Ramón Vázquez Lorenzo

RIGIDEZ DE PARES SIMPLÉCTICOS EN DIMENSIÓN CUATRO

135b
2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

RAMÓN VÁZQUEZ LORENZO

RIGIDEZ DE PARES SIMPLÉCTICOS EN DIMENSIÓN CUATRO

135b
2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Rigidez de pares simplécticos en dimensión cuatro

Ramón Vázquez Lorenzo

Xullo 2011

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo Fin de Máster que presenta don Ramón Vázquez Lorenzo para optar al Título de Máster en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela bajo la dirección del profesor don Eduardo García Río.

Índice general

Introducción

Es bien conocido que la existencia de determinadas estructuras sobre variedades pseudo-Riemannianas (Kähler, cuaterniónicas Kähler, Sasakianas, etc.) influye sobre el comportamiento de la curvatura de las mismas. Recíprocamente, en determinadas situaciones es posible construir estructuras adicionales sobre una variedad dada a partir de la curvatura de la misma y, en ciertos casos, es factible caracterizar la variedad de partida a partir de dichas estructuras. Tal es el caso de las variedades Osserman especiales [24] o el Teorema de Goldberg-Sachs generalizado [1, 19]. En esta memoria se pone de manifiesto la validez de una tal estrategia a la hora de estudiar pares simplécticos y su conexión con los espacios simétricos generalizados en dimensión cuatro.

Un *par simpléctico* sobre una variedad M de dimensión cuatro es un par de 2-formas cerradas no triviales (ω, η) de rangos constantes y complementarios, de forma que la restricción de ω (resp., η) a las hojas de la foliación dada por el núcleo de η (resp., ω) es una forma simpléctica [4]. Entonces, $\Omega_\pm = \omega \pm \eta$ son formas simplécticas sobre M compatibles con las diferentes orientaciones. De hecho, un par simpléctico puede definirse de manera equivalente por medio de dos formas simplécticas (Ω_+, Ω_-) verificando

$$\begin{aligned} \Omega_+ \wedge \Omega_- &= 0, \\ \Omega_+ \wedge \Omega_+ &= -\Omega_- \wedge \Omega_- \,. \end{aligned}$$

Si (Ω_+, Ω_-) es un par simpléctico, entonces los núcleos de $\Omega_+ \pm \Omega_-$ definen foliaciones complementarias con hojas minimales, y del mismo modo cualquier par simpléctico está dado por un par de foliaciones minimales 2-dimensionales complementarias orientadas sobre la variedad [4, 7].

A pesar de que las variedades que son simplécticas para las dos posibles orientaciones son en cierto sentido especiales, existen muchos ejemplos no triviales, es decir, variedades simplécticas no producto que admiten pares simplécticos [4]. De hecho, tales estructuras aparecen en resultados relacionados con la existencia de métricas Riemannianas geométricamente formales [31], la conjetura de Goldberg en dimensión cuatro y también aparecen de manera natural en el estudio de variedades casi Kähler de dimensión cuatro verificando las simetrías de Gray [2].

Dada una métrica Riemanniana sobre M, los pares simplécticos se corresponden con estructuras casi Kähler y opuestas casi Kähler, y se conocen algunos resultados sobre rigidez bajo condiciones adicionales. Las estructuras Kähler y opuestas Kähler se corresponden localmente con productos de variedades Kählerianas y cualquier estructura casi Kähler y opuesta Kähler (J, J') sobre una variedad Riemanniana de dimensión cuatro con operador de Ricci J-invariante es localmente isométrica al único espacio 3-simétrico (véase, por ejemplo [2]).

La situación es más rica en el caso pseudo-Riemanniano, donde los pares simplécticos se corresponden con estructuras casi Kähler y opuestas casi Kähler, o bien estructuras casi paraKähler y opuestas casi paraKähler, dependiendo de si $\|\Omega_+\|$ y $\|\Omega_-\|$ son espaciales o temporales para la métrica inducida en el espacio de 2-formas.

En este trabajo nos planteamos dos objetivos principales:

- En primer lugar, extenderemos al caso indefinido el resultado de rigidez establecido por Apostolov, Armstrong y Drăghici en [2] para el caso definido positivo, poniendo así de manifiesto que las estructuras indefinidas estrictamente casi Kähler y opuestas Kähler (J, J') sobre una variedad de dimensión cuatro con operador de Ricci J-invariante son rígidas (Capítulo 2).
- En segundo lugar, pondremos de manifiesto que la situación es completamente diferente en el caso paraHermítico, mostrando la existencia de estructuras estrictamente casi paraKähler y opuestas paraKähler $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ sobre variedades de dimensión cuatro con operador de Ricci $\mathfrak{J}$-invariante que no son localmente homogéneas (Capítulo 3).

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se fija la notación y se recogen las definiciones necesarias para el desarrollo de los capítulos siguientes.

1.1. Introducción

A lo largo de este trabajo (M, g) denotará una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión n de signatura arbitraria $(\nu, n-\nu)$, $\nu \geq 0$, incluyendo como casos particulares las variedades Riemannianas y las Lorentzianas. Además, denotaremos por T_pM el espacio tangente a M en un punto $p \in M$ y por TM el fibrado tangente a la variedad. Consideraremos $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de todos los campos de vectores tangentes a M. Como regla general, los campos de vectores vendrán representados por letras mayúsculas $X, Y, Z, \ldots$ y los vectores tangentes en cada punto de la variedad por letras minúsculas $x, y, z, \ldots$. Siguiendo la notación habitual en geometría pseudo-Riemanniana, un vector distinto de cero $z \in T_pM$ se dirá *temporal* si $g(z,z) < 0$, *espacial* si $g(z,z) > 0$ y *nulo* si $g(z,z) = 0$. Para vectores unitarios utilizaremos la notación $\varepsilon_z = g(z,z)$.

La métrica g determina de forma única una conexión simétrica, ∇, respecto a la cual es paralela: *la conexión de Levi-Civita*, definida por la *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned} \tag{1.1}$$

siendo X, Y, Z campos de vectores sobre la variedad y donde $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ representa el corchete de Lie. Una vez introducida la conexión de Levi-Civita, definimos el *operador de curvatura* R asociado (o tensor curvatura de tipo $(1,3)$), dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

y definimos el *tensor curvatura* de tipo $(0,4)$ asociado como

$$R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U).$$

El tensor curvatura presenta las siguientes simetrías algebraicas:

$$\begin{aligned} &(a) \quad R(X,Y,Z,U) = -R(Y,X,Z,U) = -R(X,Y,U,Z), \\ &(b) \quad R(X,Y,Z,U) + R(Y,Z,X,U) + R(Z,X,Y,U) = 0, \\ &(c) \quad R(X,Y,Z,U) = R(Z,U,X,Y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

y la identidad diferencial:

$$(d) \quad (\nabla_X R)(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,U,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,U,V) = 0. \tag{1.3}$$

Las identidades (b) y (d) se conocen como primera y segunda identidad de Bianchi, respectivamente.

La resolución de un buen número de cuestiones relacionadas con el estudio de la curvatura requiere de un análisis previo de la estructura algebraica subyacente para, a posteriori, considerar la posibilidad de realizar geométricamente las distintas posibilidades algebraicas. Desde un punto de vista puramente algebraico, sea V un espacio vectorial real de dimensión n dotado con un producto interior $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ de signatura $(\nu, n-\nu)$. Un tensor A de tipo $(0,4)$ sobre $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ se dice que es un *tensor curvatura algebraico* si verifica las simetrías establecidas en la Ecuación (1.2). Esencialmente, todo tensor curvatura algebraico puede ser construido por uno de los siguientes métodos:

- Para cada forma bilineal simétrica ϕ en $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$,

  $$A^\phi(x,y,z,v) = \phi(x,z)\phi(y,v) - \phi(y,z)\phi(x,v)$$

  es un tensor curvatura algebraico. En [21] se prueba que el espacio de tensores curvatura algebraicos está generado por todos los tensores de esa forma.

- Para cada forma bilineal antisimétrica ψ en $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$,

  $$A^\psi(x,y,z,v) = \psi(x,z)\psi(y,v) - \psi(y,z)\psi(x,v) + 2\psi(x,y)\psi(z,v)$$

  es un tensor curvatura algebraico. Además, el espacio de todos los tensores curvatura algebraicos está generado por todos los tensores A^ψ anteriores [26].

La *curvatura seccional* de una variedad Riemanniana (M,g) es una función real K definida sobre la Grassmanniana de 2-planos como

$$K(\pi) = \frac{R(x,y,x,y)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2}\,,$$

para todo 2-plano $\pi = \langle \{x,y\} \rangle$ en T_pM. En el caso pseudo-Riemanniano, la definición anterior debe restringirse a la Grassmanniana de 2-planos no degenerados (i.e., donde $g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2 \neq 0$), lo que impide garantizar la acotación puntual de dicha función.

La posibilidad de extender K con continuidad a toda la Grassmanniana es equivalente a la constancia de la misma [17]. En tal caso el tensor curvatura se escribe como

$$R(x, y, z, u) = \kappa R^0(x, y, z, u),$$

donde el tensor curvatura algebraico R^0 viene dado por

$$R^0(x, y, z, u) = g(x, z)g(y, u) - g(y, z)g(x, u).$$

A continuación introducimos ciertos tensores que aparecen de forma natural a partir del tensor curvatura, tensores que pueden ser definidos a nivel de un punto p arbitrario de la variedad. El *tensor de Ricci* ρ y la *curvatura escalar* τ se definen como las trazas

$$\rho(x, y) = \text{traza}\,\{z \mapsto R(x, z)y\}, \qquad \tau = \text{traza}\ \rho.$$

En una base arbitraria $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM, denotando con $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$\rho(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R(x, e_i, y, e_j), \qquad \tau = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \rho(e_i, e_j),$$

donde (g^{ij}) denota la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica. En tal caso se tiene que $\rho = \frac{\tau}{n} g$.

El *tensor de Schouten* de una variedad pseudo-Riemanniana n-dimensional se define como

$$C = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g\right).$$

El significado geométrico del tensor de Schouten aparece en el estudio de la geometría conforme. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *localmente conformemente llana* si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U, $p \in U$, y un cambio conforme e^σ, $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g = e^\sigma g_0$ donde g_0 es la métrica del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{E}^n_\nu$. Las variedades 3-dimensionales localmente conformemente llanas están caracterizadas por el hecho de que su tensor de Schouten sea Codazzi, esto es $(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$.

Por último, se define el *tensor de Weyl*, W, de una variedad pseudo-Riemanniana como

$$\begin{aligned} W(x, y, z, u) = R(x, y, z, u) &+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(x, z)g(y, u) - g(y, z)g(x, u)\} \\ &- \frac{1}{n-2}\{\rho(x, z)g(y, u) - \rho(y, z)g(x, u) \\ &\qquad + \rho(y, u)g(x, z) - \rho(x, u)g(y, z)\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $x, y, z, u \in T_pM$. El tensor de Weyl caracteriza los espacios localmente conformemente llanos en dimensión $n \geq 4$ en términos de su anulación (nótese que W siempre se anula en dimensión $n = 3$).

1.2. Autodualidad y antiautodualidad en dimensión cuatro

Consideramos en esta sección un espacio vectorial de dimensión cuatro, V, equipado con un producto interior de signatura arbitraria, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de V y sea $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ su base dual asociada. Consideramos el espacio de 2-formas

$$\Lambda^2(V) = \langle \{e^i \wedge e^j \,:\, i, j \in \{1,2,3,4\},\, i < j\}\rangle.$$

Se define el operador estrella de Hodge $\star$ actuando en $\Lambda^2(V)$ como

$$e^i \wedge e^j \wedge \star(\, e^k \wedge e^l) = (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k)\, \varepsilon_i \varepsilon_j\, e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4,$$

donde $\varepsilon_i = \langle\, e_i, e_i\,\rangle$ y δ^i_j representa la delta de Kronecker. Las propiedades del operador de Hodge están influenciadas por las distintas signaturas del producto escalar $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Así, $\star$ define una estructura compleja (esto es $\star^2 = -\operatorname{Id}_{\Lambda^2(V)}$) en signatura Lorentziana, mientras que $\star$ define una estructura producto (esto es $\star^2 = \operatorname{Id}_{\Lambda^2(V)}$) en signatura Riemanniana o neutra. En esta última situación, el operador estrella de Hodge induce una descomposición del espacio de 2-formas $\Lambda^2(V) = \Lambda^2_+(V) \oplus \Lambda^2_-(V)$, donde $\Lambda^2_+(V)$ y $\Lambda^2_-(V)$ denotan los espacios de 2-formas autoduales y antiautoduales, respectivamente

$$\Lambda^2_+(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V) : \star\alpha = \alpha\}, \qquad \Lambda^2_-(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V) : \star\alpha = -\alpha\}.$$

En una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ los subespacios autodual y antiautodual están generados por

$$\Lambda^2_\pm = \langle\{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\}\rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} E_1^\pm &= (e^1 \wedge e^2 \pm \varepsilon_3\varepsilon_4 e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ E_2^\pm &= (e^1 \wedge e^3 \mp \varepsilon_2\varepsilon_4 e^2 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ E_3^\pm &= (e^1 \wedge e^4 \pm \varepsilon_2\varepsilon_3 e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

La métrica inducida en $\Lambda^2(V)$ a partir del producto escalar, dada por

$$\langle\langle x \wedge y, z \wedge w\rangle\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle\langle x, w\rangle$$

es Riemanniana si $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ es definido positivo y de signatura $(++----)$ si $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ es un producto escalar de signatura neutra $(2,2)$. Además, en este último caso la restricción de la métrica a los subespacios $\Lambda^2_\pm$ es de signatura $(+--)$. En cualquier caso, $\{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\}$ es una base ortonormal, con $E_1^\pm$ espaciales y $E_i^\pm$ temporales para $i = 2, 3$.

Interpretando un tensor curvatura algebraico A sobre V como un endomorfismo de $\Lambda^2(V)$, en dimensión cuatro se tiene la siguiente $O(4)$-descomposición ($O(2,2)$-descomposición en el caso en que V tenga signatura neutra):

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\tau}{12}\, \operatorname{Id}_{\Lambda^2} + \rho_0 + W :\ \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2, \tag{1.6}$$

donde W denota el tensor de Weyl y ρ_0 el tensor de Ricci sin traza,

$$\rho_0(x,y) = \rho(x,y) - \tfrac{\tau}{4}\langle x, y\rangle.$$

Denotando por $W^{\pm}$ la restricción del tensor de Weyl a los subespacios $\Lambda^2_{\pm}(V)$, se dice que un tensor curvatura es *autodual* (respectivamente *antiautodual*) si $W^- = 0$ (respectivamente $W^+ = 0$). Por lo tanto podemos extender la $O(4)$-descomposición, o bien la $O(2,2)$-descomposición en el caso en que la variedad tenga signatura neutra, dada en la Ecuación (1.6) como

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\tau}{12}\ \mathrm{Id}_{\Lambda^2} + \rho_0 + W^+ + W^- :\ \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2. \tag{1.7}$$

1.3. Estructuras adicionales sobre variedades

1.3.1. Estructuras casi Hermíticas

Sea M una variedad diferenciable $2m$-dimensional. Como es bien conocido, una tal variedad se dirá *compleja* cuando sea posible construir sobre ella un sistema de coordenadas complejas (esto es, un atlas constituido por funciones valuadas complejas cuyos cambios de coordenadas sean aplicaciones holomorfas). Tal condición supone una reducción del grupo estructural de la variedad real subyacente al grupo lineal complejo $GL(n,\mathbb{C})$. Así pues, una primera condición necesaria para que una variedad diferenciable (real) sea difeomorfa a una variedad compleja es la reducción del grupo estructural a $GL(n,\mathbb{C})$. Una tal reducción es equivalente a la existencia de un campo de tensores J de tipo $(1,1)$ sobre la variedad verificando $J^2 = -\,\mathrm{Id}$, al que se llama *estructura casi compleja* sobre M. Denotaremos por (M,J) una *variedad casi compleja*, donde se considera la variedad M y una estructura casi compleja J fija sobre M.

Cuando la estructura casi compleja se corresponda realmente con la estructura subyacente a una variedad compleja, se dirá que la estructura es *integrable* (o *compleja*), lo que se establece en términos de la anulación del tensor de Nijenhuis

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X,Y].$$

La existencia de estructuras casi complejas sobre una variedad dada conlleva ciertas restricciones sobre la topología de la misma. En particular, toda variedad casi compleja es orientable.

Una métrica pseudo-Riemanniana g sobre M se dice que es *casi Hermítica* si la estructura casi compleja J es una isometría de cada espacio tangente T_pM, es decir $g(JX,JY) = g(X,Y)$ para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Llamaremos *variedad casi Hermítica* al triple (M,g,J).

Asociada a cada estructura casi Hermítica (g,J) existe siempre una 2-forma asociada $\Omega(X,Y) = g(JX,Y)$. La 2-forma Ω induce una orientación en M que coincide con la orientación de la estructura casi compleja cuando la métrica casi Hermítica es definida positiva. Sin embargo ambas orientaciones son opuestas cuando la métrica subyacente es de signatura neutra $(2,2)$. La 2-forma Ω define una sección de $\Lambda^2(M)$ verificando $\|\Omega\|^2 = 2$ (independientemente de la signatura de la métrica). Recíprocamente, para cada sección Ω de $\Lambda^2(M)$ de norma $\|\Omega\|^2 = 2$ existe una estructura casi Hermítica asociada.

La derivada covariante de la estructura casi compleja se relaciona con la diferencial de la 2-forma Ω y el tensor de Nijenhuis mediante la expresión

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) + 3d\Omega(X, Y, Z) - 3d\Omega(X, JY, JZ) - g(JX, N_J(Y, Z)) = 0.$$

Una variedad casi Hermítica (M, g, J) se dirá *Hermítica* si la estructura casi compleja es integrable. La existencia de estructuras Hermíticas da lugar a nuevas identidades algebraicas para la curvatura. Gray mostró en [27] que el tensor curvatura de una variedad Hermítica verifica la identidad

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &+ R(JX,JY,JZ,JW) \\ &= R(JX,JY,Z,W) + R(X,Y,JZ,JW) + R(JX,Y,JZ,W) \\ &\quad + R(X,JY,Z,JW) + R(JX,Y,Z,JW) + R(X,JY,JZ,W). \end{aligned}$$

En [11] se prueba que la identidad anterior es la condición necesaria y suficiente para que un tensor curvatura algebraico definido en un espacio vectorial Hermítico sea realizable geométricamente por una variedad Hermítica. Este hecho pone de manifiesto que la identidad anterior, juntamente con las identidades dadas en la Ecuación (1.2), determinan todas las simetrías de la curvatura de una variedad Hermítica.

Una estructura casi Hermítica se llama *casi Kähler* si la 2-forma Ω es cerrada (i.e., $d\Omega = 0$). La existencia de estructuras casi Kähler conlleva ciertas restricciones sobre la curvatura de la variedad. La posibilidad de garantizar la integrabilidad de una estructura casi Kähler a partir de las propiedades de la curvatura ha sido abundantemente estudiada (estructuras casi Kähler Einstein, localmente conformemente llanas, etc.).

Es interesante notar que los resultados de integrabilidad conocidos son válidos tan solo en el ámbito Riemanniano. De hecho, la existencia de estructuras isotrópicas Kähler (esto es, $\|\nabla J\|^2 = 0$, pero $\nabla J \neq 0$) imposibilita la validez de dichos resultados en el caso pseudo-Riemanniano [18].

El caso más simple de variedad Hermítica viene dado por las variedades *Kähler*, caracterizadas por el paralelismo de la estructura compleja ($\nabla J = 0$). Un cálculo sencillo muestra que el paralelismo de la estructura compleja, $\nabla J = 0$, da lugar a la siguiente identidad para el tensor curvatura

$$R(X,Y,Z,W) = R(JX,JY,Z,W).$$

De nuevo esta identidad permite determinar todos los tensores curvatura algebraicos definidos en un espacio vectorial Hermítico que pueden ser realizados geométricamente sobre una variedad Kähler [12]. Una consecuencia inmediata de la identidad Kähler es que toda variedad Kähler de curvatura seccional constante es necesariamente llana. Por este motivo se introduce la *curvatura seccional holomorfa* como la restricción de la curvatura seccional a planos holomorfos (i.e., $J(\pi) \subset \pi$) no degenerados. Es importante señalar que la curvatura seccional holomorfa determina el tensor curvatura en geometría de Kähler y, además, una variedad Kähler es de curvatura seccional holomorfa constante c si y sólo si el tensor curvatura se expresa como

$$R = \frac{c}{4}\left(R^0 + R^J\right),$$

donde

$$R^0(X,Y,Z,W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W),$$
$$R^J(X,Y,Z,W) = g(JX,Z)g(JY,W) - g(JY,Z)g(JX,W) + 2g(JX,Y)g(JZ,W).$$

1.3.2. Estructuras casi paraHermíticas

Una 2-forma Ω sobre una variedad $2m$-dimensional M se dice *casi simpléctica* si es no degenerada, es decir, si $\Omega^m \neq 0$, y el par (M,Ω) se denomina entonces *variedad casi simpléctica*. Se llama *subvariedad Lagrangiana* de una variedad casi simpléctica (M^{2m},Ω) a una subvariedad inmersa m-dimensional sobre la que Ω induce la forma cero. Se dice que una variedad casi simpléctica (M,Ω) es *casi paraHermítica* si su fibrado tangente se descompone en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos.

Inducido por la descomposición $TM = L \oplus L'$, el campo de tensores $\mathfrak{J}$ de tipo $(1,1)$ definido por $\mathfrak{J} = \sigma_L - \sigma_{L'}$ (siendo σ_L y $\sigma_{L'}$ las proyecciones de TM sobre L y L' respectivamente) determina una estructura casi producto en M, de tal forma que $\Omega(\mathfrak{J}X,\mathfrak{J}Y) = -\Omega(X,Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre la variedad. Dado que las dimensiones de las distribuciones correspondientes a los autovalores 1 y -1 asociados a $\mathfrak{J}$ coinciden, nos referiremos a $\mathfrak{J}$ como *estructura casi paracompleja*. Definiendo ahora $g(X,Y) = \Omega(\mathfrak{J}X,Y)$, g resulta ser un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ no degenerado sobre M y, además, $g(\mathfrak{J}X,\mathfrak{J}Y) = -g(X,Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M. Así, diremos que $(g,\mathfrak{J})$ define una *estructura casi paraHermítica* en M y nos referiremos a $(M,g,\mathfrak{J})$ como *variedad casi paraHermítica*.

La siguiente identidad muestra la relación existente entre la 2-forma Ω, la integrabilidad de la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$ y la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g:

$$2g((\nabla_X\mathfrak{J})Y,Z) + 3d\Omega(X,Y,Z) + 3d\Omega(X,\mathfrak{J}Y,\mathfrak{J}Z) + g(\mathfrak{J}X,N_{\mathfrak{J}}(Y,Z)) = 0 \tag{1.8}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z sobre M, donde $N_{\mathfrak{J}}$ denota el tensor de Nijenhuis de $\mathfrak{J}$, es decir, $N_{\mathfrak{J}}(X,Y) = [\mathfrak{J}X,\mathfrak{J}Y] - \mathfrak{J}[\mathfrak{J}X,Y] - \mathfrak{J}[X,\mathfrak{J}Y] + \mathfrak{J}^2[X,Y]$. Tal ecuación permite caracterizar las variedades paraKähler por medio del paralelismo de la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$ respecto a la conexión de Levi-Civita de la métrica, $\nabla\mathfrak{J} = 0$ y, al mismo tiempo, establece un cierto paralelismo formal entre el estudio de las estructuras casi Hermíticas y casi paraHermíticas. Al igual que en el caso casi Hermítico, la existencia de una estructura casi paraHermítica restringe la topología de la variedad subyacente que, en particular, ha de ser orientable (véase [16] para más información sobre geometría paraHermítica).

Existen, sin embargo, un buen número de diferencias entre las estructuras casi Hermíticas y casi paraHermíticas, algunas de las cuales son de especial interés en este trabajo. En primer lugar es importante señalar que mientras que las métricas casi Hermíticas pueden ocurrir en cualquier signatura $(2\mu, 2m - 2\mu)$, las métricas casi paraHermíticas han de ser necesariamente de signatura neutra (m, m). Para cada estructura casi paraHermítica $(g, \mathfrak{J})$ existe una 2-forma asociada $\Omega(X,Y) = g(\mathfrak{J}X, Y)$. La 2-forma Ω induce una orientación en M que coincide con la orientación de la estructura casi paracompleja. La 2-forma Ω define una sección de $\Lambda^2(M)$ verificando $\|\Omega\|^2 = -2$ y, recíprocamente, para cada sección Ω de $\Lambda^2(M)$ de norma $\|\Omega\|^2 = -2$ existe una estructura casi paraHermítica asociada.

Una *variedad paraKähler* es una variedad simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas. Este hecho da lugar a una descomposición del fibrado tangente, TM, en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos, $TM = L \oplus L'$.

La Ecuación (1.8) muestra que las variedades paraKähler están caracterizadas por el paralelismo de la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$. Como consecuencia, los subfibrados Lagrangianos L y L' en que se descompone el fibrado tangente son paralelos. Ese hecho no da lugar a una descomposición local de de Rham de la variedad como producto, dado que la restricción de la métrica a ambos subfibrados es degenerada. Sin embargo, la existencia de distribuciones nulas paralelas indica que la estructura subyacente es la de una variedad de Walker (véase la Sección 1.5 para más información).

El hecho de que la estructura paracompleja de una variedad paraKähler sea paralela ($\nabla\mathfrak{J} = 0$) conlleva una identidad tipo Kähler para la curvatura,

$$R(X, Y, Z, W) = -R(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y, Z, W).$$

Se define la *curvatura seccional paraholomorfa* como la restricción de la curvatura seccional a planos paraholomorfos (i.e., $\mathfrak{J}(\pi) \subset \pi$) no degenerados. Al igual que en el ámbito Kähleriano, la curvatura seccional paraholomorfa determina la curvatura de una variedad paraKähler y esta es constantemente c si y sólo si el tensor curvatura verifica

$$R = -\frac{c}{4}\left(R^0 - R^{\mathfrak{J}}\right),$$

donde el tensor curvatura algebraico $R^{\mathfrak{J}}$ viene dado por

$$R^{\mathfrak{J}}(X, Y, Z, W) = g(\mathfrak{J}X, Z)g(\mathfrak{J}Y, W) - g(\mathfrak{J}Y, Z)g(\mathfrak{J}X, W) + 2g(\mathfrak{J}X, Y)g(\mathfrak{J}Z, W).$$

1.4. Pares simplécticos

Un *par simpléctico* sobre una variedad M de dimensión cuatro es un par de 2-formas cerradas no triviales (ω, η) de rangos constantes y complementarios, de forma que la restricción de ω (resp., η) a las hojas de la foliación dada por el núcleo de η (resp., ω) es una forma simpléctica [4]. Entonces, $\Omega_\pm = \omega \pm \eta$ son formas simplécticas sobre M compatibles con las diferentes orientaciones. De hecho, un par simpléctico puede definirse de manera equivalente por medio de dos formas simplécticas (Ω_+, Ω_-) verificando

$$\Omega_+ \wedge \Omega_- = 0, \qquad \Omega_+ \wedge \Omega_+ = -\Omega_- \wedge \Omega_- \,. \tag{1.9}$$

Si (Ω_+, Ω_-) es un par simpléctico, entonces los núcleos de $\Omega_+ \pm \Omega_-$ definen foliaciones complementarias con hojas minimales, y del mismo modo cualquier par simpléctico está dado por un par de foliaciones minimales 2-dimensionales complementarias orientadas sobre la variedad [4, 7].

Sea (M, g, J) una variedad casi Hermítica de dimensión cuatro con métrica definida positiva y elijamos una orientación de forma que la 2-forma fundamental $\Omega(X,Y) = g(JX,Y)$ sea autodual. Una estructura casi compleja J' sobre M se llama *opuesta* si la 2-forma $\Omega'(X,Y) = g(J'X,Y)$ es antiautodual. Una variedad casi Hermítica y opuesta casi Hermítica de dimensión cuatro (M, g, J, J') es casi Kähler (es decir, Ω es cerrada) y opuesta casi Kähler (es decir, Ω' es cerrada) si y sólo si (Ω, Ω') es un par simpléctico. La situación es más rica en el caso pseudo-Riemanniano, donde los pares simplécticos se corresponden con estructuras casi Kähler y opuestas casi Kähler, o bien estructuras casi paraKähler y opuestas casi paraKähler, dependiendo de si $\|\Omega_+\|$ y $\|\Omega_-\|$ son espaciales o temporales.

La motivación para el estudio de los pares simplécticos en dimensión cuatro proviene de varias situaciones diferentes. Algunas de ellas son las siguientes:

Una variedad Riemanniana (M, g) se dice *geométricamente formal* si el producto de formas armónicas es armónico. Dado que la armonicidad depende de la estructura Riemanniana y a su vez está relacionada con la topología de la variedad, es esperable que la existencia de métricas Riemannianas geométricamente formales esté vinculada (sobre variedades compactas) a la topología subyacente. En [31] se prueba que una variedad cerrada M de dimensión cuatro, admite una métrica formal si y solo si M es un toro $\mathbb{T}^4$, tiene la cohomología de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{T}^2$ o $b_1(M) = 0$. En este último caso la variedad está equipada con un par simpléctico.

Relacionado con el problema de Goldberg de la integrabilidad de las estructuras casi Kähler de Einstein, recientemente se han considerado otro tipo de condiciones sobre la curvatura y su influencia en la integrabilidad de las estructuras casi Kähler. Generalizando la identidad de la curvatura de las variedades Kählerianas, Gray propuso en [27] el estudio de las variedades casi Hermíticas verificando las condiciones

$$(K_1): \quad R(X,Y,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W),$$

$$(K_2): \quad R(X,Y,Z,W) - R(JX,JY,Z,W) = R(JX,Y,JZ,W) + R(JX,Y,Z,JW),$$

$$(K_3): \quad R(JX,JY,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W).$$

Es bien conocido que $(K_1) \Rightarrow (K_2) \Rightarrow (K_3)$ [27]. Además, la condición (K_2) garantiza la integrabilidad de toda estructura casi Kähler sobre una variedad compacta [3]. Aunque la condición (K_3) no permite garantizar la integrabilidad, su estudio es más natural desde un punto de vista conforme, ya que las variedades estrictamente casi Kähler verificando la identidad (K_3) son aquellas para las que la 2-forma de Kähler es un autovector para el operador curvatura de Weyl.

En cada variedad casi Hermítica (M, g, J) de dimensión cuatro, el operador curvatura de Weyl autodual W^+ descrito en la Ecuación (1.7) se descompone como

$$W^+ = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{6} & W_2^+ \\ (W_2^+)^* & W_3^+ - \frac{\kappa}{12}\,\mathrm{Id} \end{pmatrix},$$

donde κ es la curvatura escalar conforme, W_2^+ corresponde a la parte de W^+ que intercambia los subespacios en la descomposición $\Lambda_+^2 = \mathbb{R}\Omega \oplus [[\Lambda^{0,2}M]]$ y W_3^+ es un endomorfismo autoadjunto de $[[\Lambda^{0,2}M]]$ sin traza. Si la estructura (g, J) es Kähleriana, entonces el operador de Ricci es J-invariante y $W_2^+ = W_3^+ = 0$, por lo que es natural considerar el estudio de las variedades casi Kähler en las que se verifican las condiciones anteriores. En [2] se prueba que una variedad casi Hermítica verifica la identidad (K_3) si y sólo si el operador de Ricci es J-invariante y $W_2^+ = 0$. Si además $W_3^+ = 0$, entonces se verifica la condición (K_2) de curvatura.

Toda variedad estrictamente casi Kähler admite una estructura casi Hermítica opuesta en el conjunto donde el tensor de Nijenhuis no se anula. La estructura opuesta asociada a cada variedad estrictamente casi Kähler en dimensión cuatro será casi Kähler siempre y cuando se verifique la identidad de curvatura (K_3), por lo que dichas variedades están equipadas de forma natural con una estructura de par simpléctico.

Suponiendo que una de las estructuras casi Kähler, (g, J) o (g, J'), es Kähler, Apostolov, Armstrong y Drăghici obtuvieron el siguiente resultado de rigidez (véase también [23]):

Teorema 1.1. [2] *Sea (J, J') una estructura estrictamente casi Kähler y opuesta Kähler sobre una variedad Riemanniana (M, g) de dimensión cuatro, con operador de Ricci J-invariante. Entonces, la variedad es localmente isométrica al único espacio 3-simétrico de dimensión cuatro.*

Observación 1.2. Una variedad Riemanniana (M, g) equipada con un campo de isometrías $\theta_p : M \to M$, $p \in M$, de orden tres (es decir, $\theta_p^3 = \mathrm{Id}$) tal que p es un punto fijo aislado de θ_p se llama un *espacio 3-simétrico*. Kowalski probó que hay un único espacio 3-simétrico en dimensión cuatro [32]. Dicho espacio puede ser descrito como un grupo de lie G cuya álgebra de Lie está dada por $\mathfrak{g} = \langle\{e_1, e_2, e_3, e_4\}\rangle$ con corchetes no nulos

$$\begin{aligned}
[e_1, e_3] &= e_1 + 2\alpha e_2, \\
[e_1, e_4] &= \alpha e_1, \\
[e_2, e_3] &= -e_2, \\
[e_2, e_4] &= -2e_1 - \alpha e_2, \\
[e_3, e_4] &= -2\alpha e_3 - 2e_4,
\end{aligned}$$

y la estructura compleja J y la estructura compleja opuesta J' se definen sobre $\mathfrak{g}$ por

$$Je_1 = e_2, \quad Je_3 = e_4, \qquad J'e_1 = e_2, \quad J'e_3 = -e_4.$$

Sea $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ un producto interior sobre $\mathfrak{g}$ de forma que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sea una base ortonormal. Entonces la estructura (J, J') inducida sobre G es estrictamente casi Kähler y opuesta Kähler con operador de Ricci J-invariante para cualquier valor de α, y así un espacio 2-simétrico con curvatura escalar $Sc = -12(\alpha^2 + 1)$.

1.5. Variedades de Walker

Es bien conocido que la existencia de una distribución paralela en una variedad Riemanniana da lugar a una descomposición local de de Rham como producto. Esta propiedad se mantiene en el caso pseudo-Riemanniano si la distribución paralela es no degenerada. El caso en el que la distribución $\mathfrak{D}$ sea degenerada fue estudiado por Walker [37] obteniendo una forma canónica para la métrica. Basándonos en su trabajo diremos que una variedad pseudo-Riemanniana es una *variedad de Walker* si admite una distribución paralela y degenerada $\mathfrak{D}$.

Las métricas de Walker son una clase especial de métricas pseudo-Riemannianas que no tienen análogo Riemanniano. Estas métricas son las responsables de muchas situaciones estrictamente pseudo-Riemannianas: holonomía indescomponible pero no irreducible [6], pp-waves y pr-waves [30], estructuras homogéneas pseudo-Riemannianas degeneradas [35], métricas de Einstein conformemente equivalentes [33], variedades estrictamente conformemente simétricas [20], métricas conformemente llanas con operador de Ricci nilpotente en dos pasos [28], hipersuperficies de Einstein en variedades con curvatura seccional constante y con operador de configuración nilpotente [34], estructuras paraKähler [16, 29], métricas de Osserman no localmente simétricas [8], etc. Nos referimos a [9] para más información sobre estructuras de Walker.

Con anterioridad al trabajo de Walker, se conocía la existencia de formas canónicas para métricas que admiten distribuciones no degeneradas paralelas. En este caso, el tensor métrico, en notación matricial, se expresa en forma canónica como

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz simétrica de orden $r \times r$ cuyos coeficientes son funciones de $(x_1, \dots, x_r)$ y B es una matriz simétrica de orden $(n-r) \times (n-r)$ cuyos coeficientes son funciones de $(x_{r+1}, \dots, x_n)$. Aquí n es la dimensión de M y r es la dimensión de la distribución $\mathfrak{D}$.

El siguiente teorema es central en nuestro trabajo.

Teorema 1.3. [37] *Sea M una variedad de Walker de dimensión n y $\mathfrak{D}$ una distribución paralela y degenerada r-dimensional. Entonces existen coordenadas adaptadas $(x_1, \dots, x_n)$ en M, de tal forma que la métrica viene dada por*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{Id}_r \\ 0 & A & H \\ \mathrm{Id}_r & {}^tH & B \end{pmatrix},$$

donde Id_r *es la matriz identidad de orden $r \times r$ y A, B, H son matrices cuyos coeficientes son funciones de las coordenadas verificando las siguientes condiciones:*

1. *A y B son simétricas de orden $(n-2r) \times (n-2r)$ y $r \times r$ respectivamente. H es de orden $(n-2r) \times r$ y ${}^tH$ representa la matriz traspuesta de H.*

2. A y H son independientes de las coordenadas $(x_1, \ldots, x_r)$*.*

Además, el r-plano nulo paralelo $\mathfrak{D}$ *está localmente generado por los campos de vectores coordenados*

$$\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_r}\}.$$

Siguiendo la terminología de [37], un campo de r-planos $\mathfrak{D}$ se dice *estrictamente paralelo* está generado por r-campos de vectores paralelos.

Teorema 1.4. *Una forma canónica para una variedad pseudo-Riemanniana* (M, g) *de dimensión* n *que admite un campo de planos nulos* $\mathfrak{D}$ *estrictamente paralelo de dimensión* r *está dada por el tensor métrico dado en el Teorema 1.3, donde* B *es independiente de las coordenadas* $(x_1, \ldots, x_r)$*.*

Finalizamos con una observación específica para el caso de dimensión cuatro que será de utilidad posteriormente en este trabajo. En esta situación tomaremos coordenadas (x, y, u, v) y escribiremos la métrica de Walker como

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

donde a, b y c son funciones de las coordenadas (x, y, u, v).

Observación 1.5. [25] Supongamos que una métrica de signatura neutra g sobre $\mathbb{R}^4$ admite una distribución 2-dimensional nula y paralela. Entonces g tiene las siguientes propiedades añadidas:

(1) g posee un campo de vectores nulo paralelo si y sólo si existe un sistema de coordenadas (x, y, u, v) de forma que a, b y c son independientes de x.

(2) g posee un campo de vectores nulo recurrente si y sólo si existe un sistema de coordenadas (x, y, u, v) de forma que b y c son independientes de x.

(3) g posee dos campos de vectores nulos ortogonales paralelos si y sólo si existe un sistema de coordenadas (x, y, u, v) de forma que a, b y c son independientes de x e y.

(4) g posee un campo de vectores nulo recurrente y un campo de vectores nulo paralelo, ortogonales, si y sólo si existe un sistema de coordenadas (x, y, u, v) de forma que a, b y c son independientes de y, y b y c son independientes de x.

(5) g posee dos campos de vectores nulos recurrentes ortogonales si y sólo si existe un sistema de coordenadas (x, y, u, v) de forma que b y c son independientes de x, y a y b son independientes de y.

Capítulo 2

Pares simplécticos indefinidos Kähler

El objetivo de este capítulo es extender el resultado del Teorema 1.1 del caso definido positivo al caso indefinido.

2.1. Estructuras indefinidas casi Kähler y opuestas Kähler

Recordamos en primer lugar el concepto de operador de recursión como la estructura que relaciona pares de 2-formas simplécticas [5]. Dadas 2-formas no degeneradas ω y η sobre una variedad M, el *operador de recursión* es el único campo de tensores no degenerado de tipo $(1,1)$, A, dado por $i_{AX}\eta = i_X\omega$, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

En el caso especial en que (Ω_+, Ω_-) es un par simpléctico, el operador de recursión A define una estructura casi producto (es decir, $A^2 = \mathrm{Id}$, $A \neq \pm\,\mathrm{Id}$) y recíprocamente [5]. Además, los autoespacios $\mathcal{D}_\pm$ correspondientes a los autovalores ± 1 de A son precisamente los núcleos de $\Omega_+ \mp \Omega_-$.

Sea (M, g) una variedad de dimensión cuatro y signatura $(2,2)$, y sea (J, J') una estructura casi Hermítica y opuesta casi Hermítica sobre (M, g). Entonces, el operador de recursión A relacionando las formas de Kähler $\Omega(X,Y) = g(JX,Y)$ y $\Omega'(X,Y) = g(J'X,Y)$ es la estructura casi producto $A = -JJ'$ [7]. Como $JJ' = J'J$, se tiene que $A^2 = \mathrm{Id}$ y se sigue que (g, A) es una estructura casi producto métrica (es decir, $g(AX, AY) = g(X,Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M).

El hecho de que g sea de signatura neutra $(2,2)$ y que las distribuciones $\mathcal{D}_\pm$ asociadas a los autovalores ± 1 de A son J-invariantes muestran que $h_A(X,Y) = g(AX,Y)$ es una métrica Riemanniana sobre M. Además,

$$
\begin{aligned}
h_A(JX, JY) &= g(AJX, JY) \\
&= -g(JJ'JX, JY) = -g(JJ'X, Y) = g(AX, Y) \\
&= h_A(X, Y),
\end{aligned}
$$

y procediendo de modo análogo con J', se sigue que (h_A, J, J') es una estructura definida positiva casi Hermítica y opuesta casi Hermítica.

Ahora, las 2-formas de Kähler correspondientes resultan

$$\Omega_A(X,Y) = h_A(JX,Y) = g(AJX,Y) = g(J'X,Y) = \Omega'(X,Y),$$
$$\Omega'_A(X,Y) = h_A(J'X,Y) = g(AJ'X,Y) = g(JX,Y) = \Omega(X,Y).$$

Entonces, (g, J, J') es una estructura casi Kähler y opuesta casi Kähler de signatura $(2,2)$ si y sólo si (h_A, J, J') es una estructura definida positiva casi Kähler y opuesta casi Kähler. Además, (g, J, J') es una estructura casi Kähler y opuesta Kähler de signatura $(2,2)$ si y sólo si (h_A, J, J') es una estructura definida positiva casi Kähler y opuesta Kähler.

Observación 2.1. Debido al carácter indefinido de la métrica, la 2-forma de Kähler y la estructura casi compleja inducen orientaciones opuestas en el caso de signatura $(2,2)$. Por tanto, y contrariamente a lo que sucede en el caso Riemanniano, la forma de Kähler de una estructura casi Hermítica indefinida de dimensión cuatro es antiautodual en vez de autodual.

Ahora, para analizar el carácter J-invariante de los operadores de Ricci de ambas métricas, necesitamos relacionar las curvaturas de la métrica pseudo-Riemanniana g y de la métrica definida positiva asociada h_A. Los tensores curvatura de g y h_A se relacionan en [14] bajo ciertas condiciones de integrabilidad sobre la estructura casi producto A. Si las distribuciones $\mathcal{D}_\pm$ son integrables, entonces los tensores curvatura R_{h_A} y R_g correspondientes a las métricas h_A y g satisfacen

$$R_{h_A}(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_+, \mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-) = R_g(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_+, \mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-),$$
$$R_{h_A}(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_-, \mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+) = -R_g(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_-, \mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+).$$

Denotemos con ρ_{h_A} y ρ_g los tensores de Ricci correspondientes y sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base g-ortonormal de signatura $(++--)$ tal que $\mathcal{D}_+ = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ y $\mathcal{D}_- = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$. Entonces $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es también h_A-ortonormal y calculando el tensor de Ricci se sigue que

$$\begin{aligned}
\rho_g(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-) &= R_g(\mathcal{D}_+, e_1, \mathcal{D}_-, e_1) + R_g(\mathcal{D}_+, e_2, \mathcal{D}_-, e_2) \\
&\quad -R_g(\mathcal{D}_+, e_3, \mathcal{D}_-, e_3) - R_g(\mathcal{D}_+, e_4, \mathcal{D}_-, e_4) \\
&= R_{h_A}(\mathcal{D}_+, e_1, \mathcal{D}_-, e_1) + R_{h_A}(\mathcal{D}_+, e_2, \mathcal{D}_-, e_2) \\
&\quad +R_{h_A}(\mathcal{D}_+, e_3, \mathcal{D}_-, e_3) + R_{h_A}(\mathcal{D}_+, e_4, \mathcal{D}_-, e_4) \\
&= \rho_{h_A}(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-).
\end{aligned}$$

Ahora, si el operador de Ricci Q_g, definido por $\rho_g(X,Y) = g(Q_gX,Y)$, es J-invariante, entonces es A-invariante (pues Q_g es también J'-invariante ya que (g, J') es Kähler). Entonces el operador de Ricci Q_g y la estructura producto A diagonalizan simultáneamente y por tanto se sigue que $\rho_g(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-) = 0$. El cálculo anterior para el tensor de Ricci muestra que $\rho_{h_A}(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-) = 0$ y por tanto el operador de Ricci Q_{h_A}, definido por

$\rho_{h_A}(X,Y) = h_A(Q_{h_A}X,Y)$, es A-invariante, lo que implica el carácter J-invariante pues Q_{h_A} es también J'-invariante.

Resumiendo todo lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.2. *Sea M una variedad de dimensión cuatro. Entonces (g, J, J') es una estructura indefinida casi Kähler y opuesta Kähler sobre M con operador de Ricci J-invariante si y sólo si (h_A, J, J') es una estructura definida positiva casi Kähler y opuesta Kähler sobre M con operador de Ricci J-invariante.*

Ahora, una aplicación directa del Teorema 1.1 y del Lema previo nos lleva a obtener el resultado buscado:

Teorema 2.3. *Sea (M, g) una variedad de dimensión cuatro y sea (J, J') una estructura indefinida estrictamente casi Kähler y opuesta Kähler sobre (M, g) con operador de Ricci J-invariante. Entonces (M, g) es localmente isométrica al espacio 3-simétrico de dimensión cuatro, que se obtiene a partir del único espacio 3-simétrico Riemanniano de dimensión cuatro por medio de la construcción anterior.*

Observación 2.4. La construcción anterior aplicada al espacio 3-simétrico Riemanniano dado en la Observación 1.2 muestra que el operador de recursión $A = -JJ'$ se corresponde con la estructura producto sobre $\mathfrak{g}$ cuyos autoespacios asociados a los autovalores ± 1 son $\mathcal{D}_+ = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ y $\mathcal{D}_- = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$. Así, la correspondiente métrica pseudo-Riemanniana hace a $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de signatura $(+ + - -)$.

Una descripción local en coordenadas de los espacios 3-simétricos anteriores se puede dar de la siguiente forma [15]. Sea (M, g) el espacio $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x, y, u, v) y métrica

$$\begin{aligned} g \;\; = \;\; & \pm[(-x + \sqrt{1 + x^2 + y^2})du \circ du + (x + \sqrt{1 + x^2 + y^2})dv \circ dv - 2ydu \circ dv] \\ & +\lambda[(1 + y^2)dx \circ dx + (1 + x^2)dy \circ dy - 2xydx \circ dy]/(1 + x^2 + y^2), \end{aligned}$$

donde $\circ$ denota el producto simétrico dado por $\xi_1 \circ \xi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 \otimes \xi_2 + \xi_2 \otimes \xi_1)$ y λ es un número real no nulo. Las posibles signaturas para este espacio son $(4, 0)$, $(0, 4)$ y $(2, 2)$ dependiendo esencialmente del signo de λ.

Observación 2.5. Como la forma de Kähler de una variedad Riemanniana casi Hermítica de dimensión cuatro es autodual, $\Lambda^2_+ = \mathbb{R}\Omega + [[\Lambda^{0,2}]]$, entonces la parte autodual del tensor de Weyl puede escribirse por medio de la siguiente descomposición en bloques:

$$W^+ = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{6} & W_2^+ \\ (W_2^+)^* & W_3^+ - \frac{\kappa}{12}\,\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

En [2] se prueba que una variedad de dimensión cuatro estrictamente casi Kähler con operador de Ricci J-invariante verificando $W_2^+ = 0$ y $W_3^+ = 0$ admite una estructura opuesta Kähler y por tanto es locamente isométrica al espacio 3-simétrico dado en la Observación 1.2.

Un resultado análogo no puede esperarse en el caso indefinido. De hecho la existencia de estructuras no homogéneas estrictamente casi Kähler autoduales se sigue fácilmente de [18], sin más que considerar la estructura (g, J) sobre $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x, y, u, v) dada por la métrica

$$g = 2dx \circ du + 2dy \circ dv + \xi(u, v)du \circ du - 4\frac{y}{u+k}du \circ dv$$

y la estructura casi compleja

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2\frac{y}{u+k} & \frac{1}{2}\xi(u,v) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\xi(u,v) & -2\frac{y}{u+k} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

para una función apropiada $\xi(u, v)$, y donde $k \in \mathbb{R}$. De hecho, la única componente no nula del tensor curvatura de Weyl viene dada por $W(\partial_u, \partial_v, \partial_u, \partial_v) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v \partial v}\xi$, lo que muestra la no homogeneidad de la métrica de Walker considerada sin más que elegir como ξ una función arbitraria para la que $\frac{\partial^2}{\partial v \partial v}\xi$ cambie de signo.

Capítulo 3

Pares simplécticos paraKähler

En este último capítulo mostraremos la existencia de estructuras estrictamente casi paraKähler y opuestas paraKähler $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ sobre variedades de dimensión cuatro con operador de Ricci $\mathfrak{J}$-invariante que no son homogéneas, lo que pone de manifiesto las grandes diferencias existentes con el caso indefinido Kähler. Dichas diferencias provienen del hecho de que la métrica asociada h_A vía el operador de recurrencia no es definida positiva (como sucedía en el caso complejo), sino de signatura neutra $(+--+)$.

3.1. Estructuras casi paraKähler y opuestas paraKähler

Recordemos que una variedad paraKähler es una variedad simpléctica que es localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas. Considerando la descomposición de Whitney $TM = L \oplus L'$, existe un campo de tensores de tipo $(1,1)$, $\mathfrak{J} = \sigma_L - \sigma_{L'}$ sobre M, tal que $\mathfrak{J}^2 = \mathrm{Id}$, donde σ_L (respectivamente, $\sigma_{L'}$) es la proyección sobre L (respectivamente, sobre L'). Como L y L' son subfibrados Lagrangianos, la estructura paracompleja $\mathfrak{J}$ satisface $\Omega(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y) = -\Omega(X,Y)$, donde Ω denota la forma simpléctica. Por lo tanto el campo de tensores de tipo $(0,2)$ definido como $g(X,Y) = \Omega(\mathfrak{J}X, Y)$, determina una métrica pseudo-Riemanniana de signatura neutra tal que

$$\mathfrak{J}^2 = \mathrm{Id}, \qquad g(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y) = -g(X,Y), \qquad \nabla\mathfrak{J} = 0,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de g. Es inmediato que los autoespacios asociados a los autovalores ± 1 de $\mathfrak{J}$ definen distribuciones isotrópicas $\mathfrak{D}_\pm$ sobre M que son paralelas (es decir, $\nabla\mathfrak{D}_\pm \subset \mathfrak{D}_\pm$) y por lo tanto la estructura subyacente de toda variedad paraKähler se corresponde con una estructura de Walker [9].

Centrándonos en el caso de dimensión cuatro, una variedad de Walker se dice *estricta* si la distribución isotrópica paralela $\mathfrak{D}$ está generada por vectores paralelos nulos. Una situación más general ocurre cuando $\mathfrak{D}$ está generada por dos campos de vectores recurrentes nulos (es decir, $\nabla U = \sigma \otimes U$ para alguna 1-forma σ). En tal caso existe un sistema de coordenadas (x,y,u,v) de forma que la métrica g se expresa como [25]

$$g = 2dx \circ du + 2dy \circ dv + a(x,u,v)du \circ du + 2c(y,u,v)du \circ dv + b(u,v)dv \circ dv \qquad (3.1)$$

para funciones arbitrarias a, b, c (ver la Observación 1.5).

Lema 3.1. *Sea (M, g) una variedad de Walker de dimensión cuatro con distribución isotrópica paralela $\mathfrak{D}$ generada por dos campos de vectores recurrentes nulos. Si la curvatura escalar de (M, g) es no nula en todo punto, entonces el operador curvatura de Weyl antiautodual define una estructura opuesta paraKähler $\mathfrak{J}_-$ si y sólo si $\mathfrak{D}$ está generada por un campo de vectores recurrente nulo y un campo de vectores paralelo nulo.*

Demostración. Sea (M, g) una variedad de Walker con tensor métrico dado por la Ecuación (3.1) y sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base local ortonormal de signatura $(++--)$ dada por

$$e_1 = \tfrac{1}{2}(1-a)\partial_x + \partial_u, \qquad e_2 = -c\partial_x + \tfrac{1}{2}(1-b)\partial_y + \partial_v,$$
$$e_3 = -\tfrac{1}{2}(1+a)\partial_x + \partial_u, \qquad e_4 = -c\partial_x - \tfrac{1}{2}(1+b)\partial_y + \partial_v.$$

Los espacios de 2-formas autoduales y antiautoduales, $\Lambda^2_\pm = \langle \{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\} \rangle$, están dados por

$$E_1^\pm = \frac{e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4}{\sqrt{2}}, \quad E_2^\pm = \frac{e^1 \wedge e^3 \pm e^2 \wedge e^4}{\sqrt{2}}, \quad E_3^\pm = \frac{e^1 \wedge e^4 \mp e^2 \wedge e^3}{\sqrt{2}}.$$

Además, $\langle E_1^\pm, E_1^\pm \rangle = 1$, $\langle E_2^\pm, E_2^\pm \rangle = -1$ y $\langle E_3^\pm, E_3^\pm \rangle = -1$.

Un cálculo directo [22] muestra que el operador de Weyl antiautodual W^- está dado por

$$W^- = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12}a_{xx} & -\frac{1}{4}c_{yy} & 0 \\ \frac{1}{4}c_{yy} & \frac{1}{6}a_{xx} & -\frac{1}{4}c_{yy} \\ 0 & -\frac{1}{4}c_{yy} & -\frac{1}{12}a_{xx} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

y así tiene autovalores $\{-\frac{1}{12}\tau, \frac{1}{6}\tau, -\frac{1}{12}\tau\}$, donde τ denota la curvatura escalar, $\tau = a_{xx}$. Ahora, se sigue de la Ecuación (3.2) que W^- es diagonalizable si y sólo si $c_{yy} = 0$.

De aquí en adelante asumimos que $c_{yy} = 0$ y $a_{xx} \neq 0$, lo que asegura un autovalor distinguido de W^-, $\frac{1}{6}\tau$, cuyo autoespacio asociado está localmente generado por E_2^-. Como $\langle E_2^-, E_2^- \rangle = -1$, la 2-forma Ω_- dada por $\Omega_- = \sqrt{2}E_2^-$, cuya expresión en coordenadas locales es la siguiente

$$\Omega_- = dx \wedge du - dy \wedge dv + c(y, u, v)dv \wedge du, \tag{3.3}$$

define una estructura casi paraHermítica $(g, \mathfrak{J}_-)$ donde

$$\mathfrak{J}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a(x,u,v) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -b(u,v) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Además, $(g, \mathfrak{J}_-)$ es casi paraKähler (es decir, Ω_- es cerrada) si y sólo si $c_y = 0$, en cuyo caso $\nabla \mathfrak{J}_- = 0$.

Recordemos que la distribución isotrópica paralela de una variedad de Walker de dimensión cuatro está generada por un campo de vectores recurrente nulo y un campo de vectores paralelo nulo si y sólo si el tensor métrico tiene la forma dada en la Ecuación (3.1) con $c_y = 0$ [25], lo que finaliza la demostración. □

Como estamos interesados en estructuras casi paraKähler y opuestas paraKähler ($\mathfrak{J}_+$, $\mathfrak{J}_-$) sobre (M, g), en lo que sigue asumimos que la métrica de Walker dada por la Ecuación (3.1) tiene la expresión local

$$g = 2dx \circ du + 2dy \circ dv + a(x,u,v)du \circ du + 2c(u,v)du \circ dv + b(u,v)dv \circ dv \tag{3.5}$$

con curvatura escalar no nula en todo punto (es decir, $\tau = a_{xx} \neq 0$). Entonces, un cálculo directo muestra que el operador de Ricci asociado tiene la forma

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{xx} & 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{xv} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(a_{xv} - ca_{xx}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto es diagonalizable con autovalores $\{0, 0, \frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}\tau\}$. Además, los autoespacios asociados están dados por

$$\begin{aligned} \ker Q &= \langle \left\{ -\frac{a_{xv}}{a_{xx}}\partial_x + \partial_v, \partial_y \right\} \rangle, \\ \ker\left(Q - \frac{1}{2}\tau \operatorname{Id}\right) &= \langle \left\{ \frac{a_{xv} - ca_{xx}}{a_{xx}}\partial_y + \partial_u, \partial_x \right\} \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte, el operador curvatura de Weyl autodual W^+ está dado por [22]

$$W^+ = \begin{pmatrix} W_{11}^+ & W_{12}^+ & W_{11}^+ + \frac{\tau}{12} \\ -W_{12}^+ & \frac{\tau}{6} & -W_{12}^+ \\ -(W_{11}^+ + \frac{\tau}{12}) & -W_{12}^+ & -(W_{11}^+ + \frac{\tau}{6}) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} &W_{12}^+ = \tfrac{1}{2}(a_{xv} - ca_{xx}), \;\; \text{y} \\ &W_{11}^+ = 2c_{uv} - b_{uu} - a_{vv} + c_v a_x - \tfrac{1}{2}b_u a_x + 2ca_{xv} - \tfrac{1}{12}a_{xx} - c^2 a_{xx}. \end{aligned}$$

Además, tiene autovalores $\{-\frac{1}{12}\tau, \frac{1}{6}\tau, -\frac{1}{12}\tau\}$, donde el autoespacio asociado al autovalor distinguido está dado por

$$\ker\left(W^+ - \frac{1}{6}\tau \operatorname{Id}\right) = \begin{cases} \langle\{-E_1^+ - \frac{\tau}{4W_{12}^+}E_2^+ + E_3^+\}\rangle, & \text{si } W_{12}^+ \neq 0, \;\text{o} \\ \langle\{E_2^+\}\rangle, & \text{si } W_{12}^+ = 0. \end{cases}$$

Lema 3.2. *Sea (M,g) una variedad de Walker de dimensión cuatro con distribución isotrópica paralela $\mathfrak{D}$ generada por un campo de vectores recurrente nulo y un campo de vectores paralelo nulo. Supongamos que la curvatura escalar de (M,g) es no nula en todo punto. Entonces el operador curvatura de Weyl autodual tiene un autovalor distinguido que define una estructura casi paraHermítica $\mathfrak{J}_+$, y las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $W_{12}^+ = 0$,

(ii) el operador de Ricci es $\mathfrak{J}_+$-invariante,

(iii) $\mathfrak{J}_+ = \mathfrak{J}_-$ *en* $\ker\left(Q - \frac{1}{2}\tau\,\mathrm{Id}\right)$ *y* $\mathfrak{J}_+ = -\mathfrak{J}_-$ *en* $\ker Q$*, donde* $\mathfrak{J}_-$ *está dado por la Ecuación (3.4).*

Además, cualquiera de las condiciones anteriores implica que el tensor curvatura es $\mathfrak{J}_+$-invariante (es decir, $\mathfrak{J}_+^* R = R$).

Demostración. Para demostrar la equivalencia entre (i) y (ii), en primer lugar supongamos que $W_{12}^+ \neq 0$. Entonces, la estructura casi paraHermítica definida por el autovalor distinguido de W^+ está dada por

$$
\begin{aligned}
\Omega_+ \;=\;& -16\frac{W_{12}^+}{\tau}dy\wedge dx - du\wedge dx - 8b\frac{W_{12}^+}{\tau}dv\wedge dx \\
& +8a\frac{W_{12}^+}{\tau}du\wedge dy - (1-16c\frac{W_{12}^+}{\tau})dv\wedge dy \\
& -\frac{2W_{12}^+ + 4W_{12}^+ a\,b - a_{xv}}{\tau}dv\wedge du.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Ahora un cálculo largo pero directo muestra que el operador de Ricci no es nunca $\mathfrak{J}_+$-invariante (pues la invariancia se da si y sólo si $W_{12}^+ = 0$). Recíprocamente, suponiendo que $W_{12}^+ = 0$, o equivalentemente $c(u,v) = \frac{a_{xv}}{a_{xx}}$, se tiene que E_2^+ es un autovector del operador curvatura de Weyl autodual correspondiente al autovalor distinguido $\frac{1}{6}\tau$. Así, permite definir una estructura casi paraHermítica $\Omega_+ = \sqrt{2}E_2^+$, dada en coordenadas locales por

$$
\Omega_+ = dx\wedge du + dy\wedge dv - \frac{a_{xv}}{\tau}du\wedge dv. \tag{3.7}
$$

Ahora se sigue que Ω_+ es cerrada y así $(g,\mathfrak{J}_+)$ es una estructura casi paraKähler, donde

$$
\mathfrak{J}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 2\frac{a_{xv}}{a_{xx}} \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}
$$

Un cálculo directo muestra que el operador de Ricci es $\mathfrak{J}_+$-invariante.

A continuación probamos la equivalencia entre (i) y (iii). En primer lugar, si $W_{12}^+ = 0$ y $\mathfrak{J}_+$ y $\mathfrak{J}_-$ están dadas por las Ecuaciones (3.8) y (3.4), entonces satisfacen $\mathfrak{J}_+ = \mathfrak{J}_-$ en

$\ker\left(Q - \frac{1}{2}\tau\,\mathrm{Id}\right)$ y $\mathfrak{J}_+ = -\mathfrak{J}_-$ en $\ker Q$. Recíprocamente, si $\mathfrak{J}_+ = \mathfrak{J}_-$ en $\ker\left(Q - \frac{1}{2}\tau\,\mathrm{Id}\right)$ y $\mathfrak{J}_+ = -\mathfrak{J}_-$ en $\ker Q$, entonces las correspondientes formas paraKähler verifican

$$\Omega_+ = \Omega_- \text{ en } \ker\left(Q - \frac{1}{2}\tau\,\mathrm{Id}\right), \quad \text{y } \Omega_+ = -\Omega_- \text{ en } \ker Q,$$

y $W_{12}^+ = 0$ se sigue de las expresiones de Ω_+ en la Ecuación (3.6) y Ω_- en la Ecuación (3.3).

Finalmente, suponiendo cualquiera de las condiciones (i)–(iii), un cálculo directo muestra que el tensor curvatura es invariante bajo la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}_+$ dada por la Ecuación (3.8) (es decir, $R(X,Y,Z,U) = R(\mathfrak{J}_+X, \mathfrak{J}_+Y, \mathfrak{J}_+Z, \mathfrak{J}_+U)$). □

Observación 3.3. Sea (M,g) una métrica de Walker dada por la Ecuación (3.5) con $W_{12}^+ = 0$. Entonces un cálculo directo muestra que $\mathfrak{J}_+$ dada por la Ecuación (3.8) es integrable (es decir, paraKähler) si y sólo si

$$a_{xx}^2 a_v - a_x a_{xv} a_{xx} - 2a_{xuv}a_{xx} + 2a_{xv}a_{xxu} = 0, \qquad b_u = 0.$$

Observación 3.4. Como aplicación inmediata de los resultados en [22] se sigue que el operador curvatura de Weyl autodual W^+ de cualquier métrica de Walker dada por la Ecuación (3.5) con $W_{12}^+ = 0$ es diagonalizable si y sólo si $W_{11}^+ = -\frac{1}{12}\tau$.

Resumiendo los resultados anteriores, tenemos el siguiente

Teorema 3.5. *Sea (M,g) una variedad de Walker de dimensión cuatro cuya distribución isotrópica paralela $\mathfrak{D}$ está generada por un campo de vectores paralelo y un campo de vectores recurrente. Si la curvatura escalar es no nula en todo punto, entonces $(\mathfrak{J}_+, \mathfrak{J}_-)$ dada por las Ecuaciones (3.8) y (3.4) define una estructura casi paraKähler y opuesta paraKähler sobre (M,g) con operador de Ricci $\mathfrak{J}_+$-invariante si y sólo si $W_{12}^+ = 0$.*

3.2. Ejemplos explícitos no homogéneos

A continuación incluimos ejemplos explícitos de estructuras casi paraKähler y opuestas paraKähler no homogéneas obtenidas como aplicación de la construcción anterior.

Ejemplo 3.6. Sea g una métrica de Walker dada por

$$g = 2dx \circ du + 2dy \circ dv + (\lambda v + a(x,u) + \overline{a}(u))\, du \circ du + b(v) dv \circ dv,$$

para funciones arbitrarias $a(x,u)$, $\overline{a}(u)$, $b(v)$ con $a_{xx} \neq 0$ y $\lambda \neq 0$. Entonces, $(\mathfrak{J}_+, \mathfrak{J}_-)$ dada por

$$\mathfrak{J}_\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda v + a(x,u) + \overline{a}(u) & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm b(v) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$$

define una estructura estrictamente casi paraKähler y opuesta paraKähler con operador de Ricci $\mathfrak{J}_+$-invariante y con 2-formas fundamentales $\Omega_\pm = dx \wedge du \pm dy \wedge dv$.

Además, nótese que la curvatura escalar está dada por $\tau = a_{xx}$, lo que muestra que (M, g) no es homogénea en general. Además, se tiene que los operadores curvatura de Weyl autodual y antiautodual $W^\pm$ son diagonalizables, y por tanto las componentes W_2^+ y W_3^+ en la Observación 2.5 se anulan.

Ejemplo 3.7. Sea g la métrica de Walker dada por

$$g = 2dx \circ du + 2dy \circ dv + (\lambda v + a(x,u) + \overline{a}(u))\, du \circ du + (u + b(v))dv \circ dv,$$

para funciones arbitrarias $a(x,u)$, $\overline{a}(u)$, $b(v)$ con $a_{xx} \neq 0 \neq a_x$ y $\lambda \neq 0$. Entonces, $(\mathfrak{J}_+, \mathfrak{J}_-)$ dada por

$$\mathfrak{J}_\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda v + a(x,u) + \overline{a}(u) & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm u \pm b(v) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$$

define una estructura estrictamente casi paraKähler y opuesta paraKähler con operador de Ricci $\mathfrak{J}_+$-invariante y con 2-formas fundamentales $\Omega_\pm = dx \wedge du \pm dy \wedge dv$. De nuevo la curvatura escalar está dada por $\tau = a_{xx}$, lo que muestra que (M, g) no es homogénea en general. Además, los operadores curvatura de Weyl autodual y antiautodual $W^\pm$ están dados por

$$W^+ = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -a_{xx} - 6a_x & 0 & -6a_x \\ 0 & 2a_{xx} & 0 \\ 6a_x & 0 & 6a_x - a_{xx} \end{pmatrix}, \quad W^- = \frac{a_{xx}}{12}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces se sigue de la Observación 3.4 que W^+ no es diagonalizable pues $a_x \neq 0 \neq a_{xx}$.

Observación 3.8. Los espacios simétricos generalizados de dimensión cuatro fueron clasificados por Černý y Kowalski en [15], mostrando que se corresponden con tres clases diferentes con métrica definida positiva o neutra. Un análisis caso por caso de la estructura de autovalores de los operadores curvatura de Weyl autodual y antiautodual muestra que los ejemplos anteriores no se corresponden con ninguna de las clases en [15]. De hecho, nótese que $W^\pm$ en la construcción previa tienen exactamente los mismos autovalores, que no es el caso de ninguno de los espacios simétricos generalizados de dimensión cuatro.

Observación 3.9. Una variedad pseudo-Riemanniana se dice *semi-simétrica* si el tensor curvatura verifica $R(X,Y) \cdot R = 0$ para todo X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde $R(X,Y)$ actúa sobre R como una derivación. La condición $R(X,Y) \cdot R = 0$ es algebraica en el tensor curvatura y caracteriza completamente los tensores curvatura algebraicos que son realizables como la curvatura de algún espacio simétrico. Por lo tanto, (M, g) es semi-simétrica si y sólo si en cada punto el tensor curvatura coincide con el de un espacio simétrico (posiblemente cambiando de un punto a otro).

Un cálculo directo utilizando el tensor curvatura correspondiente a las métricas en el Ejemplo 3.6 muestra que cualquier variedad de Walker de ese tipo es semi-simétrica. Por el contrario, las métricas en el Ejemplo 3.7 no son nunca semi-simétricas.

3.3. Observaciones sobre el caso homogéneo

Las estructuras casi paraKähler y opuestas paraKähler $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ sobre variedades homogéneas de dimensión cuatro con operador de Ricci $\mathfrak{J}$-invariante fueron investigadas en [13], mostrando que los operadores curvatura autodual y antiautodual se corresponden con uno de los ejemplos siguientes.

En lo que sigue, $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie de dimensión cuatro, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ será una base ortonormal de signatura $(++--)$ y $\Omega_\pm = e^1 \wedge e^3 \pm e^2 \wedge e^4$ son 2-formas casi simplécticas sobre $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 3.10. Consideramos el álgebra de Lie de dimensión cuatro dada por los corchetes no nulos

$$\mathfrak{g}_{(i)} : \begin{cases} [e_1, e_2] = -2\alpha e_3, \\ [e_1, e_4] = \alpha e_1, \\ [e_2, e_4] = -2\alpha e_2, \\ [e_3, e_4] = -\alpha e_3. \end{cases}$$

Entonces (Ω_+, Ω_-) define una estructura estrictamente casi paraKähler y opuesta paraKähler si y sólo si $\alpha \neq 0$. Así, el operador de Ricci está dado por

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha^2 \end{pmatrix},$$

y los operadores curvatura de Weyl autodual y antiautodual están dados por

$$W^+ = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad W^- = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.11. Consideramos el álgebra de Lie de dimensión cuatro dada por los corchetes no nulos

$$\mathfrak{g}_{(ii)} : \begin{cases} [e_1, e_2] = -e_1 - e_3, \\ [e_1, e_4] = e_1 + (\alpha + 2)e_3, \\ [e_2, e_3] = -e_1 - e_3, \\ [e_2, e_4] = 2(\alpha + 1)e_2, \\ [e_3, e_4] = \alpha e_1 - e_3. \end{cases}$$

Entonces (Ω_+, Ω_-) define una estructura estrictamente casi paraKähler y opuesta paraKähler para cualquier valor de α, cuyo operador de Ricci está dado por

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4(\alpha+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4(\alpha+1)^2 \end{pmatrix}.$$

El operador curvatura de Weyl autodual W^+ está dado por

$$W^+ = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\left(\alpha^2 - 4\alpha - 5\right) & 0 & -4(\alpha+1) \\ 0 & \frac{4}{3}(\alpha+1)^2 & 0 \\ 4(\alpha+1) & 0 & -\frac{2}{3}\left(\alpha^2 + 8\alpha + 7\right) \end{pmatrix},$$

y el operador curvatura de Weyl antiautodual está dado por

$$W^- = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(\alpha+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}(\alpha+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}(\alpha+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en este caso W^+ es diagonalizable si y sólo si $\alpha = -1$, en cuyo caso la variedad es llana.

Ejemplo 3.12. Consideramos el álgebra de Lie de dimensión cuatro dada por los corchetes no nulos

$$\mathfrak{g}_{(iii)} : \begin{cases} [e_1, e_2] = -e_1 - e_3, \\ [e_1, e_4] = e_1 + e_3, \\ [e_2, e_3] = -e_1 - e_3, \\ [e_2, e_4] = \alpha e_2 + \alpha e_4, \\ [e_3, e_4] = -e_1 - e_3. \end{cases}$$

Entonces (Ω_+, Ω_-) define una estructura estrictamente casi paraKähler y opuesta paraKähler para cada valor de α. La métrica inducida es autodual (es decir, $W^- = 0$) y Ricci llana. Además, el operador curvatura de Weyl autodual está dado por

$$W^+ = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 0 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

lo que muestra que W^+ es nilpotente en dos pasos (y no llano para cualquier $\alpha \neq 0$).

Observación 3.13. Nótese que la estructura de autovalores de $W^\pm$ en las estructuras casi paraKähler y opuestas paraKähler construidas en la Sección 3.1 no se corresponden con ninguna de las clases anteriores $\mathfrak{g}_{(i)} - \mathfrak{g}_{(iii)}$, lo que muestra que la estructura pseudo-Riemanniana subyacente no puede ser homogénea.

Además, un cálculo directo muestra que ninguno de los ejemplos homogéneos $\mathfrak{g}_{(i)}$ y $\mathfrak{g}_{(ii)}$ puede ser semi-simétrico. Sin embargo, $\mathfrak{g}_{(iii)}$ es un espacio homogéneo semi-simétrico que no es simétrico; corresponde a una variedad de Osserman de dimensión cuatro cuyo operador de Jacobi es nilpotente en dos pasos [9, 22, 24].

Bibliografía

[1] V. Apostolov; Generalized Goldberg-Sachs theorems for pseudo-Riemannian four-manifolds, *J. Geom. Phys.* **27** (1998), 185–198.

[2] V. Apostolov, J. Armstrong, T. Drăghici; Local rigidity of certain classes of almost Kähler 4-manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), 151–176.

[3] V. Apostolov, T. Drăghici, D. Kotschick; An integrability theorem for almost Kähler 4-manifolds, *C. R. Acad. Sci. Paris* **329** (1999), 413–418.

[4] G. Bande, D. Kotschick; The geometry of symplectic pairs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 1643–1655.

[5] G. Bande, D. Kotschick; The geometry of recursion operators, *Comm. Math. Phys.* **280** (2008), 737–749.

[6] L. Bérard Bergery, A. Ikemakhen; Sur L'holonomie des variétés pseudo-Riemanniennes de signature (n, n), *Bull. Soc. Math. France* **125** (1997), 93–114.

[7] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella, Y. Matsushita; Almost complex manifolds with holomorphic distributions, *Rend. Mat. Appl. (7)* **14** (1994), 567–589.

[8] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella, R. Vázquez-Lorenzo; Nonsymmetric Osserman indefinite Kaehler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2763–2769.

[9] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo; *The geometry of Walker manifolds*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics **5**, Morgan & Claypool Publ., 2009.

[10] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, L. Hervella; Geometric realizability of covariant derivative Kähler tensors for almost pseudo-Hermitian and almost para-Hermitian manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.*, a aparecer.

[11] M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, H. Kang, S. Nikcevic; Geometric realizations of Hermitian curvature models, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), 851–866.

[12] M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, E. Merino; Geometric realizations of Kahler and para-Kahler curvature models, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys* **7** (2010), 505–515.

[13] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo; Geometric properties of generalized symmetric spaces, a aparecer.

[14] F. J. Carreras, V. Miquel; On the index form of a geodesic in a pseudoRiemannian almost product manifold, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **35** (1986), 50–57.

[15] J. Černý, O. Kowalski; Classification of generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \leq 4$, *Tensor, N.S* **38** (1982), 256–267.

[16] V. Cruceanu, P. Fortuny, P.M. Gadea; A survey on paracomplex geometry, *Rocky Mount. J. Math.* **26** (1996), 83–115.

[17] M. Dajczer, K. Nomizu; On sectional curvature of indefinite metrics, II *Math. Ann.* **247** (1980), 279–282.

[18] J. Davidov, J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río, Y. Matsushita, O. Muskarov, R. Vázquez-Lorenzo; Almost Kähler Walker 4-manifolds, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1075–1088.

[19] A. Derdziński; Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds in dimension 4, *Comp. Math.* **49** (1983), 405–433.

[20] A. Derdzinski, W. Roter; Projectively flat surfaces, null parallel distributions, and conformally symmetric manifolds, *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 565–602.

[21] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río; A note on the structure of algebraic curvature tensors, *Linear Alg. Appl.* **382** (2004), 271–277.

[22] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo; Four-Dimensional Osserman Metrics with Nondiagonalizable Jacobi Operators, *J. Geom. Anal.* **16** (2006), 39–52.

[23] A. Fino; Almost Kähler 4-dimensional Lie groups with J-invariant Ricci tensor, *Differential Geom. Appl.* **23** (2005), 26–37.

[24] E. García-Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo; *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Lect. Notes Math. **1777**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.

[25] R. Ghanam, G. Thompson; The holonomy Lie algebras of neutral metrics in dimension four, *J. Math. Phys.* **42** (2001), 2266–2284.

[26] P. Gilkey; *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemannian Curvature Tensor*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[27] A. Gray; Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, *Tohoku Math. J.* **28** (1976), 601–612.

[28] K. Honda, K. Tsukada; Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry, *Ann. Global Anal. Geom.* **25** (2004), 253–275.

[29] S. Ivanov, S. Zamkovoy; Parahermitian and paraquaternionic manifolds, *Differential Geom. Appl.* **23** (2005), 205–234.

[30] J. Kerimo; AdS pp-waves, *J. High Energy Phys.* (2005), 025, 18pp.

[31] D. Kotschick; On products of harmonic forms, *Duke Math. J.* **107** (2001), 521–531

[32] O. Kowalski; *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Math. **805**, Springer, New York, 1980.

[33] W. Kühnel, H.-B. Rademacher; Einstein spaces with a conformal group, *Results Math.* **56** (2009), 421–444.

[34] M.A. Magid; Indefinite Einstein hypersurfaces with nilpotent shape operators, *Hokkaido Math. J.* **13** (1984), 241–250.

[35] A. Montesinos-Amilibia; Degenerate homogeneous structures of type $\mathcal{S}_1$ on pseudo-Riemannian manifolds, *Rocky Mountain J. Math.* **31** (2001), 561–579.

[36] F. Tricerri, L. Vanhecke; Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365–398.

[37] A. G. Walker; Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford* **(2) 1** (1950), 69–79.