

MARÍA CRISTINA VILAS TABOADA

TEORÍA DE MORSE DISCRETA

136b
2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MARÍA CRISTINA VILAS TABOADA

TEORÍA DE MORSE DISCRETA

136b

2018

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2018



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Teoría de Morse discreta

María Cristina Vilas Taboada

Xullo 2017

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen	5
Introducción	7
1. Teoría de Morse clásica	9
1.1. Preliminares	9
1.2. Estructura local de las funciones de Morse	13
1.3. Existencia de funciones de Morse	14
1.4. Campo vectorial gradiente	15
1.5. Tipo de homotopía en términos de puntos críticos	17
1.6. Desigualdades de Morse	22
2. Teoría de Morse Discreta	27
2.1. Preliminares	27
2.2. Campo vectorial discreto	34
2.3. Diagrama de Hasse	38
2.4. Colapsos celulares	41
2.5. Tipo de Homotopía en términos de celdas críticas	46
2.6. Cancelación de celdas críticas	51
3. Epílogo	55
3.1. De la teoría de Morse clásica a la discreta	55
3.2. Aplicaciones	61
Bibliografía	65

Resumen

Marston Morse en su artículo “The calculus of variations in the large” de 1934, establece las primeras ideas que permiten, posteriormente, a Milnor en 1963 demostrar la estrecha relación que existe entre los puntos críticos de una función diferenciable sobre una variedad diferenciable y el tipo homotópico de la misma. Todo ello se conoce actualmente como “La teoría de Morse”. El desarrollo de la capacidad de computación viene propiciando desde los años 60 del siglo XX una incorporación de métodos computacionales a la topología algebraica. En particular, dicho movimiento desemboca, en el caso de la Teoría de Morse, en el desarrollo de una versión “discreta” de “La teoría de Morse” a partir de los trabajos de Forman en 1998. El principal objetivo de este trabajo es la presentación, someramente, de la teoría de Morse discreta, las relaciones existentes entre ambas teorías y algunas de sus aplicaciones.

Abstract

There exists a close relation between the critical points of a differentiable function on a differentiable manifold and the Homotopic type of the same as it was proven by Milnor in 1963 following ideas of the Marston Morse’ seminal paper: “The calculus of variations in the large”. All of this is now known as “The Morse Theory”. The development of the computational capacity has been propitiating from the 60s of the twentieth century an incorporation of computational methods to the algebraic topology. In particular, this movement led in 1998 to the Forman’s development of a “discrete” version of “The Morse Theory”. The main objective of this TFM is the brief presentation of the discrete Morse theory, the existing relations between both theories (classical and discrete) and some of their applications.

Introducción

“Todo matemático tiene un arma secreta.
La mía es la teoría de Morse.”
–*Raoul Bott*

El objetivo de la topología diferencial consiste en el estudio de las propiedades globales de las variedades diferenciables. Con ello, no es de extrañar que a lo largo de los primeros treinta años del siglo pasado, los topólogos se centrasen en el desarrollo de métodos algebraicos y combinatoriales para determinar invariantes topológicos que abreviasen el proceso de su cálculo. Es en 1934 cuando Morse [18], en su conocido trabajo sobre el cálculo de variaciones generalizado, introdujo métodos de la topología diferencial, que hoy en día se conocen como la teoría de Morse, aportando técnicas directas en el estudio de la topología de una variedad mediante el análisis de funciones diferenciables definidas sobre la misma. Esto provocó una verdadera revolución en el estudio de la topología de variedades diferenciables al permitir demostrar que la naturaleza de los puntos críticos de funciones diferenciables sobre la variedad reflejaban la complejidad topológica del espacio subyacente. Uno de los clásicos libros que introducen este resultado es el libro de Milnor [17] publicado en 1963 que, por otra parte, es referencia obligada para iniciarse en esta área de la topología diferencial.

Muchos autores consideran que los años 60 son el inicio de la edad de oro de la topología poliedral. Se debe a la incorporación de métodos computacionales a la topología algebraica así como a la introducción de nuevas técnicas para el estudio de viejos problemas, como la conjetura de Poincaré o la clasificación de variedades bajo relaciones más débiles que la de difeomorfismo. Esto incrementó el interés por trasladar conceptos y herramientas usadas en el estudio de modelos continuos a los objetos combinatorios y discretos. En particular, en 1998, Forman [8] introduce una teoría de Morse de naturaleza puramente discreta sobre CW-complejos finitos, convirtiéndose en una herramienta de gran utilidad en la topología computacional. Los resultados obtenidos en esta teoría son análogos a los obtenidos en la teoría de Morse clásica y, además, presentan la misma profundidad geométrica. No obstante, cuentan con la ventaja de mermar sus demostraciones al estar desde una perspectiva combinatorial, así como de obtener un lenguaje mucho más intuitivo.

La teoría de Morse discreta es el objeto de estudio del presente trabajo, aunque también se tratará, someramente, la teoría de Morse clásica constatando la analogía entre ambas teorías. La memoria ha sido estructurada del siguiente modo. En el primer capítulo se

aborda la teoría de Morse clásica comenzando con la introducción de los conceptos básicos tales como la función de Morse, punto crítico y complejo de nivel. Se verá la fundamental propiedad analítica de las funciones de Morse así como su existencia sobre cualquier variedad. Además, se introduce la noción de gradiente como campo vectorial de una función de Morse que permite analizar el tipo de homotopía de una variedad diferenciable en términos de puntos críticos y la posibilidad de obtener una función de Morse con menos puntos críticos. Mencionar que todos los resultados expuestos en este capítulo prescinden de demostraciones, por no ser esta versión de la teoría el objetivo principal del trabajo.

A continuación, el capítulo segundo constituye la parte fundamental del trabajo y contiene una exposición detallada de la teoría de Morse discreta para CW-complejos regulares finitos. En él se abordan los conceptos, análogos a la clásica, de función de Morse discreta, celda crítica y complejo de nivel. Así mismo, se introduce la definición de gradiente de Morse discreto, que puede asociarse a un diagrama de Hasse, y, al igual que en la versión clásica, permite analizar el tipo de homotopía en términos de celdas críticas. El capítulo concluye con la cancelación de celdas críticas presentando las condiciones bajo las que se puede encontrar una función de Morse discreta con menos celdas críticas.

Para finalizar, se incluye un último capítulo, denominado epílogo, en el que se reflexiona acerca de la relación entre ambas teorías, incluyendo ejemplos para su comprensión. Además, se exponen algunas de las muchas aplicaciones en las que contribuye la teoría de Morse discreta.

En la bibliografía con la que termina esta memoria se han incluido las referencias usadas en este trabajo. El libro de Milnor [17] es la referencia clásica en teoría de Morse diferenciable, por lo que la consideramos como referencia por defecto del primer capítulo. En cuanto al desarrollo de la teoría de Morse discreta en el segundo capítulo, las notaciones, definiciones y argumentos que no han sido referenciadas, para no dificultar la lectura con repeticiones, se han tomado de su creador Forman [6] y [8].

Capítulo 1

Teoría de Morse clásica

Una potente herramienta para el estudio de la topología de una variedad diferenciable es la, actualmente denominada, Teoría de Morse. El objetivo de esta teoría, descrito de una manera concisa, se puede decir que es el estudio de la relación entre los puntos críticos de las funciones reales definidas sobre una variedad diferenciable y las propiedades globales de ésta. Así, salvo indicación en contrario, se considerará M una variedad diferenciable y compacta de dimensión n y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

1.1. Preliminares

Comenzamos introduciendo los conceptos iniciales para adentrarnos en la teoría: la función de Morse y el punto crítico que, a partir de ellos, y junto con el concepto de conjunto de nivel, se obtiene información sobre el tipo de homotopía de una variedad diferenciable M .

Definición 1.1. Un punto $p \in M$ se dice *punto crítico* de f si la aplicación diferencial de f en p es nula. En este caso, el valor real $f(p)$ se denomina *valor crítico* de f .

Notemos que, fijado un sistema de coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) en un entorno de p , siendo p el origen, decir que p es punto crítico equivale a decir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Definición 1.2. Sea $p \in M$ un punto crítico de f . Fijado (x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas locales en un entorno de p lo suficientemente pequeño, se dice que el punto crítico p es *no degenerado* si la matriz Hessiana

$$H_{f,p} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (p) \quad \text{es no singular.}$$

Se comprueba fácilmente que tal condición es independiente del sistema de coordenadas seleccionado, teniendo en cuenta que la propiedad de no singularidad de una matriz equivale a que su determinante sea no nulo.

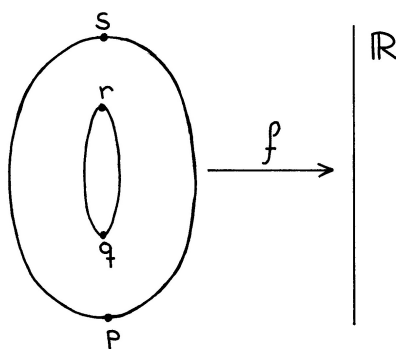
Definición 1.3. Una función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Ejemplo 1.4. 1. La función altura h sobre la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 es un ejemplo sencillo de función de Morse. Está claro que h tiene dos puntos críticos, el polo norte y el polo sur. Considerando la parametrización del hemisferio norte $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ obtenemos que la función altura viene dada por $h(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ donde el polo norte se corresponde con el origen de estas coordenadas. Realizando cálculos elementales, se obtiene la matriz Hessiana:

$$H_{h,(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Así, el determinante de $H_{h,(0,0)}$ es no nulo y, por tanto, el polo norte es un punto crítico no degenerado. Análogamente, obtenemos que el polo sur también es no degenerado.

2. De manera similar, se tiene que la función altura $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre el 2-toro \mathbb{T} situado de forma vertical es una función de Morse con cuatro puntos críticos.: p , q , r y s .



3. Sea M una subvariedad de \mathbb{R}^n . La función $f_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(q) = \|q - p\|^2 \forall q \in M$, es una función de Morse para casi todo punto $p \in \mathbb{R}^n$. Su comprobación se puede ver en Milnor [17] y, con ello, podemos concluir que a pesar de que no toda función diferenciable sobre M es de Morse, éstas abundan.

El sentido en el que un punto crítico p de f es degenerado es el de poseer múltiples direcciones en p tanto de crecimiento como de decrecimiento sobre f . Esto nos lleva al siguiente concepto que nos proporcionará, como se comprueba con el Lema de Morse 1.12, el número de direcciones linealmente independientes y decrecientes en un punto crítico no degenerado sobre una función f .

Definición 1.5. Sea p un punto crítico de f no degenerado. Se define el *índice* de p , que denotaremos por $\lambda_{f,p}$, como el índice de la matriz Hessiana $H_{f,p}$, esto es, el número de autovalores negativos de $H_{f,p}$.

Por comodidad, y salvo confusión, denotaremos el índice de un punto crítico $\lambda_{f,p}$ simplemente por λ .

Para una función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se pueden agrupar los datos de los índices definiendo el siguiente polinomio que, en palabras de Bott [2], es la “medida cuantitativa de Morse” del comportamiento crítico de f .

Definición 1.6. Sea una función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ con n_λ puntos críticos de f de índice λ . Se define el *polinomio de Morse* asociado a f como

$$\mathcal{M}_f(t) = \sum_{\lambda \geq 0} n_\lambda t^\lambda.$$

Los coeficientes de este polinomio se denominan *números de Morse* de f .

A continuación introducimos unos objetos esenciales en la Teoría de Morse, los llamados *conjuntos de nivel*, cuyo estudio, desarrollado en los teoremas 1.25 y 1.28, nos permitirá dotar a una variedad diferenciable, compacta y n -dimensional de una estructura de CW-complejo. Con objeto de que esta memoria tenga el mayor autocontenido posible, recordemos la definición de CW-complejo, que puede verse en Hatcher [10].

Definición 1.7. Un *CW-complejo* es un espacio topológico X que se construye inductivamente de la siguiente manera:

1. El 0-esqueleto $X^{(0)}$ es un conjunto de 0-celdas.
2. Supuesto el $(n-1)$ -esqueleto $X^{(n-1)}$ definido, construimos el n -esqueleto $X^{(n)}$ pegando las n -celdas a $X^{(n-1)}$ a lo largo de sus fronteras. Obtenemos, así, el espacio cociente $X^{(n)}$ con la topología cociente asociada.
3. Si realizamos este proceso un número finito de veces, tenemos $X = X^{(n)}$ para algún $n < \infty$. En caso de tener $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{(n)}$, dotamos a este espacio con la topología débil: $A \subseteq X$ es abierto $\Leftrightarrow A \cap X^{(n)}$ es abierto en $X^{(n)}$ para cada n .

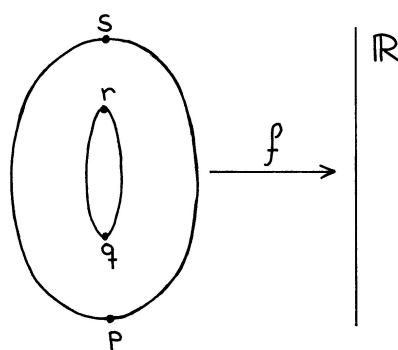
Definición 1.8. Dado X un CW-complejo se dice que $Y \subseteq X$ es un *subcomplejo* de X si es una unión de celdas de X tal que $\bar{\sigma} \subseteq Y$ para cada celda σ de Y .

Definición 1.9. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre una variedad M . Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define el *conjunto de nivel* M_a como el subconjunto cerrado de M dado por $M_a := f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$.

Observación 1.10. Si $a \in \mathbb{R}$ no es un valor crítico de f , esto es, si es un valor regular de f , entonces, por el teorema del valor regular, el conjunto $f^{-1}(a)$ es una subvariedad de M y el conjunto de nivel M_a es una variedad con borde $f^{-1}(a)$.

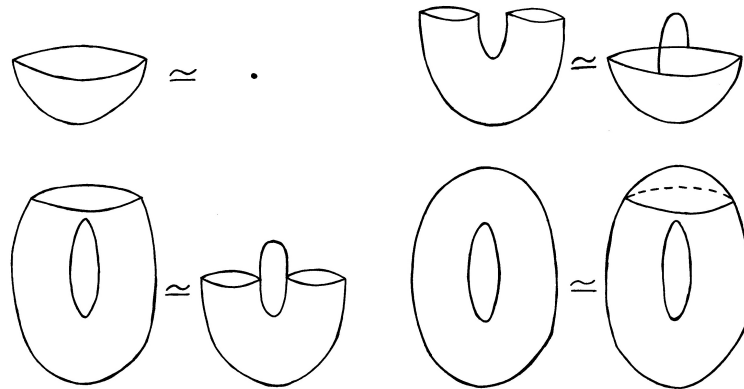
Para ver la relevancia de tales conjuntos recurrimos al ejemplo, obligado, con el que Milnor comienza la introducción de su clásico libro [17].

Ejemplo 1.11. Sea $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura sobre el toro 2-dimensional \mathbb{T} situado en forma vertical. Está claro que f tiene cuatro puntos críticos: el punto p , con índice 0 por ser un mínimo, q y r , ambos con índice 1 por ser puntos de silla, y, finalmente, el punto s , que al ser un máximo tiene índice 2.



Analicemos y comparemos los conjuntos de nivel para cada $a \in \mathbb{R}$ cuyo resultado se muestra en la siguiente imagen.

- Si $a < f(p)$ el conjunto de nivel M_a es el vacío.
- Al pasar el nivel de p , para $f(p) < a < f(q)$, se tiene que M_a es homeomorfo a un disco, por lo que es homotópicamente equivalente a un punto, esto es, a una 0-celda.
- Si se alcanza el nivel q , para $f(q) < a < f(r)$, resulta que el conjunto M_a es homeomorfo a un cilindro, que es homotópicamente equivalente a un disco con una 1-celda pegada.
- Al superar el nivel de r , para $f(r) < a < f(s)$, M_a es el resultado de extraerle un disco al toro, lo que es homotópico a un cilindro con una 1-celda pegada.
- Finalmente, al sobrepasar el nivel s , para $a > f(s)$, se tiene que M_a es el toro completo, que es equivalente homotópico al resultado de pegarle al conjunto de nivel anterior una 2-celda.



\simeq representa el mismo tipo de homotopía.

Por consiguiente, se observa que se puede construir el 2-toro \mathbb{T} con una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda, que se corresponden con los puntos críticos de la función f y sus índices asociados. De este modo, salvo tipo de homotopía, \mathbb{T} se puede obtener pegando celdas a los conjuntos de nivel determinados por los puntos críticos.

En resumen, cabe esperar que los puntos críticos de una función de Morse permitan caracterizar el tipo de homotopía de una variedad.

1.2. Estructura local de las funciones de Morse

El ejemplo anterior muestra una observación clave del papel que juegan los conjuntos de nivel para el propósito de la obtención de información de la topología de una variedad: el tipo de homeomorfismo de M_a cambia únicamente con los valores críticos de la función de Morse y, además, esta alteración depende del índice de los mismos.

La razón por la cual las funciones de Morse son adecuadas para este propósito, a parte de su existencia en abundancia, como se verá en la siguiente sección 1.3, es su simple comportamiento en sus puntos críticos. El resultado expuesto a continuación, comúnmente conocido como *Lema de Morse*, muestra la fundamental propiedad analítica de las funciones de Morse: la capacidad de poder expresarse, localmente, como una forma cuadrática en sus puntos críticos.

Teorema 1.12 (Lema de Morse). *Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre M una variedad diferenciable n -dimensional y $p \in M$ un punto crítico de f con índice λ . Entonces, existe una carta¹ $(\mathcal{U}, (x_1, \dots, x_n))$ centrada en p tal que la expresión de f en esas coordenadas viene dada por:*

$$f = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2.$$

¹En la literatura, la carta proporcionada por el Lema de Morse suele denotarse por “*carta de Morse*”, como puede verse en [1]. Aunque también triunfaron otras asignaciones como “*las coordenadas adaptadas al punto crítico*”, tal y como las define Nicolaescu [19].

Observación 1.13. La existencia de tal entorno del punto crítico, en donde la función f toma la forma de una función cuadrática, permite concluir que los puntos críticos de una función de Morse están aislados. En particular, una función de Morse sobre una variedad compacta tiene una cantidad finita de puntos críticos.

El resultado anterior prueba, como se ha indicado anteriormente, que el índice de un punto crítico mide la cantidad de direcciones decrecientes sobre el punto con respecto a la función f . Así, un punto crítico de f con índice 0 se corresponderá con un mínimo local de f , mientras que uno de índice n con un máximo local de f .

1.3. Existencia de funciones de Morse

En esta sección se muestra como una variedad diferenciable compacta arbitraria admite siempre una función de Morse definida sobre ella. Seguimos los argumentos proporcionados por Matsumoto [15], que no solo probó su existencia sino que comprobó algo más fuerte: la posibilidad de encontrar una función de Morse sobre una variedad diferenciable compacta M lo suficientemente “cerca” de una función diferenciable sobre M prefijada. Definamos qué se entiende por esta cercanía entre dos funciones.

Definición 1.14. Sean $f, g: K \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables sobre K compacto contenido en un entorno coordenado de M . Para $\varepsilon > 0$, se dice que f es una $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -aproximación de g en K si para cada $p \in K$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} |f(p) - g(p)| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| &< \varepsilon, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| &< \varepsilon, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Para una variedad compacta M , se puede tomar una cantidad finita m de entornos coordenados U_i de M tal que $\{U_i\}_{i=1}^m$ es un recubrimiento finito de M . Si para cada i se considera un compacto $K_i \subset U_i$ de modo que $M = \bigcup_{i=1}^m K_i$, entonces se puede dar una definición de aproximación entre dos funciones de manera global sobre la variedad. Este concepto, nos permitirá afirmar que cualquier función diferenciable sobre M puede ser aproximada por una función de Morse.

Definición 1.15. Dadas $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que la función f es una $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -aproximación de g si $f|_{K_i}$ también lo es de $g|_{K_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 1.16. Sea una función diferenciable $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una variedad diferenciable compacta n -dimensional. Entonces existe una función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño f es una $(\mathcal{C}^2, \varepsilon)$ -aproximación de g .

Observación 1.17. Como consecuencia de este teorema se tiene que las funciones de Morse sobre M abundan en el conjunto de las funciones diferenciables sobre M .

Dado que una variedad compacta M arbitraria siempre admite una función diferenciable definida sobre ella, se tiene garantizada la existencia de funciones de Morse sobre M . Y no solo eso, sino que Matsumoto [15] prueba, además, que cualquier función de Morse puede ser aproximada por otra en la que se tiene una correspondencia biunívoca entre sus puntos críticos y valores críticos. A este tipo de funciones Nicolaescu [19] las denominó *no resonantes* y, en consecuencia del teorema anterior, podemos afirmar la existencia de funciones de Morse no resonantes sobre una variedad compacta arbitraria.

1.4. Campo vectorial gradiente

Los principales teoremas de la teoría de Morse, expuestos en la siguiente sección, envuelven una idea esencial en sus demostraciones: el estudio de la dinámica de una función de Morse f . Esta dinámica vendrá determinada por un campo vectorial sobre la variedad, denominado *gradiente como campo vectorial de f* , cuyas líneas de flujo conectarán los puntos críticos de la función de Morse.

Definición 1.18. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\mathcal{U} \subset M$ un entorno coordenado con (x_1, \dots, x_n) sistema de coordenadas. Se define el *campo vectorial gradiente de f* como:

$$X_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Además, se tiene que $X_f \cdot f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \geq 0$, donde $(X_f \cdot f)(p) > 0$ para todo punto p excepto los puntos críticos de f . Así, X_f apunta en la dirección de crecimiento de f .

Definición 1.19. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y V un campo vectorial sobre M . Se dice que V es un *gradiente como campo vectorial de f* si se verifican las siguientes condiciones:

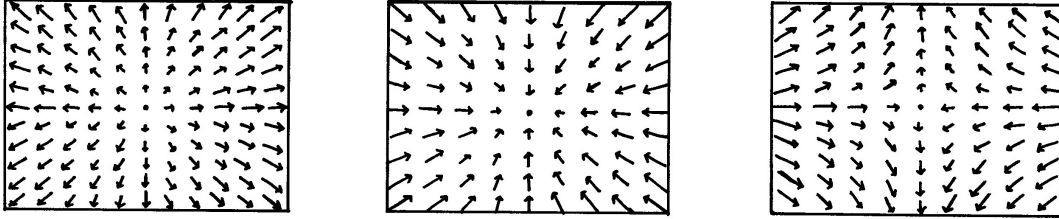
1. $V \cdot f \geq 0$ dándose la igualdad únicamente en los puntos críticos de f ,
2. Para cada $p \in M$ punto crítico de f de índice λ , se tiene un entorno coordenado centrado en p con coordenadas (x_1, \dots, x_n) en donde V toma la expresión

$$V = -2 \sum_{i=1}^{\lambda} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 2 \sum_{i=\lambda+1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

El gradiente como campo vectorial siempre apunta en la dirección de crecimiento de la función. Además, para cualquier función de Morse f se tiene garantizada la existencia del entorno coordenado mencionado en la segunda condición, ya que el Lema de Morse 1.12 proporciona una carta $(\mathcal{U}, (x_1, \dots, x_n))$ centrada en el punto crítico p de índice λ en donde

$$f = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2.$$

Así, en tal entorno \mathcal{U} bastaría considerar X_f como el gradiente como campo vectorial de f . De este modo, si consideramos un gradiente como campo vectorial de una función de Morse f definida sobre una variedad M en \mathbb{R}^3 , tendremos que en un entorno lo suficientemente pequeño de cada punto crítico, el campo vectorial será de una de las siguientes formas según el punto crítico sea mínimo, máximo o punto de silla, respectivamente.



Ejemplo 1.20. Sea h la función altura sobre la esfera \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 . En 1.4.1 hemos visto que h se trata de una función de Morse. Si pensamos en el gradiente de h resulta que X_h consiste en vectores que recorren de manera creciente los círculos máximos de \mathbb{S}^2 del polo sur al polo norte. Por tanto, un gradiente como campo vectorial V coincidirá con X_h en dos entornos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 próximos al polo norte y sur, respectivamente. Sin embargo, fuera de estos dos entornos, V no tiene que consistir en tales vectores a lo largo de esos círculos máximos, basta con que en $M \setminus (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$ el campo de vectores no tenga vectores ortogonales a dichos círculos y apunten en el sentido de crecimiento de h .

Para cualquier función de Morse f siempre se puede definir un gradiente como campo vectorial de f , cuya demostración puede verse en Knudson [12].

Teorema 1.21. *Sea f una función de Morse definida sobre una variedad diferenciable compacta y n -dimensional, entonces existe un gradiente como campo vectorial para f .*

A continuación, introducimos el concepto de curva integral de un campo de vectores que resulta ser de gran utilidad a la hora de mejorar una función de Morse, en el sentido de tener menos puntos críticos.

Definición 1.22. Una curva $\sigma: I \rightarrow M$ se dice *curva integral* de un campo vectorial V si:

$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = V_{\sigma(t)}, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Intuitivamente, las curvas integrales de un gradiente como campo vectorial de f una función de Morse sobre M , parten de un punto crítico y se mueven hacia otro de tal forma que nunca alcanzan a ninguno de los dos.

Necesitaremos las dos siguientes definiciones que nos permitirán relacionar un punto crítico de índice λ con otro de índice $\lambda - 1$. Para ello, usaremos el gradiente negativo de f .

Definición 1.23. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Se define el *flujo* asociado al gradiente negativo de f , $-\nabla f$, como la función diferenciable $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que verifica

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, p) = -\nabla f(\phi(t, p)),$$

$$\phi(0, p) = p.$$

Para un punto $p \in M$ fijado, se dice que la curva $\phi(t, p)$ es la *línea de flujo* del campo vectorial $V = -\nabla f$ que pasa por p en el instante inicial.

Definición 1.24. Sea $p \in M$ un punto crítico de una función de Morse sobre M y sea ϕ el flujo asociado a $-\nabla f$. Se define la *variedad estable de p* como el conjunto

$$M_p^s = \{q \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, q) = p\}.$$

Análogamente, la *variedad inestable de p* es el conjunto

$$M_p^u = \{q \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, q) = p\}.$$

1.5. Tipo de homotopía en términos de puntos críticos

En esta sección se exponen dos teoremas básicos de la teoría de Morse en los que se muestra como para una variedad diferenciable compacta arbitraria, los índices de los puntos críticos de una función de Morse, definida sobre ella, están estrechamente relacionados con el tipo homotópico de la variedad.

Fijemos M una variedad diferenciable n -dimensional compacta y veamos que los cambios importantes en los conjuntos de nivel ocurren al alcanzar los puntos críticos de una función de Morse dada sobre la variedad.

Teorema 1.25. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y sean $a < b$ números reales para los que $f^{-1}([a, b])$ no contiene ningún punto crítico. Entonces los conjuntos de nivel M_a y M_b son difeomorfos y M_a es un retracto por deformación de M_b .

Como consecuencia directa de este resultado, junto con el Lema de Morse 1.12, se tiene el siguiente teorema proporcionado por Reeb [20].

Teorema 1.26. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre una variedad diferenciable n -dimensional compacta con exactamente dos puntos críticos. Entonces la variedad M es homeomorfa a una n -esfera.

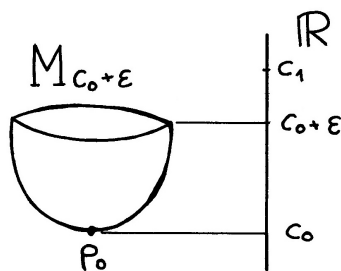
El teorema 1.25 muestra como, a efectos del tipo de homotopía, los conjuntos de nivel M_a y M_b son el mismo si el conjunto $M_b \setminus M_a$ no contiene puntos críticos. No obstante, el alcance de un punto crítico de una función de Morse supone un punto de inflexión en el cambio del tipo de homotopía de los conjuntos de nivel superior e inferior respecto al

correspondiente valor crítico. Estos cambios sobre la variedad M se pueden agrupar en la denominada *descomposición de asas*, un resultado fundamental de la Teoría de Morse que descompone una variedad en una sucesión de discos, denominadas asas, pegados entre sí.

Para entender el procedimiento de tal descomposición, pongámonos en la siguiente situación. Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con p_0, p_1, \dots, p_k puntos críticos ordenados por sus correspondientes valores críticos $c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_k$. Dado que f se puede aproximar por una no resonante, se puede suponer que $c_i \neq c_j$ para $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ distintos. Tenemos, por tanto, los conjuntos de nivel $M_a = \emptyset$ para $a < c_0$ y $M_a = M$ para $a > c_k$. Veamos cómo son el resto de conjuntos de nivel según se alcanza un punto crítico.

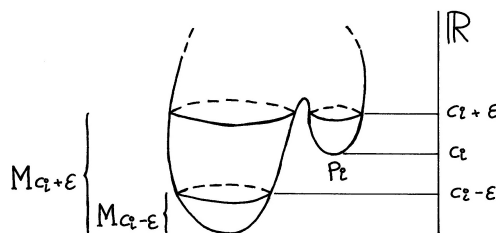
- Punto crítico mínimo p_0 :

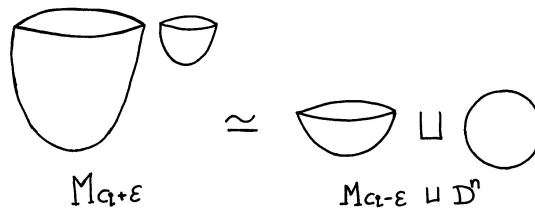
Por el Lema de Morse 1.12, se tiene un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) de modo que en un entorno de p_0 f toma la expresión $f = c_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2$. Para $\varepsilon > 0$, lo suficientemente pequeño, con $\varepsilon < c_1 - c_0$, resulta que los conjuntos de nivel inferior y superior respecto al punto crítico son $M_{c_0-\varepsilon} = \emptyset$ y $M_{c_0+\varepsilon} = \{x \in M \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < \varepsilon\}$, el cual es difeomorfo al disco D^n .



- Punto crítico p_i mínimo local, esto es, de índice 0:

De manera análoga, una vez se alcanza el punto crítico p_i , resulta que, para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, el conjunto de nivel superior $M_{c_i+\varepsilon}$ es difeomorfo a la unión disjunta del disco D^n y el conjunto de nivel inferior $M_{c_i-\varepsilon}$.

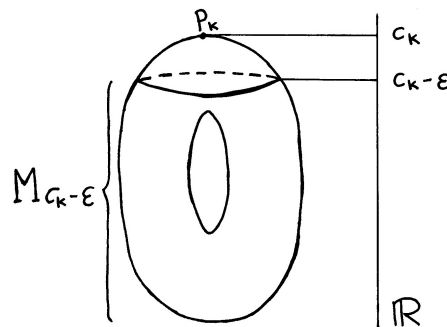




Donde \simeq representa la relación ser difeomorfos.

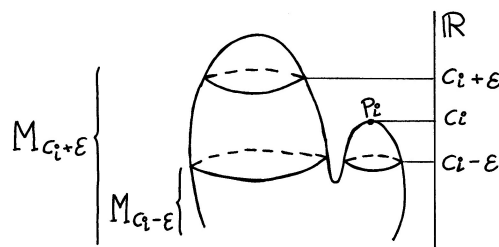
- Punto crítico máximo p_k :

De nuevo, por el Lema de Morse 1.12, en un entorno de p_k f es de la forma $f = c_k - \sum_{i=1}^n x_i^2$ para algún sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) centrado en p_k . Tomando $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, se tiene que el conjunto de nivel inferior $M_{c_k-\epsilon}$ es una variedad con frontera $f^{-1}(c_k - \epsilon)$ y $M \setminus M_{c_k-\epsilon} = \{x \in M \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \epsilon\}$ es difeomorfo a un n -disco. Por tanto, el conjunto de nivel superior $M_{c_k+\epsilon} = M$ se obtiene del anterior $M_{c_k-\epsilon}$ pegándole a su frontera un n -disco.



- Punto crítico p_i máximo local, esto es, de índice n :

Análogamente, una vez sobrepasado el máximo local p_i , se tiene que $M_{c_i+\epsilon}$ es difeomorfo al conjunto de nivel anterior $M_{c_i-\epsilon}$ junto con un disco D^n pegado a su frontera.





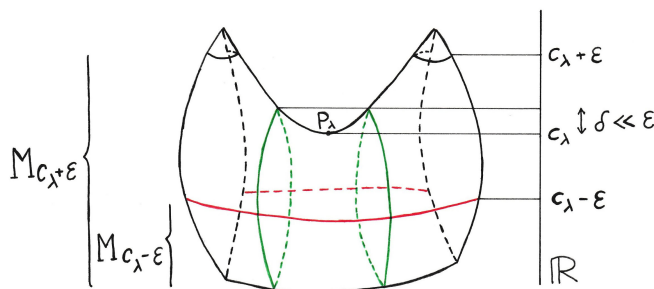
Donde \simeq representa la relación ser difeomorfos.

- Puntos críticos p_λ de índice $0 < \lambda < n$:

Sabemos de la existencia de una carta $(\mathcal{U}, (x_1, \dots, x_n))$ centrada en p_λ donde f toma la expresión $f = c_\lambda - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$. Consideremos $\varepsilon > 0$ de modo que $f^{-1}([c_\lambda - \varepsilon, c_\lambda + \varepsilon])$ no contenga más puntos críticos que p_λ . El conjunto de nivel $M_{c_\lambda - \varepsilon}$ es una variedad cuya frontera, en \mathcal{U} , es el conjunto $\{x \in M \mid \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 - \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2 = \varepsilon\}$. Tomemos ahora el conjunto de puntos en \mathcal{U} que verifica las siguientes dos condiciones:

1. $\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 - \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2 \leq \varepsilon$,
2. $\sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2 \leq \delta$, para $\delta \ll \varepsilon$ dado.

Este conjunto es difeomorfo a la variedad producto $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ y el conjunto de nivel $M_{c_\lambda + \varepsilon}$ se obtiene del anterior $M_{c_\lambda - \varepsilon}$ pegándole a su frontera el conjunto $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ mediante una aplicación pegado que definimos a continuación.



En la anterior imagen, los puntos situados por encima de la curva roja son aquellos que verifican la condición 1, mientras que aquellos situados entre las dos curvas de color verde son los que verifican la condición 2. La intersección de estos dos conjuntos es una λ -asa.

Definición 1.27. Se dirá que la variedad $H^\lambda := D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ es una *asa n -dimensional de índice λ* o simplemente λ -asa. Se define su *núcleo* como el λ -disco $D^\lambda \times \{0\} \subset H^\lambda$, conocido de forma estándar como la λ -celda e^λ , y el *conúcleo* de H^λ será el $(n - \lambda)$ -disco $\{0\} \times D^{n-\lambda} \subset H^\lambda$, que viene a expresar el grosor de la λ -asa.

Para cada $p \in M$ punto crítico de índice λ con $f(p) = c$, se necesitará pegar una λ -asa al conjunto de nivel inferior $M_{c-\varepsilon}$, para un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño especificado en 1.28. Este procedimiento se hará con una aplicación denominada *aplicación pegado*:

$$\psi: \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} = \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \longrightarrow \partial M_{c-\varepsilon}$$

de modo que, al identificar los puntos $p \in \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ con $\psi(p) \in \partial M_{c-\varepsilon}$, se pega la λ -asa H^λ al conjunto de nivel $M_{c-\varepsilon}$. Denotemos por $M_{c-\varepsilon} \cup_\psi H^\lambda$ al espacio resultante de pegar la λ -asa al conjunto de nivel mediante ψ . En caso de no ser necesario especificar la aplicación pegado, lo denotaremos por $M_{c-\varepsilon} \cup H^\lambda$. Dado que este espacio posee “esquinas” en los puntos de corte de H^λ y $M_{c-\varepsilon}$, se tiene que $M_{c-\varepsilon} \cup_\psi H^\lambda$ no es una variedad. Sin embargo, Nicolaescu [19] muestra que se puede suavizar obteniendo una variedad diferenciable M' que retracta sobre $M_{c-\varepsilon} \cup_\psi H^\lambda$.

Procedemos, finalmente, a establecer el resultado que da lugar a la descomposición en asas de la variedad M .

Teorema 1.28. *Sea $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre una variedad diferenciable n -dimensional y $p \in M$ un punto crítico de índice λ con valor $f(p) = c$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ es un conjunto compacto que no contiene más puntos críticos que p . Entonces, el conjunto de nivel $M_{c+\varepsilon}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $M_{c-\varepsilon}$ con una λ -celda e^λ pegada a lo largo de su frontera. Además, $M_{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c+\varepsilon}$.*

Observación 1.29. 1. El anterior teorema se sigue verificando si la función de Morse f tiene p_1, \dots, p_k puntos críticos con la misma imagen c y cuyos índices son $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ respectivamente. Así, si $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ no contiene otros puntos críticos, se tiene que $M_{c+\varepsilon}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $M_{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$. No obstante, dado que cualquier función de Morse puede ser aproximada por otra no resonante, esta situación se puede evitar.

2. Si se considera la variedad diferenciable M' mencionada anteriormente, se tiene, además, que $M_{c+\varepsilon}$ es difeomorfa a M' , como puede verse en Knudson [12].

La descomposición en asas de una variedad diferenciable n -dimensional y compacta M se obtiene del siguiente modo. Para $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse, que podemos suponer no resonante, sean p_0, p_1, \dots, p_k sus puntos críticos ordenados de manera ascendente por sus valores críticos c_0, c_1, \dots, c_k y sean $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ sus índices respectivos. Dado que p_0 se corresponde con el mínimo global de la función f , $\lambda_0 = 0$ y $M_{c_0+\varepsilon}$ es difeomorfo a $D^n = H^{\lambda_0}$, para $\varepsilon > 0$ adecuado. El siguiente punto crítico es p_1 y, como hemos visto, para un $\varepsilon_1 > 0$, lo suficientemente pequeño, tenemos que $M_{c_1+\varepsilon_1}$ es difeomorfo a $M_{c_1-\varepsilon_1}$ con H^{λ_1} pegada a lo largo de su frontera. Además, $[c_0 + \varepsilon, c_1 - \varepsilon_1]$ no contiene ningún valor crítico, por lo que el teorema 1.25 nos garantiza que $M_{c_0+\varepsilon}$ y $M_{c_1-\varepsilon_1}$ son difeomorfos. Con todo ello, tenemos que $M_{c_1+\varepsilon_1}$ es difeomorfo a D^n con una asa H^{λ_1} pegada a lo largo de su frontera. Siguiendo este proceso para cada punto crítico, se puede obtener la variedad M a partir de D^n pegando, por medio de aplicaciones pegado, asas una tras otra de modo que

M será de la forma $H^{\lambda_0} \cup H^{\lambda_1} \cup \dots \cup H^{\lambda_k}$. Así, una función de Morse sobre la variedad M determina una descomposición en asas de la misma.

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.30. *Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con p_0, \dots, p_k puntos críticos de índices $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ respectivamente. Entonces M tiene el mismo tipo homotópico de un CW-complejo que tiene una e^{λ_i} celda de dimensión λ_i por cada punto crítico p_i :*

$$M \simeq e^{\lambda_0} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}.$$

En esta CW-descomposición, no necesariamente se tiene que las celdas e^{λ_i} son pegadas en orden creciente de su dimensión. Sin embargo, se puede obtener tal CW-descomposición sin más que considerar una función de Morse adecuada.

Teorema 1.31. *Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con p_0, p_1, \dots, p_k puntos críticos de índices $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, respectivamente. Entonces se puede perturbar f obteniendo otra función de Morse g con los mismos puntos críticos de modo que para p_i y p_j tal que $g(p_i) < g(p_j)$ se tiene que $\lambda_i \leq \lambda_j$.*

1.6. Desigualdades de Morse

La teoría de Morse proporciona una relación entre los números de Betti de una variedad diferenciable M y los puntos críticos de una función de Morse f definida sobre M . Esta relación es descrita mediante una colección de desigualdades conocidas como *desigualdades de Morse*. Además, en virtud del teorema 1.30, una función de Morse permite calcular la característica de Euler de M contando sus puntos críticos. Para ello, es necesario introducir los números de Betti.

Sea X un CW-complejo de dimensión n . Para cada $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$, denotemos por C_λ el grupo abeliano libre generado por las λ -celdas de X . Sea $\varphi: \partial e^\mu \rightarrow X^{(\mu-1)}$ la aplicación pegado para cada μ -celda e^μ , con $\mu \in \{1, \dots, n\}$, siendo $X^{(\mu-1)}$ el $(\mu-1)$ -esqueleto de X . Definamos el homeomorfismo “frontera”:

$$\begin{aligned} \partial_\mu: C_\mu &\longrightarrow C_{\mu-1} \\ e_k^\mu &\longmapsto \partial_\mu(e_k^\mu) = \sum_l m_{lk} e_l^{\mu-1} \end{aligned}$$

donde m_{lk} es el grado de la aplicación

$$\partial e_k^\mu = \mathbb{S}^{\mu-1} \xrightarrow{f} X^{(\mu-1)} \longrightarrow \mathbb{S}_l^{\mu-1}$$

siendo $\mathbb{S}_l^{\mu-1}$ la $(\mu-1)$ -esfera resultado de tomar $X^{(\mu-1)}$ y colapsar en un punto su subcomplejo

$$X^{(\mu-2)} \bigsqcup_{r \neq l} e_r^{\mu-1}.$$

Con todo ello se tiene el siguiente concepto de cadena compleja de X que proporciona la definición de los números de Betti.

Definición 1.32. Sea X un CW-complejo n -dimensional. La sucesión de grupos y homeomorfismos

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

se denomina *cadena compleja celular de X* y se denota por $C_\bullet(X)$.

En la teoría de los CW-complejos es un resultado conocido que las aplicaciones frontera verifican que $\partial_{\lambda-1} \circ \partial_\lambda = 0$ para cada $\lambda \in \{1, \dots, n\}$. En consecuencia, se tiene que $Im \partial_\lambda \subset Ker \partial_{\lambda-1}$. Esto nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.33. Sea X un CW-complejo n -dimensional. Se definen los *número de Betti de X* como:

$$\beta_\lambda := rank H_\lambda(X, \mathbb{Z}), \quad \forall \lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$$

donde $H_\lambda(X, \mathbb{Z})$ es el grupo abeliano cociente $Ker \partial_\lambda / Im \partial_{\lambda+1}$, denominado λ -ésimo grupo de homología de X .

Definición 1.34. Sea X un CW-complejo de dimensión n . Se define la *característica de Euler de X* como:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \beta_\lambda(X).$$

Otra forma alternativa de calcular $\mathcal{X}(X)$ es mediante el número de λ -celdas de X que denotaremos por $c_\lambda(X)$:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda(X).$$

Ya se ha visto que una función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ determina una CW-descomposición de M con una λ -celda por cada punto crítico de índice λ . Como consecuencia, denotando por n_λ el número de puntos críticos de f con índice λ , se tiene que $c_\lambda(M) = n_\lambda$. Así, la característica de Euler de M viene dada en función de los puntos críticos de f como:

$$\mathcal{X}(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda n_\lambda.$$

Se exponen, a continuación, las desigualdades de Morse, considerándose el primer resultado como caso particular del segundo.

Teorema 1.35 (Desigualdades de Morse débiles). *Sea M una variedad diferenciable, compacta y n -dimensional. Para cualquier función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se verifican:*

$$\beta_\lambda(M) \leq n_\lambda, \quad \text{para cada } \lambda \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Teorema 1.36 (Desigualdades de Morse fuertes). *Sea M una variedad diferenciable, compacta y n -dimensional. Para cualquier función de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se verifican:*

$$\sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k \beta_{\lambda-k}(M) \leq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k n_{\lambda-k}, \quad \text{para cada } \lambda \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Las desigualdades de Morse nos permiten saber una cota inferior del número de puntos críticos de cada índice que, como mínimo, ha de tener una función de Morse. De este modo, aquellas funciones de Morse cuyo número de puntos críticos sea mínimo, esto es $n_{\lambda} = \beta_{\lambda}$, se dicen *perfectas*.

Ejemplo 1.37. 1. Los números de Betti para la esfera \mathbb{S}^2 son: $\beta_0 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = 0$. De este modo, tenemos que para cualquier función de Morse sobre la esfera, se tendrán, al menos, un punto crítico de índice 0 y otro de índice 2, por lo que la función altura sobre \mathbb{S}^2 es una función de Morse perfecta.

2. En el caso del toro 2-dimensional \mathbb{T} se tiene $\beta_0 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = 2$, por lo que cualquier función de Morse sobre \mathbb{T} tendrá, al menos, un punto crítico de índice 0, otro de índice 2 y dos más de índice 1. Así, la función altura definida sobre el toro es una función de Morse perfecta.

No siempre se puede definir una función de Morse perfecta sobre una variedad diferenciable compacta. Un ejemplo de ello es la esfera de Poincaré cuyos números de Betti son $\beta_0 = \beta_3 = 1$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y, sin embargo, toda función de Morse sobre esta variedad tiene, al menos, 6 puntos críticos. También es cierto, que bajo ciertas circunstancias se puede reducir la cantidad de puntos críticos de una función de Morse, sobre una variedad diferenciable y compacta, que no es perfecta, como se muestra en el siguiente resultado que puede verse en Laudenbach [14].

Teorema 1.38. *Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con p_0, p_1, \dots, p_k puntos críticos de índices $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, respectivamente, y tal que sus valores críticos son $c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_k$. Fijado un $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\lambda_i = \lambda_{i-1} + 1$,
2. *En el conjunto $f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)$, con $c_{i-1} + \varepsilon < c_i$, se tiene que $M_{p_{i-1}}^s$ y $M_{p_i}^u$ se intersecan transversalmente en un único punto.*

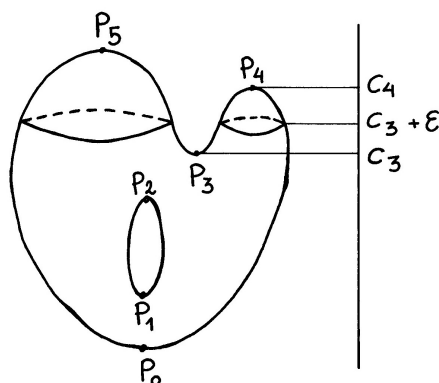
Entonces, f se puede perturbar en una nueva función de Morse g tal que g y f coincidan fuera de un entorno \mathcal{U} de $M_{p_{i-1}}^s \cap M_{p_i}^u$ y g no tenga puntos críticos en \mathcal{U} .

Milnor [16] muestra una versión mucho más intuitiva en su teorema conocido como “primera cancelación” que dice lo siguiente. Si tenemos $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con p y q puntos críticos tal que $\text{índice}(q) = \text{índice}(p) + 1$ y V es un gradiente como campo vectorial para f con exactamente una curva integral γ de p a q , entonces se puede modificar

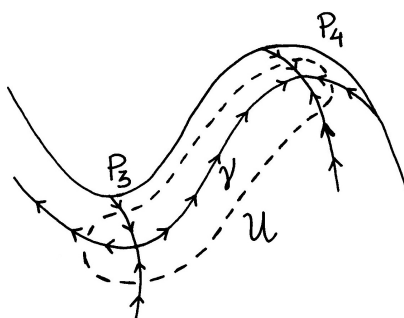
V en un entorno de γ de tal forma que se obtiene otro campo vectorial gradiente como campo vectorial \hat{V} cuyos puntos críticos son los de V quitándole p y q .

Un claro ejemplo donde visualizar este resultado es el siguiente sobre un toro con un bache.

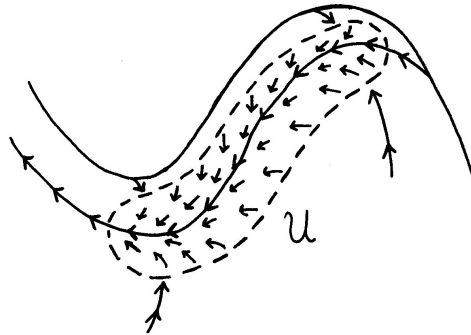
Ejemplo 1.39. Consideremos f la función altura asociada a la variedad que aparece en la siguiente imagen.



Está claro que $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 1 + \lambda_3$. Además entre los puntos p_3 y p_4 , para cualquier V gradiente como campo vectorial de f , se tiene una única curva integral γ que parte de p_3 y sube cuesta arriba hacia p_4 . Entonces, estamos en una situación del siguiente estilo.



El argumento de Milnor nos asegura que podemos modificar el campo vectorial V en un entorno \mathcal{U} de γ obteniendo un gradiente como campo vectorial con puntos críticos p_0, p_1, p_2 y p_5 . La idea es considerar sobre γ el campo vectorial $-V$ y en su entorno \mathcal{U} modificar V como se muestra a continuación.



De este modo, se obtiene un nuevo campo vectorial \hat{V} que será gradiente como campo vectorial para una función de Morse g con puntos críticos p_0, p_1, p_2 y p_5 . Además, observamos que los vectores de \hat{V} fuera de \mathcal{U} van acorde con el crecimiento de la función altura, por lo que f y g coinciden fuera de tal entorno \mathcal{U} .

Capítulo 2

Teoría de Morse Discreta

A finales de los años 90, el enfoque de la teoría de Morse se lleva al terreno de la combinatoria. Es Forman [8], en 1998, quien desarrolla tal adaptación de la teoría a los CW-complejos, ocasionando la aparición de una potente herramienta para el análisis de estos complejos y, en particular, si se dota de una estructura celular a una variedad diferenciable, una segunda vía para el análisis de la topología de variedades.

En este capítulo se presenta la teoría de Morse discreta sobre CW-complejos regulares finitos, comenzando con la introducción de los conceptos básicos de la teoría que darán lugar a resultados análogos a la clásica, aunque cuentan con la ventaja, al estar desde una perspectiva combinatorial, de poder realizar cálculos así como algoritmos para construir funciones de Morse discretas sobre complejos celulares. Se asume la familiaridad con los CW-complejos y su construcción mediante aplicaciones pegado, que pueden encontrarse en Whitehead [24]. No obstante, recordemos algunas nociones y resultados concretos que necesitaremos sobre los CW-complejos y establezcamos la correspondiente notación.

2.1. Preliminares

Salvo indicación en contrario, a lo largo de todo el capítulo denotaremos por X un CW-complejo regular y finito, cuya definición puede verse en 2.1. Consideraremos las siguientes notaciones:

- $X^{(p)}$ denotará el p -esqueleto de X ,
- X_p denotará el conjunto de todas las celdas de dimensión p de X ,
- Para σ celda de X , $\sigma^{(p)}$ denotará que $\sigma \in X_p$.

Además, si σ y τ son dos celdas de X , la relación $\sigma \prec \tau$ dada por $\sigma \subset \bar{\tau}$ y $\sigma \neq \tau$, expresará que la celda σ es cara de τ . Denotaremos $\sigma \preceq \tau$ si $\sigma = \tau$ o $\sigma \prec \tau$.

Definición 2.1. Sea X un CW-complejo. Se dice que X es *regular* si para cada p -celda σ de X su aplicación pegado $\varphi : \partial\sigma \rightarrow X^{(p-1)}$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Además, X será *finito* si tiene un número finito de celdas.

Definición 2.2. Sean $\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$ dos celdas de un complejo celular X y $h: D^{p+1} \rightarrow X$ una aplicación continua con $\text{Int}(D^{p+1})$ homeomorfo a τ . Se dice que σ es una *cara regular* de τ si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. $h: h^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma$ es un homeomorfismo.
2. $\overline{h^{-1}(\sigma)}$ es un p -disco.

En otro caso, se dice que σ es *cara irregular* de τ .

Se necesitarán los siguientes dos resultados sobre complejos celulares cuyas demostraciones pueden verse en Forman [8].

Teorema 2.3. Para $p \geq 1$, sean las celdas $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$ de X un CW-complejo. Una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. σ es una cara irregular de τ .
2. γ es una cara irregular de σ .
3. Existe una p -celda $\hat{\sigma}$ distinta de σ tal que $\gamma \prec \hat{\sigma} \prec \tau$.

Esto nos garantiza que para cada $(p+1)$ -celda τ de un CW-complejo regular, con $p \geq 1$, existen al menos dos p -caras de τ que comparten una $(p-1)$ -cara.

Teorema 2.4. En un CW-complejo regular, sean $\gamma^{(p-1)} \prec \tau^{(p+r)}$ para algún $p, r \geq 1$. Entonces, se tienen dos $(p+r-1)$ -celdas distintas σ y $\hat{\sigma}$ tal que $\gamma \prec \sigma \prec \tau$ y $\gamma \prec \hat{\sigma} \prec \tau$.

Procediendo por inducción, para $p, r \geq 1$ se tiene garantizado que cualquier par de celdas $\gamma^{(p-1)} \prec \tau^{(p+r)}$ siempre tendrán, al menos, dos p -celdas σ y $\hat{\sigma}$ tal que $\gamma \prec \sigma \prec \tau$ y $\gamma \prec \hat{\sigma} \prec \tau$.

Se exponen, a continuación, las definiciones básicas de la teoría de Morse discreta sobre un CW-complejo regular.

Definición 2.5. Sea X un CW-complejo regular y finito. Denotemos por K el conjunto de todas las celdas de X . Una *función de Morse discreta* sobre X es una función

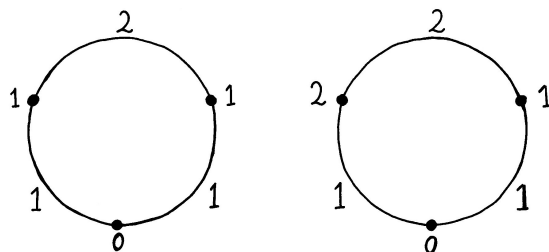
$$f: K \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cualquier $\sigma^{(p)} \in K$ se verifican las siguientes condiciones:

1. $\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$.
2. $\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} \leq 1$.

Grosso modo, una función de Morse discreta f es aquella que partiendo de una celda, al movernos a una celda adyacente de exactamente una dimensión mayor (menor) la función de Morse crece (decrece) estrictamente con posibilidad de una única excepción en la que una de esas celdas adyacentes f decrezca (crezca).

Ejemplo 2.6. Un ejemplo sencillo con el que visualizar si una función sobre un CW-complejo regular es una función de Morse discreta son las siguientes sobre una descomposición celular de la esfera \mathbb{S}^1 :



La primera se trata de una función de Morse discreta, mientras que la segunda, puesto que la 0-celda de valor 2 tiene sus dos 1-celdas adyacentes con un valor menor o igual que 2, no es una función de Morse discreta.

Asociado a la noción de función de Morse discreta está el concepto de celda crítica, que vienen siendo aquellas celdas en las que no se verifican tales excepciones.

Definición 2.7. Dada una función de Morse discreta f sobre X , se dirá que una celda $\sigma^{(p)}$ de X es una *celda crítica de f de índice p* si se verifican las siguientes dos condiciones:

1. $\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$.
2. $\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} = 0$.

No es necesario especificar el índice de una celda crítica conocida su dimensión. Por ello, sin dar pie a confusión, simplemente diremos que $\sigma^{(p)}$ es una celda crítica de f .

Recordemos que para el caso diferenciable, el Lema de Morse 1.12 asegura que dado un punto crítico p de índice 1 de una función de Morse f definida sobre una variedad diferenciable n -dimensional, localmente f se puede expresar como $f(x) = f(p) - x_1^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2$, para algún sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) centrado en p . Con ello, partiendo de p , resulta que f decrece en ambos sentidos de la dirección x_1 y crece en todas las demás direcciones coordenadas. Si ahora tomamos σ una celda crítica de dimensión 1 para una función de Morse discreta F , entonces $F(\sigma)$ es mayor que el valor de sus 0-caras y es menor que cualquier 2-celda para la cual σ es una de sus caras. Por tanto, observamos que una función de Morse discreta refleja una situación análoga a la de una función de Morse en el caso diferenciable.

Ejemplo 2.8. 1. Considerando la función de Morse discreta del ejemplo 2.6, se tiene que las únicas celdas críticas son la 0-celda de valor 0 y la 1-celda de valor 2.

2. Un manera simple de obtener una función de Morse discreta f sobre un CW-complejo regular X es asignando a cada celda de X su dimensión, esto es, $f(\sigma) = \dim(\sigma)$ para toda celda σ de X . De este modo, f es una función de Morse discreta sobre X con todas sus celdas críticas.

3. Otro ejemplo sencillo de una función de Morse discreta f sobre cualquier CW-complejo regular X , aunque no tan trivial como el anterior, se obtiene construyendo la función f por inducción asignando a cada vértice un número real positivo, distintos entre sí, y a cada p -celda de X la suma de los valores de todas sus $(p-1)$ -caras, esto es, para cada $\sigma^{(p)}$ celda de X :

$$f(\sigma) = \sum_{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma} f(\gamma).$$

Se tiene así una función de Morse discreta donde todas sus celdas son críticas:

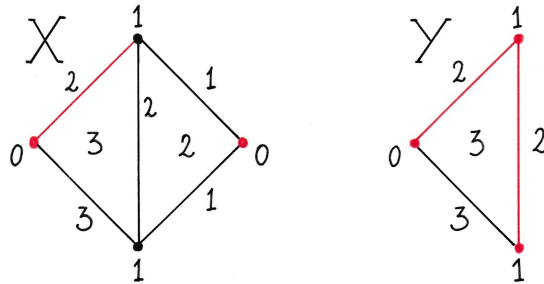
- $\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} \Rightarrow f(\tau) = f(\sigma) + \sum_{\substack{\hat{\sigma} \neq \sigma \\ \hat{\sigma}^{(p)} \prec \tau}} f(\hat{\sigma}) > f(\sigma).$
- $\sigma^{(p)} \succ \gamma^{(p-1)} \Rightarrow f(\sigma) = f(\gamma) + \sum_{\substack{\hat{\gamma} \neq \gamma \\ \hat{\gamma}^{(p-1)} \prec \sigma}} f(\hat{\gamma}) > f(\gamma).$

Así como en la teoría de Morse clásica es necesario demostrar que siempre se puede definir una función de Morse sobre una variedad diferenciable, compacta y n -dimensional, en el caso discreto queda clara la existencia de funciones de Morse discretas sobre un CW-complejo regular con cualquiera de los dos ejemplos anteriores.

También se puede obtener ejemplos de funciones de Morse discretas por restricción o extensión de una función de Morse discreta dada.

Lema 2.9. *Sea X un CW-complejo e Y un subcomplejo de X . Si f es una función de Morse discreta sobre X , entonces su restricción a Y es una función de Morse discreta sobre Y . Además, si σ es una celda de Y que es crítica para f , entonces σ es crítica para $f|_Y$.*

Su comprobación es inmediata de las definiciones de función de Morse y celda crítica. El hecho de que $f|_Y$ conserve el carácter de ser celda crítica de f no garantiza que no haya más celdas críticas en el subcomplejo Y respecto de $f|_Y$ que respecto de la propia f , como se puede ver en el siguiente ejemplo donde las celdas en color rojo son las celdas críticas.



Lema 2.10. *Si X es un CW-complejo e Y un subcomplejo de X , cualquier función de Morse discreta f sobre Y se puede extender a X mediante una función de Morse discreta g .*

Demostración. Denotando por $c = \max\{f(\sigma) \mid \sigma \text{ celda de } Y\}$, definimos la función g como:

$$g(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \text{ es celda de } Y \\ c + \dim(\sigma) & \text{si } \sigma \text{ es celda de } X \setminus Y \end{cases}$$

g es una función de Morse discreta sobre X dado que para cada celda $\sigma^{(p)}$ de X se tiene lo siguiente:

1. Si σ es una celda de Y , entonces:

- $\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid g(\gamma) \geq g(\sigma)\} = \#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$
- $\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid g(\tau) \leq g(\sigma)\} = \#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} + \#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid c + \dim \tau \leq f(\sigma)\} \leq 1 + 0.$

2. Si σ es una celda de $X \setminus Y$, entonces:

- $\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid g(\gamma) \geq g(\sigma)\} = \#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid f(\gamma) \geq c + \dim \sigma\} + \#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid c + \dim \gamma \geq c + \dim \sigma\} = 0.$
- $\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid g(\tau) \leq g(\sigma)\} = \#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid c + \dim \tau \leq c + \dim \sigma\} = 0.$

□

Observación 2.11. La función g descrita en la demostración es una función de Morse discreta donde todas las celdas de $X \setminus Y$ son críticas para g y, además, todas las celdas de Y que son críticas para f también lo son para g , sin la posibilidad de que haya celdas críticas en Y para g que no lo sean para f . En conclusión, esta extensión g no es “eficiente” en el sentido de obtener una función de Morse sobre X con el número mínimo de puntos críticos posibles en $X \setminus Y$. Se puede definir una extensión mucho mejor si estamos ante ciertas condiciones sobre el complejo X como veremos en 2.39.

De las dos condiciones de la definición de celda crítica 2.7, basta con que no se verifique una de ellas para asegurar que la celda σ no es crítica. Además, sólo será posible que no se verifique únicamente una de las dos.

Lema 2.12. *Sea f una función de Morse discreta sobre un CW-complejo X . Si σ es una p -celda de X no crítica para f , entonces se verifica una única condición de las siguientes:*

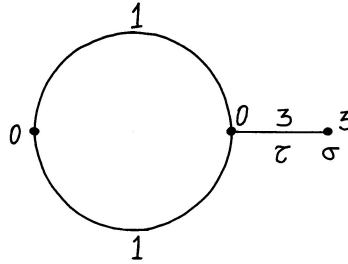
1. *Existe $\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)}$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$.*
2. *Existe $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)}$ tal que $f(\gamma) \geq f(\sigma)$.*

Demostración. σ será no crítica si se verifica una de las dos condiciones. Supongamos que se verifican ambas. Se tiene que $p \geq 1$ y, por ser X regular, $\sigma^{(p)}$ es una cara regular de $\tau^{(p+1)}$ y $\gamma^{(p-1)}$ una de $\sigma^{(p)}$. Así, por el teorema 2.3, existe una p -celda $\hat{\sigma} \neq \sigma$ tal que $\gamma \prec \hat{\sigma} \prec \tau$. Dado que $\hat{\sigma}$ y σ son dos p -caras de τ con $f(\tau) \leq f(\sigma)$, se tiene que $f(\tau) > f(\hat{\sigma})$. De ahí se sigue, por las dos condiciones, que $f(\hat{\sigma}) < f(\gamma)$ y $f(\sigma) \leq f(\gamma)$, lo que supone una contradicción con ser f una función de Morse discreta. \square

Observación 2.13. Consecuencia inmediata del lema, la definición de función de Morse discreta sobre un CW-complejo se podría reformular agrupando las dos condiciones de 2.5 como una única condición: para cada celda $\sigma^{(p)}$ del complejo celular se tiene

$$\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} + \#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$$

En la teoría de Morse clásica, se ha visto como el mínimo y máximo de una función de Morse sobre una variedad diferenciable y compacta n -dimensional, se alcanzan sobre puntos críticos de índice 0 y de índice n , respectivamente. Sin embargo, en la versión discreta no se tiene la misma relación. Es cierto que el mínimo de una función de Morse discreta se debe alcanzar en 0-celdas críticas, pero en cuanto al máximo ya no tiene por qué alcanzarse en celdas críticas de dimensión máxima, y si lo hace puede que ésta no sea crítica, como se muestra en la siguiente imagen.



Lema 2.14. *Toda función de Morse discreta f sobre X tiene que alcanzar su mínimo en alguna 0-celda crítica.*

Demostración. Supongamos que el mínimo de f se alcanza en $\sigma^{(p)}$ una celda de dimensión $p \geq 1$. Dado que X es un CW-complejo regular, σ tiene, al menos, dos $(p-1)$ -caras: γ_1 y γ_2 . Luego, al tomar σ el valor mínimo de f , se tiene que $f(\sigma) \leq f(\gamma_1)$ y $f(\sigma) \leq f(\gamma_2)$, lo que supone una contradicción con que f sea función de Morse discreta. Por tanto, el valor mínimo de la función se tiene que alcanzar sobre una 0-celda $\sigma^{(0)}$. Además, $\sigma^{(0)}$ debe ser crítica, ya que de no serlo existiría $\tau^{(1)} \succ \sigma^{(0)}$ tal que $f(\tau^{(1)}) = f(\sigma^{(0)})$ y, por otra parte, el teorema 2.3 nos garantiza que existiría $\hat{\sigma}^{(0)} \prec \tau^{(1)}$ con $\hat{\sigma}^{(0)} \neq \sigma^{(0)}$, por lo que al ser f función de Morse discreta, se tendría que $f(\hat{\sigma}^{(0)}) < f(\tau^{(1)}) = f(\sigma^{(0)})$. \square

Notemos que en el anterior ejemplo de la imagen, la 0-celda σ , que tiene valor máximo 3, únicamente es cara de la 1-celda τ . Si esto no sucediese, entonces σ no podría alcanzar el máximo de la función f , ya que en este caso existiría otra 1-celda $\hat{\tau}$ para la cual σ sería una de sus caras y, por definición de función de Morse discreta, se tendría que $f(\hat{\tau}) > f(\sigma) = 3$. Siguiendo este razonamiento se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.15. *Si M es una variedad n -dimensional, compacta, triangulable y sin frontera, entonces cualquier función de Morse discreta f definida sobre una triangulación de M alcanzará su máximo sobre alguna n -celda crítica.*

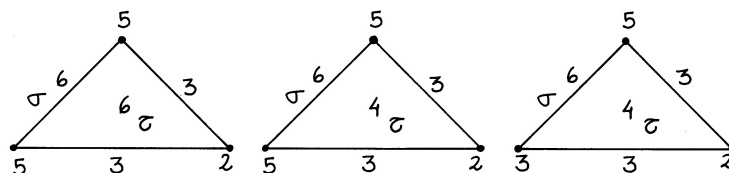
Demostración. Supongamos que f alcanza el máximo sobre una p -celda σ con $p < n$. Al no tener borde la triangulación, σ es cara de al menos dos $(p+1)$ -celdas que, por definición de función de Morse discreta, como mínimo una de ellas tendrá un valor mayor estricto que $f(\sigma)$, en contradicción con que $f(\sigma)$ sea el máximo de f . Por tanto, el máximo de f se alcanza en alguna celda $\sigma^{(n)}$. Además, esta celda es crítica de f , ya que de no ser así, existiría $\gamma^{(n-1)} \prec \sigma$ tal que $f(\gamma) \geq f(\sigma)$ y, al ser $f(\sigma)$ el valor máximo, $f(\gamma) = f(\sigma)$. Por otra parte, al tratarse de una triangulación sin borde, $\gamma^{(n-1)}$ sería cara de otra celda $\hat{\sigma}^{(n)} \neq \sigma^{(n)}$, y por definición de función de Morse discreta, $f(\sigma) = f(\gamma) < f(\hat{\sigma})$, en contradicción con que $f(\sigma)$ sea el máximo de f . \square

Para terminar, presentamos dos resultados que ilustran el comportamiento de las funciones de Morse discretas.

Proposición 2.16. *Sea f una función de Morse discreta sobre un CW-complejo regular. Si para $\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$ se tiene que $f(\sigma) \geq f(\tau)$, entonces para cualquier $\gamma^{(p-1)} \prec \tau^{(p+1)}$ que no sea cara de σ , se tiene que $f(\gamma) < f(\tau)$.*

Demostración. En las hipótesis del teorema, sea $\gamma^{(p-1)} \prec \tau$ con $\gamma \neq \hat{\gamma}$ para todo $\hat{\gamma}^{(p-1)} \prec \sigma$. En virtud del teorema 2.4, la celda τ tiene, al menos, dos p -caras distintas σ_1 y σ_2 que comparten a γ como cara. Además, por la propia definición de función de Morse discreta, $f(\sigma_i) > f(\gamma)$ para algún $i \in \{1, 2\}$. Luego, si $f(\gamma) \geq f(\tau)$ resulta que $f(\sigma_i) > f(\tau)$ y, de nuevo, por definición de función de Morse discreta, se tiene que $\sigma_i = \sigma$, obteniendo que $\gamma \prec \sigma$, lo que supone una contradicción con lo establecido. \square

No obstante, para aquellas $\gamma^{(p-1)} \prec \tau^{(p+1)}$ que son cara de σ no se puede decir nada acerca de la relación que hay entre $f(\gamma)$ y $f(\tau)$, como se puede comprobar con las siguientes tres funciones de Morse discretas sobre el triángulo como complejo simplicial, presentando las tres relaciones posibles.



El siguiente resultado técnico, en particular, nos permitirá definir de una manera muy intuitiva el concepto análogo a los conjuntos de nivel 1.9 de la versión diferenciable.

Lema 2.17. *Sea f una función de Morse discreta sobre X y σ una p -celda de X . Se tienen los dos siguientes resultados:*

1. Si $\sigma \prec \tau$, entonces existe una $(p+1)$ -celda $\hat{\tau}$ tal que $\sigma \prec \hat{\tau} \preceq \tau$ con $f(\hat{\tau}) \leq f(\tau)$.
2. Si $\gamma \prec \sigma$, entonces existe una $(p-1)$ -celda $\hat{\gamma}$ tal que $\gamma \preceq \hat{\gamma} \prec \sigma$ con $f(\hat{\gamma}) \geq f(\gamma)$.

Demostración. Comprobamos la primera afirmación, obteniendo la prueba de la segunda de manera similar. Si $\sigma^{(p)} \prec \tau$, entonces $\dim(\tau) > p$. Comprobemos el resultado por inducción en k siendo $\dim(\tau) = p+k$. Para $k = 1$ es inmediato. Supongamos $\dim(\tau) = p+k$ con $k > 1$. Por el teorema 2.4, existen dos $(p+k-1)$ -celdas distintas α_1 y α_2 de modo que $\sigma \prec \alpha_i \prec \tau$ para $i = 1, 2$. Dado que f es una función de Morse discreta, al menos una de estas dos celdas α_i con $i = 1, 2$ verifica que $f(\alpha_i) < f(\tau)$. Procediendo por inducción, se obtiene el resultado. \square

2.2. Campo vectorial discreto

La teoría de Morse clásica se puede desarrollar desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, ya que los puntos críticos de una función de Morse se corresponden con los puntos fijos del flujo respecto al gradiente de la función, enfoque adoptado por Smale [23]. En el caso discreto presenta una ventaja añadida al ser mucho más fácil manejar el gradiente de una función de Morse discreta que la propia función. Esto se debe a la simple caracterización geométrica del gradiente, en la versión discreta, y a su sencilla visualización.

En esta sección se introduce el concepto análogo al gradiente como campo vectorial 1.19 de una función de Morse diferenciable, pudiendo encontrar cualquier resultado de esta sección en Forman [6], [8].

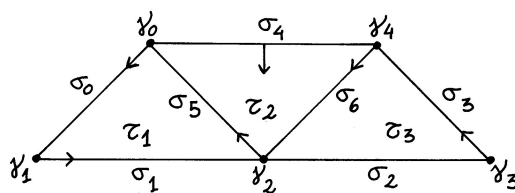
Definición 2.18. Un *campo vectorial discreto* V sobre X es una colección de pares de celdas de X $\{\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}\}$ de modo que ninguna celda está simultáneamente en más de un par de V . Cuando una celda de X no está emparejada con ninguna otra celda, se dice que es una *celda crítica* de V .

Se puede obtener una interpretación geométrica de este concepto si denotamos al par $\{\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}\}$ de V por una flecha $\sigma \rightarrow \tau$, de tal forma que para cada σ celda de X se verifica una única de las siguientes afirmaciones:

- σ es el comienzo de una flecha.
- σ es el final de una flecha.
- σ ni emite ni recibe una flecha.

Con esta interpretación, podremos decir que σ será una celda crítica de V si verifica la última afirmación.

Ejemplo 2.19. Un sencillo ejemplo donde se muestra la interpretación geométrica de un campo vectorial discreto es el siguiente sobre un complejo simplicial.



Este campo vectorial discreto V consta de los pares de celdas $\{\gamma_0 \prec \sigma_0\}$, $\{\gamma_1 \prec \sigma_1\}$, $\{\gamma_2 \prec \sigma_5\}$, $\{\gamma_3 \prec \sigma_3\}$, $\{\gamma_4 \prec \sigma_6\}$ y $\{\sigma_4 \prec \tau_2\}$. Observamos que las únicas celdas que ni reciben ni expulsan una flecha son σ_2 , τ_1 y τ_3 . Por tanto, son celdas críticas de V y, en efecto, no son partícipe de ningún par de celdas de V .

El concepto análogo de una curva integral de un campo vectorial sobre una variedad diferenciable son los caminos sobre un campo vectorial discreto definidos a continuación.

Definición 2.20. Sea V un campo vectorial discreto sobre X . Un V -camino de índice p es una sucesión de celdas

$$\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \tau_1^{(p+1)}, \sigma_2^{(p)}, \dots, \tau_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)}$$

con $r \geq 0$, donde para cada $i = 0, \dots, r$ se verifican las siguientes condiciones:

1. $\{\sigma_i^{(p)} \prec \tau_i^{(p+1)}\}$ es un par de V ,
2. σ_i y σ_{i+1} son caras distintas de τ_i .

Si además $\sigma_0 = \sigma_{r+1}$, entonces se dice que el V -camino es un camino *cerrado*.

Se puede extender esta definición como sigue.

Definición 2.21. Sea V un campo vectorial discreto sobre X . Un V -camino de $\tau^{(p+1)}$ a $\sigma^{(p)}$ es cualquier V -camino

$$\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \tau_1^{(p+1)}, \sigma_2^{(p)}, \dots, \tau_r^{(p+1)}, \sigma^{(p)}$$

de modo que $\sigma_0^{(p)} \prec \tau$ y, además, $\tau_0 \neq \tau$.

Intuitivamente, un camino de $\tau^{(p+1)}$ a $\sigma^{(p)}$ es cualquier camino que parte de una p -cara σ_0 de τ y llega a σ de tal forma que al exigir que $\tau_0 \neq \tau$, el par de celdas $\{\sigma_0 \prec \tau\}$ no está en el campo vectorial, y, por tanto, el camino no sale de σ_0 y se adentra en la celda τ .

Ejemplo 2.22. Consideremos el ejemplo anterior 2.19. Se tiene que la sucesión de celdas $\gamma_0, \sigma_0, \gamma_1, \sigma_1, \gamma_2, \sigma_5, \gamma_0$ es uno de los posibles V -caminos de índice 0 que, además, es cerrado. Así mismo, la sucesión de celdas $\gamma_4, \sigma_6, \gamma_2, \sigma_5, \gamma_0$ es el único V -camino de σ_3 a γ_0 .

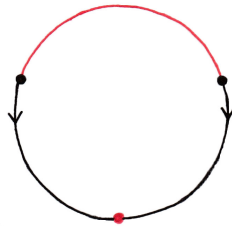
Gradiente de Morse discreto

Una función de Morse discreta sobre cualquier CW-complejo regular define un particular campo vectorial discreto sobre el complejo, que almacena la información necesaria de la función, permitiendo obviar los valores que toma la misma si se tiene tal campo vectorial discreto. Es el llamado *campo vectorial gradiente*, cuya definición se basa en el lema 2.12 permitiendo agrupar las celdas no críticas de una función de Morse discreta f , en pares disjuntos $\{\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}\}$ de tal forma que $f(\sigma) \geq f(\tau)$. De este modo, se puede pensar el gradiente de una función de Morse discreta como aquel que asigna flechas $\sigma \rightarrow \tau$ entre tales pares disjuntos de celdas no críticas y no asigna flecha ninguna a aquellas celdas que sí sean críticas.

Definición 2.23. Para cualquier función de Morse discreta f sobre X , se define el *campo vectorial gradiente de f* como la colección de pares de celdas $\{\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}\}$ no críticas de f tal que $f(\sigma) \geq f(\tau)$. A este campo vectorial discreto lo denotaremos¹ por $-\nabla f$.

Observar que las celdas críticas de f no están emparejadas con ninguna otra celda mediante $-\nabla f$, por lo que el campo vectorial gradiente de f conserva el criterio de ser celda crítica de la función f .

Ejemplo 2.24. 1. La función de Morse discreta f definida en el ejemplo 2.6 tiene el siguiente campo vectorial gradiente



que nos indica el sentido de decrecimiento de la función. Notemos que las celdas críticas de f , pintadas en color rojo, se corresponden exactamente con las celdas críticas de su campo vectorial discreto.

2. La función de Morse discreta sobre X definida en 2.8.2, que asocia a cada celda su dimensión, dado que todas las celdas son críticas, se tiene $-\nabla f = \emptyset$. Lo mismo ocurre para la función definida en 2.8.3.

La forma en la que se toman los pares de celdas del campo vectorial gradiente de una función de Morse f , hace que los caminos respecto a $-\nabla f$ se caractericen por recorrer las celdas del camino a la vez que f va decreciendo. De este modo, al igual que las curvas integrales del gradiente sobre una variedad diferenciable no pueden tener lazos, un camino respecto a $-\nabla f$ una vez que recorre una celda no puede volver a ella.

¹Para ser precisos, usamos la notación $-\nabla f$ para indicar que los vectores van en la dirección de decrecimiento de f .

Lema 2.25. *Sea f una función de Morse discreta sobre X . Una sucesión de celdas de X*

$$\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \dots, \tau_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)}$$

es un camino respecto a $-\nabla f$ si, y solo si, para cada $i = 0, \dots, r$ se tiene que σ_i y σ_{i+1} son caras de τ_i y, además, se verifica:

$$f(\sigma_0) \geq f(\tau_0) > f(\sigma_1) \geq f(\tau_1) > \dots \geq f(\tau_r) > f(\sigma_{r+1}).$$

Demostración. Si la sucesión dada es un camino respecto a $-\nabla f$, para cada $i = 0, \dots, r$ se tiene, por definición de campo vectorial gradiente, $f(\sigma_i) \geq f(\tau_i)$ y, dado que σ_{i+1} no está emparejado con τ_i , $f(\sigma_{i+1}) < f(\tau_i)$.

Supongamos ahora que la sucesión verifica la cadena de desigualdades. Dado que $f(\sigma_i) \geq f(\tau_i)$ para cada $i = 0, \dots, r$, por definición de $-\nabla f$, resulta que $\{\sigma_i \prec \tau_i\} \in -\nabla f$. Además, $f(\sigma_{i+1}) \neq f(\sigma_i)$, por lo que $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ y, en conclusión, la sucesión de celdas es un camino respecto a $-\nabla f$. \square

Observación 2.26. Está claro que en un camino de $\tau^{(p+1)}$ a $\sigma^{(p)}$, respecto al campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta f , el valor $f(\tau)$ será mayor estricto que el valor de cualquier celda del camino. Además, por como se define el campo vectorial gradiente, un camino de una celda crítica $\tau^{(p+1)}$ a otra celda $\sigma^{(p)}$, será cualquier camino que parta de una p -cara no crítica de τ y llegue a σ .

Se tiene el siguiente resultado consecuencia directa del anterior lema.

Corolario 2.27. *Dada una función de Morse discreta f sobre X , todo camino respecto a $-\nabla f$ es no cerrado.*

Está claro que un campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta es un campo vectorial discreto. Lo que no resulta tan obvio es el recíproco. Nos preguntamos, por tanto, qué campos vectoriales discretos son el gradiente de alguna función de Morse discreta. Describir directamente funciones de Morse sobre un complejo celular arbitrario, en la que no todas las celdas sean críticas y el número de éstas sea relativamente pequeño, es una tarea delicada. Sin embargo, se puede evitar pasar por este proceso si sabemos la respuesta a la anterior pregunta, ya que ésta nos permitiría trabajar con campos de vectores discretos sin necesidad de especificar los valores de una función de Morse discreta.

El único requisito necesario para que un campo vectorial discreto sea el gradiente de una función de Morse discreta es la propiedad, mencionada en 2.27, de no poseer caminos cerrados.

Teorema 2.28. *Un campo vectorial discreto V definido sobre X es el gradiente de una función de Morse discreta sobre el complejo celular X si, y solo si, V no contiene V -caminos cerrados.*

La demostración de este teorema puede verse en Knudson [12] que, a partir de un campo vectorial discreto V sobre X , construye de forma inductiva una función de Morse discreta f sobre X con $-\nabla f = V$. Sin embargo, demostraremos este resultado en la siguiente sección con la ayuda de la teoría de grafos, con la intención de dejar algo más clara la forma de visualizar si un campo vectorial discreto es gradiente de alguna función de Morse discreta.

A partir de ahora, nos referiremos a campos vectoriales discretos sin caminos cerrados como el *gradiente de Morse discreto*, siendo éste el campo vectorial gradiente de alguna función de Morse discreta que no necesitaremos especificar.

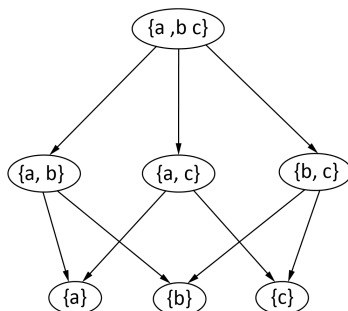
2.3. Diagrama de Hasse asociado a un campo vectorial discreto

La teoría de Morse discreta presenta cierta conexión con la teoría de grafos, lo que enfatiza su naturaleza puramente combinatoria. Este vínculo fue percibido por Chari [3], proporcionando una relación entre un campo vectorial discreto sobre un CW-complejo X y un conjunto independiente de aristas sobre un grafo orientado. Esta conexión nos permite caracterizar aquellos campos vectoriales discretos sobre un complejo celular X que son el gradiente de una función de Morse discreta sobre X . Con ello, obtenemos una demostración alternativa al teorema 2.28.

Definición 2.29. Sea X un CW-complejo regular. Se define el *diagrama de Hasse de X* como el grafo orientado y acíclico H cuyos vértices son el conjunto de celdas de X y las aristas son aquellas que van de la celda τ a la celda σ si $\sigma \prec \tau$ y difieren en una dimensión.

Por lo general, los vértices de un diagrama de Hasse de X un CW-complejo regular se representan en filas de tal modo que cada fila se corresponde con los vértices de igual dimensión y, además, si recorremos las filas de abajo a arriba, vamos en el orden creciente de la dimensión de sus elementos.

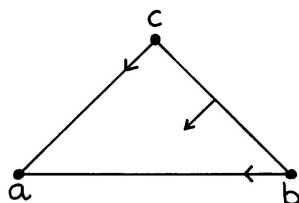
Ejemplo 2.30. La representación del diagrama de Hasse de un triángulo como complejo simplicial, cuyos vértices son $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$, es la siguiente:



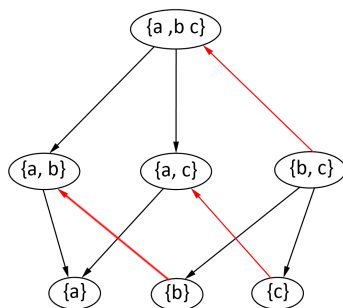
Definición 2.31. Sea V un campo vectorial discreto definido sobre X . Se construye el *diagrama de Hasse asociado a V* de la siguiente forma: partiendo de H el diagrama de Hasse definido a partir de la estructura celular de X , para cada par $\{\sigma \prec \tau\} \in V$ se invierte la flecha del grafo H .

Observación 2.32. Representando el diagrama de Hasse por filas en la dimensión de sus vértices y ordenando estas filas de abajo hacia arriba con el crecimiento de la dimensión de sus elementos, entonces este grafo tiene todas sus aristas apuntando hacia abajo, mientras que si consideramos el diagrama de Hasse asociado a un campo vectorial discreto, aquellas aristas que apunten hacia arriba conforman los pares de celdas del campo.

Ejemplo 2.33. Consideremos el siguiente campo vectorial discreto V sobre un triángulo como complejo simplicial de vértices $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$.



Comparemos el diagrama de Hasse asociado a V , que se muestra en la siguiente imagen, con el diagrama de Hasse original que vimos en el ejemplo 2.30.



Observando el diagrama de Hasse original H , vemos como las únicas aristas de H que se han volteado son $\{a, b\} \rightarrow \{b\}$, $\{a, c\} \rightarrow \{c\}$ y $\{a, b, c\} \rightarrow \{b, c\}$. De este modo, si únicamente sabemos \hat{H} el diagrama de Hasse asociado a V y queremos determinar los pares de celdas que conforman a V , simplemente tendríamos que mirar las aristas que apuntan hacia arriba. En este caso, las celdas asociadas a las aristas que apuntan hacia arriba son $\{\{b\} \prec \{a, b\}\}$, $\{\{c\} \prec \{a, c\}\}$ y $\{\{b, c\} \prec \{a, b, c\}\}$, que, en efecto, son los pares de celdas que determinan a V .

Considerando el diagrama de Hasse asociado a un campo vectorial discreto sobre X , se puede determinar si tal campo vectorial es un gradiente de Morse discreto sobre el complejo, sin más que observar si el grafo es acíclico. Su demostración, adaptada de la de

Zax [25], nos proporciona un resultado análogo al teorema 2.28. Para ello se necesita del siguiente resultado conocido en la teoría de grafos.

Lema 2.34. *Sea G un grafo orientado finito y sea $V(G)$ el conjunto de vértices de G . Entonces, G es acíclico si, y solo si, existe una función $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente decreciente a lo largo de cada camino orientado.*

Teorema 2.35. *Un campo vectorial discreto V es el campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta sobre X si, y solo si, el diagrama de Hasse asociado a V es acíclico.*

Demostración. Sea H el diagrama de Hasse asociado al campo vectorial V que es el gradiente de una función de Morse discreta. Notemos que, por el corolario 2.27, ningún V -camino puede ser cerrado. Supongamos que H contiene un ciclo C . Este ciclo únicamente consta de celdas de dimensión p y $p + 1$, para algún $p \geq 0$, de no ser así, el ciclo recorrería las celdas $\gamma^{(q-1)} \rightarrow \sigma^{(q)} \rightarrow \tau^{(q+1)}$, para cierto $q \geq 1$, y, por la observación 2.32, los pares de celdas $\{\gamma \prec \sigma\}$ y $\{\sigma \prec \tau\}$ estarían en V , lo que supone una contradicción con la definición de campo vectorial discreto V . Tenemos, por tanto, que el ciclo C es de la forma:

$$\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \tau_1^{(p+1)}, \sigma_2^{(p)}, \dots, \tau_r^{(p+1)}, \sigma_0^{(p)}.$$

De nuevo, teniendo en cuenta la observación 2.32, para cada $i \in \{0, \dots, r\}$ resulta que $\{\sigma_i \prec \tau_i\} \in V$ y, denotando $\sigma_{r+1} := \sigma_0$, $\tau_i \succ \sigma_{i+1} \neq \sigma_i$. En conclusión, hemos obtenido un V -camino cerrado, lo cual es imposible.

Recíprocamente, supongamos que H el diagrama de Hasse asociado a un campo vectorial gradiente V es acíclico. Veamos que V es el campo gradiente de alguna función de Morse discreta f . Por el lema anterior 2.34, existe una función $f : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente decreciente a lo largo de cada camino orientado en H . Tomando esta función sobre los vértices y teniendo en cuenta la observación 2.32, se tiene que los pares de celdas $\{\sigma \prec \tau\} \in V$ son aquellos para los que $f(\sigma) > f(\tau)$. Luego, únicamente necesitamos comprobar que la función f es de Morse discreta.

Por construcción del diagrama de Hasse, se tiene:

$$\{\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}\} \notin V \Leftrightarrow f(\sigma) < f(\tau),$$

$$\{\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}\} \in V \Leftrightarrow f(\sigma) > f(\tau).$$

Además, por definición de campo vectorial discreto, ninguna celda está simultáneamente en más de un par de V . Por tanto, si $\sigma^{(p)}$ es una celda tal que $\{\sigma \prec \tau\} \in V$, se tiene que los pares $\{\gamma \prec \sigma\}, \{\sigma \prec \hat{\tau}\} \notin V$ para cada $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ y cada $\hat{\tau}^{(p+1)} \succ \sigma$ con $\hat{\tau} \neq \tau$. Así,

$$\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 1,$$

$$\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} = 0.$$

Análogamente, si $\sigma^{(p)}$ es una celda tal que $\{\gamma < \sigma\} \in V$, se tiene

$$\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0,$$

$$\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} = 1.$$

En conclusión, f es un función de Morse discreta y $V = -\nabla f$. \square

Finalmente, obtenemos una demostración alternativa del teorema 2.28 con el siguiente resultado.

Teorema 2.36. *Sea V un campo vectorial discreto sobre X . V no contiene V -caminos cerrados si, y solo si, el diagrama de Hasse asociado a V es acíclico.*

Demostración. Una implicación está probada en la primera parte de la demostración del teorema anterior. Comprobemos, por tanto, que si H es acíclico, entonces V no puede contener V -caminos cerrados. Supongamos que tenemos

$$\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \dots, \tau_r^{(p+1)}, \sigma_0^{(p)}$$

un V -camino cerrado. Denotando $\sigma_{r+1} = \sigma_0$, para cada $i \in \{0, \dots, r\}$ se tiene que $\{\sigma_i \prec \tau_i\} \in V$, por lo que H tiene una arista orientada $\sigma_i \rightarrow \tau_i$, y que $\{\sigma_{i+1} \prec \tau_i\} \notin V$, por lo que H tiene una arista orientada $\tau_i \rightarrow \sigma_{i+1}$. De este modo, tenemos

$$\sigma_0 \rightarrow \tau_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_r \rightarrow \sigma_0$$

en contradicción con que H sea acíclico. \square

2.4. Colapsos celulares

Intuitivamente, un colapso celular es un retracto por deformación fuerte que empuja el interior de una celda que no es cara de ninguna otra celda. Además, este empuje se realiza desde una de las caras libres de dicha celda máxima, hasta que ésta desaparece por deformación.

Definición 2.37. Sea X un CW-complejo regular. Una celda σ de X se dice *cara libre de X* si es cara de una única celda de X .

Definición 2.38. Un *colapso elemental* es un subcomplejo Y de X resultado de extraer una cara libre a X , esto es, si $\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$ son celdas tal que σ es un cara libre de X , entonces $Y = X \setminus (\sigma \cup \tau)$ es un colapso elemental. En este caso se dice que X *colapsa sobre Y* y se denota por $X \searrow_{\sigma} Y$. En general, se dice que X *colapsa en Y* , que denotaremos por $X \searrow Y$, si existe una sucesión de colapsos elementales $X \searrow_{\sigma_1} X_1 \searrow_{\sigma_2} \dots \searrow_{\sigma_n} X_n$ tal que $X_n = Y$. Además, si $X \searrow Y$, entonces Y es un retracto por deformación de X .

En caso de que X sea un CW-complejo regular que colapsa en Y , se puede extender una función de Morse discreta definida sobre Y a otra sobre X de una forma más eficiente que la propuesta en el lema 2.10.

Lema 2.39. *Sea Y un subcomplejo de X tal que $X \searrow Y$. Cualquier función de Morse discreta f sobre Y se puede extender a una función de Morse discreta g sobre X tal que toda celda de $X \setminus Y$ sea no crítica.*

Demostración. Supongamos que X colapsa en Y por medio de un único colapso elemental, esto es, $X \searrow_{\sigma} Y$ y $X = Y \cup \sigma \cup \tau$. Entonces, dada f una función de Morse sobre Y , considerando $c = \max\{f(\sigma) \mid \sigma \text{ celda de } Y\}$, la función g definida por $g(\gamma) = f(\gamma)$ para toda celda γ de Y , $g(\sigma) = c + 1$ y $g(\tau) = c + 2$, claramente, se tiene que g es una función de Morse discreta sobre X de modo que en $X \setminus Y$ no hay celdas críticas. Procediendo por inducción, se obtiene el resultado. \square

Un colapso celular determina un gradiente de Morse discreto en el siguiente sentido. Supongamos un colapso $X \searrow Y$ dado por una sucesión de colapsos elementales $X = X_0 \searrow_{\sigma_1} X_1 \searrow_{\sigma_2} \cdots \searrow_{\sigma_n} X_n = Y$. Se tiene que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la celda σ_i es cara de una única celda τ_i en X_{i-1} y, además, $\dim \tau_i = \dim \sigma_i + 1$. De no ser así, se tendría que $\sigma_i^{(p)} \prec \tau_i^{(p+r)}$, para $p \geq 0$ y $r \geq 2$, lo que implicaría, por el teorema 2.4, que σ_i sería cara de dos $(p + r - 1)$ -celdas. Queda claro, por tanto, que la familia de pares de celdas $\{\sigma_i \prec \tau_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definen un campo vectorial discreto \mathcal{V} sobre el CW-complejo X . Además, se tiene que todas las celdas del subcomplejo Y de X son celdas críticas de \mathcal{V} .

Este campo vectorial discreto \mathcal{V} definido sobre X y determinado por las celdas participantes en una sucesión de colapsos, es un gradiente de Morse discreto. En su comprobación necesitaremos del siguiente resultado.

Lema 2.40. *Sea $X \searrow_{\sigma_1} X_1 \searrow_{\sigma_2} \cdots \searrow_{\sigma_n} X_n$ una sucesión de colapsos. Si la celda σ_i de X es cara libre de X para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces cualquier \mathcal{V} -camino que contiene a σ_i , parte de σ_i .*

Demostración. Sea un \mathcal{V} -camino que contiene a $\sigma_i^{(p)}$ cara libre de X para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Si este \mathcal{V} -camino partiese de otra p -celda $\sigma_0 \neq \sigma_i$, entonces, por la definición 2.20 de camino de un campo vectorial discreto, $\exists \tau^{(p+1)}$ celda de X con $\tau \succ \sigma_i$ tal que $\{\sigma_i, \tau\} \notin \mathcal{V}$. Por otra parte, dado que σ_i es una celda participe en la sucesión de colapsos, $\exists \tau_i^{(p+1)} \succ \sigma_i$ tal que $\{\sigma_i, \tau_i\} \in \mathcal{V}$. En conclusión, si el \mathcal{V} -camino contiene a σ_i y no parte de la misma, se tiene que σ_i no puede ser cara libre de X . \square

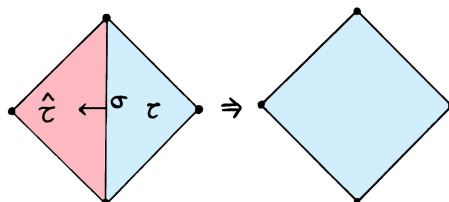
En general, el recíproco no es cierto. En efecto, dado X un CW-complejo regular, supongamos que en la sucesión de colapsos $X \searrow_{\sigma_1} X_1 \searrow_{\sigma_2} \cdots \searrow_{\sigma_n} X_n$ no todas las celdas σ_i tienen la misma dimensión y denotemos por p el mínimo de estas dimensiones. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que σ_i es la primera p -celda de la sucesión de colapsos, esto es, $\dim \sigma_j > p$ para todo $j < i$. Basta con que la celda σ_i no sea cara libre de X para obtener un contraejemplo del recíproco al lema anterior, ya que cualquier \mathcal{V} -camino que contenga a σ_i , partirá de σ_i . De no ser así, el camino contendría un segmento de la forma $\sigma_s^{(p)}, \tau_s^{(p+1)}, \sigma_i^{(p)}$ por lo que $\{\sigma_i, \tau_s\} \notin \mathcal{V}$ y, como σ_i es la primera celda de dimensión p de la sucesión de colapsos, entonces $s > i$, lo que implica que σ_i es cara de τ_s celda del subcomplejo X_{s-1} de X_{i-1} . Pero, por otra parte, σ_i también es cara de la celda τ_i de X_{i-1} , lo que supone una contradicción con que σ_i sea cara libre de X_{i-1} .

Teorema 2.41. *El campo vectorial discreto \mathcal{V} inducido por el colapso $X \searrow Y$ es un gradiente de Morse discreto.*

Demostración. Sea el colapso $X \searrow Y$ dado por la sucesión de colapsos elementales $X = X_0 \searrow_{\sigma_1} X_1 \searrow_{\sigma_2} \cdots \searrow_{\sigma_n} X_n = Y$. En virtud del teorema 2.28, únicamente se tiene que comprobar que \mathcal{V} no posee caminos cerrados. Supongamos Γ un \mathcal{V} -camino cerrado en X . El lema anterior 2.40 nos garantiza que cualquier celda de un \mathcal{V} -camino que no sea celda inicial de éste, no será una cara libre de X . Por tanto, se tiene que ninguna celda del camino Γ será cara libre del complejo celular X , lo que implica, por cómo se define \mathcal{V} , que Γ estará contenido en X_1 . De manera análoga, si ahora Γ es un \mathcal{V} -camino cerrado contenido en X_i , para algún $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que ninguna celda de Γ es cara libre de X_i lo que implica, por definición del campo vectorial discreto \mathcal{V} , que Γ es un \mathcal{V} -camino cerrado contenido en X_{i-1} .

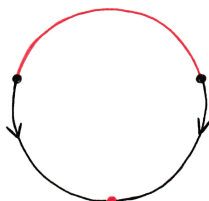
De este modo, procediendo por inducción en la sucesión de colapsos elementales, Γ sería un \mathcal{V} -camino cerrado contenido en X_n , lo cual no es posible ya que en X_n todas sus celdas son críticas de \mathcal{V} . \square

Se ha comprobado como una sucesión de colapsos determina un gradiente de Morse discreto. En realidad, la relación entre ambos es aún más estrecha. Un gradiente de Morse discreto V sobre X facilita un procedimiento para reducir, mediante colapsos, el complejo X . Para ello es necesario no tener en cuenta las celdas críticas de V , es decir, si $\tau^{(p+1)}$ es una celda crítica de V y $\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$ es tal que $\{\sigma^{(p)} \prec \hat{\tau}^{(p+1)}\} \in V$ para $\hat{\tau} \neq \tau$ y, además, σ no es cara de ninguna otra celda distinta de $\hat{\tau}$ y τ , entonces podemos colapsar mediante σ de modo que “estiramos” τ .

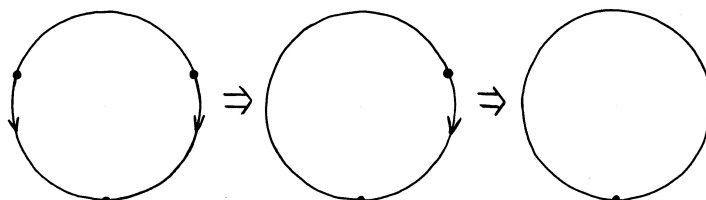


Veamos este procedimiento con algunos ejemplos en donde se pone de manifiesto la idea básica de los dos principales teoremas de la teoría de Morse discreta 2.47 y 2.48: los cambios importantes en el tipo de homotopía tienen lugar en las celdas críticas.

Ejemplo 2.42. 1. Consideremos la función de Morse sobre una descomposición celular de \mathbb{S}^1 definida en el ejemplo 2.6.

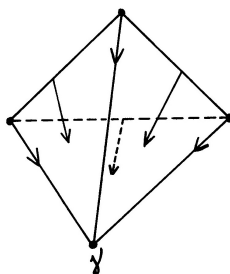


Tenemos que la 0-celda de valor 0 y la 1-celda de valor 2 son celdas críticas, mientras que las restantes son celdas no críticas que definen un gradiente de Morse discreto V tal y como se ve en la anterior imagen. Siguiendo el argumento que se acaba de exponer, podemos “estirar” la 1-celda crítica mediante colapsos determinados por V .



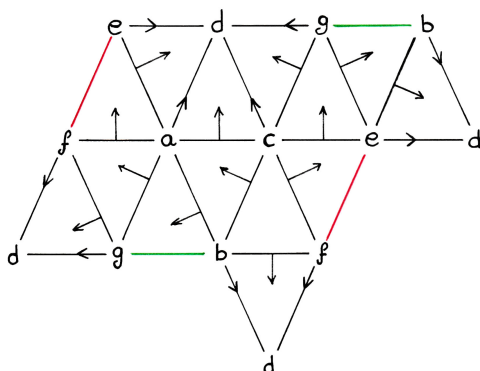
Mediante este proceso, obtenemos la construcción de \mathbb{S}^1 con una 0-celda a la que le pegamos una 1-celda, que se corresponde justamente con los índices de las dos celdas críticas de las que partimos.

2. Consideremos el tetraedro como triangulación de la esfera \mathbb{S}^2 y el gradiente de Morse discreto sobre el tetraedro que se muestra a continuación.

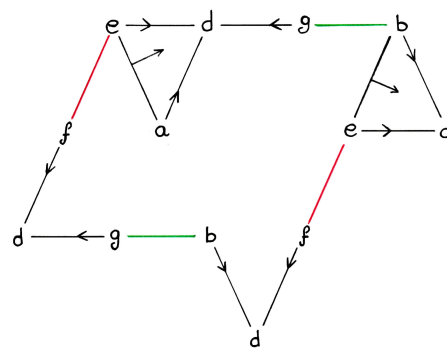
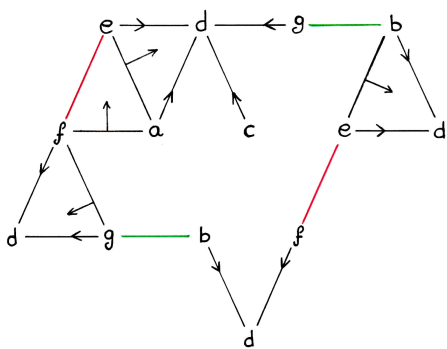
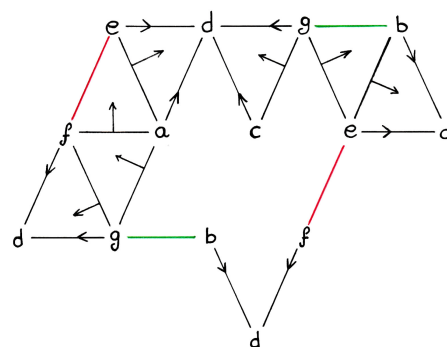
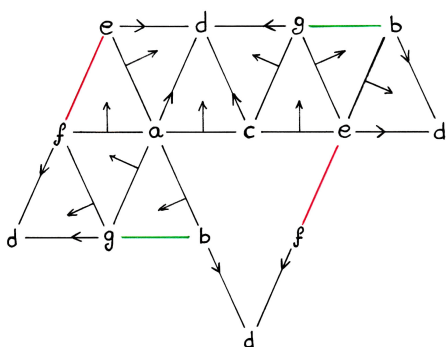


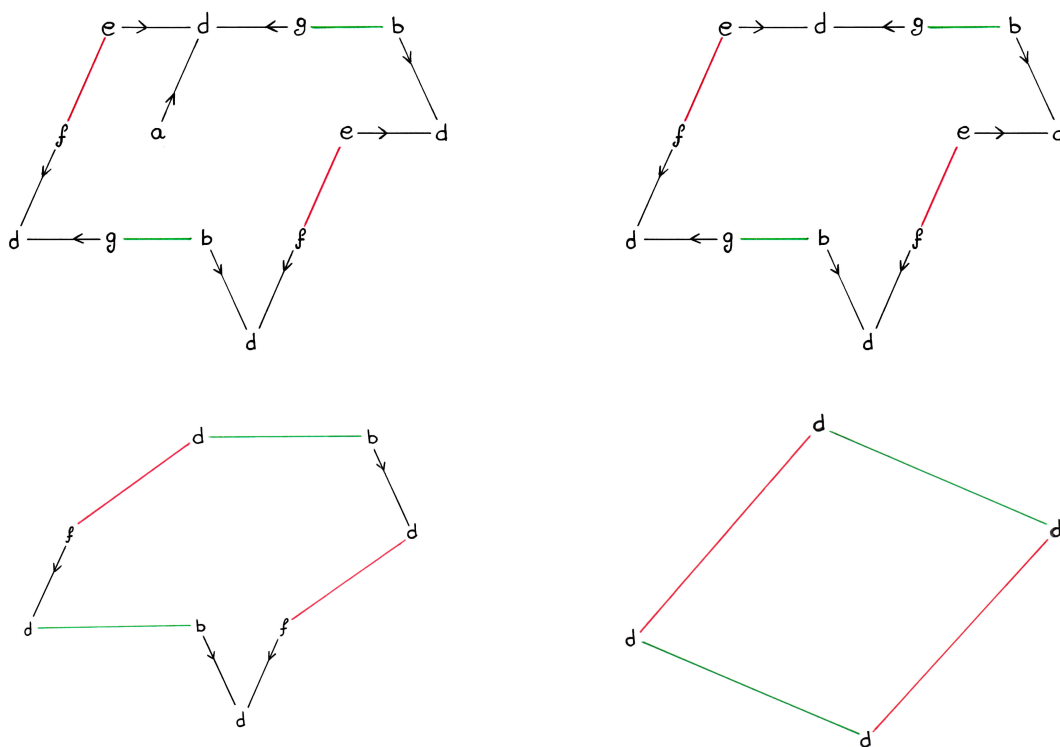
Las celdas críticas de este complejo simplicial son el vértice γ , que es una 0-celda, y el triángulo base, que es una 2-celda. Realizando el procedimiento anterior, obtenemos una 0-celda con una 2-celda pegada a lo largo de su frontera a esa 0-celda, esto es, una estructura de CW-complejo de \mathbb{S}^2 que no es regular.

3. Consideremos el complejo simplicial sobre el 2-toro, formado por siete 0-celdas, veintinueve 1-celdas y catorce 2-celdas, y sea el siguiente gradiente de Morse discreto sobre el complejo simplicial.



Tenemos cuatro celdas críticas: el vértice $\{d\}$, que es una 0-celda, las aristas $\{b, g\}$ y $\{e, f\}$, que son 1-celdas, y el triángulo $\{b, c, f\}$, que es una 2-celda. Siguiendo el anterior procedimiento, veamos que obtenemos la construcción del toro con una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda.





Por lo que obtenemos la construcción del toro mediante una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda.

2.5. Tipo de Homotopía en términos de celdas críticas

En la teoría de Morse clásica, hemos visto cómo los puntos críticos de una función de Morse sobre una variedad diferenciable contenían la información topológica necesaria para poder determinar el tipo homotópico de la variedad. De igual modo, en el contexto discreto, se tendrá que las celdas críticas de una función de Morse discreta definida sobre un CW-complejo regular determinan por completo el tipo homotópico de dicho complejo celular. Además, las dimensiones de las celdas críticas desempeñarán el mismo papel que jugaba el índice de un punto crítico, en el caso diferenciable, a la hora de concretar el tipo de homotopía del complejo.

Definición 2.43. Sea f una función de Morse discreta sobre X . Para cada valor $a \in \mathbb{R}$, se define el *complejo de nivel de f* como el siguiente subcomplejo de X :

$$X^a := \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ f(\sigma) \leq a}} \bigcup_{\gamma \preceq \sigma} \gamma$$

siendo K el conjunto de todas las celdas de X .

En caso de ser necesario especificar que el complejo de nivel X^a es respecto a la función f , lo denotaremos por X_f^a .

Observación 2.44. Para un CW-complejo X no necesariamente regular se tiene la misma definición de complejo de nivel. Ahora bien, no siempre ha de conducir a que tal complejo sea un subcomplejo de X . Para evitar esta situación, es necesario restringirse a ciertas funciones de Morse discretas y, para ello, se exige que el CW-complejo X y una función de Morse discreta sobre él verifiquen unas condiciones denominadas *Hipótesis de Morse Discretas*, las cuales pueden verse en Forman [8].

Notemos que el subcomplejo X^a de X está generado por aquellas celdas σ de X tales que $f(\sigma) \leq a$. Sin embargo, no necesariamente todas las celdas contenidas en este subcomplejo tienen que tener valor menor o igual que a , ya que si $\sigma^{(p)}$ es tal que $f(\sigma) \leq a$, al ser f un función de Morse discreta, puede que exista $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ con $f(\gamma) \geq f(\sigma)$ y esta celda γ , necesariamente, tiene que estar en X^a .

El lema 2.17 nos permite dar una descripción más sencilla de los complejos de nivel. Una celda $\sigma^{(p)}$ con $f(\sigma) > a$ estará en X^a si existe una celda $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq a$. En realidad, basta con mirar aquellas celdas τ de dimensión $p+1$ para las cuales σ sea una de sus caras.

Proposición 2.45. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Se tiene que $\sigma^{(p)}$ es una celda de X^a si, y solo si, $f(\sigma) \leq a$ o existe una celda $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq a$.*

Demostración. Por definición del conjunto de nivel X^a , si $\sigma^{(p)}$ es una de sus celdas, entonces o bien $f(\sigma) \leq a$ o bien $\exists \tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq a$. En este último caso, por el lema 2.17, existirá una celda $\hat{\tau}^{(p+1)}$ tal que $\sigma \prec \hat{\tau} \preceq \tau$ con $f(\hat{\tau}) \leq f(\tau) \leq a$.

Recíprocamente, si $\sigma^{(p)}$ es una celda tal que $f(\sigma) \leq a$, entonces σ está en X^a . En caso contrario, si $f(\sigma) > a$ y, además, $\exists \tau^{(p+1)} \succ \sigma$ con $f(\tau) \leq a$, entonces τ es celda de X^a y, por tanto, σ también. \square

Procedemos a exponer los dos principales resultados de la teoría de Morse discreta. Para ello, fijados $a < b$ números reales, necesitaremos comparar los complejos de nivel X^a y X^b de una función de Morse discreta f . Esta comparación se llevará a cabo analizando los valores de las celdas que hay en $f^{-1}(a, b]$, por lo que sería de gran utilidad poder suponer que la función f es inyectiva.

El aspecto combinatorial de una función de Morse discreta f sobre X permite modificar la propia función obteniendo una función de Morse discreta e inyectiva g , sobre el mismo complejo celular X , con las mismas celdas críticas y, además, fijados $a < b$ números reales, con $X_f^a = X_g^a$ y $X_f^b = X_g^b$. A continuación mostramos un procedimiento para obtener tal función g .

Primero, modificamos f en la celda $\sigma^{(p)}$ de X de la siguiente forma. Si σ es una celda crítica de f tomamos $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma)$, en caso contrario tenemos una de las dos siguientes condiciones:

1. $\exists \hat{\tau}^{(p+1)} \succ \sigma$ tal que $f(\hat{\tau}) \leq f(\sigma)$.
2. $\exists \hat{\gamma}^{(p-1)} \prec \sigma$ tal que $f(\hat{\gamma}) \geq f(\sigma)$.

Supongamos que se verifica 1.

- Si $f(\hat{\tau}) < f(\sigma)$, tomamos $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma)$.
- Si $f(\hat{\tau}) = f(\sigma)$, tomamos $0 < \varepsilon < \min\{|f(\tau) - f(\sigma)| \mid \tau^{(p+1)} \succ \sigma \text{ y } \tau \neq \hat{\tau}\}$ y definimos $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma) + \varepsilon$.

De este modo, $f(\tau) > \hat{f}(\sigma)$ para cada $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$ con $\tau \neq \hat{\tau}$. Por lo que \hat{f} es una función de Morse con las mismas celdas críticas que f y $f(\gamma) \neq \hat{f}(\sigma) \neq f(\tau)$ para toda $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ y toda $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$. Además, fijado $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $X_f^c = X_{\hat{f}}^c$. En efecto, si $c < f(\sigma)$, la igualdad está clara ya que $f(\sigma) < \hat{f}(\sigma)$ y $f(\omega) = \hat{f}(\omega)$ para cada celda $\omega \neq \sigma$. Si $c \geq f(\sigma)$, se tiene que σ está en el complejo de nivel X_f^c y, dado que $\hat{f} \geq f \Rightarrow X_{\hat{f}}^c \subset X_f^c$, basta comprobar que σ también está en el complejo $X_{\hat{f}}^c$, lo cual es cierto ya que $\hat{f}(\hat{\tau}) = f(\hat{\tau}) \leq f(\sigma) \leq c$.

Supongamos que se verifica 2.

- Si $f(\hat{\gamma}) > f(\sigma)$, tomamos $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma)$.
- Si $f(\hat{\gamma}) = f(\sigma)$, tomamos $0 < \varepsilon < \min\{|f(\gamma) - f(\sigma)| \mid \gamma^{(p-1)} \prec \sigma \text{ y } \gamma \neq \hat{\gamma}\}$ y definimos $\hat{f}(\sigma) = f(\sigma) - \varepsilon$.

Así, $f(\gamma) < \hat{f}(\sigma)$ para cada $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ con $\gamma \neq \hat{\gamma}$. Por lo que \hat{f} es una función de Morse con las mismas celdas críticas que f y $f(\gamma) \neq \hat{f}(\sigma) \neq f(\tau)$ para toda $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ y toda $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$. Además, fijado $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $X_f^c = X_{\hat{f}}^c$. En efecto, si $c \geq f(\sigma)$ está clara la igualdad ya que $\hat{f}(\sigma) < f(\sigma) \leq c$ y para cada celda $\omega \neq \sigma$ se tiene que $\hat{f}(\omega) = f(\omega)$. Si $c < f(\sigma)$, dado que $f(\tau) > f(\sigma) > c$ para toda $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$, la celda σ no está en el complejo de nivel X_f^c . Como $f \geq \hat{f}$, $X_f^c \subset X_{\hat{f}}^c$ y, por tanto, basta comprobar que σ tampoco está en $X_{\hat{f}}^c$, lo cual es cierto ya que para cada $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$ se tiene que $\hat{f}(\tau) = f(\tau) > f(\sigma) > c$.

Haciendo este proceso para cada celda σ de X , obtenemos \hat{f} una función de Morse discreta con los mismos puntos críticos que f tal que $X_f^c = X_{\hat{f}}^c$ para cada $c \in \mathbb{R}$ y, además, fijada $\sigma^{(p)}$ se verifica que $\hat{f}(\gamma) \neq \hat{f}(\sigma) \neq \hat{f}(\tau)$ para toda $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma \prec \tau^{(p+1)}$. No obstante, esto no significa que \hat{f} sea inyectiva. Para ello, realizamos los siguientes cambios sobre \hat{f} en la celda $\sigma^{(p)}$. Tomamos $\varepsilon_1 = \min\{|\hat{f}(\tau) - \hat{f}(\sigma)| \mid \tau^{(p+1)} \succ \sigma\}$ y $\varepsilon_2 = \min\{|\hat{f}(\gamma) - \hat{f}(\sigma)| \mid \gamma^{(p-1)} \prec \sigma\}$. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ y consideremos $0 \leq \delta < \varepsilon$ de modo que si definimos $g(\sigma) = \hat{f}(\sigma) \pm \delta$ tenemos que $g(\sigma)$ es distinto de todos los otros valores de \hat{f} . Está claro que g es una función de Morse discreta sobre X con los mismos puntos críticos que \hat{f} . Además, determinando el signo de δ de forma adecuada, obtenemos que, para $a < b$ números reales fijos, $X_g^a = X_{\hat{f}}^a$ y $X_g^b = X_{\hat{f}}^b$. Para ello, si $\hat{f}(\sigma) \leq a$ definimos

$g(\sigma) = \hat{f}(\sigma) - \delta$, si $a < \hat{f}(\sigma) \leq b$ tomamos $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que $g(\sigma) = \hat{f}(\sigma) - \delta_1 > a$ y si $b < \hat{f}(\sigma)$ definimos $g(\sigma) = \hat{f}(\sigma) + \delta$.

En conclusión, una vez realizado esto para cada celda de X , obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.46. *Dada una función de Morse discreta f sobre X , para $a < b$ números reales fijos existe g una función de Morse discreta sobre X e inyectiva con las mismas celdas críticas que f y, además, $X_g^a = X_f^a$ y $X_g^b = X_f^b$.*

Tal y como sucede en la teoría de Morse diferenciable, los cambios en el tipo de homotopía de los complejos de nivel tienen lugar una vez se alcanza una celda crítica. Estos cambios quedan reflejados con los teoremas 2.47 y 2.48, análogos a los resultados 1.25 y 1.28, aunque, al trabajar desde una perspectiva combinatoria, presentan la ventaja de que sus demostraciones son más simples.

Teorema 2.47. *Sea f una función de Morse discreta sobre X . Si $a < b$ son números reales tales que $f^{-1}(a, b]$ no contiene ninguna celda crítica, entonces:*

$$X^b \searrow X^a.$$

Demostración. El lema 2.46 nos permite suponer que f es inyectiva. Supongamos, además, que hay una única celda $\sigma^{(p)}$ tal que $f(\sigma) \in (a, b]$. De no ser así, el hecho de ser f inyectiva nos garantiza la existencia de una partición de $(a, b]$ de tal modo que para cada subintervalo únicamente hay una celda cuyo valor está contenido en el mismo, por lo que, con el argumento seguido a continuación, tendríamos una sucesión de colapsos elementales de forma que $X^b \searrow X^a$.

Dado que $\sigma^{(p)}$ es la única celda tal que $f(\sigma) \in (a, b]$, se tiene:

$$X^b = X^a \cup \left(\bigcup_{\gamma \preceq \sigma} \gamma \right).$$

Para determinar cómo es exactamente X^b en función de X^a , analicemos cuales de las celdas $\gamma \preceq \sigma$ están en X^a . Por el lema 2.12, dado que f es inyectiva se tiene una de las dos siguientes afirmaciones:

1. $\exists \hat{\tau}^{(p+1)} \succ \sigma$ tal que $f(\hat{\tau}) < f(\sigma)$.
2. $\exists \hat{\gamma}^{(p-1)} \prec \sigma$ tal que $f(\hat{\gamma}) > f(\sigma)$.

Si se verifica 1, dado que $f(\hat{\tau}) < f(\sigma) \leq b$ y $\hat{\tau} \notin f^{-1}(a, b]$, se tiene que $\hat{\tau}$ está en el complejo de nivel X^a y, por tanto, σ también lo está. Entonces, $X^b = X^a$ lo que concluiría la demostración.

Si se verifica 2, para cada $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$ se tiene que $f(\tau) > f(\sigma) > a$, por tanto, por la proposición 2.45, σ no está en el complejo X^a . Por otra parte, para cada $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ con

$\gamma \neq \hat{\gamma}$ se tiene que $f(\gamma) < f(\sigma)$ y, dado que $f^{-1}(a, b] = \{\sigma\}$, $f(\gamma) \leq a$. Esto implica que toda $\nu \prec \sigma$ con $\nu \neq \hat{\gamma}$ está en el complejo de nivel X^a . Por último, veamos que $\hat{\gamma}$ no está contenida en X^a . En efecto, $f(\hat{\gamma}) > f(\sigma) > a$ y, además, para cada $\hat{\sigma}^{(p)} \succ \hat{\gamma}$ con $\hat{\sigma} \neq \sigma$, se tiene que $f(\hat{\sigma}) > f(\hat{\gamma}) > a$, por lo que la proposición 2.45 nos garantiza que $\hat{\gamma}$ no está contenida en X^a .

Con todo ello,

$$X^b = X^a \cup \sigma \cup \hat{\gamma}.$$

Además, $\hat{\gamma} \prec \sigma$ es cara libre de X^b . De no ser así, $\hat{\gamma}$ sería cara de otra celda ω contenida en X^b y, como $\omega \neq \sigma$, ω estaría contenida en X^a en contradicción con que $\hat{\gamma} \prec \omega$ no esté contenida en X^a . En conclusión,

$$X^b = X^a \cup \sigma \cup \hat{\gamma} \setminus X^a.$$

□

Teorema 2.48. *Sea f una función de Morse discreta sobre X y $\sigma^{(p)}$ una celda crítica de f tal que $f(\sigma) \in (a, b]$ para $a < b$ números reales de modo que $f^{-1}(a, b]$ no contiene más celdas críticas que σ . Entonces, el complejo de nivel X^b tiene el mismo tipo de homotopía que X^a con una p -celda e^p pegada a lo largo de su frontera.*

Demostración. Por el lema 2.46, podemos suponer que f es inyectiva y, por tanto, tomar $a \leq \hat{a} < \hat{b} \leq b$ tal que $f^{-1}(\hat{a}, \hat{b}]$ únicamente conste de la celda $\sigma^{(p)}$. Como en $f^{-1}(a, b]$ no hay más celdas críticas que σ , el teorema 2.47 nos garantiza que $X^a \simeq X^{\hat{a}}$ y $X^{\hat{b}} \simeq X^b$, siendo \simeq la relación “tener el mismo tipo de homotopía”. Falta comprobar que $X^{\hat{b}}$ es homotópicamente equivalente a $X^{\hat{a}}$. Tenemos que σ es la única celda en $f^{-1}(\hat{a}, \hat{b}]$, así

$$X^{\hat{b}} = X^{\hat{a}} \cup \left(\bigcup_{\gamma \preceq \sigma} \gamma \right).$$

Dado que σ es celda crítica, para cada $\gamma^{(p-1)} \prec \sigma$ se tiene que $f(\gamma) < f(\sigma) \leq \hat{b}$, por lo que $f(\gamma) \leq \hat{a}$, lo que nos asegura de que cualquier $\nu \prec \sigma$ está en el complejo de nivel $X^{\hat{a}}$. Luego $\partial\sigma$ está contenido en $X^{\hat{a}}$. Por otra parte, como $f(\sigma) > \hat{a}$ y para cada $\tau^{(p+1)} \succ \sigma$ se tiene que $f(\tau) > f(\sigma)$, entonces σ no está contenida en $X^{\hat{a}}$.

En conclusión,

$$X^{\hat{b}} = X^{\hat{a}} \cup_{\partial\sigma} \sigma$$

y, por tanto, al ser $\sigma^{(p)}$ homeomorfa a una p -celda e^p , $X^{\hat{b}}$ y $X^{\hat{a}} \cup_{\partial e^p} e^p$ tienen el mismo tipo de homotopía. □

Como consecuencia directa de estos dos teoremas, se tiene el siguiente resultado central de la teoría de Morse discreta.

Teorema 2.49. *Sea f una función de Morse discreta sobre X . Entonces, X tiene el mismo tipo de homotopía que un CW-complejo que consta de una λ -celda por cada celda crítica de f de dimensión λ .*

Este teorema proporciona las desigualdades de Morse débiles teniendo en cuenta que dos espacios con el mismo tipo de homotopía tienen homologías isomorfas y que para cualquier complejo celular X , si denotamos por c_p el número de p -celdas de X , entonces $c_p \geq \beta_p$.

Corolario 2.50. *Sean f una función de Morse discreta sobre X y m_p el número de p -celdas críticas de f . Entonces, para cada p se tiene que*

$$m_p \geq \beta_p.$$

Además,

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k m_k.$$

2.6. Cancelación de celdas críticas

Uno de los principales problemas en la teoría de Morse, tanto en el caso diferenciable como en el discreto, es determinar la posibilidad de poder encontrar una función de Morse sobre un espacio dado con la menor cantidad de puntos críticos. En la teoría de Morse clásica se ha visto como dos puntos críticos p y q , con índices consecutivos de una función de Morse f sobre M una variedad diferenciable y compacta, se pueden anular si se tiene un gradiente como campo vectorial sobre M de tal forma que esos dos puntos críticos estén conectados por medio de una única curva integral. En estas condiciones, el teorema 1.38 nos aseguraba la posibilidad de perturbar la función f obteniendo otra función de Morse sobre M con los mismos puntos críticos a excepción de p y q . Este resultado también se tiene en la teoría de Morse discreta. No obstante, el sentido que tenía perturbar una función de Morse diferenciable, ahora, en el caso discreto, ya no se tiene debido a que pequeñas perturbaciones en los valores de las celdas pueden no afectar al criterio de ser celda crítica. Por ello, las perturbaciones no se harán sobre la función de Morse discreta, sino sobre el gradiente de Morse discreto.

Teorema 2.51. *Sea V un gradiente de Morse discreto sobre X . Si $\sigma^{(p)} \not\prec \tau^{(p+1)}$ son dos celdas críticas de V tales que existe un único V -camino de τ a σ , entonces existe otro gradiente de Morse discreto W sobre X con las mismas celdas críticas que V exceptuando a σ y τ , que ya no lo son para W . Además, los campos vectoriales discretos V y W coinciden excepto a lo largo de ese único V -camino de τ a σ .*

Demostración. Sea Γ el único V -camino de $\tau^{(p+1)}$ a $\sigma^{(p)}$, esto es, existe una única celda $\sigma_0^{(p)} \prec \tau$ tal que Γ es el camino

$$\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \dots, \tau_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)} = \sigma.$$

Definimos W del siguiente modo:

- Si ν y η son celdas de dimensión consecutiva que no son partícipes en el camino Γ y tal que $\{\nu \prec \eta\} \in V$, entonces $\{\nu \prec \eta\} \in W$.

- $\{\sigma_i \prec \tau_{i-1}\} \in W$ para todo $i \in \{1, \dots, r+1\}$.
- $\{\sigma_0 \prec \tau\} \in W$.

Está claro que W es un campo vectorial discreto que coincide con V excepto a lo largo del camino Γ . Además, dado que $\{\sigma \prec \tau_r\}$ y $\{\sigma_0 \prec \tau\}$ son pares de celdas de W , W tiene las mismas celdas críticas que V a excepción de σ y τ . Falta comprobar que W es un gradiente de Morse discreto. Para ello, veamos que W no contiene caminos cerrados. Dado que ningún V -camino es cerrado, si W tuviese uno que sí lo fuese, éste debería de contener una p -celda que estuviese en el camino Γ y otra p -celda que no estuviese en Γ . Por tanto, un W -camino cerrado debe contener un segmento de la siguiente forma:

$$\nu_0^{(p)} = \sigma_i, \eta_0^{(p+1)}, \nu_1^{(p)}, \dots, \eta_{s-1}^{(p+1)}, \nu_s^{(p)} = \sigma_j$$

para algún $i \in \{0, 1, \dots, r+1\}$ e $i \leq j \leq r+1$, con $s \geq 1$ y, además, para cada $k \in \{1, \dots, s-1\}$ se tiene que ν_k y η_k no son celdas partícipes del camino Γ . En particular, tenemos que el segmento, que denotaremos por Ω , dado por

$$\nu_1^{(p)}, \dots, \eta_{s-1}^{(p+1)}, \nu_s^{(p)} = \sigma_j$$

es un V -camino. Veamos que Ω también es un segmento de un V -camino de τ a σ distinto de Γ . Si $i = 0$, dado que $\{\sigma_0 \prec \tau\} \in W$, se tiene que $\eta_0 = \tau$ y, por tanto, $\nu_1^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$. Luego,

$$\nu_1, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}, \nu_s = \sigma_j, \tau_j, \dots, \tau_r = \sigma$$

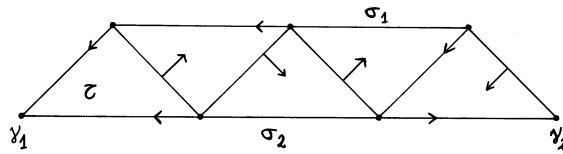
es un V -camino de τ a σ distinto de Γ , lo que contradice la unicidad del V -camino Γ . Si $i \neq 0$, resulta que $\eta_0 = \tau_{i-1} \succ \nu_1$ y $\nu_1 \neq \sigma_{i-1}$, por lo que si añadimos el segmento Ω al camino Γ , obtenemos el siguiente V -camino

$$\sigma_0, \tau_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \tau_{i-1} = \eta_0, \nu_1, \eta_1, \dots, \sigma_j, \tau_j, \dots, \sigma_r = \sigma$$

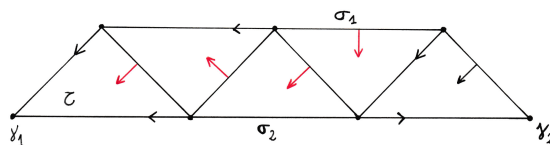
lo que contradice que Γ sea el único V -camino de τ a σ . □

En esencia, la relación que hay entre los gradientes de Morse discretos V y W es la de ser el mismo campo vectorial fuera del único V -camino Γ de τ a σ , mientras que las flechas de V partícipes en el V -camino Γ se voltean para conseguir W . Se puede observar este procedimiento en el siguiente ejemplo.

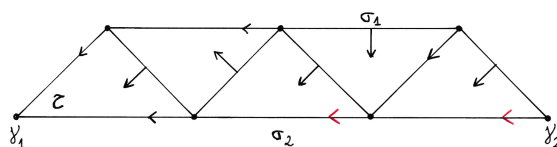
Ejemplo 2.52. Consideremos el siguiente gradiente de Morse discreto V siendo $\tau, \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1$, y γ_2 sus celdas críticas.



Dado que se tiene un único V -camino de τ a σ_1 , se pueden cancelar estas dos celdas críticas mediante el siguiente gradiente de Morse discreto W_1 .



Tenemos que el campo vectorial W_1 tiene como celdas críticas a σ_2 , γ_1 y γ_2 . Además, existe un único camino de σ_2 a γ_2 , por lo que este par de celdas también se puede cancelar mediante el siguiente gradiente de Morse discreto W_2 , quedando únicamente una celda crítica.



Notemos que este procedimiento también se podría hacer cancelando el par de celdas σ_1 y γ_2 y el par σ_2 y γ_1 , obteniendo, así, un gradiente de Morse discreto con su única celda crítica τ .

El hecho de que la única condición exigida en el teorema 2.51 sea la existencia de un único camino que conecte dos celdas críticas de dimensiones consecutivas, podría llevarnos a pensar que es sencillo establecer una función de Morse discreta con la mínima cantidad de celdas críticas posible. Sin embargo, detectar los caminos existentes entre celdas críticas resulta ser un problema difícil, como muestran Joswig y Pfetsch [11].

Al proceso de pasar del gradiente de Morse discreto V al W y, con ello, cancelar un par de celdas críticas $\tau^{(p+1)}$ y $\sigma^{(p)}$, se denomina “muerte” de las celdas τ y σ . Así mismo, se tiene la noción análoga de “nacimiento” de un par de celdas críticas.

Teorema 2.53. *Sea V un gradiente de Morse discreto sobre X . Supongamos que $\sigma^{(p)}$ y $\tau^{(p+1)}$ son celdas no críticas de V tales que existe un único V -camino Γ de la siguiente forma*

$$\sigma = \sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}, \sigma_1^{(p)}, \dots, \tau_s^{(p+1)} = \tau, \sigma_{s+1}^{(p)}.$$

Entonces, existe un gradiente de Morse discreto W sobre X tal que coincide con V excepto a lo largo del V -camino Γ y, además, las celdas críticas de W son las de V junto con σ y τ .

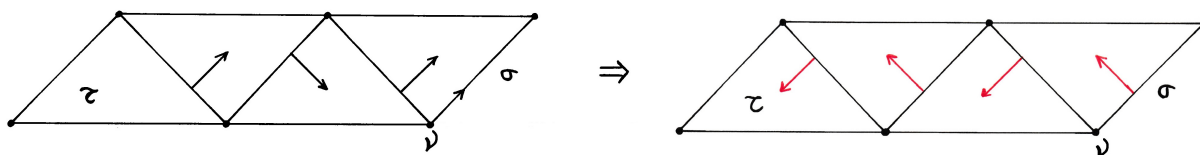
Demostración. En las condiciones del teorema, definimos el campo vectorial discreto W del siguiente modo:

- Si ν y η son celdas de dimensión consecutiva que no son partícipes en el camino Γ y tal que $\{\nu \prec \eta\} \in V$, entonces $\{\nu \prec \eta\} \in W$.
- $\{\sigma_i \prec \tau_{i-1}\} \in W$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.

De este modo, W y V coinciden fuera del camino Γ y las celdas σ y τ no forman parte de ningún par de celdas de W , por lo que son críticas para W . La comprobación de que W no posee W -caminos cerrados sigue el mismo procedimiento que en el teorema anterior 2.51. \square

Observación 2.54. Así como en el teorema 2.51 es necesario exigir que la celda crítica $\sigma^{(p)}$ no sea cara de la celda crítica $\tau^{(p+1)}$, ya que de ser así el gradiente de Morse discreto W construido en la demostración tendría un camino cerrado pasando por σ y τ , en este último teorema 2.53 resulta que esta condición no es necesaria exigirla. De hecho, el ejemplo más sencillo en las condiciones de éste teorema 2.53 es cuando $\sigma^{(p)} \prec \tau^{(p+1)}$, ya que bastaría con eliminar el vector que va de σ a τ para convertirlas en celdas críticas.

Usando la idea de voltear las flechas de un gradiente de Morse discreto V , podemos mover una celda crítica de V a otra celda que no lo es del siguiente modo. Si $\tau^{(p+1)}$ es una celda crítica de V tal que para alguna celda $\sigma^{(p)}$ se tiene un único V -camino de τ a σ y además $\{\nu \prec \sigma\}$ o $\{\sigma \prec \nu\}$ está en V , para alguna celda ν , entonces, volteando V a lo largo de ese único camino tal y como hicimos en la demostración 2.51, obtenemos que τ y σ son celdas no críticas, mientras que ν sí lo es. La siguiente imagen muestra un ejemplo de este procedimiento.



Capítulo 3

Epílogo

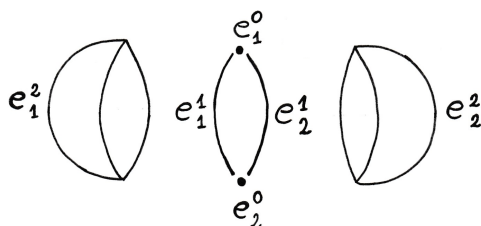
3.1. De la teoría de Morse clásica a la discreta

La perspectiva combinatorial de la teoría de Morse discreta, presenta la ventaja de trabajar con objetos cuya estructura se describe de una manera más simple que en la teoría de Morse clásica. Además, la discretización nos permite adaptar los resultados de la versión diferenciable al ámbito computacional, que simplifica la obtención de información de la topología del espacio en el que se trabaja. Dicho esto, resulta natural preguntarse si dada una función de Morse f sobre una variedad diferenciable y compacta M , existe una función de Morse discreta sobre una descomposición celular de M de tal modo que conserve el comportamiento de f , ya que esto implicaría que el proceso de obtención de información sobre la variedad M se simplificase. La respuesta es afirmativa, como muestra el siguiente resultado proporcionado por Gallais [9].

Teorema 3.1. *Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse sobre M una variedad diferenciable y compacta. Entonces, existe una C^1 -triangulación de M y un gradiente de Morse discreto W sobre la triangulación tal que se tiene una correspondencia biunívoca entre las celdas críticas de W y los puntos críticos de f .*

Para tener una idea de la relación que existe entre la teoría de Morse clásica y la discreta, pensemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Hemos visto, en 1.4.1, que la función altura $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre la 2-esfera es una función de Morse con exactamente dos puntos críticos: N y S , que son el polo norte y sur, respectivamente. Consideremos X la siguiente CW-descomposición regular de la 2-esfera que consta de dos 0-celdas e_1^0 y e_2^0 , dos 1-celdas e_1^1 y e_2^1 , y dos 2-celdas e_1^2 y e_2^2 .



Construyamos una función de Morse discreta F sobre X que refleje el mismo comportamiento que f . Para ello, necesitaremos que F únicamente tenga 2 celdas críticas. Dado que F debe alcanzar el mínimo sobre alguna 0-celda crítica, tomemos

$$F(e_1^0) = 0$$

y seleccionemos los valores de sus 1-celdas adyacentes estrictamente mayores que 0 para que e_1^0 sea crítica. Tomemos, por ejemplo,

$$F(e_1^1) = 1 \text{ y } F(e_2^1) = 2.$$

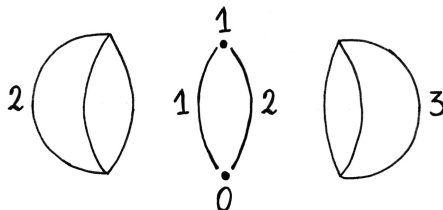
A continuación, para que la 0-celda e_2^0 no sea crítica, tomamos

$$F(e_2^0) = 1.$$

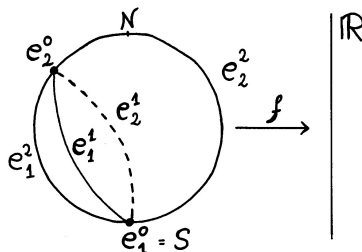
Nos falta dar valores a las 2-celdas, de las cuales queremos que solamente una sea crítica. Además, dado que la 1-celda e_1^1 verifica $F(e_1^1) = F(e_2^0) = 1$, para que F sea una función de Morse discreta, necesitamos que $F(e_2^2) > F(e_1^1) = 1$ y $F(e_2^2) > F(e_1^1) = 1$. Por otra parte, $F(e_2^1) = 2$ es estrictamente mayor que el valor de las dos 0-caras de e_2^1 , y como únicamente buscamos que haya dos celdas críticas, tomemos

$$F(e_1^2) = 2 > 1 \text{ y } F(e_2^2) = 3 > 2.$$

En conclusión, tenemos la siguiente función de Morse discreta sobre X .



F tiene exactamente dos celdas críticas: una 0-celda y una 2-celdas. Además, una vez obtenida la 2-esfera mediante el pegado de estas 6 celdas, podemos pensar que las dos celdas críticas se corresponden con los puntos críticos de la función de Morse altura f del siguiente modo: la 0-celda crítica e_1^0 es el polo sur de la esfera, S , y la 2-celda crítica contiene en su interior el polo norte de S^2 , N .



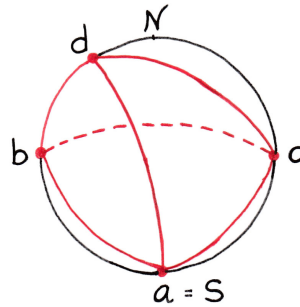
Esta misma comparación se puede hacer sobre una triangulación de la esfera \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 3.3. De nuevo, consideremos $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura con sus puntos críticos N y S . Buscamos una función de Morse discreta F sobre una triangulación de \mathbb{S}^2 con exactamente dos celdas críticas. Al estar la función F definida sobre una triangulación sin borde, por los resultados 2.14 y 2.15, tenemos que tanto el mínimo como el máximo de F se alcanzarán en 0-celdas críticas y en 2-celdas críticas, respectivamente. Por tanto, para tener una correspondencia biunívoca con los puntos críticos de f , N y S , necesitamos que F únicamente tenga a un vértice y a un triángulo como celdas críticas en la triangulación. Además, para una mayor correspondencia entre los puntos críticos de f y las celdas críticas de F , dado que N tiene índice 0, tomemos la triangulación de modo que el vértice crítico de F se corresponda con N , y dado que el punto crítico S tiene índice 2, consideremos un triángulo crítico de F de tal modo que contenga en su interior a S .

Teniendo en cuenta todo ello, consideramos la siguiente triangulación de la esfera \mathbb{S}^2 :

$$T = \left\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \right. \\ \left. \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \right\}$$

donde el punto S se corresponde con el vértice $\{a\}$ y el punto N está en el interior del triángulo $\{b, c, d\}$, tal y como puede verse en la siguiente imagen.



Partimos de la función de Morse discreta que asigna a cada celda su dimensión. Modifiquémosla de tal modo que $\{a\}$ y $\{b, c, d\}$ sean las únicas celdas críticas de la triangulación. Dado que el mínimo de F tiene que ir en el vértice $\{a\}$, tomamos

$$F(\{a\}) = 0 \text{ y } F(\{a, b\}) = F(\{a, c\}) = F(\{a, d\}) = 1.$$

Los vértices $\{b\}$ y $\{c\}$ tienen que ser no críticos, luego tomamos

$$F(\{b\}) = F(\{c\}) = 1$$

y, como $F(\{a, b\}) = F(\{a, c\}) = 1$, las aristas restantes que conectan con $\{b\}$ y $\{c\}$ deben de tener su valor estrictamente mayor que 1. Por tanto, tomamos

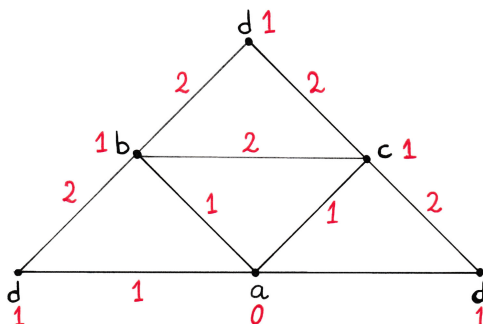
$$F(\{b, c\}) = F(\{b, d\}) = F(\{c, d\}) = 2.$$

Así, como las aristas que conectan con $\{d\}$, sus valores son $F(\{a, d\}) = 1$ y $F(\{b, d\}) = F(\{c, d\}) = 2$, basta tomar

$$F(\{d\}) = 1$$

para que sea celda no crítica.

Resumiendo, tenemos F definida en los vértices y aristas del siguiente modo:



Falta definir F sobre los triángulos de forma que $\{b, c, d\}$ sea el único triángulo crítico. Dado que cada uno de los triángulos $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ y $\{a, c, d\}$ tiene sus tres aristas con valores 1, 1 y 2, basta tomar

$$F(\{a, b, c\}) = F(\{a, b, d\}) = F(\{a, c, d\}) = 2$$

para que F sea discreta y cada uno de estos tres triángulos sea no crítico.

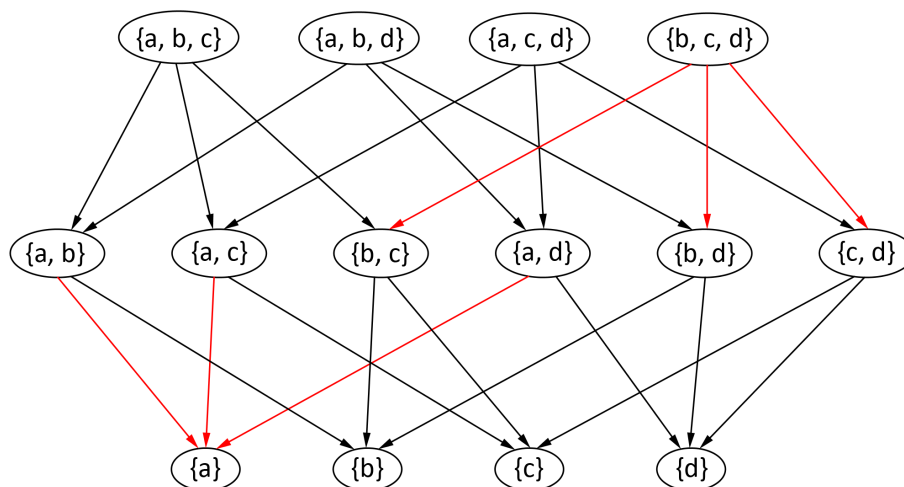
Finalmente, como $F(\{b, c\}) = F(\{b, d\}) = F(\{c, d\}) = 2$, basta tomar

$$F(\{b, c, d\}) = 3$$

para que este triángulo sea crítico.

No obstante, en general, definir una función de Morse discreta directamente sobre un CW-complejo regular X , que además conste de un número relativamente pequeño de celdas críticas no es una tarea sencilla. Hemos visto, con el teorema 2.28, que se puede evitar este proceso si definimos un gradiente de Morse discreto sobre el complejo celular ya que éste determina una función de Morse discreta sobre X . Es más, el teorema 2.35 nos permite obtener un gradiente de Morse discreto para X trabajando sobre el diagrama de Hasse de X . Hagamos esto sobre el anterior ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.4. Tomemos la anterior triangulación T y consideremos H el diagrama de Hasse de T .



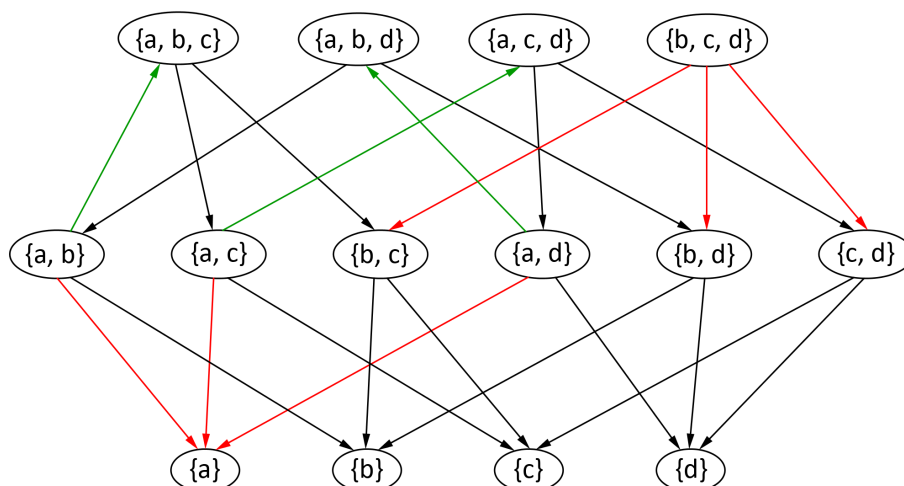
Observemos que este diagrama de Hasse es el asociado a la función de Morse discreta que asigna a cada celda su dimensión, de la cual partimos en el anterior ejemplo 3.3 para construir la función de Morse discreta que buscábamos. De igual modo, modifiquemos este diagrama de Hasse H de tal forma que obtengamos un nuevo diagrama de Hasse acíclico donde las aristas que hemos modificado en H nos den un gradiente de Morse discreto V . Además, como buscamos que V tenga exactamente dos celdas críticas $\{a\}$ y $\{b, c, d\}$, necesitamos que las aristas en color rojo de la imagen no sean modificadas.

En conclusión, buscamos que se verifique lo siguiente:

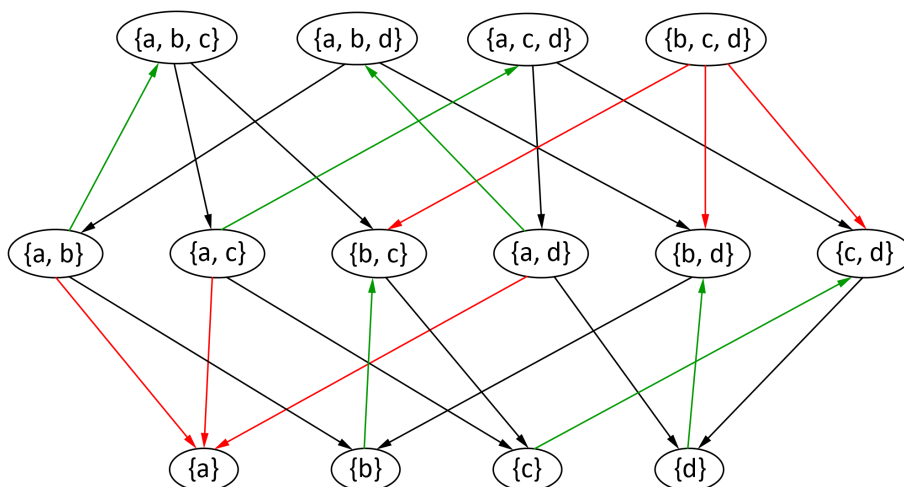
1. Todo vértice de T distinto de $\{a\}$ expulsa una flecha.
2. Toda arista de T o bien recibe una flecha por debajo o bien expulsa una flecha hacia arriba.
3. Todo triángulo de T distinto de $\{b, c, d\}$ recibe una flecha.

Por tanto, tendremos tres aristas donde cada una de ellas expulsará una flecha hacia un triángulo y otras tres, distintas de las anteriores, que recibirán una flecha de un vértice. Teniendo en cuenta que además se deben de cumplir las condiciones 1 y 2, las tres aristas que expulsan una flecha hacia los triángulos no pueden ser las tres aristas de un mismo vértice distinto de $\{a\}$. En efecto, de ser así, ese vértice no podría expulsar ninguna flecha ya que, en este caso, habría una arista de tal vértice que recibiría una flecha por debajo y expulsaría una flecha hacia arriba, incumpliendo la condición 2.

En conclusión, tomamos las aristas $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$, que son las tres aristas del vértice $\{a\}$, y expulsemos una flecha hacia arriba que parta de cada una de estas aristas y de tal modo que se verifique la condición 3. Por ejemplo:



Finalmente, volteamos una flecha por cada vértice, de modo que cada uno de ellos expulse una flecha hacia una de las aristas que quedan, que son $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ y $\{c, d\}$, y de forma que cada una de estas tres aristas reciba una única flecha por debajo. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación:



En conclusión, hemos construido W un gradiente de Morse discreto formado por el par de celdas

$$\{\{b\} \prec \{b, c\}\}, \{\{c\} \prec \{c, d\}\}, \{\{d\} \prec \{b, d\}\},$$

$$\{\{a, b\} \prec \{a, b, c\}\}, \{\{a, c\} \prec \{a, c, d\}\} \text{ y } \{\{a, d\} \prec \{a, b, d\}\}.$$

Además, las únicas celdas que no forman parte de ningún par son las celdas $\{a\}$ y $\{b, c, d\}$ que, por tanto, son críticas para W .

3.2. Aplicaciones

La teoría de Morse discreta proporciona un método para obtener descripciones sencillas de los espacios topológicos. Esto conlleva a que sus aplicaciones abarquen desde problemas del mundo real, como reconocimiento de formas, hasta estudios teóricos de espacios topológicos que codifican importantes invariantes en el álgebra, geometría y topología. Se presentan, a continuación, algunas aplicaciones entre las diversas que tiene esta teoría.

Mapper

El Análisis de Datos Topológicos (TDA) es un área de matemáticas aplicadas que actualmente recibe todo tipo de atención en el mundo de la analítica. El principal representante comercial de TDA, hoy en día, es la empresa norteamericana Ayasdi, gracias a la creación del primer programa de software que aplica el Análisis de Datos Topológicos a los problemas del mundo real: *Mapper*.

En muchas situaciones los datos procedentes de aplicaciones reales son masivos y no es posible visualizar y distinguir su estructura. El programa Mapper, cuya descripción puede verse en Singh et al. [22], cuenta con un paquete en el programa **R** que, mediante el uso de la teoría de Morse discreta, proporciona un nuevo método para el análisis cualitativo, de simplificación y visualización de conjuntos de datos de alta dimensión. La idea es reducir esta cantidad de datos agrupándolos por su similitud en los llamados “cluster”, de tal forma que se obtiene un complejo simplicial cuyos vértices se corresponden con los clusters y las demás celdas del complejo representan las relaciones existentes entre los mismos. Esta agrupación se realiza por medio de una función real sobre el conjunto de datos reflejando las propiedades de los datos que se están estudiando, de modo que se obtiene información sobre las propiedades cualitativas del conjunto y, tomando la idea de conjunto de nivel de aplicaciones de Morse discretas, se determina la interacción entre tales propiedades.

Evasividad

Esta teoría también se emplea para limitar la complejidad de los algoritmos que determinan si un grafo posee ciertas propiedades, por ejemplo, si es conexo. Esto se lleva a cabo mediante la llamada evasividad, aplicación que desarrolló Forman en [7].

Imaginemos el siguiente juego entre dos jugadores. Para un complejo simplicial X de dimensión n e Y un subcomplejo de X , se tiene que el jugador 1 conoce toda la información de X mientras que el jugador 2 únicamente conoce el subcomplejo Y y los vértices de X . Dado un símplice $\sigma \in X$ elegido por el jugador 1, el juego consiste en que el jugador 2 mediante la pregunta “¿es el vértice ν cara de σ ?” adivine si $\sigma \in Y$, pudiendo tener en cuenta las respuestas anteriores. De este modo, el jugador 2 gana si antes de llegar a las $n + 1$ preguntas puede determinar si $\sigma \in Y$.

En la anterior situación, se definen los siguientes conceptos.

Definición 3.5. Si no existe una estrategia ganadora se dice que el subcomplejo Y es *evasivo*. En este caso existirá un símlice $\sigma \in X$ para el cual se necesiten $n + 1$ preguntas, siendo éste conocido como *evasor*.

Además, los símlices evasores tienen lugar en pares. En efecto si $\sigma \in X$ es un evasor, una vez realizada la $n + 1$ pregunta se tiene que o bien ν es cara de σ o bien ν no es cara de σ . En el primer caso, si tomamos el símlice γ con todos los vértices de σ menos ν , resulta que γ también es evasivo, obteniendo el par $\{\gamma \prec \sigma\}$. En el segundo caso, tomando τ el símlice que tiene todos los vértices de σ junto con ν , se obtiene el par $\{\sigma \prec \tau\}$. De este modo, se obtiene un gradiente de Morse discreto, como se muestra en Forman [7], que permite comprobar que si Y es no evasivo, entonces Y tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Este paradigma de la evasividad se puede aplicar a problemas en la teoría de grafos. Si consideramos G_n el conjunto de grafos no conexos de n vértices, la conjetura atribuida a Karp sugiere que esta propiedad de los grafos es evasiva, es decir, cualquier algoritmo para determinar si el grafo es conexo podría necesitar comprobar cada par de vértices antes de dar una respuesta. Éste resultado tiene implicaciones en la vida real. Por ejemplo, si se intenta determinar inmediatamente después de un desastre natural si el sistema de comunicaciones sigue todavía conectado, no se puede garantizar esto sin comprobar que cada componente, de manera individual, está conectada a las restantes.

Imágenes digitales

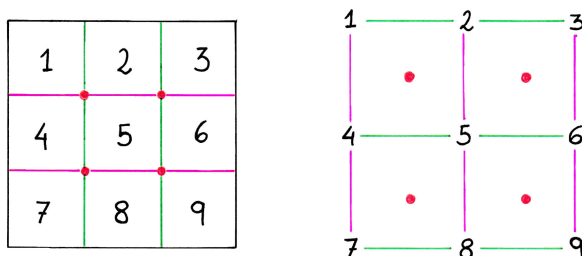
La esqueletización y partición de una imagen digital permite recopilar la información esencial para su análisis. Intuitivamente, el esqueleto de una figura es un objeto de baja dimensión que mantiene las propiedades geométricas y topológicas de la figura y describe cómo están conectadas las regiones en las que se divide una imagen mediante una partición. Este enfoque puede verse en Delgado Friedrichs et al. [5] que a partir de la teoría de Morse discreta obtiene una sencilla representación de la imagen mediante un esqueleto. Para ello se apoyan en una función de Morse discreta en donde cada región de la imagen tiene el valor de su intensidad en escala de grises. El análisis de esta función, que se realiza mediante el algoritmo descrito en Robins et al. [21] y donde se utiliza su campo vectorial gradiente, permite quedarnos con la información relevante de la imagen eliminando los efectos del ruido, vía la cancelación de celdas críticas. Esto conlleva a que, por ejemplo, se pueda determinar la información importante sobre la estructura de un espacio de un material poroso en el que se pretende incorporar en futuros modelos de desplazamiento de fluidos en estas geometrías.

A continuación, exponemos brevemente un ejemplo del estudio de imágenes digitales: secuencias de imágenes meteorológicas cuyo análisis permite obtener predicciones de fenómenos meteorológicos. En particular, estudiaremos la intensidad de precipitación. Para ello, necesitaremos un esqueleto y una función de Morse discreta definida sobre este esqueleto de la imagen que nos permitirá analizar la evolución de sus celdas críticas así como la conexión que hay entre ellas mediante los caminos del campo vectorial gradiente.

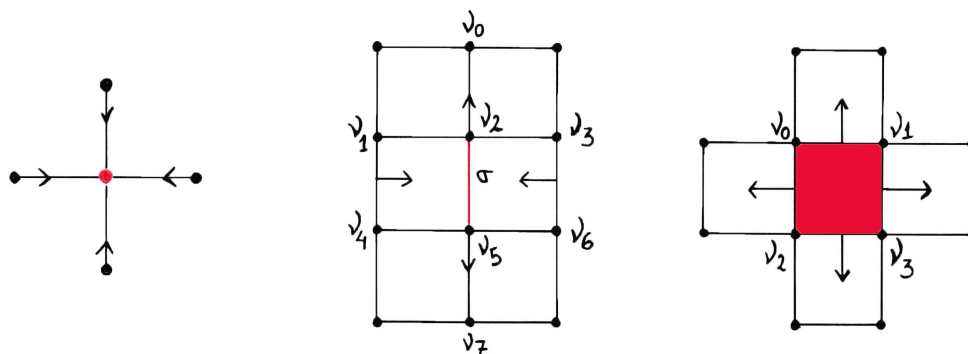
Tal y como muestra Kovalevsky [13], el mejor modelo topológico para analizar imágenes es un complejo celular cúbico. Por tanto, pensemos en una cuadrícula en un espacio euclidiano, que nos proporciona una descomposición del espacio en celdas cúbicas obteniendo un complejo celular cúbico X . De este modo, tenemos las siguientes relaciones:

- Un vértice ν de X se corresponde con un píxel de la imagen.
- Una arista σ de X cuyos vértices son ν_0 y ν_1 se corresponde con la arista que comparten los dos píxeles asociados a ν_0 y ν_1 .
- Un cuadrado τ de X cuyos vértices son ν_0 , ν_1 , ν_2 y ν_3 se corresponde con el punto de intersección de los cuatro píxeles asociados a ν_0 , ν_1 , ν_2 y ν_3 .

Podemos ver esta interpretación en la siguiente imagen, en donde a la izquierda se muestran 9 píxeles de una imagen enumerados del 1 al 9, mientras que a la derecha se muestra su complejo celular cúbico asociado.



Para poder analizar este complejo mediante la teoría de Morse discreta, necesitamos especificar una función de Morse discreta definida sobre él. En este caso, consideramos una función f que asigna a cada píxel de la imagen su intensidad de precipitación, esto es, tenemos f definida sobre los vértices del complejo. Extendemos la función f a los demás elementos de X de la siguiente forma. Para una arista σ de X cuyos vértices son ν_0 y ν_1 , tomamos $f(\sigma)$ como la media aritmética de los valores de ν_0 y ν_1 . Así mismo, para un cuadrado τ de X cuyos vértices son ν_0 , ν_1 , ν_2 y ν_3 , tomamos $f(\tau)$ como la media aritmética de los valores de ν_0 , ν_1 , ν_2 y ν_3 . De esta forma, obtenemos que las celdas críticas de dimensión 0, 1 y 2 son de la siguiente manera.



Grosso modo, se tiene la siguiente interpretación.

- En la primera imagen, el píxel que se corresponde con el vértice ν del complejo tiene un mínimo local en cuanto a la intensidad de precipitación.
- En la segunda imagen, se tiene que los valores $f(\nu_1) + f(\nu_4)$ y $f(\nu_3) + f(\nu_6)$ son mayores que $f(\nu_2) + f(\nu_5)$. Por tanto, los píxeles que se corresponden con los vértices ν_2 y ν_5 , si se consideran juntos, tienen una menor intensidad de precipitación que sus píxeles horizontales adyacentes. Por otra parte, se tiene que el píxel asociado a ν_2 tiene mayor intensidad de precipitación que el píxel ν_0 , y el asociado a ν_5 tiene una intensidad mayor que ν_7 .
- En la última imagen, entre los píxeles que se corresponden con ν_0, ν_1, ν_2 y ν_3 se tiene un máximo local de intensidad de precipitación.

Finalmente, haciendo uso de la teoría de Morse, se obtienen los caminos que conectan a celdas críticas y, junto con la construcción de diagramas de bifurcación, se tienen conexiones entre las celdas críticas de diferentes imágenes que están hechas en distintos intervalos de tiempo, por lo que se pueden obtener conclusiones sobre la predicción de precipitaciones. Este desarrollo puede verse en [4].

Bibliografía

- [1] Audin, M. y Mihai, D. *Morse Theory and Floer Homology*. Springer-Verlag, London, 2014.
- [2] Bott, R. *Lectures on Morse Theory, Old And New*. Bull. Amer. Math. Soc. **7** (2) (1982), 331–358.
- [3] Chari, M. K. *On discrete Morse functions and combinatorial decompositions*. Discrete Mathematics **217** (2000), 101—113.
- [4] Cvetkovska, B. *Predicting weather phenomena using discrete Morse theory*. (MSc thesis) University of Ljubljana, (2015). <http://eprints.fri.uni-lj.si/id/eprint/3026> (Versión del 4 de julio de 2017).
- [5] Delgado Friedrichs, O. , Robins, V. y Sheppard, A. *Skeletonization and partitioning of digital images using discrete Morse theory*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **37** (3) (2015), 654–666.
- [6] Forman, R. *A user’s guide to discrete Morse theory*. Sémin. Lothar. Combin. **48** Art. B48c (2002).
- [7] Forman, R. *Morse Theory and Evasiveness*, Combinatorica **20** (4) (2000), 489–504.
- [8] Forman, R. *Morse Theory for Cell Complexes*. Adv. Math. **134** (1998), 90–145.
- [9] Gallais, E. *Combinatorial realization of the Thom-Smale complex via discrete Morse theory*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **9** (5) (2010), 229–252.
- [10] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [11] Joswig, M. y Pfetsch, M. *Computing Optimal Discrete Morse Functions*. SIAM Journal on Discrete Mathematics **20** (2006), 11–25.
- [12] Knudson, K. P. *Morse Theory: Smooth and Discrete*. World Scientific, 2015.
- [13] Kovalevsky, V. A. *Finite Topology as Applied to Image Analysis*. Computer vision, graphics, and image processing **46** (1989), 141–161.

-
- [14] Laudenbach, F. *A proof of Morse's theorem about the cancellation of critical points*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics., Paris, **351** (2013), 483–488. <hal-00842792>
- [15] Matsumoto, Y. *An Introduction to Morse Theory*. Trans. Math. Monographs, vol. 208 (Am. Math. Soc., Providence), 1997.
- [16] Milnor, J. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [17] Milnor, J. *Morse Theory*. Ann. of Math. Studies, vol. 51, Princeton University Press, 1963.
- [18] Morse, M. *The Calculus of Variations in the Large*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, vol. 18, 1934.
- [19] Nicolaescu, L. *An Invitation to Morse Theory*. Springer-Verlag, New York, 2011.
- [20] Reeb, G. *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*. C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 847–849.
- [21] Robins, V. , Wood, P. J. y Sheppard, P. *Theory and algorithms for constructing discrete Morse complexes from grayscale digital images*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. , **33** (8) (2011), 1646–1658.
- [22] Singh, G. , Memoli, F. y Carlsson, G. *Topological Methods for the Analysis of High Dimensional Data Sets and 3D Object Recognition*. Point Based Graphics 2007, Prague, September 2007.
- [23] Smale, S. *On gradient dynamical systems*. The Annals of Mathematics **74** (1) (1961), 199–206.
- [24] Whitehead, J. H. C. *Combinatorial homotopy I*. Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213–245.
- [25] Zax, R. E. *Simplifying Complicated Simplicial Complexes: Discrete Morse Theory and its Applications*. Diss. Harvard University Cambridge, Massachusetts, 2012.