para calquera operador diferencial nas seccións C^∞ dun fibrado ortogonal sobre unha variedade de Riemann. En particular, o simétrico $d^\dagger$ da diferencial d é a codiferencial.

Definición 5.6. Sexa T un operador linear con dominio denso nun espazo de Hilbert H. O *adxunto* T^* de T é o operador linear en H con dominio denso formado polos $x' \in H'$ tal que existe algún $x \in H$ cumprindo

$$\langle x, y\rangle = \langle x', Ty\rangle$$

para todo $y \in \operatorname{dom} T$, sendo $T^*(x') = x$ neste caso, o cal está determinado por x'. Se $T^* = T$, entón dise que T é *autoadxunto*. Se soamente $T \subset T^*$, no sentido de que os grafos cumpren esta inclusión, entón dise que T é *simétrico*.

Observación 5.7. Para operadores diferenciais, coinciden os conceptos de simétría das Definicións 5.4 e 5.6.

Definición 5.8. O *grafo* dun operador A sobre un espazo de Hilbert H é o subespazo de $H \oplus H$ dado por

$$G_A = \{\, (x, Ax) \mid x \in \operatorname{dom}(A) \,\}.$$

Lema 5.9. *A clausura do grafo dun operador de Dirac xeralizado é tamén un grafo.*

Demostración. Sexa G o grafo do operador de Dirac xeralizado D. Supóñase que $\overline{G}$ non fose un grafo. En tal caso existirán puntos $(x, y), (x, y') \in \overline{G}$ con $y \neq y'$. Debido a que $\overline{G}$ é un subspazo linear de $H \oplus H$, isto equivale a que exista un $(0, y) \in \overline{G}$ con $y \neq 0$. Logo debe existir unha sucesión x_j de seccións diferenciables de S tal que $x_j \to 0$ e $Dx_j \to y$, na norma L^2. Así, para calquera $s \in C^\infty(S)$, cúmprese que

$$\langle x_j, D^\dagger s\rangle \longrightarrow 0, \quad \langle Dx_j, s\rangle \longrightarrow \langle y, s\rangle.$$

Dado que $\langle x_j, D^\dagger s\rangle = \langle Dx_j, s\rangle$, a unicidade do límite asegura que $\langle y, s\rangle = 0$, para toda $s \in C^\infty(S)$. Chégase entón á contradición de que $y = 0$. □

Observación 5.10. A demostración do Lema 5.9 é válida igualmente para calquera operador diferencial, usando o seu simétrico.

Posto que $\overline{G}$ é un grafo, definirá un operador non limitado $\overline{D}$. O dominio de $\overline{D}$ consiste na familia de tódalas seccións $x \in L^2(S)$ tales que existe unha sucesión x_j de seccións diferenciables de S verificando que $x_j \to x$ e que Dx_j converxa en $L^2(S)$; neste caso, tense $\overline{D}x = \text{lím}_j Dx_j$. Polo Teorema 5.1, tense que $\text{dom}(\overline{D}) = W^1(S)$.

Sexan agora x e y seccións diferenciables de S tal que $Dx = y$. Entón, para toda $s \in C^\infty(S)$, cúmprese

$$\langle x, D^\dagger s\rangle = \langle Dx, s\rangle = \langle y, s\rangle,$$

o cal ten perfecto sentido para seccións arbitrarias $x, y \in L^2(S)$. Se se verifica dita expresión dirase que a ecuación $Dx = y$ satisfaise *no sentido débil*. Este concepto pódese definir tamén para ecuacións en derivadas parciais máis xerais, tratándose dunha xeralización do concepto ordinario de solución.

Definición 5.11. Dise que un operador limitado A sobre $L^2(S)$ é un *operador suavizante* se existe unha sección diferenciable k do fibrado $S \boxtimes S^* := \pi_1^* S \otimes \pi_2^* S^*$ (sobre $M \times M$) tal que

$$As(p) = \int_M k(p,q)s(q)\,\text{vol}(q),$$

onde $\pi_1, \pi_2 : M \times M \to M$ son as dúas proxeccións canónicas sobre os factores do produto. A sección k recibe o nome de *núcleo suavizante* ou *núcleo de Schwartz* de A. Por derivación baixo o signo integral compróbase que o rango dun operador suavizante está formado por seccións diferenciables.

Definición 5.12. Unha *aproximación de Friedrich* para S é unha familia $\{F_\varepsilon\}$, con $\varepsilon \in (0,1)$, de operadores suavizantes simétricos sobre $L^2(S)$ verificando as propiedades seguintes:

(i) $\{F_\varepsilon\}$ é unha familia limitada con respecto á norma L^2;

(ii) para calquera operador diferencial B de primeira orde, $\{[B, F_\varepsilon]\}$ exténdese a unha familia limitada de operadores sobre $L^2(S)$;

(iii) $F_\varepsilon \to 1$ na topoloxía débil de $L^2(S)$ (isto significa que, para todo $x, y \in L^2(S)$, $\langle F_\varepsilon x, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ cando $\varepsilon \to 0$).

As aproximacións de Friedrich existen sempre, pero aquí non se tratará tal cuestión. Tan só indicamos que están definidos localmente por convolución con funcións diferenciables con soporte compacto, de forma similar aos operadores suavizantes, facendo que esas funcións tendan a distribución de Dirac cando $\epsilon \to 0$. Probarase a continuación que para os operadores de Dirac xeralizados son equivalentes as igualdades ordinarias da forma $Dx = y$ e as súas respectivas interpretacións no sentido débil.

Proposición 5.13. *Sexan $x, y \in L^2(S)$ tales que $Dx = y$ no sentido débil. Entón $x \in W^1(S) = \text{dom}(\overline{D})$ e $\overline{D}x = y$.*

Demostración. Sexa $\{F_\varepsilon\}$ unha aproximación de Friedrich para S, e escríbase $x_\varepsilon = F_\varepsilon x$. Como F_ε é un operador suavizante simétrico, a sección x_ε é diferenciable e, para cada $s \in C^\infty(S)$, tense que

$$\begin{aligned}\langle Dx_\varepsilon, s\rangle = \langle x_\varepsilon, D^\dagger s\rangle = \langle x, F_\varepsilon D^\dagger s\rangle &= \langle x, D^\dagger F_\varepsilon s\rangle + \langle x, [F_\varepsilon, D^\dagger]s\rangle \\ &= \langle y, F_\varepsilon s\rangle + \langle x, [F_\varepsilon, D^\dagger]s\rangle.\end{aligned}$$

Posto que $\{F_\varepsilon\}$ e $\{[B, F_\varepsilon]\}$ son familias limitadas de operadores, existirá unha constante C para a cal, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle Dx_\varepsilon, s\rangle| \le |\langle y, F_\varepsilon s\rangle| + |\langle x, [F_\varepsilon, D^\dagger]s\rangle| \le C\|s\|.$$

Ao ser $C^\infty(S)$ denso en $L^2(S)$, séguese que $\|Dx_\varepsilon\| \le C$.

Polo Teorema 5.1, $\{x_\varepsilon\}$ é un subconxunto limitado do espazo de Sobolev $W^1(S)$. Logo, pola compacidade débil da bóla unidade de $W^1(S)$, existe unha sucesión $\varepsilon_j \to 0$ tal que x_{ε_j} converxe debilmente a un punto de $W^1(S)$. Dado que, segundo o Teorema B.9, a inclusión de $W^1(S)$ en $L^2(S)$ é un operador compacto, x_{ε_j} converxerá a dito punto na norma de $W^0(S) = L^2(S)$. A propiedade (iii) da Definición 5.12 asegura que tal límite é x, e conclúese que $x \in W^1(S) = \mathrm{dom}(\overline{D})$. □

Proposición 5.14. *O núcleo dun operador de Dirac xeralizado está formado por seccións diferenciables.*

Demostración. O núcleo de D consiste no conxunto das seccións $s \in W^1(S)$ tales que $Ds = 0$. Sexa s un elemento de $\ker D$. Comprobarase inductivamente que $s \in W^k(S)$ para todo k, porque estón o Corolario B.8 proporciona o resultado. Supóñase que $s \in W^{k-1}(S)$ e sexa $\{F_\varepsilon\}$ unha aproximación de Friedrich. Pola Proposición 5.2, como $Ds = 0$, existe unha constante C_k satisfacendo

$$\|F_\varepsilon s\|_k \le C_k(\|F_\varepsilon s\|_{k-1} + \|DF_\varepsilon s\|_{k-1}) = C_k(\|F_\varepsilon s\|_{k-1} + \|[D, F_\varepsilon]s\|_{k-1}).$$

Sucede que as familias $\{F_\varepsilon\}$ e $\{[D, F_\varepsilon]\}$ son limitadas en $W^{k-1}(S)$. Logo $\|F_\varepsilon s\|_k$ é limitada. Ademais, dado que $F_\varepsilon s \to s$ en $L^2(S)$, haberá unha sucesión $F_{\varepsilon_j} s$ converxente a s na norma de $W^k(S)$ no sentido débil. Por definición dos espazos de Sobolev dedúcese que $s \in W^k(S)$. □

De aquí en diante supoñerase que $D^\dagger = D$, algo que se verifica para tódolos operadores de Dirac.

Lema 5.15. *Sexa $J : H \oplus H \to H \oplus H$ o operador dado por $(x, y) \mapsto (y, -x)$, e sexa G o grafo de D. Entón existe unha descomposición en suma directa ortogonal da forma*

$$H \oplus H = \overline{G} \oplus J\overline{G}.$$

Demostración. Sexa $(x, y) \in \overline{G}^{\perp}$. Logo para toda $s \in C^{\infty}(S)$,

$$\langle (x, y), (s, Ds) \rangle = 0,$$

é dicir,

$$\langle x, s \rangle + \langle y, Ds \rangle = 0.$$

Isto significa que $Dy + x = 0$ no sentido débil. A Proposición 5.13 establece entón que $y \in W^1(S)$. Así, $(y, -x) \in \overline{G}$ e, consecuentemente, $(x, y) \in J\overline{G}$. □

Considérese agora o operador $Q : L^2(S) \to W^1(S)$ que a cada $x \in L^2(S)$ lle fai corresponder o elemento $Qx \in \mathrm{dom}(\overline{D}) = W^1(S)$ tal que $(Qx, \overline{D}Qx)$ é a proxección ortogonal en $H \oplus H$ de $(x, 0)$ sobre $\overline{G}$. Como consecuencia do Teorema 5.1 Q é un operador limitado. En efecto,

$$\|Qx\|_1^2 \leq C(\|Qx\| + \|\overline{D}Qx\|)^2 = C(\|(Qx, \overline{D}Qx)\|^2 + 2\|Qx\|\|\overline{D}Qx\|) \leq 3C\|x\|^2.$$

Logo o operador Q, considerado como operador sobre $L^2(S)$, é compacto, polo Teorema B.9. Ademais é obvio que é simétrico, positivo, inxectivo, e que ten norma ≤ 1. Preséntase agora un teorema de descomposición espectral do operador de Dirac.

Teorema 5.16. *Existe unha descomposición de H como suma directa dunha cantidade numerable de subespazos ortogonais H_λ. Cada H_λ é un espazo de seccións diferenciables de dimensión finita, e trátase do autoespazo de D asociado a cada autovalor λ. Ademais os λ forman un subconxunto discreto de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sexa Q o operador compacto e simétrico anteriormente definido. O teorema espectral para ditos operadores (véxase [6, Capítulo VII, § 4, Teorema 5]) establece que existe unha descomposición de H como suma directa de autoespazos de Q de dimensión finita, asociados a un conxunto discreto de autovalores tendendo a cero. Como Q é positivo e inxectivo, ditos autovalores deben ser estrictamente positivos.

Sexa $x \in W^1(S)$ vector propio de Q asociado a $\rho > 0$. Polo Lema 5.15,

$$(x, 0) = (Qx, \overline{D}Qx) + J(-(y, \overline{D}y)) = \rho(x, \overline{D}x) + (-\overline{D}y, y),$$

de onde $(\rho - 1)x = \overline{D}y$ e $y = -\rho\overline{D}x$. Sexan $\lambda^2 = \frac{1-\rho}{\rho}$ e $z = -\frac{1}{\rho\lambda}y$. Tense que

$$\overline{D}x = \lambda z \qquad \text{e} \qquad \overline{D}z = \lambda x,$$

deducíndose, a partir da linearidade de D, que $x + z$ e $x - z$ son vectores propios de $\overline{D}$ asociados a λ e $-\lambda$, respectivamente. Así, H pode ser expresado como suma directa numerable de autoespazos de $\overline{D}$, os cales son subespazos de dimensión finita de $W^1(S)$.

Todo vector propio de D asociado a un autovalor λ está no núcleo do operador de Dirac xeralizado $D - \lambda$, polo que se trata dunha sección diferenciable de S, segundo a Proposición 5.14. Ademais a distribución dos ρ e a definición dos autovalores λ garanten que estes últimos son discretos na recta real. □

5.3. O cálculo funcional

Nesta sección introducirase o cálculo funcional do operador de Dirac, unha ferramenta moi útil para traballar con dito obxecto. Sexa $\sigma(D)$ o espectro do operador de Dirac. Polo Teorema 5.16 toda sección $s \in L^2(S)$ ten unha "expansión de Fourier" como suma directa ortogonal da forma

$$\sum_{\lambda\in\sigma(D)} s_\lambda,$$

sendo s_λ a compoñente de s correspondente ao autoespazo de D asociado ao autovalor λ. Resulta evidente que $\|s_\lambda\| \leq \|s\|$, para todo λ.

Proposición 5.17. *Unha sección $s \in L^2(S)$ é diferenciable se e só se $\|s_\lambda\|$ é de orde $O(|\lambda|^{-k})$ para todo k e todo $\lambda \in \sigma(D)$.*

Demostración. Supóñase primeiramente que s é unha sección diferenciable. Logo $s \in W^k(S)$ ou, equivalentemente, $\|s\|_k < \infty$, para todo k. Polo tanto, empregando o indicado na Observación 5.3, tense que

$$\infty > \|s\|_k \geq \|s_\lambda\|_k \geq \frac{1}{C''_k}(\|s_\lambda\| + \|D^k s_\lambda\|) \geq \frac{1}{C''_k}\|D^k s_\lambda\| = \frac{1}{C''_k}|\lambda|^k\|s_\lambda\|,$$

de onde se deduce que

$$\|s_\lambda\| \leq C''_k\|s_\lambda\|_k|\lambda|^{-k},$$

é dicir, que $\|s_\lambda\|$ é de orde $O(|\lambda|^{-k})$, para todo k.

Recíprocamente, supóñase que $\|s_\lambda\|$ é de orde $O(|\lambda|^{-k})$ para todo k. Coma antes, a Observación 5.3 establece que

$$\|s_\lambda\|_k \leq C''_k(\|s_\lambda\| + \|D^k s_\lambda\|) = C''_k(1 + |\lambda|^k)\|s_\lambda\| \leq C'''_k|\lambda|^k\|s_\lambda\|,$$

para algunha constante C'''_k. Entón, como $\|s_\lambda\|$ é de orde $O(|\lambda|^{-k})$ para todo k, sucede que, para cada enteiro positivo ℓ, tamén $|\lambda|^\ell\|s_\lambda\|$ é de orde $O(|\lambda|^{-k})$ para todo k, obtendo

$$\|s\|_\ell = \left\|\sum_\lambda s_\lambda\right\|_\ell \leq \sum_\lambda \|s_\lambda\|_\ell \leq C'''_\ell \sum_\lambda |\lambda|^\ell\|s_\lambda\| < \infty.$$

Polo tanto, segundo o Corolario B.8, $s \in \bigcap_k W^k(S) = C^\infty(S)$. □

No caso de que a norma das compoñentes s_λ sexa de orde $O(|\lambda|^{-k})$ para todo k, dise que os termos da expansión de s *decrecen rapidamente*.

Sexa f unha función limitada sobre o espectro $\sigma(D)$. Pódese definir entón un operador limitado $f(D)$ sobre $L^2(S)$ mediante

$$f(D)s = \sum_{\lambda\in\sigma(S)} f(\lambda)s_\lambda, \tag{5.2}$$

sendo $\sum_\lambda s_\lambda$ a descomposición en suma ortogonal de $s \in L^2(S)$ indicada anteriormente. Deste xeito, $f(D)$ é o operador diagonal que actúa por multiplicación por $f(\lambda)$ sobre cada autoespazo do operador de Dirac. Dise que $f(D)$ é o *cálculo funcional* asociado á función f relativo ao operador de Dirac D.

Proposición 5.18. *A aplicación $f \mapsto f(D)$ é un homomorfismo entre o anel das funcións limitadas en $\sigma(D)$ e o espazo de operadores limitados en $L^2(S)$. A norma do operador $f(D)$ é menor ou igual que o supremo do valor absoluto de f. Se D conmuta cun operador A, entón $f(D)$ tamén. O operador $f(D)$ aplica $C^\infty(S)$ en $C^\infty(S)$. Ademais, se f e g son funcións limitadas tal que $f(x) = xg(x)$, entón $f(D) = Dg(D)$.*

Os resultados da proposición anterior son consecuencias inmediatas da definición do cálculo funcional e da Proposición 5.17. Por exemplo, a última afirmación dedúcese de que

$$Dg(D)s = D\sum_\lambda g(\lambda)s_\lambda = \sum_\lambda g(\lambda)Ds_\lambda = \sum_\lambda g(\lambda)\lambda s_\lambda = \sum_\lambda f(\lambda)s_\lambda = f(D)s.$$

Por outra banda, como consecuencia da Proposición 5.17, se f decrece rapidamente (i.e. $|f(\lambda)|$ é de orde $O(|\lambda|^{-k})$ para todo k), sucede que o rango de $f(D)$ está formado por seccións diferenciables, xa que $\|f(\lambda)s_\lambda\| = |f(\lambda)|\,\|s_\lambda\|$, e tense o seguinte.

Proposición 5.19. *Se f decrece rapidamente, $f(D)$ é operador suavizante. A aplicación entre o espazo de funcións en $\mathbb{R}$ que decrecen rapidamente (coa topoloxía de Frechet) e o espazo de núcleos de Schwartz de $M \times M$ que asocia a cada f o núcleo de Schwartz de $f(D)$, é continua.*

Demostración. Para cada $\lambda \in \sigma(D)$, o operador proxección ortogonal P_λ de $L^2(S)$ no autoespazo de D asociado a λ é operador suavizante, pois toda proxección ortogonal con rango de dimensión finita o é (precísase aquí do Teorema 5.16). Ademáis a k-ésima norma de Sobolev (en $M \times M$) do núcleo suavizante K_λ de P_λ está limitada para todo k. Como

$$f(D) = \sum_{\lambda\in\sigma(S)} f(\lambda)P_\lambda,$$

e f decrece rapidamente, séguese que $f(D)$ é suavizante con núcleo de Schwartz K_f dado pola serie

$$K_f = \sum_{\lambda\in\sigma(S)} f(\lambda)K_\lambda,$$

que é converxente en todo espazo de Sobolev, e polo tanto coa topoloxía C^∞. □

Observación 5.20. Polo teorema do embebemento de Sobolev (Teorema B.7), se $|f(\lambda)|$ é de orde $O(|\lambda|^{-N})$ para algún $N > \dim M$, entón o operador $f(D)$ terá núcleo de Schwartz continuo, xa que $W^N(S \boxtimes S^*) \subset C(S \boxtimes S^*)$.

Capítulo 6

Teoría de Hodge

Definición 6.1. Sexan M unha variedade de Riemann compacta orientable de dimensión n e $\{S_0, S_1, \dots, S_k\}$ unha familia de fibrados vectoriais sobre M con métricas hermitianas e conexións compatibles. Sexan $d_j : C^\infty(S_j) \to C^\infty(S_{j+1})$ operadores diferenciais tales que $d_{j+1}d_j = 0$, é dicir, de maneira que

$$C^\infty(S_0) \xrightarrow{d} C^\infty(S_1) \xrightarrow{d} C^\infty(S_2) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C^\infty(S_k).$$

sexa un complexo. Se $S = \oplus S_j$ é un fibrado de Clifford con operador de Dirac $D = d + d^\dagger$, dirase que se trata dun *complexo de Dirac*.

Observación 6.2. Pola Proposición 3.24, o complexo de de Rham de M é un complexo de Dirac. O teorema de de Rham (véxase [2, Teoremas 8.9 e 15.8]) establece que a cohomoloxía deste complexo é isomorfa á cohomoloxía de de Rham (con coeficientes complexos) de M.

Como consecuencia da Proposición 3.25 o complexo de Dolbeault dunha variedade de Kähler é tamén un complexo de Dirac. Ademais o complexo de Dolbeault dunha variedade complexa calquera é un complexo de Dirac xeralizado no sentido que se indica en (5.1).

A idea que se desenvolve neste capítulo consiste en empregar a métrica para obter un representante canónico de cada clase de cohomoloxía. Lémbrese que unha clase de cohomoloxía $\mathcal{C} \subset C^\infty(S_j)$ é un subespazo afín de $C^\infty(S)$, con subespazo vectorial asociado $dC^\infty(S_{j-1})$. Buscarase o elemento da clase que teña norma mínima, que será unha sección α perpendicular a $dC^\infty(S_{j-1})$. Iso significa que, para toda $\beta \in C^\infty(S_{j-1})$,

$$0 = \langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^\dagger \alpha, \beta \rangle,$$

é dicir, que $d^\dagger\alpha = 0$. Dado que α é pechada, tal feito equivale a que $D\alpha = 0$. Posto que $\|D\alpha\|^2 = \langle D^2\alpha, \alpha\rangle$, é tamén equivalente a que $D^2\alpha = 0$, caso no que se di que α é *harmónica*. Este argumento foi introducido por Weierstrass no século XIX, pero a proba da existencia das seccións harmónicas foi posteriormente aportada por Hodge.

Teorema 6.3 (Hodge)**.** *Cada clase de cohomoloxía dun complexo de Dirac contén un único representante harmónico. De feito, a j-ésima cohomoloxía $H^j(S; d)$ do complexo de Dirac é isomorfa como espazo vetorial ao subespazo das seccións harmónicas de S_j.*

Demostración. Sexa $\mathcal{H}^j$ o espazo das seccións harmónicas de S_j. Ditos espazos constitúen un subcomplexo do complexo de Dirac con diferencial trivial (onde a conmutatividade dos cadrados é consecuencia do carácter harmónico de α):

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "0"] & \mathcal{H}^{j-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{H}^{j} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{H}^{j+1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\iota"] & {} \\
\arrow[r, "d_{j-2}"] & C^\infty(S_{j-1}) \arrow[r, "d_{j-1}"] & C^\infty(S_j) \arrow[r, "d_j"] & C^\infty(S_{j+1}) \arrow[r, "d_{j+1}"] & {}
\end{tikzcd}$$

Hai que probar que a inclusión ι é unha equivalencia de cocadeas. Tómese a aplicación $P : C^\infty(S_j) \to \mathcal{H}^j$ que é restrición a $C^\infty(S_j)$ da proxección ortogonal $L^2(S_j) \to \mathcal{H}^j$. Resulta obvio que $P\iota = 1$ e que $\iota P = 1 - f(D)$, onde $f(D)$ está dada mediante o cálculo funcional definido en (5.2), tomando

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

A función

$$g(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-2} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

é limitada no espectro $\sigma(D)$ de D, debido a que $\sigma(D)$ é discreto en $\mathbb{R}$ (véxase o Teorema 5.16). Logo o *operador de Green* $G = g(D)$ está definido. Tense ademais que $D^2G = f(D)$, pois para calquera sección $s \in C^\infty(S_j)$, satisfaise

$$D^2Gs = \sum_\lambda g(\lambda)D^2 s_\lambda = \sum_{\lambda\neq 0} \lambda^{-2}\lambda^2 s_\lambda = \sum_{\lambda \neq 0} s_\lambda = f(D)s.$$

Por outra banda, tomando $H = d^\dagger G$, obtense que

$$D^2G = (dd^\dagger + d^\dagger d)G = dH + Hd,$$

debido a que G conmuta con d, algo que se pode deducir dun xeito similar ao razoamento anterior (xa que D^2 conmuta con d). Polo tanto,

$$1 - \iota P = f(D) = D^2G = dH + Hd.$$

Isto implica que ι é unha equivalencia de cocadeas (véxase [14, Lema 4.11]), concluíndose o resultado. $\square$

Corolario 6.4. *A cohomoloxía dun complexo de Dirac sobre unha variedade compacta ten dimensión finita.*

Demostración. Polo Teorema 6.3, tense o isomorfismo $H^j(S; d) \cong \mathcal{H}^j$, onde $\mathcal{H}^j$ é o autoespazo de D asociado ao autovalor 0, o cal é de dimensión finita debido ao Teorema 5.16. $\square$

Corolario 6.5 (Dualidade de Poincaré)**.** *Sexa M unha variedade compacta, conexa e orientada de dimensión n. Entón o produto intersección*

$$H^k(M;\mathbb{C}) \otimes H^{n-k}(M;\mathbb{C}) \longrightarrow H^n(M;\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

é non dexenerado, establecendo unha dualidade entre $H^k(M;\mathbb{C})$ e $H^{n-k}(M;\mathbb{C})$.

Demostración. Emprégase neste corolario a cohomoloxía de de Rham, que é isomorfa á cohomoloxía do complexo de Dirac (ver Observación 6.2). O produto intersección na cohomoloxía corresponde co producto na cohomoloxía de de Rham inducido polo produto exterior de formas diferenciais. Trátase de comprobar que se unha clase $\mathcal{C} \in H^k(M;\mathbb{C})$ é tal que $\mathcal{C} \frown \mathcal{C}' = 0$ para toda $\mathcal{C}' \in H^k(M;\mathbb{C})$, entón $\mathcal{C} = 0$. Considérese unha métrica riemanniana sobre M e tómese α representante harmónico de $\mathcal{C}$. Como $D^2 \star\alpha = \star D^2\alpha = 0$, sucede que $\star\alpha$ tamén é forma harmónica, e representa a unha clase $\mathcal{C}'$. Logo $\mathcal{C} \frown \mathcal{C}'$ ten como representante harmónico a $\alpha \wedge \star\alpha$. Usando o isomorfismo de integración existente entre $H^n(M;\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}$ (véxase [14, Teorema 10.13]) séguese que

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha\rangle = \int_M \alpha \wedge \star\alpha = 0 \implies \alpha = 0. \quad \square$$

Observación 6.6. Estes dous corolarios do teorema de Hodge, aplicados ao complexo de de Rham, son exemplos de resultados puramente topolóxicos obtidos mediante técnicas analíticas. Tales enunciados poden ser probados tamén empregando unicamente argumentos topolóxicos. Sen embargo, existen casos dos resultados anteriores (sobre variedades de Kähler, por exemplo) que se deducen da Teoría de Hodge e que semellan imposibles de probar por unha vía exclusivamente topolóxica.

A dualidade de Poincaré pode ser interpretada dende o punto de vista analítico mediante formas diferenciais ou dende o punto de vista xeométrico mediante clases de cohomoloxía. Sexa M unha variedade compacta orientable de dimensión n e C unha subvariedade pechada orientable de dimensión $k \leq n$. Tense entón o funcional linear en cohomoloxía seguinte:

$$[C] : [\alpha] \in H^k(M;\mathbb{C}) \longmapsto \int_C \alpha \ \in H^n(M;\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

Este funcional está ben definido porque $\int_C \alpha$ só depende da clase de cohomoloxía da forma α. Iso débese a que, polo teorema de Stokes, $\int_C d\beta = 0$ e, consecuentemente, $[C](d\Omega^{k-1}(M)) = 0$. Ademais $[C]$ pode ser extendido a un funcional φ_C sobre o espazo das k-formas de cadrado integrable $\Omega^k_{L^2}(M)$, facendo uso da proxección ortogonal $P : \Omega^k_{L^2}(M) \to \mathcal{H}^k$ (a cal conserva a clase de cohomoloxía) e definindo

$$\varphi(\alpha) \equiv \varphi_C(\alpha) = \int_C P\alpha.$$

Deste xeito, φ é un funcional linear continuo no espazo de Hilbert $\Omega^k_{L^2}(M)$. Aplicando o teorema de representación de Riesz para o dual dun espazo de Hilbert (véxase [3, Teorema 5.5]), tense que existe unha única forma $\beta \in \Omega^k_{L^2}(M)$ tal que $\varphi(\alpha) = \langle \alpha, \beta\rangle$, para toda

$\alpha \in \Omega^k_{L^2}(M)$. Dado que $P^2 = P = P^*$, cúmprese que

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \varphi(\alpha) = \int_C P\alpha = \int_C P^2\alpha = \varphi(P\alpha) = \langle P\alpha, \beta \rangle,$$

de onde $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, P\beta \rangle$. Isto implica que $P\beta = \beta$, é dicir, que β é unha forma harmónica. Entón o dual $\star\beta$ dado pola Proposición 6.5 representa unha clase de cohomoloxía que, facendo uso da expresión dada polo teorema de representación de Riesz, verifica

$$\int_C P\alpha = \int_M \alpha \wedge \star\beta,$$

para toda $\alpha \in \Omega^k_{L^2}(M)$. A clase de cohomoloxía $[P_C] = [\star\beta] \in H^{n-k}(M)$ recibe o nome de *dual de Poincaré* da subvariedade C. Como a dualidade establecida na Proposición 6.5 é independente da métrica considerada en M, o dual de Poincaré tamén o será.

Se C e C' son subvariedades pechadas orientables de dimensións complementarias satisfaise que

$$\int_C P_{C'} = \int_M P_{C'} \wedge P_C = (-1)^{\dim C \, \dim C'} \int_M P_C \wedge P_{C'} = \pm \int_{C'} P_C,$$

onde o signo menos só aparece se as dúas dimensións son impares. Dito número denomínase *número de intersección xeométrica* de C e C', e representa o número de puntos (necesariamente illados) de intersección entre as subvariedades C e C', supoñendo que C e C' esteñan en posición "xenérica", considerados cun signo en concordancia coas orientacións das mesmas. Para a demostración deste feito é preciso relacionar a dualidade de Poincaré co isomorfismo de Thom (véxase [2, Capítulo 1, § 6]).

Observación 6.7. Bochner foi quen introduciu a idea de combinar a representación da cohomoloxía mediante formas harmónicas coa fórmula de Weitzenbock (véxase a Proposición 3.11), co ánimo de obter resultados topolóxicos relativos á curvatura positiva de variedades. Para traballar deste xeito é preciso calcular explícitamente o termo K da fórmula de Weitzenbock. A seguinte proposición faino para o caso particular do operador de de Rham.

Lema 6.8. *Sexa $D = d + d^\dagger$ o operador de de Rham. Entón a restrición a 1-formas da contracción de Clifford da curvatura é igual ao operador curvatura de Ricci.*

Demostración. Sexa e_i unha referencia ortonormal de TM. Segundo a Definición 3.10, a contracción de Clifford da curvatura é

$$\mathsf{K} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c(e_i)c(e_j)K(e_i, e_j).$$

Nesa expresión K é o operador curvatura do fibrado cotanxente T^*M, porque se está a considerar a restrición a 1-formas. Pódese empregar a métrica para identificar TM e T^*M, tomando así K como o operador curvatura de Riemann R. Polo tanto, tendo en conta as Proposicións 1.16 e 3.20, conclúese que

$$\begin{aligned}\mathsf{K}e_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} c(e_i)c(e_j)c(e_l)(R(e_i,e_j)e_k,e_l) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} c(e_i)c(e_j)c(e_l)R_{lkij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} R_{klij}c(e_ie_je_l) = \sum_a \mathrm{Ric}_{ka}\, c(e_a). \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 6.9 (Bochner)**.** *Sexa M unha variedade compacta orientable cuio primeiro número de Betti sexa non nulo. Entón M non posúe ningunha métrica con curvatura de Ricci positiva.*

Demostración. Segundo a Observación 6.2 tense que

$$0 \neq b_1(M) = \dim H^1(M;\mathbb{C}) = \dim H^1(S;d),$$

polo que, debido ao Teorema 6.3, existe un único representante harmónico α de $H^1(S;d)$. Logo α é unha solución non trivial de $D^2 s = 0$. O Teorema 3.13 asegura entón que K ten algún autovalor non positivo. O resultado séguese do Lema 6.8. $\square$

Capítulo 7

A ecuación da calor

Considerarase que M é unha variedade de Riemann compacta dotada dun fibrado de Clifford S sobre cuias seccións diferenciables actúa o operador de Dirac D. Neste capítulo apórtanse resultados sobre a correspondente ecuación do calor, que é unha das ecuacións en derivadas parciais típicas que involucran ao operador D. Ditos resultados pódense xeralizar facilmente a operadores da forma $D + A$, sendo A un endomorfismo simétrico de S.

7.1. Operador e núcleo da calor

Definición 7.1. A *ecuación da calor* para D é a ecuación en derivadas parciais dada por

$$\partial_t s + D^2 s = 0 \quad (t \geq 0).$$

Na expresión anterior enténdese que s é unha sección diferenciable de S que tamén depende diferenciablemente do parámetro "temporal" t, é dicir, s debe ser interpretada como unha aplicación diferenciable $M \times [0, \infty) \to S$, ou incluso

$$t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto s_t \in C^\infty(S).$$

Proposición 7.2. *Fixada unha sección inicial $s_0 \in C^\infty(S)$, a ecuación da calor ten unha única solución diferenciable s_t, definida para $t \geq 0$. Ademais a norma L^2 verifica a estimación $\|s_t\| \leq \|s_0\|$.*

Demostración. Supóñase en primeiro lugar que existe unha solución diferenciable s_t, con $t \geq 0$. Empregando a Proposición 3.14, tense que

$$\partial_t \|s_t\|^2 = \partial_t \langle s_t, s_t \rangle = -\langle D^2 s_t, s_t \rangle - \langle s_t, D^2 s_t \rangle = -2\langle Ds_t, Ds_t \rangle = -2\|Ds_t\|^2 \leq 0.$$

Polo tanto, para $t \geq 0$, satisfaise a desigualdade $\|s_t\|^2 \leq \|s_0\|^2$, que é equivalente á do enunciado.

Para probar a unicidade tómese outra solución u_t correspondente á sección inicial s_0. É obvio que $s_t - u_t$ é a solución da ecuación da calor correspondente á condición inicial $s_0 - s_0 = 0$. Logo $\|s_t - u_t\| = 0$ e séguese que $s_t = u_t$.

Tratarase agora a existencia de solución. Considérese

$$s_t = e^{-tD^2} s_0 \in C^\infty(S),$$

onde o operador e^{-tD^2} está definido mediante o cálculo funcional dado na fórmula (5.2). Como a función

$$(t, \lambda) \longmapsto e^{-t\lambda^2}$$

pode ser derivada con respecto a $t > 0$, uniformemente en λ, tense que s_t depende diferenciablemente de t e resulta ser solución da ecuación da calor. En efecto, satisfaise a condición inicial e ademais

$$\partial_t s_t = -D^2 e^{-tD^2} s_0 = -D^2 s_t. \quad \square$$

Observación 7.3. O feito de que norma da solución s_t da ecuación da calor sexa menor ou igual cá norma da sección inicial s_0 débese a que, para cada aoutovalor λ de D, tense que $e^{-t\lambda^2} \leq 1$ (dándose a igualdade só no caso $\lambda = 0$), sendo

$$s_t = e^{-tD^2} s_0 = \sum_\lambda e^{-t\lambda^2} (s_0)_\lambda.$$

Observación 7.4. A proba da unicidade de solución é válida para calquera solución que sexa de clase C^2 no espazo e de clase C^1 con respecto ao tempo.

Dado que a función expoñencial decrece rapidamente, a Proposición 5.19 asegura que o operador solución e^{-tD^2} da ecuación da calor é un operador suavizante. Entón existe unha familia, dependente do tempo e denominada *núcleo da calor*, de seccións k_t do fibrado $S \boxtimes S^*$ sobre $M \times M$ verificando

$$e^{-tD^2} s(p) = \int_M k_t(p,q) s(q) \operatorname{vol}(q), \tag{7.1}$$

para toda sección diferenciable s e todo $t > 0$.

Proposición 7.5. *O núcleo da calor $k_t(p,q)$ ten as seguintes propiedades:*

(i) *Satisfaise a ecuación*

$$\left(\partial_t + D_p^2\right) k_t(p,q) = 0,$$

sendo D_p o operador de Dirac que actúa sobre a variable p. Isto quere dicir que, fixado un punto q, a sección $p \mapsto k_t(p,q)$ de $S \otimes S_q^*$ verifica a ecuación da calor.

(ii) *Para cada sección diferenciable s, cúmprese que*

$$\int_M k_t(p,q) s(q) \operatorname{vol}(q) \longrightarrow s(p)$$

uniformemente en p, cando $t \to 0$.

É máis, o núcleo da calor é a única sección de $S \boxtimes S^*$ dependente do tempo que é C^2 con respecto a p e a q, que é C^1 con respecto a t, e que verifica as propiedades (i) e (ii).

Demostración. A Proposición 7.2 e a ecuación (7.1) aseguran que o núcleo da calor verifica as propiedades (i) e (ii).

Recíprocamente, para comprobar a unicidade supóñase que K_t é a familia dos operadores suavizantes cuios núcleos de Schwartz satisfan ambas propiedades. Entón, para cada sección diferenciable s, a sección dependente do tempo $K_t s$ verifica a ecuación da calor, para todo $t > 0$. Pola unicidade para solucións de clase C^2 respecto do espazo (dada pola Proposición 7.2), tense que

$$K_t s = e^{-(t-\varepsilon)D^2} K_\varepsilon s,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Sucede tamén que, cando $\varepsilon \to 0$, téñense a converxencia uniforme $K_\varepsilon s \to s$ e a converxencia $e^{-(t-\varepsilon)D^2} \to e^{-tD^2}$ na norma L^2. Consecuentemente, $e^{-(t-\varepsilon)D^2} K_\varepsilon s \to e^{-tD^2} s$. Polo tanto, para toda sección diferenciable s, cúmprese que $K_t s = e^{-tD^2} s$. Logo K_t é necesariamente o núcleo da calor. □

Observación 7.6. A propiedade (i) da Proposición 7.5 tamén se expresa habitualmente dicindo que k_t tende a unha δ-función (ou δ-sección) cando $t \to 0$.

7.2. Núcleo da calor aproximado

Definición 7.7. Sexa m un enteiro positivo. Un *núcleo da calor aproximado* de orde m é unha sección $k'_t(p,q)$ de $S \boxtimes S^*$ dependente do tempo e tal que verifica as condicións seguintes: é de calse C^2 en p e q; é de clase C^1 con respecto a t; tende a unha δ-función; e satisfai aproximadamente a ecuación da calor, no sentido de que

$$\left(\partial_t + D_p^2\right) k'_t(p,q) = t^m r_t(p,q),$$

sendo $r_t(p,q)$ unha sección de clase C^m de $S \boxtimes S^*$ que depende continuamente do tempo para $t \geq 0$. Dise entón que a sección $r_t(p,q)$ é un *termo de erro* de clase C^m.

O obxectivo deste capítulo consiste en demostrar que, dalgunha maneira, os núcleos da calor aproximados converxen asintóticamente ao núcleo da calor.

Proposición 7.8 (Principio de Duhamel)**.** *Sexa s_t unha sección de clase C^2 de S que varía continuamente co tempo. Entón existe unha única sección diferenciable $\tilde{s}_t$ de S variando diferenciablemente co tempo, con $\tilde{s}_0 = 0$, e tal que se satisfai a ecuación non homoxénea da calor, é dicir,*

$$\left(\partial_t + D^2\right) \tilde{s}_t = s_t.$$

En particular, $\tilde{s}_t$ vén dada pola fórmula integral

$$\tilde{s}_t = \int_0^t e^{-(t-t')D^2} s_{t'} \, dt'.$$

Demostración. Para comprobar o enunciado de existencia é preciso derivar baixo o signo integral a fórmula dada, obtendo

$$\partial_t \tilde{s}_t = s_t + \int_0^t \left(-D^2 \, e^{-(t-t')D^2} s_{t'} \right) \, dt' = s_t - D^2 \tilde{s}_t.$$

Para comprobar a unicidade supóñase que $\tilde{u}_t$ fose outra solución da ecuación non homoxénea da calor cumprindo as condicións pedidas. Entón, dun xeito obvio, tense que

$$\left(\partial_t + D^2\right)(\tilde{s}_t - \tilde{u}_t) = \tilde{s}_0 - \tilde{u}_0 = 0.$$

Isto significa que $\tilde{s}_t - \tilde{u}_t$ é solución da ecuación homoxénea da calor, a cal ten solución única pola Proposición 7.2. Como a sección cero verifica trivialmente tal ecuación, tense o resultado. □

Corolario 7.9. *Para cada $k \geq 0$ téñense estimacións para tódalas normas de Sobolev da solución da ecuación non homoxénea da calor, as cales, para certas constantes C_k, toman a forma*

$$\|\tilde{s}_t\|_k \leq t \, C_k \sup\{ \, \|s_{t'}\|_k \mid 0 \leq t' \leq t \, \}.$$

Demostración. Empregando a fórmula integral para $\tilde{s}_t$ expresada na Proposición 7.8 resulta evidente que bastará con probar que os operadores e^{-tD^2} están uniformemente limitados en cada espazo de Sobolev. É doado ver que os operadores e^{-tD^2} e D^k conmutan entre si. Logo, segundo a Observación 5.3, para cada $k \geq 0$ existe unha constante $C''_k \geq 1$ tal que

$$\left\| e^{-tD^2} \right\|_k \leq C''_k \left(\left\| e^{-tD^2} \right\| + \left\| D^k e^{-tD^2} \right\| \right) = C''_k \left(\left\| e^{-tD^2} \right\|_k + \left\| e^{-tD^2} D^k \right\|_k \right).$$

O resultado séguese do feito de que e^{-tD^2} está uniformemente limitado na norma L^2, pola Proposición 5.18. □

Proposición 7.10. *Sexa k_t o núcleo da calor correspondente a un fibrado de Clifford S sobre unha variedade M. Para cada enteiro positivo m, existe un $m' \geq m$ tal que, se k'_t é un núcleo oproximado da calor de orde m', entón*

$$k_t(p,q) - k'_t(p,q) = t^{m'} e_t(p,q),$$

onde e_t é unha sección de $S \boxtimes S^*$ de clase C^m que depende continuamente de $t \geq 0$.

Demostración. Tómese $m' > m + \frac{1}{2} \dim M$. Por definición de núcleo da calor aproximado, k'_t tende a unha δ-función e verifica a ecuación

$$\left(\partial_t + D_p^2\right) k'_t(p,q) = t^{m'} r_t(p,q),$$

sendo $r_t(p,q)$ un termo de erro de clase $C^{m'}$. Segundo a Proposición 7.8, para $s_0 = 0$, existirá unha única solución $s_t(p,q)$ (dependente de q) da ecuación non homoxénea da calor dada por

$$\left(\partial_t + D_p^2\right) s_t(p,q) = -t^{m'} r_t(p,q).$$

Polo tanto, tense que

$$\left(\partial_t + D_p^2\right)(k'_t + s_t)(p,q) = t^{m'} r_t(p,q) - t^{m'} r_t(p,q) = 0,$$

de onde, aplicando a unicidade de solución para a ecuación da calor,

$$k_t(p,q) - k'_t(p,q) = s_t(p,q).$$

Por outra banda, o Corolario 7.9 establece que existe unha constante $C_{m'}$ cumprindo que

$$\|s_t\|_{m'} \leq t\, C_{m'} \sup\left\{ \left\| -t'^{m'} r_{t'} \right\|_{m'} \mid 0 \leq t' \leq t \right\} = t^{m'+1}\, C_{m'} \|r_t\|_{m'}.$$

Para valores de t próximos a cero, que son os relevantes neste caso, a m'-ésima norma de Sobolev de r_t está limitada. Consecuentemente, sucede que $\|s_t\|_{m'} \leq t^{m'+1}\, C$, para algunha constante C que depende continuamente do parámetro temporal. Segundo teorema do embebemento de Sobolev (Teorema B.7), a inclusión $W^{m'}(S) \to C^m(S)$ é unha aplicación continua, polo que $\|s_t\|_m \leq t^{m'+1}\, C$, concluíndose o resultado. $\square$

7.3. Expansión asintótica do núcleo da calor

A teoría elemental de ecuacións en derivadas parciais sobre espazos euclidianos establece que o núcleo da calor vén dado pola función (véxase [7, § 2.3])

$$(x,y,t) \longmapsto \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right),$$

sendo n a dimensión do espazo en cuestión. Tal feito, no caso da ecuación da calor sobre unha variedadede Riemann M de dimensión n, induce a considerar a función

$$h_t(p,q) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-d(p,q)^2}{4t}\right)$$

como unha primeira aproximación do núcleo da calor. De feito, empregarase como punto de partida para a construción dunha expansión asintótica do núcleo da calor.

Sexa $q \in M$ un punto fixo e escóllase un sistema coordenado xeodésico local x^i con orixe en q. Denotarase $r^2 = \sum (x^i)^2 = \sum g^{ij} x^i x^j$, de maneira que r sexa a distancia xeodésica con respecto á orixe q. Sexa tamén a función $h = (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t}$, que é a representación local de $h_t(\,\cdot\,, q)$.

Lema 7.11. *Verifícanse as igualdades seguintes:*

(a) $\nabla h = -\frac{h}{2t}\, r\, \partial_r$,

(b) $\partial_t h + \Delta h = \frac{rh}{4gt}\, \partial_r g$, *onde* $g = \det(g^{ij})$ *é o determinante da métrica riemanniana.*

Demostración. Sucede que $dh = (-h/2t)r\,dr$. O gradiente ∇h e a 1-forma dh correspóndense mutuamente mediante o isomorfismo determinado pola métrica entre o espazo tanxente e o espazo cotanxente. Pero dito isomorfismo tamén leva dr en ∂_r, debido a que se está a considerar un sistema coordenado xeodésico. Así queda probado o apartado (a).

Para demostrar (b) comezarase por probar a fórmula xeral

$$\nabla^\dagger(fV) = f\nabla^\dagger V - (\nabla f, V),$$

para calesquera función f e campo de vectores V. En efecto, dada unha función h, tense que

$$\begin{aligned}\langle h, \nabla^\dagger(fV)\rangle = \langle \nabla h, fV\rangle = \langle f\nabla h, V\rangle &= \langle \nabla(fh) - h\nabla f, V\rangle \\ &= \langle fh, \nabla^\dagger V\rangle - \langle h\nabla f, V\rangle = \langle h, f\nabla^\dagger V - (\nabla f, V)\rangle.\end{aligned}$$

Agora, polo apartado (a), cúmprese que

$$\Delta h = \nabla^\dagger \nabla h = -\frac{h}{2t}\,\nabla^\dagger(r\,\partial_r) + \frac{1}{2t}\langle \nabla h, r\,\partial_r\rangle = -\frac{h}{2t}\,\nabla^\dagger(r\,\partial_r) + \frac{r}{2t}\,\partial_r h.$$

O segundo sumando obtido é igual a $-r^2h/4t^2$, mentres que o primeiro queda determinado pola expresión

$$\nabla^\dagger(r\,\partial_r) = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_j \partial_j(x^j\sqrt{g}) = -n - \frac{r}{2g}\partial_r g,$$

facendo uso da fórmula (1.1). Polo tanto,

$$\Delta h = \left(-\frac{r^2}{4t^2} + \frac{n}{2t} + \frac{r}{4gt}\partial_r g\right)h.$$

Por outra banda, é doado calcular que

$$\partial_t h = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2}\right)h,$$

e combinando as dúas últimas fórmulas tense o resultado. □

Lema 7.12. *Sexan f unha función diferenciable, s unha sección diferenciable sobre un fibrado de Clifford S, e D o operador de Dirac sobre $C^\infty(S)$. Satisfanse as igualdades seguintes:*

(a) $D(fs) - fDs = c(\nabla f)s$, *onde c denota a multiplicación de Clifford.*

(b) $D^2(fs) - fD^2s = (\Delta f)s - 2\nabla_{\nabla f}s$.

Demostración. Considérese unha referencia ortonormal sincrónica e_i. O apartado (a) é consecuencia das propiedades da derivada covariante, pois

$$D(fs) = \sum_i e_i \nabla_i (fs) = f \sum_i e_i \nabla_i s + \sum_i df(e_i) e_i \cdot s = fDs + c(\nabla f)s.$$

Probarase agora o apartado (b). Satisfaise que

$$\begin{aligned} D(fDs) &= \sum_{i,j} e_i \nabla_i (f e_j \nabla_j s) = \sum_{i,j} e_i f \nabla_i (e_j \nabla_j s) + \sum_{i,j} e_i (\nabla_i f) e_j \nabla_j s \\ &= f \sum_{i,j} e_i e_j \nabla_i \nabla_j s + \sum_{i,j} e_i e_j \nabla_i f \nabla_j s. \end{aligned}$$

Ademais sucede que

$$\begin{aligned} D(c(\nabla f)s) &= \sum_{i,j} e_i \nabla_i (\nabla_j f e_j \cdot s) = \sum_{i,j} e_i (\nabla_i \nabla_j f) e_j s + \sum_{i,j} e_i (\nabla_j f) \nabla_i e_j s \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_i \nabla_j f) e_i e_j s + \sum_{i,j} e_i e_j \nabla_j f \nabla_i s + \sum_{i,j} e_i (\nabla_j f)(\nabla_i e_j) s. \end{aligned}$$

Polo tanto, aplicando (a), resulta que

$$D^2(fs) = fD^2 s + (\Delta f)s + \sum_{i,j} e_i e_j (\nabla_i f \nabla_j s + \nabla_j f \nabla_i s),$$

onde, debido á regra do produto de Clifford, no terceiro sumando os termos con $i \neq j$ cancélanse, de forma que queda $-2\nabla_{\nabla f} s$. □

Definición 7.13. Sexa f unha función sobre $\mathbb{R}^+$ que toma valores nun espazo de Banach E. Unha *expansión asintótica* de f ao redor de $t = 0$ é unha serie formal

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t),$$

sendo $a_k : \mathbb{R}^+ \to E$ funcións, e tal que se verifique a condición seguinte: para cada enteiro positivo n existe un ℓ_n tal que, se $\ell \geq \ell_n$, entón

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{\ell} a_k(t) \right\| \leq C_{\ell,n} |t|^n,$$

para algunha constante $C_{\ell,n}$ e para t suficientemente pequeno.

Observación 7.14. Outra forma de expresar a condición da definición anterior é a seguinte: para cada n case tódalas sumas parciais da serie formal aproxímanse a f cun erro de orde t^n, para t suficientemente pequeno.

Cabe destacar tamén que unha expansión asintótica non ten por que converxer necesariamente. Por exemplo, as series de Maclaurin para unha función C^∞ son sempre expansións asintóticas pero converxen se e só se a función é analítica nunha veciñanza do cero.

O seguinte teorema dá unha expansión asintótica do núcleo da calor.

Teorema 7.15. *Sexa M unha variedade de Riemann compacta equipada cun fibrado de Clifford S con operador de Dirac D. Sexa k_t o núcleo da calor para M. Entón verifícanse as propiedades seguintes:*

(i) *Existe unha expansión asintótica de k_t da forma*

$$k_t(p,q) \;\sim\; h_t(p,q)(\Theta_0(p,q) + t\Theta_1(p,q) + t^2\Theta_2(p,q) + \cdots),$$

onde as Θ_j son seccións diferenciables de $S \boxtimes S^*$.

(ii) *Esta expansión asintótica é válida no espazo de Banach $C^r(S \boxtimes S^*)$, para todo $r \geq 0$. Ademais pode ser derivada formalmente para obter expansións asintóticas das derivadas parciais (con respecto ao espazo e ao tempo) do núcleo da calor.*

(iii) *Os valores das seccións Θ_j ao longo da diagonal pódense calcular mediante expresións alxébricas involucrando aos coeficientes da métrica e da conexión, e ás súas derivadas parciais. En particular, $\Theta_0(p,p) = 1$.*

Demostración. Debido á Proposición 7.10, bastará con probar que é posible atopar seccións Θ_j de $S \boxtimes S^*$ tales que para cada enteiro positivo m a suma parcial, con J suficientemente grande,

$$h_t(p,q)\sum_{j=0}^{J} t^j\Theta_j(p,q),$$

sexa un núcleo da calor aproximado de orde m. De feito, chegará con construír as seccións $\Theta(p,q)$ para aqueles puntos p que estean próximos a un q fixo, xa que fóra dunha veciñanza da diagonal de $M \times M$ o termo $h_t(p,q)$ é de orde t^∞ porque a distancia $d(p,q)$ que aparece na súa expresión faise grande.

Tómese un sistema coordenado xeodésico local con orixe q e denótense por $x^1, \dots, x^n$ as coordenadas locais para p. Como xa se fixo con anterioridade, h denotará á representación local de $h_t(\,\cdot\,, q)$. Aplicando os Lemas 7.11 e 7.12, para calquera sección diferenciable s de S (equivalentemente, de $S \otimes S_q^*$), obtense que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\partial_t + D^2\right)(hs) &= \frac{1}{h}\left(\partial_t h\, s + h\partial_t s + hD^2 s + (\Delta h)s - 2\nabla_{\nabla h} s\right)\\ &= \partial_t s + D^2 s + \frac{r}{4gt}\,\partial_r g\, s + \frac{1}{t}\nabla_{r\partial_r} s. \qquad (7.2)\end{aligned}$$

Considérese unha expansión $s \sim u_o + tu_1 + t^2u_2 + \cdots$, sendo os u_j seccións diferenciables de S independentes do tempo. Segundo a expresión anterior, para cada potencia positiva de t cúmprese que

$$\frac{1}{h}\left(\partial_t + D^2\right)(ht^j u_j) = jt^{j-1}u_j + D^2(t^j u_j) + \frac{r}{4g}\,\partial_r g\, t^{j-1}u_j + t^{j-1}\nabla_{r\partial_r} u_j,$$

de onde, igualando a cero ditos coeficientes da expansión, resulta

$$\nabla_{r\partial_r} u_j + \left(j + \frac{r}{4g}\, \partial_r g \right) u_j = -D^2 u_{j-1}, \tag{7.3}$$

para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$.

As ecuacións (7.3) son ecuacións diferenciais ordinarias ao longo de cada liña radial que sae de q, e son equivalentes ás ecuacións seguintes:

$$\nabla_{\partial_r} \left(r^j g^{\frac{1}{4}} u_j \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 0 \\ -r^{j-1} g^{\frac{1}{4}} D^2 u_{j-1} & \text{se } j \geq 1. \end{cases} \tag{7.4}$$

A equivalencia entre (7.3) e (7.4) obtense ao introducir $g^{1/4}$ como factor integrante. Por exemplo, para $j = 0$,

$$0 = \nabla_{r\partial_r} u_0 + \left(\frac{r}{4g}\, \partial_r g \right) u_0 = \nabla_{\partial_r} u_0 + \left(g^{\frac{-1}{4}}\, \partial_r g^{\frac{1}{4}} \right) u_0 = \nabla_{\partial_r} \left(g^{\frac{1}{4}} u_0 \right).$$

Deste xeito, u_0 está determinado polo seu valor inicial $u_0(0)$, que é o endomorfismo identidade de S_q. Para $j \geq 1$ a ecuación anterior determina u_j en función de u_{j-1}, salvo un sumando que é múltiplo constante dun termo de orde r^{-j} arredor de $r = 0$. Pero a hipótese da diferenciabilidade na orixe implica que esta constante de integración debe ser nula. Polo tanto, os u_j estarán determinados polo valor inicial $u_0(0) = 1$.

Definiranse os $\Theta_j(p, q)$ como as funcións con valores en $S \boxtimes S^*$ que están representadas en coordenadas locais arredor de q mediante as funcións $u_j(r)$. Como $\Theta_0(p, p) = u_0(0) = 1$ e o núcleo da calor euclidiano (a partir do cal se define $h_t(p, q)$) tende a unha δ-función cando $t \to 0$, para todo J a suma parcial

$$k_t^J(p, q) = h_t(p, q) \sum_{j=0}^{J} t^j \Theta_j(p, q)$$

tamén tenderá a unha δ-función cando $t \to 0$. Agora, razoando coa expresión

$$\frac{1}{h_t(p, q)} \left(\partial_t + D_p^2 \right) \left(h_t(p, q) \sum_{j=0}^{J} t^j \Theta_j(p, q) \right)$$

segundo se indica en (7.2), dedúcese que

$$(\partial_t + D_p^2) k_t^J(p, q) = t^J h_t(p, q) e_t^J(p, q),$$

onde $e_t^J(p, q)$ é un termo de erro diferenciable. Non obstante, tal e como se reflexou na demostración da Proposición 7.10, escollendo $J > m + n/2$, o teorema do embebemento de Sobolev (Teorema B.7) asegura que a función $t^J e_t^J(p, q)$ tende a cero na topoloxía de Frechet C^m cando $t \to 0$. Polo tanto, para J suficientemente grande, $k_t^J(p, q)$ é un núcleo da calor aproximado de orde m. Como xa se indicou ao comezo da demostración, isto implica que

$$h_t(p,q)(\Theta_0(p,q) + t\Theta_1(p,q) + t^2\Theta_2(p,q) + \cdots)$$

é unha expansión asintótica do núcleo da calor k_t. Queda así probado o apartado (i), a partir do cal se deduce inmediatamente (ii).

Para xustificar o apartado (iii) obsérvese que os $\Theta_j(p,q)$ están representados localmente mediante os $u_j(0)$, os cales veñen dados por expresións alxébricas involucrando aos coeficientes da métrica e da conexión, e ás súas derivadas parciais (véxanse as ecuacións (7.3)). Ademais os dous membros de ditas ecuacións poden ser expandidos mediante series de Taylor arredor dunha orixe q. A afirmación (iii) séguese de aplicar inducción en j, comparando os coeficientes das series de Taylor en cada paso e tendo en conta que $\Theta_0(p,p) = u_0(0) = 1$. □

Exemplo 7.16. Semella que, seguindo os pasos da demostración anterior, é posible calcular tódalas seccións Θ_j da expansión asintótica do núcleo da calor. Sen embargo, na práctica isto pode resultar extremadamente complicado. Aquí simplemente se calculará o coeficiente Θ_1 ao longo da diagonal.

A partir da ecuación (7.4) correspondente a $j = 0$ resulta evidente que $u_0 = g^{-1/4}$. Como na orixe do sistema local $r = 0$, a fórmula (7.3) e a fórmula de Weitzenbock (véxase a Proposición 3.11) establecen que, na orixe,

$$u_1(0) = -D^2 u_0(0) = \sum_i (\partial_i)^2 \left(g^{\frac{-1}{4}}\right) - \mathsf{K}.$$

Considérese agora a expansión de Taylor da métrica en coordenadas xeodésicas, a cal vén dada por

$$g = 1 + \frac{1}{3}\sum_{i,p,q} x^p x^q R_{ipqi} + O(|x|^3),$$

de onde se deduce que

$$g^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{12}\sum_{i,p,q} x^p x^q R_{ipqi} + O(|x|^3).$$

Polo tanto, ao derivar e facer uso da simetría do operador curvatura de Riemann, conclúese que

$$\sum_i (\partial_i)^2 \left(g^{-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{6}\sum_{i,p} R_{ippi} = \frac{1}{6}\,\kappa,$$

sendo κ a curvatura escalar da Definición 1.18.

Resumindo, cúmprese que, dado un punto $p \in M$, a expansión asintótica para o núcleo da calor comeza cos dous seguintes termos:

$$\Theta_0(p,p) = 1,$$
$$\Theta_1(p,p) = \frac{1}{6}\,\kappa(p) - \mathsf{K}(p).$$

Capítulo 8

Operadores de tipo traza e autovalores

Sexa M unha variedade de Riemann compacta orientable de dimensión n. No Capítulo 5 probouse que o Laplaciano Δ de $L^2(M)$ ten espectro discreto con autovalores $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ que tenden a infinito. Neste capítulo preténdese profundizar na distribución de ditos autovalores mediante o estudo da función

$$\mathfrak{N}(\lambda) = \text{máx}\{\, j \mid \lambda_j \leq \lambda \,\},$$

que indica o número de autovalores de Δ que son menores que un valor λ. Para obter estimacións precisas da función $\mathfrak{N}$ empregarase o estudo asintótico da ecuación da calor visto no Capítulo 7. Os resultados que se presentan neste capítulo son tamén válidos, con lixeiras modificacións, para o cadrado D^2 de calquera operador de Dirac xeralizado, xa que se basean no Teorema 5.16.

8.1. Operadores de tipo traza

A relación que existe entre as dimensións dos autoespazos e a análise funcional vén dada pola traza de certo tipo de operadores compactos nun espazo de Hilbert. Considérense dous espazos de Hilbert separables H e H' con bases ortonormais (e_i) e (e'_j), respectivamente. Un operador linear limitado $A : H \to H'$ estará representado pola matriz infinita que ten por coeficientes

$$c_{ij}(A) = \langle Ae_i, e'_j \rangle.$$

Defínese a *traza* de A como a suma dos elementos diagonais da matriz (c_{ij}), é dicir, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i c_{ii}$. Ademais a traza dunha proxección ortogonal é a dimensión do seu rango.

Proposición 8.1. *Dado un operador non limitado $A : H \to H'$, o valor real non negativo*

$$\|A\|_{HS}^2 := \sum_{i,j} |c_{ij}(A)|^2$$

é independente da elección das bases ortonormais de H e H'.

Demostración. Polo teorema de Parseval, tense que

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i,j} |c_{ij}(A)|^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2,$$

o cal non depende da base de H' porque non involucra aos elementos e'_j. Pero

$$c_{ij}(A) = \langle Ae_i, e'_j \rangle = \overline{\langle e'_j, Ae_i \rangle} = \overline{\langle A^* e'_j, e_i \rangle} = \overline{c}_{ji}(A^*),$$

polo que

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i,j} |\overline{c}_{ij}(A^*)|^2 = \sum_{i,j} |c_{ij}(A^*)|^2 = \|A^*\|_{HS}^2$$

é independente da base de H, polo mesmo motivo. □

Definición 8.2. Un operador limitado A dise que é de *Hilbert-Schmidt* se $\|A\|_{HS} < \infty$. En tal caso, $\|A\|_{HS}$ recibe o nome de *norma de Hilbert-Schmidt*.

Proposición 8.3 (Véxase [3, Problema 40])**.** *Verifícanse as seguintes propiedades:*

(i) *A norma de Hilbert-Schmidt está inducida polo produto interior*

$$\langle A, B \rangle_{HS} = \sum_{i,j} \overline{c}_{ij}(A) c_{ij}(B).$$

(ii) *O espazo dos operadores de Hilbert-Schmidt con este produto interior é un espazo de Hilbert.*

(iii) *A norma de Hilbert-Schmidt dun operador é maior ou igual cá súa norma usual.*

(iv) *Os operadores de Hilbert-Schmidt son compactos.*

(v) *Tanto a suma de dous operadores de Hilbert-Schmidt como a composición dun de Hilbert-Schmidt con outro limitado son operadores de Hilbert-Schmidt.*

Definición 8.4. Dise que un operador limitado T sobre un espazo de Hilbert H é de *tipo traza* se é composición de dous operadores de Hilbert-Schmidt A e B. A súa *traza* defínese como o produto interior de Hilbert-Schmidt dado por $\mathrm{Tr}(T) = \langle A^*, B \rangle_{HS}$.

Observación 8.5. Esta definición de traza só depende de T (e non dos operadores A e B), e ademais coincide coa noción de traza anteriormente dada mediante unha matriz infinita representante. En efecto, aplicando o teorema de Parseval, tense que

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i,j} \overline{c}_{ij}(A^*) c_{ij}(B) = \sum_{i,j} c_{ji}(A) c_{ij}(B) = \sum_j c_{jj}(T).$$

Observación 8.6. Como consecuencia da Proposición 8.3 tense a seguinte cadea de inclusións entre familias de operadores:

$$\text{(tipo traza)} \subset \text{(Hilbert-Schmidt)} \subset \text{(compactos)} \subset \text{(limitados)}$$

Proposición 8.7. *Sexa T un operador de tipo traza simétrico. Entón* $\operatorname{Tr}(T)$ *coincide coa suma dos autovalores de T.*

Demostración. Tómese unha base ortonormal (e_i) formada por autovectores asociados a autovalores λ_i de T, a cal existe debido ao teorema espectral para operadores compactos simétricos (véxase [6, Capítulo VII, § 4, Teorema 5]). Entón

$$\operatorname{Tr}(T) = \sum_i c_{ii}(T) = \sum_i \langle Te_i, e_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \sum_i \lambda_i. \quad \square$$

Observación 8.8. O teorema de Lidskii (véxase [18, Teorema 3.7]) establece que o enunciado da Proposición 8.7 é certo aínda que T non sexa un operador simétrico, pero ten unha demostración realmente complicada.

Proposición 8.9. *Sexan T e B operadores limitados sobre un espazo de Hilbert H, tales que T sexa de tipo traza, ou T e B sexan de Hilbert-Schmidt. Entón tanto TB como BT son operadores de tipo traza, e ademais* $\operatorname{Tr}(TB) = \operatorname{Tr}(BT)$.

Demostración. A primira afirmación é consecuencia inmediata do apartado (v) da Proposición 8.3. Para comprobar a igualdade considérese unha base ortonormal (e_i) para H. Entón o teorema de Parseval asegura que

$$\operatorname{Tr}(TB) = \sum_i \langle TBe_i, e_i \rangle = \sum_i \langle Be_i, T^* e_i \rangle = \sum_{i,j} \overline{c}_{ii}(B)\overline{c}_{ij}(T),$$

onde a última serie é absolutamente converxente. Ademais trátase dunha expresión simétrica con respecto a T e a B, seguíndose así o resultado. $\square$

Moitos exemplos de operadores tipo traza e de Hilbert-Schmidt proveñen do manexo de operadores integrais sobre variedades. A seguinte proposición, que se pode aplicar ás variedades de Riemann compactas e orientables, é unha mostra disto.

Proposición 8.10. *Sexa M unha variedade compacta que posúa unha forma de volume diferenciable, denotada por* vol. *Sexa A o operador limitado sobre $L^2(M)$ definido, para cada $u \in L^2(M)$, por*

$$Au(p_1) = \int_M k(p_1, p_2)\, u(p_2) \operatorname{vol}(p_2),$$

sendo k unha función continua en $M \times M$. Entón A é un operador de Hilbert-Schmidt e cúmprese que

$$\|A\|_{HS}^2 = \iint |k(p_1, p_2)|^2 \operatorname{vol}(p_1) \operatorname{vol}(p_2).$$

Demostración. Tómese unha base ortonormal (e_i) do espazo de Hilbert $L^2(M)$. Tendo en conta unha igualdade obtida na demostración da Proposición 8.1 e integrando sobre toda a variedade, tense que

$$\begin{aligned}\|A\|_{HS}^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2 = \sum_j \int |Ae_j(p_1)|^2 \operatorname{vol}(p_1) \\ = \sum_j \int \left| \int k(p_1,p_2)\, e_j(p_2) \operatorname{vol}(p_2) \right|^2 \operatorname{vol}(p_1) \\ = \int \sum_j \left| \int k(p_1,p_2)\, e_j(p_2) \operatorname{vol}(p_2) \right|^2 \operatorname{vol}(p_1) \\ = \iint |k(p_1,p_2)|^2 \operatorname{vol}(p_1) \operatorname{vol}(p_2).\end{aligned}$$

Na última igualdade empregouse o teorema de Parseval. Ademais o último termo da expresión é finito, co cal A é operador de Hilbert-Schmidt e ten sentido falar de $\|A\|_{HS}$. □

Teorema 8.11. *Sexan M e A nas condicións da Proposición 8.10, con k diferenciable en $M \times M$, de maneira que A sexa operador suavizante. Entón A é de tipo traza e satisfaise que*

$$\operatorname{Tr}(A) = \int k(p,p) \operatorname{vol}(p).$$

Demostración. En primeiro lugar, supóñase que $A = BC$, sendo B e C operadores de Hilbert-Schmidt como os da Proposición 8.10, é dicir, que estean representados por núcleos de Schwartz continuos k_B e k_C, respectivamente. Sucede que

$$\begin{aligned}BCu(p_1) = \int k_B(p_1,p_2)\, Cu(p_2) \operatorname{vol}(p_2) \\ = \int k_B(p_1,p_2) \left(\int k_C(p_2,p_3)\, u(p_3) \operatorname{vol}(p_3) \right) \operatorname{vol}(p_2) \\ = \iint k_B(p_1,p_2) k_C(p_2,p_3) \operatorname{vol}(p_2)\, u(p_3) \operatorname{vol}(p_3),\end{aligned}$$

de onde

$$k(p_1,p_3) = \int k_B(p_1,p_2) k_C(p_2,p_3) \operatorname{vol}(p_2).$$

Por definición, a traza de A é $\langle B^*, C \rangle_{HS}$. Sen embargo, a Proposición 8.10 determina a norma de Hilbert-Schmidt no espazo dos operadores con núcleos de Schwartz continuos e entón, pola identidade de polarización, tamén determina o produto interior de Hilbert-Schmidt en dito espazo. Consecuentemente,

$$\operatorname{Tr}(A) = \iint k_B(p_1,p_2) k_C(p_2,p_1) \operatorname{vol}(p_1) \operatorname{vol}(p_2) = \int k(p,p) \operatorname{vol}(p).$$

Falta por porbar que todo operador suavizante A poida ser factorizado na forma BC. A Observación 5.20 asegura que o operador $(1+\Delta)^{-N}$ ten núcleo de Schwartz continuo, polo que é un operador de Hilbert-Schmidt (pola Proposición 8.10). Deste xeito, o operador suavizante A pode ser expresado como composición do operador $B = (1+\Delta)^{-N}$ e do operador suavizante $C = (1+\Delta)^{+N}A$, os cales teñen núcleos de Schwartz continuos. □

Os resultados anteriores fan referencia unicamente a operdores sobre o espazo de funcións $L^2(M)$. Non obstante, é importante traballar cos correspondentes resultados aplicados a operadores sobre o espazo das seccións dun fibrado de Clifford S, de maneira que os núcleos de Schwartz sexan seccións de $S \boxtimes S^*$. Isto significa que, para todo $p \in M$,

$$k(p,p) \in S_p \otimes S_p^* \cong \mathrm{Hom}(S_p, S_p).$$

En tal caso, o resultado análogo ao Teorema 8.11 é o que segue, o cal se demostra por redución ao caso de $L^2(M)$ ao facer uso de trivializacións locais e particións da unidade.

Teorema 8.12. *Sexa A un operador suavizante en $L^2(S)$ con núcleo de Schwartz k. Entón A é un operador de tipo traza e verifícase que*

$$\mathrm{Tr}(A) = \int \mathrm{tr}\, k(p,p)\, \mathrm{vol}(p),$$

onde $\mathrm{tr} : S_p \otimes S_p^* \to \mathbb{C}$ *é a traza canónica definida sobre os endomorfismos do espazo vectorial de dimensión finita S_p.*

8.2. Autovalores do Laplaciano

Prestarase agora especial atención ao operador $e^{-t\Delta}$, a partir do cal se obtén a solución da ecuación da calor (véxase a Proposición 7.2). Como é un operador suavizante, a Proposición 8.11 determina que se trata dun operador de tipo traza e que a súa traza se calcula integrando o núcleo sobre a diagonal. Entón, segundo o Teorema 7.15, satisfaise que

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) \;\sim\; \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,(a_0 + ta_1 + t^2 a_2 + \cdots),$$

onde

$$a_i = \int_M \Theta_i(p)\, \mathrm{vol}(p).$$

Por outra banda, a Proposición 8.7 indica que

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) = \sum_j e^{-t\lambda_j},$$

sendo λ_j os autovalores de Δ. Conclúese así que

$$(4\pi t)^{n/2} \sum_j e^{-t\lambda_j} \;\sim\; a_0 + ta_1 + t^2 a_2 + \cdots \,. \tag{8.1}$$

Deste xeito, o espectro de Δ determina a dimensión n da variedade M e os coeficientes a_i, os cales conteñen información xeométrica fundamental de M. En particular, o Exemplo 7.16 proporciona os seguintes datos:

$$a_0 = \int_M \mathrm{vol}(p) = \mathrm{vol}(M)$$
$$a_1 = \frac{1}{6}\int_M \kappa(p)\,\mathrm{vol}(p)$$

Proposición 8.13. *O espectro do Laplaciano Δ dunha variedade compacta M determina a súa dimensión, o seu volume e a súa curvatura escalar total. Ademais, se* $\dim(M) = 2$*, o Lapalciano tamén determina a topoloxía de M.*

Demostración. A primeira afirmación está xustificada no parágrafo anterior.

No caso bidimensional, o teorema de Gauss-Bonnet relaciona a característica de Euler dunha variedade coa súa curvatura de Gauss, a cal coincide coa metade da curvatura escalar. O resultado séguese entón do feito de que a característica de Euler (equivalentemente, o xénero) dunha veriedade compacta conexa orientada sen bordo determina a súa topoloxía, polo teorema de clasificación das superficies compactas. □

A expansión asintótica dada pola fórmula (8.1) pode ser empregada no sentido inverso, é dicir, unha vez coñecidos os coeficientes Θ_i, pódese facer uso dela para obter o espectro do Laplaciano. Neste sentido é fundamental o resultado que se inclúe a continuación.

Teorema 8.14 (Fórmula asintótica de Weyl)**.** *Sexa $\mathfrak{N}(\lambda)$ a función que conta o número de autovalores de Δ menores ca λ. Cúmprese que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathfrak{N}(\lambda)\,\lambda^{n/2} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}\,\mathrm{vol}(M),$$

e escríbese

$$\mathfrak{N}(\lambda) \;\sim\; \frac{1}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}\,\mathrm{vol}(M)\lambda^{n/2}.$$

Demostración. Da expresión (8.1) dedúcese que, cando $t \to 0$,

$$t^{\alpha}\sum_j e^{-t\lambda_j} \;\longrightarrow\; C,$$

sendo $\alpha = n/2$ e $C = (4\pi)^{-n/2}\,\mathrm{vol}(M)$. O resultádo é consecuencia inmediata de aplicar o Teorema 8.17, que é un resultado de teoría abstracta de Tauber. □

Observación 8.15. Tomando $\mathfrak{N}(\lambda) = j$, o Teorema 8.14 pode ser reformulado como unha estimación asintótica para o autovalor j-ésimo, do xeito

$$\lambda_j \;\sim\; 4\pi\, j^{2/n}\left(\frac{\Gamma(n/2+1)}{\mathrm{vol}(M)}\right)^{2/n}.$$

Observación 8.16. Ao longo de todo o capítulo traballouse co Laplaciano en funcións por comodidade e por tratarse do caso clásico. Non obstante, tódolos razoamentos expostos son tamén válidos para Laplacianos de Dirac xeralizados. O único que cambia en tal caso é o termo Θ_0, que se trata entón do endomorfismo identidade do fibrado de Clifford S en cuestión. Usando o Teorema 8.12, isto repercute unicamente no coeficiente

$$a_0 = \int_M \operatorname{tr} \Theta_0(p) \operatorname{vol}(p) = \dim(S) \operatorname{vol}(M),$$

no cal se ve involucrada a dimensión de S.

Teorema 8.17 (Karamata)**.** *Sexa λ_j unha sucesión crecente de números positivos tales que, para algunhas constantes $\alpha > 0$ e C, se verifique que*

$$t^\alpha \sum_j e^{-t\lambda_j} \;\longrightarrow\; C,$$

cando $t \to 0$. Entón a función $\mathfrak{N}(\lambda)$ que conta o número de termos da sucesión menores ou iguais ca λ satisfai que

$$\mathfrak{N}(\lambda) \;\sim\; \lambda^\alpha \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)},$$

cando $\lambda \to \infty$.

Demostración. Para calquera función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ defínase

$$\varphi_f(t) = \sum_j f(e^{-t\lambda_j})\, e^{-t\lambda_j}.$$

Sucede que, para calquera f,

$$t^\alpha \varphi_f(t) \;\longrightarrow\; \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(e^{-s})\, s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds, \tag{8.2}$$

cando $t \to 0$. Como consecuencia do teorema de Stone-Weierstrass (véxase [5, Capítulo V, Teorema 8.1]), basta probar esta afirmación para monomios da forma $f(x) = x^n$. É doado comprobar que o primeiro termo da expresión (8.2) tende a $C(n+1)^{-\alpha}$ cando $t \to 0$. Ademais, ao facer un cambio de variable e empregar a definición da función gamma de Euler, tense que o segundo termo de (8.2) é igual a $C(n+1)^{-\alpha}$. Logo a afirmación anterior é certa.

Sexa agora, para cada $r \in [0,1]$, a función continua $f_r : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida a cachos como segue: anúlase en $[0, e^{-1/r}]$; toma a expresión $f(x) = 1/x$ para $x \in [e^{-1}, 1]$; e no intervalo $[e^{-1/r}, e^{-1}]$ consiste na interpolación das outras dúas partes (é dicir, a súa gráfica nese intervalo é o segmento do plano que une os puntos $(0, e^{-1/r})$ e (e^{-1}, e)). A partir desta definición obtense que

$$\varphi_{f_r}\left(\frac{1}{r\lambda}\right) \leq \mathfrak{N}(\lambda) \leq \varphi_{f_r}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

xa que, por exemplo,

$$\varphi_{f_r}\left(\frac{1}{r\lambda}\right) = \sum_{j\le\mathfrak{N}(\lambda)} f_r\left(e^{-\frac{\lambda_j}{r\lambda}}\right) e^{-\frac{\lambda_j}{r\lambda}} + \sum_{j>\mathfrak{N}(\lambda)} f_r\left(e^{-\frac{\lambda_j}{r\lambda}}\right) e^{-\frac{\lambda_j}{r\lambda}} = \sum_{j\le\mathfrak{N}(\lambda)} e^{\frac{\lambda_j}{r\lambda}} e^{-\frac{\lambda_j}{r\lambda}} = \mathfrak{N}(\lambda).$$

Sexa $t = \lambda^{-1}$ e aplíquese a propiedade (8.2) a f_r. Dado que

$$\int_0^\infty f_r(e^{-s})\, s^{\alpha-1}e^{-s}\, ds = \frac{1}{\alpha},$$

cando $\lambda \to \infty$ (i.e. $t \to 0$), cumpriranse as desigualdades seguintes:

$$\begin{aligned} &\limsup\ \lambda^{-\alpha}\,\mathfrak{N}(\lambda) \le \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)}, \\ &\liminf\ \lambda^{-\alpha}\,\mathfrak{N}(\lambda) \ge \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha} + \int_1^\infty f_r(e^{-s})\, s^{\alpha-1}e^{-s}\, ds\right). \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade, por construción das funcións f_r, o segundo sumando tende a cero cando $r \to 1$. Polo tanto, como tales desigualdades se verifican para todo $r \in [0,1]$, existe o límite

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\alpha}\,\mathfrak{N}(\lambda) = \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad \square$$

O estudo da información xeométrica contida no espectro do Laplaciano dunha variedade de Riemann chámase Xeometría Espectral. Esta sección foi unha pequena incursión nesa área.

Capítulo 9

Índice do operador de Dirac

Neste capítulo preséntanse os aspectos fundamentais que reodean á definición de índice dun operador de Dirac, mentres que o teorema do índice e a súa demostración inclúense no capítulo seguinte.

9.1. Graduación de fibrados de Clifford

Un módulo W sobre unha álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(V)$ dise que é $\mathbb{Z}_2$-*graduado*, ou simplemente *graduado*, se posúe unha descomposición $W = W^+ \oplus W^-$. A acción de Clifford dise que é *impar* se a multiplicación de Clifford por calquera vector $v \in V$ leva o sumando W^+ en W^-, e viceversa. Asimesmo, un fibrado de Clifford S sobre unha variedade de Riemann M é *graduado* (con acción de Clifford impar) se ten unha descomposición $S = S^+ \oplus S^-$ respectando a métrica e a conexión, e tal que cada fibra S_p sexa un módulo de Clifford graduado sobre $\mathrm{Cl}(T_pM)$. Este concepto, que xa foi introducido no Capítulo 3, é equivalente a que sobre S haxa definida unha involución ε (chamada *operador graduante*) que sexa simétrica, paralela[1] e cumpra que

$$\varepsilon c(v) + c(v)\varepsilon = 0,$$

para calquera vector tanxente $v \in TM$. En tal caso, os subfibrados $S^\pm$ de S son exactamente os autoespazos de ε asociados aos autovalores ± 1.

Para todo fibrado de Clifford graduado S, a álxebra dos operadores limitados sobre $L^2(S)$ ten estrutura de superálxebra (véxase a Definición 4.1), en concordancia co comportamento que presenten ditos operadores con respecto á descomposición de S.

Definición 9.1. Sexa S un fibrado de Clifford graduado e A un operador de tipo traza sobre $L^2(S)$. A *supertraza* de A vén dada pola expresión

$$\mathrm{Tr}_s(A) = \mathrm{Tr}(\varepsilon A),$$

onde ε é o operador graduante.

[1]Isto quere dicir que ε conmuta coa derivada covariante.

Proposición 9.2. *A supertraza dun superconmutador é cero.*

Demostración. Sexan A e B operadores limitados sobre $L^2(S)$ que sexan homoxéneos con respecto á estrutura de superálxebra indicada anteriormente. Facendo uso da Definición 4.4 obtense que

$$\operatorname{Tr}_s([A,B]_s) = \operatorname{Tr}(\varepsilon[A,B]_s) = \operatorname{Tr}(\varepsilon AB) - (-1)^{\deg(A)\deg(B)} \operatorname{Tr}(\varepsilon BA).$$

É doado comprobar que os operadores A e B cumpren que

$$\begin{aligned} \varepsilon A &= (-1)^{\deg(A)} A\varepsilon, \\ \varepsilon B &= (-1)^{\deg(B)} B\varepsilon. \end{aligned}$$

Entón, empregando a Proposición 8.9, conclúese o resultado ao considerar os seguintes tres casos:

- Se $\deg(A) = \deg(B) = 0$, tense que
$$\operatorname{Tr}(\varepsilon AB) = \operatorname{Tr}(B\varepsilon A) = \operatorname{Tr}(\varepsilon BA).$$
- Se $\deg(A) = \deg(B) = 1$, tense que
$$\operatorname{Tr}(\varepsilon AB) = \operatorname{Tr}(B\varepsilon A) = -\operatorname{Tr}(\varepsilon BA).$$
- Se un dos dous graos é 0 e o outro é 1, a igualdade darase trivialmente porque tanto $\operatorname{Tr}(\varepsilon AB)$ como $\operatorname{Tr}(\varepsilon BA)$ serán nulos, debido á forma dos tensores involucrados. □

Para cada $a \in \operatorname{End}(S_p)$, defínese a *supertraza local* como $\operatorname{tr}_s(a) = \operatorname{tr}(\varepsilon a)$. Como consecuencia inmediata das definicións de supertraza e supertraza local obtense o resultado seguinte, análogo ao Teorema 8.12.

Proposición 9.3. *Sexa A un operador suavizante sobre $L^2(S)$ con núcleo de Schwartz $k \in C^\infty(S \boxtimes S^*)$. Entón satisfaise que*

$$\operatorname{Tr}_s(A) = \int_M \operatorname{tr}_s(k(p,p)) \operatorname{vol}(p).$$

Tratarase aquí o caso de fibrados de Clifford graduados sobre variedades de Riemann compactas e orientables de dimensión par $2m$. Como xa se indicou no Capítulo 4, o elemento de volume ω ten cadrado $(-1)^m$ e anticonmuta con tódolos xeradores da álxebra de Clifford, polo que a acción de $i^m\omega$ constitúe un operador graduante ε_0 para calquera fibrado de Clifford. Pero poden existir tamén outros operadores graduantes. De feito, se ε é outro operador graduante, sucede que $\varepsilon\varepsilon_0$ é unha involución simétrica que conmuta con toda a álxebra de Clifford. A partir disto dedúcese a afirmación seguinte.

Lema 9.4. *Todo fibrado de Clifford graduado descomponse en suma directa de dous subfibrados de Clifford graduados, correspondentes con $\varepsilon = \pm\,\varepsilon_0$.*

Obsérvese que o Lema 9.4 dá lugar a unha descomposición de S en catro sumandos directos, considerando as partes par e impar de cada un dos dous subfibrados resultantes. Ditos subfibrados reciben o nome de *parte canónicamente graduada* e *parte anticanónicamente graduada* de S, respectivamente. Debido a que as dúas partes presentan un comportamento análogo, será suficente con describir o que ocorre cos fibrados de Clifford canónicamente graduados.

As propiedades da supertraza local estudaranse mediante a teoría de representacións de álxebras de Clifford (véxase o Capítulo 4). Dado un fibrado de Clifford S, a unicidade da representación irreducible spin Δ dá lugar a unha descomposición $S \cong \Delta \otimes V$, onde $V = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cl}}(\Delta, S)$ é un fibrado vectorial auxiliar. Ademais, para todo $p \in M$, verifícase que

$$\mathrm{End}(S_p) = \mathrm{Cl}(T_pM) \otimes \mathrm{End}(V_p) = \mathrm{Cl}(T_pM) \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S_p).$$

Que a fibra S_p sexa canónicamente graduada significa que a descomposición en suma directa inducida pola graduación está dada por

$$S_p = (\Delta^+ \otimes V) \oplus (\Delta^- \otimes V),$$

sendo $\Delta^\pm$ as semirrepresentacións spin positiva e negativa.

Denotarase por $\tau_s : \mathrm{Cl}(2m) \to \mathbb{C}$ á aplicación que leva cada elemento da álxebra de Clifford na supertraza do endomorfismo determinado pola súa acción na representación spin (lémbrese que $\mathrm{Cl}(2m) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{End}(\Delta)$). Das anteriores consideracións, xunto co feito de que a traza conmuta co produto tensor, dedúcese o seguinte resultado.

Proposición 9.5. *Sexa S un fibrado de Clifford canónicamente graduado. Sexa $a = c \otimes F$ un endomorfismo de S_p, con $c \in \mathrm{Cl}(T_pM)$ e $F \in \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S_p)$. Entón cúmprese que*

$$\mathrm{tr}_s(a) = \tau_s(c)\, \mathrm{tr}^{S/\Delta}(F),$$

onde $\mathrm{tr}^{S/\Delta}(F)$ é a traza relativa introducida na Definición 4.14.

Considérese unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ de $\mathbb{R}^{2m}$. Dado un subconxunto $E \subset \{1, \dots, 2m\}$, denotarase por $\widetilde{E}$ ao elemento $\prod_{i \in E} e_i$ da álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(2m)$. Deste xeito, o conxunto E_{2m} formado por tódolos $\widetilde{E}$ constitúe unha base de $\mathrm{Cl}(2m)$ como espazo vectorial, segundo a Proposición 3.4.

Lema 9.6. *Sexa $c = \sum_E c_E \widetilde{E}$ un elemento de $\mathrm{Cl}(2m)$. Entón a supertraza de c, considerado como endomorfismo da representación spin, vén dada por*

$$\tau_s(c) = (-2i)^m c_{12\dots 2m}.$$

Demostración. Pola definición de supertraza tense que $\tau_s(c) = \tau(i^m \omega c)$, onde τ denota á traza ordinaria da representación spin. Para calquera $E = \{i_1, \dots, i_k\}$, cúmprese que

$$\tau(\omega \widetilde{E}) = \tau(e_1 \cdots e_{2m} e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = (-1)^{n_E} \tau(\widehat{E}),$$

sendo n_E o número de elementos pares de E, e $\widehat{E}$ o elemento de E_{2m} que ten por conxunto de subíndices ao complementario de E. Consecuentemente,

$$\tau_s(c) = \tau(i^m \omega c) = i^m \sum_E c_E\, \tau(\omega \widetilde{E}) = i^m \sum_E (-1)^{n_E} c_E\, \tau(\widehat{E}).$$

Polo tanto, bastará con probar que

$$\tau(\widehat{E}) = \begin{cases} 2^m & \text{se } E = \varnothing \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

O caso en que $E = \varnothing$ é obvio, xa que $\widetilde{\varnothing} = 1_\Delta$ e xa se viu no Caplítulo 4 que $\dim \Delta = 2^m$. Supóñase entón que $E \neq \varnothing$ e considérese a acción de $\widetilde{E}$ por multiplicación pola esquerda sobre a álxebra de Clifford. Como representacións, tense o isomorfismo

$$\mathrm{Cl}(2m) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{End}(\Delta) \cong \Delta \otimes \Delta^*,$$

tomando a acción pola esquerda sobre o primeiro factor Δ. Interesa coñecer cal é a traza de $\widetilde{E}$ cando actúa sobre Δ, que será igual á traza da acción de $\widetilde{E}$ sobre $\Delta \otimes \Delta^*$ multiplicada por $(\dim(\Delta^*))^{-1} = 2^{-m}$. Como o elemento $\widetilde{E}$ permuta os elementos de E_{2m} sen deixar ningún fixo, a acción de $\widetilde{E}$ sobre $\mathrm{Cl}(2m)$ correspóndese cunha matriz con diagonal de ceros, a cal ten traza nula. □

Observación 9.7. O Lema 9.6 indica que a supertraza dun endomorfismo da representación spin coincide, dada a súa expresión como elemento da álxebra de Clifford, co coeficiente que acompaña ao termo de grao máximo (salvo un múltiplo escalar). Tamén se pode demostrar dito lema traballando coa táboa de caracteres do grupo finito E_{2m}.

9.2. Índice do operador de Dirac dun fibrado de Clifford graduado

Procederase agora a definir o índice dun operador de Dirac relativo a un fibrado de Clifford graduado $S = S^+ \oplus S^-$. Atendendo á expresión local

$$D = \sum_i e_i \nabla_i$$

do operador de Dirac, é doado comprobar que aplica as seccións de $C^\infty(S^+)$ en $C^\infty(S^-)$, e vicecersa. Denotarase por D^+ á restrición de D ao espazo $C^\infty(S^+)$, e por D^- á súa restrición ao espazo $C^\infty(S^-)$. Verifícase que D^- é o operador simétrico de D^+, pois

$$(D^+ s_1, s_2) = (D s_1^+, s_2^-) = (s_1^+, D s_2^-) = (s_1, D^- s_2),$$

para calesquera seccións $s_1, s_2 \in C^\infty(S)$.

Deste xeito, pódese considerar ao operador de Dirac como procedente do complexo de Dirac (véxase a Definición 6.1) de lonxitude 1

$$C^\infty(S^+) \xrightarrow{D^+} C^\infty(S^-).$$

Por definición, a característica de Euler deste complexo (aquí é fundamental o feito de que as dimensións do núcleo e o conúcleo de D^+ son finitas, como consecuencia do Teorema 5.16) é igual a

$$\dim\ker D^+ - \dim\operatorname{coker} D^+ = \dim\ker D^+ - \dim\ker(D^+)^\dagger = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-.$$

Definición 9.8. O índice dun operador de Dirac graduado D defínese como a característica de Euler do complexo de Dirac de lonxitude 1 anterior, é dicir,

$$\operatorname{Ind}(D) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-.$$

Exemplo 9.9. Tómese o operador de de Rham $D = d + d^\dagger$ (véxase a Proposición 3.24). Sobre o espazo de formas diferenciables $\Omega(M)$ considérese o operador graduante definido por $\varepsilon = (-1)^k$ en $\Omega^k(M)$. Lémbrese que no Capítulo 6 se definiron as formas harmónicas como aquelas que están no núcleo do operador de Dirac. Aplicando o teorema de Hodge (Teorema 6.3), dedúcese que o índice de D coincide coa característica de Euler de M. En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(D) &= \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \dim\mathcal{H}^0 - \dim\mathcal{H}^1\\ &= \dim H^0(S;D^+) - \dim H^1(S;D^+) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M) = \chi(M).\end{aligned}$$

Este operador graduante ε recibe o nome de *graduación de Euler* do operador de de Rham, e non é canónico nin anticanónico.

Unha consecuencia inmediata das definicións de supertraza e índice é que, para cada operador de Dirac graduado D, tense que $\operatorname{Ind}(D) = \operatorname{Tr}_s(P)$; onde P é a proxección ortogonal de $C^\infty(S)$ sobre $\ker D$.

Proposición 9.10. *Sexa f unha función diferenciable rapidamente decrecente, definida sobre $\mathbb{R}^+$ e tal que $f(0) = 1$. Entón verifícase que*

$$\operatorname{Ind}(D) = \operatorname{Tr}_s(f(D^2)).$$

Demostración. Dado que, polo Teorema 5.16, o espectro de D é un subconxunto discreto da recta real, existirá un intervalo $[-\delta,\delta]$ contendo a 0 como único autovalor de D. Logo a proxección ortogonal P pode ser expresada mediante $f_0(D^2)$, sendo f_0 función diferenciable simétrica con soporte contido en $[-\delta,\delta]$ e tal que $f_0(0) = 1$ (xa que os elementos de $\ker D$ quedan fixos por P).

Sexa g a función diferenciable simétrica definida por

$$g(x^2) = f(x^2) - f_0(x^2),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar a igualdade do enunciado equivale a demostrar que $\mathrm{Tr}_s(g(D^2)) = 0$, pois en tal caso conclúese que

$$\mathrm{Tr}_s(f(D^2)) = \mathrm{Tr}_s(f_0(D^2)) = \mathrm{Tr}_s(P) = \mathrm{Ind}(D).$$

Posto que $g(0) = 0$, existirá unha factorización $g(x) = xh(x)$, sendo h unha función diferenciable que, ao igual que g, decrece rapidamente (porque f ten tal propiedade). É máis, h pode ser á súa vez factorizada como $h(x) = h_1(x)h_2(x)$, produto de dúas funcións diferenciables con decrecemento rápido. Entón, segundo a Proposición 5.18, tense que

$$g(D^2) = D^2h(D^2) = \frac{1}{2}\left(Dh_1(D)Dh_2(D) + Dh_1(D)Dh_2(D)\right) = \frac{1}{2}[Dh_1(D), Dh_2(D)]_s.$$

Así, o resultado séguese da Proposición 9.2. □

Observación 9.11. Dáse a continuación outra demostración da Proposición 9.10. Para cada autovalor λ do Laplaciano D^2, sexa $n_+(\lambda)$ a dimensión do autoespazo da restrición de D^2 a $C^\infty(S^+)$ asociado a λ, e defínase análogamente $n_-(\lambda)$. Cúmprese entón que

$$\mathrm{Tr}_s\, f(D^2) = \sum_\lambda f(\lambda)(n_+(\lambda) - n_-(\lambda)) = \mathrm{Ind}(D) + \sum_{\lambda > 0} f(\lambda)(n_+(\lambda) - n_-(\lambda)).$$

Sen embargo, como D é un operador impar simétrico, establece un isomorfismo entre os λ-autoespazos de D^2 en $C^\infty(S^+)$ e en $C^\infty(S^-)$, para cada $\lambda > 0$. Logo $n_+(\lambda) = n_-(\lambda)$ para os autovalores positivos de D^2, concluíndose o resultado.

O caso especial da Proposición 9.10 dado por

$$\mathrm{Ind}(D) = \mathrm{Tr}_s\left(e^{-tD^2}\right),$$

que relaciona o índice coa ecuación da calor, recibe o nome de *fórmula de McKean-Singer*.

Observación 9.12. As hipóteses da Proposición 9.10 poden ser debilitadas da seguinte maneira. Non é preciso que a función f teña decrecemento rápido, senón que basta con que $f(x) = O(x^{-N})$, sendo N unha constante dependente da dimensión e tal que é suficientemente grande como para que os operadores $Dh_1(D)$ e $Dh_2(D)$ teñan núcleos de Schwartz continuos, de forma que sexan operadores de Hilbert-Schmidt (véxanse a Observación 5.20 e a Proposición 8.10).

Interesa estudar o comportamento do índice con respecto ás variacións continuas do operador de Dirac. Sexa $\{\, D_t \mid t \in [0,1] \,\}$ unha familia continua de operadores de Dirac graduados definidos sobre unha variedade M con fibrado de Clifford S. Isto quere dicir que a métrica riemanniana, a acción de Clifford e tanto a métrica como a conexión en S varían continuamente co parámetro t (de maneira que se conserve a condición de compatibilidade da Definición 3.8).

A aplicación $t \mapsto D_t$ así definida é continua entre o intervalo $[0,1]$ e o espazo dos operadores limitados $B(W^{k+1}(S), W^k(S))$, para todo enteiro positivo k. Ademais, pola Proposición 5.2, os operadores D_t satisfan as desigualdades

$$\|s\|_{k+1}^2 \leq C_k(\|s\|_k^2 + \|Ds\|_k^2),$$

para algunha constante C_k dependente do parámetro t.

Proposición 9.13. *Sexa* $\{ D_t \mid t \in [0,1] \}$ *unha familia continua de operadores de Dirac graduados. Entón, para todo* t*, cúmprese que*

$$\operatorname{Ind}(D_t) = \operatorname{Ind}(D_0).$$

Demostración. Dado que os autovalores de D_t están contidos na recta real, as resolventes $(D_t \pm i)^{-1}$ existen e levan $W^k(S)$ en $W^{k+1}(S)$ para todo k, como consecuencia da estimación elíptica. É máis, as aplicacións $t \mapsto (D_t \pm i)^{-1}$ son continuas entre $[0,1]$ e $B(W^k(S), W^{k+1}(S))$, para todo k. Para comprobar isto é preciso empregar a fórmula resolvente

$$(D_t + i)^{-1} - (D_{t'} + i)^{-1} = (D_t + i)^{-1}(D_{t'} - D_t)(D_{t'} + i)^{-1}$$

e a uniformidade das estimacións elípticas, que xustifica que as normas de Sobolev de $(D_t+i)^{-1}$ son limitadas independentemente de t. Deste xeito, $t \mapsto (1+D_t^2)^{-N}$ é aplicación continua entre $[0,1]$ e $B(W^k(S), W^{k+2N}(S))$. Ademais, para N suficientemente grande, a inclusión de $W^{k+2N}(S)$ en $W^k(S)$ é operador de Hilbert-Schmidt e, polo tanto, $(1+D_t^2)^{-2N}$ é operador de tipo traza. En particular, a súa traza e supertraza varían continuamente con t. Aplicando a Proposición 9.10, obtense que

$$\operatorname{Ind}(D_t) = \operatorname{Tr}_s\left((1 + D_t^2)^{-2N}\right)$$

varía continuamente con t. Pero o índice é sempre un número enteiro por ser diferencia de dúas dimensións. Logo debe ser constante. $\square$

A proposición anterior establece que o índice do operador de Dirac é un invariante topolóxico que depende unicamente das propiedades topolóxicas da variedade M e do fibrado de Clifford S.

9.3. Índice e ecuación da calor

A continuación indicaranse algunhas das relacións existentes entre a ecuación da calor e o índice dun operador de Dirac graduado. A partir da Proposición 9.3 e da expansión asintótica do núcleo da calor k_t asociado ao operador suavizante e^{-tD^2} (véxase Teorema 7.15), dedúcese que

$$\operatorname{Tr}_s\left(e^{-tD^2}\right) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\left(\int \operatorname{tr}_s \Theta_0 \operatorname{vol} + t\int \operatorname{tr}_s \Theta_1 \operatorname{vol} + \cdots\right).$$

Proposición 9.14. *O índice dun operador de Dirac graduado D é cero se a dimensión n de M é impar, e coincide con*

$$\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int \operatorname{tr}_s \Theta_{n/2} \operatorname{vol}$$

se n é par. Na expresión anterior o coeficiente $\Theta_{n/2}$ é unha expresión alxébrica dos coeficientes da métrica e da conexión, e das súas derivadas parciais.

Demostración. Segundo a fórmula de McKean-Singer, $\operatorname{Tr}_s(e^{-tD^2})$ é igual ao índice de D, o cal é constante pola Proposición 9.13. Logo só pode sobrevivir, no caso de existir (i.e. para n par), o termo da expansión asintótica que non dependa de t. A segunda afirmación débese ao apartado (iii) do Teorema 7.15. □

Corolario 9.15. *Sexa $\widetilde{M}$ un revestimento de k follas de M. Sexan $\widetilde{S}$ e $\widetilde{D}$ os levantamentos do fibrado de Clifford S e do operador de Dirac D a $\widetilde{M}$. Entón*

$$\operatorname{Ind}(\widetilde{D}) = k \operatorname{Ind}(D).$$

Demostración. Dado que $\Theta_{n/2}$ é unha expresión local, o seu comportamento en cada "volta" de $\widetilde{M}$ sobre M será o mesmo ca en M. □

Exemplo 9.16. Considérese unha variedade de Riemann de dimensión 2 e tómese o operador de de Rham $D = d + d^\dagger$, equipado coa graduación de Euler dada polo grao módulo 2 sobre as formas diferenciables. A Proposición 9.14 indica que

$$\operatorname{Ind}(D) = \frac{1}{4\pi} \int \left(\operatorname{tr} \Theta_1^0 - \operatorname{tr} \Theta_1^1 + \operatorname{tr} \Theta_1^2\right) \operatorname{vol},$$

onde o superíndice denota o grao das formas. Polo Exemplo 7.16, tense que

$$\Theta_1^i = \frac{1}{6}\kappa \cdot 1 - \mathsf{K}^i,$$

sendo K^i a correspondente contracción de Clifford da curvatura. Como $\mathsf{K}^0 = 0$, o Corolario 6.5 establece que tamén $\mathsf{K}^2 = 0$. Ademais, segundo o Lema 6.8, K^1 coincide co operador curvatura de Ricci. Deste xeito,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \Theta_1^0 = \operatorname{tr} \Theta_1^2 &= \frac{1}{6}\kappa, \\ \operatorname{tr} \Theta_1^1 &= \frac{1}{6}\kappa \cdot 2 - \kappa = -\frac{2}{3}\kappa. \end{aligned}$$

Polo tanto, empregando o Exemplo 9.9, resulta que

$$\chi(M) = \operatorname{Ind}(D) = \frac{1}{4\pi} \int \kappa \operatorname{vol}.$$

Obtense así o teorema de Gauss-Bonnet, tendo en conta que a curvatura escalar κ é o dobre da curvatura de Gauss.

Capítulo 10

Teorema do índice

10.1. Símbolos de Getzler

A demostración do teorema do índice de Atiyah-Singer que se presenta neste traballo precisa das nocións de álxebra filtrada, álxebra graduada e símbolo.

Definición 10.1.

(i) Unha *álxebra graduada* é unha álxebra que conta cunha descomposición en suma directa $\mathcal{A} = \oplus_m \mathcal{A}^m$ cumprindo que $\mathcal{A}^m \cdot \mathcal{A}^{m'} \subset \mathcal{A}^{m+m'}$.

(ii) Unha *filtración* dunha álxebra $\mathcal{A}$ consiste nunha familia crecente de subespazos $\{\, \mathcal{A}_m \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$ satisfacendo que $\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{A}_{m'} \subset \mathcal{A}_{m+m'}$, para cada par $m, m' \in \mathbb{Z}$. Unha álxebra dotada dunha filtración recibe o nome de *álxebra filtrada*.

Exemplo 10.2. Dado un espazo vectorial V, a álxebra exterior $\bigwedge^* V$ é unha álxebra graduada. Tamén pertence a dita familia a álxebra $\mathbb{C}[x]$ de polinomios nunha variable.

A álxebra $\mathfrak{D}(M)$ dos operadores diferenciais sobre as funcións dunha variedade M é unha álxebra filtrada, tomando $\mathfrak{D}_m(M)$ como o espazo dos operadores diferenciais de orde menor ou igual ca m. Asimesmo, a álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(V)$ construída a partir dun espazo vectorial V é tamén unha álxebra filtrada, facendo $\mathrm{Cl}_m(V)$ igual ao subespazo xerado polos produtos de m ou menos elementos dunha base de V.

Observación 10.3. Toda álxebra graduada pode ser considerada como álxebra filtrada, pois basta tomar $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}^0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^m$. Ademais toda imaxe por un homomorfismo dunha álxebra filtrada conserva dita estrutura.

Por outra banda, considérese unha álxebra $\mathcal{A}$ xerada pola unión $B \cup V$, sendo B unha subálxebra de $\mathcal{A}$ e V un subespazo vectorial. Entón pódese definir un homomorfismo sobrexectivo de álxebras

$$\bigoplus_B^* V = B \oplus (B \otimes V \otimes B) \oplus (B \otimes V \otimes B \otimes V \otimes B) \oplus \cdots \longrightarrow \mathcal{A}$$

que induce unha filtración en $\mathcal{A}$ para a cal os elementos de B teñen grao 0 e os de V grao 1. En particular, a filtración da álxebra de Clifford $\mathrm{Cl}(V)$ sinalada no Exemplo 10.2 está xerada deste xeito a partir de $\mathbb{C} \cup V$.

Definición 10.4. Sexan $\mathcal{A}$ unha álxebra filtrada e $\mathcal{G}$ unha álxebra graduada. Un *símbolo* entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$ trátase dunha familia de aplicacións lineares $\sigma_m : \mathcal{A}_m \to \mathcal{G}^m$ verificando as propiedades seguintes:

(i) $\sigma_m(a) = 0$, para todo $a \in \mathcal{A}_{m-1}$.

(ii) $\sigma_m(a)\sigma_{m'}(a') = \sigma_{m+m'}(aa')$, para calesquera $a \in \mathcal{A}_m$ e $a' \in \mathcal{A}_{m'}$.

Definición 10.5. A *álxebra graduada asociada* a unha álxebra filtrada $\mathcal{A}$ é a dada pola suma directa

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \bigoplus_m \mathcal{A}_m / \mathcal{A}_{m-1},$$

coa operación produto inducida pola de $\mathcal{A}$.

É doado comprobar que a álxebra graduada $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ está ben definida e que as proxeccións $\mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m/\mathcal{A}_{m-1}$ dan lugar a un símbolo $\sigma_* : \mathcal{A} \to \mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Exemplo 10.6. A álxebra graduada asociada á álxebra de Clifford dun espazo vectorial V é a álxebra exterior $\bigwedge^* V$. O símbolo $\sigma_* : \mathrm{Cl}(V) \to \bigwedge^* V$ vén dado pola parte de grao máximo do isomorfismo existente entre $\mathrm{Cl}(V)$ e $\bigwedge^* V$ (introducido no Capítulo 3).

Exemplo 10.7. Sexa V un espazo vectorial de dimensión finita e denótese por $\mathfrak{C}(V)$ á álxebra de operadores diferenciais con coeficientes constantes que actúan sobre as funcións de V. A álxebra $\mathfrak{C}(V)$ é graduada, sendo a parte de grao m a formada polos operadores homoxéneos de orde m. Pódese tomar entón o fibrado $\mathfrak{C}(TM)$ que ten por fibra en cada punto $p \in M$ a $\mathfrak{C}(T_pM)$, de forma que o espazo de seccións diferenciables $C^\infty(\mathfrak{C}(TM))$ é unha álxebra graduada.

O símbolo $\sigma_* : \mathfrak{D}(M) \to C^\infty(\mathfrak{C}(TM))$ constrúese como segue. Fíxese un $p \in M$ e tómese un sistema de coordenadas locais x^i centrado en p. Un operador diferencial $T \in \mathfrak{D}_m(M)$ escribirase, en coordenadas locais, como

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Sexa agora o operador diferencial con coeficientes constantes en T_pM dado por

$$\sigma_{m,p}(T) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(0) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

Trátase dunha definición independente do sistema de coordenadas locais escollido, e resulta evidente que se anula ao aplicalo sobre operadores de orde menor ca m. É máis, para todo par $T \in \mathfrak{D}_m(M)$ e $T' \in \mathfrak{D}_{m'}(M)$, satisfaise que

$$\sigma_{m+m',p}(TT') = \sigma_{m,p}(T)\sigma_{m'p}(T'),$$

debido a que o conmutador de T e a multiplicación por unha función deferenciable é un operador de orde $< m$. Extendendo este razoamento a todo punto da variedade obtense o símbolo $\sigma_m : \mathfrak{D}_m(M) \to C^\infty(\mathfrak{C}^m(TM))$ desexado.

Observación 10.8. A filtración de $\mathfrak{D}(M)$ está xerada segundo se indica na Observación 10.3, a partir do subespazo $B = C^\infty(M)$ de elementos de grao 0 e do subespazo $V = \mathfrak{X}(M)$ (os campos de vectores sobre M, actuando mediante a derivada de Lie[1]) de elementos de grao 1. Debido ao seu carácter linear, para determinar completamente un símbolo basta definilo sobre os seus xeradores. Neste caso, usando o símbolo definido no Exemplo 10.7 e razoando punto a punto resulta inmediato comprobar que $\sigma_0(f) = f$ para toda $f \in C^\infty(M)$, e que $\sigma_1(X) = X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Considérese unha variedade de Riemann M de dimensión par dotada dun fibrado de Clifford S. No Capítulo 4 indícase que

$$\mathrm{End}(S) = \mathrm{Cl}(TM) \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S).$$

Esta factorización proporciona a $\mathrm{End}(S)$ unha estrutura de fibrado de álxebras filtradas, empregando a filtración estándar de $\mathrm{Cl}(TM)$ dada no Exemplo 10.2 e tomando os elementos de $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$ como de grao cero. Esta filtración en $\mathrm{End}(S)$ recibe o nome de *filtración de Clifford*. A partir do símbolo definido no Exemplo 10.6 para a álxebra de Clifford, constrúese o *símbolo de Clifford*

$$\mathrm{End}(S) \longrightarrow \bigwedge^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S).$$

É fundamental o estudo da álxebra $\mathfrak{D}(S)$ dos operadores diferenciais que actúan sobre as seccións diferenciables do fibrado S. Sucede que $\mathfrak{D}(S)$ está xerado polas seccións de $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$, as multiplicacións de Clifford e as derivadas covariantes.

Definición 10.9. A *filtración de Getzler* sobre $\mathfrak{D}(S)$ é aquela determinada sobre os seus xeradores do xeito seguinte:

(i) Un endomorfismo de móulos de Clifford de S ten grao 0;

(ii) Unha multiplicación de Clifford $c(X)$, con $X \in \mathfrak{X}(M)$, ten grao 1;

(iii) Unha derivada covariante ∇_X, con $X \in \mathfrak{X}(M)$, ten grao 1.

Dado un espazo vectorial V, denotarase por $\mathfrak{P}(V)$ á álxebra dos operadores diferenciais con coeficientes polinómicos que actúan sobre funcións en V (fronte aos coeficientes constantes de $\mathfrak{C}(V)$). Asignando grao $|\beta| - |\alpha|$ a cada operador da forma $x^\alpha \partial^\beta / \partial x^\beta$, o espazo $\mathfrak{P}(V)$ adquire estrutura de álxebra graduada.

[1]Véxase [15, Capítulo III, § 4].

Observación 10.10. Lémbrese que o operador curvatura de Riemann é unha 2-forma con valores en $\mathrm{End}(TM)$. Dado un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $p \in M$, tense a aplicación linear $T_pM \to \bigwedge^2 T_p^*M$ definida por

$$v \longmapsto (R_pX_p, v).$$

Identificando o espazo tanxente co espazo cotanxente mediante a métrica pódese considerar dita aplicación como unha función polinómica de grao 1 entre T_pM e $\bigwedge^2 T_pM$. O elemento de $\mathfrak{P}(TM) \otimes \bigwedge^* TM$ así construído escribirase $(RX, \cdot\,)$.

Proposición 10.11. *Existe un único símbolo*

$$\sigma_* : \mathfrak{D}(S) \to C^\infty\left(\mathfrak{P}(TM) \otimes \bigwedge^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)\right)$$

definido do seguinte xeito sobre os xeradores:

(i) $\sigma_0(F) = F$, *para todo* $F \in \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$)*;*

(ii) $\sigma_1(c(X)) = e(X)$, *i.e. o produto exterior por* X*, para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$*;*

(iii) $\sigma_1(\nabla_X) = \partial_X + \frac{1}{4}(RX, \cdot\,)$, *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

O símbolo da Proposición 10.11 queda univocamente determinado polo seu efecto nos xeradores de $\mathfrak{D}(S)$, e denomínase *símbolo de Getzler*. De feito, dá lugar a un símbolo sobre $\bigotimes_B^* V$, onde $B = \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$) está formado por elementos de grao 0 e $V = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)$ por elementos de grao 1 (véxase a Observación 10.3). Falta por xustificar que dito símbolo estea ben definido sobre $\mathfrak{D}(S)$, é dicir, que respecte as relacións existentes entre os xeradores de $\mathfrak{D}(S)$. Isto farase posteriormente neste capítulo. Non obstante, no seguinte exemplo obsérvase que o símbolo anterior se comporta axeitadamente coa relación que expresa a curvatura da conexión en S en función das derivadas covariantes.

Exemplo 10.12. Facendo uso da Proposición 3.18, en $\mathfrak{D}(S)$ tense que

$$\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = R^S(X,Y) + F^S(X,Y).$$

Calcularanse aquí os símbolos de Getzler de orde 2 de cada membro para comprobar que son coincidentes. Tómese unha referencia ortonormal e_i de TM con funcións coordenadas asociadas x^i. No primeiro membro o termo $\nabla_{[X,Y]}$ é de primeira orde, polo que o seu símbolo de Getzler de segunda orde é nulo (véxase a Definición 10.4-(i)). Aplicando o apartado (iii) da Proposición 10.11 e desenvolvendo a expresión de $(Re_i, \cdot\,)$, dedúcese que

$$\sigma_1(\nabla_i) = \partial_i - \frac{1}{8}\sum_{j,k,l}(R(e_i,e_j)e_k, e_l)\, x^j\, e_k \wedge e_l.$$

Utilizando esta expresión tense que

$$\begin{aligned}\sigma_2(\nabla_i \otimes \nabla_j - \nabla_j \otimes \nabla_i) &= \sigma_1(\nabla_i)\sigma_1(\nabla_j) - \sigma_1(\nabla_j)\sigma_1(\nabla_i)\\ &= [\sigma_1(\nabla_i), \sigma_1(\nabla_j)] = \frac{1}{4}\sum_{k,l}(R(e_i,e_j)e_k, e_l)\, e_k \wedge e_l.\end{aligned}$$

Pero o último termo coindice con $\sigma_2(R^S(e_i, e_j))$, como consecuencia da Definición 3.16 e da Proposición 10.11-(ii). Posto que F^S ten grao 0 por ser un endomorfismo de módulos de Clifford, concluímos que os dous membros teñen símbolos de Getzler de orde 2 iguais.

Exemplo 10.13. O operador de Dirac ten grao 2 (na filtración de Getzler), e o seu símbolo de Getzler coincide co operador d_{TM} dado pola derivada exterior en cada espazo tanxente. Para comprobalo tomarase unha referencia local ortonormal e_i de TM, para a cal se ten a expresión $D = \sum_i c(e_i)\nabla_i$. Polo tanto, empregando os apartados (ii) e (iii) da Proposición 10.11, séguese que

$$\sigma_2(D) = \sum_i \sigma_1(c(e_i))\, \sigma_1(\nabla_i) = \sum_i e(e_i)\partial_i - \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} (R(e_i, e_j)e_k, e_l)\, x^j\, e_i \wedge e_k \wedge e_l.$$

Pero o termo que involucra ao operador curvatura de Riemann é nulo debido á primeira identidade de Bianchi (véxase a Proposición 1.16), de maneira que só queda a expresión da derivada exterior.

Proposición 10.14. *O operador D^2 ten grao 2 e o seu correspondente símbolo, relativo a unha base ortonormal de T_pM, vén dado por*

$$\sigma_2(D^2) = -\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4}\sum_j R_{ij}\, x^j\right)^2 + F^S.$$

Na fórmula anterior R_{ij} denota á curvatura de Riemann en p (considerada como matriz de 2-formas), e F^S é a 2-forma da curvatura torcida en p.

Demostración. Segundo a Proposición 3.11 tense a fórmula de Weitzenbock

$$D^2 = \nabla^\dagger\nabla + \mathsf{F}^S + \frac{1}{4}\kappa,$$

onde F^S é a contracción de Clifford da curvatura torcida. Ademais a Proposición 3.12 establece que

$$\nabla^\dagger\nabla = -\sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_j\nabla_k - \Gamma^i_{jk}\nabla_i),$$

sendo Γ^i_{jk} os símbolos de Christoffel asociados á conexión de Levi-Civita de M. Pódese supoñer que o sistema coordenado é xeodésico, de xeito que na orixe p se cumpra $g^{jk} = \delta^{jk}$ e $\Gamma^i_{jk} = 0$. Así, o operador $\nabla^\dagger\nabla$ redúcese a $-\sum_i \nabla_i\nabla_i$. Consecuentemente,

$$\sigma_2(\nabla^\dagger\nabla) = -\sum_i (\sigma_1(\nabla_i))^2 = -\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4}\sum_j R_{ij}\, x^j\right)^2.$$

O resultado dedúcese entón do feito de que o símbolo de Getzler de orde 2 de F^S é simplemente F^S, mentres que o da curvatura escalar κ é cero. $\square$

10.2. Símbolo de Getzler do núcleo da calor

Nesta sección expoñerase o procedemento que permite aplicar o símbolo de Getzler á expansión asintótica do núcleo da calor asociado ao operador de Dirac. Polo o Teorema 7.15, dita expansión asintótica ten a forma

$$k_t(p,q) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{d(p,q)^2}{4t}\right) \sum_j t^j \Theta_j(p,q).$$

O operador da calor e^{-tD^2} non é un operador diferencial, polo que é preciso extender o cálculo relativo ao símbolo de Getzler para este tipo de operadores suavizantes.

Dado un espazo vectorial V, denotarase por $\mathbb{C}[[V]]$ ao anel das series de potencias formais sobre V, é dicir, ao produto directo infinito $\prod_i \bigotimes^i V$. A álxebra graduada $\mathfrak{P}(V)$ dos operadores diferenciais con coeficientes polinómicos actúa dun xeito natural sobre $\mathbb{C}[[V]]$. É máis, é posible dotar a $\mathbb{C}[[V]]$ de estrutura de espazo vectorial graduado asignando grao $-|\alpha|$ a cada monomio x^α, de xeito que $\mathbb{C}[[V]]$ se convirta nun módulo graduado sobre $\mathfrak{P}(V)$.

Sexa agora unha sección $s \in C^\infty(S \boxtimes S^*)$. Fíxese un punto $q \in M$ e tómense coordenadas xeodésicas locais x^i arredor de q. Considérese a función $s_q(x)$ que representa localmente a $p \mapsto s(p,q)$. Polo teorema de Taylor, existirá unha expansión asintótica

$$s_q(x) \sim \sum_a s_\alpha \, x^\alpha,$$

sendo as s_α seccións sincrónicas de $S \otimes S_q^*$, é dicir, seccións paralelas ao longo das xeodésicas radiais que parten da orixe q. Consecuentemente, cada sección s_α está determinada polo valor inicial $s_\alpha(0) \in \mathrm{End}(S_q)$. Logo a serie que aproxima a $s_q(x)$ trátase dun elemento de $\mathbb{C}[[T_qM]] \otimes \mathrm{End}(S_q)$. Facendo variar o punto q sobre toda a variedade obtense unha sección $\Sigma(s)$ do fibrado $\mathbb{C}[[TM]] \otimes \mathrm{End}(S)$, chamada *serie de Taylor* de s.

O produto tensor da filtración inducida en $\mathbb{C}[[T_qM]]$ pola súa estrutura de álxebra graduada (véxase a Observación 10.3) e da filtración de Clifford de $\mathrm{End}(S_q)$ dá lugar a unha filtración da álxebra $\mathbb{C}[[T_qM]] \otimes \mathrm{End}(S_q)$. Dita filtración serve para definir outra filtración no espazo de seccións $C^\infty(S \boxtimes S^*)$. Así, establécese que unha sección s ten grao $\leq m$ se a correspondente serie de Taylor $\Sigma(s)$ ten grao $\leq m$ (con respecto á filtración produto tensor anterior) en cada punto. Ao compoñer o símbolo de Clifford

$$\mathrm{End}(S_q) \longrightarrow \bigwedge\nolimits^* T_qM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S_q)$$

coa aplicación

$$\Sigma : S \otimes S_q^* \longrightarrow \mathbb{C}[[T_qM]] \otimes \mathrm{End}(S_q)$$

que dá a expansión de Taylor, obtense o símbolo

$$\sigma_* : C^\infty(S \boxtimes S^*) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{C}[[TM]] \otimes \bigwedge\nolimits^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)\right).$$

Definición 10.15. O grao m dunha sección s relativo á filtración anterior denomínase *grao de Getzler* de s, e o símbolo asociado $\sigma_m(s)$ chámase *símbolo de Getzler* de s. Ademais o termo constante da serie de Taylor $\sigma_m(s)$ denótase por $\sigma_m^0(s)$ e recibe o nome de *parte constante* do símbolo de Getzler.

Proposición 10.16. *Sexa $T \in \mathfrak{D}(S)$ un dos xeradores empregados na Definición 10.9 e sexa $m \in \{0,1\}$ o seu grao de Getzler. Entón, para todo operador suavizante Q de $C^\infty(S)$ con grao de Getzler $\leq k$, o operador suavizante TQ ten grao de Getzler $\leq m+k$ e verifícase que*

$$\sigma_{m+k}(TQ) = \sigma_m(T)\sigma_k(Q).$$

Demostración. A composición no segundo membro da expresión do enunciado obtense a partir da condición de $\mathfrak{P}(TM)$-módulo que ten $\mathbb{C}[[TM]]$ e da estrutura de álxebra de $\bigwedge^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$.

Sexa s o núcleo de Schwartz de Q. Fíxese un punto $q \in M$ e tómense coordenadas xeodésicas locais x^i arredor de q, de maneira que $s_q(x) \sim \sum_\alpha s_\alpha x^\alpha$ sexa a expansión de Taylor de s nunha veciñanza de q.

Primeiramente considerarase o caso en que $T = F$ é un endomorfismo de módulos de Clifford. Se F é sincrónico arredor de q, o núcleo de Schwartz Fs de FQ terá por coeficientes na expansión de Taylor aos Fs_α (porque as s_α son seccións sincrónicas de $S \otimes S_q^*$). Así, segundo o apartado (i) da Proposición 10.11, tense que

$$\sigma_k(FQ) \sim \sigma_k\left(\sum_\alpha Fs_\alpha x^\alpha\right) = F\sigma_k\left(\sum_\alpha s_\alpha x^\alpha\right) \sim F\sigma_k(Q) = \sigma_0(F)\sigma_k(Q).$$

Para o caso xeral, denótese por F_0 ao endomorfismo sincrónico que coincide con F en q. Logo o termo constante da expansión de Taylor de $F - F_0$ é nulo, de onde $\sigma_0(F) = \sigma_0(F_0)$ e, consecuentemente,

$$\sigma_k(Fs) = \sigma_k(F_0 s) = \sigma_0(F_0)\sigma_k(s) = \sigma_0(F)\sigma_k(s).$$

En segundo lugar, o razoamento para o caso $T = c(X)$, con X campo vectorial, faise dun xeito análogo ao anterior, obténdose que

$$\sigma_{k+1}(c(X)s) = \sigma_1(c(X))\sigma_k(s).$$

Finalmente tratarase o caso no que $T = \nabla_X$ é unha derivada covariante, con X campo vectorial. Sexan ∂_i os campos de vectores asociados ao sistema coordenado xeodésico local x^i. Por linearidade, é suficiente con probar o resultado para $X = \partial_i$. Sexa $Y = \sum_j x^j \partial_j$ o campo de vectores radial. Pódese supoñer que s é unha sección sincrónica de $S \otimes S_q^*$, xa que en caso contrario o razoamento que segue pode ser aplicado a cada un dos coeficientes sincrónicos s_α. Sexa

$$\nabla_X s \sim \sum_\alpha t_\alpha x^\alpha$$

a expansión de Taylor de $\nabla_X s$. Pola Definición 1.4, tense que

$$K(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s.$$

Dado que s é sincrónica, $\nabla_Y s = 0$. Ademais cúmprese que $Y \cdot x^\alpha = |\alpha|\, x^\alpha$ e

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \sum_j (x^j \nabla_i \partial_j + (\partial_i x^j)\partial_j) - \sum_j x^j \nabla_j \partial_i = X.$$

Polo tanto, satisfaise que

$$-\sum_\alpha (|\alpha|+1)\, t_\alpha x^\alpha \;\sim\; K(X,Y)s = \sum_j K_{ij}\, x^j s,$$

é dicir, os coeficientes da expansión de Taylor de $\nabla_X s$ están determinados polos de K. Segundo a Proposición 3.18, o operador curvatura descomponse como a suma $K = R^S + F^S$, onde o endomorfismo de Riemann R^S ten grao ≤ 2 e a curvatura torcida F^S ten grao cero por pertencer a $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$. Tomando os termos de grao $\leq k+1$ na expansión anterior, resulta que o termo de maior grao de $\nabla_X s$ (correspondente a $|\alpha| = 1$) é

$$-\frac{1}{2}\sum_j x^j R^S(\partial_i, \partial_j)s.$$

Como x^j ten orde -1 e sucede que $\sigma_2(R^S(\partial_i,\partial_j)) = -(1/2)R_{ij}$, aplicando a Proposición 10.11, dedúcese que

$$\sigma_{k+1}(\nabla_X s) = \frac{1}{4}\sum_j R_{ij}\, x^j \wedge \sigma_k(s) = \sigma_1(\nabla_X)\sigma_k(s). \quad \square$$

O seguinte corolario serve para completar a demostración da Proposición 10.11.

Corolario 10.17. *O símbolo de Getzler dado na Proposición 10.11 está ben definido sobre $\mathfrak{D}(S)$, e verifica que*

$$\sigma_{m+k}(TQ) = \sigma_m(T)\sigma_k(Q),$$

para todo $T \in \mathfrak{D}(S)$ con grao de Getzler $\leq m$ e todo operador suavizante Q con grao de Getzler $\leq k$.

Demostración. Sexa $T \in \mathfrak{D}(S)$ con grao de Getzler $\leq m$ e tómese unha representación $\widetilde{T}$ de T en función dos xeradores de $\mathfrak{D}(S)$ empregados na Definición 10.9. Bastará con probar que $\sigma_m(\widetilde{T})$ depende unicamente de T. Aplicando repetidamente a Proposición 10.16, tense que

$$\sigma_{m+k}(TQ) = \sigma_m(\widetilde{T})\sigma_k(Q).$$

Posto que $\sigma_k(Q)$ é unha serie de potencias formal arbitraria, conclúese que o operador diferencial con coeficientes polinómicos $\sigma_m(\widetilde{T})$ está determinado de forma única por T. $\square$

Para a proba do teorema do índice é fundamental aplicar ao núcleo da calor o cálculo relativo aos símbolos de Getzler desenvolvido anteriormente. Lémbrese que o núcleo da calor $k_t(p,q)$ ten a expansión asintótica indicada no Teorema 7.15 e, pola Proposición 7.5, satisfai a ecuación

$$\left(\partial_t + D_p^2\right) k_t(p,q) = 0.$$

Proposición 10.18. *Os coeficientes $\Theta_j(p,q)$ da expansión asintótica do núcleo da calor teñen grao de Getzler $\leq 2j$. O* símbolo da calor

$$W_t(p,q) = h_t(p,q)\left(\sigma_0(\Theta_0(p,q)) + t\sigma_2(\Theta_1(p,q)) + \cdots + t^{n/2}\sigma_n(\Theta_{n/2}(p,q))\right)$$

verifica a ecuación $\partial_t W + \sigma_2(D^2)W = 0$, e trátase da única solución de dita ecuación que ten a forma $h_t(v_0 + tv_1 + \cdots + t^{n/2}v_{n/2})$, cos v_j símbolos de Getzler de orde $2j$ e $v_0 = 1$.

Demostración. Empregaranse os cálculos e razoamentos desenvolvidos na demostración da Proposición 7.15. Deste xeito, considérese a representación de $k_t(p,q)$ dada por

$$(x,y) \longmapsto h_t(x)(u_0(x) + tu_1(x) + \cdots),$$

en cooredenadas locais arredor dun punto $q \in M$. A partir desta representación obtense o sistema de ecuacións diferenciais

$$\nabla_{\partial_r}\left(r^j g^{\frac{1}{4}} u_j\right) = -r^{j-1} g^{\frac{1}{4}} D^2 u_{j-1},$$

con $u_{-1} = 0$. Dado o valor inicial $u_0(0) = 1$, este sistema determina os u_j de forma unívoca. Como os u_j son seccións sincrónicas arredor de q, anúlanse ao lles aplicar a derivada covariante ∇_{∂_r}. Facendo uso do Corolario 10.17 e comparando as series de Taylor dos dous membros, o sistema de ecuacións diferenciais anterior toma sobre T_qM a forma

$$\partial_r\left(r^j\sigma_{2j}(u_j)\right) = -r^{j-1}\sigma_2(D^2)\sigma_{2j-2}(u_{j-1}).$$

É máis, os u_j teñen grao de Getzler $\leq 2j$. Pero tales relacións recursivas son precisamente as que verifican os coeficientes da expansión asintótica da solución da ecuación $\partial_t W + \sigma_2(D^2)W = 0$. O resultado séguese do feito de que, dada unha condición inicial, estas relacións recursivas determinan de forma unívoca os coeficientes da expansión. □

10.3. Teorema do índice de Atiyah-Singer

Construirase a continuación unha solución explícita para a ecuación diferencial $\partial_t W + \sigma_2(D^2)W = 0$. Debido á unicidade de solución asegurada pola Proposición 10.18, isto proporcionará unha fórmula explícita para o símbolo da calor.

Proposición 10.19. *Sexa $(\hat{R}_{ij})$ unha matriz antisimétrica de números reais e $\hat{F} \in \mathbb{R}$. A ecuación diferencial*

$$\partial_t w - \sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4}\sum_j \hat{R}_{ij}\, x^j\right)^2 w + \hat{F} w = 0$$

ten unha solución para valores pequenos de t que é unha función analítica de $\hat{F}$ e dos coeficientes da matriz $(\hat{R}_{ij})$, e que tende asintóticamente a $h_t(x)$ cando $t \to 0$. A fórmula explícita desta solución é

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \det{}^{1/2}\left(\frac{t\hat{R}/2}{\operatorname{senh}(t\hat{R}/2)}\right) \exp\left(-\frac{1}{4t}\left\langle \frac{t\hat{R}}{2} \coth\frac{t\hat{R}}{2}\, x\,,\, x\right\rangle - t\hat{F}\right).$$

Demostración. A teoría básica de resolución de ecuacións diferenciais permite supoñer que $\hat{F} = 0$. Segundo o teorema espectral para matrices antisimétricas, existirá unha base ortonormal con respecto á cal $(\hat{R}_{ij})$ sexa unha matriz por bloques cadrados de tamaño 2 da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $\pm i\theta$ os seus autovalores. Consecuentemente, bastará probar o resultado para o caso bidimensional (i.e. un único bloque), para o cal haberá que comprobar que, para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, o núcleo da calor toma a expresión

$$w(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\left(\frac{it\theta/2}{\operatorname{senh}(it\theta/2)}\right) \exp\left(-\frac{i\theta}{8}\,|x|^2 \coth\frac{it\theta}{2}\right).$$

No caso bidimensional, a ecuación diferencial do enunciado toma a forma $\partial_t w + Lw = 0$, sendo

$$L = -\left(\partial_{x_1} - \frac{\theta x_2}{4}\right)^2 - \left(\partial_{x_2} + \frac{\theta x_1}{4}\right)^2 = L_0 + L_1,$$

con

$$\begin{aligned} L_0 &= -\left(\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2\right) - \frac{\theta^2}{16}\,(x_1^2 + x_2^2), \\ L_1 &= \frac{\theta}{2}\,(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}). \end{aligned}$$

A solución $w(x,t)$ anteriormente proposta é invariante polas rotacións de $\mathbb{R}^2$, debido ao xeito en que está definida. Posto que L_1 se trata do xerador infinitesimal do grupo de rotacións de $\mathbb{R}^2$, sucede que $L_1 w = 0$, e será suficiente con xustificar que $\partial_t w + L_0 w = 0$. Agora farase unha separación das variables x_1 e x_2. Pola fórmula de Mehler para o oscilador armónico (véxase [17, Proposición 9.12]), a ecuación en derivadas parciais

$$\partial_t w - \partial_{x_1}^2 w - \frac{\theta^2}{16}\,x_1^2\,w = 0$$

ten por solución a

$$\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\left(\frac{it\theta/2}{\operatorname{senh}(it\theta/2)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{i\theta}{8}\,x_1^2 \coth\frac{it\theta}{2}\right).$$

Para a variable x_2 obtense unha solución análoga para a ecuación en derivadas parciais correspondente. Multiplicando as dúas solucións obtense a solución desexada $w(x,t)$. Finalmente, o comportamento das funcións hiperbólicas arredor de 0 garante que a solución explícita dada no enunciado tende asintóticamente a $h_t(x)$ cando $t \to 0$. □

A Proposición 10.14 establece que

$$\sigma_2(D^2) = -\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4} \sum_j R_{ij}\, x^j \right)^2 + F^S,$$

onde a curvatura de Riemann R está considerada como matriz antisimétrica de 2-formas e F^S é unha 2-forma sobre M con valores en $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$. Logo os coeficientes da matriz R conmutan entre sí e tamén con F^S. Polo tanto, pensando a fórmula explícita

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \det{}^{1/2} \left(\frac{tR/2}{\mathrm{senh}(tR/2)} \right) \exp \left(-\frac{1}{4t} \left\langle \frac{tR}{2} \coth \frac{tR}{2}\, x \,,\, x \right\rangle - tF^S \right)$$

dada pola Proposición 10.19 como serie de potencias formal sobre os coeficientes de R e F^S, tense que é converxente para todo valor de t e que proporciona unha solución para a ecuación $\partial_t W + \sigma_2(D^2) W = 0$. Ademais, debido ao cálculo explícito da Proposición 10.18, esta solución W ten a expansión

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} (v_0 + t v_1 + \cdots + t^{n/2} v_{n/2}),$$

onde as series de potencias formais v_j teñen grao de Getzler $\leq 2j$, e $v_0(0) = 1$. A partir da condición de unicidade da Proposición 10.18 dedúcese o resultado seguinte.

Proposición 10.20. *As partes constantes dos símbolos de Getzler dos termos involucrados na expansión asintótica do núcleo da calor dun operador de Dirac D veñen dadas por*

$$\sum_{j=0}^{n/2} \sigma^0_{2j}(\Theta_j) = \det{}^{1/2} \left(\frac{R/2}{\mathrm{senh}(R/2)} \right) \exp\left(-F^S\right) \in \bigwedge{}^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S),$$

onde os Θ_j son os coeficientes da expansión asintótica do núcleo da calor introducidos no Teorema 7.15.

No teorema do índice aparece o $\hat{\mathcal{A}}$-xénero asociado ao fibrado tanxente dunha variedade, que se define a partir do concepto de xénero de Pontrjagin introducido no Capítulo 2.

Definición 10.21. O *$\hat{\mathcal{A}}$-xénero* $\hat{\mathcal{A}}(V)$ asociado a un fibrado vectorial V é o xénero de Pontrjagin asociado á función holomorfa

$$z \longmapsto \frac{\sqrt{z}/2}{\mathrm{senh}(\sqrt{z}/2)}.$$

A continuación preséntase o teorema do índice de Atiyah-Singer, o cal establece unha igualdade entre o índice dun operador de Dirac e a integral sobre M do produto exterior do $\hat{\mathcal{A}}$-xénero asociado a TM e o carácter de Chern relativo $\mathrm{ch}(S/\Delta)$ (véxase a Definición 4.23).

Teorema 10.22 (Atiyah-Singer)**.** *Sexa M unha variedade de Riemann compacta, orientable e de dimensión par n. Sexa S un fibrado de Clifford canonicamente graduado sobre M con operador de Dirac asociado D. Entón verifícase que*

$$\operatorname{Ind}(D) = \int_M \hat{\mathcal{A}}(TM) \wedge \operatorname{ch}(S/\Delta).$$

En particular, se M é unha variedade spin e $S = \Delta$ é o fibrado spin, o índice do operador de Dirac asociado a Δ coincide co $\hat{\mathcal{A}}$-xénero de M.

Demostración. A Proposición 9.14 establece que

$$\operatorname{Ind}(D) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int \operatorname{tr}_s \Theta_{n/2} \operatorname{vol}.$$

A supertraza local $\operatorname{tr}_s \Theta_{n/2}$ pertence a $\operatorname{Cl}(TM) \otimes \operatorname{End}_{\operatorname{Cl}}(S)$ e, polo Lema 9.6, calcúlase a partir do termo de grao máximo de $\Theta_{n/2}$ na filtración de Clifford. Dada unha referencia ortonormal e_i, dito termo de grao máximo está dado por $e_1 \cdots e_n \otimes \sigma_n^0(\Theta_{n/2})$. Aplicando a Proposición 9.5 e o Lema 9.6 obtense que

$$\operatorname{tr}_s \Theta_{n/2} = \tau_s(e_1 \cdots e_n) \operatorname{tr}^{S/\Delta}(\sigma_n^0(\Theta_{n/2})) = (-2i)^{n/2} \operatorname{tr}^{S/\Delta}(\sigma_n^0(\Theta_{n/2})).$$

A Proposición 10.20 indica que a parte constante $\sigma_n^0(\Theta_{n/2})$ coincide co termo de grao n de

$$\det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\operatorname{senh}(R/2)}\right) \exp\left(-F^S\right).$$

Logo $\operatorname{tr}_s \Theta_{n/2}$ é igual ao termo de grao n de

$$(-2i)^{n/2} \det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\operatorname{senh}(R/2)}\right) \operatorname{tr}^{S/\Delta}\left(\exp\left(-F^S\right)\right).$$

Das definicións de $\hat{\mathcal{A}}$-xénero e de carácter de Chern relativo séguese que a expresión anterior é precisamente o termo de grao n de $\hat{\mathcal{A}}(TM) \wedge \operatorname{ch}(S/\Delta)$, multiplicado por

$$(-2i)^{n/2}(2\pi i)^{n/2} = (4\pi)^{n/2}.$$

O resultado dedúcese entón de comparar esta expresión coa igualdade inicial.

A afirmación relativa ao fibrado spin dunha variedade spin resulta evidente, debido a que o carácter de Chern relativo é trivial cando $S = \Delta$. □

Observación 10.23. É frecuente que o segundo membro da igualdade dada no teorema do índice se escriba como $\langle \hat{\mathcal{A}}(TM) \smile \operatorname{ch}(S/\Delta), [M] \rangle$, onde $\smile$ denota ao produto unión e $[M]$ é a clase fundamental de cohomoloxía de M (a cal está determinada pola orientación de M).

Observación 10.24. O enunciado do teorema do índice pode ser extendido para calquera graduación xeral que se teña en S. Segundo o Lema 9.4, existe unha descomposición $S = S_c \oplus S_a$ como suma directa dun subfibrado canonicamente graduado e un subfibrado anticanonicamente graduado. Sexan D_c e D_a os operadores de Dirac correspondentes. Entón satisfaise que

$$\mathrm{Ind}(D) = \mathrm{Ind}(D_c) - \mathrm{Ind}(D_a) = \int_M \hat{\mathcal{A}}(TM) \wedge \mathrm{ch}_s(S/\Delta),$$

onde o *supercarácter de Chern relativo* está definido por

$$\mathrm{ch}_s(S/\Delta) = \mathrm{ch}(S_c/\Delta) - \mathrm{ch}(S_a/\Delta).$$

Observación 10.25. A partir do teorema do índice pódense deducir moitos resultados xeométricos relevantes. Por exemplo, facendo uso da fórmula de Weitzenbock obtense o teorema de Lichnerowicz, que trata a existencia de métricas con curvatura escalar estritamente positiva sobre certas variedades spin compactas. Tamén permite establecer outros teoremas do índice para importantes estruturas xeométricas, como é o caso do teorema da signatura de Hirzebruch e do teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch en xeometría complexa.

Apéndice A

Fibrados

É un resultado coñecido que dadas dúas variedades diferenciables C^∞ M_1 e M_2 de dimensións m_1 e m_2, respectivamente, o produto $M_1 \times M_2$ é unha variedade C^∞ de dimensión $m_1 + m_2$. As proxeccións do produto sobre os factores denotarémolas mediante

$$\mathrm{pr}_i : M_1 \times M_2 \to M_i \ , \quad i \in \{1, 2\}.$$

Definición A.1. Considérense dúas variedades C^∞ E e M. Un *fibrado* de clase C^∞ é unha aplicación sobrexectiva C^∞ $E \xrightarrow{\pi} M$ cumprindo que existe unha coberta aberta $\mathcal{U}$ de M e unha variedade C^∞ F tal que, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe unha aplicación C^∞ $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} F$ de xeito que a aplicación $\alpha := (\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ sexa un difeomorfismo. Polo tanto, o diagrama seguinte é commutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Os espazos E, M e F chámanse *espazo total*, *espazo base* e *fibra estándar* do fibrado, respectivamente. O par (U, α) chámase *carta fibrada* de E (ou *trivialización local* de π) sobre U, e φ chámase *parte principal* da carta fibrada. A colección destas cartas fibradas (U, α), con $U \in \mathcal{U}$, chámase *atlas fibrado*. Un atlas fibrado dise que é *maximal* se non está contido en ningún outro atlas fibrado. Para cada p de M, o subconxunto $E_p := \pi^{-1}(p)$ do espazo total E dun fibrado sobre M denomínase a *fibra* de π (ou a *fibra* de E) sobre p.

En xeral, o adxectivo C^∞ será omitido. Verifícase que sempre existe un único atlas fibrado maximal que contén a calquera atlas fibrado dado.

A aplicación proxección $\pi : E \to M$ dun fibrado é unha submersión, é dicir, para cada punto $\xi \in E$ a aplicación tanxente inducida $(\pi_*)_\xi : T_\xi E \to T_{\pi(\xi)} M$ é sobrexectiva. Ademais, para cada $p \in M$, a fibra E_p de E sobre p é unha subvariedade mergullada e difeomorfa á fibra estándar F do fibrado. Estas son consecuencias directas da definición de fibrado.

Observación A.2. Denotarase por $\mathrm{Diff}(F)$ ao grupo de difeomorfismos de F coa operación composición. Sexan (π, φ_i) e (π, φ_j) cartas fibradas de E definidas sobre os abertos U_i e U_j, respectivamente. É doado comprobar que se $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ as restriccións de (π, φ_i) e (π, φ_j) a $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ son tamén cartas fibradas de E. Vexamos que son compatibles co atlas fibrado de E. Para cada punto $p \in U_i \cap U_j$, φ_i e φ_j aplican difeomórficamente a fibra E_p sobre F, polo que $\varphi_i \circ (\varphi_{j|E_p})^{-1} \in \mathrm{Diff}(F)$. Tense entón unha aplicación (chamada *función de transición de φ_i a φ_j*)

$$f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Diff}(F), \quad p \mapsto \varphi_i \circ (\varphi_{j|E_p})^{-1},$$

tal que

$$\varphi_i = (f_{ij} \circ \pi) \cdot \varphi_j \quad e \quad f_{ij}(p)^{-1} = f_{ji}(p),$$

onde $\cdot$ denota a acción natural de $\mathrm{Diff}(F)$ en F. Ademais, se (π, φ_k) é outra carta fibrada de E sobre un aberto U_k tal que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, entón

$$f_{ij}(p) = f_{ik}(p) \cdot f_{kj}(p)$$

para todo $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Debido a isto, a familia $\{f_{ij}\}$ define un elemento de certa cohomoloxía, polo que se denomina *cociclo* de definición do fibrado, o cal determina o fibrado salvo difeomorfismo.

Observación A.3. Sexa (π, φ) unha carta fibrada de E sobre U en M. Para cada carta C^∞ x de M sobre un aberto $V \subset U$ e cada carta C^∞ y de F sobre un aberto W, tense que $(x \circ \pi, y \circ \varphi)$ é unha carta C^∞ de E sobre o aberto $\pi^{-1}(V) \cap \varphi^{-1}(W)$. Deste xeito, tomando cartas C^∞ sobre M e F, obtense un atlas da variedade E. Polo tanto, un atlas fibrado de E xera a súa estrutura diferencial C^∞. De feito, é frecuente que se comece por tomar unha aplicación sobrexectiva π da variedade topolóxica E nunha variedade diferenciable M, logo se defina un atlas fibrado de E e, finalmente, se estableza unha estrutura diferenciable sobre E comprobando que as cartas fibradas de E sexan compatibles; nese momento E convírtese nunha variedade diferenciable e xa se pode elexir como espazo total dun fibrado sobre M.

Definición A.4. Un *grupo de Lie* G é unha variedade diferenciable que ten estrutura de grupo e tal que a operación $G \times G \to G$ definida por $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ é de clase C^∞.

Observación A.5. A aplicación $g \mapsto g^{-1}$ é C^∞ por ser a composición das aplicacións C^∞ $g \mapsto (e, g) \mapsto g^{-1}$. Asimesmo, $(g, h) \mapsto gh$ é tamén C^∞ por ser a composición $(g, h) \mapsto (g, h^{-1}) \mapsto gh$.

Definición A.6. Un grupo de Lie G dise que é un *grupo de transformacións de Lie* sobre unha variedade F se existe unha *acción pola esquerda* C^∞ de G en F, é dicir, unha aplicación C^∞ $\mu : G \times F \to F$ tal que, dados $g, h \in G$ e $\xi \in F$,

$$\mu(gh, \xi) = \mu(g, \mu(h, \xi)) \quad \text{e} \quad \mu(e, \xi) = \xi,$$

onde e é o elemento neutro de G.

Ademais μ pódese interpretar coma un homomorfismo de G en $\mathrm{Diff}(F)$: dado $g \in G$ definirase $\mu_g(\xi) = \mu(g, \xi)$, para todo $\xi \in F$.

Definición A.7. Sexa $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado con fibra estándar F e sexa G un grupo de transformación de Lie sobre F. Dúas cartas fibradas (π, φ_i) e (π, φ_j) en E sobre os abertos U e V de M, respectivamente, dirase que son *G-compatibles* se $U \cap V = \varnothing$ ou ben $U \cap V \neq \varnothing$ e existe unha aplicación C^∞ $g : U \cap V \to G$ tal que $\mu_{g(p)} = f_{ij}(p)$, para todo $p \in U \cap V$. En tal caso identifícase f_{ij} con g e considérase como unha aplicación C^∞ de $U \cap V$ en G. Deste xeito, para todo $p \in U \cap V$ e todo $\xi \in F$, verifícase

$$f_{ij}(p) \cdot \xi = \mu(f_{ij}(p), \xi).$$

Definición A.8. Un *fibrado con grupo estrutural G* é un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ con fibra estándar F no que G é un grupo de transformación de Lie sobre F, e que está dotado dun atlas fibrado maximal de E de forma que tódalas súas cartas fibradas son G-compatibles.

Exemplo A.9. O produto $M \times N$ de dúas variedades M e N é o espazo total do fibrado $\mathrm{pr}_1 : M \times N \to M$ con fibra estándar N. Pódese tomar grupo estrutural $G = \{\mathrm{id}_N\}$, polo que se chama *fibrado trivial*.

Exemplo A.10. Sexan M e N variedades. Escribirase (M, N) cando N sexa unha subvariedade de M. Supoñamos que (F_1, F_2), (E_1, E_2) e (M_1, M_2) son pares de variedades tales que $E_i \xrightarrow{\pi_i} M_i$ é un fibrado con fibra estándar F_i, para $i \in \{1, 2\}$. Dirase que E_2 é un *subfibrado* de E_1 se para toda carta fibrada (π_2, φ) de E_2 sobre un aberto U de M_2 se cumpre a seguinte condición: dado $p \in U$, existe unha veciñanza aberta V de p en M_1 e unha carta fibrada (π_1, ψ) de E_1 sobre V verificando

$$(\pi_1, \psi)|_{\pi_1^{-1}(U \cap V)} = (\pi_2, \varphi)|_{\pi_2^{-1}(U \cap V)}.$$

Nótese que non tódalas cartas fibradas sobre E_1 restrínxense a cartas fibradas de E_2 se $F_1 \neq F_2$, pois non tódolos difeomorfismos de F_1 deixan fixo F_2.

En particular, dada unha subvariedade N de M, $\pi^{-1}(N) \xrightarrow{\pi} N$ é un subfibrado de $E \xrightarrow{\pi} M$.

Definición A.11. Sexa $\mathbb{K}$ un dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e V un espazo vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión m. Un *fibrado vectorial* de *rango m* (sobre o corpo $\mathbb{K}$) é un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ dotado dun atlas fibrado $\mathcal{A}$ (chamado *atlas fibrado vectorial*) que é maximal entre os que cumpren as seguintes condicións:

(i) para cada $p \in M$ a fibra E_p ten estrutura de espazo vectorial sobre $\mathbb{K}$;

(ii) toda carta fibrada $(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ de $\mathcal{A}$ cumpre que a aplicación $\varphi|_{E_p} : E_p \to V$ é un isomorfismo, para todo $p \in U$.

Definición A.12. Sexan $E_j \xrightarrow{\pi_j} M$ fibrados vectoriais sobre $\mathbb{K}$, con $i = 1, 2$. Unha aplicación C^∞ $f : E_1 \to E_2$ dise que é un *homomorfismo de fibrados vectoriais* se conserva as fibras ($\pi_2 \circ f = \pi_1$) e a restrición de f a cada fibra de E_1 é linear. En particular, se cada restrición $f : E_{1p} \to E_{2p}$ é un isomorfismo, dise que f é un *isomorfismo de fibrados vectoriais*.

Cúmprese que un homomorfismo de fibrados vectoriais é isomorfismo se e só se é difeomorfismo.

Observación A.13. Considérense dous fibrados vectoriais $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M'$, e dúas aplicacións C^∞ $f : M \to M'$ e $F : E \to E'$ verificando que o seguinte diagrama sexa conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

A *imaxe recíproca* por f de E' defínese como

$$f^*E' = \left\{ (x, v') \mid x \in M,\, v' \in E'_{f(x)} \right\},$$

e constitúe un novo fibrado vectorial sobre M que se identifica canónicamente con E' mediante $(x, v') \mapsto (f(x), v')$. Ademais existe un único homomorfismo de fibrados vectoriais $E \to f^*E'$, dado por $(x, v) \mapsto (x, F(v))$, que factoriza a aplicación F a través da identificación canónica anterior.

Exemplo A.14. Sexa M unha variedade C^∞ de dimensión n. Denótase por T_pM ao espazo tanxente de M nun punto p. O fibrado tanxente de M, $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$, é o espazo total dun fibrado sobre M que se chama *fibrado tanxente*. A proxección é a aplicación definida por $\pi(T_pM) = \{p\}$, para todo $p \in M$. Se U é un aberto de M, sucede que T_pU está canónicamente identificado con T_pM para todo $p \in U$. Deste xeito, $\pi^{-1}(U)$ identifícase canónicamente con TU. A fibra estándar de TM é $\mathbb{R}^n$, xa que $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ para todo $p \in M$. Dada unha carta C^∞ $x = (x^1, \dots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ de M, a carta fibrada en $\pi^{-1}(U) = TU$ é a aplicación tanxente inducida de x:

$$x_* = (x \circ \pi, dx) : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} = T\mathbb{R}^n,$$
$$v \mapsto (x \circ \pi(v), dx^1(v), \dots, dx^n(v)),$$

Pódese considerar tamén $(\pi, dx) : TU \to U \times \mathbb{R}^n$ en lugar de x_*, pois a aplicación x é un difeomorfismo entre os abertos U e $x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Deste modo adecuámonos perfectamente á definición de carta fibrada dada anteriormente. En particular, $\pi : TM \to M$ trátase dun fibrado vectorial real cuio rango vén dado pola dimensión de M.

Observación A.15. O grupo de automorfismos dun espazo vectorial de dimensión m coincide co grupo linear xeral $\mathrm{GL}(m; \mathbb{R})$. Polo tanto, no cociclo determinado por un fibrado vectorial (ver Observación A.2) as funcións de transición son aplicacións C^∞ f_{ij} :

$U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(m;\mathbb{R})$. Ademais dito cociclo determina ao fibrado vectorial no sentido que se indica a continuación. Coñecido o cociclo pódese construír a variedade cociente $E' = (\bigsqcup_i U_i \times \mathbb{R}^m)/\sim$ dada pola relación de equivalencia

$$(p,v) \sim (q,w) \iff p = q \in U_i \cap U_j \quad \text{e} \quad f_{ij}(p)(v) = w,$$

con $p \in U_i$, $q \in U_j$ e $v, w \in \mathbb{R}^m$. Tense que $E' \xrightarrow{\pi'} M$, sendo $\pi'[(p,v)] = p$, é un fibrado vectorial de rango m. Denótese $s = \bigsqcup_i (\pi, \varphi_i)^{-1}$ e considérese o seguinte diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_i U_i \times \mathbb{R}^m \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "r"'] & & E \\
& E' \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $f([(p,v)]) = (\pi, \varphi_i)^{-1}(p,v)$ e r é a proxección canónica. É inmediato comprobar que f está ben definida e que se trata dun isomorfismo de fibrados vectoriais.

Definición A.16. Unha *acción pola dereita* C^∞ dun grupo de Lie G sobre unha variedade E é unha aplicación C^∞ $\mu : E \times G \to E$ tal que, dados $g, h \in G$ e $\xi \in E$,

$$\mu(\xi, gh) = \mu(\mu(\xi, g), h) \quad \text{e} \quad \mu(\xi, e) = \xi,$$

onde e é o elemento neutro de G (nótese a analoxía coa Definición A.6). Ademais dise que a acción μ é *libre* se e é o único elemento de G que deixa fixo calquera punto de E, é dicir, se $\mu(\xi, g) = \xi$ para algún $\xi \in E$ implica que $g = e$.

Definición A.17. Sexa $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado que teña por fibra estándar un grupo de Lie G. Dirase que E é un *fibrado principal sobre* M *con grupo* G se existen unha acción pola dereita C^∞ μ de G en E e un atlas fibrado $\mathcal{A}$ de E tales que, para toda carta fibrada $(\pi, \varphi) \in \mathcal{A}$ sobre un aberto $U \subset M$,

$$\varphi(\mu(\xi, g)) = \varphi(\xi)g \in G$$

para todo $\xi \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$. $\mathcal{A}$ recibe o nome de *atlas fibrado principal*.

Verifícase que G é o grupo estrutural de E, considerando a G actuando sobre si mesmo pola dereita. En efecto, se $(\pi, \varphi_i), (\pi, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ son cartas fibradas principais definidas sobre abertos non disxuntos U e V, a función de transición cumpre que $f_{ij}(p) = \varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi)^{-1} \in G$, sendo $\pi(\xi) = p \in U \cap V$. Ademais a elección de $\xi \in E_p$ é irrelevante porque, para todo $g \in G$,

$$\varphi_i(\mu(\xi, g))\varphi_j(\mu(\xi, g))^{-1} = \varphi_i(\xi)gg^{-1}\varphi_j(\xi)^{-1} = \varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi)^{-1}.$$

Observación A.18. Se E é un G-fibrado principal sobre M, tense que M é a variedade cociente E/G e π é a proxección canónica de E en E/G. Para comprobalo, tomarase un $p \in M$, dous puntos $\xi, \xi' \in E_p$ e (π, φ) unha carta fibrada principal definida nunha veciñanza U de p. Sexan $g := \varphi(\xi)$ e $h := \varphi(\xi')$. Sucede que

$$(\pi, \varphi)(\mu(\xi, g^{-1}h)) = (p, \varphi(\xi)g^{-1}h) = (\pi(\xi'), h) = (\pi, \varphi)(\xi').$$

Como (π, φ) é inxectiva obtense que $\xi' = \mu(\xi, g^{-1}h)$, é dicir, que ξ e ξ' están relacionadas pola acción de G sobre E.

Exemplo A.19. Sexa V un fibrado vectorial de dimensión m sobre M. Constrúese o *fibrado principal de referencias para* V como o espazo E tal que a fibra en cada $p \in M$ consiste na familia das bases de V_p. O seu grupo estrutural é o grupo $GL(m; \mathbb{R})$ ou $GL(m; \mathbb{C})$ das matrices non singulares. No caso de que V teña unha métrica, tamén se pode considerar o *fibrado principal de referencias ortonormais para* V, cuio grupo estrutural será $O(m)$ (matrices ortonormais) ou $U(m)$ (matrices unitarias), dependendo de se V é un fibrado vectorial real ou complexo.

Recíprocamente, sexa $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo estrutural G e sexa $\rho : G \to GL(F)$ unha representación[1] de G no espazo vectorial F. Entón G actúa sobre $E \times F$ mediante

$$(e, f)g = (eg, \rho(g^{-1})f),$$

con $e \in E$, $f \in F$ e $g \in G$. Tense entón o espazo cociente $E \times_\rho F = (E \times F)/\sim$, onde $\sim$ é a relación de equivalencia dada pola acción anterior. Definindo $\pi' : E \times_\rho F \to M$ como $\pi'([e, f]) = \pi(e)$, sucede que $E \times_\rho F \xrightarrow{\pi'} M$ é un fibrado vectorial sobre M cuias fibras son isomorfas a F (véxase [20, Proposición 1.47]). Recibe o nome de *fibrado vectorial asociado a* E *pola representación* ρ.

[1] Unha representación de G consiste nun homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL}_K(F)$, onde K é un corpo e F un K-espazo vectorial.

Apéndice B

Espazos de Sobolev

Para definir os espazos de Sobolev empréganse series de Fourier definidas sobre o toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. Tomaremos sempre espazos de funcións con valores complexos (como $L^2(\mathbb{T}^n;\mathbb{C})$ e $C^\infty(\mathbb{T}^n;\mathbb{C})$), aínda que non o indiquemos na notación por simplicidade (usando por exemplo $L^2(\mathbb{T}^n)$ e $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, ou simplemente L^2 e C^∞).

Definición B.1. Sexa $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Para cada $\nu \in \mathbb{Z}^n$ defínese o *ν-ésimo coeficiente de Fourier* de f como o númeo complexo

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-i\nu x}\, dx,$$

onde $i = \sqrt{-1}$, e νx denota o producto escalar usual, e a *serie de Fourier* de f é a dada por

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu)\, e^{i\nu x}.$$

Existen resultados moi elaborados que dan condicións de converxencia da serie de Fourier a unha función, pero aquí só serán precisos os máis sinxelos, que se basean no feito de que as funcións $e_\nu : x \mapsto (2\pi)^{-n/2} e^{i\nu x}$ forman unha base ortonormal do espazo de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^n)$. En particular,

$$\hat{f}(\nu) = (2\pi)^{-n/2}(f, e_\nu).$$

Teorema B.2 (Parseval). *Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, verifícase que*

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f|^2 = (2\pi)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\nu)|^2.$$

Teorema B.3 (Inversión para L^2). *Dada $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, a serie de Fourier de f converxe na norma L^2 a f.*

A transformada de Fourier convirte a derivación en multiplicación, polo que a derivabilidade dunha función pode ser tratada mediante o decrecemento dos seus coeficientes de Fourier. Dise que os coeficientes de Fourier $\hat{f}(\nu)$ *decrecen rapidamente* se para cada enteiro positivo k existe unha constante C_k tal que $|\hat{f}(\nu)| \leq C_k(1 + |\nu|)^{-k}$. A *topoloxía de Fréchet* de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é a topoloxía da converxencia uniforme de tódalas derivadas.

Teorema B.4 (Inversión para C^∞)**.** *Dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, a serie de Fourier de f converxe na topoloxía de Fréchet C^∞ a f. Ademais os coeficientes de Fourier decrecen rapidamente.*

Definición B.5. Sexa k un enteiro positivo. O *k-ésimo produto interior de Sobolev* en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é o dado pola fórmula

$$\langle f_1, f_2 \rangle_k = (2\pi)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_1(\nu)\overline{\hat{f}_2(\nu)}(1 + |\nu|^2)^k,$$

o cal está ben definido porque f_1 e f_2 decrecen rapidamente, segundo o Teorema B.4. A *k-ésima norma de Sobolev* é a que induce tal produto en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. O *k-ésimo espazo de Sobolev* é a compleción de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ na k-ésima norma de Sobolev, e denótase por W^k ou $W^k(\mathbb{T}^n)$.

O espazo de Sobolev $W^0(\mathbb{T}^n)$ é isométricamente equivalente a $L^2(\mathbb{T}^n)$, pois ao aplicar o teorema de Parseval obtense que

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |f|^2 = (2\pi)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\nu)|^2 = \|f\|_0^2.$$

O espazo $W^k(\mathbb{T}^n)$ correspóndese co espazo das funcións cuias derivadas ata orde k, definidas nun sentido distribucional, pertencen a $L^2(\mathbb{T}^n)$, pero para probar isto é necesario recurrir á teoría das distribucións, que non será tratada aquí. Non obstante, para os propósitos deste taballo bastará o resultado seguinte.

Proposición B.6. *O espazo $C^k(\mathbb{T}^n)$ das funcións k veces continuamente derivables é un subespazo de $W^k(\mathbb{T}^n)$, e a inclusión é unha aplicación continua.*

Demostración. Sexa $f \in C^k(\mathbb{T}^n)$. Integrando por partes k veces o coeficiente de Fourier tense que

$$\hat{f}(\nu) = \left(\frac{1}{i\nu_j}\right)^k \hat{f}_j(\nu),$$

sendo $f_j = (\partial_j)^k f$, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Cada f_j ten cadrado intregrable por ser continua. Logo, polo Teorema B.2, $(\hat{f}_j(\nu)) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Isto, xunto coa expresión anterior, implican que a sucesión dada por

$$\nu \longmapsto \hat{f}(\nu)(1 + |\nu|)^k$$

está no espazo $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Entón $f \in W^k(\mathbb{T}^n)$, xa que

$$\|f\|_k^2 = (2\pi)^n \sum_{\nu} |\hat{f}(\nu)|^2(1 + |\nu|^2)^k \leq (2\pi)^n \sum_{\nu} |\hat{f}(\nu)|^2(1 + |\nu|)^{2k} < \infty.$$

A continuidade da inclusión dedúcese do teorema do grafo pechado (véxase [3, Teorema 2.9]). $\square$

Teorema B.7 (Embebemento de Sobolev)**.** *Para todo enteiro $p > \frac{n}{2}$, o espazo $W^{k+p}(\mathbb{T}^n)$ está continuamente embebido en $C^k(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Sexa $f \in W^{k+p}(\mathbb{T}^n)$. Como $\|f\|_{k+p} < \infty$ tense que

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_{k+p}^2 = \sum_\nu |\hat{f}(\nu)|^2(1+|\nu|^2)^{k+p} < \infty.$$

Pola desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada á norma L^2, obtense

$$\begin{aligned}\left(\sum_\nu |\hat{f}(\nu)|\left(1+|\nu|^2\right)^{\frac{k}{2}}\right)^2 &= \left(\sum_\nu |\hat{f}(\nu)|\left(1+|\nu|^2\right)^{\frac{k+p}{2}}\left(1+|\nu|^2\right)^{-\frac{p}{2}}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_\nu |\hat{f}(\nu)|^2\left(1+|\nu|^2\right)^{k+p}\right)\left(\sum_\nu \left(1+|\nu|^2\right)^{-p}\right),\end{aligned}$$

expresión que é finita para todo $p > \frac{n}{2}$. Posto que

$$|\nu|^k < \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \binom{\frac{k}{2}}{i}|\nu|^{2i} = (1+|\nu|^2)^{\frac{k}{2}},$$

a suma $\sum_\nu |\hat{f}(\nu)||\nu|^k$ é finita. Logo as series de Fourier para as k primeiras derivadas converxen absoluta e uniformemente. □

Corolario B.8. *Cúmprese que $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W^k(\mathbb{T}^n)$.*

Teorema B.9 (Rellich)**.** *Se $k_1 < k_2$, a inclusión $W^{k_2} \to W^{k_1}$ é un operador linear compacto.*

Demostración. Hai que comprobar que este operador leva conxuntos limitados en relativamente compactos. Sexa B a bóla unidade de W^{k_2}. Dado $\varepsilon > 0$, existe un subespazo Z de W^{k_2} de codimensión finita tal que $\|f\|_{k_1} < \varepsilon$, para todo $f \in B \cap Z$. En efecto, basta tomar, para N suficientemente grande,

$$Z = \{\, f \in W^{k_2} \mid |\hat{f}(\nu)| = 0, \text{ se } |\nu| < N \,\}.$$

Polo teorema de Heine-Borel, a bóla unidade de W^{k_2}/Z é relativamente compacta, o cal equivale a ser totalmente limitada (porque o espazo métrico W^{k_2}/Z é completo), é dicir, que pode ser recuberta cun número finito de bólas de radio ε. Logo, dado que $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_2$, a bóla B pode ser recuberta cun número finito de bólas de radio 2ε na norma de W^{k_1}. Entón B é relativamente compacto en W^{k_1}, por ser ε arbitrario. □

Para poder definir espazos de Sobolev noutras variedades distintas de $\mathbb{T}^n$ é preciso considerar a equivalencia de normas dada pola seguinte proposición, cuia proba se obtén razoando do mesmo xeito ca na Proposición B.6.

Proposición B.10. *A k-ésima norma de Sobolev en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é equivalente á norma seguinte, dada mediante a norma L^2:*

$$f \longmapsto \sum_{|\alpha|\leq k} \left\| \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right\|$$

Corolario B.11. *Os operadores lineares diferenciais de orde l (entre W^k e W^{k-l}) e a multiplicación por funcións C^∞ son operadores limitados.*

Demostración. Consecuencia directa do Teorema B.9 e da Proposición B.10. □

Corolario B.12. *Sexa $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ unha función con soporte contido nun compacto K. Sexa U un aberto de $\mathbb{T}^n$ contendo a K, e sexa φ un mergullo C^∞ de U en $\mathbb{T}^n$. Entón $f \circ \varphi$ está en $W^k(\mathbb{T}^n)$ se e só se $f \in W^k(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Pola Proposición B.10, basta con estimar as L^2 normas de $f \circ \varphi$ en función das de f. Empregando a regra da cadea, obtense que as derivadas ata orde k de $f \circ \varphi$ son combinación linear de produtos de derivadas ata orde k de f (que aparecen compoñéndose con φ) e de derivadas ata orde k de φ. Para calcular as L^2 normas é preciso facer cambios de variable na integral, de maneira que aparece o xacobiano de φ. Sen embargo, os termos que dependen de φ estarán limitados, debido á compacidade do soporte de f. □

Sexa M unha variedade diferenciable compacta de dimensión n, $\{U_j\}$ un atlas finito de M e $\{\psi_j\}$ unha partición diferenciable da unidade subordinada aos U_j. Sexan asimesmo $\varphi_j : U_j \to \mathbb{T}^n$ mergullos C^∞, para todo j.

Definición B.13. O *k-ésimo produto interior de Sobolev* en $C^\infty(M)$ é o dado pola expresión

$$\langle f, g\rangle_k = \sum_j \langle(\psi f)\circ\varphi_j^{-1}, \psi g)\circ\varphi_j^{-1}\rangle_k,$$

onde os k-produtos de Sobolev do segundo membro considéranse sobre $\mathbb{T}^n$.

A priori semella que esta definición depende das múltiples eleccións feitas. Non obstante, os Corolarios B.11 e B.12 aseguran que sempre se obteñen normas equivalentes, con independencia das distintas escollas. Polo tanto, a *k-ésima norma de Sobolev* en $C^\infty(M)$ defínese canonicamente salvo equivalencia. Defínese entón o espazo de Sobolev $W^k(M)$ como a compleción de $C^\infty(M)$ con respecto á norma k-ésima.

Se V é un fibrado vectorial sobre M defínese o espazo de Sobolev $W^k(V)$ dun xeito análogo, mediante W^k seccións de V. Para iso hai que tomar unha trivialización de V en cada carta coordenada U_j.

Ademais é posible, aínda que tedioso, demostrar que as propiedades aquí empregadas verifícanse igualmente sobre unha variedade arbitraria (non necesariamente compacta), pois sempre se pode reducir a cuestión ao caso do toro.

Bibliografía

[1] Arkovitz, M. *Introduction to Homotopy Theory*. Springer, 2011.

[2] Bott, R. and Tu, L.W. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.

[3] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[4] Carmo, M.P. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1992.

[5] Conway, J.B. *A Course in Functional Analysis*. Spriger-Verlag, 1990.

[6] Dunford, N. and Schwartz, J. *Linear Operators* (*Part I*). Interscience Publishers, Inc., 1957.

[7] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.

[8] Greub, W. H., *Linear Algebra*. Springer-Verlag, 1967.

[9] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R. *Connections, Curvature and Cohomology* (*Volume II*). Academic Press, 1973.

[10] Griffiths, P. and Harris, J. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley and Sons, Inc., 1978.

[11] Kobayashi, S. and Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry* (*Volume I*). John Wiley and Sons Inc., 1963.

[12] Lang, S. *Algebra*. Addison Wesley Publishing Company, 1965.

[13] Lawson, H.B. and Michelsohn, M.L. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.

[14] Madsen, I. and Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1997.

[15] Matsushima, Y. *Differentiable Manifolds*. Marcel Dekker, Inc., 1972.

[16] Osborn, H. *Vector Bundles* (*Volume I*). Academic Press, Inc., 1982.

[17] Roe, J. *Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods*. Addison Wesley Longman Limited, 1998.

[18] Simon, B. *Trace Ideals and Their Applications*. Cambridge University Press, 1979.

[19] Varadarajan, V.S. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Springer-Verlag, 1984.

[20] Walter, A.P. *Differential Geometric Structures*. McGraw-Hill, Inc., 1981.

[21] Warner, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scot, Foresman and Company Inc., 1971.