

ANTÓN CARLOS VÁZQUEZ MARTÍNEZ

GRAFOS ALEATORIOS

136a
2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ANTÓN CARLOS VÁZQUEZ MARTÍNEZ

GRAFOS ALEATORIOS

136a

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2018



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Grafos aleatorios

Antón Carlos Vázquez Martínez

Setembro 2013

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo Fin de Máster realizado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela bajo la dirección de los profesores Fernando Alcalde Cuesta de la Universidad de Santiago de Compostela y Álvaro Lozano Rojo del Centro Universitario de la Defensa.

Índice general

Introducción	5
1. Espacio de Gromov-Hausdorff	7
1.1. Grafos	7
1.2. Espacio de Gromov-Hausdorff	8
1.3. Realización geométrica y laminación	12
1.4. Grafos repetitivos y conjuntos minimales	12
2. Grafos aleatorios	15
2.1. Definiciones	15
2.2. Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon	16
2.3. Percolación de Bernoulli	21
3. Tolerancia a la inserción	25
3.1. Relaciones total y clúster	25
3.2. Tolerancia a la inserción	27
3.3. Probabilidad crítica y clústeres infinitos	28
3.4. Invarianza y ergodicidad de la medida	30
3.5. Grafos aleatorios sin tolerancia a la inserción	31
Bibliografía	35

Introducción

El objetivo de esta memoria es estudiar la noción de *grafo aleatorio* destacando la descripción de dos ejemplos básicos: la envoltura de un grafo repetitivo y la percolación de Bernoulli. De hecho, el propósito final es demostrar que estos dos tipos de grafos aleatorios se distinguen gracias a una propiedad importante, llamada *tolerancia a la inserción*.

Un *grafo aleatorio* es una variable aleatoria cuyo espacio de estados está formado por grafos. Esta noción ha sido introducida por D. Aldous R. Lyons en [2] y estudiada con posterioridad por I. Benjamini y N. Curien en [4]. Una definición equivalente ha sido introducida y estudiada de manera independiente por V. Kaimanovich. Todos estos autores consideran el espacio de las clases de isomorfía de grafos enraizados, que puede escribirse como límite inverso de los grafos finitos de diámetro fijado, como espacio de los posibles estados de un grafo aleatorio. Aquí se sustituye por el espacio de Gromov-Hausdorff formado por los subgrafos de un grafo de Cayley. Se trata de un espacio ultramétrico, dotado de una laminación natural por grafos, descrito por É. Ghys en [7] y estudiado con detalle por E. Blanc y Á. Lozano Rojo en sus respectivas tesis doctorales [5] y [12].

Así pues, en esta memoria, se entenderá que un *grafo aleatorio* es una variable aleatoria con valores en el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} correspondiente al grafo de Cayley G de un grupo de tipo finito F dotado de un sistema finito de generadores S , es decir, una aplicación medible

$$\Theta: (\Omega, P) \rightarrow \mathcal{G}$$

definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, P) con distribución $\mu = \Theta_*P$.

Como primer ejemplo de *grafo aleatorio* se describe la envoltura del *árbol de Kenyon*, un subárbol aperiódico y repetitivo del grafo de Cayley del grupo abeliano \mathbb{Z}^2 . Recordemos que un subgrafo de un grafo de Cayley se dice *aperiódico* si no hay ninguna traslación que lo deje invariante y *repetitivo* si podemos encontrar una copia fiel de cualquier motivo en un entorno suficientemente grande de cualquier punto de manera que es imposible saber dónde se encuentra uno observando únicamente

el entorno. En general, cualquier subgrafo repetitivo H de un grafo de Cayley G determina un subconjunto cerrado y saturado de \mathcal{G} , minimal por inclusión, llamado *envoltura de H* . Recíprocamente, según [5] y [12], cualquier subconjunto minimal de \mathcal{G} se obtiene de este modo.

El segundo ejemplo es la *percolación de Bernoulli* de un grafo de Cayley G con parámetro de permanencia $p \in [0, 1]$, que consiste en borrar aristas con probabilidad $1 - p$ de manera independiente unas de otras. Este tipo de *grafo aleatorio* cumple una importante propiedad conocida como *tolerancia a la inserción*, lo que significa que cualquier familia medible de grafos con medida positiva se puede modificar añadiéndole una arista y seguirá siendo de medida positiva.

El propósito central de la memoria es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1. *Sea $\Theta: (\Omega, P) \rightarrow \mathcal{G}$ un grafo aleatorio con valores en el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} asociado al grafo de Cayley G de un grupo de tipo finito F . Sea X un subconjunto minimal de \mathcal{G} (que se obtiene como envoltura de un subgrafo repetitivo de G). Si la distribución $\mu = \Theta_*P$ es ergódica respecto de la relación \mathcal{R} , tolerante a la inserción y no es atómica, entonces $\mu(X) = 0$.*

Este resultado demuestra que las técnicas propias de la teoría de percolación usadas en [2] y [4] no son válidas para todos los grafos aleatorios, lo que sugiere la necesidad de emplear otras técnicas propias de los sistemas dinámicos en el estudio de los grafos aleatorios.

Capítulo 1

Espacio de Gromov-Hausdorff

1.1. Grafos

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ formado por un conjunto de *vértices* $V \neq \emptyset$ y un conjunto de *aristas* E dotado de una aplicación de E en $V \times V$ que envía cada arista $e \in E$ en un par ordenado $(v_1, v_2) \in V \times V$. Se dice que $v_1 = s(e)$ y $v_2 = r(e)$ son el *origen* y el *final* de e respectivamente. En tal caso, se dirá que los vértices v_1 y v_2 son *vecinos* y se escribe $v_1 \sim v_2$. Se dice que G carece de aristas múltiples si la aplicación de E en $V \times V$ es inyectiva. Si la imagen de la aplicación de E en $V \times V$ es simétrica respecto de la diagonal, puede identificarse la arista e que une v_1 con v_2 con la opuesta e^- que une v_2 con v_1 . En tal caso, se dice que G es un grafo *no orientado*. Se llama *bucle* a cada arista que une un vértice consigo mismo, es decir, si su origen y final coinciden. La *valencia* de un vértice v es el número de aristas, $val(v)$, que unen v con sus vecinos. Se dice que una arista es *terminal* si alguno de sus extremos tiene valencia 1. Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia es finita para cada vértice y de *geometría acotada* si la valencia está uniformemente acotada, es decir, existe una cota válida para todos los vértices. Un grafo es *regular* si todos los vértices tienen la misma valencia.

Un *camino* en un grafo G es una sucesión de aristas e_1, \dots, e_n tal que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para cada $i = 1, \dots, n - 1$. En tal caso, se dirá que el camino que une $s(e_1)$ con $r(e_n)$ tiene *longitud* n . Se llama *ciclo* a todo camino tal que $s(e_1) = r(e_n)$. De manera análoga, puede definirse un *camino infinito*. Se dice que un grafo es *conexo* si dos vértices arbitrarios están unidos por un camino. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos, ni aristas múltiples.

Un grafo G está dotado de una *métrica* natural d de manera que la distancia entre dos vértices es el mínimo de las longitudes de los caminos que los unen. La realización geométrica \mathbf{G} del grafo G puede obtenerse extendiendo la distancia

entre vértices a puntos cualesquiera dotando a cada arista de la métrica que la hace isométrica al intervalo $[0, 1]$ o a la circunferencia S^1 en el caso de un bucle. Un camino *geodésico* es aquel que minimiza la distancia entre sus extremos.

Un camino infinito define una aplicación de $[0, \infty)$ en G . Si es propia (i.e. la imagen recíproca de un compacto es un compacto) se llamará *rayo*. Cuando un rayo minimiza la distancia entre cualquiera de sus puntos se dirá *geodésico*.

Un *grafo enraizado* es un grafo con un vértice fijado, llamado *origen* o *raíz*, que se denota por 0 . En este contexto, dados dos vértices vecinos v y v' , se dice que v' es *hijo* de v y que v es *padre* de v' si $d(v', 0) > d(v, 0)$. Nótese que puede ocurrir que entre dos vértices vecinos no haya relación de parentesco o que dos vértices compartan un hijo. Si G es un grafo enraizado, se denota por G^v al subgrafo formado por un vértice v y todos sus descendientes.

Sea F un grupo finitamente generado y S un sistema finito de generadores. Se supondrá que es simétrico (i.e. $S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\} = S$) y no contiene al elemento neutro $\mathbf{1}$. El *grafo de Cayley* $G = \text{Cay}(F, S)$ es un grafo localmente finito cuyos vértices son los elementos de F y dos vértices g_1 y g_2 están unidos por una arista si y solo si $g_1^{-1}g_2 \in S$. Identificando cada arista con su opuesta, se puede obtener un grafo localmente finito no orientado, que no tiene ni bucles, ni aristas múltiples, aunque en el caso de que S contenga elementos de torsión de orden 2 conviene no identificar la arista correspondiente con su opuesta. Según esta definición, el grafo de Cayley depende tanto del grupo como del sistema de generadores S . En lo que sigue se supondrá siempre no orientado, aunque debe tenerse presente lo comentado sobre la torsión de orden 2. Se llama *longitud* de un elemento $g \in F$ al número mínimo de generadores de S necesarios para escribir g y se define la *distancia de las S -palabras* entre dos elementos g_1 y g_2 de F como

$$d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2).$$

Si se dota a cada arista de una métrica que la haga isométrica al intervalo $[0, 1]$, la métrica d_S sobre F se extiende a una métrica d_S sobre G que hace de éste un espacio métrico conexo por caminos. Se dice que d_S es la *métrica de las S -palabras* sobre G . Nótese que la métrica inducida sobre G por la métrica d_S es igual a la métrica natural d de G .

1.2. Espacio de Gromov-Hausdorff

Sea F un grupo finitamente generado por un sistema de generadores S tal que $S = S^{-1}$ y $\mathbf{1} \notin S$. Sea $G = \text{Cay}(F, S)$ su grafo de Cayley y \mathcal{G} el conjunto de los

subgrafos conexos de G que contienen al elemento neutro, es decir,

$$\mathcal{G} = \{H \subset G \mid H \text{ es conexo y } \mathbf{1} \in H\}.$$

A continuación se dotará de este conjunto de una estructura métrica mediante una distancia con la que dos grafos serán más cercanos cuanto mayor sea la bola centrada en el origen en la que coincidan. Para ello, se definirá la aplicación que toma valores en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dada por

$$R(H, H') = \sup\{N \geq 1 \mid B_H(\mathbf{1}, N) = B_{H'}(\mathbf{1}, N)\}$$

y la función distancia dada por

$$d(H, H') = e^{-R(H, H')}.$$

De hecho, d es una *ultramétrica*, i.e.

$$d(H, H') \leq \max\{d(H, H''), d(H', H'')\}$$

para cada $H, H', H'' \in \mathcal{G}$. Por ser ultramétrica, se deduce la siguiente proposición:

Proposición 1.2.1. *El espacio \mathcal{G} es un espacio totalmente desconexo.*

Demostración. Primero se verá que las bolas abiertas son conjuntos cerrados. Sea $B_{\mathcal{G}}(H_1, r)$ una bola y $H_2 \notin B_{\mathcal{G}}(H_1, r)$. Entonces la bola $B_{\mathcal{G}}(H_2, r)$ no interseca a $B_{\mathcal{G}}(H_1, r)$. En efecto, sea $H_3 \in B_{\mathcal{G}}(H_2, r)$. Como $H_2 \notin B_{\mathcal{G}}(H_1, r)$ se tiene que $r \leq d(H_1, H_2)$. Así que, usando la desigualdad de la ultramétrica

$$r \leq d(H_1, H_2) \leq \max\{d(H_1, H_3), d(H_3, H_2)\}$$

y como $d(H_3, H_2) < r$, se obtiene que $r \leq d(H_1, H_3)$, es decir, $H_3 \notin B_{\mathcal{G}}(H_1, r)$.

Se demuestra ahora que los únicos subespacios conexos son los unitarios. Sea E un subespacio de \mathcal{G} con al menos dos puntos. Sea B una bola que contenga a uno pero no al otro, que existe ya que \mathcal{G} es un espacio métrico. De esta forma, se obtiene una separación no trivial de E dada por B y $E - B$. Por tanto, \mathcal{G} es totalmente desconexo. \square

Proposición 1.2.2. *El espacio \mathcal{G} es compacto.*

Demostración. Sea $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{G} . Como el sistema de generadores S es finito, solo hay una cantidad finita de grafos de diámetro 2. Por tanto puede tomarse una subsucesión $\{H_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $\overline{B_{H_{1,n}}}(\mathbf{1}, 1) = A_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $A_1 \in \mathcal{G}$ de diámetro 2. Ahora, repitiendo el procedimiento anterior, si $\{H_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $\overline{B_{H_{k,n}}}(\mathbf{1}, k) = A_k$

es un grafo en \mathcal{G} de diámetro $2k$, entonces se obtiene una subsucesión $\{H_{k+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{H_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\overline{B}_{H_{k+1,n}}(\mathbf{1}, k+1) = A_{k+1}$ es un grafo en \mathcal{G} de diámetro $2(k+1)$ que contiene a A_k . De esta manera se tiene una sucesión creciente de grafos finitos

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$$

Por construcción de $\{H_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, la unión creciente de los grafos finitos A_k define un grafo $H \in \mathcal{G}$ que es límite de la sucesión diagonal $\{H_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. En efecto, puesto que $\overline{B}_{H_{k,k}}(\mathbf{1}, k) = \overline{B}_H(\mathbf{1}, k) = A_k$, la función $R(H_{k,k}, H) \geq k$ y por consiguiente la distancia $d(H_{k,k}, H) \leq e^{-k}$ tiende a 0. \square

De hecho, en la prueba anterior, se muestra que cualquier grafo infinito es límite de sucesiones de grafos finitos A_k . Para cualquier grafo finito H de diámetro $\delta(H)$, la bola en \mathcal{G} de centro H y radio $< e^{\delta(H)}$ se reduce a H , luego es un punto aislado de \mathcal{G} . Por tanto el conjunto derivado de \mathcal{G} está formado por los grafos infinitos.

Si F es finito, la cardinalidad de \mathcal{G} será finita y en este caso \mathcal{G} será un espacio discreto por lo que se acaba de ver. Si se toma $F = \mathbb{Z}$ con sistema de generadores $S = \pm 1$, el espacio \mathcal{G} es finito numerable. En cualquier otro caso, \mathcal{G} será infinito no numerable gracias al resultado que se verá a continuación.

Proposición 1.2.3. *Si F es infinito, el conjunto derivado de \mathcal{G} es un conjunto de Cantor, salvo si $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$.*

Demostración. Dado que \mathcal{G} es compacto y totalmente desconexo, sólo es necesario probar que su derivado es perfecto, i.e. carece de puntos aislados. Según la observación anterior, cualquier grafo infinito H es límite de los grafos finitos $\overline{B}_H(\mathbf{1}, n)$. Para construir grafos infinitos convergentes a H se pueden añadir rayos a estos grafos finitos. De manera más precisa, fijado $n \in \mathbb{N}$, se escoge un rayo $\varepsilon_n \subset \mathcal{G}$ que interseque a $\overline{B}_H(\mathbf{1}, n)$ en un único punto a distancia n de $\mathbf{1}$. Dado que F es infinito dichos rayos siempre existen. Se ha construido por tanto una sucesión de grafos infinitos $H_n^{\varepsilon_n} = \overline{B}_H(\mathbf{1}, n) \cup \varepsilon_n$ que obviamente converge a H . Además, los rayos ε_n se pueden escoger de forma que los grafos $H_n^{\varepsilon_n}$ sean distintos de H , salvo en el caso de $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$. En efecto, sean H y $n \in \mathbb{N}$ tales que dado cualquier camino ε con las propiedades exigidas se tenga que $H_n^\varepsilon = H$. En estas condiciones todos los caminos ε serán el mismo. Así que la valencia en G de cualquier vértice de ε ha de ser 2. Pero como F actúa por automorfismos sobre G , todos sus vertices tendrán valencia 2 y G será una recta. En consecuencia, $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$. \square

El espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} puede obtener como cociente del espacio

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{(H, g) \mid g \in H \subset G\},$$

dotado de la pseudométrica

$$\tilde{d}((H, g), (H', g')) = e^{-\tilde{R}((H, g), (H', g'))},$$

donde

$$\tilde{R}((H, g), (H', g')) = \sup\{N \geq 1 \mid \exists g'' \in F : B_H(g, N) = B_{H'g''}(g'g'', N)\},$$

y la bola $B_{H'g''}(g'g'', N) = B_{H'}(g', N)g''$ es la imagen de $B_{H'}(g', N)$ mediante la traslación por la derecha por $g'' \in F$. Obsérvese que la acción natural por la derecha de F sobre sí mismo induce una acción por la derecha

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} \times F &\longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \\ ((H', g'), g'') &\longmapsto (H'g'', g'g'') \end{aligned}$$

que conserva la pseudométrica \tilde{d} . Resulta claro que la órbita de (H, g) coincide con el conjunto de elementos de $\tilde{\mathcal{G}}$ que están a distancia 0 de (H, g) y por consiguiente la proyección canónica

$$\begin{aligned} p: \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (H, g) &\longmapsto Hg^{-1} \end{aligned}$$

pasa al cociente en una isometría

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}/F &\longrightarrow \mathcal{G} \\ [H, g] &\longmapsto Hg^{-1} \end{aligned}$$

cuando se dota a $\tilde{\mathcal{G}}/F$ de la métrica inducida por \tilde{d} y a \mathcal{G} de la métrica definida con anterioridad.

Definición 1.2.4. Sea $\tilde{\mathcal{R}}$ la relación de equivalencia definida sobre $\tilde{\mathcal{G}}$ que consiste en cambiar el punto base g de H por g' sustituyendo (H, g) por (H, g') . Se llama \mathcal{R} a la relación de equivalencia sobre \mathcal{G} inducida $\tilde{\mathcal{R}}$ y dada por

$$H\mathcal{R}H' \Leftrightarrow \exists g \in H : H' = Hg^{-1}.$$

En efecto, la clase

$$\mathcal{R}[H] = p(\tilde{\mathcal{R}}[(H, \mathbf{1})]) = p(\{(H, g) \mid g \in H\}) = \{Hg^{-1} \mid g \in H\}$$

Si se considera el grupo $Iso(H) = \{g \in F \mid Hg^{-1} = H\}$, llamado *isotropía de H* , cada clase $\mathcal{R}[H]$ se identifica con el conjunto de vértices del grafo $H/Iso(H)$. Gracias a esto, según se demuestra en [7] y [12], el espacio \mathcal{G} se puede realizar como un transversal completa de un espacio foliado por grafos (que pueden sustituirse realmente por superficies de Riemann) y la relación \mathcal{R} como la relación de equivalencia inducida por la foliación sobre \mathcal{G} , véanse también [13] y [14]. Siguiendo una idea de [1], la descripción de \mathcal{G} como cociente de $\tilde{\mathcal{G}}$ permite recuperar fácilmente esta misma estructura foliada.

1.3. Realización geométrica y laminación

Si se sustituye el grafo de Cayley $G = \text{Cay}(F, S)$ por su realización geométrica \mathcal{G} y si se denota por \mathbf{H} la realización geométrica de cualquier subgrafo conexo H de G , entonces se puede considerar el subespacio

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{(H, x) \in \mathcal{G} \times \mathbf{G} \mid x \in \mathbf{H}\}$$

de $\mathcal{G} \times \mathbf{G}$ y la acción natural por la derecha

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} \times F &\longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \\ ((H', x'), g'') &\longmapsto (H'g'', x'g''), \end{aligned}$$

donde $x'g''$ pertenece a la arista que une gg'' con $g'g''$ si x' pertenece a la arista que une g con g' . Se dice que el espacio cociente $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}/F$ es la *realización geométrica* del espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} . Se trata de un espacio compacto dotado de una laminación por grafos modelada transversalmente por el espacio 0-dimensional \mathcal{G} . En efecto, para cada $(H, x) \in \tilde{\mathcal{G}}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : B_{\mathcal{G}}(Hg^{-1}, e^{-R}) \times B_{\mathbf{H}g^{-1}}(\mathbf{1}, R) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \\ (H', x') &\longmapsto (H'g, x'g) \end{aligned}$$

define una carta foliada de un entorno abierto \tilde{U} de (H, x) en $\tilde{\mathcal{G}}$, suponiendo que x pertenece a una arista de H con origen en g y tomando $1 < R < 2$. Si se llama $\mathbf{p} : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ a la proyección canónica que envía cada punto (H', x') sobre su órbita $[H', x']$ (identificada con el punto x' de la realización \mathbf{H}' de H' salvo traslación), entonces $\tilde{\varphi}$ induce por paso al cociente una carta foliada

$$\begin{aligned} \varphi : B_{\mathcal{G}}(Hg^{-1}, e^{-R}) \times B_{\mathbf{H}g^{-1}}(\mathbf{1}, R) &\longrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{p}(\tilde{U}) \\ (H', x') &\longmapsto [H'g, x'g] = [H', x']. \end{aligned}$$

Como puede verse en [1], las aplicaciones φ forman un atlas foliado en \mathcal{G} . Como fijado R solo hay un número finito de posibles placas $B_{\mathbf{H}g^{-1}}(\mathbf{1}, R)$ y la transversal \mathcal{G} es compacta, el espacio foliado \mathcal{G} es compacto.

1.4. Grafos repetitivos y conjuntos minimales

Intuitivamente, un grafo será *repetitivo* (o tendrá la *propiedad de isomorfismo local*) si no se puede distinguir en qué punto se encuentra uno observando únicamente los alrededores.

Definición 1.4.1. Dados $H, H' \in \mathcal{G}$, se dirá que $B_H(x, r)$ se embebe fielmente en H' y se escribirá $B_H(x, r) \hookrightarrow H'$ si existe $g \in G$ tal que $B_H(x, r)g = B_{H'}(xg, r) \subset H'$.

Definición 1.4.2. Un grafo $H \in \mathcal{G}$ es *repetitivo* si para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$. Si fijado $r > 0$, existe $R > 0$ tal que $B_H(x, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para cada par de puntos x e $y \in H$, entonces H se dirá *uniformemente repetitivo*.

En la definición anterior, el grafo H se identifica con su realización geométrica y se sobreentiende que las bolas consideradas son abiertas. Obsérvese que el grafo de Cayley del semigrupo \mathbb{N} no es repetitivo ya que, aunque cualquier bola centrada en el origen admite una copia por traslación dentro de cualquier otra bola de radio mayor, la copia no es una bola y por tanto no es fiel.

Teorema 1.4.3. Sea $\Omega(H)$ la envoltura de un elemento H de \mathcal{G} , es decir, la clausura de la clase $\mathcal{R}[H]$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

- (i) H es uniformemente repetitivo.
- (ii) H es repetitivo.
- (iii) $\Omega(H)$ es minimal para la inclusión de envolturas.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Esta implicación es obvia.

(ii) \Rightarrow (iii) Para demostrar que $\Omega(H)$ es minimal, se ha de comprobar que la clase de equivalencia de cualquier elemento $H' \in \Omega(H)$ es densa en $\Omega(H)$. Por una parte, se sabe que $\Omega(H') \subset \Omega(H)$. Luego basta probar que $H \in \Omega(H')$, en cuyo caso $\Omega(H) \subset \Omega(H')$. Para ello, se fija $r > 0$. Por ser H repetitivo, existe $R \geq r$ tal que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$. Puesto que $H' \in \Omega(H)$, existe algún elemento $x \in H$ tal que

$$B_{H'}(\mathbf{1}, R) = B_{Hx^{-1}}(\mathbf{1}, R) = B_H(x, R)x^{-1}.$$

Por otra parte, si se toma $y = x$, la bola $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_H(x, R)$ por hipótesis. En consecuencia,

$$B_H(\mathbf{1}, r)gx^{-1} = B_H(g, r)x^{-1} \subset B_H(x, R)x^{-1} = B_{H'}(\mathbf{1}, R)$$

para algún $g \in G$. Si se llama $h = gx^{-1}$, entonces

$$B_H(\mathbf{1}, r) = B_{H'}(h, r)h^{-1} = B_{H'h^{-1}}(\mathbf{1}, r)$$

y por tanto la distancia de H a $H'h^{-1} \in \mathcal{R}[H']$ es menor que e^{-r} . Puesto que H es límite de trasladados de H' , se concluye que $H \in \Omega(H')$.

(iii) \Rightarrow (ii) Fijado $r > 0$, a cada entero $S > 0$, se le asocia el conjunto

$$U_S = \{H' \in \Omega(H) \mid B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{H'}(\mathbf{1}, S)\}.$$

Resulta inmediato comprobar que estos conjuntos son abiertos, pero además recubren $\Omega(H)$. Para cada elemento $H' \in \Omega(H)$, como $\Omega(H)$ es minimal, existe $x' \in H'$ tal que $B_H(\mathbf{1}, r) = B_{H'}(x', r)x'^{-1}$. Pero ahora está claro que

$$B_{H'}(x', r) \hookrightarrow B_{H'}(\mathbf{1}, S)$$

tomando $S \geq r + d(\mathbf{1}, x')$, con lo que $H' \in U_S$. Por otra parte, resulta obvio que $\{U_S\}_{S>0}$ es monótono creciente con respecto a la inclusión. Por ser $\Omega(H)$ compacto, se deduce que existe $R > 0$ tal que $\Omega(H) = U_R$. Para cada $y \in H$, el árbol trasladado $y^{-1}H$ pertenece a U_R , luego $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{y^{-1}H}(\mathbf{1}, R)$, con lo que se concluye que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$.

(iii) \Rightarrow (i) Se fija $r > 0$ y se considera un punto arbitrario $x \in H$. Como antes, para cada entero $S > 0$, se define el conjunto

$$U_S^x = \{H' \in \Omega(H) \mid B_H(x, r) \hookrightarrow B_{H'}(\mathbf{1}, S)\}$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, se deduce que existe un radio $R(r, x)$ tal que $B_H(x, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$. No obstante, para poder afirmar que H tiene la propiedad de isomorfismo local, se necesita que R no dependa del punto x . Y en efecto, como solo hay un número finito de clases de traslación de bolas $B_H(x, r)$ de radio $r > 0$, existe una familia finita de puntos $\{x_i\}_{i=1}^n$ de H tales que las bolas $B_H(x_i, r)$ representan todas las clases de traslación posibles. Si se toma $R = \max\{R(r, x_i)\}_{i=1}^n$, se tiene que $B_H(x, r) \hookrightarrow B_H(\mathbf{1}, R)$ para cada par $x, y \in H$. \square

Corolario 1.4.4. *Sea $\Omega(H)$ la envoltura de un elemento repetitivo H de \mathcal{G} , entonces todos los grafos de $\Omega(H)$ son repetitivos.*

Demostración. Sea $H' \in \Omega(H)$, se sabe que $\Omega(H') \subset \Omega(H)$. Luego, usando el teorema anterior se concluye el resultado. \square

Capítulo 2

Grafos aleatorios

En este capítulo se introduce el concepto de grafo aleatorio que se ilustra con dos ejemplos fundamentales: el minimal de Ghys-Kenyon y la percolación de Bernoulli.

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Sea \mathcal{G} el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley G . Se llama *grafo aleatorio* a una variable aleatoria con espacio de estados \mathcal{G} , es decir, una aplicación medible

$$\Theta: (\Omega, P) \rightarrow \mathcal{G}$$

definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, P) con distribución $\mu = \Theta_*P$

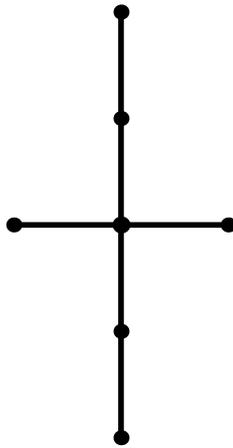
En la definición anterior, puede sustituirse el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley por el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de geometría acotada o simplemente de un grafo localmente finito. En el primer caso, \mathcal{G} seguirá siendo un espacio polaco compacto, mientras que en el segundo sólo será localmente compacto. Por otra parte, la definición dada aquí es algo más restrictiva que la original formulada por D. Aldous y R. Lyons en [2] retomada por I. Banjamini y N. Curien en [4]. En ambos casos \mathcal{G} es el espacio de las clases de isomorfía de grafos enraizados que puede describirse como límite inverso

$$\mathcal{G} = \varprojlim \mathcal{G}_n$$

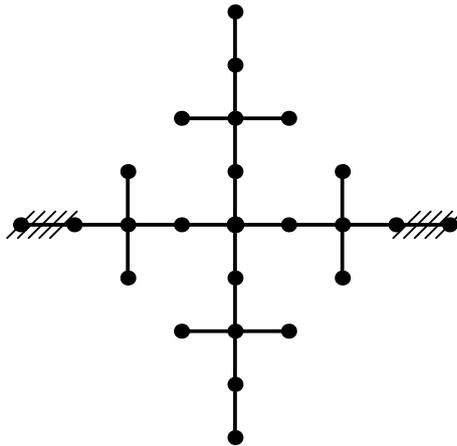
donde \mathcal{G}_n denota el espacio de los grafos finitos de diámetro n .

2.2. Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon

A continuación se describe un subárbol aperiódico y repetitivo de $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$, llamado *árbol de Kenyon*. Su envoltura es un minimal que constituye el espacio de estados un primer ejemplo de grafo aleatorio. Para construirlo, se comienza con la siguiente pieza elemental T_1

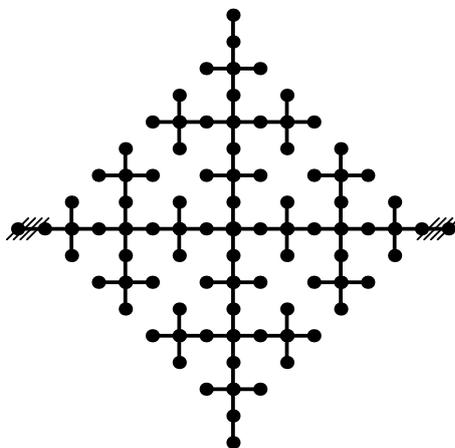


Después se traslada verticalmente por medio del vector $(0, 2)$ y seguidamente se le aplican tres rotaciones de centro 0 y ángulo $\frac{\pi}{2}$, π y $-\frac{\pi}{2}$ respectivamente. Si se eliminan las aristas terminales situadas a izquierda y derecha del segmento horizontal de longitud 2^3 contenido en el árbol resultante, se obtiene el árbol T_2 .



De nuevo, si se traslada T_2 mediante el vector $(0, 4)$, se aplican las mismas rotaciones y se eliminan las aristas terminales del segmento horizontal de longitud 2^4 , se

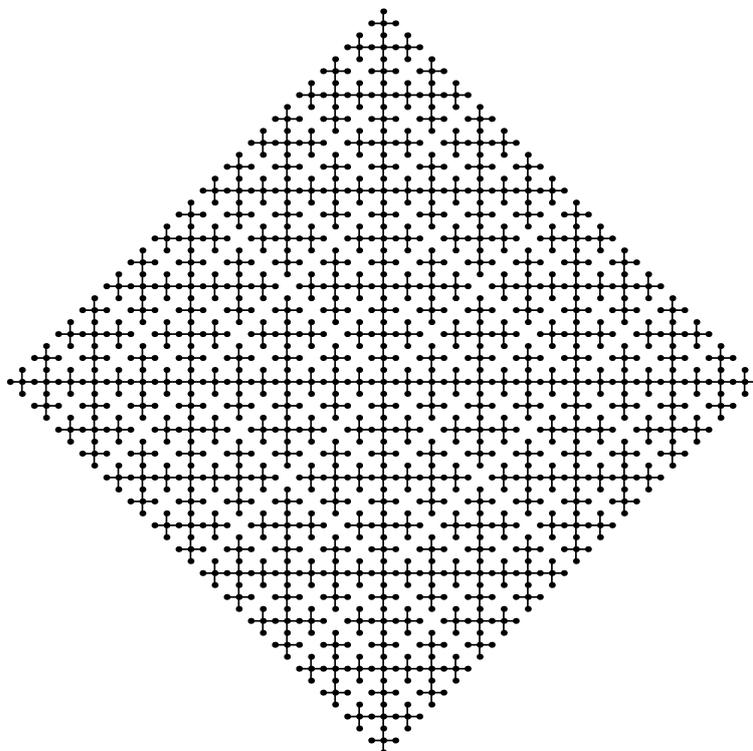
obtiene un árbol T_3 .



Por recurrencia en la etapa n -ésima, se obtiene un árbol finito T_n que corta a los ejes vertical y horizontal en los intervalos $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$ y $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$ respectivamente.

Definición 2.2.1. Se llamará *árbol de Kenyon* al subárbol de $Cay(\mathbb{Z}^2)$

$$T_\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_n.$$



Por construcción, T_∞ es un árbol aperiódico y repetitivo con cuatro finales.

Definición 2.2.2. A la envoltura $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ de T_∞ se le llama *minimal de Ghys-Kenyon*. Mediante el procedimiento de realización geométrica descrito en [7] y [12] se obtiene un espacio compacto, metrizable y separable Ω foliado por grafos para el que Ω es una transversal completa.

Para describir los árboles aleatorios que conforman Ω se emplea una codificación mediante sucesiones formadas por 0, 1, 2 y 3, véase [1] y [12]. Se denota \mathcal{S}_4 el conjunto de las sucesiones formadas por elementos de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, dotado de la topología generada por los cilindros

$$C_{i_0 \dots i_n}^{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \{\beta_0 \cdots \beta_{i_0-1} \alpha_0 \beta_{i_0+1} \cdots \beta_{i_n-1} \alpha_n \beta_{i_n+1} \cdots \mid \beta_i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$$

Para asociarle a cada elemento de \mathcal{S}_4 un elemento de Ω , se usa la función

$$\begin{aligned} r : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{\frac{\pi}{2}ix}, \end{aligned}$$

donde se identifica \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 de la manera usual. Para cada $\alpha = \alpha_0 \cdots \alpha_n \cdots \in \mathcal{S}_4$, se define $\Phi(\alpha) \subset \Omega$ de manera inductiva. Se parte del punto $x_0^\alpha = 0$, se define $x_1^\alpha = r(\alpha_0)$ y se une x_0^α con x_1^α con ayuda de una arista. Se replica este conjunto alrededor de x_1^α mediante los ángulos $\frac{\pi}{2}$, π y $-\frac{\pi}{2}$. Se define T_{α_0} precisamente como este conjunto. Ahora se alarga T_{α_0} en la dirección de $r(\alpha_1)$ mediante una arista de longitud 1, que une uno de los extremos de T_{α_0} con un nuevo punto x_2^α a distancia 2 de x_1^α . Se repite el proceso de réplica alrededor de x_2^α obteniendo así un árbol finito $T_{\alpha_0 \alpha_1}$. Reiterando este proceso se obtiene una familia de árboles encajados $\{T_{\alpha_0 \dots \alpha_n}\}$ y se define

$$T_\alpha = \bigcup_{n \geq 1} T_{\alpha_0 \dots \alpha_n},$$

al que se llamará árbol aleatorio de Ghys-Kenyon. Según puede verse en [12], cualquier elemento de Ω que no pertenezca a la clase de T_∞ y cuyo origen esté situado en un vértice de valencia 1 o 2 puede ser descrito de este modo. De manera más precisa, se tiene:

Proposición 2.2.3 ([1],[12]). *El conjunto minimal de Ghys-Kenyon $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ admite una descomposición como unión disjunta*

$$\Omega = \mathcal{R}[T_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[T_\alpha]$$

Además, la relación de equivalencia inducida sobre $\Omega - \mathcal{R}[T_\infty]$ coincide con la relación de equivalencia cofinal que identifica dos sucesiones $\alpha = \alpha_0 \cdots \alpha_n \cdots$ y $\beta = \beta_0 \cdots \beta_n \cdots$ de \mathcal{S}_4 si existe $n_0 \geq 0$ tal que $\alpha_n = \beta_n$ para cada $n \geq n_0$.

Para probar que Ω es un grafo aleatorio se debe construir una medida de probabilidad invariante por la relación \mathcal{R} , pero antes se necesita describir la σ -álgebra de los borelianos en Ω .

Definición 2.2.4. Se llama *motivo* a cualquier grafo finito $P \in \mathcal{G}$. Se dice que un grafo $H \in \mathcal{G}$ contiene el motivo P alrededor de un vértice $v \in H$ si $\mathbf{1} \in Pv^{-1} \subset H$. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathcal{G}$ se define

$$\Omega_{P,v} = \{H \in \Omega \mid \mathbf{1} \in Pv^{-1} \subset H\}$$

Los motivos cumplen una serie de propiedades de fácil demostración. Si P y P' son dos motivos, es fácil demostrar:

1. si $P \subset P'$, entonces $\Omega_{P,v} \supset \Omega_{P',v}$,
2. $\Omega_{P,v} \cap \Omega_{P',v} = \Omega_{P \cup P',v}$,
3. si $H \in \Omega_{P,v}$ entonces $Hv \in \Omega_{P,\mathbf{1}}$.

Esto reduce el estudio de los conjuntos $\Omega_{P,v}$ a los de la forma $\Omega_{P,\mathbf{1}}$. Además se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.2.5. *Para cualquier motivo P , el conjunto $\Omega_{P,v}$ es un abierto-cerrado de Ω .*

Demostración. Como se acaba de decir, basta ver que $\Omega_{P,\mathbf{1}}$ es un abierto-cerrado. Se verá primero que $\Omega_{P,\mathbf{1}}$ es un abierto de Ω . Si $H \in \Omega_{P,\mathbf{1}}$, como P es finito, se puede tomar $r \in \mathbb{N}$ tal que $P \subset B_H(\mathbf{1}, r)$ y por tanto $B_\Omega(H, e^{-r}) \subset \Omega_{P,\mathbf{1}}$. Para ver que $\Omega_{P,\mathbf{1}}$ es cerrado se tomará una sucesión Ω_n de elementos de $\Omega_{P,\mathbf{1}}$ convergentes a un grafo H . Por definición, dado $r \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{H_n}(\mathbf{1}, r) = B_H(\mathbf{1}, r)$. Luego $\mathbf{1} \in P \subset H$, es decir, $H \in \Omega_{P,\mathbf{1}}$ \square

Nótese que los motivos no bastan para definir una base de la topología de Ω , ya que para definir una bola en Ω es necesario fijar las aristas en un entorno de un punto pero también aquellas aristas que están ausentes del entorno. Para poder describir una bola a partir de abiertos cerrados asociados a los motivos es necesario recurrir a los complementarios. Pero como, cualquier bola puede escribirse como combinación finita de conjuntos $\Omega_{P,\mathbf{1}}$ mediante uniones y diferencias (véase [12]), se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.2.6. *Los abiertos-cerrados $\Omega_{P,\mathbf{1}}$ generan la σ -álgebra de los borelianos de Ω .* \square

Definición 2.2.7. Una medida de probabilidad μ sobre Ω se dice \mathcal{R} -invariante si para cada $g \in F$, la transformación parcial

$$\begin{array}{ccc} \tau_g : \text{dom } \tau_g & \longrightarrow & \text{im } \tau_g \\ & H & \longmapsto Hg^{-1} \end{array}$$

conserva la medida μ , siendo

$$\text{dom } \tau_g = \{H \in \mathcal{G} \mid g \in H\} \text{ y } \text{im } \tau_g = \{H' \in \mathcal{G} \mid g^{-1} \in H'\}.$$

En otros términos, para cada boreliano $B \subset \text{im } \tau_g$, se tiene:

$$\mu(Bg) = \mu(\tau_g^{-1}(B)) = \mu(B).$$

Teorema 2.2.8 ([1],[12]). *El minimal de Ghys-Kenyon Ω posee una medida de probabilidad \mathcal{R} -invariante.*

Demostración. La clase de equivalencia $\mathcal{R}[T_\infty]$ puede identificarse con T_∞ haciendo corresponder a cada vértice $g \in T_\infty$ el grafo $T_\infty g^{-1} \in \mathcal{R}[T_\infty]$. Sea B_n el subconjunto de $\mathcal{R}[T_\infty]$ que se corresponde con la bola $B_{T_\infty}(0, n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Sea μ_n la medida de contar normalizada sobre B_n de manera que $\mu_n(\Omega_{P,1})$ es la fracción del total de “vértices” de B_n que contienen alrededor del $\mathbf{1}$ al motivo P . Como los $\Omega_{P,1}$ generan la σ -álgebra de los borelianos de Ω , basta conocer $\mu_n(\Omega_{P,1})$ para definir μ_n :

$$\mu_n(\Omega_{P,1}) = \frac{\#(B_n \cap \Omega_{P,1})}{\#B_n} = \frac{\#\{v \in B_n \mid P + v \subset T_\infty\}}{\#B_n} =: \frac{A(P, n)}{V(n)}$$

Gracias al teorema de representación de Riesz, como Ω es compacto, el espacio $C_+^*(\Omega)$ de los funcionales lineales positivos sobre $C(\Omega)$ se identifica con el espacio $\mathcal{M}^+(\Omega)$ de las medidas de Borel positivas, regulares y finitas sobre Ω . Considerando en $C(\Omega)$ la topología de la convergencia puntual, esta identificación dota a $\mathcal{M}^+(\Omega)$ de una topología, llamada topología *-débil. Puesto que Ω es compacto, el espacio de las medidas de probabilidad $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ (que corresponde a la esfera unidad en $\mathcal{M}^+(\Omega)$) es secuencialmente compacto. Por lo tanto, substituyendo $\{\mu_n\}$ por una subsucesión, se puede suponer que $\{\mu_n\}$ converge débilmente a una medida de probabilidad μ . El hecho de que $\Omega_{P,1}$ sea abierto-cerrado nos garantiza que

$$\mu_n(\Omega_{P,1}) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Omega_{P,1})$$

y

$$\mu_n(\Omega_{P,1}) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Omega_{P,1})$$

véase [3]. Luego $\mu(\Omega_{P,1})$ coincide con la *tasa de aparición* de P en T_∞ dada por

$$\mu(\Omega_{P,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Omega_{P,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(P, n)}{V(n)}.$$

Tan solo queda ver ahora que μ es \mathcal{R} -invariante. Para ello basta comprobar que las imágenes de las traslaciones mediante elementos de F conservan la medida de los borelianos en los que están definidos, usando una idea similar a la descrita por S. Goodman y J. F. Plante en [8]. Para cada motivo P y cada vértice $v \in P$, se considera la traslación $\tau_v: T \in \Omega_{P,1} \mapsto T - v \in \Omega$ cuya imagen es igual a

$$\text{im } \tau_v = \Omega_{P,1} - v = \{T - v \mid P \subset T\} = \{T - v \mid P - v \subset T - v\} = \Omega_{P-v,1}.$$

Además, si T_∞ contiene al motivo P alrededor del punto $p \in B_{T_\infty}(0, n-r)$, entonces contiene a $P-v$ alrededor del punto $p+v \in B_{T_\infty}(0, n)$, siendo $r \leq d_{T_\infty}(\mathbf{1}, v)$. Luego

$$|\mu_n(\Omega_{P,1} - v) - \mu_n(\Omega_{P,1})| = \frac{|A(P-v, n) - A(P, n)|}{V(n)} \leq \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)}.$$

Puesto que $V(n)$ tiene crecimiento a lo sumo cuadrático, se deduce que

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mu(\Omega_{P-v,1}) - \mu(\Omega_{P,1})| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(\Omega_{P-v,1}) - \mu_n(\Omega_{P,1})| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)} = 0, \end{aligned}$$

con lo que queda probado el teorema. \square

2.3. Percolación de Bernoulli

Sea $G = \text{Cay}(F)$ el grafo de Cayley de un grupo de tipo finito F respecto de un sistema finito de generadores S . El proceso de *percolación de Bernoulli* sobre G con parámetro de permanencia $p \in [0, 1]$ consiste en borrar aristas con probabilidad $1-p$ de manera independiente una de otra. La descripción de este proceso clásico de obtención de grafos aleatorios puede verse en [9] y [15], véanse también [6] y [17].

Definición 2.3.1. Se llama *percolación de Bernoulli* de parámetro p sobre un grafo $G = (V, E)$ al espacio de los coloreados $\Omega = \{0, 1\}^E$, dotado de la topología generada por los cilindros

$$C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i\},$$

donde $e_i \in E$ y $\alpha_i \in \{0, 1\}$ con $i \in \{0, \dots, n\}$, de la σ -álgebra generada por los abiertos de esta topología y de la medida P_p obtenida como producto de las medidas de Bernoulli sobre $\{0, 1\}$ con pesos p y $1 - p$ sobre 1 y 0. De manera más precisa

$$P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = p^m (1 - p)^{(n+1) - m},$$

donde $m = \sum_{i=0}^n \alpha_i$.

Dado un coloreado $\omega \in \Omega$, se dice que una arista $e \in E$ está *abierta* si $\omega(e) = 1$ y *cerrada* si $\omega(e) = 0$. A cada $\omega \in \Omega$, se le asocia un subgrafo $G(\omega) \in \mathcal{G}$ cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de ω . El grafo $G(\omega)$ no es necesariamente conexo y se llama *clúster* a cada una de sus componentes conexas. Para cada $v \in V$, se denotará $C_v(\omega)$ al clúster de $G(\omega)$ que contiene al vértice v . Llamando aplicación clúster a la aplicación

$$\Theta: \Omega \rightarrow \mathcal{G}$$

que le asocia a cada coloreado $\omega \in \Omega$ el clúster $\Theta(\omega) = C_{\mathbf{1}}(\omega)$ del elemento neutro $\mathbf{1} \in G$. Se podrá interpretar los clústeres $C_{\mathbf{1}}(\omega)$ como grafos aleatorios contenidos en el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} . Para justificar esta afirmación hay que probar que la aplicación Θ es medible, pero de hecho se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.3.2. *La aplicación clúster es continua.*

Demostración. Para cualquier abierto básico $B_{\mathcal{G}}(H, e^{-r})$ de \mathcal{G} su imagen inversa

$$\Theta^{-1}(B_{\mathcal{G}}(H, e^{-r})) = C_{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m},$$

donde $\alpha_0, \dots, \alpha_n = 1$ y $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m = 0$, mientras que $e_0, \dots, e_n \in E$ son las aristas pertenecientes a la bola $B_H(\mathbf{1}, r)$ y $e_{n+1}, \dots, e_m \in E$ son las aristas de G que no se encuentran en $B_H(\mathbf{1}, r)$ y que tienen algún extremo en un vértice de $B_H(\mathbf{1}, r - 1)$ (cuando $r \geq 1$, ya que en caso contrario $m = n = 1$). Luego Θ es continua, ya que los cilindros son abiertos en Ω . \square

Ahora se prestará atención a algunas propiedades importantes de la medida de percolación P . Primero, en el caso de trabajar con grafos de Cayley, la acción natural del grupo F sobre el grafo G se extiende de manera natural a una acción de F sobre el espacio de coloreados Ω . En efecto, para cada $\omega \in \Omega$ y cada $g \in F$, se define $\omega g \in \Omega$ por

$$\omega g(e) = \omega(eg^{-1})$$

para cada $e \in E$.

Proposición 2.3.3. *Para todo $p \in [0, 1]$, la medida de probabilidad P_p sobre Ω es invariante respecto de la acción de F , es decir, se tiene:*

$$P_p(Ag) = P_p(A)$$

para todo $g \in F$ y para todo boreliano $A \subset \Omega$.

Demostración. Basta ver que P_p es invariante sobre los cilindros de Ω . Si $g \in F$, se tiene:

$$P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n} g) = P_p(C_{e_{0g^{-1}}, \dots, e_{ng^{-1}}}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = p^m (1-p)^{1-m} = P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})$$

para $e_i \in E$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ y $m = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. □

Definición 2.3.4. Dada una acción de un grupo F sobre un espacio de probabilidad (Ω, μ) , se dice que la medida μ es *ergódica* si cada subconjunto medible de Ω invariante por la acción de F es de medida total o nula.

Proposición 2.3.5. *Para todo $p \in [1, 0]$, la medida de probabilidad P_p sobre Ω es ergódica respecto de la acción del grupo F .*

Demostración. Para probar el resultado se comprueba que todo subconjunto boreliano saturado $A \subset \Omega$ verifica $P_p(A) = P_p(A)^2$ y en consecuencia $P_p(A)$ debe ser igual a 0 o 1. Si B_1, B_2, D son subconjuntos borelianos de Ω , entonces

$$|P_p(B_1 \cap D) - P_p(B_2 \cap D)| \leq P_p[(B_1 \cap D) \Delta (B_2 \cap D)] \leq P_p(B_1 \Delta B_2),$$

donde $B_1 \Delta B_2 = (B_1 \cup B_2) - (B_1 \cap B_2)$. Por otra parte, si A es un subconjunto boreliano saturado de Ω , para cada $\varepsilon > 0$, se considera un cilindro C tal que

$$P_p(A \Delta C) < \varepsilon$$

y un elemento $g \in F$ tal que C y Cg son sucesos independientes. Luego

$$\begin{aligned} |P_p(A) - P_p(A)^2| &= |P_p(A \cap Ag) - P_p(A)^2| \\ &\leq |P_p(A \cap Ag) - P_p(C \cap Ag)| \\ &\quad + |P_p(C \cap Ag) - P_p(C \cap Cg)| \\ &\quad + |P_p(C \cap Cg) - P_p(C)^2| + |P_p(C)^2 - P_p(A)^2| \\ &\leq P_p(A \Delta C) + P_p(Ag \Delta Cg) \\ &\quad + |P_p(C)P_p(Cg) - P_p(C)^2| \\ &\quad + |P_p(C) - P_p(A)|(P_p(C) + P_p(A)) \\ &< 4\varepsilon \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Tolerancia a la inserción

En este capítulo se prestará atención a una propiedad importante que cumplen algunos grafos aleatorios, llamada tolerancia a la inserción. Primero se comprueba que la percolación cumple esta propiedad y después se prueba que un tipo de grafos aleatorios no la cumplen.

3.1. Relaciones total y clúster

En primer lugar, se reformula la percolación en términos similares a los usados al construir \mathcal{G} . Sea $G = (V, E)$ el grafo de Cayley de un grupo de tipo finito F , dotado de un sistema finito de generadores. Sea $\Omega = \{0, 1\}^E$ el espacio de coloreados dotado de la estructura topológica descrita anteriormente. Sea Ω el espacio de coloreados del grafo de Cayley $G = (V, E)$ de un grupo F con un sistema finito de generadores S . Como ya se ha dicho anteriormente la acción natural del grupo F sobre G induce una acción de F sobre Ω dada por

$$\begin{aligned}\Omega \times F &\longrightarrow \Omega \\ (\omega, g) &\longmapsto \omega g\end{aligned}$$

donde

$$\omega g(e) = \omega(eg^{-1})$$

para cada $e \in E$. Luego

$$G(\omega g) = \{e \in E \mid \omega g(e) = 1\} = \{e \in E \mid \omega(eg^{-1}) = 1\} = G(\omega)g$$

y por tanto

$$C_g(\omega g) = C_1(\omega)g$$

para cada $\omega \in \Omega$ y cada $g \in F$.

Definición 3.1.1. Se llama *relación total* sobre Ω a la relación de equivalencia \mathcal{R}^t inducida por la acción de F sobre Ω . Es decir, si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, entonces

$$\omega_1 \mathcal{R}^t \omega_2 \iff \omega_2 = \omega_1 g$$

para algún $g \in F$. Obsérvese que la relación \mathcal{R}^t está generada por las traslaciones $\tau_g: \Omega \rightarrow \Omega$ dadas por

$$\tau_g(\omega)(e) = \omega g(e) = \omega(eg^{-1}),$$

donde $g \in F$.

Se considera el espacio $\Omega \times V$ de los coloreados con punto base (ω, g) y la acción diagonal de F definida por

$$(\omega, g)g' = (\omega g', gg'),$$

donde $\omega \in \Omega$ y $g, g' \in F$. Se llama $\Omega^* = \Omega \times V / F$ al espacio cociente. La relación de equivalencia sobre $\Omega \times V$ cuyas clases son las verticales $\{\omega\} \times V$ formadas por los distintos puntos base asociados a un coloreado ω es invariante por la acción de F . Luego pasa al cociente como una relación de equivalencia sobre Ω^* , que se seguirá denotando \mathcal{R}^t , definida por

$$[\omega, g] \mathcal{R}^t [\omega, g']$$

para cada $g, g' \in V$. Ahora bien, la inclusión natural

$$\omega \in \Omega \mapsto (\omega, \mathbf{1}) \in \Omega \times V$$

induce un homeomorfismo

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \Omega^* = \Omega \times V / F \\ \omega &\longmapsto [\omega, \mathbf{1}] \end{aligned}$$

compatible con las relaciones de equivalencia:

$$\omega_1 \mathcal{R}^t \omega_2 \iff \exists g \in F : \omega_2 = \omega_1 g \iff [\omega_2, \mathbf{1}] = [\omega_1 g, \mathbf{1}] = [\omega_1, g^{-1}] \mathcal{R}^t [\omega_1, \mathbf{1}].$$

Una construcción similar permite definir los clústeres:

Definición 3.1.2. Se define la *relación de equivalencia clúster* \mathcal{R}^{cl} sobre Ω de la siguiente manera: dos coloreados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ son \mathcal{R}^{cl} -equivalentes si y sólo si existe $g \in F$ tal que $\omega_1 g = \omega_2$ y $g^{-1} \in C_1(\omega_1)$. Esta relación está generada por las traslaciones parciales de F

$$\tau_g: \omega \in \text{dom}(\tau_g) \mapsto \omega g \in \text{im}(\tau_g),$$

donde

$$\text{dom}(\tau_g) = \{\omega \in \Omega \mid g^{-1} \in C_1(\omega)\} \text{ y } \text{im}(\tau_g) = \{\omega g \in \Omega \mid \omega \in \text{dom}(\tau_g)\}$$

para cada $g \in F$.

Para justificar esta definición, se considera el subespacio

$$\mathcal{C} = \{(\omega, g) \in \Omega \times V \mid g \in C_1(\omega)\}$$

dotado de la relación de equivalencia cuyas clases son los cústeres con punto base perteneciente al propio clúster. Como antes, la relación es invariante por la acción de F e induce una relación de equivalencia \mathcal{R}^{cl} sobre el cociente $\Omega^* = \mathcal{C}/F = \Omega \times V/F$. De nuevo, usando el homeomorfismo entre Ω y Ω^* , se comprueba que las relaciones de equivalencia \mathcal{R}^{cl} definidas sobre Ω y Ω^* coinciden:

$$\begin{aligned} \omega_1 \mathcal{R}^{cl} \omega_2 &\iff [\omega_1, \mathbf{1}] \mathcal{R}^{cl} [\omega_2, \mathbf{1}] = [\omega_1 g, \mathbf{1}] = [\omega_1, g^{-1}] \text{ para algún } g \in F, \\ &\iff \exists g \in F : \omega_2 = \omega_1 g \text{ con } g^{-1} \in C_1(\omega_1). \end{aligned}$$

Una vez descrita la relación \mathcal{R}^{cl} es natural interesarse por sus propiedades. Se sabe que la medida P_p es invariante y ergódica respecto la acción del grupo F , es decir, respecto de la relación total \mathcal{R}^t . Como \mathcal{R}^{cl} es una subrelación de equivalencia de \mathcal{R}^t y por consiguiente las traslaciones parciales de \mathcal{R}^{cl} lo son de \mathcal{R}^t , se deduce de manera inmediata el siguiente resultado:

Proposición 3.1.3. *Para todo $p \in [0, 1]$, la medida P_p es \mathcal{R}^{cl} -invariante. \square*

3.2. Tolerancia a la inserción

A continuación se describe una propiedad esencial de la percolación de Bernoulli: la tolerancia a la inserción y al borrado, lo que significa que a cualquier conjunto de aristas de medida positiva se le puede añadir o quitar una arista y seguirá siendo de medida positiva.

Definición 3.2.1. Se define la *aplicación de inserción* de una arista $e \in E$ como la aplicación $i_e: \Omega \rightarrow \Omega$ definida por

$$i_e(\omega)(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e' = e, \\ \omega(e') & \text{si } e' \neq e. \end{cases}$$

Definición 3.2.2. Se dice que la medida de percolación P_p es *tolerante a la inserción* si para cada arista $e \in E$ y para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$ tal que $P_p(B) > 0$ se tiene que

$$P_p(i_e(B)) > 0.$$

Análogamente se introducen la aplicación de borrado y la noción de tolerancia al borrado. Nótese que ni la medida de probabilidad P_0 es tolerante a la inserción ni la medida de probabilidad P_1 lo es al borrado. Sin embargo, para el resto de valores de p se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.2.3. *Para cada $p \in (0, 1)$, la medida de probabilidad P_p es tolerante a la inserción.*

Demostración. Sea $e \in E$ la arista a insertar. Para cualquier cilindro $C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$, se tiene la siguiente igualdad:

$$P_p(i_e(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})) = \begin{cases} P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) & \text{si } e_i = e, \alpha_i = 1 \text{ para algún } i \in \{0, \dots, n\} \\ pP_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) & \text{si } e_i \neq e \text{ para todo } i \in \{0, \dots, n\} \\ \frac{p}{1-p}P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) & \text{si } e_i = e, \alpha_i = 0 \text{ para algún } i \in \{0, \dots, n\} \end{cases} .$$

Luego, para cualquier boreliano $B \subset \Omega$, se tiene:

$$P_p(i_e(B)) > mP_p(B) > 0,$$

donde $m = \min\{1, p, \frac{p}{1-p}\} > 0$. □

Corolario 3.2.4. *Para cada $p \in (0, 1)$, la medida de probabilidad P_p es tolerante a la inserción de un número finito de aristas.* □

Ambos resultados pueden enunciarse análogamente para el borrado de aristas.

3.3. Probabilidad crítica y clústeres infinitos

Ahora se recordará brevemente cuál es la probabilidad de que exista al menos una componente infinita en el subgrafo obtenido tras la percolación. Con ese fin, se estudiará primero la probabilidad de que el clúster de un vértice fijado sea infinito.

Definición 3.3.1. Dado un vértice $v \in \mathcal{G}$, se considera la función $\theta_v: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que asigna a cada parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que v pertenezca a un clúster infinito, es decir,

$$\theta_v(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid C_v(\omega) \text{ es infinito}].$$

Usando el proceso de standard coupling (véanse [6], [15] o [17]), se comprueba que la función θ es monótona creciente con respecto a p . Por otra parte, gracias a la tolerancia a la inserción, se verifica que

$$\theta_v(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{v'}(p) = 0$$

para todo par de vértices $v, v' \in V$. En efecto, si $\theta_v(p) > 0$, insertando un camino de aristas finito $\{e_0, \dots, e_n\}$ que una v con v' puede verse que

$$\theta_{v'}(p) \geq P_p(i_{e_0, \dots, e_n}(\{\omega \in \Omega \mid C_v(\omega) \text{ es infinito}\})) > 0.$$

Definición 3.3.2. Sea $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función que asigna a cada parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que exista un clúster infinito, es decir,

$$\theta(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_v(\omega) \text{ infinito}].$$

A partir de la monotonía de la función θ_v , se deduce la monotonía de la función θ . Ahora, aplicando la ley 0-1 de Kolmogorov, se tiene que $\theta(p)$ es igual a 0 o a 1. De esta forma se llega a que tiene que existir un valor crítico $p_c(G)$ a partir del cual la probabilidad de que exista un clúster infinito pasa de ser nula a ser total:

Definición 3.3.3. Se define la *percolación crítica* del grafo G como

$$p_c(G) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 1\}.$$

De esta forma la percolación crítica divide el intervalo $[0, 1]$ en dos fases: la *fase subcrítica* cuando $p < p_c(G)$ y la *fase supercrítica* cuando $p > p_c(G)$.

En particular, en el caso de $G = \text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$, se puede probar que $p_c(G) = \frac{1}{2}$ (véase [9]). Más aún, en la fase supercrítica de $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$, se sabe que existe de manera casi segura un único clúster infinito. Esta última propiedad no se verifica para todos los grafos, que pueden admitir tanto un único clúster infinito como una cantidad infinita de estos (véase [15]):

Teorema 3.3.4. *Sea G un grafo de Cayley. Para cada $p \in [0, 1]$, el número de clústeres infinitos asociado a un coloreado $\omega \in \Omega$ es casi seguro constante e igual a 0, 1 o ∞ .* \square

De hecho, en el caso general y según un resultado de O. Häggström y Y. Peres, existe otro valor crítico $p_u(G) \geq p_c(G)$ a partir del cual se pasa de tener de manera casi segura una infinidad de clústeres infinitos a tener un único clúster infinito (véanse [15] o [17]):

Definición 3.3.5. Sea el grafo G , se define el valor crítico

$$p_u(G) = \inf\{p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \text{Existe un único clúster infinito}] = 1\}$$

Si $p_c(G) \neq p_u(G)$, se deduce del teorema anterior que hay una fase intermedia con $p_c(G) < p < p_u(G)$, llamada *fase de no unicidad*, en la que hay casi seguro una infinidad de clústeres infinitos. Mientras que se denomina *fase de unicidad* cuando hay casi seguro un único clúster infinito con $p > p_u(G)$.

En resumen, el proceso de percolación sobre un grafo de Cayley G se puede dividir en tres fases separadas por los valores críticos $p_c(G)$ y $p_u(G)$: *fase subcrítica* o *de finitud*, *fase de no unicidad* y *fase de unicidad*, estas dos últimas englobadas en la *fase supercrítica*. Nótese que, como en el caso de $G = \mathbb{Z}^2$, la fase de no unicidad puede no existir.

3.4. Invarianza y ergodicidad de la medida

En general, la medida P_p no es ergódica respecto de la relación \mathcal{R}^{cl} , ya que los clústeres finitos forman un conjunto saturado por la relación de equivalencia \mathcal{R}^{cl} cuya medida puede ser positiva distinta de 1. No obstante, puesto que se busca obtener información acerca de los clústeres infinitos, se puede prestar atención sólo a las clases de equivalencia infinitas de la relación clúster. Para ello, se modifica la medida de probabilidad P_p de manera que el peso total recaiga sobre el conjunto boreliano formado por las clases de equivalencia infinitas.

Definición 3.4.1. Sea $\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid C_1(\omega) \text{ es infinito}\}$ el boreliano formado por los coloreados con clúster del elemento neutro infinito. Para cada $p \in (p_c(G), 1]$, se define la medida de probabilidad \tilde{P}_p sobre Ω como

$$\tilde{P}_p(B) = \frac{P_p(B \cap \Omega_\infty)}{P_p(\Omega_\infty)}$$

para cualquier boreliano $B \subset \Omega$.

Se tiene la siguiente proposición de fácil demostración:

Proposición 3.4.2. *Para todo $p \in (p_c(G), 1]$, la medida \tilde{P}_p sobre Ω es tolerante a la inserción e invariante respecto de la relación de equivalencia \mathcal{R}^{cl} . \square*

Respecto a la ergodicidad se tiene el siguiente resultado, probado en [16], aunque enunciado en términos de indistinguibilidad de los clústeres infinitos:

Teorema 3.4.3 ([16]). *Para todo $p \in (p_c(G), 1]$ la medida \tilde{P}_p es ergódica respecto de la relación de equivalencia \mathcal{R}^{cl} .*

Dado que este teorema corresponde a la fase supercrítica, se pueden distinguir dos situaciones diferentes:

i) **Fase de unicidad:** Si $p > p_u(G)$, la ergodicidad de \tilde{P}_p se deduce de la ergodicidad de P_p usando que los conjuntos \mathcal{R}^{cl} -saturados son también conjuntos \mathcal{R}^t -saturados. En efecto, si se supone \tilde{P}_p no ergódica, existirán dos borelianos \mathcal{R}^{cl} -saturados A y B tales que $\tilde{P}_p(A), \tilde{P}_p(B) > 0$ con $A \cap B = \emptyset$. Se puede suponer que no contienen clases de equivalencia finitas. En ese caso, se tiene que

$$\mathcal{R}^t[A] \cap \mathcal{R}^t[B] = \emptyset,$$

ya que si P_p -casi toda clase de equivalencia de \mathcal{R}^t contiene a lo sumo una única clase de equivalencia infinita de \mathcal{R}^{cl} pues $p > p_u(G)$. Por otra parte, se tiene que

$P_p(A), P_p(B) > 0$ ya que $\tilde{P}_p(A), \tilde{P}_p(B) > 0$. Ahora, utilizando la ergodicidad de la medida P_p respecto de \mathcal{R}^t , se deduce que

$$P_p(\mathcal{R}^t[A]) = P_p(\mathcal{R}^t[B]) = 1,$$

obteniendo así una contradicción.

ii) **Fase de no unicidad:** Si $p_c(G) < p < p_u(G)$, entonces hay una cantidad infinita de clústeres infinitos para P_p -casi todo coloreado $\omega \in \Omega$. El argumento anterior falla puesto que los conjuntos \mathcal{R}^{cl} -saturados no son necesariamente \mathcal{R}^t -saturados. En [16] se prueba que los clústeres infinitos en la fase de no unicidad son indistinguibles, lo que significa que la medida \tilde{P}_p es ergódica respecto de \mathcal{R}^{cl} .

3.5. Grafos aleatorios sin tolerancia a la inserción

Anteriormente se han introducido dos ejemplos distintos de grafos aleatorios: los árboles de Ghys-Kenyon y la percolación de Bernoulli. Entre sus características destacan que el primero está formado por grafos repetitivos y el segundo es tolerante a la inserción. De hecho, el propósito de este trabajo es demostrar que estas dos propiedades son a menudo incompatibles:

Teorema 3.5.1. *Sea Ω el espacio de coloreados del grafo de Cayley G de un grupo F de tipo finito y sea \tilde{P}_p la medida de probabilidad definida sobre Ω en la fase supercrítica no trivial con $p_c(G) < p < 1$ según la definición 3.4.1. Sea \mathcal{G} el espacio de Gromov-Hausdorff asociado al grafo de Cayley G . Considérese el grafo aleatorio determinado por la aplicación clúster $\Theta: \Omega \rightarrow \mathcal{G}$. Entonces la medida de la envoltura $X = \overline{\mathcal{R}[H]}$ de cualquier subgrafo repetitivo H de G es nula respecto de la distribución $\mu = \Theta_* \tilde{P}_p$.*

Demostración. Considérense las bolas $B_n = B_G(G, e^{-n})$ y sus imágenes inversas

$$\Omega_n = \Theta^{-1}(B_n) = C_{e_0, \dots, e_n}^{1, \dots, 1},$$

donde e_i son las aristas de la bola $B_G(\mathbf{1}, n)$. En primer lugar, se prueba que $\tilde{P}_p(\Omega_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En el caso $n = 0$, se tiene que $\tilde{P}_p(\Omega_0) = 1$ ya que $\Omega_0 = \Omega$ por ser $B_0 = \mathcal{G}$. Supóngase probado que $\tilde{P}_p(\Omega_n) > 0$. Entonces por la tolerancia a la inserción se sabe que $\tilde{P}_p(\Omega_{n+1}) > 0$ ya que puede pasarse de Ω_n a Ω_{n+1} añadiendo aristas. Por otra parte, como los abiertos Ω_n forman una cadena descendiente de inclusiones, sus saturados también forman otra, a saber

$$\mathcal{R}^{cl}[\Omega_0] \supset \dots \supset \mathcal{R}^{cl}[\Omega_n] \supset \mathcal{R}^{cl}[\Omega_{n+1}] \supset \dots$$

Por la ergodicidad de \tilde{P}_p respecto de la relación \mathcal{R}^{cl} , cualquier saturado $\mathcal{R}^{cl}[\Omega_n]$ es de medida total. Luego

$$\tilde{P}_p\left(\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{R}^{cl}[\Omega_n]\right) = 1.$$

Ahora solo queda probar con la ayuda del corolario 1.4.4 que el conjunto

$$Y = \Theta\left(\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{R}^{cl}[\Omega_n]\right)$$

no puede contener ninguna clase definida por medio de un grafo repetitivo distinto de G , es decir, o bien $X \cap Y = \emptyset$, o bien $X = \overline{\mathcal{R}[G]} = \{G/F\} = \{\mathbf{1}\}$. En ambos casos, se deduce que $\mu(X) = 0$. En efecto, supongamos que Y contiene un elemento representado por un subgrafo repetitivo H de G . Entonces para cada $r > 0$, existe $R > 0$ tal que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$. Pero como H pertenece a la \mathcal{R} -saturación de los conjuntos B_n , existe $y_R \in H$ tal que $B_H(y_R, R)$ coincide con $B_G(\mathbf{1}, R)$ salvo traslación. De esta manera, se tiene que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_G(\mathbf{1}, R)$ lo que implica que no puede faltar ninguna arista de $B_G(\mathbf{1}, r)$ en $B_H(\mathbf{1}, r)$, luego $B_H(\mathbf{1}, r) = B_G(\mathbf{1}, r)$ para todo $r > 0$. Así pues, el grafo $H = G$ y el conjunto $X = \overline{\mathcal{R}[G]} = \{G/F\} = \{\mathbf{1}\}$. Como $p < 1$, se tiene que $\mu(X) = 0$. \square

Para poder enunciar este teorema en un contexto más general es necesario precisar que se entiende por tolerancia a la inserción fuera del ámbito de la percolación. Esta propiedad puede generalizarse siguiendo [2]. En nuestro caso, la distribución de un grafo aleatorio $\Theta: (\Omega, P) \rightarrow \mathcal{G}$ es una medida de probabilidad $\mu = \Theta_*P$ definida sobre el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} asociado a un grafo de Cayley G con conjunto de aristas E .

Definición 3.5.2. Se llama *aplicación de inserción* de una arista $e \in E$ a la aplicación $i_e: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ definida como $i_e(H) = H_e$, donde H_e es el grafo resultante de añadir la arista e al grafo H .

Definición 3.5.3. Se dice que la medida de probabilidad μ sobre \mathcal{G} es *tolerante a la inserción* si para cada arista $e \in E$ y para cada conjunto boreliano $B \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu(B) > 0$, se tiene

$$\mu(i_e(B)) > 0.$$

Teorema 3.5.4. Sea $\Theta: (\Omega, P) \rightarrow \mathcal{G}$ un grafo aleatorio con valores en el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} asociado al grafo de Cayley G de un grupo de tipo finito F . Sea $X = \overline{\mathcal{R}[H]}$ la envoltura en \mathcal{G} de un subgrafo repetitivo H de G . Si la distribución $\mu = \Theta_*P$ es ergódica respecto de la relación \mathcal{R} , tolerante a la inserción y no es atómica, entonces $\mu(X) = 0$.

Demostración. La demostración es completamente similar a la del teorema anterior. Como antes, se consideran las bolas $B_n = B_G(G, e^{-n})$ y usando la tolerancia a la inserción de aristas se prueba que $\tilde{P}_p(\Omega_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De nuevo, los abiertos Ω_n forman una cadena descendente de inclusiones y sus saturados forman otra, a saber,

$$\mathcal{R}^{cl}[\Omega_0] \supset \dots \supset \mathcal{R}^{cl}[\Omega_n] \supset \mathcal{R}^{cl}[\Omega_{n+1}] \supset \dots$$

Igual que antes, por la ergodicidad de \tilde{P}_p respecto de la relación \mathcal{R}^{cl} , cualquier saturado $\mathcal{R}^{cl}[\Omega_n]$ es de medida total y por consiguiente

$$\tilde{P}_p\left(\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{R}^{cl}[\Omega_n]\right) = 1.$$

Retomando el argumento del teorema anterior, se comprueba que el conjunto

$$Y = \Theta\left(\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{R}^{cl}[\Omega_n]\right)$$

no contiene ninguna clase representada por un subgrafo repetitivo de G . De nuevo, o bien $X \cap Y = \emptyset$, o bien $X = \overline{\mathcal{R}[G]} = \{G/F\} = \{\mathbf{1}\}$. En ambos casos, se deduce que $\mu(X) = 0$ usando en esta ocasión el hecho de que μ no es atómica. En efecto, si Y contiene un elemento representado por un subgrafo repetitivo H de G , entonces para cada $r > 0$, existe $R > 0$ tal que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$. Puesto que H pertenece a la \mathcal{R} -saturación de los conjuntos B_n , existe $y_R \in H$ tal que $B_H(y_R, R)$ coincide con $B_G(\mathbf{1}, R)$ salvo traslación. De esta manera, se tiene que $B_H(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_G(\mathbf{1}, R)$ y se deduce que $H = G$. Luego $X = \overline{\mathcal{R}[G]}$ se reduce al cociente $\{G/F\} \equiv \{\mathbf{1}\}$, que es de medida nula por hipótesis. En el otro caso, si $X \cap Y = \emptyset$, también se tiene que $\mu(X) = 0$, con lo que queda probado el teorema. \square

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo et M. Macho Stadler, Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon. *Astérisque*, **323** (2009), 1-16.
- [2] D. Aldous, R. Lyons, Processes on Unimodular Random Networks *Electron. J. Probab.*, **12** (2007), 1454-1508.
- [3] R. B. Ash, *Measure, integration and functional analysis*. Academic Press, New York, 1970.
- [4] I. Benjamini, N. Curien, Ergodic Theory on Stationary Random Graphs. *Electron. J. Probab.*, **17** (2012), 1-20.
- [5] E. Blanc, *Propriétés génériques des laminations*, Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [6] D. Gaboriau, Invariant Percolation and Harmonic Dirichlet Functions. *Geom. Funct. Anal.*, **15** (2005), 1004-1051.
- [7] É. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Syntheses*, **8** (1999), 49-95.
- [8] S. E. Goodman and J. F. Plante, Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geom.*, **14** (1979), 401-407.
- [9] G. Grimmett, *Percolation*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [10] Á. Lozano Rojo, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. *Publ. de la RSME*, **10** (2006), 267-272.
- [11] Á. Lozano Rojo, Espacios foliados definidos por grafos. *Rev. Semin. Iberoam. Mat.*, **IV** (2007), 21-38.
- [12] Á. Lozano Rojo, *Dinámica topológica, teoría ergódica y geometría no conmutativa de grafos repetitivos*. Tesis UPV-EHU, 2008.

-
- [13] Á. Lozano Rojo, An example of a non-uniquely ergodic lamination. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31** (2011), 449-457.
- [14] Á. Lozano Rojo, O. Lukina. Suspensions of Bernoulli shifts. Por aparecer en *Dynamical Systems*.
- [15] R. Lyons, Y. Peres. *Probability on trees and networks*. Cambridge University Press. Disponible en <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/>.
- [16] R. Lyons, O. Schramm, Indistinguishability of percolation clusters. *Ann. Probab.*, **27** (1999), 1806-1836.
- [17] M. Pérez Fernández de Córdoba, *Número de ramificación y percolación de un pseudogrupo*. Tesis USC, 2012.