

JAVIER SEOANE BASCOY

**SOLITONES ASOCIADOS A  
ESTRUCTURAS  
GEOMÉTRICAS Y FORMAS DE  
KILLING**

**137  
2018**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

JAVIER SEOANE BASCOY

**SOLITONES ASOCIADOS A  
ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS  
Y  
FORMAS DE KILLING**

**137**

**2018**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2018



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

JAVIER SEOANE BASCOY

SOLITONES ASOCIADOS A  
ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS  
Y  
FORMAS DE KILLING

Marzo 2014

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección de los profesores Luis María Hervella Torrón, Antonio Martínez Naveira y María Elena Vázquez Abal, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1. Variedades pseudo-Riemannianas . . . . .	17
1.1.1. Operadores diferenciales . . . . .	24
1.2. Grupos de Lie . . . . .	28
1.2.1. Álgebras de Lie de dimensión tres . . . . .	30
1.2.2. Espacios homogéneos . . . . .	36
1.3. Flujos geométricos . . . . .	37
1.3.1. Flujo de Yamabe . . . . .	38
1.3.2. Flujo de Cotton . . . . .	40
1.4. Holonomía y métricas de Walker . . . . .	43
1.4.1. Coordenadas de Walker . . . . .	44
1.4.2. Variedades frente de onda . . . . .	46
1.5. Variedades nearly Kähler . . . . .	50
<b>2. Campos de vectores asociados al flujo de Yamabe</b>	<b>57</b>
2.1. Estructura local de los solitones de Yamabe gradiente . . . . .	57
2.1.1. Caso no isotrópico . . . . .	58
2.1.2. Caso isotrópico . . . . .	59
2.2. Solitones de Yamabe homogéneos . . . . .	59
2.2.1. Caracterización geométrica de los solitones de Yamabe homogéneos	60
2.2.2. Solitones de Yamabe invariantes a la izquierda en grupos de Lie . .	65
2.3. Campos de vectores 1-armónicos . . . . .	69
2.3.1. Caso unimodular . . . . .	71
2.3.2. Caso no unimodular . . . . .	78
2.3.3. Observaciones finales . . . . .	90
2.4. Colineaciones de Ricci . . . . .	91
2.4.1. Caso unimodular . . . . .	92
2.4.2. Caso no unimodular . . . . .	99

<b>3. Geometría del tensor de Cotton</b>	<b>109</b>
3.1. Espacios conformemente simétricos de dimensión tres . . . . .	110
3.1.1. Variedades conformemente simétricas . . . . .	110
3.2. Otras condiciones de paralelismo . . . . .	118
3.2.1. Variedades Walker con tensor de Cotton cíclico paralelo . . . . .	119
3.2.2. Variedades Walker con tensor de Cotton Codazzi . . . . .	124
3.3. Solitones de Cotton homogéneos . . . . .	128
3.3.1. Solitones de Cotton invariantes a la izquierda . . . . .	128
3.3.2. Solitones de Cotton algebraicos Lorentzianos . . . . .	141
<b>4. Formas de Killing en variedades nearly Kähler</b>	<b>153</b>
4.1. Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas . . . . .	158
4.2. Formas de Killing de tipo puro . . . . .	167
<b>Bibliografía</b>	<b>179</b>

# Abstract

The study of the curvature is a central topic in geometry. The curvature is the simplest algebraic invariant of the Riemannian structure and provides not only geometric, but also topological information about the underlying considered manifold. The inherent complexity to the study of the curvature, as a tensor field of type  $(0, 4)$ , in higher dimensions has motivated the analysis of different objects associated with it. Functions with different domains as the sectional curvature or the scalar curvature are good examples of objects associated to the curvature which allow, in some cases, to determine the Riemannian structure.

In this memoir we consider pseudo-Riemannian manifolds (in particular Riemannian and Lorentzian manifolds) equipped with certain additional structures which are induced by differential equations of geometric evolution (the equations of Yamabe and Cotton solitons) or by certain tensorial equations defined on the tangent bundle of the manifold (equations of the Cotton tensor in dimension three and equations of an almost complex structure of nearly Kähler type in dimension six).

Geometric evolution equations are one of the main research lines in geometry due to its great importance both from a physical and a mathematical point of view. The Ricci flow, the mean curvature flow, the Yamabe flow or the Cotton flow (in dimension three) are important examples widely studied during these last years. In all these cases one tries to improve an initial metric by an evolution with respect to some mathematical or physical object, which motivates the flow, with the goal of generating (or infer the existence of) manifolds with an optimal behaviour with respect to the proposed invariants: the Ricci flow lets the construction of Einstein metrics under determined conditions, the mean curvature flow allows to deform under certain restrictions some manifolds in new ones with constant mean curvature; while the Yamabe flow makes possible (under convenient conditions) the construction of metrics with constant scalar curvature which belong, moreover, to the same conformal class than the initial metric. In addition, Yamabe, Cotton and Ricci solitons are the geometric fixed points (up to homotheties and diffeomorphisms) of the Yamabe, Cotton and Ricci flows respectively. Furthermore, since they appear as singularities of their respective flows, the analysis of their geometry is an important step towards the understanding of the flows themselves. In general, in this work we are going to adopt a local point of view for the study of these equations, but also in certain cases, we will make global considerations related, mainly, with the completeness of the manifold.

Ricci and Yamabe solitons are related in a direct way with 1-harmonic vector fields and with Ricci collineations, respectively. These two objects can be considered in some sense

as generalizations of Killing vector fields in the tangent bundle. However, the concept of Killing vector field can be generalized from other points of view. In particular, Killing forms, and in general conformal Killing forms or twistor forms, are generalizations of this concept to the bundle of differential forms.

Killing forms, like geometric evolution equations, are of great importance both from a mathematical and a physical point of view since they generate functions which are constant along geodesics. In general, the study of the existence of such differential forms was made in the literature considering manifolds equipped with certain special geometric structures, as for example on Kähler manifolds. Kähler manifolds give rise to one of the sixteen classes of almost complex structures and, in same sense, they can be considered as the “opposite” manifolds of strict nearly Kähler manifolds.

The aim of this work is twofold. On one hand we study the existence of Yamabe and Cotton solitons on homogeneous Lorentzian manifolds of dimension three, together with certain geometric properties of the objects which allow to define the associated flow to these solitons. It is worth emphasizing here that the geometry of a three-dimensional manifold  $(M, g)$  is simplified by the fact that the Weyl tensor vanishes, and therefore the whole curvature tensor is completely determined by the Ricci tensor. Also in this direction we introduce a complete classification of both left-invariant and non-trivial 1-harmonic vector fields and Ricci collineations defined on three-dimensional Lie groups, emphasizing in the obtained results that working in the Lorentzian case is less rigid than in the Riemannian case.

On the other hand, we will studied Killing forms on nearly Kähler manifolds of dimension six. Any nearly Kahler manifold decomposes into a product of manifolds where one of these factors is a Kähler manifold and the remaining ones are irreducible nearly Kähler manifolds of one of these types: strict nearly Kähler manifolds of dimension six, twistor spaces over quaternionic Kähler manifolds of constant scalar curvature or homogeneous nearly Kähler manifolds. Strict nearly Kähler manifolds of dimension six are specially important since they constitute the nearly Kähler manifolds non Kähler of lower dimension. Furthermore, the study of many of its geometrical properties is simplified by the fact of being of constant type. On these manifolds, and in general on any nearly Kähler manifold, it is possible to define an Hermitian connection of special utility: the canonical Hermitian connection. We focus our attention in the study of the existence of Killing forms which are parallel with respect to this connection and to the existence of Killing forms which are not necessarily parallel with respect to the canonical Hermitian connection but which are of pure type.

The general skeleton of this memoir is the following one:

We present an opening chapter of preliminaries in order to establish the main definitions and some basic results that we will need later. Thus, in Section 1.1.1 we introduce the concept of *Killing forms* as a generalization of Killing vector fields, which is mathematically

determined by the following differential equation

$$\nabla_X u = \frac{1}{k+1} X \lrcorner du,$$

where  $X$  is an arbitrary vector field on  $M$ ,  $k$  is the order of the form  $u$ ,  $\nabla$  is the Levi-Civita connection and “ $\lrcorner$ ” represents the contraction of a vector field with a form. Once we did this, in Section 1.2 we recall the classification of three-dimensional unimodular and not unimodular Lie algebras in the Lorentzian case, showing that they are richer than in the Riemannian case. Later we introduce the geometric flows that induce the corresponding equations of the Yamabe and Cotton solitons. Thus, both solitons are introduced as triples of the form  $(M, g, X)$ , where  $(M, g)$  is a pseudo-Riemannian manifold and  $X$  is a vector field, such that the differential equation

$$\mathcal{L}_X g = (\tau - \lambda) g,$$

is satisfied for Yamabe solitons and

$$\mathcal{L}_X g + \tilde{C} = \lambda g,$$

for Cotton solitons; where  $\mathcal{L}$  is the Lie derivative,  $\tau$  the scalar curvature,  $\tilde{C}$  the Cotton tensor field of type  $(0, 2)$  associated to the Cotton tensor field of type  $(0, 3)$  and  $\lambda$  an arbitrary real constant. Depending on the sign of the constant  $\lambda$  the soliton is said expanding, steady or shrinking according to  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  or  $\lambda > 0$ , respectively. After this, we study Walker and strict walker metrics, paying special attention to *pp-waves* and we present different examples of them, such as for example, plane waves, Cahen-Wallach symmetric spaces and conformally symmetric Lorentzian manifolds of dimension greater or equal to four among others. Finally, in Section 1.5 we recall the concept of almost complex manifold and in particular the concept on nearly Kähler manifold, introducing some of their main geometric properties. Moreover, we focus our attention in how the relation between the Levi-Civita connection and the Hermitian connection links the curvature tensors associated to them and in how it allows to get de Hodge decomposition of both the exterior differential and the codifferential operators in four different operators in both cases. To finish this section we use these Hodge decompositions to obtain Kähler type identities on nearly Kähler manifolds.

Once the preliminaries are finished, the main body of this work splits in four chapters. Firstly, in Chapter 2 we present three sections where in the first one we obtain a geometric characterization of three-dimensional homogeneous Yamabe solitons.

**Theorem 2.8** *A non-flat connected and simply connected three-dimensional homogeneous Lorentzian manifold  $(M, g)$  is a non-trivial Yamabe soliton if and only if it is locally conformally flat and its Ricci operator is two-step nilpotent.*

Furthermore, this geometric characterization lets us to obtain the following classification of three-dimensional homogeneous Yamabe solitons

**Theorem 2.10** *A non-flat three-dimensional homogeneous Lorentzian manifold is a non-trivial Yamabe soliton if and only if it is locally isometric to one of the following:*

- (i) *A symmetric Cahen-Wallach space, i.e., the Euclidean space  $\mathbb{R}^3$  with coordinates  $(u, v, x)$  and metric tensor*

$$g = \kappa x^2 du \circ du + 2du \circ dv + dx \circ dx,$$

*where  $\kappa$  is an arbitrary non-zero constant, or*

- (ii) *a non-symmetric homogeneous plane wave, i.e., an open set  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  with coordinates  $(u, v, x)$  and metric tensor*

$$g = \frac{\kappa}{u^2} x^2 du \circ du + 2du \circ dv + dx \circ dx,$$

*where  $\kappa$  is an arbitrary non-zero constant.*

Motivated by the relationship between Ricci solitons and 1-harmonic vector fields and between Yamabe solitons with constant scalar curvature and Ricci collineations, we present in Sections 2.3 and 2.4 a complete classification of left invariant non trivial 1-harmonic vector fields and Ricci collineations defined on Lorentzian Lie groups of dimension three.

In Chapter 3 we study different geometric properties associated to the Cotton tensor field. The study of the curvature tensor in the three-dimensional case is simplified by the fact of being completely determined by the Ricci tensor of the manifold since the Weyl tensor is identically zero. Moreover, the fact that the Weyl tensor vanishes in dimension three implies that the Cotton tensor plays its role in the characterization of locally conformally flat manifolds, thus, a three-dimensional pseudo-Riemannian manifold is said locally conformally flat if and only if its Cotton tensor vanishes. In a similar way, the essentially conformally symmetric nature of a pseudo-Riemannian manifold, that for manifolds of dimension greater than or equal to four is determined by the vanishing of the covariant derivative of the Weyl tensor restricted to the non-trivial cases, i.e., when the manifold is not locally conformally flat nor locally symmetric, is determined in the three-dimensional case by the vanishing of the covariant derivative of the Cotton tensor, when the manifold is not locally conformally flat. Motivated by this importance of the Cotton tensor in dimension three we obtain in Section 3.1 the following characterization of essentially conformally symmetric three-dimensional manifolds

**Theorem 3.4** *A three-dimensional pseudo-Riemannian manifold is essentially conformally symmetric if and only if it is a Lorentzian strict Walker manifold, locally isometric to*

$$(1) \quad g_{\mathfrak{a}} = dt dy + dx^2 + (x^3 + \mathfrak{a}(y)x) dy^2,$$

*for an arbitrary smooth function  $\mathfrak{a}(y)$ .*

In Section 3.2 we study some Einstein-like conditions for the Cotton tensor. In particular we pay attention to the study of three-dimensional Walker manifolds whose Cotton tensor is cyclic parallel (or equivalently a Killing tensor) or Codazzi. Hence, for the cyclic parallel case we obtain that

**Theorem 3.7** *The Cotton tensor of a three-dimensional Walker manifold  $(M, g_f)$  is cyclic parallel if and only if one of the following holds:*

- (i) *There exist smooth functions  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{C}$ , depending only on the coordinate  $y$ , with  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ , and real constants  $\alpha$  and  $\beta$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$\begin{aligned} f(t, x, y) = & \mathcal{A}t^3 + (\mathcal{B}x + \mathcal{C})t^2 + \frac{1}{3\mathcal{A}}(\mathcal{B}^2x^2 + 2\mathcal{B}\mathcal{C}x + 6\mathcal{A}' + \mathcal{C}^2 + 3\alpha)t \\ & + \frac{1}{27\mathcal{A}^2}\{\mathcal{B}^3x^3 + 3\mathcal{B}^2\mathcal{C}x^2 + 3(6\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{B}(\mathcal{C}^2 + 3\alpha))x \\ & + 18\mathcal{A}\mathcal{C}' + 3\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^3 + 9\alpha\mathcal{C} + 27\beta\}, \quad \text{or} \end{aligned}$$

- (ii) *there exist smooth functions  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{I}$ , depending only on the coordinate  $y$ , with  $\mathcal{D}(y) \neq 0$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$f(t, x, y) = (\mathcal{D}x + \mathcal{E})t - \frac{1}{48}\mathcal{D}^2x^4 - \frac{1}{12}(2\mathcal{D}' + \mathcal{D}\mathcal{E})x^3 + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I}, \quad \text{or}$$

- (iii) *there exist smooth functions  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{I}$ , depending only on the coordinate  $y$ , with  $\mathcal{F}(y) \neq 0$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$f(t, x, y) = -\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}}t + \mathcal{F}x^3 + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I}, \quad \text{or}$$

- (iv) *there exist smooth functions  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{I}$ , depending only on the coordinate  $y$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$f(t, x, y) = \mathcal{E}t + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I}, \quad \text{or}$$

- (v) *there exist smooth functions  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{H}$ , depending only on the coordinate  $y$ , with  $\mathcal{C}(y) \neq 0$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$\begin{aligned} f(t, x, y) = & \mathcal{C}t^2 - \left(\frac{1}{2}\mathcal{C}'x^2 - \mathcal{D}x - \mathcal{E}\right)t \\ & + \frac{1}{16\mathcal{C}^2}\{\mathcal{C}(\mathcal{C}')^2x^4 - 4\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{C}'x^3 - 4(2\mathcal{C}\mathcal{C}'' - 3(\mathcal{C}')^2 + \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{C}' - \mathcal{C}\mathcal{D}^2)x^2 \\ & - 8(3\mathcal{D}\mathcal{C}' - 2\mathcal{C}\mathcal{D}' - \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E})x + 16\mathcal{C}(\mathcal{C}\mathcal{F} + \Xi(x, y))\}, \end{aligned}$$

where

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y)e^{\sqrt{\mathcal{C}(y)}x} + \mathcal{H}(y)e^{-\sqrt{\mathcal{C}(y)}x}, & \text{if } \mathcal{C}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y)\cos(\sqrt{-\mathcal{C}(y)}x) + \mathcal{H}(y)\sin(\sqrt{-\mathcal{C}(y)}x), & \text{if } \mathcal{C}(y) < 0. \end{cases}$$

On the other hand, for the Codazzi case it follows that

**Theorem 3.10** *The Cotton tensor of a three-dimensional Walker manifold  $(M, g_f)$  is Codazzi if and only if one of the following holds:*

- (i) *There exist smooth functions  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  and  $\mathcal{H}$ , depending only on the coordinate  $y$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$f(t, x, y) = (\mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x + \mathcal{D})t - \frac{1}{90}\mathcal{B}^2x^6 - \frac{1}{30}\mathcal{B}\mathcal{C}x^5 \\ - \frac{1}{48}(8\mathcal{B}' + 4\mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{C}^2)x^4 + \mathcal{E}x^3 + \mathcal{F}x^2 + \mathcal{G}x + \mathcal{H}, \quad \text{or}$$

- (ii) *there exist smooth functions  $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  and  $\mathcal{H}$ , depending only on the coordinate  $y$ , with  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ , such that the defining function  $f$  expresses locally as*

$$f(t, x, y) = \mathcal{A}t^2 - \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}'x^2 - \mathcal{C}x - \mathcal{D}\right)t \\ + \frac{1}{16\mathcal{A}^2} \{ \mathcal{A}(\mathcal{A}')^2x^4 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{A}'x^3 - 4(2\mathcal{A}\mathcal{A}'' - 3(\mathcal{A}')^2 + \mathcal{A}\mathcal{D}\mathcal{A}' - \mathcal{A}\mathcal{C}^2)x^2 \\ + 16\mathcal{A}^2\mathcal{E}x + 16\mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{F} + \Xi(x, y)) \},$$

where

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y)e^{\sqrt{\mathcal{A}(y)}x} + \mathcal{H}(y)e^{-\sqrt{\mathcal{A}(y)}x}, & \text{if } \mathcal{A}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y)\cos(\sqrt{-\mathcal{A}(y)}x) + \mathcal{H}(y)\sin(\sqrt{-\mathcal{A}(y)}x), & \text{if } \mathcal{A}(y) < 0. \end{cases}$$

Returning to Theorem 3.4, a fact that plays a fundamental role in its proof, and that is satisfied only for three-dimensional manifolds, is the possibility to associate to the Cotton tensor, which is a tensor field of type  $(0, 3)$ , a new tensor of type  $(0, 2)$ , denoted by  $\tilde{C}$  and also called Cotton tensor. It is worth emphasizing here, that the existence of this new Cotton tensor is the key that allows us to define the Cotton flow and hence, Cotton solitons.

Moreover, dimension three also brings significant restrictions on homogeneous spaces. In particular, every homogeneous space of dimension three connected, simply connected and complete is either a symmetric space and hence locally conformally flat, or a Lie group endowed with a left invariant metric. Motivated by this, and since Cotton solitons in symmetric spaces are trivial, in Section 3.3 we achieve a detailed study of left invariant non-trivial Cotton solitons defined on three-dimensional Lie groups both in the unimodular and in the non-unimodular cases, obtaining the following geometric characterization (and classification) of left invariant non-trivial homogeneous Cotton solitons

**Theorem 3.14** *A Lorentzian Lie group  $(G, g)$  admits a non-trivial left-invariant Cotton soliton if and only if the Cotton operator is nilpotent. More precisely, the Lorentzian Lie group  $(G, g)$  is*

- (i) *of Type II with  $\alpha = \beta \neq 0$  and locally isometric to  $O(1, 2)$  or  $SL(2, \mathbb{R})$ , or*

- (ii) of Type II with  $\alpha = 0 \neq \beta$  and locally isometric to  $E(1, 1)$ , or  
 (iii) of type III with  $\alpha \neq 0$  and locally isometric to  $O(1, 2)$  or  $SL(2, \mathbb{R})$ .

However, the specific properties of homogeneous manifolds allow us to consider stronger conditions than being a Cotton soliton. More precisely, we can consider soliton solutions for the Cotton flow up to automorphisms instead of diffeomorphisms, in which case it is said that the soliton is an algebraic soliton. In particular, if  $(G, g)$  is a Lie group endowed with a left invariant metric, then the equation, which in this case is algebraic, that determines the algebraic solitons is

$$\widehat{C} = \lambda id + D,$$

where  $D$  is a derivation in the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G$  and  $\lambda$  is an arbitrary real number. The fact that all algebraic soliton induces a soliton in the ordinary sense provide a way to construct examples of non-left invariant non-trivial solitons on some Lorentzian Lie groups of dimension three using the following Theorem

**Theorem 3.26** *A three-dimensional Lie group  $(G, g)$  equipped with a left-invariant Lorentzian metric is an algebraic Cotton soliton if and only if one of the following conditions holds:*

- (i)  $(G, g)$  is of Type Ia with  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\gamma \neq 0$  or any cyclic permutations. In this case  $\lambda = -2\gamma^3$  and  $G$  is locally isometric to the Heisenberg group  $H_3$ .  
 (ii)  $(G, g)$  is of Type Ib with  $\alpha = 0$  and  $\gamma = \frac{\varepsilon\sqrt{2}\beta}{2}$ . In this case,  $\lambda = 2\varepsilon\sqrt{2}\beta^3$  with  $\varepsilon^2 = 1$ , and  $G$  is locally isometric to  $E(1, 1)$ ; i.e., to the group of rigid motions of the Minkowski two-dimensional space,  $\mathbb{R}_1^2$ .

Finally, in Chapter 4 we study Killing forms on strict nearly Kähler manifolds of dimension six. In general, not only in dimension six, strict nearly Kähler manifolds can be considered as the “opposite” to Kähler manifolds. It is known that on Kähler manifolds all Killing forms are necessarily trivial, thus, they are parallel with respect to the Levi-Civita connection. From this fact, and because the non-existence of parallel forms with respect to the Levi-Civita connection on nearly Kähler manifolds, it seems interesting to consider the problem of existence of Killing forms on strict nearly Kähler manifolds, particularly in those that are of dimension six for two reasons: on one hand they provide one of the families of manifolds which appear in the irreducible decomposition of any nearly Kähler manifold and on the other hand they are the nearly Kähler non-Kähler manifolds of lower dimension.

In general, since a nearly Kähler structures can be thought as a vector cross product, it follows that its associated Kähler two-form is a non-trivial Killing form on any nearly Kähler manifold. Furthermore, and together with the Kähler two-form, nearly Kähler manifolds are also endowed with a three-form of special importance in the study of their

geometry, the torsion three-form associated to the canonical Hermitian connection, which, in the six dimensional case, it is also known to be a Killing form. Although these two forms are not parallel with respect to the Levi-Civita connection, they satisfy the condition of being parallel with respect to the canonical Hermitian connection. Motivated by this fact, we analyse Killing forms which are parallel with respect to the canonical Hermitian connection in Section 4.1. We do this study in a case by case depending on the possible orders and possible types of the considered forms, obtaining that such existence can be determined from a purely algebraic equation, from which we get the following result

**Theorem 4.1** *Let  $M$  be a strict nearly Kähler manifold of dimension six. Then the Kähler 2-form and the torsion 3-form are the unique Killing forms which are parallel with respect to the canonical Hermitian connection.*

To end this chapter, in Section 4.2 we study Killing forms, that not being parallel with respect to the canonical Hermitian connection, they are of pure type. Thus, taking into account the Hodge decomposition of both the exterior differential and the codifferential operators and their induced Kähler-like equations, and after a case by case study depending on the orders and types of the considered forms, we obtain the following result

**Theorem 4.8** *In a strict nearly Kähler manifold of dimension six the unique Killing form of pure type (up to a constant) is the Kähler 2-form.*

# Introducción

El estudio de la curvatura es un aspecto central en geometría. La curvatura constituye el invariante algebraico más simple de la estructura Riemanniana y proporciona no sólo información geométrica sobre la misma, sino también información de índole topológica sobre la variedad subyacente. La complejidad inherente al estudio de la curvatura, como campo de tensores de tipo  $(0, 4)$ , en dimensiones superiores ha motivado el análisis de distintos objetos asociados a la misma. Funciones con distintos dominios como la curvatura seccional o la curvatura escalar constituyen un buen ejemplo de objetos asociados a la curvatura que permiten, en algunos casos, determinar la estructura Riemanniana.

En este trabajo se consideran variedades pseudo-Riemannianas (en particular Riemannianas y Lorentzianas) dotadas de determinadas estructuras adicionales inducidas bien por ciertas ecuaciones diferenciales de evolución geométrica (las ecuaciones de solitón de Yamabe y las de solitón de Cotton) o bien por ciertas ecuaciones tensoriales definidas sobre el fibrado tangente a la variedad (las ecuaciones del tensor de Cotton en dimensión tres y las ecuaciones de una estructura casi compleja nearly Kähler en dimensión seis).

Las ecuaciones de evolución geométrica constituyen una de las principales líneas de investigación en geometría debido a su gran importancia tanto física como matemática. El flujo de Ricci, el flujo de la curvatura media, el flujo de Yamabe o el flujo de Cotton (en dimensión tres) son ejemplos importantes ampliamente estudiados durante los últimos años. En todos estos casos se intenta mejorar una métrica inicial haciéndola evolucionar respecto a cierto objeto matemático o físico, el cual motiva el flujo, con el objetivo de producir (o deducir la existencia de) variedades con un comportamiento óptimo con respecto a los invariantes propuestos: el flujo de Ricci hace posible la construcción de métricas de Einstein bajo ciertas condiciones, el flujo de curvatura media permite deformar bajo ciertas condiciones ciertas superficies en otras en las que la curvatura media es constante, mientras que el flujo de Yamabe hace posible (en las condiciones adecuadas) la construcción de métricas con curvatura escalar constante que además pertenecen a la misma clase conforme de la métrica inicial. Por otra parte, los solitones de Yamabe, de Cotton y de Ricci son los puntos fijos geométricos (módulo homotecias y difeomorfismos) de los flujos de Yamabe, de Cotton y de Ricci respectivamente. Además, puesto que aparecen como singularidades de sus respectivos flujos, el análisis de su geometría es un paso importante de cara a la comprensión de los propios flujos. En general, en este trabajo adoptaremos un punto de vista local para el estudio de estas ecuaciones, pero, también en ciertos casos, haremos consideraciones globales relacionadas principalmente con la completitud de la variedad.

Los solitones de Ricci y los solitones de Yamabe con curvatura escalar constante están relacionados de una forma directa con los campos de vectores 1-armónicos y con las colineaciones de Ricci respectivamente. Estos dos objetos se pueden considerar en cierto sentido como generalizaciones en el fibrado tangente de los campos de vectores de Killing. No obstante, el concepto de campo de vectores de Killing puede ser generalizado desde otros puntos de vista. En particular, las formas de Killing, y de forma más general las formas de Killing conformes o formas twistor, son generalizaciones de este concepto al fibrado de las formas diferenciales.

Las formas de Killing, al igual que las ecuaciones de evolución geométrica, tienen una gran importancia tanto desde el punto de vista matemático como físico ya que dan lugar a funciones que son constantes a lo largo de geodésicas. De forma general, el estudio de la existencia o no de tales formas se ha realizado en la literatura considerando variedades dotadas de ciertas estructuras geométricas especiales, como por ejemplo sobre las variedades Kähler. Las variedades Kähler forman una de las dieciséis clases de estructuras casi complejas y, en cierto sentido, se pueden considerar como las variedades “opuestas” a las variedades nearly Kähler estrictas.

El objetivo de este trabajo es doble. Por una parte estudiaremos la existencia de solitones de Yamabe y de solitones de Cotton sobre variedades Lorentzianas homogéneas de dimensión tres, así como ciertas propiedades geométricas de los objetos que permiten definir el flujo asociado a ellos. Cabe destacar que la geometría de una variedad de dimensión tres  $(M, g)$  se simplifica por el hecho de que su tensor de Weyl se anula, y por tanto todo el tensor curvatura está completamente determinado por el tensor de Ricci. También en esta línea presentamos una clasificación completa tanto de los campos de vectores 1-armónicos como de las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda y no triviales definidas sobre los grupos de Lie de dimensión tres, poniendo de manifiesto en los resultados obtenidos que trabajar en el ámbito Lorentziano es menos rígido que en el caso Riemanniano.

Por otra parte, estudiaremos las formas de Killing sobre variedades nearly Kähler. Cualquier variedad nearly Kähler se descompone en un producto de variedades donde uno de esos factores es una variedad Kähler y los restantes son variedades nearly Kähler irreducibles de alguno de estos tipos: variedades nearly Kähler estrictas de dimensión seis, espacios twistor sobre variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura escalar positiva o variedades nearly Kähler homogéneas. Las variedades nearly Kähler de dimensión seis estrictas son de especial relevancia por tratarse de las variedades nearly Kähler no Kähler de menor dimensión. Además, el estudio de muchas de sus propiedades geométricas se ve simplificado por el hecho de ser de tipo constante. Sobre estas variedades, y en general sobre cualquier variedad nearly Kähler, es posible definir una conexión Hermítica de especial utilidad: la *conexión Hermítica canónica*. Centraremos nuestra atención en el estudio de la existencia o no de formas de Killing paralelas respecto a esta conexión así como en la existencia o no de formas de Killing que no siendo paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica, sí son de tipo puro.

El esquema general de esta memoria es el siguiente:

Presentamos un capítulo inicial de preliminares con el propósito de establecer las principales definiciones y resultados básicos que se necesitarán posteriormente. De este modo, en la Sección 1.1.1 presentamos el concepto de *forma de Killing* como generalización de un campo de vectores de Killing, la cual matemáticamente está determinada por la siguiente ecuación diferencial

$$\nabla_X u = \frac{1}{k+1} X \lrcorner du,$$

siendo  $X$  un campo de vectores arbitrario en  $M$ ,  $k$  es el orden de la forma  $u$ ,  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita y “ $\lrcorner$ ” es la contracción de un campo de vectores con una forma. Una vez hecho esto, en la Sección 1.2 recordamos la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión tres tanto unimodulares como no unimodulares en el caso Lorentziano, poniendo de manifiesto su mayor riqueza respecto al caso Riemanniano. A continuación introducimos los flujos geométricos que inducen las ecuaciones correspondientes a los solitones de Yamabe y a los solitones de Cotton. De este modo, ambos solitones se introducen como triples de la forma  $(M, g, X)$ , donde  $(M, g)$  es una variedad pseudo-Riemanniana y  $X$  es un campo de vectores, de forma que se verifica la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}_X g = (\tau - \lambda) g,$$

para los solitones de Yamabe y

$$\mathcal{L}_X g + \tilde{C} = \lambda g,$$

para los solitones de Cotton; siendo  $\mathcal{L}$  la derivada de Lie,  $\tau$  la curvatura escalar,  $\tilde{C}$  el tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  asociado al tensor de Cotton de tipo  $(0, 3)$  y  $\lambda$  una constante real arbitraria. En función de cómo sea esta constante  $\lambda$  se dice que el solitón es expansivo, estable o contractivo cuando  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  o  $\lambda > 0$ , respectivamente. A continuación se estudian las métricas de Walker y las métricas de Walker estrictas, prestando especial atención a las *variedades frente de onda* y presentando diferentes clases de ellas, como por ejemplo, las ondas planas, los espacios simétricos de Cahen-Wallach y las variedades Lorentzianas conformemente simétricas de dimensión mayor o igual a cuatro entre otras. Finalmente, en la Sección 1.5 recordamos el concepto de variedad casi compleja y en particular el de variedad nearly Kähler presentando, también, algunas de sus principales propiedades geométricas. Además, ponemos especial énfasis en cómo la relación existente entre la conexión de Levi-Civita y la conexión Hermítica canónica permite relacionar los tensores curvatura asociados a estas dos conexiones y en cómo permite obtener la descomposición de Hodge tanto del operador diferencial exterior como del operador codiferencial exterior en cuatro operadores diferentes en ambos casos. Para acabar esta sección vemos cómo se hace uso de estas descomposiciones de Hodge para obtener identidades de tipo Kähler en las variedades nearly Kähler.

Concluidos los preliminares, el resto del trabajo se divide en tres capítulos. En primer lugar, en el Capítulo 2 presentamos tres secciones donde en la primera de ellas obtenemos una caracterización geométrica de los solitones de Yamabe homogéneos de dimensión tres

**Teorema 2.8** *Una variedad Lorentziana homogénea  $(M, g)$ , conexa, no llana y simplemente conexa de dimensión tres es un solitón de Yamabe no trivial si y sólo si es localmente conformemente llana y su operador de Ricci es dos-pasos nilpotente.*

Además, esta caracterización geométrica nos permite obtener la siguiente clasificación de los solitones de Yamabe homogéneos en dimensión tres

**Teorema 2.10** *Una variedad Lorentziana homogénea no llana de dimensión tres es un solitón de Yamabe no trivial si y sólo si es localmente isométrica a uno de los siguientes espacios:*

- (i) *Un espacio simétrico de Cahen-Wallach, i.e., el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(t, x, y)$  y tensor métrico*

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \kappa x^2 dy \circ dy,$$

*donde  $\kappa$  es una constante arbitraria no nula,*

- (ii) *una onda plana homogénea no simétrica, i.e., un conjunto abierto,  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(t, x, y)$  y tensor métrico*

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \frac{\kappa}{y^2} x^2 dy \circ dy,$$

*donde  $\kappa$  es una constante arbitraria no nula.*

Por otra parte, motivados por la relación existente entre los solitones de Ricci y los campos de vectores 1-armónicos y los solitones de Yamabe con curvatura escalar constante y las colineaciones de Ricci, presentamos en las Secciones 2.3 y 2.4 una clasificación completa de los campos de vectores 1-armónicos y de las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda y no triviales en los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres.

En el Capítulo 3 realizamos un estudio de diferentes propiedades geométricas asociadas al tensor de Cotton. Como vimos, el estudio del tensor curvatura en dimensión tres se simplifica de forma notable gracias al hecho de que el tensor de Weyl es idénticamente nulo y, por tanto, se encuentra completamente determinado por el tensor de Ricci de la variedad. Además, el hecho de que el tensor de Weyl sea idénticamente nulo en dimensión tres conlleva que sea el tensor de Cotton el que desempeñe su papel en la caracterización de las variedades localmente conformemente llanas, es decir, una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión tres se dice localmente conformemente llana si y sólo si su tensor de Cotton se anula. De forma similar, el carácter esencialmente conformemente simétrico de una variedad pseudo-Riemanniana, que para variedades de dimensión mayor o igual a cuatro está determinado por la anulación de la derivada covariante del tensor de Weyl restringido a los casos no triviales, es decir, cuando la variedad no es ni localmente conformemente llana ni localmente simétrica, está determinado en las variedades de dimensión tres por la anulación de la derivada covariante del tensor de Cotton siempre y cuando la variedad no

sea localmente conformemente llana. Motivados por esta importancia del tensor de Cotton en dimensión tres obtenemos en la Sección 3.1 la siguiente caracterización de las variedades esencialmente conformemente simétricas de dimensión tres

**Teorema 3.4** *Una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión tres es esencialmente conformemente simétrica si y sólo si es una variedad Walker Lorentziana estricta, localmente isométrica a  $(\mathbb{R}^3, (t, x, y))$  con métrica*

$$g_{\mathbf{a}} = 2dt \circ dy + dx \circ dx + (x^3 + \mathbf{a}(y)x)dy \circ dy,$$

para una función derivable arbitraria  $\mathbf{a}(y)$ .

En la Sección 3.2 estudiamos otras condiciones de paralelismo para el tensor de Cotton, en particular hacemos especial énfasis en el estudio de cuándo una variedad Walker de dimensión tres tiene tensor de Cotton cíclico paralelo y cuándo resulta Codazzi. Obtenemos de este modo, el siguiente resultado para el caso cíclico paralelo

**Theorem 3.7** *El tensor de Cotton de una variedad Walker de dimensión tres  $(M, g_f)$  es cíclico paralelo si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

(i) *existen funciones derivables  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ , y constantes reales  $\alpha$  y  $\beta$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$\begin{aligned} f(t, x, y) = & \mathcal{A}t^3 + (\mathcal{B}x + \mathcal{C})t^2 + \frac{1}{3\mathcal{A}}(\mathcal{B}^2x^2 + 2\mathcal{B}\mathcal{C}x + 6\mathcal{A}' + \mathcal{C}^2 + 3\alpha)t \\ & + \frac{1}{27\mathcal{A}^2}\{\mathcal{B}^3x^3 + 3\mathcal{B}^2\mathcal{C}x^2 + 3(6\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{B}(\mathcal{C}^2 + 3\alpha))x \\ & + 18\mathcal{A}\mathcal{C}' + 3\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^3 + 9\alpha\mathcal{C} + 27\beta\}, \end{aligned}$$

(ii) *existen funciones derivables  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{D}(y) \neq 0$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$f(t, x, y) = (\mathcal{D}x + \mathcal{E})t - \frac{1}{48}\mathcal{D}^2x^4 - \frac{1}{12}(2\mathcal{D}' + \mathcal{D}\mathcal{E})x^3 + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I},$$

(iii) *existen funciones derivables  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{F}(y) \neq 0$ , tal que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$f(t, x, y) = -\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}}t + \mathcal{F}x^3 + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I},$$

(iv) *existen funciones derivables  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$f(t, x, y) = \mathcal{E}t + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I},$$

(v) existen funciones derivables  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{C}(y) \neq 0$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como

$$f(t, x, y) = \mathcal{C} t^2 - \left(\frac{1}{2} \mathcal{C}' x^2 - \mathcal{D} x - \mathcal{E}\right) t \\ + \frac{1}{16\mathcal{C}^2} \{ \mathcal{C} (\mathcal{C}')^2 x^4 - 4\mathcal{C} \mathcal{D} \mathcal{C}' x^3 - 4(2\mathcal{C} \mathcal{C}'' - 3(\mathcal{C}')^2 + \mathcal{C} \mathcal{E} \mathcal{C}' - \mathcal{C} \mathcal{D}^2) x^2 \\ - 8(3\mathcal{D} \mathcal{C}' - 2\mathcal{C} \mathcal{D}' - \mathcal{C} \mathcal{D} \mathcal{E}) x + 16\mathcal{C} (\mathcal{C} \mathcal{F} + \Xi(x, y)) \},$$

donde

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y) e^{\sqrt{\mathcal{C}(y)} x} + \mathcal{H}(y) e^{-\sqrt{\mathcal{C}(y)} x}, & \text{si } \mathcal{C}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y) \cos(\sqrt{-\mathcal{C}(y)} x) + \mathcal{H}(y) \sin(\sqrt{-\mathcal{C}(y)} x), & \text{si } \mathcal{C}(y) < 0. \end{cases}$$

Por otra parte, para el caso Codazzi obtenemos el siguiente resultado

**Theorem** *El tensor de Cotton de una variedad Walker de dimensión tres  $(M, g_f)$  es Codazzi si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

(i) existen funciones derivables  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como

$$f(t, x, y) = (\mathcal{B} x^2 + \mathcal{C} x + \mathcal{D}) t - \frac{1}{90} \mathcal{B}^2 x^6 - \frac{1}{30} \mathcal{B} \mathcal{C} x^5 \\ - \frac{1}{48} (8\mathcal{B}' + 4\mathcal{B} \mathcal{D} + \mathcal{C}^2) x^4 + \mathcal{E} x^3 + \mathcal{F} x^2 + \mathcal{G} x + \mathcal{H},$$

(ii) existen funciones derivables  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como

$$f(t, x, y) = \mathcal{A} t^2 - \left(\frac{1}{2} \mathcal{A}' x^2 - \mathcal{C} x - \mathcal{D}\right) t \\ + \frac{1}{16\mathcal{A}^2} \{ \mathcal{A} (\mathcal{A}')^2 x^4 - 4\mathcal{A} \mathcal{C} \mathcal{A}' x^3 - 4(2\mathcal{A} \mathcal{A}'' - 3(\mathcal{A}')^2 + \mathcal{A} \mathcal{D} \mathcal{A}' - \mathcal{A} \mathcal{C}^2) x^2 \\ + 16\mathcal{A}^2 \mathcal{E} x + 16\mathcal{A} (\mathcal{A} \mathcal{F} + \Xi(x, y)) \},$$

donde

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y) e^{\sqrt{\mathcal{A}(y)} x} + \mathcal{H}(y) e^{-\sqrt{\mathcal{A}(y)} x}, & \text{si } \mathcal{A}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y) \cos(\sqrt{-\mathcal{A}(y)} x) + \mathcal{H}(y) \sin(\sqrt{-\mathcal{A}(y)} x), & \text{si } \mathcal{A}(y) < 0. \end{cases}$$

Volviendo al Teorema 3.4, un hecho que juega un papel fundamental en su demostración, y que es exclusivo para variedades de dimensión tres, es la posibilidad de asociar al tensor de Cotton, que es de tipo  $(0, 3)$ , un nuevo tensor de tipo  $(0, 2)$ , que denotaremos por  $\tilde{C}$  y que también llamaremos tensor de Cotton. Cabe destacar, que es la existencia de este nuevo tensor de Cotton el que nos permite definir el flujo de Cotton y, por tanto, los solitones de Cotton.

Por otra parte, la dimensión tres también acarrea importantes restricciones en los espacios homogéneos. En particular, todo espacio homogéneo de dimensión tres conexo, simplemente conexo y completo es un espacio simétrico, y por tanto localmente conformemente

llano, o un grupo de Lie dotado con una métrica invariante a la izquierda. Motivados por esto, y puesto que los solitones de Cotton en los espacios simétricos son triviales, en la Sección 3.3 realizamos un estudio detallado de los solitones de Cotton homogéneos invariantes a la izquierda no triviales en los grupos de Lie de dimensión tres tanto unimodulares como no unimodulares, obteniendo la siguiente caracterización (y clasificación) geométrica

**Teorema 3.14** *Un grupo de Lie Lorentziano  $(G, g)$  admite un solitón de Cotton no trivial invariante a la izquierda si y sólo si el operador de Cotton es nilpotente. De forma más precisa, el grupo de Lie Lorentziano  $(G, g)$  ha de ser alguno de los siguientes*

- (i) *de Tipo II con  $\alpha = \beta \neq 0$  y localmente isométrico a  $O(1, 2)$  o a  $SL(2, \mathbb{R})$ ,*
- (ii) *de Tipo II con  $\alpha = 0 \neq \beta$  y localmente isométrico a  $E(1, 1)$ ,*
- (iii) *de tipo III con  $\alpha \neq 0$  y localmente isométrico a  $O(1, 2)$  o  $SL(2, \mathbb{R})$ .*

No obstante, las propiedades específicas de las variedades homogéneas nos permite considerar condiciones más fuertes que la de ser un solitón de Cotton. Más precisamente, podemos considerar soluciones solitón para el flujo de Cotton salvo automorfismos en vez de difeomorfismos, en cuyo caso se dice que dicho solitón es un *solitón algebraico*. En particular, si  $(G, g)$  es un grupo de Lie dotado de una métrica invariante a la izquierda la ecuación, en este caso algebraica, que determina los solitones algebraicos es

$$\widehat{C} = \lambda id + D,$$

donde  $D$  es una derivación del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  y  $\lambda$  es un número real arbitrario. El hecho de que todo solitón algebraico induzca un solitón en el sentido ordinario nos permitirá construir ejemplos de solitones no invariantes a la izquierda y no triviales sobre algunos grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres a partir del siguiente teorema

**Teorema 3.26** *Un grupo de Lie  $(G, g)$  de dimensión tres dotado con una métrica Lorentziana invariante a la izquierda es un solitón de Cotton algebraico si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- (i)  *$(G, g)$  es de Tipo Ia con  $\alpha = \beta = 0$  y  $\gamma \neq 0$ , o cualquier permutación cíclica de estos. En este caso,  $\lambda = -2\gamma^3$  y  $G = H_3$  es el grupo de Heisenberg.*
- (ii)  *$(G, g)$  es de Tipo Ib con  $\alpha = 0$  y  $\gamma = \frac{\varepsilon\sqrt{2}\beta}{2}$ . En este caso,  $\lambda = 2\varepsilon\sqrt{2}\beta^3$  con  $\varepsilon^2 = 1$ , y  $G = E(1, 1)$ ; i.e., el grupo de los movimientos rígidos del espacio de Minkowski de dimensión dos,  $\mathbb{R}_1^2$ .*

Finalmente, en el Capítulo 4 realizamos un estudio de las formas de Killing en las variedades nearly Kähler estrictas de dimensión seis. De forma general, no sólo en dimensión seis, las variedades nearly Kähler estrictas se pueden considerar como las variedades “opuestas”

a las variedades de Kähler. Es conocido que sobre las variedades de Kähler toda forma de Killing es necesariamente trivial, es decir, paralela respecto a la conexión de Levi-Civita. A partir de este hecho, y debido a la no existencia de formas paralelas respecto a la conexión de Levi-Civita sobre las variedades nearly Kähler, parece interesante plantearse el problema de existencia de formas de Killing sobre las variedades nearly Kähler estrictas, en particular en aquellas que son de dimensión seis ya que generan una de las familias de variedades nearly Kähler irreducibles en las que se descompone toda variedad nearly Kähler. En general, el hecho de que la estructura nearly Kähler pueda pensarse como un producto vectorial conlleva que la 2-forma de Kähler sea una forma de Killing no trivial sobre cualquier variedad nearly Kähler. Junto a la 2-forma de Kähler, las variedades nearly Kähler también están dotadas de una forma de orden tres de especial importancia en el estudio de su geometría, la 3-forma torsión asociada a la conexión Hermítica canónica que, en el caso seis dimensional, también resulta conocido que es una forma de Killing. Aunque estas dos formas no son paralelas respecto a la conexión de Levi-Civita, sí lo son respecto a la conexión Hermítica canónica. Motivados por esto, analizamos en la Sección 4.1 las formas de Killing paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica. Realizamos este estudio caso por caso en función de los posibles órdenes y de los posibles tipos de las formas, obteniendo que dicha existencia se puede determinar a partir de una ecuación puramente algebraica, de la cual obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.1** *Sea  $M$  una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta. Las únicas formas de Killing paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica son la 2-forma de Kähler y la 3-forma torsión.*

Por otra parte, en la Sección 4.2 estudiamos las formas de Killing, que no siendo paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica, si son formas de tipo puro. De este modo, haciendo uso de la descomposición de Hodge tanto de la diferencial exterior como de la codiferencial y de las ecuaciones tipo Kähler que inducen obtenemos, también después de un estudio caso por caso en función de los ordenes y de los tipos de las formas, el siguiente resultado

**Teorema 4.8** *En una variedad nearly Kähler estricta de dimensión seis la única forma de Killing (salvo multiplicación por un escalar) de tipo puro es la 2-forma de Kähler.*

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos un resumen de los principales conceptos que utilizaremos en esta memoria e introducimos las definiciones que motivan el estudio realizado en los capítulos posteriores. En la primera sección recordamos herramientas y notaciones básicas en geometría pseudo-Riemanniana. Puesto que los grupos y las álgebras de Lie en dimensión tres juegan un papel importante en el trabajo realizado, son analizados en la Sección 1.2. En la Sección 1.3 introducimos los flujos y los solitones de Yamabe, de Ricci y de Cotton. Las variedades Lorentzianas indescomponibles pero no irreducibles son discutidas en la Sección 1.4. Finalmente recordamos en la Sección 1.5 el concepto de variedad casi Hermítica, prestando especial atención a las variedades nearly Kähler.

En general omitiremos las demostraciones de los resultados presentados en este capítulo ya que se encuentran detalladas en monografías tanto de geometría Riemanniana como pseudo-Riemanniana (véanse por ejemplo [55], [58] y [73]).

### 1.1. Variedades pseudo-Riemannianas

El objeto principal de estudio en esta memoria son las variedades Riemannianas y Lorentzianas. Debido a que ambas son casos particulares de variedades pseudo-Riemannianas, en este capítulo introducimos las herramientas básicas y fijamos las notaciones de la memoria en su generalidad, particularizándola en su momento a cada contexto.

Una *variedad pseudo-Riemanniana* es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  dotada de un tensor métrico  $g$  (i.e. un tensor de tipo  $(0,2)$  simétrico y no degenerado) de signatura  $(\nu, n-\nu)$ . En lo sucesivo denotaremos a estas variedades por el par  $(M, g)$ . En particular, se dice que una variedad pseudo-Riemanniana es *Riemanniana* si el tensor métrico es definido positivo y *Lorentziana* si su signatura es  $(1, n-1)$ . Denotaremos por  $T_pM$  el espacio tangente a  $M$  en el punto  $p \in M$  y por  $TM$  y  $T^*M$  los fibrados tangente y cotangente de  $M$ , respectivamente. En numerosas ocasiones a lo largo de este trabajo identificaremos dichos fibrados mediante los isomorfismos musicales  $\flat$  y  $\sharp$ .

Consideraremos  $\mathfrak{X}(M)$  el espacio de todos los campos de vectores diferenciables tangentes a  $M$ . Como regla general, los campos de vectores vendrán representados por letras

mayúsculas  $X, Y, Z, V, W \dots$ . Y los vectores tangentes en cada punto de la variedad por letras minúsculas  $x, y, z, v, w \dots$ . Si tomamos un sistema de coordenadas locales  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  en  $M$ , denotaremos las derivadas parciales mediante  $\partial_{x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Siguiendo la notación habitual en geometría pseudo-Riemanniana, un vector distinto de cero  $z \in T_p M$  se dice que es *temporal* si  $g(z, z) < 0$ , *espacial* si  $g(z, z) > 0$  y *nulo, luminoso* o *isotrópico* si  $g(z, z) = 0$ .

Dado  $p \in M$  un punto arbitrario, una  $k$ -forma en  $p$  es un elemento de  $\Lambda^k(T_p^* M)$ , es decir, una aplicación  $k$ -lineal  $\otimes^k T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  totalmente antisimétrica. De este modo, se define el *fibrado de las formas de  $M$*  como la unión disjunta

$$\Lambda^k M := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M).$$

Por tanto, una  $k$ -forma es una sección  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k M$  tal que  $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^* M)$  para todo  $p \in M$ .

La métrica pseudo-Riemanniana  $g$  definida sobre la variedad  $M$  induce un producto interior  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  en el espacio de las  $k$ -formas definido como

$$(1.1) \quad \langle\langle \psi, \eta \rangle\rangle = \langle\langle \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k, \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \rangle\rangle = \det \begin{pmatrix} \psi_1(\eta_1^\sharp) & \psi_1(\eta_2^\sharp) & \dots & \psi_1(\eta_k^\sharp) \\ \psi_2(\eta_1^\sharp) & \psi_2(\eta_2^\sharp) & \dots & \psi_2(\eta_k^\sharp) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_k(\eta_1^\sharp) & \psi_k(\eta_2^\sharp) & \dots & \psi_k(\eta_k^\sharp) \end{pmatrix},$$

para cualesquiera  $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k, \eta = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \in \Lambda^k M$ ; de este modo, podemos considerar bases ortonormales del espacio de las  $k$ -formas. Frecuentemente, y siempre que no suponga confusión, denotaremos el producto interior  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  simplemente por  $g$ .

En general es posible dotar a las variedades pseudo-Riemannianas de diferentes conexiones (es decir, de diferentes conjuntos de reglas invariantes por un cambio de coordenadas para calcular derivadas direccionales de campos de tensores). A su vez, asociado a cada una de estas conexiones, que denotaremos en general por  $D$ , se define su *tensor curvatura de tipo (1, 3)* como

$$(1.2) \quad R^D(X, Y)Z = D_{[X, Y]}Z - [D_X, D_Y]Z,$$

y su *tensor curvatura de tipo (0, 4)* asociado como  $R^D(X, Y, Z, V) = g(R^D(X, Y)Z, V)$ . En general, el tensor curvatura verifica las siguientes simetrías algebraicas

$$(1.3) \quad (a) \quad R^D(X, Y, Z, V) = -R^D(Y, X, Z, V),$$

$$(1.4) \quad (b) \quad \mathfrak{S}_{X, Y, Z} R^D(X, Y, Z, V) = \mathfrak{S}_{X, Y, Z} \{ \mathcal{T}(\mathcal{T}(X, Y), Z) + (D_X \mathcal{T})(Y, Z) \},$$

y la identidad diferencial

$$(1.5) \quad (c) \quad \mathfrak{S}_{X, Y, Z} \{ (D_X R^D)(Y, Z, U, V) \} = \mathfrak{S}_{X, Y, Z} \{ R^D(\mathcal{T}(X, Y), Z, U, V) \},$$

donde  $\mathfrak{S}_{X,Y,Z}$  representa la suma cíclica con respecto a  $X, Y, Z$  y  $\mathcal{T}$  la *torsión* de la conexión  $D$ , definida como  $\mathcal{T}(X, Y) := D_X Y - D_Y X - [X, Y]$ , donde  $[\cdot, \cdot]$  representa el corchete de Lie. Observemos que en general la invarianza al cambiar los dos primeros elementos por los dos últimos en el tensor de curvatura  $R^D$  de tipo  $(0, 4)$  no es cierta ni, por tanto, la anti-invarianza al cambiar los dos últimos elementos entre si. Las identidades (b) y (c) se conocen como la *primera* y la *segunda identidad de Bianchi* respectivamente.

Entre todas las conexiones existe una de especial interés, la llamada *conexión de Levi-Civita*. Dicha conexión, que denotaremos por  $\nabla$ , es la única conexión libre de torsión que paraleliza la métrica  $g$ ; i.e., dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  la conexión  $\nabla$  verifica

$$(1.6) \quad \mathcal{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$$

y

$$(1.7) \quad \nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Además, su expresión explícita viene dada por la *fórmula de Koszul*:

$$(1.8) \quad 2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ + g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]),$$

donde  $X, Y, Z$  son campos de vectores en  $M$ .

Puesto que la conexión  $\nabla$  es métrica y libre de torsión las Ecuaciones (1.4) y (1.5) correspondientes a su tensor curvatura asociado, que en lo sucesivo denotaremos por  $R$ , se reducen a  $\mathfrak{S}_{X,Y,Z} R(X, Y, Z, V) = 0$  y  $\mathfrak{S}_{X,Y,Z} \{(\nabla_X R)(Y, Z, U, V)\} = 0$ , respectivamente.

Además, dicho tensor  $R$  verifica las siguientes identidades algebraicas

$$(1.9) \quad R(X, Y, Z, V) = R(Z, V, X, Y),$$

y por tanto

$$(1.10) \quad R(X, Y, Z, V) = -R(X, Y, V, Z).$$

Es bien conocido que el análisis de dicho tensor curvatura  $R$  es fundamental en el estudio de las variedades pseudo-Riemannianas ya que constituye el invariante básico que codifica todas sus propiedades geométricas. En particular, el tensor curvatura determina y está determinado por la función curvatura seccional. La *curvatura seccional* de una variedad Riemanniana  $(M, g)$  es una función real  $K$  definida sobre la Grassmanniana de 2-planos  $Gr_2(TM)$  como

$$K(\pi) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2},$$

para todo 2-plano  $\pi$  en  $TM$  generado por los campos de vectores  $X$  e  $Y$ ,  $\pi = \langle \{X, Y\} \rangle$ . En el caso de una variedad pseudo-Riemanniana, la definición anterior debe restringirse a la

Grassmanniana de 2-planos no degenerados (i.e., donde  $g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \neq 0$ ), lo que impide garantizar la acotación puntual de dicha función. La posibilidad de extender  $K$  con continuidad a toda la Grassmanniana es equivalente a la constancia de la misma (véase [33]). En tal caso, i.e., cuando  $K(\pi) = \kappa$  para cualquier 2-plano  $\pi$ , el tensor curvatura se escribe como

$$R(X, Y, Z, V) = \kappa \{g(X, Z)g(Y, V) - g(Y, Z)g(X, V)\}.$$

Diversas contracciones del tensor de curvatura permiten obtener nuevos tensores importantes. El primero de ellos es el *tensor de Ricci*,  $\rho$ , definido como la traza del tensor curvatura

$$\rho(X, Y) = \text{tr}\{Z \mapsto R(X, Z)Y\}.$$

En capítulos posteriores trabajaremos también con el *operador de Ricci*,  $\hat{\rho}$ , definido a partir del tensor de Ricci como  $g(\hat{\rho}(X), Y) = \rho(X, Y)$ . Dado que el tensor de Ricci es simétrico, el operador de Ricci es autoadjunto y por tanto diagonalizable en signatura Riemanniana. No obstante, el caso Lorentziano necesita un análisis más detallado puesto que un operador autoadjunto puede tener forma de Jordan no trivial. En particular, cuando la variedad considerada tiene dimensión tres, la forma de Jordan asociada a un operador  $L$  autoadjunto respecto a una métrica Lorentziana puede tomar una de estas cuatro expresiones:

(i) El operador  $L$  es diagonalizable respecto a una base ortonormal de signatura  $(+, +, -)$ , i.e.,

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

(ii) El operador  $L$  tiene autovalores complejos, i.e.,

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

respecto a una base ortonormal de signatura  $(+, +, -)$ , siendo  $\beta \neq 0$ .

(iii) Existe una raíz doble del polinomio característico de  $L$ , i.e.,

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

respecto a una métrica tal que  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_3) = 1$ .

(iv) Existe una raíz triple del polinomio característico de  $L$ , i.e.,

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

respecto a una métrica tal que  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_3) = 1$ .

Volviendo al estudio del tensor curvatura, si contraemos una vez más, en esta ocasión el tensor de Ricci, obtenemos la *curvatura escalar*  $\tau$  definida por

$$\tau = \text{tr}(\widehat{\rho}).$$

En una base arbitraria  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$ , denotando con  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ , el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$(1.11) \quad \rho(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R(x, e_i, y, e_j), \quad \tau = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \rho(e_i, e_j),$$

donde  $(g^{ij})$  denota la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica. Una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  se dice *Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica, en cuyo caso se tiene que  $\rho = \frac{\tau}{n}g$ .

En los capítulos siguientes será conveniente el uso de subíndices para las componentes de los diversos tensores en las correspondientes bases, así, por ejemplo, utilizaremos frecuentemente la notación  $\rho_{ij} = \rho(e_i, e_j)$ ,  $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l), \dots$

Puesto que el operador curvatura,  $R$ , verifica las Ecuaciones (1.3), (1.4) con  $\mathcal{T} \equiv 0$ , (1.9) y por tanto (1.10), podemos interpretarlo como un endomorfismo autoadjunto del espacio de 2-formas  $\Lambda^2(M)$  y, entonces, descomponerlo en componentes ortogonales con respecto al producto interior dado por la Ecuación (1.1) (véase [55]). Considerando el *tensor de Schouten*,  $S$ , que es el tensor de tipo  $(0, 2)$  definido por

$$(1.12) \quad S = \frac{1}{n-2} \left( \rho - \frac{\tau}{2(n-1)}g \right),$$

se tiene la siguiente descomposición ortogonal

$$(1.13) \quad R = \mathfrak{U} + \mathfrak{Z} + W,$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{\tau}{2n(n-1)}g \odot g, \\ \mathfrak{Z} &= \frac{1}{n-2} \left( \rho - \frac{\tau}{n}g \right) \odot g, \\ W &= R - \mathfrak{U} - \mathfrak{Z} = R - S \odot g, \end{aligned}$$

donde  $\odot$  representa el *producto de Kulkarni-Nomizu* definido como

$$\begin{aligned} (D \odot B)(X, Y, Z, V) &= D(X, Z)B(Y, V) + D(Y, V)B(X, Z) \\ &\quad - D(X, V)B(Y, Z) - D(Y, Z)B(X, V), \end{aligned}$$

para dos formas bilineales simétricas  $D$  y  $B$  cualesquiera.

Esta descomposición, además, es irreducible respecto a la acción del grupo ortogonal  $O(\nu, n - \nu)$  en las cuatro componentes del tensor curvatura de forma simultánea. Cabe

destacar que en el caso particular de que la variedad sea de dimensión cuatro, el tensor de Weyl admite una descomposición más fina, y por lo tanto también el tensor curvatura, respecto a la acción del grupo  $SO(\nu, 4 - \nu)$ . En el caso de variedades de dimensión dos y tres esta descomposición es especialmente sencilla. En particular, el tensor curvatura de una superficie está determinado por la métrica como  $R = \frac{\tau}{2} g \odot g$ , donde  $\frac{\tau}{2}$  corresponde a su curvatura de Gauss. Por su parte, y como veremos más adelante, dado que el tensor curvatura de cualquier variedad pseudo-Riemanniana de dimensión tres está completamente determinada por su tensor de Ricci, este ha de expresarse como  $R = S \odot g$ .

La componente  $W$  es un tensor de tipo  $(0, 4)$  conocido como *tensor de Weyl*. Su expresión explícita es

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z, V) = R(X, Y, Z, V) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left\{ g(X, Z)g(Y, V) - g(Y, Z)g(X, V) \right\} \\ - \frac{1}{n-2} \left\{ \rho(X, Z)g(Y, V) - \rho(Y, Z)g(X, V) \right. \\ \left. + \rho(Y, V)g(X, Z) - \rho(X, V)g(Y, Z) \right\}, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, V$  campos de vectores en  $M$ .

El valor de cada una de las componentes del tensor curvatura de la descomposición (1.13) determina sus diferentes propiedades geométricas. Tenemos así las siguientes caracterizaciones:

- La anulación de la componente  $\mathfrak{U}$  caracteriza a las variedades pseudo-Riemannianas con curvatura escalar nula.
- La anulación de la componente  $\mathfrak{J}$  se corresponde con las variedades pseudo-Riemannianas Einstein.
- La anulación simultánea de  $\mathfrak{U}$  y  $\mathfrak{J}$  se corresponde con las variedades pseudo-Riemannianas *Ricci llanas*, es decir, que tienen curvatura de Ricci nula.
- La anulación simultánea de  $\mathfrak{J}$  y  $W$  caracteriza a las variedades pseudo-Riemannianas de curvatura seccional constante.
- Por su parte, la anulación del tensor de Weyl requiere de un análisis más detallado ya que codifica la estructura conforme de  $g$ .

Intuitivamente, el tensor curvatura  $R$  representa la obstrucción de la variedad a ser localmente isométrica al espacio pseudo-Euclidiano  $\mathbb{E}_\nu^n$  o, equivalentemente, a ser llana. Un concepto más general que las isometrías locales son los llamados cambios conformes de una métrica. Dos métricas  $g_1$  y  $g_2$  sobre una variedad  $M$  se dicen *conformes* si existe una función  $\sigma \in C^\infty(M)$  tal que  $g_2 = e^\sigma g_1$ . A diferencia de las isometrías locales, que conservan ángulos y longitudes de vectores, los cambios conformes de métrica sólo conservan los ángulos. Diremos que dos variedades pseudo-Riemannianas  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  son *conformemente*

*equivalentes* si existe un difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  tal que  $\varphi^*\tilde{g}$  es una métrica conforme a  $g$ . En particular, una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  se dice *localmente conformemente llana* si para cada punto  $p \in M$  existe un entorno  $U$ ,  $p \in U$ , y un cambio conforme  $e^\sigma$  ( $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ ) tal que  $g = e^\sigma g_0$  donde  $g_0$  es la métrica del espacio pseudo-Euclídeo  $\mathbb{E}_\nu^n$ .

En general, toda superficie pseudo-Riemanniana es localmente conformemente llana, sin embargo, en dimensiones mayores a dos la situación es un poco más complicada. En general se tiene la siguiente caracterización

**Teorema 1.1.** [55] *Una variedad pseudo Riemanniana  $(M, g)$  es localmente conformemente llana si y sólo si:*

1. *El tensor de Weyl se anula y  $\dim(M) \geq 4$ .*
2. *El tensor de Schouten  $S$  es Codazzi, es decir,  $(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z)$  para cualesquiera  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\dim(M) = 3$ .*

Además, el tensor de Schouten de cualquier variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  localmente conformemente llana es Codazzi.

El apartado 2. del teorema anterior es equivalente a decir que el tensor de Cotton se anula. El *tensor de Cotton*,  $C$ , es el tensor de tipo  $(0, 3)$  dado por

$$(1.14) \quad C(X, Y, Z) = (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)$$

para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Además, dicho tensor es el único invariante conforme en dimensión tres. El hecho de que en esta dimensión el tensor de Weyl no caracterice a las variedades localmente conformemente llanas se debe a que es idénticamente nulo ya que el tensor curvatura depende sólo de su curvatura de Ricci.

Por otra parte, la derivada covariante del tensor curvatura  $R$  también nos aporta información de sus propiedades geométricas. Volviendo a la descomposición dada en (1.13) tenemos que la anulación de la derivada covariante de cada una de sus diferentes componentes también caracteriza propiedades interesantes. Así

- $\nabla \mathfrak{U} = 0$  se corresponde con las variedades pseudo-Riemannianas con curvatura escalar constante.
- $\nabla \mathfrak{Z} = 0$  se corresponde con las variedades pseudo-Riemannianas cuyo tensor de Ricci es paralelo.
- $\nabla W = 0$  caracteriza las variedades pseudo-Riemannianas *conformemente simétricas* de dimensión mayor o igual a cuatro.

Una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  es *localmente simétrica* si  $\nabla R = 0$  y diremos que es *esencialmente conformemente simétrica* si tiene dimensión mayor a tres,  $\nabla W = 0$  con  $W \neq 0$  y  $\nabla R \neq 0$  (véanse [35] y [36]).

En el Capítulo 3 estudiamos las variedades pseudo-Riemannianas de dimensión tres con tensor de Cotton paralelo como una extensión a dicha dimensión de las variedades conformemente simétricas.

### 1.1.1. Operadores diferenciales

Como vimos en la sección anterior, a lo largo de esta memoria denotaremos la conexión de Levi-Civita por  $\nabla$ ; no obstante, también denotaremos por  $\nabla$  al *operador gradiente* en  $M$ . Recordemos que el gradiente de una función diferenciable  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es el campo de vectores  $\nabla\varphi$  dado por

$$g(\nabla\varphi, X) = X(\varphi), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Si  $(x^1, \dots, x^n)$  es un sistema de coordenadas locales en  $M$ , entonces el gradiente de una función  $\varphi$  está dado en coordenadas locales como

$$(1.15) \quad \nabla\varphi = g^{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de la asociada al tensor métrico,  $(g_{ij})$ , en coordenadas locales.

A partir del gradiente de la función  $\varphi$  se define, utilizando la conexión de Levi-Civita, el *operador Hessiano de  $\varphi$* ,  $\text{hes}_\varphi$ , como

$$\text{hes}_\varphi(X) = \nabla_X \nabla\varphi,$$

donde  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . A su vez, a partir del operador Hessiano de  $\varphi$ , se define el *tensor Hessiano de  $\varphi$* ,  $\text{Hes}_\varphi$ , como el tensor de tipo  $(0, 2)$  dado por

$$\text{Hes}_\varphi(X, Y) = g(\text{hes}_\varphi(X), Y),$$

con  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . En coordenadas locales su expresión es

$$\text{Hes}_\varphi \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Finalmente, definimos el *Laplaciano de  $\varphi$*  como

$$\Delta \varphi = -\text{tr}(\text{hes}_\varphi).$$

Hasta este momento sólo hemos visto operadores diferenciales actuando sobre funciones, sin embargo, también se pueden definir de forma más general actuando sobre formas de cualquier orden. Es frecuente, además, que dichos operadores diferenciales encierren en sus expresiones otros operadores algebraicos.

Dos operadores algebraicos que juegan un papel importante a la hora de definir operadores diferenciales sobre formas arbitrarias son el *producto exterior* y el *producto interior* o *contracción*. Dado un campo de vectores  $X$  y una  $k$ -forma  $\psi$ , estos dos operadores generan una  $(k+1)$ -forma y una  $(k-1)$ -forma respectivamente. Para el primer caso tenemos que la  $(k+1)$ -forma asociada está dada por  $X^\flat \wedge \psi$ ; mientras que para el segundo tenemos que  $X \lrcorner \psi = \psi(X, \dots)$ , i.e. si  $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$  resulta

$$X \lrcorner (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \psi_j(X) \psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\psi}_j \wedge \dots \wedge \psi_k,$$

donde, en este caso, el símbolo “ $\widehat{\phantom{x}}$ ” representa que el término correspondiente está suprimido. Además, dada una  $(k-1)$ -forma  $\varphi$  y una  $(k+1)$ -forma  $\psi$  tenemos que el producto exterior y la contracción están relacionados por

$$g(X \wedge \varphi, \psi) = g(\varphi, X \lrcorner \psi).$$

A mayores de estos dos operadores algebraicos, es bien conocido que todo endomorfismo  $B$  de  $\mathfrak{X}(M)$  puede ser extendido a una derivación de  $\Lambda^k(M)$ , que seguiremos denotando por  $B$ , y que explícitamente está dada por

$$B(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) = (B(\psi_1^\sharp))^\flat \wedge \dots \wedge \psi_k + \dots + \psi_1 \wedge \dots \wedge (B(\psi_k^\sharp))^\flat.$$

En términos de una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , tenemos que  $B = \sum B(e_i) \wedge e_i \lrcorner$ . Por ejemplo, si  $B$  es la aplicación identidad tenemos que  $\sum e_i \wedge e_i \lrcorner \psi = k\psi$  y por tanto  $e_i \lrcorner (e_i \wedge \psi) = (n-k)\psi$ ; mientras que si  $B$  es el operador curvatura  $R_{XY}$  para dos campos de vectores  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  cualesquiera, tenemos que

$$(1.16) \quad R_{XY}\psi = \sum_{i=1}^n (R_{XY}e_i \wedge e_i \lrcorner) \psi.$$

Cuando la variedad pseudo-Riemanniana en cuestión es orientable resulta posible definir un nuevo operador algebraico de gran utilidad, el llamado operador *estrella de Hodge*,  $\star : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{n-k}(M)$ , que induce un isomorfismo entre las  $k$  y las  $(n-k)$ -formas definido por la relación  $\varphi \wedge \star \psi = \langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ , donde  $e^i = (e_i)^\flat$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base ortonormal positivamente orientada de  $TM$ . Además, dicho operador verifica la relación  $\star^2 = (-1)^{k(n-k)+\nu}$ , y por tanto si  $k = n-k$  define una estructura compleja o producto en el espacio de las  $k$ -formas dependiendo de la dimensión y la signatura de la variedad y del orden de la forma.

Volviendo a los operadores diferenciales, se define el operador *diferencial exterior* o, simplemente, *diferencial*,  $d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$ , como el operador diferencial determinado por las propiedades

- a)  $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg(\varphi)} \varphi \wedge d\psi$ , siendo  $\deg(\varphi)$  el orden de la forma  $\varphi$ .
- b)  $d^2 = 0$ .
- c)  $df(X) = X(f)$ , para todo campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , y toda función  $f$ .

Este operador puede expresarse haciendo uso de la conexión de Levi-Civita y del producto exterior mediante la fórmula  $d = e^i \wedge \nabla_{e_i}$ . De forma similar se define el operador *codiferencial exterior* o *codiferencial*,  $\delta$ , como  $\delta = -e_i \lrcorner \nabla_{e_i}$ . Dichos operadores están relacionados mediante el operador *estrella de Hodge*,  $\star$ , por la expresión  $\delta = -\star d\star$ . Además, si  $(M, g)$  es una variedad de Riemann compacta, entonces se verifica que la diferencial exterior y la codiferencial son *adjuntos formales* el uno del otro, es decir, se verifica la igualdad

$$\int_M \langle \langle \delta\varphi, \psi \rangle \rangle = \int_M \langle \langle \varphi, d\psi \rangle \rangle,$$

para cualquier  $k$ -forma  $\varphi$  y cualquier  $(k-1)$ -forma  $\psi$ .

A partir de la diferencial y de la codiferencial se define el *operador Laplaciano*,  $\Delta : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^k(M)$ , como el operador  $\Delta := d\delta + \delta d$ . Este operador está relacionado con el tensor curvatura  $R$  de la variedad por la conocida como *primera fórmula de Weitzemböck*, dada por

$$(1.17) \quad \Delta\psi = \nabla^*\nabla + q(R),$$

donde  $\nabla^*\nabla$  es el llamado *Laplaciano bruto*, definido como

$$\nabla^*\nabla = -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \nabla_{\nabla_{e_i}e_i},$$

y  $q(R)$  es el tensor asociado a la curvatura dado por

$$q(R) = \sum_{i,j=1}^n e_j \wedge e_i \lrcorner R_{e_j e_i},$$

siendo  $\{e_i\}$  una referencia ortonormal local cualquiera.

De forma más general, cuando se considera una conexión  $\bar{\nabla}$  diferente a la conexión de Levi-Civita con tensor curvatura  $\bar{R}$ , también es posible definir de forma análoga su operador simétrico  $q(\bar{R})$  asociado por

$$(1.18) \quad q(\bar{R}) = \sum_{i,j=1}^n e_j \wedge e_i \lrcorner \bar{R}_{e_j e_i}.$$

Como vimos en la sección anterior, cada conexión determina una forma de definir la derivada direccional de un tensor  $T$ . No obstante, existen otras formas de definir derivadas direccionales. Una de ellas, y que también utilizaremos a lo largo de esta memoria, es la *derivada de Lie*,  $\mathcal{L}$ . Esta derivada depende de los valores del tensor  $T$  a lo largo de las curvas integrales de  $X$  y sobre funciones coincide con su derivada direccional, es decir, si  $f$  es una función real en  $M$  tenemos que  $\mathcal{L}_X f = X(f) = \nabla_X f$ . Por otra parte, la *derivada de Lie* de un campo de vectores es su corchete de Lie, es decir, si  $Y$  es un campo de vectores  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ . En general, se define la derivada de Lie de un campo de tensores  $T$  como

$$(\mathcal{L}_X T)_p := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} ((\psi(t))^* T)_p,$$

donde  $\psi : I \times M \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es el flujo local inducido por  $X$  y  $(\psi(t))^*$  es el pullback a lo largo del difeomorfismo  $\psi(t)$  para todo  $t \in I$ . Ahora bien, por tratarse de una derivación, si consideramos como el tensor  $T$  la métrica  $g$ , tenemos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z),$$

que, por las Ecuaciones (1.6) y (1.7), puede escribirse como

$$(1.19) \quad (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y).$$

En función de las propiedades que tenga la derivada de Lie de la métrica en la dirección de un campo de vectores  $X$  obtendremos campos de vectores de diferente naturaleza

- Un campo de vectores  $X$  en  $M$  se dice *Killing* si la derivada de Lie de la métrica  $g$  con respecto a  $X$  es idénticamente nula,  $\mathcal{L}_X g = 0$ ; es decir, si el flujo local de  $X$  es realizado por isometrías. Equivalentemente, por la Ecuación (1.19), tenemos que  $X$  es un campo de vectores Killing si y sólo si  $\nabla X$  es antisimétrico, donde  $\nabla X$  es el operador  $Z \mapsto \nabla_Z X$ , para todo campo de vectores  $Z$  en  $M$ . Además, si  $X$  es un campo de vectores Killing, su *divergencia*,  $\operatorname{div}(X)$ , definida como  $\operatorname{div}(X) = \operatorname{tr}(\nabla X)$  es nula. El conjunto de todos los campos de vectores de Killing genera el álgebra de Lie del grupo de isometrías de una variedad de Riemann y el número de campos de vectores de Killing linealmente independientes mide el grado de simetría de dicha variedad. Es bien conocido que este número está acotado superiormente por la dimensión del grupo de isometrías de la esfera estándar, y sobre variedades compactas, la igualdad se obtiene si y sólo si la variedad es isométrica a dicha esfera.
- Un campo de vectores  $X$  se dice *conforme* si verifica la ecuación  $\mathcal{L}_X g = \phi g$ , para alguna función  $\phi$ . Equivalentemente, su flujo local consiste en transformaciones conformes. Teniendo en cuenta que  $\operatorname{tr}(\mathcal{L}_X g) = 2 \operatorname{div}(X)$ , un campo de vectores  $X$  es conforme si y sólo si  $\mathcal{L}_X g = \frac{2}{n} \operatorname{div}(X) g$ . Cuando un campo de vectores conforme verifica que  $\operatorname{div}(X)$  es constante se llama *campo de vectores homotético* y, en tal caso, su flujo local está realizado por homotecias.

Es posible extender también los conceptos de campos de vectores Killing y conformes a formas de orden arbitrario. Una  $k$ -forma  $u$  se llama  *$k$ -forma de Killing conforme* o  *$k$ -forma twistor* si verifica la ecuación diferencial

$$(1.20) \quad \nabla_X \psi = \frac{1}{k+1} X \lrcorner d\psi - \frac{1}{n-k+1} X^\flat \wedge \delta\psi,$$

para cualquier campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . A su vez, una  $k$ -forma twistor cocerrada o, equivalentemente, una forma cocerrada tal que  $\nabla\psi \in \Gamma(\Lambda^{k+1}T^*M)$  o tal que  $X \lrcorner \nabla_X \psi = 0$ , se llama *forma de Killing*. Por contra, si la forma twistor es cerrada se llama *\*-Killing*. De este modo resulta que las 1-formas twistor y las 1-formas de Killing son duales de campos de vectores conformes y de campos de vectores Killing respectivamente. A su vez, observemos que toda forma paralela es una forma twistor aplicando directamente la definición. Además, las formas de Killing conformes cerradas y cocerradas, por ejemplo las formas armónicas en variedades compactas, han de ser paralelas. Para más información sobre formas twistor véanse [63], [78] y [79].

En esta memoria centraremos nuestra atención en el estudio de las formas de Killing, para ello haremos uso con frecuencia del siguiente resultado.

**Lema 1.2.** [78] *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann compacta. Entonces una  $k$ -forma  $\psi$  cocerrada es una forma de Killing, si y sólo si*

$$\Delta\psi = \frac{k+1}{k} q(R)\psi.$$

Volviendo a los campos de vectores, cabe destacar que el valor de la derivada de Lie de otros objetos geométricos diferentes a la métrica, como por ejemplo de la conexión de Levi-Civita o del tensor de Ricci, también codifica propiedades geométricas importantes. Así, si la conexión de Levi-Civita es invariante con respecto al flujo asociado a un campo de vectores  $X$ , i.e.  $\mathcal{L}_X \nabla = 0$ , se dice que  $X$  es un campo de vectores *afín Killing*. Además, esta propiedad caracteriza el hecho de que dicho flujo consiste en transformaciones afines. Por otra parte, si lo que se verifica es que  $\text{tr} \mathcal{L}_X \nabla = 0$  se dice que  $X$  es un campo de vectores 1-armónico, lo que es equivalente a que  $X : (M, g) \rightarrow (TM, g^c)$  sea una aplicación armónica (véanse [37] y [86]). Finalmente, cuando es el tensor de Ricci el que es invariante con respecto al flujo asociado a un campo de vectores  $X$ , i.e.  $\mathcal{L}_X \rho = 0$ , se dice que  $X$  es una *colineación de Ricci*.

## 1.2. Grupos de Lie

Un *grupo de Lie*  $G$  es una variedad diferenciable en la que está definida una operación que lo dota de una estructura algebraica de grupo y para la cual son diferenciables las aplicaciones producto,  $\mu$ , e inversa,  $\iota$ , definidas respectivamente por:  $\mu(a, b) = ab$ ;  $a, b \in G$  y  $\iota(a) = a^{-1}$ ,  $a \in G$ . Se dice que  $H \subset G$  es un *subgrupo de Lie de  $G$*  si es a la vez un subgrupo y una subvariedad de  $G$ . Asociadas a las aplicaciones producto e inversa existen otras tres aplicaciones fundamentales en el estudio de los grupos de Lie, que para cada  $g \in G$  denotaremos por  $L_g, R_g, I_g : G \rightarrow G$ , y que están dadas por

$$(1.21) \quad L_g(a) = ga, \quad R_g(a) = ag, \quad I_g(a) = gag^{-1}.$$

Dichas aplicaciones se denominan *traslación a la izquierda*, *traslación a la derecha* y *conjugación por  $g$*  respectivamente. En general, estas aplicaciones son difeomorfismos de  $G$  mientras que la conjugación  $I_g$  es, además, un *homomorfismo de grupos de Lie*; es decir, un homomorfismo en el sentido abstracto de grupos, por lo que se dice que es un *automorfismo de  $G$* .

Una herramienta poderosa en el estudio de los grupos de Lie es su álgebra de Lie asociada. No obstante, a pesar de que la motivación del estudio de las álgebras de Lie proviene de la teoría de grupos de Lie, es posible definirla de forma abstracta. Así pues, un *álgebra de Lie* sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial real  $V$  dotado con una aplicación  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ , llamada *corchete de Lie*, con las siguientes propiedades:

- (i) Antisimétrica:  $[x, y] = -[y, x]$ .
- (ii) Bilineal:  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ .
- (iii) Verifica la *identidad de Jacobi*:  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ .

Para cualesquiera  $x, y, z \in V$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Es conocido que sobre toda variedad los campos de vectores diferenciables forman un álgebra de Lie de dimensión infinita, pero en el caso particular en el que la variedad además

sea un grupo de Lie existe un álgebra de Lie de dimensión finita íntimamente asociada a él y en la que se encuentran reflejadas las propiedades locales de dicho grupo. Para obtener dicha álgebra de Lie es necesario definir los campos de vectores invariantes a la izquierda. Un campo de vectores  $X$  sobre un grupo de Lie  $G$  verificando

$$(L_g)_*X = X,$$

para cualquier  $g \in G$  se denomina *campo de vectores invariante a la izquierda*; mientras que el espacio vectorial  $\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) : X \text{ es invariante a la izquierda}\}$  equipado con el producto corchete de campos de vectores usual se conoce como el *álgebra de Lie* de  $G$ . Además, dicha álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se identifica de forma canónica con el espacio tangente a  $G$  en el elemento neutro  $e$ ,  $T_eG$ .

El lazo de unión más fuerte entre un grupo de Lie,  $G$ , y su álgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$ , es la aplicación  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ , llamada *aplicación exponencial*, donde  $\exp(x)$  no es más que el valor para  $t = 1$  del único subgrupo uniparamétrico de  $G$ ; es decir, del único homomorfismo  $\exp_x : \mathbb{R} \rightarrow G$ , cuyo vector tangente en  $t = 0$  es  $x_e$ . El nombre de  $\exp$  viene motivado por el hecho de que para el grupo lineal general de un espacio vectorial dicha aplicación exponencial coincide con la exponencial de matrices usual.

Es bien conocido que si  $G$  y  $H$  son dos grupos de Lie y  $\varphi : G \rightarrow H$  es un homomorfismo, entonces la aplicación exponencial hace el diagrama siguiente conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \end{array}$$

A su vez, un *homomorfismo* entre dos álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  es una aplicación lineal  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tal que  $\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)]$ . Cuando  $\psi$  es un homomorfismo biyectivo de  $\mathfrak{g}$  en sí mismo, entonces  $\psi$  se dice que es un *automorfismo* de  $\mathfrak{g}$ . Cabe destacar que todo homomorfismo de grupos de Lie  $\varphi$  induce de forma natural el homomorfismo de álgebras de Lie dado por  $\varphi_{*e}$ .

Ahora bien, volviendo a las tres aplicaciones definidas anteriormente en la Ecuación (1.21), la conjugación  $I_g$  puede pensarse como una actuación a la izquierda de un grupo de Lie sobre sí mismo, por lo que induce la representación  $Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$  dada por  $Ad(g) = (I_g)_{*e}$  y que se denomina *representación adjunta*. De este modo, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_g} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

es conmutativo. Además, si se denota la diferencial de dicha representación en el elemento

neutro por  $ad$ , i.e.  $Ad_{*e} = ad$ , se obtiene también el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) \\ \uparrow \text{exp} & & \uparrow \text{exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Esta nueva aplicación  $ad$  verifica la propiedad de que

$$ad(x)(y) \equiv ad_x y = [x, y],$$

para cualesquiera  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

Finalmente, consideremos  $H$  un subgrupo de Lie de un grupo de Lie  $G$ . Se dice que un objeto definido sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  es  $Ad(H)$ -invariante si se conserva por las aplicaciones adjuntas de elementos de  $H$ , i.e., por  $Ad(h) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , para cualquier  $h \in H$ .

### 1.2.1. Álgebras de Lie de dimensión tres

De forma general, las álgebras de Lie se pueden intentar clasificar desde un punto de vista puramente algebraico en función de sus constantes de estructura o, equivalentemente, en función de las diferentes expresiones que admite su aplicación adjunta,  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$ . En particular, si los vectores  $x, y, z$  generan una base para un álgebra de Lie de dimensión tres, las diferentes posibilidades para los productos corchetes de forma que determinen álgebras no isomorfas son:

- *Abeliana*:  $[x, y] = [y, z] = [z, x] = 0$ .
- *Nilpotente*:  $[x, y] = z$ ,  $[z, x] = [z, y] = 0$ .
- *Unimodular resoluble*. Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se dice *unimodular* si verifica la propiedad  $\text{tr}(ad_x) = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ . Existen dos tipos de álgebras de Lie unimodulares resolubles no isomorfas:
  - $[x, y] = 0$ ,  $[z, x] = x$  y  $[z, y] = -y$ , o
  - $[x, y] = 0$ ,  $[z, x] = -y$  y  $[z, y] = x$ .
- *Simple*: Existen dos familias de álgebras de Lie simples no isomorfas cuyos productos corchetes están dados por
  - $[x, y] = 2z$ ,  $[z, x] = 2y$ , y  $[z, y] = 2x$ , o
  - $[x, y] = z$ ,  $[z, x] = y$ ,  $[z, y] = -x$ .
- *No unimodular resoluble*: Existe un conjunto no numerable de álgebras de Lie resolubles no unimodulares y no isomorfas, pero todas ellas admiten una de estas dos estructuras:

- $[x, y] = 0$ ,  $[z, x] = x$  y  $[z, y] = y$ , o
- $[x, y] = 0$ ,  $[z, x] = y$  y  $[z, y] = -cx + 2y$ ,

donde en ambos casos  $c \in \mathbb{R}$ . Además, para el segundo de los casos resulta que  $ad_z = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  tiene traza 2 y determinante  $c$ .

Un poco más compleja es la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión tres dotadas de un producto interior Lorentziano invariante a la izquierda ya que cualquiera de los tipos descritos anteriormente puede dotarse con una cantidad infinita no numerable de tales productos.

Puesto que la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión tres Lorentzianas se basa en la correspondiente clasificación de las álgebras de Lie Riemannianas, presentamos aquí un breve resumen de dicha clasificación.

### Caso Riemanniano

Para clasificar las álgebras de Lie Riemannianas de dimensión tres se hace uso del producto vectorial inducido por los cuaternios, que no es más que el *producto vectorial Euclídeo* usual. Fijada una orientación para  $\mathfrak{g}$  y dada  $\{e_1, e_2, e_3\}$  una base ortonormal orientada positiva, tenemos que dicho producto vectorial es la aplicación bilineal y antisimétrica determinada por las relaciones

$$(1.22) \quad e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1.$$

Además, para dos vectores arbitrarios  $x$  e  $y$  el vector  $x \times y$  es ortogonal tanto a  $x$  como a  $y$ , tiene longitud igual a la raíz cuadrada del determinante  $g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2$  y su sentido está determinada por el hecho de que  $\{x, y, x \times y\}$  generan una base positivamente orientada siempre que  $x$  e  $y$  sean linealmente independientes. Bajo estas condiciones se tiene el siguiente lema.

**Lema 1.3.** [61] *El producto corchete en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  está relacionado con el producto vectorial por la fórmula*

$$[x, y] = \tilde{L}(x \times y),$$

donde  $\tilde{L}$  es la aplicación lineal definida de forma única de  $\mathfrak{g}$  en sí misma. El grupo de Lie  $G$  es unimodular si y sólo si la aplicación lineal  $\tilde{L}$  es autoadjunta.

*Demostración.* La aplicación lineal  $\tilde{L}$  (al igual que cualquier aplicación lineal) está determinada de forma unívoca conociendo cómo actúa sobre los elementos de una base. Así, haciendo uso de las relaciones dadas en la Ecuación (1.22) y de las notaciones usadas en [61], tenemos que la aplicación lineal  $\tilde{L}$  puede expresarse como

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

donde los  $\alpha_{ij}$  no son más que las correspondientes constantes de estructura.

Haciendo uso de  $\tilde{L}$  obtenemos que las aplicaciones  $ad_{e_1}$ ,  $ad_{e_2}$  y  $ad_{e_3}$  están dadas por las expresiones

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{31} & -\alpha_{21} \\ 0 & \alpha_{32} & -\alpha_{22} \\ 0 & \alpha_{33} & -\alpha_{23} \end{pmatrix}, \quad ad_{e_2} = \begin{pmatrix} -\alpha_{31} & 0 & \alpha_{11} \\ -\alpha_{32} & 0 & \alpha_{12} \\ -\alpha_{33} & 0 & \alpha_{13} \end{pmatrix}, \quad ad_{e_3} = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & 0 \end{pmatrix};$$

de donde obtenemos que

$$\operatorname{tr}(ad_{e_1}) = \alpha_{32} - \alpha_{23}, \quad \operatorname{tr}(ad_{e_2}) = -\alpha_{31} + \alpha_{13}, \quad \operatorname{tr}(ad_{e_3}) = \alpha_{21} - \alpha_{12};$$

por lo que  $\mathfrak{g}$  es unimodular si y sólo si  $\tilde{L}$  es simétrica o, equivalentemente, si  $\tilde{L}$  es autoadjunto.  $\square$

Ahora bien, si  $\tilde{L}$  es un operador autoadjunto en un espacio Riemanniano existe una base ortonormal, que también denotaremos por  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , de autovectores del operador  $\tilde{L}$ , i.e., tal que  $\tilde{L}e_i = \lambda_i e_i$  para ciertos autovalores  $\lambda_i$ . Así pues, el producto corchete está dado por:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \tilde{L}(e_1 \times e_2) = \lambda_3 e_3, \\ [e_3, e_1] &= \tilde{L}(e_3 \times e_1) = \lambda_2 e_2, \\ [e_2, e_3] &= \tilde{L}(e_2 \times e_3) = \lambda_1 e_1. \end{aligned}$$

Cabe destacar que esta construcción de los autovalores  $\lambda_i$  depende de la orientación tomada. De este modo, si cambiamos la orientación de  $\mathfrak{g}$  tenemos que el producto vectorial cambia de signo y, por tanto, también lo hacen los autovalores  $\lambda_i$ . Además, si fijamos el producto corchete del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y tomamos un nuevo producto interior en ella tal que  $\{abe_1, cbe_2, cae_3\}$ , siendo  $a, b$  y  $c$  constantes reales no nulas, es una base ortonormal, obtenemos que las nuevas constantes de estructura respecto a esta nueva base están dadas por  $c^2\lambda_1, a^2\lambda_2, b^2\lambda_3$ . Por tanto, es posible multiplicar las constantes de estructura  $\lambda_i$  por números positivos arbitrarios sin cambiar el álgebra de Lie subyacente, obteniéndose, así, que existen seis clases de álgebras de Lie Riemannianas unimodulares no isomorfas.

Tabla 1.1: Clasificación de las álgebras de Lie Riemannianas unimodulares de dimensión tres.

Signos de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Grupo de Lie asociado	Descripción
+, +, +	$SU(2)$ o $SO(3)$	Compacto y simple
+, +, -	$SL(2, \mathbb{R})$ o $O(1, 2)$	Simple y no compacto
+, +, 0	$E(2)$	Resoluble
+, -, 0	$E(1, 1)$	Resoluble
+, 0, 0	Grupo de Heisenberg	Nilpotente
0, 0, 0	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	Conmutativo

Supongamos ahora que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión tres no unimodular. Una familia especial de álgebras de Lie en esta clase son las de Tipo  $\mathfrak{S}$ , es decir, todas aquellas álgebras de Lie resolubles verificando que para cualesquiera dos elementos  $x, y \in \mathfrak{g}$ , su producto corchete,  $[x, y]$ , es una combinación lineal de ellos mismos.

Ahora bien, si suponemos que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie no unimodular y que no pertenece al Tipo  $\mathfrak{S}$ , podemos considerar su *núcleo unimodular*, definido como el subespacio

$$(1.23) \quad \mathfrak{u} = \{y \in \mathfrak{g} : \text{tr}(ad_y) = 0\},$$

que es por definición un subálgebra unimodular de dimensión dos, y por tanto un subálgebra de Lie conmutativa. Tenemos así la siguiente clasificación:

**Lema 1.4.** [61] *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión tres no unimodular no perteneciente al Tipo  $\mathfrak{S}$ . Entonces existe una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tal que  $e_1$  es ortogonal a  $\mathfrak{u}$  y tal que sus productos corchetes están dados por*

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0$$

siendo  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  constantes reales tales que  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ . Además, esta base también diagonaliza el tensor de Ricci, siendo

$$\begin{aligned} \rho(e_1, e_1) &= \frac{1}{2} (-2\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma - \gamma^2 - 2\delta^2), \\ \rho(e_2, e_2) &= \frac{1}{2} (-2\alpha^2 - 2\alpha\delta - \beta^2 + \gamma^2), \\ \rho(e_3, e_3) &= \frac{1}{2} (-2\delta(\alpha + \delta) + \beta^2 - \gamma^2). \end{aligned}$$

### Caso Lorentziano

La clasificación de las álgebras de Lie de dimensión tres equipadas con un producto interior Lorentziano invariante a la izquierda sigue una estrategia análoga a la del caso Riemanniano. No obstante, en este caso en vez de hacer uso del producto vectorial inducido por los cuaternios haremos uso del producto vectorial inducido por los paracuaternios en el espacio  $\mathbb{R}_1^3$ , es decir, de la aplicación bilineal antisimétrica dada por las relaciones

$$(1.24) \quad e_1 \times e_2 = -e_3, \quad e_3 \times e_1 = e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1;$$

donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  denota una base ortonormal de signatura  $(++-)$ . Con estas consideraciones se verifica el siguiente resultado:

**Teorema 1.5.** [32] *El producto corchete en  $\mathfrak{g}$  está relacionado con el producto vectorial inducido por los paracuaternios mediante la fórmula  $[X, Y] = L(X \times Y)$ , donde  $L$  es una aplicación lineal de  $\mathfrak{g}$  en sí misma definida de forma única. Además,  $\mathfrak{g}$  es unimodular si y sólo si  $L$  es autoadjunta.*

La demostración de este teorema es análoga a la del caso Riemanniano y por lo tanto la omitimos aquí. No obstante, a diferencia de lo que ocurre en el caso Riemanniano, un operador autoadjunto con respecto a una métrica Lorentziana no es necesariamente diagonalizable. Considerando entonces las diferentes formas de Jordan de  $L$  vistas anteriormente, tenemos las siguientes cuatro clases de álgebras de Lie Lorentzianas unimodulares de dimensión tres

Tipo Ia. Si  $L$  es diagonalizable respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  con autovalores  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , entonces el correspondiente álgebra de Lie está dada por

$$(\mathfrak{g}_{Ia}) : \quad [e_1, e_2] = -\gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

Tipo Ib. Supongamos que  $L$  tiene un autovalor complejo. Entonces, respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , tenemos

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0,$$

y el álgebra de Lie correspondiente está dada por

$$(\mathfrak{g}_{Ib}) : \quad [e_1, e_2] = \beta e_2 - \gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\gamma e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

Tipo II. Supongamos que el polinomio mínimo de  $L$  tiene una raíz de multiplicidad 2. Entonces, respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , tenemos

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \beta & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \beta \end{pmatrix},$$

y el álgebra de Lie correspondiente está dada por

$$(\mathfrak{g}_{II}) : \quad [e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - (\beta - \frac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2})e_2 - \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

Tipo III. Supongamos que el polinomio mínimo de  $L$  tiene una raíz de multiplicidad 3. Entonces, respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , tenemos

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

y el álgebra de Lie correspondiente está dada por

$$(\mathfrak{g}_{III}) : \quad \begin{cases} [e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_3, & [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_2, \\ [e_2, e_3] = \alpha e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. \end{cases}$$

Cabe destacar que para los casos de Tipo II y Tipo III estas expresiones del endomorfismo  $L$  con respecto a una base ortonormal de signatura  $(+, +, -)$  se obtienen a partir de las dadas en la Sección 1.1 mediante el cambio de base inducido por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, para identificar a qué grupo de Lie puede corresponder cada uno de los distintos operadores  $L$  descritos anteriormente consideramos la matriz  $\tilde{L} = L\iota$ , donde

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dicha matriz  $\tilde{L}$  es diagonalizable puesto que representa, por construcción, un operador autoadjunto con respecto a una métrica Riemanniana. Por tanto, basta ver en la Tabla 1.1 a qué álgebra de Lie se corresponde su matriz diagonal asociada.

La clasificación de las álgebras de Lie de dimensión tres Lorentzianas no unimodulares sigue también un proceso análogo al caso Riemanniano. Por una parte, al igual que ocurría en el caso Riemanniano, una familia especial de álgebras de Lie en esta clase son las de Tipo  $\mathfrak{S}$ , formada por todas aquellas álgebras de Lie resolubles verificando que para cualesquiera dos elementos  $x, y \in \mathfrak{g}$ , su producto corchete  $[x, y]$  es una combinación lineal de ellos mismos. No obstante, debido a la existencia de campos de vectores temporales, espaciales y nulos tenemos que el núcleo unimodular  $\mathfrak{u}$  dado por la Ecuación (1.23) puede tener diferentes naturalezas.

En general, en [32] se demuestra, siguiendo los mismos pasos que en el caso Riemanniano, que un álgebra de Lie de dimensión tres no unimodular, Lorentziana y con curvatura seccional no constante está dada, respecto a una base adaptada  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , por

$$(\mathfrak{g}_{IV}) : \quad [e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y, además, una de las siguientes condiciones se verifica:

- IV.1  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es ortonormal con  $g(e_1, e_1) = -g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -1$  y las constantes de estructura verifican  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$ .
- IV.2  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es ortonormal con  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = 1$  y las constantes de estructura verifican  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ .
- IV.3  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es pseudo-ortonormal con

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y las constantes de estructura verifican  $\alpha\gamma = 0$ .

Observemos que en los dos primeros casos el plano determinado por el núcleo unimodular  $\mathfrak{u}$  es un plano no nulo. En particular,  $\mathfrak{u}$  es Lorentziano en el caso IV.1 y espacial en el caso IV.2. Finalmente el caso IV.3 se corresponde con la situación en la que  $\mathfrak{u}$  es un plano nulo.

### 1.2.2. Espacios homogéneos

Una *variedad homogénea* es una variedad  $M$  sobre la que actúa a la izquierda un grupo de Lie  $G$  de forma transitiva, es decir, para cualesquiera  $p, q \in M$  existe un elemento  $g \in G$  tal que  $gp = q$ . Por tanto, una variedad homogénea puede identificarse con el espacio cociente  $G/H$ , donde  $H = \{g \in G | go = o\}$  es el *subgrupo de isotropía* de un punto  $o \in M$ , por ejemplo  $o = eH$ . Se deduce de esta definición que el subgrupo  $H$  es un subgrupo cerrado pero no necesariamente conexo. Recíprocamente, cualquier subgrupo cerrado  $H$  de un grupo de Lie  $G$  define una variedad homogénea  $M = G/H$  tal que la proyección natural de  $G$  sobre  $G/H$  es diferenciable.

En función de las diferentes propiedades que tenga el cociente  $G/H$  se diferencian distintas clases de espacios homogéneos. Así, se dice que  $M = G/H$  es un *espacio homogéneo reductivo* si el álgebra de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}$ , admite una descomposición en subespacios vectoriales  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ , tal que  $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ . A partir de esta última condición es posible deducir que  $ad_{\mathfrak{h}}\mathfrak{m} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$  donde  $\mathfrak{h}$  es el álgebra de Lie de  $H$ ; además, el recíproco es cierto si  $H$  es un subgrupo conexo.

El espacio homogéneo  $G/H$  se dice *espacio homogéneo de Riemann* si  $M$  es una variedad de Riemann tal que la métrica  $g$  es invariante para la acción de  $G$  sobre  $G/H$  dada por  $T_r(sH) = rsH, \forall r, s \in G$ ; es decir, para cada  $r \in G$  el difeomorfismo  $T_r$  es una isometría, o equivalentemente,  $g(x_o, y_o) = g(T_r(x_o), T_r(y_o))$  para cualesquiera  $x, y \in T_o(G/H)$ . Una métrica con esta propiedad se denomina *métrica  $G$ -invariante*.

Cuando  $G/H$ , equipado con una métrica invariante por  $H$ , admite una descomposición  $Ad(H)$ -invariante  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  verificando la igualdad

$$g([x, y]_{\mathfrak{m}}, z) + g(y, [x, z]_{\mathfrak{m}}) = 0,$$

se dice que es un *espacio homogéneo de Riemann naturalmente reductivo*. Por otra parte, si la métrica en  $G/H$  está inducida por la existencia de un producto interior definido positivo  $g$  en  $\mathfrak{g}$  verificando

$$g([x, y], z) = g(x, [y, z]),$$

$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ , tal que si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  es el complemento ortogonal de  $\mathfrak{h}$ , entonces la descomposición  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  es reductiva, se dice que  $G/H$  es un *espacio homogéneo de Riemann normal*. Además, si dicha métrica resulta ser invariante por la acción de  $G$  se denomina *normal*.

Un espacio homogéneo naturalmente reductivo que además verifica la propiedad  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$  se conoce como *espacio homogéneo simétrico* o, simplemente, *espacio simétrico*. Los espacios simétricos también se caracterizan por ser aquellos en los que las geodésicas generadas por un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  son las mismas que las generadas por el campo  $-X$ . Finalmente, un espacio simétrico tal que la dimensión de la mayor subálgebra abeliana es

uno, es decir, si  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$  es una subálgebra tal que  $[x, y] = 0, \forall x, y \in \mathfrak{p}$ , entonces  $\dim \mathfrak{p} = 1$  y se dice que es un *espacio simétrico de rango 1*.

La clasificación de los espacios homogéneos pseudo-Riemannianos en dimensiones bajas ha sido un problema muy estudiado. En el caso Riemanniano, Sekigawa demostró en [77] que toda variedad Riemanniana homogénea  $(M, g)$  de dimensión tres conexa, simplemente conexa y completa es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie equipado con una métrica invariante a la izquierda. El resultado análogo en el caso Lorentziano fue demostrado posteriormente en [19]. Así, considerando estos dos resultados, se tiene que una variedad pseudo-Riemanniana homogénea  $(M, g)$  de dimensión tres conexa, simplemente conexa y completa es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie de dimensión tres dotado de una métrica invariante a la izquierda.

Cuando la variedad  $(M, g)$  tiene dimensión cuatro la situación es similar. En particular, Bérard-Bergery demostró que en el caso Riemanniano una variedad homogénea conexa, simplemente conexa y completa de dimensión cuatro es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie dotado de una métrica Riemanniana invariante a la izquierda (véase [6]). No obstante, el caso 4-dimensional Lorentziano es diferente, de hecho existen variedades Lorentzianas homogéneas de dimensión cuatro no reductivas (y por tanto no localmente isométricas a un grupo de Lie) y no localmente simétricas (véase [21] para más información sobre la clasificación de los espacios homogéneos Lorentzianos en dimensión cuatro).

### 1.3. Flujos geométricos

El objetivo de las diferentes ecuaciones de evolución geométrica es mejorar una métrica dada a partir del flujo asociado a ciertos objetos geométricos. En esta dirección el flujo de Ricci (definido por  $\frac{d}{dt}g(t) = -2\rho(t)$ , donde  $\rho(t)$  denota el tensor de Ricci asociado a la métrica  $g(t)$ ) es uno de los ejemplos más importantes y más extensamente estudiados en la literatura ya que, bajo las condiciones adecuadas, evoluciona una métrica inicial a una nueva con la propiedad de ser Einstein.

No obstante, bajo las condiciones adecuadas, existen ciertas métricas que, en lugar de evolucionar por la acción del flujo, permanecen invariantes. Este es el caso de los solitones asociados a soluciones autosimilares del flujo. Dichas soluciones desenvuelven un papel cada vez más importante en el estudio de los diferentes flujos geométricos. En este contexto, por ejemplo, los solitones de Ricci (definidos por  $\mathcal{L}_X g + \rho = \lambda g$ ), siendo soluciones autosimilares del flujo de Ricci, tienen un papel distinguido. Aunque la mayoría de los trabajos hasta el momento han sido realizados para el caso Riemanniano, los solitones de Ricci se han considerado recientemente en el caso Lorentziano en [3], [13] y [71].

De forma más general, existen otros flujos diferentes al de Ricci de gran interés en el estudio de diferentes propiedades geométricas. En particular, centraremos nuestra atención a lo largo de esta memoria en el estudio del flujo de Yamabe y del flujo de Cotton.

Es importante destacar, además, que aunque un flujo dado esté bien planteado en el caso Riemanniano, no ocurre lo mismo necesariamente en el caso Lorentziano, donde incluso la existencia en intervalos pequeños de tiempo no está garantizada en general.

### 1.3.1. Flujo de Yamabe

El flujo de Yamabe fue introducido por R. Hamilton al mismo tiempo que el flujo de Ricci. Dicho flujo deforma la variedad dada evolucionando su métrica mediante la ecuación

$$(1.25) \quad \frac{d}{dt} g(t) = -\tau(t)g(t),$$

donde  $\tau(t)$  representa la curvatura escalar de la métrica  $g(t)$ , a una nueva métrica con curvatura escalar constante dentro de la misma clase conforme. En el caso de dimensión  $n = 2$  el flujo de Yamabe es equivalente al flujo de Ricci. No obstante, en dimensión  $n > 2$  los flujos de Yamabe y de Ricci no coinciden siempre, puesto que el primero de ellos conserva la clase conforme de la métrica mientras que el flujo de Ricci no lo hace en general.

Los puntos fijos genuinos del flujo de Yamabe son las métricas con curvatura escalar nula. No obstante, generalizando este tipo de puntos fijos, están los puntos fijos geométricos asociados a soluciones autosimilares del flujo. Una familia 1-paramétrica de métricas  $g(t)$  definida a partir de una métrica inicial mediante homotecias y difeomorfismos, es decir, tal que

$$(1.26) \quad g(t) = \sigma(t)\psi(t)^*g(0),$$

donde  $\sigma(t)$  es una función positiva derivable y  $\psi(t) : M \rightarrow M$  es un familia 1-paramétrica de difeomorfismos, verificando la Ecuación (1.25) se llama *solución autosimilar*.

Si tomamos  $g(t)$  una solución autosimilar del flujo de Yamabe y la derivamos con respecto a  $t$  obtenemos la igualdad

$$(1.27) \quad -\tau(t)g(t) = \sigma'(t)\psi(t)^*g_0 + \sigma(t)\psi(t)^*(\mathcal{L}_X g_0),$$

donde  $g_0 = g(0)$ ,  $X$  es el campo de vectores dependiente del tiempo tal que  $X(\psi(t)(p)) = \frac{d}{dt}(\psi(t)(p))$  para cualquier  $p \in M$ , y  $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$ .

Puesto que  $\tau(t)g(t) = \psi(t)^*\tau(0)g(0)$ , podemos suprimir los pullbacks en la Ecuación (1.27) con lo que obtenemos

$$(1.28) \quad -\tau(0)g_0 = \sigma'(t)g_0 + \mathcal{L}_{\tilde{X}(t)}g_0,$$

donde  $\tilde{X}(t) = \sigma(t)X(t)$ . Evaluando en  $t = 0$  y tomando  $\lambda = -\sigma'(0)$  e  $Y_0 = -\tilde{X}(0)$  resulta que la ecuación se reduce a

$$\tau(0)g_0 = \lambda g_0 + \mathcal{L}_{Y_0}g_0.$$

Esto demuestra que para cualquier solución autosimilar del flujo de Yamabe existe un campo de vectores en  $M$  verificando

$$(1.29) \quad \mathcal{L}_Y g = (\tau - \lambda)g.$$

Recíprocamente, sea  $X$  un campo de vectores completo definido en una variedad pseudo-Riemanniana y denotemos por  $\psi(t) : M \rightarrow M$  con  $\psi(0) = id_M$  la familia de difeomorfismos generada por  $X$  verificando la relación

$$\frac{d}{dt} \psi(t)(p) = \frac{-1}{1 - \lambda t} X(\psi(t)(p)),$$

el cual está definido para todo  $t < \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda > 0$  y para todo  $t > \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda < 0$ . Considerando ahora la familia 1-paramétrica de métricas

$$g(t) = (1 - \lambda t)\psi(t)^*g,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{g(t)\} &= -\lambda\psi(t)^*g + (1 - \lambda t)\psi(t)^*(\mathcal{L}_{\frac{-1}{(1-\lambda t)}X}g) \\ &= \psi(t)^*(-\lambda g - \mathcal{L}_{X(\psi(t)(p))}g). \end{aligned}$$

Ahora bien, si el campo de vectores  $X$  verifica la Ecuación (1.29), entonces

$$\frac{d}{dt} g(t) = -\psi(t)^*(\tau g) = -\tau(t)g(t),$$

lo que demuestra que  $g(t)$  es una solución del flujo de Yamabe dado por la Ecuación (1.25).

Una variedad pseudo-Riemannina  $(M, g)$  admitiendo un campo de vectores  $X$  tal que

$$(1.30) \quad \mathcal{L}_X g = (\tau - \lambda)g,$$

donde  $\lambda$  es un número real, se denomina *solitón de Yamabe*. Además, dicho campo de vectores  $X$  verificando la Ecuación (1.29) se llama *campo de vectores solitón (para  $(M, g)$ )*. Un solitón de Yamabe se dice *contractivo*, *estable* o *expansivo* si admite un campo de vectores solitón para el cual  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  o  $\lambda < 0$ , respectivamente. Por otra parte, estas condiciones no son mutuamente excluyentes, es decir, la variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  podría admitir solitones de diferentes naturalezas: contractivos, estables o expansivos. Además, diremos que un solitón de Yamabe es un *solitón de Yamabe gradiente* si el campo de vectores solitón de Yamabe  $X$  es el gradiente de una función potencial  $\varphi$  adecuada,  $X = \nabla\varphi$ . En tal caso la Ecuación 1.30 se reduce a  $2Hes_\varphi = (\tau - \lambda)g$ . Cuando  $(M, g)$  es además homogénea, puesto que en dichas variedades siempre existen campos de vectores Killing, diremos que un solitón de Yamabe es *no trivial* si admite un campo de vectores solitón que no es Killing. En particular, si la curvatura escalar no es constante entonces el solitón de Yamabe es necesariamente no trivial. Por otra parte, se tiene que los campos de vectores homotéticos están estrechamente relacionados con las soluciones autosimilares del flujo de Yamabe, especialmente cuando la curvatura escalar es constante, ya que en tal caso, los campos de vectores homotéticos y los solitones de Yamabe coinciden.

Cabe destacar que la existencia de solitones de Yamabe homogéneos es una condición mucho más restrictiva que la existencia de solitones de Ricci homogéneos (comparar Teoremas 2.11 y 2.10 con los resultados obtenidos en [13]). No obstante, dichos solitones están

relacionados por el hecho de que dos campos de vectores solitones de Ricci se diferencian en un campo de vectores homotético (véase [3]) y por tanto una variedad homogénea admite diferentes campos vectoriales solitones de Ricci si y sólo si admite un campo de vectores solitón de Yamabe (véase la Observación 2.12).

### 1.3.2. Flujo de Cotton

Como vimos en la Sección 1.1 las variedades pseudo-Riemannianas de dimensión tres localmente conformemente llanas están caracterizadas por el hecho de tener tensor de Cotton, dado por la Ecuación (1.14), idénticamente nulo. Remitimos a [7], a [81] y a las referencias dadas en dichos artículos para conocer más información acerca de la utilidad de este tensor a la hora de describir la geometría de las variedades de dimensión tres.

Puesto que el tensor de Cotton es antisimétrico en las dos primeras componentes podemos definir a partir de él las tres 2-formas

$$C_i := \frac{1}{2} C_{nmi} dx^n \wedge dx^m,$$

donde  $(x^1, x^2, x^3)$  es un sistema de coordenadas locales de  $M$ . Si además suponemos que  $M$  tiene la orientación dada por la forma de volumen  $v_g = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , a partir de estas 2-formas y del operador estrella de Hodge podemos definir tres nuevas 1-formas como

$$\star C_i = \star \left( \frac{1}{2} C_{nmi} dx^n \wedge dx^m \right) = \frac{1}{2} C_{nmi} \star (dx^n \wedge dx^m) = \frac{1}{2} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell} dx^\ell,$$

donde  $\epsilon^{abc}$  representa la paridad de la permutación de los índices  $\{a, b, c\}$  con respecto a  $\{1, 2, 3\}$ . Estas tres 1-formas nos permiten ahora definir el tensor de Cotton de tipo  $(1, 1)$ , dado en componentes por

$$C_i^\ell = \frac{1}{2} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell},$$

y por tanto el tensor de tipo  $(0, 2)$  asociado a él viene dado por

$$C_{ij} = \frac{1}{2} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell} g_{\ell j}.$$

Finalmente, realizamos el siguiente reescalado siguiendo la construcción de York en [94]

$$(1.31) \quad \tilde{C}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell} g_{\ell j},$$

obteniendo de este modo un tensor de tipo  $(0, 2)$  invariante por cambios conformes de métrica y que también llamaremos *tensor de Cotton*. Dicho tensor es el único invariante conforme en dimensión tres. Por lo general diremos simplemente tensor de Cotton sin especificar el tipo salvo que haya riesgos de confusión. Es importante destacar que por los pasos seguidos, esta construcción sólo es cierta para variedades de dimensión tres.

Haciendo uso de este nuevo tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  dado por la Ecuación (1.31), se define en [52] un nuevo flujo geométrico, llamado *flujo de Cotton*, consistente en una familia uniparamétrica de métricas en una variedad de dimensión tres verificando

$$(1.32) \quad \frac{d}{dt} g(t) = \kappa \tilde{C}_{g(t)},$$

donde  $\tilde{C}_{g(t)}$  es el tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  correspondiente a la métrica  $g(t)$  y  $\kappa$  es una constante real no nula.

Comparándolo con el flujo de Yamabe, el flujo de Cotton tiene en cierto sentido un comportamiento opuesto a este ya que no preserva la clase conforme de la métrica excepto en el caso conformemente llano. En particular, los puntos fijos genuinos del flujo de Cotton son las métricas localmente conformemente llanas. Sin embargo, al igual que ocurre para el flujo de Yamabe, existen otros puntos fijos geométricos, los correspondientes a los solitones de Cotton asociados a soluciones autosimilares del flujo.

Por otra parte, al igual que para el flujo de Yamabe, una familia 1-paramétrica de métricas  $g(t)$  definida a partir de una métrica inicial mediante homotecias y difeomorfismos como en la Ecuación (1.26), donde  $\sigma(t)$  es una función positiva derivable y  $\psi(t) : M \rightarrow M$  es una familia 1-paramétrica de difeomorfismos, verificando la Ecuación (1.32) se llama *solución autosimilar*.

Si tomamos  $g(t)$  una solución autosimilar del flujo de Cotton y la derivamos con respecto a  $t$  obtenemos la igualdad

$$(1.33) \quad \kappa \tilde{C}_{g(t)} = \sigma'(t)\psi(t)^*g_0 + \sigma(t)\psi(t)^*(\mathcal{L}_X g_0),$$

donde  $g_0 = g(0)$ ,  $X$  es el campo de vectores dependiente del tiempo tal que  $X(\psi(t)(p)) = \frac{d}{dt}(\psi(t)(p))$  para cualquier  $p \in M$ , y  $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$ .

Puesto que  $\tilde{C}_{g(t)} = \psi(t)^*\tilde{C}_{g(0)}$ , podemos suprimir los pullbacks en la Ecuación (1.33) con lo que obtenemos:

$$(1.34) \quad \kappa \tilde{C}_{g_0} = \sigma'(t)g_0 + \sigma(t)\mathcal{L}_X g_0.$$

Evalutando en  $t = 0$  y tomando  $\lambda = \frac{\sigma'(0)}{\kappa}$  e  $Y_0 = -\frac{\sigma(0)}{\kappa}X$  resulta que esta ecuación se reduce a

$$\tilde{C}_{g_0} = \lambda g_0 - \mathcal{L}_{Y_0} g_0,$$

lo que demuestra que para cualquier solución autosimilar del flujo de Cotton existe un campo de vectores,  $Y$ , en  $M$  verificando

$$(1.35) \quad \mathcal{L}_Y g + \tilde{C} = \lambda g.$$

Recíprocamente, sea  $X$  un campo de vectores completo definido en una variedad pseudo-Riemanniana verificando la Ecuación (1.35) y consideremos la familia 1-paramétrica de métricas

$$g(t) = -\kappa(1 - \lambda t)\psi(t)^*g,$$

donde  $\psi(t)^*$  representa el pullback de la familia de difeomorfismos  $\psi(t) : M \rightarrow M$ , con  $\psi(0) = id_M$ , generada por  $X$  y verificando la relación

$$\frac{d}{dt} \psi(t)(p) = \frac{1}{1 - \lambda t} X(\psi(t)(p)),$$

el cual está definido: (i) para todo  $t < \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda > 0$  y para todo  $t > \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda < 0$  cuando  $\kappa < 0$ ; (ii) para todo  $t > \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda > 0$  y para todo  $t < \frac{1}{\lambda}$  si  $\lambda < 0$  cuando  $\kappa > 0$ . De este modo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{g(t)\} &= \kappa \lambda \psi(t)^* g - \kappa (1 - \lambda t) \psi(t)^* (\mathcal{L}_{\frac{1}{(1-\lambda t)} X} g) \\ &= \kappa \psi(t)^* (\lambda g - \mathcal{L}_{X(\psi(t)(p))} g). \end{aligned}$$

Ahora bien, como el campo de vectores  $X$  verifica la Ecuación (1.35), entonces

$$\frac{d}{dt} g(t) = \kappa \psi(t)^* \tilde{C}_g = \kappa \tilde{C}_{g(t)},$$

lo que demuestra que  $g(t)$  es una solución del flujo de Cotton dado por la Ecuación (1.32).

Una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  es un *solitón de Cotton* si admite un campo de vectores  $X$  tal que

$$(1.36) \quad \mathcal{L}_X g + \tilde{C} = \lambda g,$$

donde  $\lambda$  es un número real. Un solitón de Cotton se dice *contractivo*, *estable* o *expansivo* si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  o  $\lambda < 0$ , respectivamente. Puesto que no existe ambigüedad, llamaremos solitón de Cotton tanto a la variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  como al campo de vectores  $X$ . Finalmente, diremos que el solitón de Cotton es *gradiente* si el campo de vectores  $X$  es el gradiente de una función potencial adecuada  $\varphi$ , i.e.  $X = \nabla \varphi$ . En tal caso la Ecuación 1.36 se reduce a  $2Hes_\varphi + \tilde{C} = \lambda g$ .

Los solitones de Cotton están estrechamente relacionados con los solitones de Ricci y de Yamabe. En particular, si  $(M, g)$  es una variedad homogénea localmente conformemente llana entonces la clase de los solitones de Cotton coincide con la clase de los solitones de Yamabe; en cuyo caso diremos que el solitón de Cotton es *trivial*.

En el caso particular de signatura Riemanniana, cualquier solitón de Cotton compacto es localmente conformemente llano. No obstante, esto no ocurre en el caso Lorentziano, el cual es mucho más rico debido a la existencia de solitones de Cotton compactos no localmente conformemente llanos (véase [26]). Además, el hecho de que cualquier solitón de Ricci o de Yamabe homogéneo invariante a la izquierda en un grupo de Lie Riemanniano de dimensión tres es llano, mientras que en signatura Lorentziana existen ejemplos no llanos (véanse [13] y [28]), motiva el estudio de los solitones de Cotton homogéneos en el caso Lorentziano.

Finalmente, observemos que cualesquiera dos campos de vectores  $X_1$  y  $X_2$  verificando la Ecuación (1.36), para dos constantes distintas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente, difieren en un campo de vectores homotético ya que

$$\mathcal{L}_{X_1 - X_2} g - (\lambda_1 - \lambda_2)g = \mathcal{L}_{X_1} g - \lambda_1 g - \mathcal{L}_{X_2} g + \lambda_2 g = 0.$$

Recíprocamente, si a un campo de vectores homotético le sumamos un solitón de Cotton cualquiera obtenemos un nuevo solitón de Cotton. Como consecuencia, si una variedad de Riemann admite dos solitones de Cotton distintos (i.e., para constantes  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) entonces es llana y por tanto trivial. Por otra parte, en el caso Lorentziano homogéneo, de los resultados obtenidos en el Capítulo 2 se obtiene que la existencia de dos solitones de Cotton distintos hace que la variedad sea localmente conformemente llana, y por tanto trivial.

## 1.4. Holonomía y métricas de Walker

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable y  $v \in T_{\gamma(a)}M$ , entonces el *transporte paralelo* de  $v$  a lo largo de  $\gamma$  se obtiene resolviendo la ecuación

$$\nabla_{\gamma'(t)}v(t) = 0.$$

Supongamos que  $\gamma$  es una curva cerrada, es decir,  $\gamma(a) = \gamma(b) = p \in M$ . La aplicación  $v(a) \rightarrow v(b)$  dada por el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  define un isomorfismo  $L_\gamma : T_pM \rightarrow T_pM$ . El conjunto de todas estas aplicaciones lineales genera el llamado *grupo de holonomía* de la conexión. Los grupos de holonomía correspondientes a puntos diferentes en una variedad conexa son todos isomorfos y, por tanto, podemos suponerlos independientes del punto  $p$  considerado. Además, por tratarse de un subgrupo cerrado de  $GL(T_pM)$  podemos dotarlo de una estructura de grupo de Lie. Cuando trabajamos con la conexión de Levi-Civita asociada a una métrica pseudo-Riemanniana, y puesto que el transporte paralelo se realiza por isometrías, el grupo de holonomía es un subgrupo del grupo ortogonal; en tal caso diremos que es el grupo de holonomía de la variedad pseudo-Riemanniana.

En el caso de métricas Riemannianas el grupo de holonomía actúa de forma *completamente reducible*, i.e., el espacio tangente se descompone en subespacios invariantes bajo su acción en los cuales actúa de forma trivial o irreducible, pero para métricas indefinidas la situación es más sutil. Se dice que el grupo de holonomía actúa de forma *indescomponible* si la métrica es degenerada en cualquier subespacio propio invariante. En tal caso también se dice que la variedad es indescomponible. En el caso especial de variedades de Riemann la indescomponibilidad es equivalente a la irreducibilidad.

Cabe destacar que el grupo de holonomía del producto de variedades Riemannianas (dotado con la métrica producto) es el producto de los grupos de holonomía de dichas variedades (con la representación correspondiente sobre la suma directa). Además, el recíproco es válido en el siguiente sentido: sea  $M$  una variedad pseudo-Riemanniana conexa cuyo espacio tangente en un punto (y por tanto en todo punto) admite una descomposición ortogonal en suma directa de subespacios no degenerados invariantes bajo la representación de holonomía, entonces  $M$  es localmente isométrica a un producto de variedades pseudo-Riemannianas correspondientes a los subespacios invariantes. Además, el grupo de holonomía es el producto de los grupos actuando sobre los correspondientes subespacios invariantes. Una versión global de este resultado suponiendo la variedad en cuestión conexa y simplemente conexa fue demostrada por G. de Rham en [76] y por H. Wu en [91] en signatura arbitraria.

**Teorema 1.6.** [91] *Cualquier variedad pseudo-Riemanniana  $M$  completa y simplemente conexa es isométrica a un producto de variedades pseudo-Riemannianas completas simplemente conexas donde una de ellas puede ser llana y las restantes tienen un grupo de holonomía que actúa de forma indescomponible. Además, el grupo de holonomía de  $(M, g)$  es el producto de dichos grupos de holonomía.*

En el caso de métricas indefinidas existe la posibilidad de que alguno de los factores del teorema anterior sea indescomponible, pero no irreducible. Esto significa que la representación de holonomía admite un subespacio invariante propio para el cual la métrica es degenerada, pero no subespacios invariantes propios no degenerados. Un intento de clasificar los grupos de holonomía generados por métricas indefinidas ha de proporcionar una clasificación de estos grupos de holonomía indescomponibles, no irreducibles. Si el grupo de holonomía actúa indescomponiblemente, pero no irreduciblemente, sobre un subespacio degenerado invariante  $V \subset T_p M$ , entonces admite un subespacio invariante totalmente isotrópico  $S := V \cap V^\perp$ .

### 1.4.1. Coordenadas de Walker

En [89] A. G. Walker estudió las variedades pseudo-Riemannianas  $(M, g)$  dotadas de una distribución generada por  $r$ -planos nulos y paralelos obteniendo una forma canónica para su métrica en coordenadas adaptadas. Una distribución  $\mathfrak{D}$  de dimensión  $r$  en una variedad (i.e., una sección del fibrado de Grassmann  $Gr_r(TM)$ ) se dice *paralela* si  $\nabla_X \mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$  para cualquier campo de vectores  $X$  en  $M$ , i.e., si  $\nabla_X Y \in \mathfrak{D}$  para todo  $Y \in \mathfrak{D}$  y cualquier  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Motivado por el trabajo original de Walker se dice que una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  admitiendo una distribución nula y paralela  $\mathfrak{D}$  es una *variedad de Walker*. Las variedades de Walker constituyen la estructura subyacente de multitud de situaciones pseudo-Riemannianas estrictas que no tienen contrapartida Riemanniana: variedades indescomponibles pero no irreducibles, hipersuperficies Einstein con operador de configuración nilpotente, algunas clases de métricas Osserman no simétricas y variedades para-Kähler son ejemplos típicos. Para obtener más información y ejemplos de variedades Walker véase [14].

Existen coordenadas canónicas en las cuales se puede escribir las métricas que admiten distribuciones paralelas de un modo sencillo. Dichas formas canónicas de escribir la métrica fueron conocidas previamente para distribuciones paralelas no degeneradas. En este caso, el tensor métrico, expresado en su forma matricial, admite localmente la forma canónica

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

donde  $A$  es una matriz  $r \times r$  simétrica cuyos coeficientes son funciones de  $(x^1, \dots, x^r)$  y  $B$  es una matriz  $(n-r) \times (n-r)$  simétrica cuyos coeficientes son funciones de  $(x^{r+1}, \dots, x^n)$ . En el caso de distribuciones nulas paralelas tenemos.

**Teorema 1.7.** [89] *En una variedad pseudo-Riemanniana  $M$  de dimensión  $n$  admitiendo una distribución paralela de planos nulos  $r$ -dimensionales  $\mathfrak{D}$  existen coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n)$  de modo que el tensor métrico se expresa en forma matricial como*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_r \\ 0 & A & H \\ id_r & H^t & B \end{pmatrix},$$

donde  $id_r$  es la matriz identidad de orden  $r \times r$  y  $A, B, H$  son matrices cuyos coeficientes son funciones de las coordenadas verificando que:

- (a)  $A$  y  $B$  son matrices simétricas de orden  $(n - 2r) \times (n - 2r)$  y  $r \times r$  respectivamente.  $H$  es una matriz de orden  $(n - 2r) \times r$  y  $H^t$  representa la matriz traspuesta de  $H$ .
- (b)  $A$  y  $H$  son independientes de las coordenadas  $(x^1, \dots, x^r)$ .

Además, la distribución nula y paralela  $\mathfrak{D}$  está generada localmente por los campos de vectores coordenados  $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^r}\}$ .

Siguiendo la terminología dada en [89], una distribución  $\mathfrak{D}$  se dice *estrictamente paralela* si está localmente generada por vectores ortogonales nulos y paralelos.

**Teorema 1.8.** [89] *En una variedad pseudo-Riemanniana  $M$  de dimensión  $n$  admitiendo una distribución de dimensión  $r$  estrictamente paralela  $\mathfrak{D}$  existen coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n)$  de manera que el tensor métrico viene dado por el Teorema 1.7, donde  $B$  es independiente de las coordenadas  $(x^1, \dots, x^r)$ .*

**Observación 1.9.** Es interesante destacar que las coordenadas locales en el Teorema 1.7 y 1.8 no son únicas.

El caso particular de variedades Lorentzianas fue previamente estudiado por Brinkmann, quien obtuvo el siguiente resultado.

**Teorema 1.10.** [12] *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana de dimensión  $n$  con un campo de vectores nulo y recurrente. Entonces existen coordenadas locales  $(t, x^1, \dots, x^{n-2}, y)$  respecto a las cuales la métrica  $g$  tiene la forma*

$$(1.37) \quad g = 2dt \circ dy + \sum_{i=1}^{n-2} a_i dx^i \circ dy + \sum_{i,j=1}^{n-2} g_{ij} dx^i \circ dx^j + f dy \circ dy,$$

donde “ $\circ$ ” denota el producto simétrico dado por  $\xi^1 \circ \xi^2 = \frac{1}{2}(\xi^1 \otimes \xi^2 + \xi^2 \otimes \xi^1)$  y donde  $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} a_i = 0$ . Además  $\frac{\partial}{\partial t} f = 0$  si y sólo si el campo de vectores recurrente puede ser reescalado a un campo de vectores paralelo, en cuyo caso las coordenadas pueden escogerse tal que  $a_i = 0$  e incluso tal que  $f = 0$ .

### 1.4.2. Variedades frente de onda

Las variedades Lorentzianas admitiendo un campo de vectores nulo y paralelo  $V$  son de especial interés tanto en Física como en Matemáticas. Siempre que el tensor de Ricci esté completamente determinado por un campo de vectores nulo y paralelo  $V$ , (i.e.,  $\rho = \omega V^b \otimes V^b$  para una función  $\omega$  y donde  $V^b(\cdot) = g(V, \cdot)$ ) y la métrica sea transversalmente llana, tenemos una *variedad frente de onda* (véase[14]).

La forma general de una variedad frente de onda de dimensión  $n$  es la siguiente: el espacio ambiente es  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 0$ ) con coordenadas  $(t, x^1, \dots, x^{n-2}, y)$ , y la métrica Lorentziana  $g$  está dada por

$$(1.38) \quad g_{ppw} = 2dt \circ dy + \sum_{i=1}^{n-2} dx^i \circ dx^i + H(x^1, \dots, x^{n-2}, y)dy \circ dy,$$

donde  $H(x^1, \dots, x^{n-2}, y)$  es una función diferenciable arbitraria llamada usualmente la *función potencial* de la variedad frente de onda.

Las posibles componentes no nulas de la conexión de Levi-Civita de una variedad frente de onda en la base de los campos de vectores coordenados  $\{\partial_t, \partial_{x^i}, \partial_y\}$  son

$$(1.39) \quad \nabla_{\partial_y} \partial_{x^i} = \frac{1}{2} \partial_{x^i} H \partial_t, \quad i = 1, \dots, n-2; \quad \nabla_{\partial_y} \partial_y = \frac{1}{2} \partial_y H \partial_t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \partial_{x^i} H \partial_{x^i}.$$

Esto demuestra que el campo de vectores nulo  $\partial_t$  es paralelo. Tomando la notación  $\partial_{x^i x^j}^2 := \partial_{x^i} \partial_{x^j}$  de ahora en adelante, podemos expresar las posibles componentes no nulas del tensor curvatura (salvo las simetrías usuales) por

$$(1.40) \quad R(\partial_{x^i}, \partial_y, \partial_{x^j}, \partial_y) = -\frac{1}{2} \partial_{x^i x^j}^2 H, \quad i, j = 1, \dots, n-2.$$

Con lo que obtenemos que la única posible componente no nula del tensor de Ricci es

$$(1.41) \quad \rho(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \partial_{x^i x^i}^2 H,$$

y por tanto, el operador de Ricci está descrito en coordenadas locales como

$$(1.42) \quad \hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \partial_{x^i x^i}^2 H \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, puesto que el tensor de Ricci está determinado por la Ecuación (1.41) resulta que la curvatura escalar  $\tau$  es cero. Así, una variedad frente de onda es Einstein (y por tanto

Ricci llana) si y sólo si el Laplaciano espacial de la función potencial  $H$  es idénticamente nulo, i.e.,  $\rho(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2} \Delta_x H = 0$ , donde  $\Delta_x H = \sum_{i=1}^{n-2} \partial_{x^i x^i}^2 H$  representa el Laplaciano de  $H$  con respecto a  $x = (x^1, \dots, x^{n-2})$ .

La existencia de un plano  $\mathfrak{D}$  nulo y paralelo en una variedad pseudo-Riemanniana hace que la curvatura verifique las siguientes relaciones (véase [35]):

$$(1.43) \quad R(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp, \cdot, \cdot) = 0, \quad R(\mathcal{D}, \mathcal{D}, \cdot, \cdot) = 0 \quad \text{y} \quad R(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}, \cdot) = 0.$$

Las variedades frente de onda admiten la siguiente caracterización geométrica.

**Teorema 1.11.** [59] *Una variedad Lorentziana  $(M, g)$  admitiendo una distribución  $\mathfrak{D}$  nula y paralela es localmente isométrica a una variedad frente de onda si y sólo si el tensor curvatura verifica la condición  $R(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^\perp, \cdot, \cdot) = 0$  y la imagen del operador de Ricci es totalmente isotrópica (i.e.,  $g(\widehat{\rho}(X), \widehat{\rho}(X)) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ).*

## Ondas planas

Una clase especial de variedades frente de onda está formada por las llamadas ondas planas. A pesar de su simplicidad, las ondas planas son la estructura subyacente de multitud de situaciones geométricas interesantes.

Una variedad frente de onda cuya función potencial  $H(\cdot, y)$  define una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^{n-2}$  se llama *onda plana*. Es decir, para cualquier onda plana, tenemos que

$$(1.44) \quad H(x^1, \dots, x^{n-2}, y) = \sum_{i,j=1}^{n-2} a_{ij}(y) x^i x^j,$$

donde las componentes  $a_{ij}$  de la matriz simétrica  $(n-2) \times (n-2)$  asociada a dicha forma cuadrática son funciones arbitrarias.

En [31] se demuestra que si  $(\mathbb{R}^n, g_{ppw})$ , donde  $g_{ppw}$  es una métrica dada por las Ecuaciones (1.38) y (1.44), es una onda plana, entonces es necesariamente completa.

**Observación 1.12.** Las variedades frente de onda localmente conformemente llanas están dadas por la Ecuación (1.38) con

$$(1.45) \quad H(x^1, \dots, x^{n-2}, y) = a(y) \sum_{i,j=1}^{n-2} x^i x^j + \sum_{i=1}^{n-2} b_i(y) x^i + c(y).$$

Además, bajo un cambio de coordenadas adecuado, la función  $H(x^1, \dots, x^{n-2}, y)$  se reduce a la Ecuación (1.44), y por tanto son ondas planas.

### Espacios simétricos de Cahen-Wallach

Recordemos que la noción de irreducibilidad es muy fuerte en el caso de variedades pseudo-Riemannianas. En realidad, los espacios Lorentzianos simétricos irreducibles son necesariamente de curvatura seccional constante (véase [16]). Por otra parte, los espacios Lorentzianos simétricos indescomponibles son irreducibles o los llamados *espacios simétricos de Cahen-Wallach*, que están dados de la siguiente manera (véanse [16] y [17]). Consideremos  $M = \mathbb{R}^n$  con coordenadas como las anteriores y definamos el tensor métrico por

$$(1.46) \quad g_{cw} = 2dt \circ dy + \sum_{i=1}^{n-2} dx^i \circ dx^i + \left( \sum_{i=1}^{n-2} a_i (x^i)^2 \right) dy \circ dy,$$

para algunas constantes no nulas  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ .

La conexión de Levi-Civita está determinada por los símbolos de Christoffel no nulos de la siguiente manera:

$$\nabla_{\partial_y} \partial_{x^i} = \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_y = a_i x^i \partial_t, \quad \nabla_{\partial_y} \partial_y = - \sum_{i=1}^{n-2} a_i x^i \partial_{x^i},$$

lo que demuestra que las constantes  $a_j$  deben ser no nulas si la variedad es indescomponible pero no irreducible. De este modo, las únicas componentes no nulas del tensor de curvatura de tipo  $(0, 4)$  están dadas por

$$R(\partial_{x^i}, \partial_y, \partial_{x^i}, \partial_y) = -a_i, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Finalmente, el tensor de Ricci verifica  $\rho(\partial_y, \partial_y) = - \sum_{i=1}^{n-2} a_i$ , siendo los demás términos nulos.

### Variedades Lorentzianas dos-simétricas

Una variedad Lorentziana  $(M, g)$  se dice *dos-simétrica* si la derivada covariante segunda del tensor curvatura se anula, i.e.,  $\nabla^2 R = 0$ . Mientras que en el caso Riemanniano esta condición implica la simetría local, en el caso Lorentziano es posible encontrar ejemplos dos-simétricos no simétricos. La estructura local de estas variedades fue dada de forma independiente por Alekseevsky y Galaev en [2] y Blanco, Sánchez y Senovilla en [9] demostrando que cualquier variedad Lorentziana dos-simétrica no simétrica es una onda plana.

**Teorema 1.13.** [2],[9] *Una variedad Lorentziana dos-simétrica no simétrica  $(M, g)$  es localmente isométrica a  $\mathbb{R}^n$  con métrica*

$$g = 2dt \circ dy + \sum_{i=1}^{n-2} dx^i \circ dx^i + \left( \sum_{i,j=1}^{n-2} a_{ij}(y) x^i x^j \right) dy \circ dy,$$

donde  $a_{ij}(y) = \alpha_{ij} y + \beta_{ij}$  para algunas constantes  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ , donde al menos uno de los  $\alpha_{ij}$  es no nulo.

En este caso el tensor de Ricci verifica  $\rho(\partial_y, \partial_y) = -\sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_{ii} y + \beta_{ii})$ , siendo el resto de los términos nulos.

Además, si suponemos que la variedad  $(M, g)$  es geodésicamente completa y simplemente conexa la caracterización anterior es global.

### Variedades Lorentzianas conformemente simétricas

Una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión  $n \geq 4$  se dice *conformemente simétrica* si su tensor de Weyl es paralelo (i.e.  $\nabla W = 0$ ). En el caso Riemanniano cualquier variedad conformemente simétrica es localmente conformemente llana o localmente simétrica, pero en el caso Lorentziano existen ejemplos no triviales, es decir, variedades conformemente simétricas que no son ni localmente conformemente llanas ni localmente simétricas. Derdzinski y Roter demostraron en [34] que cualquier variedad Lorentziana conformemente simétrica y no trivial es una onda plana.

**Teorema 1.14.** [34] *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana no trivial conformemente simétrica de dimensión  $n \geq 4$ . Entonces es localmente isométrica a  $\mathbb{R}^n$  con métrica*

$$g = 2dt \circ dy + \sum_{i=1}^{n-2} dx^i \circ dx^i + \left( \sum_{i,j=1}^{n-2} a_{ij}(y) x^i x^j \right) dy \circ dy,$$

donde  $a_{ij}(y) = a(y)\alpha_{ij} + \beta_{ij}$  para alguna función no constante  $a(y)$ .

En este caso el tensor de Ricci satisface  $\rho(\partial_y, \partial_y) = -\sum_{i=1}^{n-2} (a(y)\alpha_{ii} + \beta_{ii})$ , siendo los términos restantes nulos.

### Variedades Lorentzianas con curvatura recurrente

Una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  se dice *recurrente* (o con *curvatura recurrente*) si  $\nabla R = \sigma \otimes R$  para alguna 1-forma  $\sigma$ . Mientras que las variedades de Riemann con curvatura recurrente son localmente simétricas, en el caso de variedades Lorentzianas existen ejemplos no simétricos.

Las variedades Lorentzianas recurrentes han sido clasificadas por Walker en [90] (véase también el trabajo de Galaev en [39] para una nomenclatura actual), resultando que las no simétricas son variedades frente de onda, es decir, su tensor métrico está dado por la Ecuación (1.38). Además, se corresponden con alguna de las dos familias siguientes.

**Tipo I.** La función que la define satisface  $H(x^1, \dots, x^{n-2}, y) = H(x^1, y)$  donde  $\partial_{x^1 x^1}^2 H$  es no constante. Además la única posible componente no nula del tensor de Ricci es  $\rho(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2} \partial_{x^1 x^1}^2 H(x^1, y)$ .

**Tipo II.** La función que la define está dada por  $H(x^1, \dots, x^{n-2}, y) = a(y) \left( \sum_{i=1}^{n-2} b_i (x^i)^2 \right)$  para constantes  $b_1, \dots, b_{n-2}$  verificando  $|b_1| \geq \dots \geq |b_{n-2}|$ ,  $b_2 \neq 0$ , y una función  $a$  tal

que  $a'(y) \neq 0$ . En este caso la única posible componente no nula del tensor de Ricci es  $\rho(\partial_y, \partial_y) = -a(y) \sum_{i=1}^{n-2} b_i$ .

Finalmente, observemos que cualquier variedad Lorentziana con curvatura recurrente de Tipo II es una onda plana y, además, es localmente conformemente llana. Por otra parte, las variedades Lorentzianas recurrentes de Tipo I no son localmente conformemente llanas si la dimensión es mayor a tres.

## 1.5. Variedades nearly Kähler

Una variedad de Riemann  $(M, g)$  de dimensión  $n = 2m$  equipada con una *estructura casi Hermítica* compatible con la métrica, es decir, un endomorfismo  $J$ , llamado *estructura casi compleja*, del espacio tangente tal que  $J^2 = -id$  y  $g(JX, JY) = g(X, Y)$  para cualesquiera campos de vectores  $X, Y$  en  $M$ , se dice que es una *variedad casi Hermítica*. A partir de la estructura casi compleja  $J$  de cualquier variedad casi Hermítica se define su *2-forma de Kähler*, que denotaremos por  $\omega$ , como  $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ . En función de las diferentes propiedades que puede tener la derivada covariante de la 2-forma de Kähler,  $\nabla\omega$ , A. Gray y L. M. Hervella clasificaron en [46] las variedades casi Hermíticas estableciendo la existencia de dieciséis clases diferentes, siendo una de las más relevantes la formada por las variedades nearly Kähler. Una *variedad nearly Kähler* es una variedad casi Hermítica  $(M, g, J)$  tal que la estructura casi compleja  $J$  verifica la relación

$$(1.47) \quad (\nabla_X J)X = 0,$$

para todo campo de vectores  $X$  en  $M$ . Además, si para todo campo de vectores no nulo  $X$  en  $M$  se tiene que  $(\nabla_X J) \neq 0$  entonces se dice que  $(M, g, J)$  es una *variedad nearly Kähler estricta*. Por tanto, una variedad nearly Kähler estricta puede considerarse como el opuesto de una variedad Kähler.

La geometría de las variedades nearly Kähler ha sido muy estudiada en la literatura. En particular, P. A. Nagy obtiene en [67] una clasificación de dichas variedades, demostrando que toda variedad nearly Kähler completa y simplemente conexa es un producto Riemanniano  $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_t$ , donde  $M_0$  es un variedad Kähler y cada una de las  $M_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ) es una variedad nearly Kähler irreducible de alguno de estos tipos: variedades nearly Kähler estrictas de dimensión seis, espacios twistor sobre variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura escalar positiva o variedades nearly Kähler homogéneas. Por otra parte, en [66] se demuestra que para el caso completo, una variedad nearly Kähler estricta tiene curvatura de Ricci positiva y por tanto es necesariamente compacta y su grupo fundamental es finito. Además, puesto que las variedades nearly Kähler irreducibles, completas, simplemente conexas y no Kählerianas son estrictas, son necesariamente compactas.

La Ecuación (1.47) dota a las variedades nearly Kähler de una gran riqueza de propiedades geométricas, algunas de sus identidades más conocidas se recogen en el siguiente Lema

**Lema 1.15.** [44] *Sea  $(M, g, J)$  una variedad nearly Kähler. Entonces, dados  $X$  e  $Y$  campos de vectores arbitrarios se verifica:*

$$(1) (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0.$$

$$(2) (\nabla_{JX} J)Y = (\nabla_X J)JY = -J((\nabla_X J)Y).$$

$$(3) g(\nabla_X Y, X) = g(\nabla_X JY, JX).$$

(4) *El campo de vectores  $(\nabla_X J)Y$  es ortogonal a  $X, JX, Y$  y  $JY$ .*

$$(5) 2g((\nabla_{W,X}^2 J)Y, Z) = - \sum_{X,Y,Z} g((\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)JZ), \text{ donde } \sum_{X,Y,Z} \text{ denota la suma cíclica sobre los campos de vectores } X, Y, Z \text{ en } M.$$

Cuando se estudian las propiedades geométricas de las diferentes clases de variedades casi Hermíticas, y puesto que el hecho de que la estructura casi compleja  $J$  sea paralela, i.e.  $\nabla J = 0$ , caracteriza a las variedades Kähler; es frecuente considerar otras conexiones diferentes a la de Levi-Civita, las llamadas conexiones Hermíticas. Una *conexión Hermítica*  $\bar{\nabla}$  es una conexión métrica,  $\bar{\nabla}g = 0$ , tal que  $\bar{\nabla}J = 0$ . Cuando se consideran variedades nearly Kähler existe una conexión Hermítica de especial importancia, la conocida como *conexión Hermítica canónica*, definida por

$$(1.48) \quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}J(\nabla_X J)Y.$$

De la Ecuación (1.48) se tiene de forma directa que la torsión de la conexión  $\bar{\nabla}$  está dada por la expresión  $T(X, Y) = -J(\nabla_X J)Y$  y verifica que  $\bar{\nabla}T = 0$ ; es decir, es paralela con respecto a la conexión Hermítica canónica (véase [5]). Además, puesto que  $\frac{1}{2}J(\nabla_X J)Y$  es antisimétrico las curvas geodésicas de la conexión  $\bar{\nabla}$  coinciden con las curvas geodésicas de la conexión de Levi-Civita. A su vez, observemos que  $T = 0$  si y sólo si  $\nabla J = 0$ ; es decir, si y sólo si  $M$  es una variedad Kähleriana. La conexión  $\bar{\nabla}$ , al igual que cualquier conexión, se puede extender de forma natural al fibrado de las formas, en cuyo caso es posible expresarla como

$$(1.49) \quad \bar{\nabla}_X = \nabla_X - (T_X)_*,$$

con  $(T_X)_* = 1/2e_i \wedge T_X e_i \lrcorner \cdot$ , siendo  $T$  su torsión.

El tensor curvatura asociado a la conexión Hermítica canónica, que denotaremos por  $\bar{R}$ , está relacionado con el tensor curvatura Riemanniano por la siguiente igualdad

$$(1.50) \quad R_{WXYZ} - \bar{R}_{WXYZ} = \frac{1}{2}g((\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z) - \frac{1}{4}\{g((\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z) - g((\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y)\}.$$

A lo largo de este trabajo centraremos nuestra atención en las variedades nearly Kähler de dimensión seis. Como vimos, estas variedades son factores irreducibles en la descomposición de cualquier variedad nearly Kähler. Por otra parte Butruille demostró en [15] que toda variedad nearly Kähler homogénea estricta de dimensión seis es isométrica a:  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 = SO(5)/U(2)$ ,  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 = (SU(2) \times SU(2) \times SU(2))/SU(2)$ ,  $F^{1,2} = SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$  y  $\mathbb{S}^6 = G_2/SU(3)$ . No obstante, el problema de existencia de variedades nearly Kähler de dimensión seis no homogéneas es un problema abierto.

Una de las principales propiedades geométricas de las variedades nearly Kähler de dimensión seis estrictas es que son de *tipo constante* (véase [44]), esto es, verifican la relación

$$(1.51) \quad g((\nabla_X J)Y, (\nabla_X J)Y) = \alpha^2 \{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 - g(JX, Y)^2\},$$

para cualesquiera campos de vectores  $X, Y$  en  $M$  y para  $\alpha$  una constante real no nula. Polarizando en la Ecuación 1.51 (véase [62]) se tiene que

$$(1.52) \quad g((\nabla_U J)X, (\nabla_Y J)Z) = \alpha^2 \{g(U, Y)g(X, Z) - g(U, Z)g(X, Y) \\ - g(U, JY)g(X, JZ) + g(U, JZ)g(X, JY)\}.$$

De este modo, y de forma directa a partir de la Ecuación (1.52), se deduce de forma directa que para una variedad nearly Kähler de tipo constante se verifica la igualdad  $(\nabla_X J) \circ (\nabla_X J)Y = -\alpha^2 g(X, X)Y$ , para  $Y \perp X, JX$ . Además, la propiedad de ser de tipo constante también nos permite considerar una  $J$ -base adaptada especial  $\{e_i\}$ , muy útil a la hora de realizar cálculos locales, definida del siguiente modo: sean  $e_1$  y  $e_2$  dos campos de vectores ortogonales cualesquiera y se define  $e_3 := \alpha(\nabla_{e_1} J)e_2$ . Con frecuencia esta  $J$ -base así construida se normaliza de forma que la constante  $\alpha$  tome el valor uno.

Generalmente, en el estudio de las variedades casi Hermíticas resulta de gran utilidad considerar el complexificado del espacio tangente, que denotaremos por  $T^{\mathbb{C}}M$ , y extender a él la estructura casi compleja, la métrica, las conexiones y, en general, todos los operadores que se consideran sobre el espacio tangente real. A su vez, dicho espacio  $T^{\mathbb{C}}M$  se descompone de forma natural en dos subespacios vectoriales  $T^{1,0}M$  y  $T^{0,1}M$  tales que  $T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$  y donde  $T^{1,0}M := \{V \in T^{\mathbb{C}}M : JV = iV\}$  y  $T^{0,1}M = \{V \in T^{\mathbb{C}}M : JV = -iV\} = \overline{T^{1,0}M}$ . Considerando la  $J$ -base  $\{e_i\}$  de  $TM$  definida anteriormente podemos tomar

$$(1.53) \quad \epsilon_j = 1/\sqrt{2}(e_j - iJe_j) \in T^{(1,0)}M \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}_j = 1/\sqrt{2}(e_j + iJe_j) \in T^{(0,1)}M,$$

bases de  $T^{1,0}M$  y  $T^{0,1}M$  respectivamente. De forma análoga, extendiendo los isomorfismos musicales de forma natural al complexificado del espacio tangente se obtiene una descomposición de  $\Lambda^1 M$  tal que  $\Lambda^1 M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M$  y tal que las 1-formas duales a  $\epsilon_i$  y  $\bar{\epsilon}_i$  son respectivamente las 1-formas  $(\epsilon_i)^b = \bar{\epsilon}^i$  y  $(\bar{\epsilon}_i)^b = \epsilon^i$  dadas por

$$(1.54) \quad \epsilon^j = 1/\sqrt{2}(e^j + iJe^j) \in \Lambda^{(1,0)}M \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}^j = 1/\sqrt{2}(e^j - iJe^j) \in \Lambda^{(0,1)}M,$$

siendo  $e^i$  la 1-forma dual de  $e_i$  respecto a la métrica  $g$ . Esta descomposición del fibrado de las 1-formas permite, a su vez, descomponer el fibrado de las  $k$ -formas  $\Lambda^k M$ , con  $k$  arbitrario, como  $\Lambda^k M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} M$  con  $\Lambda^{p,q} = (\bigwedge^p \Lambda^{1,0} M) \wedge (\bigwedge^q \Lambda^{0,1} M)$ . Así, por ejemplo, para el caso de las 2-formas se tiene que

$$\Lambda^2 M = \Lambda^{0,2} M \oplus \Lambda^{1,1} M \oplus \Lambda^{2,0} M.$$

Considerando las bases del complexificado del espacio tangente y del complexificado del fibrado de las 1-formas dadas por las Ecuaciones (1.53) y (1.54) respectivamente, el término involucrando la torsión en la Ecuación (1.49) se reduce a

$$(T_X)_* = \frac{1}{2} \{ \epsilon^i \wedge T_X \epsilon_{i \lrcorner} \cdot + \bar{\epsilon}^i \wedge T_X \bar{\epsilon}_{i \lrcorner} \cdot \},$$

puesto que  $T(X, Y) \in T^{0,1} M$  si  $X, Y \in T^{1,0} M$ ,  $T(X, Y) \in T^{1,0} M$  si  $X, Y \in T^{0,1} M$  y  $T(X, Y) = 0$  si  $X \in T^{1,0} M$  e  $Y \in T^{0,1} M$  o viceversa. De este modo resulta que si  $X \in T^{1,0} M$  entonces el operador  $(T_X)_*$  lleva formas de tipo  $\Lambda^{(p,q)} M$  en formas de tipo  $\Lambda^{(p+1, q-1)} M$ , mientras que si  $X \in T^{0,1} M$  lleva formas de tipo  $\Lambda^{(p,q)} M$  en formas de tipo  $\Lambda^{(p-1, q+1)} M$ . En general, la torsión  $T$  induce una 3-forma, que también denotaremos por  $T$ , definida por  $T(X, Y, Z) = g(T(X, Y), Z)$  y que es de tipo  $(3, 0) + (0, 3)$ .

Bajo estas consideraciones la diferencial exterior  $d$ , que con respecto a una base ortonormal local  $\{e_i\}$  está dada por la expresión  $d := e^i \wedge \nabla_{e_i}$ , se descompone a partir de las bases dadas en (1.53) y en (1.54) en la suma de cuatro operadores

$$(1.55) \quad d = N + \partial + \bar{\partial} + \bar{N},$$

definidos como

$$(1.56) \quad \begin{aligned} N : \Lambda^{p,q} M &\rightarrow \Lambda^{p+2, q-1}, & N &:= \frac{1}{2} \epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge T_{\epsilon_i} \epsilon_{j \lrcorner} \cdot; \\ \partial : \Lambda^{p,q} M &\rightarrow \Lambda^{p+1, q}, & \partial &:= \epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i}; \\ \bar{\partial} : \Lambda^{p,q} M &\rightarrow \Lambda^{p, q+1}, & \bar{\partial} &:= \bar{\epsilon}^i \wedge \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}; \\ \bar{N} : \Lambda^{p,q} M &\rightarrow \Lambda^{p-1, q+2}, & \bar{N} &:= \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i \wedge \bar{\epsilon}^j \wedge T_{\bar{\epsilon}_i} \bar{\epsilon}_{j \lrcorner} \cdot. \end{aligned}$$

Dicha descomposición se conoce como la *descomposición de Hodge* de la diferencial exterior. Ahora bien, aplicando la Ecuación (1.55) en la identidad  $d^2 = 0$  y por un razonamiento en los órdenes de las formas imagen se tienen las siguientes relaciones

$$(1.57) \quad \partial^2 + \{\bar{\partial}, N\} = \bar{\partial}^2 + \{\partial, \bar{N}\} = \{\partial, \bar{\partial}\} + \{N, \bar{N}\} = \{\partial, N\} = \{\bar{N}, \bar{\partial}\} = N^2 = \bar{N}^2 = 0.$$

De forma análoga, se obtiene la *descomposición de Hodge* de la codiferencial exterior, cuya expresión local es  $\delta := -e_{i \lrcorner} \nabla_{e_i}$  respecto a una base ortonormal  $\{e_i\}$ , como la suma también de cuatro operadores

$$(1.58) \quad \delta = N^* + \partial^* + \bar{\partial}^* + \bar{N}^*,$$

definidos como

$$\begin{aligned}
(1.59) \quad N^* &: \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p-2,q+1}, & N^* &:= \frac{1}{2}(T_{\bar{\epsilon}_i} \bar{\epsilon}_j)^{\flat} \wedge \epsilon_j \lrcorner \epsilon_i \lrcorner \cdot; \\
\partial^* &: \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p-1,q}, & \partial^* &:= -\epsilon_i \lrcorner \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}; \\
\bar{\partial}^* &: \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p,q-1}, & \bar{\partial}^* &:= -\bar{\epsilon}_i \lrcorner \bar{\nabla}_{\epsilon_i}; \\
\bar{N}^* &: \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p+1,q-2}, & \bar{N}^* &:= \frac{1}{2}(T_{\epsilon_r} \epsilon_s)^{\flat} \wedge \bar{\epsilon}_r \lrcorner \bar{\epsilon}_s \lrcorner \cdot.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la Ecuación (1.58) a la identidad  $\delta^2 = 0$  se obtiene que

$$\begin{aligned}
(\partial^*)^2 + \{\bar{\partial}^*, N^*\} &= (\bar{\partial}^*)^2 + \{\partial^*, \bar{N}^*\} = \{\partial^*, \bar{\partial}^*\} + \{N^*, \bar{N}^*\} \\
&= \{\partial^*, N^*\} = \{\bar{N}^*, \bar{\partial}^*\} = (N^*)^2 = (\bar{N}^*)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Existen dos operadores algebraicos,  $\Lambda : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p-1,q-1} M$  y  $L : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p+1,q+1} M$ , que juegan un papel destacado a la hora de obtener relaciones entre los operadores dados en las Ecuaciones (1.56) y (1.59) (véase [88]). Dichos operadores consisten en la contracción y en el producto exterior con la 2-forma de Kähler respectivamente, i.e.,  $\Lambda := i \epsilon_j \lrcorner \bar{\epsilon}_j \lrcorner \cdot$  y  $L := i \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}^j \wedge \cdot$ . Además, estos dos operadores están relacionados con la aplicación identidad del espacio  $\Lambda^{p,q} M$  del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(1.60) \quad [\Lambda, L] &= \Lambda L - L \Lambda \\
&= i \epsilon_i \lrcorner \bar{\epsilon}_i \lrcorner \{i \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}^j \wedge \cdot\} - i \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}^j \wedge \{i \epsilon_i \lrcorner \bar{\epsilon}_i \lrcorner \cdot\} \\
&= n \text{id}_{\Lambda^{p,q}} - \epsilon^i \wedge \epsilon_i \lrcorner \cdot - \bar{\epsilon}^j \wedge \bar{\epsilon}_j \lrcorner \cdot \\
&= (n - p - q) \text{id}_{\Lambda^{p,q}}.
\end{aligned}$$

Entre algunas de las relaciones que permiten obtener los operadores  $\Lambda$  y  $L$  se encuentran las conocidas como *identidades tipo Kähler*, que relacionan los operadores  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  de la descomposición de Hodge de  $d$  con los operadores  $\partial^*$  y  $\bar{\partial}^*$  de la descomposición de Hodge de  $\delta$  del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(1.61) \quad [\Lambda, \partial] &= i \bar{\partial}^*, & [\Lambda, \bar{\partial}] &= -i \partial^*, \\
[L, \partial^*] &= i \bar{\partial}, & [L, \bar{\partial}^*] &= -i \partial.
\end{aligned}$$

De forma similar, los operadores  $N$  y  $\bar{N}$  se relacionan con los operadores  $N^*$  y  $\bar{N}^*$  mediante  $\Lambda$  y  $L$  del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(1.62) \quad [\Lambda, N] &= 2i \bar{N}^*, & [\Lambda, \bar{N}] &= -2i N^*, \\
[L, N^*] &= 2i \bar{N}, & [L, \bar{N}^*] &= -2i N.
\end{aligned}$$

Finalmente, del mismo modo que hemos usado las Ecuaciones (1.55) y (1.58) para descomponer las identidades  $d^2 = 0 = \delta^2$ , también las podemos usar para descomponer el

operador Laplaciano,  $\Delta = d\delta + \delta d$ , obteniendo la siguiente expresión

$$(1.63) \quad \begin{aligned} \Delta = & \{N, \partial^*\} + \{N, N^*\} + \{N, \bar{N}^*\} + \{N, \bar{\partial}^*\} \\ & + \{\partial, \partial^*\} + \{\partial, N^*\} + \{\partial, \bar{N}^*\} + \{\partial, \bar{\partial}^*\} \\ & + \{\bar{\partial}, \partial^*\} + \{\bar{\partial}, N^*\} + \{\bar{\partial}, \bar{N}^*\} + \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\} \\ & + \{\bar{N}, \partial^*\} + \{\bar{N}, N^*\} + \{\bar{N}, \bar{N}^*\} + \{\bar{N}, \bar{\partial}^*\}, \end{aligned}$$

donde  $\{A, B\} = AB + BA$  para cualquiera de estos sumandos. Además, existen numerosas relaciones entre estos términos (véase [88]), siendo algunas de las más relevantes

$$(1.64) \quad \begin{aligned} \{\bar{\partial}, N^*\} &= \{\partial^*, \bar{N}\} = \{\bar{\partial}, N^*\} = \{\bar{N}^*, \partial\} = \{N, \bar{N}^*\} = \{\bar{N}, N^*\} = 0, \\ \{\partial^*, \bar{\partial}\} &= -\{\bar{N}, \bar{\partial}^*\} = -\{N^*, \partial\}, \\ \{\bar{\partial}^*, \partial\} &= -\{\bar{N}^*, \bar{\partial}\} = -\{N, \partial^*\}. \end{aligned}$$

También es posible demostrar que los términos  $\{\partial, \partial^*\}$  y  $\{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\}$  están relacionados por un múltiplo de la identidad, pero para ello tenemos que considerar antes el siguiente lema.

**Lema 1.16.** *En una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta se verifica que*

$$(1.65) \quad \{\partial, \bar{\partial}\} = -\{N, \bar{N}\} = -2i\alpha^2(p - q)L.$$

*Demostración.* Puesto que por la Ecuación (1.57) se tiene que  $\{\partial, \bar{\partial}\} = -\{N, \bar{N}\}$  basta comprobar que  $\{N, \bar{N}\} = 2i\alpha^2(p - q)L$ . Entonces

$$\begin{aligned} \{N, \bar{N}\} &= N\bar{N} + \bar{N}N \\ &= \frac{1}{4}\{\epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge T_{\epsilon_i}, \epsilon_j \lrcorner (\bar{\epsilon}^k \wedge \bar{\epsilon}^l \wedge T_{\bar{\epsilon}_k} \bar{\epsilon}_l \lrcorner \cdot) + \bar{\epsilon}_k \wedge \bar{\epsilon}^l \wedge T_{\bar{\epsilon}^k} \bar{\epsilon}_l \lrcorner (\epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge T_{\epsilon_i}, \epsilon_j \lrcorner \cdot)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g(T_{\epsilon_i}, \epsilon_j, T_{\bar{\epsilon}_i} \bar{\epsilon}_r) \epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}^l \wedge \epsilon_r \lrcorner \cdot + g(T_{\bar{\epsilon}_k} \bar{\epsilon}_l, T_{\epsilon_j}, \epsilon_r) \bar{\epsilon}^k \wedge \bar{\epsilon}^l \wedge \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}_r \lrcorner \cdot\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \alpha^2\{(\delta_l^i \delta_r^j - \delta_l^j \delta_r^i) \epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}^l \wedge \epsilon_r \lrcorner \cdot + (\delta_j^k \delta_r^l - \delta_k^r \delta_l^j) \bar{\epsilon}^k \wedge \bar{\epsilon}^l \wedge \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}_r \lrcorner \cdot\} \\ &= 2\alpha^2(-p\epsilon^i \wedge \bar{\epsilon}^i \wedge \cdot + q\epsilon^k \wedge \bar{\epsilon}^k \wedge \cdot) \\ &= 2i\alpha^2(p - q)L, \end{aligned}$$

donde la igualdad (\*) se deduce a partir de la Ecuación (1.52).  $\square$

Por tanto, a partir de este Lema y de la Ecuación (1.60) estamos ya en condiciones de demostrar la relación entre  $\{\partial, \partial^*\}$  y  $\{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\}$

**Lema 1.17.** *En una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta se verifica la identidad*

$$(1.66) \quad \{\partial, \partial^*\} = \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\} + 2\alpha^2(p - q)(n - p - q)id_{\Lambda^{p,q}}.$$

*Demostración.* Aplicando  $\bar{\partial}$  a derecha e izquierda en la identidad  $[\Lambda, \partial] = \Lambda\partial - \partial\Lambda = i\bar{\partial}^*$  se obtiene

$$\begin{cases} \Lambda\partial\bar{\partial} - \partial\Lambda\bar{\partial} &= i\bar{\partial}^*\bar{\partial}, \\ \bar{\partial}\Lambda\partial - \bar{\partial}\partial\Lambda &= i\bar{\partial}\bar{\partial}^*, \end{cases}$$

donde, sumando ambas expresiones resulta

$$(1.67) \quad \Lambda\partial\bar{\partial} - \partial\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\partial\Lambda + \bar{\partial}\Lambda\partial = i(\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*).$$

Análogamente, aplicando  $\partial$  a la identidad  $[\Lambda, \bar{\partial}] = \Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda = -i\partial^*$  tenemos que

$$\begin{cases} \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda &= -i\partial\partial^*, \\ \bar{\partial}\Lambda\partial - \Lambda\bar{\partial}\partial &= i\partial^*\partial, \end{cases}$$

donde restando a la segunda la primera de estas igualdades se obtiene

$$(1.68) \quad -\partial\Lambda\bar{\partial} + \partial\bar{\partial}\Lambda + \bar{\partial}\Lambda\partial - \Lambda\bar{\partial}\partial = i(\partial\partial^* + \partial^*\partial).$$

Ahora bien, aplicando la Ecuación (1.55) tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda\bar{\partial}\partial &= \Lambda\{\bar{\partial}, \partial\} - \Lambda\partial\bar{\partial} \\ &= -\Lambda\{N, \bar{N}\} - \Lambda\partial\bar{\partial} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\Lambda &= \{\partial, \bar{\partial}\}\Lambda - \bar{\partial}\partial\Lambda \\ &= -\{N, \bar{N}\}\Lambda - \bar{\partial}\partial\Lambda. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \partial\partial^* + \partial^*\partial &= -i(-\partial\Lambda\bar{\partial} + \partial\bar{\partial}\Lambda + \bar{\partial}\Lambda\partial - \Lambda\bar{\partial}\partial) \\ &= -i(-\partial\Lambda\bar{\partial} - \{N, \bar{N}\}\Lambda - \bar{\partial}\partial\Lambda + \bar{\partial}\Lambda\partial + \Lambda\{N, \bar{N}\} + \Lambda\partial\bar{\partial}) \\ &= -i(i(\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*) - \{N, \bar{N}\}\Lambda + \Lambda\{N, \bar{N}\}) \\ (1.69) \quad &= \{\bar{\partial}^*, \bar{\partial}\} - i\{-2i\alpha^2((p-1) - (q-1))L\Lambda + 2i\alpha^2(p-q)\Lambda L\} \\ &= \{\bar{\partial}^*, \bar{\partial}\} + 2\alpha^2(p-q)[\Lambda, L] \\ &= \{\bar{\partial}^*, \bar{\partial}\} + 2\alpha^2(p-q)(n-p-q)id_{\Lambda^{p,q}}. \end{aligned}$$

□

## Capítulo 2

# Campos de vectores asociados al flujo de Yamabe

En la primera sección de este capítulo analizamos la estructura local de los solitones de Yamabe gradiente en variedades Lorentzianas. En la sección 2.2 estudiamos la existencia de solitones de Yamabe en las variedades pseudo-Riemannianas homogéneas de dimensión tres (recordemos que en general los solitones de Yamabe proporcionan métricas iniciales para las que el flujo de Yamabe admite una solución autosimilar). Generalmente, la existencia de determinados solitones geométricos está estrechamente relacionada con la existencia de ciertos campos de vectores especiales en la variedad pseudo-Riemanniana considerada. En particular, se tiene que todo solitón de Ricci es un campo de vectores 1-armónico (véase [82]) y que todo solitón de Yamabe con curvatura escalar constante es una colineación de Ricci. Debido a este hecho, dedicamos la Sección 2.3 al estudio de la existencia de campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda en los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres; mientras que en la Sección 2.4 analizamos la existencia de colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en dichos grupos de Lie Lorentzianos.

Los resultados presentados a lo largo de este capítulo se encuentran recogidos en [28], [29] y [30].

### 2.1. Estructura local de los solitones de Yamabe gradiente

Un *solitón de Yamabe* es un triple  $(M, g, X)$ , donde  $(M, g)$  es una variedad pseudo-Riemanniana y  $X$  es un campo de vectores en  $M$  verificando

$$(2.1) \quad \mathcal{L}_X g = (\tau - \lambda)g.$$

Se dice que el solitón es *trivial* si  $X$  es un campo de vectores de Killing y que es un *solitón gradiente* si  $X$  es el gradiente de una cierta *función potencial*  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se sigue de la ecuación anterior que todo solitón de Yamabe es un campo de vectores conforme que resulta ser homotético si y sólo si la curvatura escalar es constante.

El estudio de los solitones de Yamabe está estrechamente relacionado con el estudio de los campos de vectores conformes. De forma general, la estructura local de las variedades pseudo-Riemannianas admitiendo campos de vectores conformes gradiente ha sido estudiada de forma exhaustiva en la literatura por numerosos autores. Presentamos aquí algunos de los resultados más destacados, distinguiendo entre los casos isotrópico y no isotrópico. Además, particularizaremos estos resultados al caso de los solitones de Yamabe gradiente.

### 2.1.1. Caso no isotrópico

Comenzamos considerando el caso de un campo de vectores gradiente  $\nabla\varphi$  que además supondremos que es un campo de vectores conforme con  $g(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \neq 0$  en un entorno abierto  $\mathcal{U}$  de un punto  $p$  en  $(M, g)$ . Distinguimos de esta forma dos situaciones, cuando el punto  $p \in M$  es un punto regular y cuando lo es crítico. En primer lugar, si  $p$  es un punto regular de  $\nabla\varphi$  en  $(M, g)$ , Fialkow obtuvo el siguiente resultado en relación a su estructura local, en el que muestra que este se corresponde con un producto deformado (warped).

**Lema 2.1.** [38] *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una función no constante  $\varphi$  verificando la igualdad  $\text{Hes}_\varphi = \sigma g$ , siendo  $\sigma$  una función no constante en un entorno de un punto  $p$  tal que  $g(\nabla\varphi, \nabla\varphi) \neq 0$ .*
2. *Existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$ , una función de clase  $C^\infty$ ,  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\varphi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  y una variedad Lorentziana  $(N, h)$  tal que  $(\mathcal{U}, g)$  es isométrica al producto warped:*

$$((-\varepsilon, \varepsilon), \eta dt^2) \times_{\varphi'} (N, h),$$

donde  $\eta = \text{sign}(g(\nabla\varphi, \nabla\varphi)) \in \{\pm 1\}$ .

Por otra parte, el siguiente resultado establece la estructura local de una variedad Lorentziana admitiendo un campo de vectores conforme gradiente en un entorno de un punto crítico.

**Lema 2.2.** [51], [56] *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana dotada con una función no constante  $\varphi$  con un punto crítico  $p \in M$  y verificando la igualdad  $\text{Hes}_\varphi = \sigma g$ , donde  $\sigma$  es una función no constante. Entonces existen funciones  $\varphi_\eta$  tales que la métrica en coordenadas geodésicas polares  $(r, x) \subset \mathbb{R} \times \Sigma$  en un entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  se expresa como*

$$g(r, x) = \eta dr^2 + \frac{\varphi'_\eta(r)^2}{\varphi''_\eta(0)^2} g_1(x),$$

con  $\eta = g_1(x, x)$ ,  $\varphi(r, x) = \varphi_\eta(r)$ ,  $\sigma(r, x) = \sigma_\eta(r)$  y  $\sigma_\eta(r) = \eta\varphi''(r)$ , en particular la métrica es conformemente llana en un entorno del punto crítico.

De este modo, en el caso particular de que el campo de vectores conforme gradiente considerado sea un solitón de Yamabe gradiente resulta que:

**Teorema 2.3.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana. Entonces,  $(M, g)$  admite un solitón de Yamabe gradiente no isotrópico si y sólo si  $(M, g)$  es localmente isométrica a un producto warped  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_{\kappa} N$ , donde  $N$  es una variedad Lorentziana de dimensión  $n-1$  con curvatura escalar constante.*

*Demostración.* A partir de los Lemmas 2.1 y 2.2 se sigue que si  $(M, g)$  admite un solitón de Yamabe gradiente no isotrópico, i.e.,  $\text{Hes}_{\varphi} = (\tau - \lambda)g$ , entonces  $(M, g)$  es localmente isométrica a un producto warped de la forma  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_{\kappa} N$  con coordenadas  $(t, x)$ . Además, es bien conocido que la curvatura escalar de  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times_{\kappa} N$  está dada por

$$\kappa^2 \tau = \frac{n-2}{n} \tau_N - \frac{n-2}{n} (\kappa')^2 \eta - \frac{2}{n} \kappa'' \kappa.$$

Ahora bien, por los lemas previos la curvatura escalar,  $\tau$ , ha de depender de forma exclusiva de la coordenada  $t$  y, por tanto,  $\tau_N$  ha de ser constante.  $\square$

## 2.1.2. Caso isotrópico

Nos centramos ahora en los solitones de Yamabe gradiente Lorentzianos tales que  $g(\nabla\varphi, \nabla\varphi) = 0$  en un conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset M$ . En este caso, usamos el siguiente resultado obtenido por Brinkmann.

**Lema 2.4.** [11] *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana de dimensión  $n \geq 3$  admitiendo un campo de vectores gradiente isotrópico no nulo. Resulta entonces que  $\nabla\varphi$  es paralelo, y el tensor métrico puede expresarse como*

$$g = dudv + g_1(u),$$

donde  $\nabla\varphi = \partial_u = \nabla v$  y la métrica  $g_1(u)$  no depende de la coordenada  $v$ .

En particular, la métrica dada en el Lemma 2.4 es una métrica Walker. De este modo, particularizando este resultado al caso de los solitones de Yamabe gradiente se sigue:

**Teorema 2.5.** *Sea  $(M, g)$  un solitón de Yamabe gradiente isotrópico Lorentziano. Entonces,  $(M, g)$  es localmente isométrico a una métrica Walker de curvatura escalar constante  $\tau$ .*

*Demostración.* El resultado se sigue de forma directa del Lemma 2.4 teniendo en cuenta que si  $\text{Hes}_{\varphi} = (\tau - \lambda)g$  y  $\nabla f$  es paralelo entonces  $\tau = \lambda$ .  $\square$

## 2.2. Solitones de Yamabe homogéneos

En esta sección estudiamos la existencia de solitones de Yamabe en las variedades pseudo-Riemannianas homogéneas de dimensión tres. Tashiro demostró en [85] que una variedad Riemanniana completa de dimensión  $n \geq 2$  admite un campo de vectores homotético no Killing si y sólo si es localmente Euclídea, de donde se sigue que todo solitón de

Yamabe no trivial con curvatura escalar constante es localmente Euclídeo. En este capítulo demostraremos que el caso Lorentziano es mucho más rico. Concretamente, clasificaremos los solitones de Yamabe homogéneos y los solitones de Yamabe invariantes a la izquierda definidos en variedades Lorentzianas homogéneas de dimensión tres, demostrando que la clase de los solitones de Yamabe homogéneos es estrictamente mayor que la clase de los solitones de Yamabe homogéneos invariantes a la izquierda.

Para conseguir este objetivo organizamos la sección de la siguiente manera. En la Sección 2.2.1 obtenemos una caracterización geométrica de los solitones de Yamabe no triviales en variedades Lorentzianas homogéneas no llanas de dimensión tres, obteniendo como consecuencia, la no existencia de solitones de Yamabe gradiente no triviales. Además, clasificamos los solitones de Yamabe Lorentzianos homogéneos de dimensión tres no llanos, demostrando que todos ellos están dados por ondas planas homogéneas. Finalmente, en la Sección 2.2.2 estudiamos la clase de los solitones de Yamabe invariantes a la izquierda.

### 2.2.1. Caracterización geométrica de los solitones de Yamabe homogéneos

Con el fin de obtener una caracterización geométrica de los solitones de Yamabe homogéneos no triviales de dimensión tres recordemos que el operador de Ricci,  $\hat{\rho}$ , se dice *dos-pasos nilpotente* si  $\hat{\rho}^2 = 0$  y además puntualmente verifica  $\hat{\rho} \neq 0$ .

En el Teorema 2.8 veremos que una variedad Lorentziana homogénea de dimensión tres no llana es un solitón de Yamabe si y sólo si es localmente conformemente llana y su operador de Ricci es dos-pasos nilpotente. Es obvio que si  $(M, g)$  es llana entonces es un solitón de Yamabe. De forma más general, analizamos en el siguiente lema la existencia de solitones de Yamabe en variedades localmente conformemente llanas de dimensión tres con operador de Ricci dos-pasos nilpotente.

**Lema 2.6.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana localmente conformemente llana de dimensión tres con operador de Ricci dos-pasos nilpotente. Entonces existen coordenadas  $(U, (t, x, y))$  respecto a las cuales la métrica está dada por*

$$(2.2) \quad g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \mathcal{F}(y)x^2dy \circ dy.$$

Además,  $(U, g, X)$  es un solitón de Yamabe si y sólo si

$$(2.3) \quad X = -(x\mathcal{G}'(y) + (\gamma + \lambda)t - \delta)\partial_t - \left(\frac{\lambda}{2}x - \mathcal{G}(y)\right)\partial_x + (\beta + \gamma y)\partial_y,$$

donde  $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables verificando

$$(2.4) \quad \mathcal{F}(y)\mathcal{G}(y) - \mathcal{G}''(y) = 0 \quad y \quad 2\gamma\mathcal{F}(y) + (\beta + \gamma y)\mathcal{F}'(y) = 0.$$

*Demostración.* Se sigue del trabajo realizado en [49] que toda variedad Lorentziana de dimensión tres localmente conformemente llana con operador de Ricci dos-pasos nilpotente

es una variedad de Walker estricta. A su vez, en [14] se obtiene que estas variedades han de tener curvatura recurrente, es decir,  $\nabla R = \omega \otimes R$  para alguna 1-forma  $\omega$ . Por otra parte, Walker clasificó en [90] las variedades con curvatura recurrente, obteniendo que aquellas localmente conformemente llanas pueden expresarse en un sistema local de coordenadas adaptado  $(\mathcal{U}, (t, x, y))$  como

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \mathcal{F}(y)x^2dy \circ dy,$$

donde  $\mathcal{F} : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable. Además, con estas consideraciones se obtiene por un cálculo directo que  $\tau = 0$ .

Sea  $X = (\mathcal{A}(t, x, y), \mathcal{B}(t, x, y), \mathcal{C}(t, x, y))$  un campo de vectores diferenciable en  $\mathcal{U}$ . Por un cálculo largo pero directo tenemos que la Ecuación (2.1) se verifica si y sólo si el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales se satisface

$$(2.5) \quad \begin{cases} \mathcal{F}'(y)\mathcal{C}x^2 + \mathcal{F}(y)(2\mathcal{B} + x(\lambda + 2\mathcal{C}_y))x + 2\mathcal{A}_y = 0, \\ \mathcal{F}(y)\mathcal{C}_t x^2 + \lambda + \mathcal{A}_t + \mathcal{C}_y = 0, \\ \mathcal{F}(y)\mathcal{C}_x x^2 + \mathcal{A}_x + \mathcal{B}_y = 0, \\ \mathcal{C}_t = 0, \\ \mathcal{C}_x + \mathcal{B}_t = 0, \\ 2\mathcal{B}_x + \lambda = 0. \end{cases}$$

La cuarta ecuación en (2.5) implica que

$$\mathcal{C}(t, x, y) = \mathcal{C}_1(x, y),$$

mientras que la última se verifica si y sólo si

$$\mathcal{B}(t, x, y) = -\frac{\lambda}{2}x + \mathcal{B}_1(t, y).$$

Integrando ahora la segunda ecuación obtenemos

$$\mathcal{A}(t, x, y) = \mathcal{A}_1(x, y) - v(\lambda + (\mathcal{C}_1)_y(x, y)),$$

y derivando la quinta respecto a  $t$  obtenemos  $(\mathcal{B}_1)_{tt}(t, y) = 0$ , de donde

$$\mathcal{B}_1(t, y) = \mathcal{G}(y) + t\mathcal{H}(y),$$

para una función diferenciable  $\mathcal{H}$  dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ . En este punto, la quinta ecuación en (2.5) se reduce a

$$\mathcal{H}(y) + (\mathcal{C}_1)_x(x, y) = 0,$$

con lo que obtenemos

$$\mathcal{C}_1(x, y) = \mathcal{C}_2(y) - x\mathcal{H}(y).$$

Derivando la tercera ecuación respecto a  $t$  obtenemos que  $\mathcal{H}(y)$  ha de ser constante, es decir,  $\mathcal{H}(y) = \alpha$ , y derivando ahora la primera ecuación respecto a  $t$  y  $x$  resulta que  $\alpha = 0$ .

De este modo, el campo de vectores  $X(t, x, y) = (\mathcal{A}(t, x, y), \mathcal{B}(t, x, y), \mathcal{C}(t, x, y))$  está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t, x, y) &= \mathcal{A}_1(x, y) - (\lambda + \mathcal{C}'_2(y))t, \\ \mathcal{B}(t, x, y) &= -\frac{\lambda}{2}x + \mathcal{G}(y), \\ \mathcal{C}(t, x, y) &= \mathcal{C}_2(y),\end{aligned}$$

y la información dada por la Ecuación (2.5) se reduce a

$$(2.6) \quad \begin{cases} (2\mathcal{F}(y)\mathcal{C}'_2(y) + \mathcal{C}_2(y)\mathcal{F}'(y))x^2 + 2\mathcal{F}(y)\mathcal{G}(y)x + 2(\mathcal{A}_1)_u(x, y) - 2t\mathcal{C}''_2(y) = 0, \\ \mathcal{G}'(y) + (\mathcal{A}_1)_x(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, la segunda ecuación en (2.6) implica que

$$\mathcal{A}_1(x, y) = \mathcal{A}_2(y) - x\mathcal{G}'(y),$$

donde derivando la primera ecuación respecto a  $t$  proporciona  $\mathcal{C}''_2(y) = 0$ , y así

$$\mathcal{C}_2(y) = \beta + \gamma y.$$

De este modo el sistema de ecuaciones en derivadas parciales dado por (2.5) se reduce a la primera ecuación en (2.6), que puede ser vista como una ecuación cuadrática en  $x$  dada por

$$(2.7) \quad (2\gamma\mathcal{F}(y) + (\beta + \gamma y)\mathcal{F}'(y))x^2 + 2(\mathcal{F}(y)\mathcal{G}(y) - \mathcal{G}''(y))x + 2\mathcal{A}'_2(y) = 0.$$

Por tanto  $\mathcal{A}_2(y)$  ha de ser una función constante, es decir,  $\mathcal{A}_2(y) = \delta$ , con lo que podemos concluir que  $X$  es un campo de vectores solitón de Yamabe en  $(\mathcal{U}, g)$  si y sólo si

$$X = -(x\mathcal{G}'(y) + (\gamma + \lambda)t - \delta)\partial_t - \left(\frac{\lambda}{2}x - \mathcal{G}(y)\right)\partial_x + (\beta + \gamma y)\partial_y,$$

donde  $\mathcal{F}(y)\mathcal{G}(y) - \mathcal{G}''(y) = 0$  y  $2\gamma\mathcal{F}(y) + (\beta + \gamma y)\mathcal{F}'(y) = 0$ ; con lo que se concluye la demostración.  $\square$

Las Ecuaciones (2.3) y (2.4) dadas en el Lema 2.6 implican que los campos de vectores solitón no Killing  $X$  pueden elegirse de tal forma que los solitones de Yamabe no triviales sean contractivos o expansivos puesto que podemos tomar  $\lambda$  tanto positivo como negativo. No obstante, nunca los podemos tomar estables ya que la curvatura escalar es cero. Además, por un cálculo directo tenemos que un campo vectorial solitón no Killing determinado por las Ecuaciones (2.3) y (2.4) puede ser luminoso o no luminoso. Además, esta causalidad del campo de vectores  $X$  puede variar punto a punto.

Por otra parte, la existencia de solitones gradiente es más restrictiva. De hecho, todos ellos han de ser triviales en el caso localmente conformemente con operador de Ricci dos pasos nilpotente.

**Corolario 2.7.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana de dimensión tres. Si  $(M, g)$  es localmente conformemente llana y su operador de Ricci es dos-pasos nilpotente entonces no es un solitón de Yamabe gradiente no trivial.*

*Demostración.* Al igual que en la demostración del Lema 2.6 podemos elegir un sistema de coordenadas adaptado  $(\mathcal{U}, (t, x, y))$  tal que

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \mathcal{F}(y)x^2dy \circ dy,$$

para una cierta función diferenciable  $\mathcal{F} : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . De este modo, para una función  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  se obtiene que

$$\nabla\varphi = (\varphi_y - x^2\mathcal{F}(y)\varphi_t)\partial_t + \varphi_x\partial_x + \varphi_t\partial_y.$$

Si  $\nabla\varphi$  es un campo de vectores solitón gradiente no Killing entonces necesariamente es de la forma determinada por las Ecuaciones (2.3) y (2.4). En particular

$$(2.8) \quad \begin{cases} \varphi_t = \beta + \gamma y, \\ \varphi_x = \mathcal{G}(y) - \frac{\lambda}{2}x, \\ (\varphi_y - x^2\mathcal{F}(y)\varphi_t)_t = -\gamma - \lambda, \\ (\varphi_y - x^2\mathcal{F}(y)\varphi_t)_{xx} = 0. \end{cases}$$

La primera y la segunda ecuación en (2.8) implican que la función  $\varphi$  es de la forma

$$\varphi(t, x, y) = -\frac{\lambda}{4}x^2 + \mathcal{G}(y)x + (\beta + \gamma y)t + \mathcal{P}(y),$$

y por tanto la tercera y la cuarta ecuación en (2.8) se transforman en

$$\gamma = -\gamma - \lambda, \quad (\gamma y + \beta)\mathcal{F}(y) = 0.$$

De este modo, como  $\mathcal{F}(y)$  es idénticamente nula si y sólo si la variedad es llana, obtenemos a partir de la última ecuación que  $\lambda = -2\gamma = 0$ , lo que demuestra que todo solitón de Yamabe gradiente no trivial tendría que ser estable, lo cual como hemos visto no es posible.  $\square$

Analizamos ahora la caracterización geométrica de los solitones de Yamabe homogéneos no triviales.

**Teorema 2.8.** *Una variedad Lorentziana homogénea  $(M, g)$ , conexa, no llana y simplemente conexa de dimensión tres es un solitón de Yamabe no trivial si y sólo si es localmente conformemente llana y su operador de Ricci es dos-pasos nilpotente.*

*Demostración.* Sea  $(M, g, X)$  un solitón de Yamabe no trivial (i.e.  $\mathcal{L}_X g \neq 0$ ) y fijemos un punto  $p \in M$ . Puesto que  $M$  es homogéneo, podemos elegir una base de campos de vectores Killing y tomar  $Y$  una combinación lineal de ellos tal que  $Y(p) = X(p)$ . De este modo,  $\xi := X - Y$  es un campo de vectores homotético (i.e.,  $\mathcal{L}_\xi g = \phi g$ , con  $\phi$  constante)

anulándose en  $p \in M$ . Observemos que  $\xi$  es propio (i.e., la constante  $\phi$  es no nula) y por tanto se sigue de [48] que todos los autovalores del operador de Ricci en  $p$  son cero. A su vez, también se sigue de [48] que el tensor de Cotton es cero o el tensor de Ricci se anula en  $p$ . Así, considerando la homogeneidad de la variedad y que es no llana, se sigue que  $(M, g)$  es localmente conformemente llana con operador de Ricci nilpotente. Además, puesto que  $M$  es homogénea, ha de ser localmente simétrica o un grupo de Lie, con lo que en cualquiera de estos dos casos si el operador de Ricci es nilpotente entonces ha de ser dos pasos nilpotente (véase [14] para el caso localmente simétrico y [25] para el caso homogéneo no simétrico).

Para demostrar el recíproco es suficiente con hacer uso del Lema 2.6 para construir campos vectoriales solitón no Killing. Para ello tomamos simplemente  $\beta = \gamma = 0$  y  $\mathcal{G}(y) = 0$  en las Ecuaciones (2.3) y (2.4). Finalmente, estos campos vectoriales solitón no Killing pueden extenderse de forma global en  $M$  en el caso homogéneo usando el resultado demostrado en [47].  $\square$

**Observación 2.9.** Una variedad Lorentziana se dice *semi-simétrica* si su tensor curvatura en cada punto coincide con el correspondiente a un espacio simétrico (pero siendo posible que varíe de punto a punto). Equivalentemente,  $R(X, Y) \circ R = 0$ , donde  $R(X, Y)$  actúa como derivación sobre  $R$ . En [41] se demuestra que una variedad Lorentziana de dimensión tres es semi-simétrica si y sólo si el operador de Ricci es o bien dos-pasos nilpotente o bien  $\hat{\rho} = \text{diag}[\alpha, \alpha, 0]$ . Por tanto, como consecuencia del Teorema 2.8, todos los solitones de Yamabe Lorentzianos homogéneos no triviales en dimensión tres son semi-simétricos.

Ahora bien, recordemos que una variedad de Lorentz de dimensión tres cuyo tensor métrico está dado por la Ecuación (2.2), es decir

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \mathcal{F}(y)x^2dy \circ dy,$$

es una onda plana. En el caso homogéneo, estas métricas han sido investigadas por Blau y O'Loughlin (véase [10]), obteniendo que una onda plana homogénea de dimensión tres es simétrica, y en tal caso un espacio simétrico de Cahen-Wallach (siempre que  $M$  sea completa y simplemente conexa), o bien la métrica está determinada por la función  $\mathcal{F}(y) = \frac{\kappa}{y^2}$  para alguna constante  $\kappa$  no nula. Además, las métricas de esta segunda familia nunca son geodésicamente completas (véase [10]).

En general, los espacios Lorentzianos localmente simétricos de dimensión tres se corresponden con una de las siguientes clases: (i) espacios de curvatura seccional constante, (ii) productos de un intervalo real y una superficie con curvatura de Gauss constante, e (iii) espacios de Cahen-Wallach. En los casos (i) e (ii) la existencia de un campo de vectores solitón implica que la variedad es llana. Por tanto analizaremos el caso de los espacios Cahen-Wallach. Una métrica Cahen-Wallach se corresponde a la Ecuación (2.2) para  $F(y) = \kappa \neq 0$  donde, en este caso, el sistema de coordenadas  $(t, x, y)$  puede considerarse en toda la variedad. Teniendo en cuenta esto, es posible determinar completamente los campos de vectores solitón dados por las Ecuaciones (2.3) y (2.4) en el Lema 2.6. En

particular,  $\gamma = 0$  y

$$G(y) = \begin{cases} \delta_1 e^{y\sqrt{\kappa}} + \delta_2 e^{-y\sqrt{\kappa}} & \text{si } \kappa > 0, \\ \delta_1 \cos(y\sqrt{-\kappa}) + \delta_2 \operatorname{sen}(y\sqrt{-\kappa}) & \text{si } \kappa < 0, \end{cases}$$

siendo  $\delta_1$  una constante real. Lo que demuestra la existencia de campos de vectores solitón no Killing. Observemos que los campos de vectores solitón no Killing pueden tomarse de tal forma que el solitón de Yamabe no trivial resultante sea contractivo o expansivo. Además, por un cálculo directo se tiene que en un espacio de Cahen-Wallach un campo de vectores solitón no Killing es necesariamente no luminoso.

Como consecuencia tenemos la siguiente clasificación.

**Teorema 2.10.** *Una variedad Lorentziana homogénea no llana de dimensión tres es un solitón de Yamabe no trivial si y sólo si es localmente isométrica a uno de los siguientes espacios:*

- (i) *Un espacio simétrico de Cahen-Wallach, i.e., el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(t, x, y)$  y tensor métrico*

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \kappa x^2 dy \circ dy,$$

donde  $\kappa$  es una constante arbitraria no nula.

- (ii) *Una onda plana homogénea no simétrica, i.e., un conjunto abierto,  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(t, x, y)$  y tensor métrico*

$$g = 2dt \circ dy + dx \circ dx + \frac{\kappa}{y^2} x^2 dy \circ dy,$$

donde  $\kappa$  es una constante arbitraria no nula.

## 2.2.2. Solitones de Yamabe invariantes a la izquierda en grupos de Lie

Como es bien conocido, cualquier variedad Lorentziana homogénea, completa, conexa y simplemente conexa de dimensión tres es isométrica a un espacio localmente simétrico o a un grupo de Lie de dimensión tres equipado con una métrica de Lorentz invariante a la izquierda (véase [19]). En este último caso, si existe un campo de vectores solitón  $X$  invariante a la izquierda diremos que el grupo de Lie es un *solitón de Yamabe invariante a la izquierda* y que el campo de vectores  $X$  es un *campo de vectores solitón invariante a la izquierda*.

En el siguiente teorema analizamos de una forma directa el caso especial en el que el campo de vectores solitón está dado por un campo de vectores invariante a la izquierda.

**Teorema 2.11.** *Un grupo de Lie Lorentziano no llano de dimensión tres es un solitón de Yamabe no trivial invariante a la izquierda si y sólo si es localmente isométrico a un grupo de Lie no unimodular de Tipo IV.3, i.e., con álgebra de Lie dada por*

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \frac{\delta}{2}e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \delta e_2;$$

respecto a una base pseudo-ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tal que

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\delta \neq 0$ . En particular, dicho solitón es no simétrico.

*Demostración.* En [25] se demuestra que un grupo de Lie Lorentziano no llano de dimensión tres tiene operador de Ricci dos pasos nilpotente si y sólo si se corresponde a uno de los siguientes espacios:

(a) Un grupo de Lie unimodular de Tipo II, i.e., con álgebra de Lie dada por

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - (\beta - \frac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2})e_2 - \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = 0;$$

respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  y donde  $\beta \neq 0$ .

(b) Un grupo de Lie unimodular de Tipo III con  $\alpha = 0$ , i.e., cuya álgebra de Lie está dada por

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3);$$

respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ .

(c) Un grupo unimodular de Tipo IV.3, i.e., con álgebra de Lie dada por

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \delta e_2;$$

respecto a una base pseudo-ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tal que

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha(\alpha - \delta) \neq 0$ .

Por otra parte, únicamente los casos (b) y (c) son localmente conformemente llanos (véase [18]). Así, por el Teorema 2.8, sólo necesitamos analizar la existencia de campos de vectores solitón invariantes a la izquierda en esos dos casos. Comenzamos dicho análisis por los grupos de Lie unimodulares del Tipo III con  $\alpha = 0$ . Si consideramos un campo de vectores invariante a la izquierda,  $X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ , la Ecuación (2.1) se reduce a

$$\mathcal{L}_X g + \lambda g = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\xi_2 - \sqrt{2}\xi_3 + \lambda & \frac{x_1}{\sqrt{2}} & \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\xi_3 + \lambda & \frac{\xi_3 - \xi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} & \frac{\xi_3 - \xi_2}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}\xi_2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la existencia de un campo de vectores solitón invariante a la izquierda implica que  $\xi_3 = \xi_2$ . De este modo obtenemos que  $\sqrt{2}\xi_2 + \lambda = -2\sqrt{2}\xi_2 + \lambda = 0$ , lo que demuestra que  $\xi_2 = 0$  y, por tanto, que  $\lambda = 0$ . Resulta entonces que en este caso el solitón es trivial.

Consideramos ahora el caso de un grupo de Lie no unimodular de Tipo IV.3 con  $\gamma = 0$  y  $\alpha(\alpha - \delta) \neq 0$ . Sea  $X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$  un campo de vectores invariante a la izquierda. Por un cálculo directo tenemos que la Ecuación (2.1) se reduce a

$$\mathcal{L}_X g + \lambda g = \begin{pmatrix} 2\xi_3\alpha + \lambda & 0 & -\xi_1\alpha - \xi_3\beta \\ 0 & 0 & -\xi_3\delta - \lambda \\ -\xi_1\alpha - \xi_3\beta & -\xi_3\delta - \lambda & 2\xi_1\beta + 2\xi_2\delta \end{pmatrix}.$$

Supongamos, además, que  $X$  es un campo de vectores solitón. Si  $\xi_3 = 0$  o  $\delta = 0$  entonces  $\lambda = 0$  y el solitón sería trivial. Así, necesariamente  $\xi_3\delta \neq 0$ , lo que implica que  $\alpha = \frac{\delta}{2} \neq 0$ . Para esta elección de  $\alpha$  tenemos

$$\mathcal{L}_X g + \lambda g = \begin{pmatrix} \xi_3\delta + \lambda & 0 & -\frac{\xi_1\delta}{2} - \xi_3\beta \\ 0 & 0 & -\xi_3\delta - \lambda \\ -\frac{\xi_1\delta}{2} - \xi_3\beta & -\xi_3\delta - \lambda & 2\xi_1\beta + 2\xi_2\delta \end{pmatrix}.$$

Por tanto,  $X$  es un campo de vectores solitón invariante a la izquierda si y sólo si

$$X = \begin{cases} \xi_1(e_1 - \frac{\beta}{\delta}e_2 - \frac{\delta}{2\beta}e_3) & \text{si } \beta \neq 0 \quad (\text{con } \lambda = \frac{\xi_1\delta^2}{2\beta}), \\ \xi_3 e_3 & \text{si } \beta = 0 \quad (\text{con } \lambda = -\xi_3\delta). \end{cases}$$

De este modo, se concluye la existencia de un solitón de Yamabe invariante a la izquierda no trivial siempre que  $\delta \neq 0$ . Además, estos solitones nunca son simétricos (véase [25]).  $\square$

Los campos de vectores solitón invariantes a la izquierda no Killing determinados en el Teorema 2.11 son siempre campos de vectores luminosos. Además la constante  $\lambda$  puede ser elegida positiva o negativa y por tanto los correspondientes solitones de Yamabe no triviales invariantes a la izquierda pueden ser contractivos o expansivos. Sin embargo, dichos solitones de Yamabe invariantes a la izquierda no triviales no pueden ser estables ya que la curvatura escalar es cero.

Por otra parte, también se obtiene que la clase de los solitones de Yamabe es estrictamente mayor que la clase de los solitones de Yamabe invariantes a la izquierda. En

particular, en la demostración del Teorema 2.11 se observa que las ondas planas homogéneas con métricas no geodésicamente completas se dan en los grupos de Lie unimodulares de Tipo III con  $\alpha = 0$  o en los grupos de Lie no unimodulares de Tipo IV.3 con  $\gamma = 0$  y  $\alpha(\alpha - \delta) \neq 0$ , al ser ambos localmente conformemente llanos con operador de Ricci dos-pasos nilpotente; mientras que los solitones de Yamabe invariantes a la izquierda no existen en el primero de los casos.

**Observación 2.12.** Un campo de vectores  $X$  se dice un *campo de vectores solitón de Ricci* si y sólo si  $\mathcal{L}_X g + \rho = \lambda g$ . Además, en función del signo de la constante  $\lambda$ , se dice que  $(M, g, X)$  es un solitón de Ricci contractivo, estable o expansivo si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  o  $\lambda < 0$ , respectivamente. Los solitones de Ricci se dicen solitones de Ricci gradientes si el campo de vectores solitón de Ricci es el gradiente de una cierta función potencial,  $X = \nabla\varphi$ .

Los solitones de Ricci invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres han sido investigados en [13], demostrando que cualquiera de estos grupos de Lie se corresponde con uno de los siguientes

- (a) Un grupo de Lie unimodular de Tipo II, i.e., con álgebra de Lie dada por

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - (\beta - \frac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2})e_2 - \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1;$$

respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  y donde, además,  $\alpha = 0$  ( $\lambda = 0$ ), o  $\alpha = \beta \neq 0$  ( $\lambda = -\frac{\beta^2}{2}$ ).

- (b) Un grupo de Lie unimodular de Tipo III, i.e., cuya álgebra de Lie está dada por:

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3;$$

respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  y donde, además,  $\alpha$  puede tomar cualquier valor ( $\lambda = -\frac{\alpha^2}{2}$ ).

- (c) Un grupo de Lie no unimodular de Tipo IV.3, i.e., con álgebra de Lie dada por

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \delta e_2;$$

respecto a una base pseudo-ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tal que

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  (para cualquier valor de  $\lambda$ ).

Mientras que los solitones de Ricci correspondientes a los casos (a) y (b) son expansivos o estables, dependiendo de las constantes de estructura del álgebra de Lie, los solitones de Ricci en el caso (c) pueden ser expansivos, estables o contractivos para las mismas constantes de estructura. Cabe destacar aquí que este fenómeno se debe a la existencia de campos de vectores solitones de Yamabe invariantes a la izquierda en el caso (c), puesto que dos campos de vectores solitones de Ricci se diferencian en un campo de vectores homotético.

## 2.3. Campos de vectores 1-armónicos

Un campo de vectores  $X$  sobre una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  de dimensión  $n$  determina una sección del fibrado tangente y, por tanto, parece natural estudiar los campos de vectores desde el punto de vista de las correspondientes aplicaciones  $X : M \rightarrow TM$ . Los campos de vectores armónicos y minimales han sido estudiados en la literatura considerando el levantamiento de Sasaki de  $g$  como la métrica inducida en  $TM$  (véanse [1], [20] y las referencias en ellos explicitadas). Sin embargo, cuando se estudian problemas de armonicidad es también importante dotar a  $TM$  con el levantamiento completo  $g^c$  de la métrica, la cual tiene signatura neutra  $(n, n)$  (véanse [4], [42], [54], [74] y [87]).

Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  variedades pseudo-Riemannianas de dimensiones  $n$  y  $r$ , cuyas correspondientes conexiones de Levi-Civita denotaremos por  $\nabla^M$  y  $\nabla^N$ , respectivamente. Una aplicación  $\mathcal{C}^\infty$  entre dichas variedades,  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ , define un fibrado vectorial  $\phi^*TN \hookrightarrow TM$ , con proyección  $\pi_1 : \phi^*TN \rightarrow M$ . Las secciones de  $\phi^*TN$ , denotadas por  $\Gamma(\phi^*TN)$ , son llamadas *campos de vectores a lo largo de  $\phi$* . Existe una única conexión lineal  $\phi^*\nabla^N$ , inducida por  $\phi$  en  $\phi^*TN$ , definida para todo  $p \in M$ ,  $X \in \Gamma(TM)$  e  $Y' \in \Gamma(TN)$  por

$$(\phi^*\nabla^N)_X(Y' \circ \phi)(p) = (\nabla_{d\phi(X)}^N Y') \circ \phi(p) = \nabla_{(d\phi)_p(X(p))}^N(Y'(\phi(p))).$$

Denotaremos por  $\nabla'$  la conexión inducida de forma natural en el producto tensorial  $T^*M \otimes \phi^*(TN)$  por la conexión  $\nabla^M$  en  $T^*M$  y la conexión  $\phi^*\nabla^N$  en  $\phi^*TN$ . Así, la segunda forma fundamental de  $\phi$  está dada por

$$\nabla'(d\phi)_X(Y) = (\phi^*\nabla^N)_X(d\phi(Y)) - (d\phi)(\nabla_X^M Y),$$

y la sección de  $\phi^*TN$  definida como

$$\tau(\phi) = \text{tr}_g(\nabla'(d\phi)),$$

se llama *campo de tensión de  $\phi$* . Se dice que  $\phi$  es una *aplicación armónica* si  $\tau(\phi) = 0$ , y *totalmente geodésica* si  $\nabla'(d\phi) = 0$ .

Sean  $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$  y  $(\mathcal{V}, (y^1, \dots, y^r))$  abiertos coordenados de  $M$  y  $N$ , respectivamente, tal que  $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Localmente, la aplicación  $\phi$  tiene la siguiente representación,  $y^a = \phi(x^1, \dots, x^n)$ . Entonces la segunda forma fundamental de  $\phi$  en  $p \in \mathcal{U}$  puede ser expresada localmente por

$$\nabla'(d\phi) = (\nabla'(d\phi))_{ij}^a dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_a,$$

para  $i, j, k = 1, \dots, n$  y  $a, b, c = 1, \dots, r$ ; donde

$$(\nabla'(d\phi))_{ij}^a(p) = \frac{\partial^2 \phi^a}{\partial x_i \partial x_j}(p) - {}^g \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial \phi^a}{\partial x_k}(p) + {}^h \Gamma_{bc}^a(\phi(p)) \left( \frac{\partial \phi^b}{\partial x_i}(p) \frac{\partial \phi^c}{\partial x_j}(p) \right).$$

Finalmente, respecto a la base usual  $dx^i \otimes \partial_a$  de la fibra  $T^*M \otimes \phi^*TN$  en  $p \in M$ , se tiene la siguiente expresión

$$\tau(\phi) = \tau(\phi)^a \partial_a = g^{ij} (\nabla'(d\phi))_{ij}^a \partial_a \in (\phi^*TN)_p,$$

donde nuevamente  $i, j = 1, \dots, n$  y  $a = 1, \dots, r$ .

Un campo de vectores  $X$  se dice *armónico Killing* si su flujo integral está constituido por difeomorfismos locales armónicos. Además, dichos campos de vectores verifican el siguiente resultado

**Teorema 2.13.** [37], [86] *Sea  $(M, g)$  una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión  $n$  y  $X$  un campo de vectores en  $M$ . Si  $X$  es armónico Killing entonces se verifica que para todo  $p \in M$*

$$\sum_{j=1}^n (\mathcal{L}_X \nabla)(Y_j, Y_j) = 0,$$

siendo  $\{Y_j\}_{j=1, \dots, n}$  una referencia ortonormal arbitraria en  $T_p M$ .

Por los resultados obtenidos en [86] se tiene que esta condición es necesaria pero no suficiente, es decir, existen campos de vectores verificando que  $\sum_{j=1}^n (\mathcal{L}_X \nabla)(Y_j, Y_j) = 0$  pero que no son campos de vectores armónico Killing. Este hecho llevó a los autores a introducir el concepto de campo de vectores 1-armónico. Se dice que un campo de vectores  $X$  es 1-armónico o 1-armónico-Killing si el grupo 1-paramétrico local de transformaciones asociado a  $X$ ,  $\{\phi_t\}_{t \in I}$ , verifica

$$\frac{d\tau(\phi_t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

es decir, la parte lineal de su campo de tensión se anula. Para esta nueva clase de campos de vectores se verifica el siguiente Teorema

**Teorema 2.14.** [86] *En una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (i)  $X$  es un campo de vectores 1-armónico,
- (ii)  $\text{tr } \mathcal{L}_X \nabla = 0$ ,
- (iii)  $X : (M, g) \rightarrow (TM, g^c)$  es una aplicación armónica,
- (iv)  $X$  es un campo de vectores de Jacobi a lo largo de la identidad.
- (v)  $\Delta X = \widehat{\rho}(X)$ .

El propósito de esta sección es determinar todos los campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda sobre los grupos de Lie de dimensión tres. De forma obvia los campos de vectores afín Killing (y por tanto los campos de vectores Killing) son 1-armónicos, y por tanto haremos énfasis en la existencia de aquellos campos de vectores 1-armónicos que no sean afín Killing. La motivación para realizar este estudio proviene del hecho de que todo solitón de Ricci es un campo de vectores 1-armónico, según se ha probado en [82].

Para realizar este estudio, analizamos la existencia de campos de vectores invariantes a la izquierda Killing, afín Killing y 1-armónicos sobre grupos de Lie Lorentzianos unimodulares en la Sección 2.3.1, mientras que el caso Lorentziano no unimodular es considerado en

la Sección 2.3.2. En cada caso determinamos los correspondientes subespacios vectoriales de los campos de vectores invariantes a la izquierda Killing, afín Killing y 1-armónicos. Finalmente en la Sección 2.3.3 analizamos el caso Riemanniano, omitiendo los detalles puesto que los resultados se obtienen esencialmente siguiendo los mismos pasos que en las Secciones 2.3.1 y 2.3.2. Además, en la Sección 2.3.3 también se demuestra que la clase de campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda es estrictamente más grande que la clase de los solitones de Ricci Lorentzianos.

En lo que sigue denotaremos por  $\mathcal{V}_K$ ,  $\mathcal{V}_{AK}$  y  $\mathcal{V}_A$  los espacios vectoriales generados por los campos de vectores invariantes a la izquierda Killing, afín Killing y 1-armónicos en un grupo de Lie respectivamente.

### 2.3.1. Caso unimodular

Sea  $G$  un grupo de Lie dotado con una métrica  $g$  pseudo-Riemanniana invariante a la izquierda. Aunque cualquier campo de vectores invariante a la derecha en  $G$  es un campo de vectores Killing, la existencia de campos de vectores Killing invariantes a la izquierda impone algunas restricciones a  $(G, g)$ . En esta sección consideraremos la existencia de campos de vectores Killing, afín Killing y 1-armónicos invariantes a la izquierda en los grupos de Lie Lorentzianos unimodulares de dimensión tres cuyas correspondientes álgebras de Lie fueron introducidas en la Sección 1.2.1.

#### i) Tipo Ia

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo Ia viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por

$$[e_1, e_2] = -\gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

De este modo, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\Phi_{12}^3 = \Phi_{13}^2 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma), \quad \Phi_{21}^3 = \Phi_{23}^1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma), \quad \Phi_{31}^2 = -\Phi_{32}^1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma);$$

donde las  $\Phi_{ij}^k$  están definidas como  $\nabla_{e_i} e_j = \Phi_{ij}^k e_k$ .

Estas expresiones nos permiten calcular para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = \sum \xi_i e_i$ , los términos no nulos en la derivada de Lie de la métrica  $\mathcal{L}_\xi g$ , que vienen dados por

$$(2.9) \quad (\mathcal{L}_\xi g)_{12} = (\alpha - \beta)\xi_3, \quad (\mathcal{L}_\xi g)_{13} = (\gamma - \alpha)\xi_2, \quad (\mathcal{L}_\xi g)_{23} = (\beta - \gamma)\xi_1,$$

así como determinar también la derivada de Lie de la conexión de Levi-Civita

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= \gamma(\gamma - \alpha)\xi_2 e_2 - \beta(\alpha - \beta)\xi_3 e_3, \\
(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= -\gamma(\beta - \gamma)\xi_1 e_1 + \alpha(\alpha - \beta)\xi_3 e_3, \\
(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= -\beta(\beta - \gamma)\xi_1 e_1 + \alpha(\gamma - \alpha)\xi_2 e_2, \\
(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)\xi_2 e_1 - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)\xi_1 e_2, \\
(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)\xi_3 e_1 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)\xi_1 e_3, \\
(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)\xi_3 e_2 - \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)\xi_2 e_3.
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

A continuación determinamos los campos de Killing, afín Killing y 1-armónicos invariantes a la izquierda en este primer caso.

**Lema 2.15.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo Ia admite campos de vectores de Killing invariantes a la izquierda y no cero si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

$$(i) \alpha = \beta = \gamma, \quad o \quad (ii) \alpha = \beta \neq \gamma, \quad o \quad (iii) \beta = \gamma \neq \alpha, \quad o \quad (iv) \alpha = \gamma \neq \beta.$$

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que:

$$(i) \mathcal{V}_K = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle. \quad (ii) \mathcal{V}_K = \langle e_3 \rangle. \quad (iii) \mathcal{V}_K = \langle e_1 \rangle. \quad (iv) \mathcal{V}_K = \langle e_2 \rangle.$$

(Con el fin de fijar la notación, observemos que por ejemplo “ $\mathcal{V}_K = \langle e_3 \rangle$ ” significa que  $\mathcal{V}_K$  está generado por  $e_3$ ).

*Demostración.* Haciendo uso de la Ecuación (2.9), la condición Killing para  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  está caracterizada por

$$(\alpha - \beta)\xi_3 = 0, \quad (\gamma - \alpha)\xi_2 = 0, \quad (\beta - \gamma)\xi_1 = 0,$$

con lo que el resultado se sigue de forma directa.  $\square$

**Teorema 2.16.** *Un campo de vectores invariante a la izquierda en un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo Ia es 1-armónico si y sólo si es de Killing.*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.10) implica que

$$\text{tr } \mathcal{L}_\xi \nabla = (\beta - \gamma)^2 \xi_1 e_1 + (\alpha - \gamma)^2 \xi_2 e_2 + (\alpha - \beta)^2 \xi_3 e_3.$$

Por tanto  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si

$$(\beta - \gamma)\xi_1 = (\alpha - \gamma)\xi_2 = (\alpha - \beta)\xi_3 = 0,$$

y así  $\xi$  es de Killing (véase Ecuación (2.9)).  $\square$

## ii) Tipo Ib

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo Ib está determinada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por

$$[e_1, e_2] = \beta e_2 - \gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\gamma e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1;$$

con  $\beta \neq 0$ . Y, por tanto, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^3 &= \Phi_{13}^2 = \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma), & \Phi_{21}^2 &= -\Phi_{22}^1 = -\Phi_{31}^3 = -\Phi_{33}^1 = -\beta, \\ \Phi_{21}^3 &= \Phi_{23}^1 = \Phi_{31}^2 = -\Phi_{32}^1 = \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

y por un cálculo directo se demuestra que la derivada de Lie de la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= -(\beta^2 + \gamma(\alpha - \gamma))\xi_2 - \beta(\alpha - 2\gamma)\xi_3) e_2 \\ &\quad + (\beta(\alpha - 2\gamma)\xi_2 - (\beta^2 + \gamma(\alpha - \gamma))\xi_3) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= -2\beta^2\xi_1 e_1 - \beta(\beta\xi_2 + (\alpha - \gamma)\xi_3) e_2 \\ &\quad + (\beta\gamma\xi_2 + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\gamma)\xi_3) e_3, \\ (2.11) \quad (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= 2\beta^2\xi_1 e_1 - ((\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\gamma)\xi_2 - \beta\gamma\xi_3) e_2 \\ &\quad - \beta((\alpha - \gamma)\xi_2 - \beta\xi_3) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= \frac{1}{2}((\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\gamma)\xi_2 + \beta(\alpha - 2\gamma)\xi_3) e_1 - \beta(\alpha - 2\gamma)\xi_1 e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= \frac{1}{2}(\beta(\alpha - 2\gamma)\xi_2 - (\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\gamma)\xi_3) e_1 + \beta(\alpha - 2\gamma)\xi_1 e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= 2\beta\gamma\xi_1 e_1 + \frac{1}{2}\alpha(\beta\xi_2 + (\alpha - \gamma)\xi_3) e_2 - \frac{1}{2}\alpha((\alpha - \gamma)\xi_2 - \beta\xi_3) e_3. \end{aligned}$$

De este modo tenemos:

**Teorema 2.17.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo Ib no admite ningún campo de vectores 1-armónico invariante a la izquierda y distinto de cero.*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.11) implica que

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}_\xi \nabla &= -4\beta^2\xi_1 e_1 + (((\alpha - \gamma)^2 - \beta^2)\xi_2 - 2\beta(\alpha - \gamma)\xi_3) e_2 \\ &\quad + (2\beta(\alpha - \gamma)\xi_2 + ((\alpha - \gamma)^2 - \beta^2)\xi_3) e_3. \end{aligned}$$

Por tanto  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si

$$\begin{aligned} \beta^2\xi_1 &= 0, \\ ((\alpha - \gamma)^2 - \beta^2)\xi_2 - 2\beta(\alpha - \gamma)\xi_3 &= 0, \\ 2\beta(\alpha - \gamma)\xi_2 + ((\alpha - \gamma)^2 - \beta^2)\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

y como  $\beta \neq 0$  se sigue que este sistema homogéneo de ecuaciones lineales en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene como solución únicamente la solución trivial.  $\square$

## iii) Tipo II

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo II viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - (\beta - \frac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2})e_2 - \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

En este caso, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^3 &= \Phi_{13}^2 = \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta), & \Phi_{21}^2 &= -\Phi_{22}^1 = -\Phi_{31}^3 = -\Phi_{33}^1 = -\frac{1}{2}, \\ \Phi_{21}^3 &= \Phi_{23}^1 = \frac{1}{2}(\alpha - 1), & \Phi_{31}^2 &= -\Phi_{32}^1 = \frac{1}{2}(\alpha + 1), \end{aligned}$$

con lo que la derivada de Lie de la métrica está caracterizada por

$$(2.12) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{22} &= (\mathcal{L}_\xi g)_{33} = -(\mathcal{L}_\xi g)_{23} = -\xi_1, & (\mathcal{L}_\xi g)_{12} &= \frac{1}{2}(\xi_2 + (2\alpha - 2\beta - 1)\xi_3), \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{13} &= -\frac{1}{2}((2\alpha - 2\beta + 1)\xi_2 - \xi_3). \end{aligned}$$

Además, la derivada de Lie de la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$(2.13) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= \frac{1}{2}((\alpha - 2\alpha\beta + 2\beta(\beta - 1))\xi_2 + (2\beta - \alpha)\xi_3) e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}((\alpha - 2\beta)\xi_2 - (\alpha + 2\alpha\beta - 2\beta(\beta + 1))\xi_3) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= -\beta\xi_1 e_1 - \frac{1}{4}(\xi_2 + (2\alpha - 2\beta - 1)\xi_3) e_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}((2\beta - 1)\xi_2 + (4\alpha^2 - 2\alpha(2\beta + 1) + 1)\xi_3) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= -\beta\xi_1 e_1 - \frac{1}{4}((4\alpha^2 - \alpha(4\beta - 2) + 1)\xi_2 - (2\beta + 1)\xi_3) e_2 \\ &\quad - \frac{1}{4}((2\alpha - 2\beta + 1)\xi_2 - \xi_3) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= \frac{1}{4}((2\alpha^2 + 2\beta - \alpha(2\beta + 1))\xi_2 + (\alpha - 2\beta)\xi_3) e_1 \\ &\quad + (\beta - \frac{\alpha}{2})\xi_1(e_2 + e_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= \frac{1}{4}((\alpha - 2\beta)\xi_2 - (2\alpha^2 + \alpha - 2\beta - 2\alpha\beta)\xi_3) e_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta)\xi_1(e_2 + e_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= \beta\xi_1 e_1 + \frac{1}{4}(\alpha + 1)(\xi_2 + (2\alpha - 2\beta - 1)\xi_3) e_2 \\ &\quad - \frac{1}{4}(\alpha - 1)((2\alpha - 2\beta + 1)\xi_2 - \xi_3) e_3. \end{aligned}$$

Consideramos en los siguientes resultados la existencia de campos de vectores de Killing, afín Killing y 1-armónicos invariantes a la izquierda en estos grupos.

**Lema 2.18.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo II admite un campo de vectores de Killing invariante a la izquierda y distinto de cero si y sólo si  $\alpha = \beta$ . Además, en tal caso  $\mathcal{V}_K = \langle e_2 + e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* De la Ecuación (2.12), la condición de ser Killing para  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  está dada por

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 + (2\alpha - 2\beta - 1)\xi_3 = 0, \quad (2\alpha - 2\beta + 1)\xi_2 - \xi_3 = 0.$$

Estas ecuaciones pueden verse como un sistema de ecuaciones lineal homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , el cual tiene solución no trivial si y sólo si  $\alpha = \beta$ . En tal caso,  $\xi_1 = 0$  y  $\xi_3 = \xi_2$ , lo que demuestra el resultado.  $\square$

**Lema 2.19.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo II admite campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda y no Killing si y sólo si  $\alpha = \beta = 0$ . Además, en tal caso  $\mathcal{V}_{\mathcal{AK}} = \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* De la Ecuación (2.13) obtenemos la siguiente condición necesaria para que un campo de vectores  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sea afín Killing

$$\begin{aligned} g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13}, e_2) &= \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta)\xi_1 = 0, \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_2) &= -\frac{1}{4}(\xi_2 + (2\alpha - 2\beta - 1)\xi_3) = 0, \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33}, e_3) &= \frac{1}{4}((2\alpha - 2\beta + 1)\xi_2 - \xi_3) = 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineal homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene solución no trivial si y sólo si  $(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta) = 0$ . Observemos que si  $\alpha = 2\beta$  entonces

$$(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} = -\beta^2 \xi_2 e_2 - \beta^2 \xi_3 e_3, \quad g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_1) = -\beta \xi_1,$$

y por tanto para que existan de campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda y distintos de cero ha de ser necesariamente  $\beta = 0$  (con lo que también resulta  $\alpha = 0$ ). De este modo obtenemos que existen campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda y distintos de cero si y solo si  $\alpha = \beta$ . Ahora bien, escribiendo la Ecuación (2.13) para  $\beta = \alpha$  se obtiene que la condición de ser afín Killing para  $\xi$  se reduce a

$$\alpha \xi_1 = 0, \quad \xi_2 - \xi_3 = 0.$$

Es decir, si  $\alpha = \beta \neq 0$  entonces  $\mathcal{V}_{\mathcal{AK}} = \langle e_2 + e_3 \rangle = \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  (véase Lema 2.18). Finalmente, si  $\alpha = \beta = 0$  entonces  $\xi$  es afín Killing si y sólo si  $\xi_3 = \xi_2$ , lo que, nuevamente por el Lema 2.18, termina la demostración.  $\square$

**Teorema 2.20.** *Cualquier grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo II admite campos de vectores 1-armónico invariantes a la izquierda que no son afín Killing. Más precisamente,*

$$(i) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle, \text{ si } \alpha = \beta,$$

$$(ii) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \langle e_1 \rangle, \text{ si } \alpha \neq \beta.$$

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.13) implica que

$$\operatorname{tr} \mathcal{L}_\xi \nabla = (\alpha - \beta)((\alpha - \beta + 1)\xi_2 - \xi_3)e_2 + (\alpha - \beta)(\xi_2 + (\alpha - \beta - 1)\xi_3)e_3.$$

Por tanto, si  $\alpha = \beta$  tenemos que  $\operatorname{tr} \mathcal{L}_\xi \nabla$  se anula para cualquier campo de vectores  $\xi$  invariante a la izquierda, mientras que para  $\alpha \neq \beta$  el campo de vectores  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si

$$(\alpha - \beta + 1)\xi_2 - \xi_3 = 0, \quad \xi_2 + (\alpha - \beta - 1)\xi_3 = 0,$$

lo cual es equivalente a  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ . Finalmente, a partir de los Lemas 2.18 y 2.19 se obtiene el resultado enunciado.  $\square$

#### iv) Tipo III

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo III viene dada respecto a una base ortogonal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , como

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

Por tanto, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^2 &= -\Phi_{11}^3 = -\Phi_{12}^1 = -\Phi_{13}^1 = \Phi_{22}^3 = \Phi_{23}^2 = \Phi_{32}^3 = \Phi_{33}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \Phi_{12}^3 &= \Phi_{13}^2 = -\Phi_{21}^3 = -\Phi_{23}^1 = -\Phi_{31}^2 = \Phi_{32}^1 = -\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

con lo que la derivada de Lie de la conexión de Levi-Civita está dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= \frac{1}{2} (\sqrt{2}\alpha\xi_1 - 3\xi_2 - 3\xi_3) (e_2 - e_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= -\left(\xi_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\xi_2 - \xi_3)\right) e_1 + \frac{1}{2} (\xi_2 - \xi_3) e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{2}\alpha\xi_1 - \xi_2 + \xi_3) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= -\left(\xi_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\xi_2 - \xi_3)\right) e_1 + \frac{1}{2} (\sqrt{2}\alpha\xi_1 + \xi_2 - \xi_3) e_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\xi_2 - \xi_3) e_3, \\ (2.14) \quad (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\xi_1 e_1 + \frac{1}{4} (2\xi_1 - \sqrt{2}\alpha(\xi_2 - \xi_3)) e_2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\xi_2 + 2\xi_3)\right) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\xi_1 e_1 + \frac{1}{2} (\xi_1 - \sqrt{2}\alpha(2\xi_2 + \xi_3)) e_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} (2\xi_1 - \sqrt{2}\alpha(\xi_2 - \xi_3)) e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= -\left(\xi_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\xi_2 - \xi_3)\right) e_1 + \frac{1}{4} (\sqrt{2}\alpha\xi_1 + 2\xi_2 - 2\xi_3) e_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (\sqrt{2}\alpha\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3) e_3. \end{aligned}$$

Para este caso obtenemos los siguientes resultados.

**Lema 2.21.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo III no admite ningún campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda y distinto de cero.*

*Demostración.* Haciendo uso de la Ecuación (2.14), si el campo de vectores invariante a la izquierda,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , es afín Killing entonces

$$\begin{aligned} g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33}, e_3) &= \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_3) = 0, & g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33}, e_1) &= -\xi_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\xi_2 - \xi_3) = 0, \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_2) &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}\alpha\xi_1 - 3\xi_2 - 3\xi_3) = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado de forma directa.  $\square$

**Teorema 2.22.** *Cualquier grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo III admite campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda y no afín Killing. Además, el espacio de los campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda está dado por  $\mathcal{V}_A = \langle e_1, e_2 - e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.14) implica que

$$\text{tr } \mathcal{L}_\xi \nabla = -\frac{3}{2}(\xi_2 + \xi_3)(e_2 - e_3).$$

Por tanto,  $\xi$  es un campo de vectores 1-armónico si y sólo si  $\xi_3 = -\xi_2$ . Finalmente, por el Lema 2.21 tenemos que dicho campo no es afín Killing.  $\square$

Resumimos los resultados obtenidos en esta sección en la siguiente tabla.

<i>Grupos de Lie Lorentzianos unimodulares</i>			
<i>Tipo</i>	<i>No cero Killing</i>	<i>No Killing afín Killing</i>	<i>No afín Killing 1-armónico</i>
Ia	$\alpha = \beta = \gamma$		
	$\alpha = \beta \neq \gamma$	$\times$	$\times$
	$\beta = \gamma \neq \alpha$		
	$\alpha = \gamma \neq \beta$		
Ib	$\times$	$\times$	$\times$
II	$\alpha = \beta = 0$	$\checkmark$	$\checkmark$
	$\alpha = \beta \neq 0$	$\times$	$\checkmark$
	$\times$	$\times$	En cualquier otro caso
III	$\times$	$\times$	En otro caso

### 2.3.2. Caso no unimodular

En esta sección consideramos la existencia de campos de vectores de Killing, afín Killing y 1-armónicos invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos no unimodulares de dimensión tres, cuyas álgebras de Lie fueron introducidas en la Sección 1.2.1.

#### i) Tipo $\mathfrak{S}$

Las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo  $\mathfrak{S}$  son álgebras de Lie resolubles verificando que para cualesquiera dos elementos  $x$  e  $y \in \mathfrak{g}$ , su producto corchete  $[x, y]$  es una combinación lineal de ellos mismos. En este caso la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned}\Phi_{11}^2 &= -\Phi_{12}^1 = -\Phi_{32}^3 = -\Phi_{33}^2 = \beta, & \Phi_{11}^3 &= \Phi_{13}^1 = \Phi_{22}^3 = \Phi_{23}^2 = -\gamma, \\ \Phi_{21}^2 &= -\Phi_{22}^1 = \Phi_{31}^3 = \Phi_{33}^1 = -\alpha,\end{aligned}$$

y por tanto su derivada de Lie está dada por

$$\begin{aligned}(2.15) \quad (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= ((-\beta^2 + \gamma^2)\xi_1 - \alpha\beta\xi_2 - \alpha\gamma\xi_3)e_1 \\ &\quad + (\alpha\beta\xi_1 - (\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2)\xi_2 - \beta\gamma\xi_3)e_2 \\ &\quad - (\alpha\gamma\xi_1 - \beta\gamma\xi_2 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2)\xi_3)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= ((-2\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)\xi_1 + \alpha\beta\xi_2 - \alpha\gamma\xi_3)e_1 \\ &\quad - (\alpha\beta\xi_1 + (\alpha^2 - \gamma^2)\xi_2 + \beta\gamma\xi_3)e_2 \\ &\quad + (\alpha\gamma\xi_1 - \beta\gamma\xi_2 - (\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2)\xi_3)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= ((2\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\xi_1 + \alpha\beta\xi_2 - \alpha\gamma\xi_3)e_1 \\ &\quad + (\alpha\beta\xi_1 + (\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2)\xi_2 - \beta\gamma\xi_3)e_2 \\ &\quad - (\alpha\gamma\xi_1 + \beta\gamma\xi_2 - (\alpha^2 + \beta^2)\xi_3)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= (\alpha\beta\xi_1 + \alpha^2\xi_2)e_1 + (\beta^2\xi_1 + \alpha\beta\xi_2)e_2 - (\beta\gamma\xi_1 + \alpha\gamma\xi_2)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= (\alpha\gamma\xi_1 - \alpha^2\xi_3)e_1 + (\beta\gamma\xi_1 - \alpha\beta\xi_3)e_2 - (\gamma^2\xi_1 - \alpha\gamma\xi_3)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= (\alpha\gamma\xi_2 - \alpha\beta\xi_3)e_1 + (\beta\gamma\xi_2 - \beta^2\xi_3)e_2 - (\gamma^2\xi_2 - \beta\gamma\xi_3)e_3.\end{aligned}$$

Resulta entonces.

**Lema 2.23.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo  $\mathfrak{S}$  no admite ningún campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda y distinto de cero.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\alpha = \beta = 0$ . Entonces, la Ecuación (2.15) implica que

$$(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} = \gamma^2\xi_1e_1 + \gamma^2\xi_2e_2 + 2\gamma^2\xi_3e_3,$$

y por tanto, un campo de vectores afín Killing debe ser nulo. Supongamos ahora que o bien  $\alpha \neq 0$  o  $\beta \neq 0$ . De la Ecuación (2.15) obtenemos que

$$\begin{aligned}g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_1) - g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_1) + 2g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12}, e_2) &= 2(\alpha^2 + \beta^2)\xi_1, \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_2) - g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_2) - 2g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12}, e_1) &= -2(\alpha^2 + \beta^2)\xi_2,\end{aligned}$$

y por tanto si  $\xi$  es afín Killing entonces necesariamente  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . Finalmente, bajo estas condiciones, de nuevo la Ecuación (2.15) implica que

$$g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33}, e_3) = -(\alpha^2 + \beta^2)\xi_3,$$

y por tanto se concluye que si  $\xi$  es un campo de vectores afín Killing entonces ha de anularse.  $\square$

No obstante, la situación no es tan rígida con respecto a los campos de vectores 1-armónicos. En particular tenemos.

**Teorema 2.24.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo  $\mathfrak{S}$  admite campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si  $\gamma = \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , donde  $\varepsilon^2 = 1$ . Además, en tal caso la métrica es llana y se tiene que  $\mathcal{V}_A = \langle e_1 - \frac{\varepsilon\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}e_3, e_2 - \frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.15) implica que

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}_\xi \nabla &= ((-4\alpha^2 - 3\beta^2 + 3\gamma^2)\xi_1 - \alpha\beta\xi_2 - \alpha\gamma\xi_3)e_1 \\ &\quad - (\alpha\beta\xi_1 + (3\alpha^2 + 4\beta^2 - 3\gamma^2)\xi_2 + \beta\gamma\xi_3)e_2 \\ &\quad + (\alpha\gamma\xi_1 + \beta\gamma\xi_2 - (3\alpha^2 + 3\beta^2 - 4\gamma^2)\xi_3)e_3, \end{aligned}$$

y así  $\xi$  es un campo de vectores 1-armónico si y sólo si

$$\begin{aligned} (-4\alpha^2 - 3\beta^2 + 3\gamma^2)\xi_1 - \alpha\beta\xi_2 - \alpha\gamma\xi_3 &= 0, & \alpha\beta\xi_1 + (3\alpha^2 + 4\beta^2 - 3\gamma^2)\xi_2 + \beta\gamma\xi_3 &= 0, \\ \alpha\gamma\xi_1 + \beta\gamma\xi_2 - (3\alpha^2 + 3\beta^2 - 4\gamma^2)\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene solución no trivial si y sólo si  $\gamma = \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , donde  $\varepsilon^2 = 1$ . Puesto que la curvatura seccional constante de un grupo de Lie de tipo  $\mathfrak{S}$  está dada por  $-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2$ , se sigue que si existe un campo de vectores 1-armónico distinto de cero entonces la métrica es necesariamente llana. Ahora bien, bajo esta condición, el sistema homogéneo anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\xi_3) &= 0, & \beta(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\xi_3) &= 0, \\ \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) + (\alpha^2 + \beta^2)\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Observemos que  $\alpha$  y  $\beta$  no se pueden anular simultáneamente y por tanto concluimos que  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si  $\xi_3 = -\varepsilon\frac{\alpha\xi_1 + \beta\xi_2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ . Finalmente, por el Lema 2.23 se obtiene de forma directa el resultado enunciado.  $\square$

Pasamos ahora a estudiar las álgebras de Lie no unimodulares que no son de Tipo  $\mathfrak{S}$ .

## ii) Tipo IV.1

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.1 viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  verificando  $g(e_1, e_1) = -g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -1$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$ . En este caso, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^3 &= \Phi_{13}^1 = \alpha, & \Phi_{12}^3 &= -\Phi_{13}^2 = \Phi_{21}^3 = \Phi_{23}^1 = -\frac{\beta-\gamma}{2}, \\ \Phi_{22}^3 &= -\Phi_{23}^2 = -\delta, & \Phi_{31}^2 &= \Phi_{32}^1 = -\frac{\beta+\gamma}{2}, \end{aligned}$$

con lo que la derivada de Lie de la métrica está caracterizada por

$$(2.16) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{11} &= -2\alpha\xi_3, & (\mathcal{L}_\xi g)_{22} &= 2\delta\xi_3, & (\mathcal{L}_\xi g)_{12} &= (\beta - \gamma)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{13} &= \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, & (\mathcal{L}_\xi g)_{23} &= -\beta\xi_1 - \delta\xi_2. \end{aligned}$$

Además, la derivada de Lie de la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$(2.17) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= \alpha(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2)e_1 + \alpha(\beta\xi_1 + \delta\xi_2)e_2 + (2\alpha^2 - \beta(\beta - \gamma))\xi_3e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= -\delta(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2)e_1 - \delta(\beta\xi_1 + \delta\xi_2)e_2 - (2\delta^2 + \gamma(\beta - \gamma))\xi_3e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= -(\alpha^2 - \beta^2)\xi_1e_1 + (\gamma^2 - \delta^2)\xi_2e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= -\frac{1}{2}(\beta - \gamma)(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2)e_1 - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)(\beta\xi_1 + \delta\xi_2)e_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha\beta - \gamma\delta)\xi_3e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= -\frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2)\xi_3e_1 - \frac{1}{2}(\alpha\beta - \gamma\delta)\xi_3e_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}((2\alpha^2 - \beta(\beta - \gamma))\xi_1 + \delta(\beta + \gamma)\xi_2)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= \frac{1}{2}(\alpha\beta - \gamma\delta)\xi_3e_1 + \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2)\xi_3e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\beta(\alpha + \delta)\xi_1 - (\gamma^2 - 2\delta^2 - \beta\gamma)\xi_2)e_3. \end{aligned}$$

Consideramos la existencia de campos de vectores de Killing, afín Killing y 1-armónicos invariantes a la izquierda en el siguiente resultado.

**Lema 2.25.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.1 admite un campo de vectores de Killing invariante a la izquierda distinto de cero si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

- (i)  $\alpha = \beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ ,
- (ii)  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$ ,  $\delta(\alpha^2 - \beta^2) = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ .

Además, en este caso, tenemos respectivamente que:

- (i)  $\mathcal{V}_K = \langle e_1 \rangle$ .

$$(ii) \mathcal{V}_K = \langle -\frac{\gamma}{\alpha}e_1 + e_2 \rangle.$$

*Demostración.* Consideremos un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Puesto que  $\alpha + \delta \neq 0$ , se sigue de la Ecuación (2.16) que la condición de ser Killing para  $\xi$  es equivalente a

$$(2.18) \quad \xi_3 = 0, \quad \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0, \quad \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0.$$

Recordemos que  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$ . Si  $\alpha = 0$  entonces  $\beta = 0$  y se sigue que  $\xi$  es de Killing si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ ; lo que demuestra (i). Ahora, para  $\alpha \neq 0$  tenemos que  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$  y se sigue que  $\xi$  es de Killing si y sólo si  $\xi_3 = 0$ ,  $\xi_1 = -\frac{\gamma}{\alpha}\xi_2$  y  $\delta(\alpha^2 - \beta^2)\xi_2 = 0$ , de donde se concluye (ii).  $\square$

**Lema 2.26.** *Cualquier campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda en un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.1 es de Killing.*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.17) implica que

$$\begin{aligned} g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_1) - g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_1) &= -(\alpha + \delta)(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2), \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_2) - g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_2) &= (\alpha + \delta)(\beta\xi_1 + \delta\xi_2). \end{aligned}$$

Supongamos que  $\xi$  es afín Killing. Puesto que  $\alpha + \delta \neq 0$ , se sigue que

$$\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0, \quad \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0.$$

Por tanto, considerando la Ecuación (2.18), es suficiente con comprobar que  $\xi_3 = 0$  para que  $\xi$  sea de Killing. Para hacer esto, observemos que de la Ecuación (2.17) tenemos que

$$g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_3) + g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_3) + 2g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13}, e_1) = 2(\alpha + \delta)(\alpha - \delta)\xi_3.$$

Es decir, si  $\alpha - \delta \neq 0$ , entonces  $\xi_3 = 0$ . Finalmente, analizamos el caso  $\alpha - \delta = 0$ ; puesto que  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ , se sigue que  $\gamma = \beta$  y de la Ecuación (2.17) se obtiene que, en tal caso,

$$g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_3) = -2\delta^2\xi_3,$$

lo cual conduce nuevamente a que  $\xi_3 = 0$ .  $\square$

**Lema 2.27.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.1 admite campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda distintos de cero si y sólo si*

$$(2.19) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot ((2\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta) - \beta\gamma) \cdot (2\alpha^2 + 2\delta^2 - (\beta - \gamma)^2) = 0.$$

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.17) implica que

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}_\xi \nabla &= -((2\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\delta)\xi_1 + \delta(\beta + \gamma)\xi_2) e_1 \\ &\quad - (\beta(\alpha + \delta)\xi_1 - (\gamma^2 - 2\delta^2 - \alpha\delta)\xi_2) e_2 \\ &\quad - (2\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 + 2\delta^2)\xi_3 e_3. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si el sistema lineal homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$(2.20) \quad \begin{aligned} (2\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\delta)\xi_1 + \delta(\beta + \gamma)\xi_2 &= 0, & \beta(\alpha + \delta)\xi_1 - (\gamma^2 - 2\delta^2 - \alpha\delta)\xi_2 &= 0, \\ (2\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 + 2\delta^2)\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

tiene solución no trivial, lo cual ocurre si y sólo si se verifica la Ecuación (2.19).  $\square$

**Teorema 2.28.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.1 admite campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

$$(i) \quad \alpha = \beta = 0 \text{ y } \gamma^2 = 2\delta^2 \neq 0.$$

$$(ii) \quad \gamma = \delta = 0 \text{ y } \beta^2 = 2\alpha^2 \neq 0.$$

$$(iii) \quad \beta = \gamma = 0 \text{ y } \alpha = -2\delta \neq 0 \text{ o } \alpha = -\frac{\delta}{2} \neq 0.$$

$$(iv) \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \delta = \frac{-5\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon\sqrt{9\alpha^4 + \beta^4 - 10\alpha^2\beta^2}}{4\alpha} \text{ y } \gamma = \frac{(2\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta)}{\beta}, \text{ siendo } \varepsilon^2 = 1.$$

$$(v) \quad \alpha\delta \neq 0, \alpha \neq 2\delta, \alpha \neq \frac{\delta}{2}, \beta = \frac{\varepsilon\alpha\sqrt{2(\alpha^2 + \delta^2)}}{\alpha - \delta} (\neq 0), \gamma = \frac{\varepsilon\delta\sqrt{2(\alpha^2 + \delta^2)}}{\alpha - \delta} (\neq 0) \text{ y } \alpha + \delta \neq 0, \text{ siendo } \varepsilon^2 = 1.$$

Además, es estos casos, tenemos respectivamente que:

$$(i) \quad \mathcal{V}_A = \langle e_1, e_3 \rangle.$$

$$(ii) \quad \mathcal{V}_A = \langle e_2, e_3 \rangle.$$

$$(iii) \quad \mathcal{V}_A = \langle e_2 \rangle \text{ si } \alpha = -2\delta, \text{ o } \mathcal{V}_A = \langle e_1 \rangle \text{ si } \alpha = -\frac{\delta}{2}.$$

$$(iv) \quad \mathcal{V}_A = \left\langle \frac{\gamma^2 - \alpha\delta - 2\delta^2}{\beta(\alpha + \delta)} e_1 + e_2 \right\rangle \text{ si } \alpha \neq \pm \frac{\beta}{\sqrt{10}}, \text{ o}$$

$$\mathcal{V}_A = \left\langle \pm \frac{21 + 19\varepsilon}{(3 + \varepsilon)\sqrt{10}} e_1 + e_2, e_3 \right\rangle \text{ si } \alpha = \pm \frac{\beta}{\sqrt{10}}, \text{ siendo } \varepsilon^2 = 1.$$

$$(v) \quad \mathcal{V}_A = \langle e_3 \rangle.$$

*Demostración.* Usando el Lema 2.27, analizaremos la anulción de cada uno de los factores en la Ecuación (2.19). A lo largo de la demostración deberemos hacer uso de las condiciones  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ .

*Primer caso:*  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ .

Si  $\alpha = 0$  entonces  $\beta = 0$  y la Ecuación (2.20) se reduce a

$$\gamma\xi_2 = 0, \quad (\gamma^2 - 2\delta^2)\xi_2 = 0, \quad (\gamma^2 - 2\delta^2)\xi_3 = 0.$$

Por tanto, (i) se obtiene considerando los Lemas 2.25 y 2.26. Ahora, si  $\alpha \neq 0$  tenemos que  $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ . Si  $\gamma = 0$  entonces  $\delta = 0$  y por la Ecuación (2.20)  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si

$$(2\alpha^2 - \beta^2)\xi_1 = 0, \quad \beta\xi_1 = 0, \quad (2\alpha^2 - \beta^2)\xi_3 = 0,$$

lo que demuestra (ii) considerando de nuevo los Lemas 2.25 y 2.26. Si ahora  $\gamma \neq 0$  entonces necesariamente  $\beta = \varepsilon\alpha$  y  $\delta = \varepsilon\gamma$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ , y por tanto  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si

$$(\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2) = 0, \quad (\alpha + \varepsilon\gamma)\xi_3 = 0.$$

Observemos que en el último caso  $\alpha + \varepsilon\gamma = \alpha + \delta \neq 0$  y así  $\xi$  ha de ser de Killing (ver Lema 2.25).

*Segundo caso:*  $(2\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta) - \beta\gamma = 0$ .

Supongamos que  $\beta = 0$ . En tal caso resulta que  $\alpha = -2\delta \neq 0$  ó  $\alpha = -\frac{\delta}{2} \neq 0$ , y en ambas situaciones tenemos necesariamente que  $\gamma = 0$ . Observemos también que en dichas situaciones el único campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda es el campo de vectores cero (véanse los Lemas 2.25 y 2.26). Analizando la Ecuación (2.20), si  $\alpha = -2\delta$  tenemos que  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ , mientras que para  $\alpha = -\frac{\delta}{2}$  obtenemos que  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ ; con lo que se sigue (iii).

Supongamos ahora que  $\beta \neq 0$ . En este caso resulta que  $\gamma = \frac{(2\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta)}{\beta}$ . Además, necesariamente  $\alpha \neq 0$  y  $\delta = \frac{-5\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon\sqrt{9\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + \beta^4}}{4\alpha}$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ . De este modo, por un cálculo directo tenemos que  $\delta(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0$ , por tanto los Lemas 2.25 y 2.26 implican que el único campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda en esta clase es el campo de vectores cero. Finalmente, por un cálculo largo pero directo a partir de la Ecuación (2.20) se obtienen las dos posibilidades para  $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$  en (iv).

*Tercer caso:*  $2\alpha^2 + 2\delta^2 - (\beta - \gamma)^2 = 0$ .

En este caso, es posible comprobar que  $\alpha - \delta \neq 0$ ,  $\beta = \frac{\varepsilon\alpha\sqrt{2(\alpha^2 + \delta^2)}}{\alpha - \delta}$  y  $\gamma = \frac{\varepsilon\delta\sqrt{2(\alpha^2 + \delta^2)}}{\alpha - \delta}$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ . Con estas expresiones para  $\beta$  y  $\gamma$ , la Ecuación (2.20) se transforma en

$$\begin{aligned} \delta\{\alpha(3\alpha - \delta)\xi_1 - \varepsilon(\alpha - \delta)\sqrt{2(\alpha^2 + \delta^2)}\xi_2\} &= 0, \\ \alpha\{\varepsilon(\alpha - \delta)\sqrt{2(\alpha^2 + \delta^2)}\xi_1 + \delta(\alpha - 3\delta)\xi_2\} &= 0. \end{aligned}$$

Para evitar las situaciones tratadas en los dos primeros casos, consideraremos que  $\alpha\delta \neq 0$ ,  $\alpha \neq 2\delta$  y  $\alpha \neq \frac{\delta}{2}$ ; además, un cálculo directo demuestra que  $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ . Los Lemas 2.25 y 2.26 implican que el único campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda es el campo de vectores cero. Finalmente, por un análisis directo a partir de las ecuaciones anteriores considerando que  $\alpha \neq 2\delta$  y  $\alpha \neq \frac{\delta}{2}$  se demuestra que  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , de donde se sigue (v).  $\square$

### iii) Tipo IV.2

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.2 viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  verificando  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = 1$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ . De este modo, la conexión de Levi-Civita y la derivada de Lie de la métrica están determinadas por

$$\begin{aligned}\Phi_{11}^3 &= \Phi_{13}^1 = \alpha, & \Phi_{12}^3 &= \Phi_{13}^2 = \Phi_{21}^3 = \Phi_{23}^1 = \frac{\beta+\gamma}{2}, \\ \Phi_{22}^3 &= \Phi_{23}^2 = \delta, & \Phi_{31}^2 &= -\Phi_{32}^1 = -\frac{\beta-\gamma}{2},\end{aligned}$$

y por

$$(2.21) \quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)_{11} &= 2\alpha\xi_3, & (\mathcal{L}_\xi g)_{22} &= 2\delta\xi_3, & (\mathcal{L}_\xi g)_{12} &= (\beta + \gamma)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{13} &= -\alpha\xi_1 - \gamma\xi_2, & (\mathcal{L}_\xi g)_{23} &= -\beta\xi_1 - \delta\xi_2.\end{aligned}$$

Por su parte, la derivada de Lie de la conexión de Levi-Civita está dada por

$$(2.22) \quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= \alpha(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2)e_1 + \alpha(\beta\xi_1 + \delta\xi_2)e_2 + (2\alpha^2 + \beta(\beta + \gamma))\xi_3e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= \delta(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2)e_1 + \delta(\beta\xi_1 + \delta\xi_2)e_2 + (2\delta^2 + \gamma(\beta + \gamma))\xi_3e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= -(\alpha^2 + \beta^2)\xi_1e_1 - (\gamma^2 + \delta^2)\xi_2e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= \frac{1}{2}(\beta + \gamma)(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2)e_1 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma)(\beta\xi_1 + \delta\xi_2)e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha\beta + \gamma\delta)\xi_3e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2)\xi_3e_1 - \frac{1}{2}(\alpha\beta + \gamma\delta)\xi_3e_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}((2\alpha^2 + \beta(\beta + \gamma))\xi_1 - \delta(\beta - \gamma)\xi_2)e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= -\frac{1}{2}(\alpha\beta + \gamma\delta)\xi_3e_1 - \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2)\xi_3e_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\beta(\alpha + \delta)\xi_1 + (\gamma^2 + 2\delta^2 + \beta\gamma)\xi_2)e_3.\end{aligned}$$

De este modo, a partir de estas ecuaciones obtenemos los siguientes resultados

**Lema 2.29.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.2 admite campos de vectores de Killing invariantes a la izquierda distintos de cero si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones*

$$(i) \quad \alpha = \beta = 0 \text{ y } \delta \neq 0. \quad (ii) \quad \gamma = \delta = 0 \text{ y } \alpha \neq 0.$$

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que

$$(i) \quad \mathcal{V}_K = \langle e_1 \rangle. \quad (ii) \quad \mathcal{V}_K = \langle e_2 \rangle.$$

*Demostración.* Consideremos un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Puesto que  $\alpha + \delta \neq 0$ , entonces la anulaci3n de la Ecuaci3n (2.21) es equivalente a

$$(2.23) \quad \xi_3 = 0, \quad \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0, \quad \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0.$$

Adem3s, como  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ , si  $\alpha = 0$  entonces tambi3n tenemos  $\beta = 0$  y se sigue que  $\xi$  es de Killing si y s3lo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , lo que demuestra (i). Ahora bien, si  $\alpha \neq 0$  tenemos que  $\gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha}$  y se sigue que  $\xi$  es de Killing si y s3lo si  $\xi_3 = 0$ ,  $\xi_1 = \frac{\beta\delta}{\alpha^2}\xi_2$  y  $\delta(\alpha^2 + \beta^2)\xi_2 = 0$ . Por tanto,  $\delta = \gamma = 0$  y  $\xi$  es de Killing si y s3lo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ , con lo que se obtiene (ii).  $\square$

**Lema 2.30.** *Cualquier campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda en un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.2 es de Killing.*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.22) implica

$$\begin{aligned} g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_1) + g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_1) &= (\alpha + \delta)(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2), \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_2) + g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_2) &= (\alpha + \delta)(\beta\xi_1 + \delta\xi_2), \\ g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11}, e_3) + g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22}, e_3) &= -(2\alpha^2 + 2\delta^2 + (\beta + \gamma)^2)\xi_3. \end{aligned}$$

Si suponemos que  $\xi$  es afín Killing, y puesto que  $\alpha + \delta \neq 0$ , se sigue que

$$\xi_3 = 0, \quad \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0, \quad \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0.$$

Ahora bien, estas igualdades coinciden con las de la Ecuación (2.23), y por tanto  $\xi$  ha de ser de Killing.  $\square$

**Teorema 2.31.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.2 admite un campo de vectores 1-armónico invariante a la izquierda no afín Killing si y sólo si verifica alguna de las siguientes condiciones*

(i)  $\beta = \gamma = 0$  y  $\delta = -2\alpha \neq 0$ .

(ii)  $\beta = \gamma = 0$  y  $\delta = -\frac{\alpha}{2} \neq 0$ .

(iii)  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ ,  $\gamma = \frac{(2\alpha+\delta)(\alpha+2\delta)}{\beta} (\neq 0)$ ,  $\delta = \frac{-5\alpha^2 - \beta^2 + \varepsilon\sqrt{9\alpha^4 + \beta^4 + 10\alpha^2\beta^2}}{4\alpha} (\neq 0)$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ .

Además, en estos casos, se tiene

(i)  $\mathcal{V}_A = \langle e_1 \rangle$ .

(ii)  $\mathcal{V}_A = \langle e_2 \rangle$ .

(iii)  $\mathcal{V}_A = \langle e_1 + \frac{2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\delta}{\delta(\beta - \gamma)} e_2 \rangle$ .

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.22) implica que

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}_\xi \nabla &= ((2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\delta)\xi_1 - \delta(\beta - \gamma)\xi_2) e_1 \\ &\quad + (\beta(\alpha + \delta)\xi_1 + (\gamma^2 + 2\delta^2 + \alpha\delta)\xi_2) e_2 \\ &\quad + (2\alpha^2 + (\beta + \gamma)^2 + 2\delta^2)\xi_3 e_3. \end{aligned}$$

Puesto que  $\alpha + \delta \neq 0$ , se sigue que  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si

$$(2.24) \quad \begin{aligned} (2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\delta)\xi_1 - \delta(\beta - \gamma)\xi_2 &= 0, & \xi_3 &= 0, \\ \beta(\alpha + \delta)\xi_1 + (\gamma^2 + 2\delta^2 + \alpha\delta)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene solución no trivial si y sólo si

$$(2.25) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot ((2\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta) - \beta\gamma) = 0.$$

Ahora bien, puesto que  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ , si el primer factor en la Ecuación (2.25) se anula entonces  $\alpha = \beta = 0$  o  $\gamma = \delta = 0$ . Si  $\alpha = \beta = 0$ , la Ecuación (2.24) se verifica si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ . Por otra parte, si  $\gamma = \delta = 0$ , entonces la Ecuación (2.24) se verifica si y sólo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ . Por tanto, por el Lema 2.29 resulta que en cualquiera de los dos casos  $\xi$  es un campo de vectores de Killing.

Analizamos ahora el segundo factor de la Ecuación (2.25). Supongamos primero que  $\beta = 0$ ; entonces  $\delta = -2\alpha$  o  $\delta = -\frac{\alpha}{2}$ , y en cualquiera de estas dos situaciones se tiene necesariamente que  $\gamma = 0$  ya que  $\alpha\gamma + \beta\delta = \alpha\gamma = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ . Así, de la Ecuación (2.24) se sigue que para  $\delta = -2\alpha$  el campo de vectores  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , mientras que para  $\delta = -\frac{\alpha}{2}$  resulta que  $\xi$  es 1-armónico si y sólo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ ; por tanto, en vista de los Lemas 2.29 y 2.30, se obtienen (i) e (ii). Finalmente analizamos el caso  $\beta \neq 0$ . Con esta consideración tenemos que necesariamente  $\alpha \neq 0$  ya que  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ ,  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ . De este modo, la anulación del segundo factor en la Ecuación (2.25) junto con la relación  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$  implican que

$$\gamma = \frac{(2\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta)}{\beta}, \quad \delta = \frac{-5\alpha^2 - \beta^2 + \varepsilon\sqrt{9\alpha^4 + \beta^4 + 10\alpha^2\beta^2}}{4\alpha},$$

siendo  $\varepsilon^2 = 1$ . Así, a partir de los Lemas 2.29 y 2.30, y debido a que la primera y la segunda ecuación en (2.24) contienen la misma información, se obtiene (iii).  $\square$

#### iv) Tipo IV.3

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.3 está determinada respecto a una base pseudo-ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  con

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma = 0$ . De este modo, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^2 &= \Phi_{13}^1 = \alpha, & \Phi_{12}^2 &= -\Phi_{13}^3 = \Phi_{21}^2 = \Phi_{23}^1 = -\Phi_{31}^3 = -\Phi_{32}^1 = \frac{\gamma}{2}, \\ \Phi_{31}^2 &= \Phi_{33}^1 = -\beta, & \Phi_{32}^2 &= -\Phi_{33}^3 = -\delta. \end{aligned}$$

Y así, la derivada de Lie de la métrica y la de la conexión de Levi-Civita están dadas por

$$(2.26) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{11} &= 2\alpha\xi_3, & (\mathcal{L}_\xi g)_{33} &= 2(\beta\xi_1 + \delta\xi_2), & (\mathcal{L}_\xi g)_{12} &= \gamma\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi g)_{13} &= -\alpha\xi_1 - \gamma\xi_2 - \beta\xi_3, & (\mathcal{L}_\xi g)_{23} &= -\delta\xi_3, \end{aligned}$$

y por

$$(2.27) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} &= (2\alpha^2 + \beta\gamma - \alpha\delta)\xi_3 e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} &= \gamma^2 \xi_3 e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= (\alpha(\delta - \alpha)\xi_1 + \gamma\delta\xi_2 + \alpha\beta\xi_3) e_1 \\ &\quad + (\beta(\alpha + 2\delta)\xi_1 + (\beta\gamma + 2\delta^2)\xi_2 + \beta^2\xi_3) e_2 + \gamma^2 \xi_2 e_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{12} &= -\frac{1}{2}\gamma^2 \xi_3 e_1, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= -\frac{1}{2}\gamma(\gamma\xi_2 - \beta\xi_3) e_1 - ((\alpha^2 + \beta\gamma)\xi_1 + \gamma\delta\xi_2 + \alpha\beta\xi_3) e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{23} &= \frac{1}{2}\gamma\delta\xi_3 e_1 - \frac{1}{2}\gamma(\gamma\xi_2 + \beta\xi_3) e_2 - \frac{1}{2}\gamma^2 \xi_3 e_3. \end{aligned}$$

De este modo resulta que

**Lema 2.32.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.3 admite campos de vectores de Killing invariantes a la izquierda distinto de cero si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

- (i)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ .
- (ii)  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ .
- (iii)  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\delta = 0$ .

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que:

$$(i) \mathcal{V}_K = \langle e_1 \rangle. \quad (ii) \mathcal{V}_K = \langle e_1 - \frac{\beta}{\delta} e_2 \rangle. \quad (iii) \mathcal{V}_K = \langle e_2 \rangle.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $\alpha + \delta \neq 0$ , la Ecuación (2.26) implica que la condición de ser de Killing para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  está determinada por

$$\xi_3 = 0, \quad \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0, \quad \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0.$$

Como  $\alpha\gamma = 0$ , si suponemos  $\alpha = 0$  entonces necesariamente se tiene que  $\delta \neq 0$ , y por tanto las ecuaciones anteriores se reducen a  $\xi_3 = 0$ ,  $\xi_2 = -\frac{\beta}{\delta}\xi_1$  y  $\gamma\xi_2 = 0$ . De este modo se obtienen (i) e (ii). Ahora bien, si  $\alpha \neq 0$  entonces  $\gamma = 0$  y  $\xi$  es de Killing si y sólo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  y  $\delta\xi_2 = 0$ , de donde se sigue (iii).  $\square$

**Lema 2.33.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.3 admite campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda no de Killing si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

(i)  $\alpha = 0, \gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ .

(ii)  $\gamma = 0$  y  $\delta = 2\alpha \neq 0$ .

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que

$$(i) \mathcal{V}_{\mathcal{AK}} = \langle e_1 - \frac{\beta}{\delta}e_2, -\frac{\beta^2}{2\delta^2}e_2 + e_3 \rangle. \quad (ii) \mathcal{V}_{\mathcal{AK}} = \langle -\frac{\beta}{\alpha}e_1 + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}e_2 + e_3 \rangle.$$

*Demostración.* Consideramos un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Puesto que  $\alpha\gamma = 0$  podemos considerar diferentes situaciones. Comenzamos estudiando el caso  $\alpha = \gamma = 0$ . En esta situación, la Ecuación (2.27) se reduce a

$$(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} = (2\delta(\beta\xi_1 + \delta\xi_2) + \beta^2\xi_3) e_2.$$

Como  $\alpha = 0$  se tiene necesariamente que  $\delta \neq 0$ , y por tanto  $\xi$  es afín Killing si y sólo si  $\xi_2 = -\frac{\beta}{\delta}\xi_1 - \frac{\beta^2}{2\delta^2}\xi_3$ , lo cual junto con el Lema 2.32 demuestra (i). Supongamos ahora que  $\alpha = 0$  y  $\gamma \neq 0$ . En este caso, obtenemos de la Ecuación (2.27) las relaciones

$$(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{22} = \gamma^2\xi_3e_2, \quad g((\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33}, e_1) = \gamma\delta\xi_2,$$

las cuales implican  $\xi_2 = \xi_3 = 0$  (observemos que con estas consideraciones  $\delta$  es necesariamente no nulo). Bajo estas condiciones  $\xi$  es afín Killing si y sólo si  $\beta\xi_1 = 0$ , y por tanto si y sólo si  $\beta = 0$ . De este modo resulta por el Lema 2.32 que  $\xi$  es necesariamente de Killing.

Finalmente analizamos el caso  $\alpha \neq 0$  y  $\gamma = 0$ . En esta situación la Ecuación (2.27) implica que

$$(\mathcal{L}_\xi \nabla)_{11} = \alpha(2\alpha - \delta)\xi_3e_2, \quad (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} = -\alpha(\alpha\xi_1 + \beta\xi_3)e_2.$$

Ahora bien, si  $\delta \neq 2\alpha$  entonces  $\xi_3 = 0$  y  $\xi_1 = 0$ , y la condición de ser afín Killing se reduce a  $\delta\xi_2 = 0$ . Así, se tiene que  $\delta = 0$  y por el Lema 2.32 que  $\xi$  es un campo de vectores de Killing. Por otra parte, si  $\delta = 2\alpha$  entonces la Ecuación (2.27) se reduce a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{33} &= \alpha(\alpha\xi_1 + \beta\xi_3)e_1 + (5\alpha\beta\xi_1 + 8\alpha^2\xi_2 + \beta^2\xi_3)e_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \nabla)_{13} &= -\alpha(\alpha\xi_1 + \beta\xi_3)e_2, \end{aligned}$$

de lo que se sigue que  $\xi$  es afín Killing si y sólo si

$$\xi_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\xi_3, \quad \xi_2 = \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\xi_3.$$

Por tanto, considerando ahora el Lema 2.32, se obtiene lo enunciado en (ii).  $\square$

**Teorema 2.34.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.3 admite un campo de vectores 1-armónico invariante a la izquierda no afín Killing si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

(i)  $\alpha = \gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ .

(ii)  $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$  y  $\delta \neq 0$ .

(iii)  $\gamma = 0, \alpha \neq 0, \delta \neq 2\alpha$ .

(iv)  $\gamma = 0$  y  $\delta = 2\alpha \neq 0$ .

Además, en estos caso, tenemos respectivamente que

(i)  $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .

(ii)  $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \langle e_1 \rangle$ .

(iii)  $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \langle e_1, e_2 \rangle$ .

(iv)  $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la Ecuación (2.27) implica que

$$\text{tr } \mathcal{L}_{\xi} \nabla = -\gamma \delta \xi_3 e_1 + (\gamma^2 \xi_2 + (2\alpha^2 + 2\beta\gamma - \alpha\delta) \xi_3) e_2 + \gamma^2 \xi_3 e_3.$$

En lo que sigue recordemos que  $\alpha\gamma = 0$  y consideremos los Lemas 2.32 y 2.33. Así, si  $\alpha = \gamma = 0$  entonces  $\text{tr } \mathcal{L}_{\xi} \nabla = 0$ , de donde se sigue (i). Por su parte, si  $\alpha = 0$  y  $\gamma \neq 0$ , entonces la expresión anterior para  $\text{tr } \mathcal{L}_{\xi} \nabla$  se anula si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , y por tanto si  $\beta = 0$  resulta que el campo de vectores  $\xi$  es de Killing, mientras que para  $\beta \neq 0$  obtenemos (ii). Finalmente, si suponemos  $\alpha \neq 0$  y  $\gamma = 0$  se tiene que  $\text{tr } \mathcal{L}_{\xi} \nabla = \alpha(2\alpha - \delta)\xi_3 e_2$ , de donde se siguen (iii) y (iv).  $\square$

Presentamos los resultados que hemos obtenido en esta sección en la siguiente tabla.

<i>Grupos de Lie Lorentzianos no unimodulares</i>			
<i>Tipo</i>	<i>No cero Killing</i>	<i>No Killing afín Killing</i>	<i>No afín Killing 1-armónico</i>
$\mathfrak{S}$	$\times$	$\times$	$\gamma = \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
IV.1	$\alpha = \beta = 0, \delta \neq 0$ $\left[ \begin{array}{l} \alpha(\alpha + \delta) \neq 0, \gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}, \\ \delta(\alpha^2 - \beta^2) = 0, \\ \times \end{array} \right]$	$\times$ $\left[ \begin{array}{l} \times \\ \times \end{array} \right]$	Si $\gamma^2 = 2\delta^2$ $\left[ \begin{array}{l} \text{Si } \delta = 0, \\ \beta^2 = 2\alpha^2 \end{array} \right]$ Teorema 2.28, (iii), (iv), (v)
IV.2	$\alpha = \beta = 0, \delta \neq 0$ $\gamma = \delta = 0, \alpha \neq 0$ $\times$	$\times$ $\times$ $\times$	$\times$ $\times$ Teorema 2.31, (i), (ii), (iii)
IV.3	$\alpha = 0, \beta = 0, \delta \neq 0$ $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0, \delta \neq 0$ $\alpha \neq 0, \gamma = 0, \delta = 0$ $\times$ $\times$ $\times$	Si $\gamma = 0$ $\checkmark$ $\times$ $\gamma = 0, \delta = 2\alpha \neq 0$ $\times$ $\times$	$\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$ Teorema 2.34, (ii) Teorema 2.34, (iii) + $\delta \neq 0$

### 2.3.3. Observaciones finales

#### Caso Riemanniano

En el caso Riemanniano, los grupos de Lie unimodulares se corresponden con los de Tipo Ia, mientras que en el caso no unimodular se corresponden con los Tipos  $\mathfrak{S}$  y IV.2. Omitiremos los detalles a continuación puesto que los resultados se obtienen como en las Secciones 2.3.1 y 2.3.2.

Con respecto al caso unimodular, observemos que como consecuencia del Teorema 2.16 se tiene  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = \mathcal{V}_{\mathcal{AK}} = \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$  para grupos de Lie Lorentzianos unimodulares de Tipo Ia. El Teorema 2.16 sigue siendo cierto en el caso Riemanniano, es decir, se tiene que cualquier campo de vectores 1-armónico invariante a la izquierda es un campo de vectores de Killing en el caso unimodular de Tipo Ia.

Los grupos de Lie no unimodulares de Tipo  $\mathfrak{S}$  no admiten ningún campo de vectores 1-armónico invariante a la izquierda no cero en el caso Riemanniano, a diferencia del caso Lorentziano tratado en el Teorema 2.24. Finalmente, el comportamiento de los de Tipo IV.2 es exactamente el mismo en el caso Riemanniano y en el Lorentziano, puesto que el Teorema 2.31 sigue siendo cierto en la clase Riemanniana.

### Campos de vectores afín Killing y homotéticos

Los grupos de Lie Lorentzianos de Tipo II (con  $\alpha = \beta = 0$ ) y de Tipo IV.3 (con  $\alpha = \gamma = 0 \neq \delta$  o  $\gamma = 0 \neq \delta = 2\alpha$ ) admiten campos de vectores afín Killing que no son de Killing (véanse los Lemas 2.19 y 2.33). Además, mientras que los grupos de Lie de Tipo II con  $\alpha = \beta = 0$  y los grupos de Tipo IV.3 con  $\alpha = \gamma = 0$  son llanos, observemos que los grupos de Lie correspondientes a las álgebras de Lie de Tipo IV.3 con  $\gamma = 0 \neq \delta = 2\alpha$  no lo son. Esto demuestra que, a diferencia de lo que ocurre en el caso Riemanniano (véase [53]), existen variedades Lorentzianas admitiendo transformaciones afín Killing que no son llanas. Además, observemos que esta familia de álgebras de Lie se corresponde con el único solitón de Yamabe invariante a la izquierda no trivial, como se vio en el Teorema 2.11.

### Solitones de Ricci invariantes en grupos de Lie Lorentzianos

Recientemente, la propiedad de armonicidad ha sido relacionada con la existencia de solitones de Ricci (véase [82]), demostrando que cualquier solitón de Ricci es un campo de vectores 1-armónico.

Los solitones de Ricci invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres han sido estudiados en [13], donde se demuestra que cualquiera de estos grupos ha de corresponderse con uno de los siguientes

- (a) Un grupo de Lie unimodular de Tipo II con  $\alpha = 0 \neq \beta$  o con  $\alpha = \beta$ . Además, los solitones de Ricci invariantes a la izquierda están dados por  $\xi = -\beta e_1$  si  $\alpha = 0 \neq \beta$ , y  $\xi = -\frac{1}{2}\beta e_1 + \kappa(e_2 + e_3)$  para cualquier  $\kappa \in \mathbb{R}$  si  $\alpha = \beta$ .
- (b) Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo III para cualquier valor de  $\alpha$ . En este caso, los solitones de Ricci invariantes a la izquierda están dados por  $\xi = \alpha e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)$ .
- (c) Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.3 con  $\gamma = 0$ . Si  $\delta = 2\alpha \neq 0$  entonces los solitones de Ricci están dados por  $\xi = -\frac{2\beta\lambda}{\delta^2} e_1 + \frac{16\beta^2\lambda - \delta^4}{8\delta^3} e_2 + \frac{\lambda}{\delta} e_3$ , mientras que se reducen a  $\xi = \frac{\alpha(\alpha - \delta)}{2\delta} e_2$  si  $\alpha = \gamma = 0$ .

Como consecuencia de los resultados obtenidos en las Secciones 2.3.1 y 2.3.2 (más precisamente, de los Teoremas 2.20, 2.22 y 2.34), se sigue que la clase de los campos de vectores 1-armónicos invariantes a la izquierda es estrictamente más grande que la clase de los solitones de Ricci en cualquiera de los tres casos anteriores.

## 2.4. Colineaciones de Ricci

Las simetrías han sido ampliamente estudiadas por su gran interés desde el punto de vista tanto matemático como físico. Con el término “simetría” aquí se hace referencia a un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos de la variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$  conservando ciertos objetos matemáticos. De este modo, las simetrías pueden ser consideradas

como campos de vectores  $\xi$  conservando algún tensor  $\Phi$  definido en toda la variedad, como por ejemplo el tensor métrico. La conservación de un objeto geométrico se entiende como la anulación de la derivada de Lie de dicho objeto geométrico en la dirección del campo de vectores  $\xi$ , i.e., como la condición  $\mathcal{L}_\xi \Phi = 0$ . Los tipos de simetría más conocidos incluyen isometrías, homotecias y transformaciones conformes. No obstante, existe otro tipo de simetrías cuyo estudio es bastante reciente en la literatura, las conocidas como colineaciones de Ricci. Dada una variedad pseudo-Riemanniana  $(M, g)$ , se dice que un campo de vectores  $\xi$  en  $M$  es una *colineación de Ricci* si  $\mathcal{L}_\xi \rho = 0$ . Nuestro propósito en esta sección es determinar todas las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en los grupos de Lie de dimensión tres. Puesto que la conexión y el tensor de Ricci están construídos a partir del tensor métrico, este hereda sus simetrías. Así, todo campo de vectores de Killing es un campo afín Killing y una colineación de Ricci pero el recíproco puede no ser cierto; por tanto, prestaremos especial atención a la existencia de las colineaciones de Ricci no afín Killing. Con este objetivo consideraremos los subespacios de campos de vectores de Killing y afín Killing determinados en la Sección 2.3. Además, observemos que cualquier campo de vectores homotético es una colineación de Ricci (y por tanto también lo es todo solitón de Yamabe con curvatura escalar constante como vimos en la Sección 2.2). De este modo, centraremos nuestra atención en el caso *propio*, i.e., en las colineaciones de Ricci que no son campos de vectores de Killing ni homotéticos.

Estructuramos el final de este capítulo del siguiente modo. En la Sección 2.4.1 analizamos la existencia de colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos unimodulares, mientras que el caso Lorentziano no unimodular es considerado en la Sección 2.4.2. En cada caso determinamos el correspondiente subespacio vectorial de las colineaciones de Ricci, y por tanto podemos compararlos con los subespacios generados por los campos de vectores de Killing y afín Killing invariantes a la izquierda obtenidos en la sección anterior. Finalmente, también en la Sección 2.4.2 (Observación 2.43), estudiamos el caso Riemanniano; para el cual omitiremos los detalles puesto que los resultados se obtienen esencialmente como en las Secciones 2.4.1 y 2.4.2.

Al igual que en la sección anterior, denotaremos por  $\mathcal{V}_K$  y  $\mathcal{V}_{AK}$  los espacios vectoriales de los campos de vectores de Killing y afín Killing invariantes a la izquierda y, además, denotaremos por  $\mathcal{V}_{CR}$  el espacio vectorial de las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en un grupo de Lie.

### 2.4.1. Caso unimodular

En esta sección consideramos la existencia de colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos unimodulares de dimensión tres cuyas álgebras de Lie correspondientes fueron introducidas en la Sección 1.2.1.

**i) Tipo Ia**

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo Ia viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por

$$[e_1, e_2] = -\gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

En este primer caso el tensor de Ricci está determinado por las componentes

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= -\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma), & \rho_{22} &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma), \\ \rho_{33} &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma), \end{aligned}$$

las cuales, para un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = \sum \xi_i e_i$ , nos permiten determinar los términos no nulos de la derivada de Lie del tensor de Ricci,  $\mathcal{L}_\xi \rho$ , resultando que

$$(2.28) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)\xi_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} &= \frac{1}{2}(\beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)\xi_1. \end{aligned}$$

Como vimos en el Lema 2.15, un grupo de Lie Lorentziano de Tipo Ia admite campos de vectores de Killing invariantes a la izquierda distintos de cero si y sólo si se verifica alguna de estas cuatro condiciones: (i)  $\alpha = \beta = \gamma$ , (ii)  $\alpha = \beta \neq \gamma$ , (iii)  $\beta = \gamma \neq \alpha$ , (iv)  $\alpha = \gamma \neq \beta$ . Además, se sigue del Teorema 2.16 que todo campo de vectores invariante a la izquierda es afín Killing si y sólo si es de Killing. Haciendo uso de este resultado, determinamos ahora las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing.

**Teorema 2.35.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo Ia admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si se verifica alguna de las siguiente condiciones:*

- (i)  $\alpha = -\beta - \gamma$  y  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .
- (ii)  $\alpha = 0$  y  $\beta = \varepsilon\gamma \neq 0$ , o  $\beta = 0$  y  $\gamma = \varepsilon\alpha \neq 0$ , o  $\gamma = 0$  y  $\beta = \varepsilon\alpha \neq 0$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ .
- (iii)  $\alpha = \beta + \gamma$ ,  $\beta \neq \gamma$  y  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .
- (iv)  $\beta = \gamma + \alpha$ ,  $\gamma \neq \alpha$  y  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .
- (v)  $\gamma = \alpha + \beta$ ,  $\alpha \neq \beta$  y  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que:

- (i)  $\mathcal{V}_{CR} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .
- (ii)  $\mathcal{V}_{CR} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .

$$(iii) \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_1 \rangle.$$

$$(iv) \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_2 \rangle.$$

$$(v) \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_3 \rangle.$$

*Demostración.* De la Ecuación (2.28) se sigue que un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$(2.29) \quad \begin{aligned} (\beta - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)\xi_3 &= 0, & (\alpha - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)\xi_2 &= 0, \\ (\beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)\xi_1 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene solución no trivial si y sólo si

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = 0.$$

A continuación analizamos la anulación de cada uno de estos factores por separado.

*Primer caso:*  $\alpha = -\beta - \gamma$ .

Observemos que la Ecuación (2.29) se verifica trivialmente en este caso, independientemente del campo de vectores  $\xi$  considerado, lo que demuestra (i) e (ii) para  $\varepsilon = -1$ .

*Segundo caso:*  $\alpha = \beta + \gamma$ .

Si suponemos  $\alpha = 0$  entonces este caso coincide con el primero. Por tanto podemos considerar que  $\alpha \neq 0$ . Ahora bien, si  $\alpha = \beta + \gamma$  entonces la Ecuación (2.29) se reduce a

$$\beta\gamma\xi_2 = \beta\gamma\xi_3 = 0.$$

De donde  $\beta = 0$  o  $\gamma = 0$ , y en ambos casos resulta que  $\mathcal{L}_\xi\rho = 0$  para cualquier campo de vectores  $\xi$ . De este modo se obtienen los casos  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \alpha$ , o  $\gamma = 0$ ,  $\beta = \alpha$  en (ii). Por otra parte, si  $\beta\gamma \neq 0$  entonces  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , lo cual demuestra (iii); observemos que excluimos la situación  $\beta = \gamma$  puesto que en tal caso el campo de vectores  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.15).

*Tercer caso:*  $\beta = \gamma + \alpha$ .

Observemos que si  $\beta = 0$  o  $\gamma = 0$ , entonces este caso se incluye entre los anteriores. Así, podemos considerar que  $\beta\gamma \neq 0$ . Ahora bien, si  $\beta = \gamma + \alpha$  entonces la Ecuación (2.29) se reduce a

$$\alpha\xi_1 = \alpha\xi_3 = 0.$$

Como consecuencia, si suponemos que  $\alpha = 0$  entonces resulta  $\beta = \gamma$  y tenemos el caso que restaba en (ii). Por otra parte, si consideramos  $\alpha \neq 0$ , entonces el campo de vectores  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ , con lo que se obtiene (iv). Hemos excluido la situación  $\gamma = \alpha$  puesto que en tal caso  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.15).

*Cuarto caso:*  $\gamma = \alpha + \beta$ .

Podemos suponer  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  con el fin de evitar las situaciones consideradas en los casos previos. Por tanto, si  $\gamma = \alpha + \beta$  entonces la Ecuación (2.29) implica que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . Excluyendo ahora los campos de vectores de Killing, que aparecen para  $\alpha = \beta$  (véase el Lema 2.15), se obtiene (v).

*Quinto caso:*  $\alpha = \beta$  (ó  $\alpha = \gamma$ , o  $\beta = \gamma$ ).

Comenzamos suponiendo que  $\alpha = \beta$ . En este caso, la Ecuación (2.29) se reduce a

$$\gamma(2\beta + \gamma)(\beta - \gamma)\xi_1 = \gamma(2\beta + \gamma)(\beta - \gamma)\xi_2 = 0.$$

Ahora bien, si  $\gamma = 0$  entonces  $\alpha = \beta + \gamma$  y dicha situación está incluida en el segundo caso. Si  $\gamma = -2\beta$  entonces  $\alpha = -\beta - \gamma$  y nos encontramos en el primer caso. Si  $\beta = \gamma$ , entonces  $\alpha = \beta = \gamma$  y el campo de vectores  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.15). Finalmente, si  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma \neq -2\beta$  y  $\gamma \neq \beta$  entonces el campo de vectores  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , y por tanto  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.15).

Finalmente, si suponemos  $\alpha = \gamma$  entonces la Ecuación (2.29) implica que

$$\beta(\beta + 2\gamma)(\beta - \gamma)\xi_1 = \beta(\beta + 2\gamma)(\beta - \gamma)\xi_3 = 0,$$

mientras que si  $\beta = \gamma$  la Ecuación (2.29) se reduce a

$$\alpha(\alpha + 2\gamma)(\alpha - \gamma)\xi_2 = \alpha(\alpha + 2\gamma)(\alpha - \gamma)\xi_3 = 0.$$

Procediendo como en el caso  $\alpha = \beta$ , y eliminando las situaciones tratadas previamente, se demuestra que cualquier colineación de Ricci es necesariamente un campo de vectores de Killing, lo que termina la demostración.  $\square$

## ii) Tipo Ib

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo Ib está determinada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por

$$[e_1, e_2] = \beta e_2 - \gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\gamma e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

con  $\beta \neq 0$ . De este modo, el tensor de Ricci está determinado por

$$\rho_{11} = -\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\beta^2, \quad \rho_{22} = -\rho_{33} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\gamma), \quad \rho_{23} = -\beta(\alpha - 2\gamma),$$

y por un cálculo directo se demuestra que la derivada de Lie del tensor de Ricci está dada por

$$(2.30) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \rho)_{22} &= (\mathcal{L}_\xi \rho)_{33} = -\beta(\alpha^2 - 4\gamma^2)\xi_1, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= \frac{1}{2}\beta(\alpha^2 - 4\gamma^2)\xi_2 - \frac{1}{2}(\alpha + 2\gamma)(\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\gamma)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= \frac{1}{2}(\alpha + 2\gamma)(\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\gamma)\xi_2 + \frac{1}{2}\beta(\alpha^2 - 4\gamma^2)\xi_3. \end{aligned}$$

A continuación determinamos las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda. Se sigue del Teorema 2.17 que un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo Ib no admite campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda distintos de cero. De este modo, las colineaciones de Ricci distintas de cero no son campos de vectores afín Killing.

**Teorema 2.36.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo Ib admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

$$(i) \quad \alpha = -2\gamma, \quad (ii) \quad \alpha = 2\gamma \neq 0.$$

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que

$$(i) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle. \quad (ii) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \langle e_1 \rangle.$$

*Demostración.* La Ecuación (2.30) implica que el campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\begin{aligned} \beta(\alpha^2 - 4\gamma^2)\xi_2 - (\alpha + 2\gamma)(\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\gamma)\xi_3 &= 0, & (\alpha^2 - 4\gamma^2)\xi_1 &= 0, \\ (\alpha + 2\gamma)(\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\gamma)\xi_2 + \beta(\alpha^2 - 4\gamma^2)\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene solución no trivial si y sólo si  $(\alpha^2 + 4\beta^2)(\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2)(\alpha - 2\gamma)(\alpha + 2\gamma) = 0$ , o equivalentemente,  $\alpha = \pm 2\gamma$  (puesto que  $\beta \neq 0$ ). Ahora bien, si suponemos  $\alpha = -2\gamma$  se obtiene de la Ecuación (2.30) la anulación de  $\mathcal{L}_{\xi}\rho$ , independientemente de  $\xi$ , y por tanto obtenemos (i). Finalmente supongamos que  $\alpha = 2\gamma$ . En dicho caso observemos que podemos suponer  $\gamma \neq 0$  puesto que, en caso contrario, estaríamos en la situación previa. De este modo, para  $\alpha = 2\gamma \neq 0$  las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\gamma(\beta^2 + \gamma^2)\xi_2 = \gamma(\beta^2 + \gamma^2)\xi_3 = 0,$$

y por tanto  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , de donde se sigue (ii).  $\square$

### iii) Tipo II

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo II viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)e_3, \quad [e_1, e_3] = -\left(\beta + \frac{1}{2}\right)e_2 - \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

En este caso, el tensor de Ricci está determinado por

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= -\frac{1}{2}\alpha^2, & \rho_{22} &= \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha - 2\beta), \\ \rho_{33} &= -\frac{1}{2}(\alpha - 1)(\alpha - 2\beta), & \rho_{23} &= -\frac{1}{2}\alpha + \beta, \end{aligned}$$

y la derivada de Lie del tensor de Ricci,  $\mathcal{L}_\xi \rho$ , está dada por

$$(2.31) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \rho)_{22} &= (\mathcal{L}_\xi \rho)_{33} = -(\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} = -\frac{1}{2}(\alpha^2 - 4\beta^2)\xi_1, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4\beta^2)\xi_2 - \frac{1}{4}(\alpha + 2\beta)\{\alpha(2\alpha - 2\beta + 1) - 2\beta\}\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= \frac{1}{4}(\alpha + 2\beta)\{\alpha(2\alpha - 2\beta - 1) + 2\beta\}\xi_2 + \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4\beta^2)\xi_3. \end{aligned}$$

Por los Lemas 2.18 y 2.19 tenemos que un grupo de Lie Lorentziano de Tipo II admite campos de vectores de Killing invariantes a la izquierda no cero si y sólo si  $\alpha = \beta$ , y admite campos de vectores invariantes a la izquierda afín Killing y no Killing si y sólo si  $\alpha = \beta = 0$ . Usando estos resultados, determinamos las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing.

**Teorema 2.37.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo II admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones*

$$(i) \quad \alpha = 0.$$

$$(ii) \quad \alpha = \pm 2\beta \neq 0.$$

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que

$$(i) \quad \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \text{ si } \beta = 0, \text{ o } \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_2 + e_3 \rangle \text{ si } \beta \neq 0.$$

$$(ii) \quad \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_1 \rangle \text{ si } \alpha = 2\beta, \text{ o } \mathcal{V}_{C\mathcal{R}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \text{ si } \alpha = -2\beta.$$

*Demostración.* Por la Ecuación (2.31) resulta que un campo de vectores invariante a la izquierda,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , es una colineación de Ricci si y sólo si

$$(2.32) \quad \begin{aligned} (\alpha^2 - 4\beta^2)\xi_1 &= 0, \\ (\alpha^2 - 4\beta^2)\xi_2 - (\alpha + 2\beta)\{\alpha(2\alpha - 2\beta + 1) - 2\beta\}\xi_3 &= 0, \\ (\alpha + 2\beta)\{\alpha(2\alpha - 2\beta - 1) + 2\beta\}\xi_2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales homogéneo en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tiene solución no trivial si y sólo si

$$\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) = 0.$$

Analizamos ahora la anulación de cada factor por separado.

*Primer caso:*  $\alpha = 0$ .

Si  $\alpha = 0$ , entonces la Ecuación (2.32) implica que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\beta\xi_1 = \beta(\xi_2 - \xi_3) = 0$ , con lo que se demuestra (i).

*Segundo caso:*  $\alpha = \beta$ .

La situación particular de que  $\alpha = \beta = 0$  se incluye en el primer caso, por tanto podemos suponer que  $\alpha = \beta \neq 0$ . Ahora bien, de la Ecuación (2.32) obtenemos que  $\xi$  es una

colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_1 = 0$  y  $\xi_2 = \xi_3$ . Resulta así que  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.18).

*Tercer caso:*  $\alpha = 2\beta$ .

Al igual que en el segundo caso, podemos suponer que  $\alpha = 2\beta \neq 0$ . Con estas hipótesis la Ecuación (2.32) implica que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , lo que demuestra (ii) para  $\alpha = 2\beta \neq 0$ .

*Cuarto caso:*  $\alpha = -2\beta$ .

En este caso, la Ecuación (2.32) se verifica para cualquier valor de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$ , lo que demuestra (ii) para  $\alpha = -2\beta \neq 0$ .  $\square$

#### iv) Tipo III

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo III viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , como

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

En este último caso unimodular, el tensor de Ricci está determinado por

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= -\frac{1}{2}\alpha^2, & \rho_{22} &= -\frac{1}{2}(\alpha^2 + 2), & \rho_{33} &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2), \\ \rho_{12} &= \rho_{13} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, & \rho_{23} &= -1, \end{aligned}$$

y, por tanto, la derivada de Lie del tensor de Ricci está dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \rho)_{11} &= \frac{3}{\sqrt{2}}\alpha^2(\xi_2 + \xi_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{22} &= -\frac{3}{2}\alpha(2\xi_1 + \sqrt{2}\alpha\xi_3), \\ (2.33) \quad (\mathcal{L}_\xi \rho)_{33} &= -\frac{3}{2}\alpha(2\xi_1 - \sqrt{2}\alpha\xi_2), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} = -\frac{3}{4}\alpha(\sqrt{2}\alpha\xi_1 - 2(\xi_2 + \xi_3)), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} &= -\frac{3}{4}\alpha(4\xi_1 - \sqrt{2}\alpha(\xi_2 - \xi_3)). \end{aligned}$$

Nótese que, al igual que ocurre para los grupos de Tipo Ib, como consecuencia del Lema 2.21 ningún grupo de Lie Lorentziano de este tipo admite campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda y, por tanto, las colineaciones de Ricci distintas de cero no son campos de vectores afín Killing.

**Teorema 2.38.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo III admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si  $\alpha = 0$ . Además, en tal caso  $\mathcal{V}_{CR} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* Observemos que si  $\alpha = 0$  la Ecuación (2.33) implica la anulación de  $\mathcal{L}_\xi \rho$  independientemente del campo de vectores  $\xi$ . Por otra parte, para  $\alpha \neq 0$  la expresión de  $(\mathcal{L}_\xi \rho)_{11}$  en la Ecuación (2.33) implica que  $\xi_3 = -\xi_2$  es una condición necesaria para que  $\xi$  sea una colineación de Ricci. Además, bajo esta condición, y de nuevo por la Ecuación (2.33), se obtiene que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\xi_1 = 0, \quad 2\xi_1 - \sqrt{2}\alpha\xi_2 = 0.$$

Obtenemos de este modo que  $\xi$  ha de ser cero, con lo que terminamos la demostración.  $\square$

Resumimos los resultados obtenidos en esta sección en la siguiente tabla.

<i>Grupos de Lie Lorentzianos unimodulares</i>			
<i>Tipo</i>	<i>No cero Killing</i>	<i>No Killing afín Killing</i>	<i>No afín Killing Colineaciones de Ricci</i>
Ia	$\alpha = \beta = \gamma$	<b>X</b>	<b>X</b>
	$\alpha = \beta \neq \gamma$	<b>X</b>	Si $\gamma = 0$ o $\gamma = -2\alpha$
	$\beta = \gamma \neq \alpha$	<b>X</b>	Si $\alpha = 0$ o $\alpha = -2\beta$
	$\gamma = \alpha \neq \beta$	<b>X</b>	Si $\beta = 0$ o $\beta = -2\gamma$
	<b>X</b>	<b>X</b>	Teorema 2.35, (i) para $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$
	<b>X</b>	<b>X</b>	Teorema 2.35, (ii) para $\varepsilon = -1$ , (iii), (iv), (v)
Ib	<b>X</b>	<b>X</b>	$\alpha = -2\gamma$
	<b>X</b>	<b>X</b>	$\alpha = 2\gamma \neq 0$
II	$\alpha = \beta = 0$	✓	✓
	$\alpha = \beta \neq 0$	<b>X</b>	<b>X</b>
	<b>X</b>	<b>X</b>	$\alpha = 0, \beta \neq 0$
	<b>X</b>	<b>X</b>	$\alpha = \pm 2\beta \neq 0$
III	<b>X</b>	<b>X</b>	$\alpha = 0$

## 2.4.2. Caso no unimodular

En esta sección consideramos la existencia de colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos no unimodulares de dimensión tres, cuyas álgebras de Lie fueron introducidas en la Sección 1.2.1.

### i) Tipo $\mathfrak{S}$

Las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo  $\mathfrak{S}$  son álgebras de Lie resolubles verificando que para dos elementos arbitrarios  $x$  e  $y \in \mathfrak{g}$ , su producto corchete  $[x, y]$  es una combinación lineal de ellos mismos. De este modo, el tensor de Ricci está determinado por

$$\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = -2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2),$$

y por tanto la derivada de Lie del tensor de Ricci está dada por

$$(2.34) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \rho)_{11} &= 4(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\beta\xi_2 + \gamma\xi_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{22} &= 4(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{33} &= -4(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= -2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\beta\xi_1 + \alpha\xi_2), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= -2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\gamma\xi_1 - \alpha\xi_3), \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} &= -2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\gamma\xi_2 - \beta\xi_3). \end{aligned}$$

A continuación determinamos las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en este caso. Observemos que por el Teorema 2.23 se tiene que un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo  $\mathfrak{S}$  no admite campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda distintos de cero. Por tanto, las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda tampoco son en este caso campos de vectores afín Killing.

**Teorema 2.39.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo  $\mathfrak{S}$  admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son campos de vectores afín Killing si y sólo si  $\gamma = \varepsilon\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ . Además, en tal caso la métrica es llana y  $\mathcal{V}_{\mathcal{CR}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* Observemos que si  $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$  la ecuación (2.34) implica que  $\mathcal{L}_\xi \rho$  se anula para cualquier campo de vectores  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Por otra parte, si  $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \neq 0$ , se obtiene por un cálculo directo haciendo uso de la Ecuación (2.34) que si el campo de vectores  $\xi$  es una colineación de Ricci entonces es necesariamente el campo de vectores cero. Además, puesto que la curvatura seccional de un grupo de Lie de Tipo  $\mathfrak{S}$  está dada por  $-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2$ , se sigue que si existen colineaciones de Ricci no cero entonces la métrica es necesariamente llana, con lo que se termina la demostración.  $\square$

### ii) Tipo IV.1

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.1 viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  verificando  $g(e_1, e_1) = -g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -1$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$ . En este caso, el tensor de Ricci está determinado por

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \frac{1}{2}(\gamma^2 - \beta^2) + \alpha(\alpha + \delta), & \rho_{22} &= \frac{1}{2}(\gamma^2 - \beta^2) - \delta(\alpha + \delta), \\ \rho_{33} &= \frac{1}{2}((\beta - \gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2)),\end{aligned}$$

y así la derivada de Lie del tensor de Ricci está dada por

$$(2.35) \quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi \rho)_{11} &= (2\alpha^3 - \alpha\beta^2 + 2\alpha^2\delta + \beta\gamma\delta)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{22} &= -\delta(\beta^2 - \gamma^2 + 2\delta(\alpha + \delta))\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= -\frac{1}{2}(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)^2\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= -\frac{1}{2}(2\alpha^3 - \alpha\beta^2 + 2\alpha^2\delta + \beta\gamma\delta)\xi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\beta^2\gamma - \gamma^3 - 2\beta\delta(\alpha + \delta))\xi_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 + 2\delta(\alpha + \delta))(\beta\xi_1 + \delta\xi_2).\end{aligned}$$

Por los Lemas 2.25 y 2.26 tenemos que un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.1 admite campos de vectores de Killing invariantes a la izquierda distintos de cero si y sólo si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes: (i)  $\alpha = \beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ , o (ii)  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$ ,  $\delta(\alpha^2 - \beta^2) = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ . Además, cualquier campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda es necesariamente de Killing.

Considerando este resultado, determinamos ahora las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son campos de vectores afín Killing.

**Teorema 2.40.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.1 admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones*

$$(i) \quad \alpha\delta \neq 0, \delta \neq \pm\alpha, \gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha} \text{ y } \beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\alpha-\delta}} \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \alpha\delta \neq 0, \delta \neq \pm\alpha, \gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha} \text{ y } \beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^2\delta}{\delta-\alpha}} \in \mathbb{R}.$$

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que

$$(i) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{CR}} = \langle -\frac{\delta}{\beta}e_1 + e_2 \rangle.$$

$$(ii) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{CR}} = \langle -\frac{\beta\delta}{\alpha^2}e_1 + e_2 \rangle.$$

*Demostración.* Sea  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  un campo de vectores invariante a la izquierda. Supongamos en primer lugar que  $\alpha = 0$ . Puesto que  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ , entonces necesariamente  $\beta = 0$  y de la Ecuación (2.35) se sigue que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\gamma\xi_2 = \gamma\xi_3 = 0, \quad \delta(\gamma^2 - 2\delta^2)\xi_2 = \delta(\gamma^2 - 2\delta^2)\xi_3 = 0.$$

Como consecuencia obtenemos que  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , y por tanto  $\xi$  es un campo de vectores de Killing (véase el Lema 2.25).

Ahora bien, si  $\alpha \neq 0$  tenemos que  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$ . Supongamos primero que  $\alpha \neq 0$  y  $\beta = 0$ , con lo que resulta  $\gamma = 0$ . En este caso, la Ecuación (2.35) implica que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\alpha(\alpha + \delta)\xi_1 = \alpha(\alpha + \delta)\xi_3 = 0, \quad \delta(\alpha + \delta)\xi_2 = \delta(\alpha + \delta)\xi_3 = 0,$$

o equivalentemente, si y sólo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  y  $\delta = 0$ . Por tanto, el Lema 2.25 implica que  $\xi$  es un campo de vectores de Killing.

Supongamos ahora que  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ . Puesto que  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$ , la expresión de  $(\mathcal{L}_\xi\rho)_{12}$  en la Ecuación (2.35) se reduce a

$$(\mathcal{L}_\xi\rho)_{12} = -\frac{1}{2\alpha^3}\beta^3(\alpha + \delta)^2(\alpha - \delta)\xi_3.$$

De este modo, si  $\xi$  es una colineación de Ricci entonces necesariamente  $\alpha = \delta$  o  $\xi_3 = 0$ . Si  $\alpha = \delta(\neq 0)$  entonces  $\gamma = \beta(\neq 0)$ , y por un cálculo directo a partir de la Ecuación (2.35) se obtiene que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_3 = 0$ ,  $\alpha = \varepsilon\beta$  y  $\xi_2 = -\varepsilon\xi_1$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ . Observemos que, en tal caso,  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ , y a partir del Lema 2.25 resulta que  $\xi$  es necesariamente un campo de vectores de Killing.

En este punto nos resta por analizar el caso  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$  y  $\alpha \neq \delta$ , en cuyo caso ha de ser  $\xi_3 = 0$ . A partir de la Ecuación (2.35), un campo de vectores  $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$(2\alpha^3 - (\alpha - \delta)\beta^2)(\alpha^2\xi_1 + \beta\delta\xi_2) = 0, \quad (2\alpha^2\delta + (\alpha - \delta)\beta^2)(\beta\xi_1 + \delta\xi_2) = 0.$$

Por un cálculo directo a partir de estas ecuaciones se obtiene que si  $2\alpha^3 - (\alpha - \delta)\beta^2 = 0$ , i.e., si  $\beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\alpha - \delta}}$ , entonces  $2\alpha^2\delta + (\alpha - \delta)\beta^2 \neq 0$  y por tanto  $\beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0$ , i.e.,  $\xi_1 = -\frac{\delta}{\beta}\xi_2$ ; de donde se sigue (i). Observemos que en este caso  $\delta$  debe ser distinto de cero para que  $\xi$  no sea un campo de vectores de Killing (véase el Lema 2.25). Finalmente, supongamos que  $\alpha^2\xi_1 + \beta\delta\xi_2 = 0$ , i.e., que  $\xi_1 = -\frac{\beta\delta}{\alpha^2}\xi_2$ . En este caso  $\beta\xi_1 + \delta\xi_2 \neq 0$  puesto que, de otro modo,  $\delta(\alpha^2 - \beta^2) = 0$  y el campo de vectores  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.25). Por tanto,  $\beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^2\delta}{\delta - \alpha}}$  con lo que obtenemos (ii).  $\square$

### iii) Tipo IV.2

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.2 viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  verificando  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = 1$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2;$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ . En este caso, el tensor de Ricci está determinado por

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2) + \alpha(\alpha + \delta), & \rho_{22} &= \frac{1}{2}(\gamma^2 - \beta^2) + \delta(\alpha + \delta), \\ \rho_{33} &= -\frac{1}{2}(\beta + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2).\end{aligned}$$

Con lo que la derivada de Lie del tensor de Ricci está dada por

$$(2.36) \quad \begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi \rho)_{11} &= (2\alpha^3 + \alpha\beta^2 + 2\alpha^2\delta + \beta\gamma\delta)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{22} &= -\delta(\beta^2 - \gamma^2 - 2\delta(\alpha + \delta))\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= -\frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2(\beta + \gamma)\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= -\frac{1}{2}(2\alpha^3 + \alpha\beta^2 + 2\alpha^2\delta + \beta\gamma\delta)\xi_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\beta^2\gamma - \gamma^3 - 2\beta\delta(\alpha + \delta))\xi_2, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 - 2\delta(\alpha + \delta))(\beta\xi_1 + \delta\xi_2).\end{aligned}$$

Por los Lemas 2.29 y 2.30 tenemos que un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.2 admite campos de vectores Killing invariantes a la izquierda distintos de cero si y sólo si se verifica una de estas dos condiciones: (i)  $\alpha = \beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ , o (ii)  $\gamma = \delta = 0$  y  $\alpha \neq 0$ . Además, al igual que en el caso anterior, cualquier campo de vectores afín Killing invariante a la izquierda es de Killing. Haciendo uso de estos resultados determinamos las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing.

**Teorema 2.41.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.2 admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

$$(i) \quad \alpha\delta \neq 0, \delta \neq \pm\alpha, \gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha} \text{ y } \beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\delta-\alpha}} \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \alpha\delta \neq 0, \delta \neq \pm\alpha, \gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha} \text{ y } \beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^2\delta}{\alpha-\delta}} \in \mathbb{R}.$$

Además, en estos casos, tenemos respectivamente que:

$$(i) \quad \mathcal{V}_{CR} = \langle -\frac{\delta}{\beta}e_1 + e_2 \rangle.$$

$$(ii) \quad \mathcal{V}_{CR} = \langle \frac{\beta\delta}{\alpha^2}e_1 + e_2 \rangle.$$

*Demostración.* Sea  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  un campo de vectores invariante a la izquierda. Supongamos en primer lugar que  $\alpha = 0$ . Puesto que  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ , entonces necesariamente  $\beta = 0$  y la Ecuación (2.36) implica que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\gamma\xi_2 = \gamma\xi_3 = 0, \quad \delta(\gamma^2 + 2\delta^2)\xi_2 = \delta(\gamma^2 + 2\delta^2)\xi_3 = 0.$$

Como consecuencia obtenemos que  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , y así  $\xi$  es un campo de vectores de Killing (véase el Lema 2.29).

Supongamos ahora que  $\alpha \neq 0$ , con lo que resulta  $\gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha}$ . Consideremos primero que  $\alpha \neq 0$  y  $\beta = 0$ . Con estas hipótesis se tiene que  $\gamma = 0$  y la Ecuación (2.36) implica que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\alpha(\alpha + \delta)\xi_1 = \alpha(\alpha + \delta)\xi_3 = 0, \quad \delta(\alpha + \delta)\xi_2 = \delta(\alpha + \delta)\xi_3 = 0,$$

o equivalentemente, si y sólo si  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  y  $\delta = 0$ . Así pues, el Lema 2.29 implica que  $\xi$  es un campo de vectores de Killing.

Sea ahora  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ . Puesto que  $\gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha}$ , la expresión de  $(\mathcal{L}_\xi\rho)_{12}$  en la Ecuación (2.36) se reduce a

$$(\mathcal{L}_\xi\rho)_{12} = -\frac{1}{2\alpha^3}\beta^3(\alpha + \delta)^2(\alpha - \delta)\xi_3.$$

Por tanto, si  $\xi$  es una colineación de Ricci entonces necesariamente  $\alpha = \delta$  o  $\xi_3 = 0$ . Si  $\alpha = \delta(\neq 0)$  entonces  $\gamma = -\beta(\neq 0)$ , y por un cálculo directo a partir de la Ecuación (2.36) se sigue que  $\xi$  es una colineación de Ricci si y sólo si  $\xi_3 = 0$  y  $\alpha\xi_1 - \beta\xi_2 = \beta\xi_1 + \alpha\xi_2 = 0$ , de donde se obtiene que  $\xi$  ha de ser cero.

En este punto nos resta por analizar la situación  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha}$  y  $\alpha \neq \delta$ ; en cuyo caso  $\xi_3 = 0$ . De la Ecuación (2.36), el campo de vectores  $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$(2\alpha^3 + (\alpha - \delta)\beta^2)(\alpha^2\xi_1 - \beta\delta\xi_2) = 0, \quad (2\alpha^2\delta - (\alpha - \delta)\beta^2)(\beta\xi_1 + \delta\xi_2) = 0.$$

Observemos que  $\delta$  puede suponerse distinto de cero, ya que que en caso contrario el campo de vectores  $\xi$  es de Killing (véase el Lema 2.29). Por un cálculo directo a partir de estas ecuaciones se demuestra que si  $2\alpha^3 + (\alpha - \delta)\beta^2 = 0$ , i.e., si  $\beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\delta - \alpha}}$ , entonces  $2\alpha^2\delta - (\alpha - \delta)\beta^2 \neq 0$  y por tanto  $\beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0$ , i.e.,  $\xi_1 = -\frac{\delta}{\beta}\xi_2$ ; con lo que se obtiene (i). Ahora bien, si  $\alpha^2\xi_1 - \beta\delta\xi_2 = 0$ , i.e., si  $\xi_1 = \frac{\beta\delta}{\alpha^2}\xi_2$ , entonces  $\beta\xi_1 + \delta\xi_2 \neq 0$ , puesto que en caso contrario  $\delta = 0$ . Por tanto,  $2\alpha^2\delta - (\alpha - \delta)\beta^2 = 0$ , i.e.,  $\beta = \pm\sqrt{\frac{2\alpha^2\delta}{\alpha - \delta}}$ ; de donde se sigue (ii).  $\square$

#### iv) Tipo IV.3

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.3 está determinada respecto a una base pseudo-ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  con

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2;$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma = 0$ . Así, el tensor de Ricci está determinado por

$$\rho_{11} = \rho_{23} = -\frac{1}{2}\gamma^2, \quad \rho_{33} = \alpha(\delta - \alpha) - \beta\gamma.$$

Por tanto, la derivada de Lie del tensor de Ricci está dada por

$$(2.37) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \rho)_{33} &= \gamma^2(\beta\xi_1 + \delta\xi_2), & (\mathcal{L}_\xi \rho)_{12} &= -\frac{1}{2}\gamma^3\xi_3, \\ (\mathcal{L}_\xi \rho)_{13} &= \frac{1}{2}\gamma^2(\gamma\xi_2 - \beta\xi_3), & (\mathcal{L}_\xi \rho)_{23} &= -\frac{1}{2}\gamma^2\delta\xi_3. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.32 tenemos que un grupo de Lie de Tipo IV.3 admite un campo de vectores de Killing invariante a la izquierda distinto de cero si y sólo si se verifica alguna de las tres condiciones siguientes: (i)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ ; o (ii)  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ ; o (iii)  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\delta = 0$ . Mientras que, por el Lema 2.33, admite campos de vectores afín Killing invariantes a la izquierda no Killing si y sólo si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes: (i)  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ ; o (ii)  $\gamma = 0$  y  $\delta = 2\alpha \neq 0$ . Haciendo uso de estos resultados determinamos las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing.

**Teorema 2.42.** *Un grupo de Lie Lorentziano no unimodular de Tipo IV.3 admite colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda que no son afín Killing si y sólo si  $\gamma = 0$ . Además, en tal caso  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ .*

*Demostración.* Por la Ecuación (2.37) un campo de vectores invariante a la izquierda  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  es una colineación de Ricci si y sólo si

$$\gamma(\beta\xi_1 + \delta\xi_2) = 0, \quad \gamma\xi_3 = 0, \quad \gamma(\gamma\xi_2 - \beta\xi_3) = 0, \quad \gamma\delta\xi_3 = 0.$$

Como  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma = 0$  si suponemos  $\gamma = 0$  entonces claramente  $\mathcal{L}_\xi \rho$  se anula para cualquier campo de vectores  $\xi$ . Por otra parte, si  $\gamma \neq 0$  resulta que necesariamente  $\alpha = 0$ . Además, si  $\xi$  es una colineación de Ricci entonces  $\xi_3 = \xi_2 = 0$  y  $\beta = 0$ , y por tanto el campo de vectores  $\xi$  resulta ser de Killing (ver Lema 2.32).  $\square$

Resumimos los resultados de esta sección en la siguiente tabla.

<i>Grupos de Lie Lorentzianos no unimodulares</i>			
<i>Tipo</i>	<i>No cero Killing</i>	<i>No Killing afín Killing</i>	<i>No afín Killing Colineaciones de Ricci</i>
$\mathfrak{S}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$	$\gamma = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
IV.1	$\alpha = \beta = 0, \delta \neq 0$ $\left[ \begin{array}{l} \alpha(\alpha + \delta) \neq 0, \gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}, \\ \delta(\alpha^2 - \beta^2) = 0, \end{array} \right]$ $\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$ $\left[ \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{array} \right]$ $\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$ $\left[ \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{array} \right]$ Teorema 2.40, (i), (ii)
IV.2	$\alpha = \beta = 0, \delta \neq 0$ $\gamma = \delta = 0, \alpha \neq 0$ $\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$ $\mathbf{x}$ $\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$ $\mathbf{x}$ Teorema 2.41, (i), (ii)
IV.3	$\alpha = 0, \beta = 0, \delta \neq 0$ $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0, \delta \neq 0$ $\alpha \neq 0, \gamma = 0, \delta = 0$ $\mathbf{x}$ $\left[ \begin{array}{l} \mathbf{x} \end{array} \right]$	Si $\gamma = 0$ $\checkmark$ $\mathbf{x}$ $\gamma = 0, \delta = 2\alpha \neq 0$ $\left[ \begin{array}{l} \mathbf{x} \end{array} \right]$	$\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\left[ \begin{array}{l} \text{Cualquier otro caso} \\ \text{con } \gamma = 0 \end{array} \right]$

**Observación 2.43.** En el caso Riemanniano, las álgebras de Lie unimodulares se corresponden con las de Tipo Ia, mientras que las no unimodulares se corresponden con el Tipo  $\mathfrak{S}$  y con el Tipo IV.2.

Con respecto al caso unimodular, el Teorema 2.35 continúa siendo cierto en el caso Riemanniano y por tanto el comportamiento de los de Tipo Ia es exactamente igual que en el caso Lorentziano.

Los grupos de Lie no unimodulares de Tipo  $\mathfrak{S}$  no admiten colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda distintas de cero en el caso Riemanniano, a diferencia de lo que ocurre en el caso Lorentziano tratado en el Teorema 2.39. Esta diferencia notable está relacionada con el hecho clave de que la curvatura seccional constante de un grupo de Lie de Tipo  $\mathfrak{S}$  está dada por  $-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2$  en el caso Lorentziano, y por tanto puede ser nula, mientras que en el caso Riemanniano siempre es estrictamente negativa, ya que está dada por  $-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$ . Finalmente, el comportamiento de los de Tipo IV.2 es exactamente igual en el caso Riemanniano y en el caso Lorentziano puesto que el Teorema 2.41 se verifica en ambas situaciones.

Las demostraciones de estos resultados se obtienen de forma análoga a los de las Secciones 2.4.1 y 2.4.2.

**Observación 2.44.** Por los resultados obtenidos en [13] (véase también [43]) los solitones de Ricci invariantes a la izquierda definidos sobre los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres no simétricos están caracterizados por el hecho de que su operador de Ricci

---

tiene tres autovalores iguales. Por su parte, como vimos anteriormente, un grupo de Lie Lorentziano de dimensión tres admitiendo solitones de Yamabe (tanto invariantes como no invariantes) ha de tener operador de Ricci dos-pasos nilpotente. No obstante, en el caso de las colineaciones de Ricci invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos tres-dimensionales, su existencia no impone ninguna restricción al operador de Ricci.



# Capítulo 3

## Geometría del tensor de Cotton

Como vimos en la Sección 1.1 las variedades pseudo-Riemannianas de dimensión tres localmente conformemente llanas están caracterizadas por el hecho de que su tensor de Cotton, dado por

$$(3.1) \quad C(X, Y, Z) = (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z),$$

siendo  $S = \frac{1}{n-2} \left( \rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g \right)$  el tensor de Schouten, es idénticamente nulo. Además, puesto que dicho tensor es antisimétrico en las dos primeras componentes podemos definir a partir de él las tres 2-formas siguientes

$$C_i := \frac{1}{2} C_{nmi} dx^n \wedge dx^m, \quad i = 1, 2, 3;$$

donde  $(x^1, x^2, x^3)$  es un sistema de coordenadas locales de  $M$ . Si además suponemos que  $M$  tiene la orientación dada por la forma de volumen  $v_g = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , a partir de estas 2-formas y del operador estrella de Hodge,  $\star$ , podemos definir tres nuevas 1-formas como

$$\star C_i = \star \left( \frac{1}{2} C_{nmi} dx^n \wedge dx^m \right) = \frac{1}{2} C_{nmi} \star (dx^n \wedge dx^m) = \frac{1}{2} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell} dx^\ell, \quad i = 1, 2, 3;$$

donde  $\epsilon^{abc}$  representa la paridad de la permutación de los índices  $\{a, b, c\}$  con respecto a  $\{1, 2, 3\}$ . Estas tres 1-formas nos permiten ahora definir el tensor de Cotton de tipo  $(1, 1)$ , dado en componentes por

$$C_i^\ell = \frac{1}{2} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell},$$

el cual, bajando índices, tiene como tensor de tipo  $(0, 2)$  asociado el dado por

$$C_{ij} = \frac{1}{2} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell} g_{\ell j}.$$

Finalmente, realizando el siguiente reescalado siguiendo la construcción de York (véase [94])

$$(3.2) \quad \tilde{C}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} C_{nmi} \epsilon^{nm\ell} g_{\ell j},$$

obtenemos un tensor de tipo  $(0, 2)$  invariante por cambios conformes de métrica y que también se conoce como *tensor de Cotton* (véanse [7] y [81]).

Los resultados presentados a lo largo de este capítulo se encuentran recogidos en [22], [23], [24] y [27].

### 3.1. Espacios conformemente simétricos de dimensión tres

Una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión mayor o igual a cuatro se dice *conformemente simétrica* si su tensor de Weyl es paralelo ( $\nabla W = 0$ ). Es conocido que cualquier variedad Riemanniana conformemente simétrica es localmente simétrica ( $\nabla R = 0$ ) o localmente conformemente llana ( $W = 0$ ). En el caso no trivial ( $\nabla W = 0$  y  $\nabla R \neq 0$ ,  $W \neq 0$ ), la variedad  $(M, g)$  se dice *esencialmente conformemente simétrica*. La geometría local y global de las variedades pseudo-Riemannianas esencialmente conformemente simétricas ha sido investigada extensamente por Derdzinski y Roter en una serie de artículos (véanse [35] y [36] y las referencias ahí señaladas para más información). Cabe destacar aquí que puesto que el tensor de Weyl se anula en dimensión tres, las variedades conformemente simétricas han sido estudiadas sólo en dimensión mayor o igual a cuatro. El principal objetivo de esta sección es extender este estudio a las variedades de dimensión tres, donde toda la información conforme está codificada por el tensor de Cotton.

En el caso particular de dimensión tres, se dice que una variedad pseudo-Riemanniana es *esencialmente conformemente simétrica* si el tensor de Cotton es paralelo pero la variedad no es localmente conformemente llana, i.e.  $\nabla C = 0$  con  $C \neq 0$ , (observemos que cualquier variedad localmente simétrica de dimensión tres es localmente conformemente llana). Cabe destacar que mientras el carácter conformemente simétrico involucra derivadas de tercer orden de la métrica en dimensión  $n \geq 4$ , en dimensión tres resulta una condición diferencial de orden cuatro.

#### 3.1.1. Descripción local de las variedades esencialmente conformemente simétricas de dimensión tres

Estudiamos en este apartado la descripción local de cualquier variedad esencialmente conformemente simétrica de dimensión tres. En primer lugar consideramos el caso en el que la variedad  $(M, g)$  se descompone como un producto de variedades.

**Lema 3.1.** *Si  $(M, g)$  es una variedad pseudo-Riemanniana producto  $(M = \mathbb{R} \times N, g = \pm dt \circ dt + g_N)$  de dimensión tres con tensor de Cotton paralelo,  $\nabla C = 0$ , entonces es localmente conformemente llana ( $C = 0$ ), es decir,  $(M, g)$  no es esencialmente conformemente simétrica.*

*Demostración.* Sean  $(a, x)$  y  $(b, y)$  campos de vectores sobre  $(M, g)$ . El tensor de Schouten

verifica

$$\begin{aligned}
S((a, x), (b, y)) &= \rho((a, x), (b, y)) - \frac{\tau}{4}g((a, x), (b, y)) \\
&= \frac{\tau}{2}g(x, y) - \frac{\tau}{4}(\pm ab + g(x, y)) \\
&= \frac{\tau}{4}(\mp ab + g(x, y)) \\
&= \frac{\tau}{4}(\mp dt \circ dt + g_N)((a, x), (b, y)).
\end{aligned}$$

Observemos que  $g$  y  $h = \mp dt \circ dt + g_N$  son métricas en  $M$  induciendo la misma conexión de Levi-Civita. Así, por un cálculo directo obtenemos que  $\nabla S = \frac{1}{4}d\tau \otimes h$ . Como consecuencia, el tensor de Cotton de tipo  $(0, 3)$  está dado por

$$C_{\alpha\beta\gamma} = (\nabla_{\alpha}S)_{\beta\gamma} - (\nabla_{\beta}S)_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4}(d\tau(\alpha)h_{\beta\gamma} - d\tau(\beta)h_{\alpha\gamma}),$$

de donde obtenemos que

$$\nabla_{\mu}C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}\left((\text{Hes}_{\tau})_{\mu\alpha}h_{\beta\gamma} - (\text{Hes}_{\tau})_{\mu\beta}h_{\alpha\gamma}\right),$$

siendo  $\text{Hes}_{\tau}$  el Hessiano de la curvatura escalar, que está dado por  $\text{Hes}_{\tau}(X, Y) = X(Y\tau) - (\nabla_X Y)\tau$ . De esto se sigue entonces que  $\nabla_i C_{tjt} = \frac{1}{4}(\text{Hes}_{\tau})_{ij}$ , con lo que la variedad producto es conformemente simétrica si y sólo si  $\text{Hes}_{\tau}$  se anula, i.e., si y sólo si  $\nabla\tau$  es un campo de vectores paralelo sobre  $N$ . De este modo tenemos dos posibilidades, si  $\nabla\tau \neq 0$  entonces  $N$  se descompone localmente como  $N \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , mientras que si  $\nabla\tau = 0$  entonces  $N$  tiene curvatura constante. En cualquiera de los dos casos tenemos que  $\nabla C = 0$  implica  $C = 0$  demostrando que  $(M, g)$  es localmente conformemente llana.  $\square$

En el siguiente lema demostramos que cualquier variedad esencialmente conformemente simétrica de dimensión tres es localmente indescomponible pero no irreducible, i.e., admite una distribución 1-dimensional degenerada y paralela. Estas variedades han sido extensamente estudiadas en la literatura y son conocidas, como vimos en la Sección 1.4, como *ondas de Brinkmann* o *variedades Walker*.

**Lema 3.2.** *Cualquier variedad  $(M, g)$  esencialmente conformemente simétrica de dimensión tres es una variedad de Walker*

*Demostración.* Puesto que  $M$  es una variedad de dimensión tres podemos considerar el tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  asociado al tensor de Cotton usual de tipo  $(0, 3)$ . A su vez, asociado al tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  se define el *operador de Cotton* como  $\tilde{C}(x, y) = g(\widehat{C}(x), y)$ . Haciendo uso de que el tensor métrico y el operador estrella de Hodge,  $\star$ , son paralelos, el carácter conformemente simétrico de cualquier variedad de dimensión tres se establece de forma equivalente en términos del tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$ ,  $\tilde{C}$ , o del operador de Cotton  $\widehat{C}$ .

De ahora en adelante consideraremos que el operador de Cotton es paralelo y analizaremos las diferentes posibilidades para la forma de Jordan de  $\widehat{C}$ . En primer lugar supongamos que el operador de Cotton es diagonalizable. Por ser el operador de Cotton paralelo se tiene

que los autovalores de  $\widehat{C}$  son constantes y los autoespacios correspondientes generan distribuciones paralelas en  $M$ . Puesto que el tensor de Cotton tiene traza nula ha de tener por lo menos dos autovalores diferentes, a menos que la variedad sea localmente conformemente llana. En cualquier caso,  $\widehat{C}$  siempre tiene un autovalor distinguido de multiplicidad uno y por tanto  $(M, g)$  admite localmente una descomposición de DeRham como un producto  $(\mathbb{R} \times N, \pm dt \circ dt + g_N)$ , donde  $N$  es una superficie. En tal caso, el Lema 3.1 demuestra que  $(M, g)$  es localmente conformemente llana.

Supongamos ahora que el operador de Cotton tiene un autovalor complejo. En tal caso, respecto a una referencia local ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  tenemos

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Puesto que el operador de Cotton es paralelo, la distribución definida por el autoespacio correspondiente al autovalor  $\lambda$  es paralela. Dicha distribución es espacial y por tanto la variedad se descompone localmente como un producto  $\mathbb{R} \times N$ , donde  $N$  es una superficie. Entonces, el Lema 3.1 implica que  $(M, g)$  es una variedad localmente conformemente llana.

Si el polinomio mínimo del operador de Cotton  $\widehat{C}$  tiene una raíz de multiplicidad dos, entonces existe una referencia local  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , con  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1$  tal que  $\widehat{C}$  se expresa con respecto a dicha referencia como

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Supongamos primero que  $\lambda \neq 0$ . En este caso, puesto que  $\widehat{C}$  es paralelo la distribución espacial definida por el autoespacio correspondiente al autovalor  $\lambda$  es también paralela. De este modo la variedad se descompone localmente como un producto y por el Lema 3.1 se demuestra que  $(M, g)$  es localmente conformemente llana. Supongamos ahora que  $\lambda = 0$ ; puesto que el operador de Cotton tiene traza nula ha de ser 2-pasos nilpotente (i.e.,  $\widehat{C}^2 = 0$ ,  $\widehat{C} \neq 0$ ). Entonces,  $\text{Im}(\widehat{C}) = \langle \widehat{C}(e_3) \rangle = \langle e_2 \rangle$ . Además, teniendo en cuenta que el operador de Cotton es paralelo, resulta que

$$0 = (\nabla_X \widehat{C})(e_3) = \nabla_X(\widehat{C}(e_3)) - \widehat{C}(\nabla_X e_3),$$

de donde  $\widehat{C}(\nabla_X e_3) = \nabla_X(\widehat{C}(e_3))$  y por tanto  $\text{Im}(\widehat{C})$  es una distribución nula y paralela 1-dimensional en  $(M, g)$ , con lo que concluimos que  $g$  es una métrica Walker.

Finalmente, consideremos el caso en el que el polinomio mínimo del operador de Cotton tiene una raíz de multiplicidad 3. Puesto que el operador de Cotton tiene traza nula ha de ser 3-pasos nilpotente. Procediendo como en los casos anteriores y usando el hecho de que el operador de Cotton es paralelo se demuestra que  $\text{Ker}(\widehat{C})$  es una distribución nula y paralela y por tanto  $(M, g)$  es una variedad Walker.  $\square$

**Observación 3.3.** En el caso Riemanniano, como el operador de Cotton es diagonalizable, se sigue de la demostración del Lema 3.2 la no existencia de variedades Riemannianas esencialmente conformemente simétricas de dimensión tres.

Ahora estamos ya en condiciones de enunciar el principal resultado de este apartado

**Teorema 3.4.** *Una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión tres es esencialmente conformemente simétrica si y sólo si es una variedad Walker estricta Lorentziana, localmente isométrica a  $(\mathbb{R}^3, (t, x, y))$  con métrica*

$$(3.3) \quad g_{\alpha} = 2dt \circ dy + dx \circ dx + (x^3 + \mathbf{a}(y)x)dy \circ dy,$$

para una función derivable arbitraria  $\mathbf{a}(y)$ .

*Demostración.* Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana esencialmente conformemente simétrica de dimensión tres. Entonces del Lema 3.2 se sigue que  $(M, g)$  es indescomponible pero no irreducible, y por tanto es una variedad Walker.

Las variedades Walker de dimensión tres admiten coordenadas locales  $(t, x, y)$  respecto a las cuales, como vimos, la métrica admite la expresión

$$(3.4) \quad g_f = 2dt \circ dy + dx \circ dx + f(t, x, y)dy \circ dy,$$

para alguna función diferenciable  $f(t, x, y)$ .

Así pues, la conexión de Levi-Civita está determinada por

$$(3.5) \quad \nabla_{\partial_t} \partial_y = \frac{1}{2} f_t \partial_t, \quad \nabla_{\partial_x} \partial_y = \frac{1}{2} f_x \partial_t, \quad \nabla_{\partial_y} \partial_y = \frac{1}{2} (f_y + f f_t) \partial_t - \frac{1}{2} f_x \partial_x - \frac{1}{2} f_t \partial_y,$$

y el tensor de Ricci está dado por

$$(3.6) \quad \rho(\partial_t, \partial_y) = \frac{1}{2} f_{tt}, \quad \rho(\partial_x, \partial_y) = \frac{1}{2} f_{tx}, \quad \rho(\partial_y, \partial_y) = \frac{1}{2} (f f_{tt} - f_{xx}).$$

Además, el tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  de una métrica Walker dada por la Ecuación (3.4) está caracterizado por

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tilde{C}(\partial_t, \partial_x) &= -\frac{1}{4} f_{ttt}, & \tilde{C}(\partial_t, \partial_y) &= \frac{1}{4} f_{ttx}, & \tilde{C}(\partial_x, \partial_x) &= -\frac{1}{2} f_{txx}, \\ \tilde{C}(\partial_x, \partial_y) &= \frac{1}{4} (2f_{txx} + f_{ttx} - f f_{ttt}), \\ \tilde{C}(\partial_y, \partial_y) &= \frac{1}{4} (f_x f_{tt} - 2f_{xxx} - f_t f_{tx} - 2f_{txy} + 2f f_{ttx}); \end{aligned}$$

y las componentes no nulas de su derivada covariante por

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_t} \tilde{C})(\partial_t, \partial_x) &= -\frac{1}{4} f_{tttt}, \\
(\nabla_{\partial_t} \tilde{C})(\partial_x, \partial_x) &= -2(\nabla_{\partial_t} \tilde{C})(\partial_t, \partial_y) = 2(\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_t, \partial_x) = -\frac{1}{2} f_{tttx}, \\
(\nabla_{\partial_t} \tilde{C})(\partial_x, \partial_y) &= \frac{1}{8} (4f_{ttxx} - f_t f_{ttt} + 2f_{ttxy} - 2f f_{tttt}), \\
(\nabla_{\partial_t} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) &= \frac{1}{4} (f_x f_{ttt} + 2f f_{tttx} - 2f_{txxx} - 2f_{ttxy}), \\
(\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_x, \partial_x) &= -2(\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_t, \partial_y) = -\frac{1}{2} f_{ttxx}, \\
(\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_x, \partial_y) &= \frac{1}{8} (4f_{txxx} + 2f_{ttxy} - f_x f_{ttt} - 2f f_{tttx}), \\
(\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) &= \frac{1}{4} (f_{xx} f_{tt} + 2f_x f_{ttx} + 2f f_{ttxx} - 2f_{xxxx} - f_{tx}^2 \\
(3.8) \quad &\quad - f_t f_{txx} - 2f_{txxy}), \\
(\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_t, \partial_x) &= \frac{1}{8} (f_t f_{ttt} - 2f_{ttxy}), \\
(\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_t, \partial_y) &= \frac{1}{8} (2f_{ttxy} - f_x f_{ttt}), \\
(\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_x, \partial_x) &= \frac{1}{4} (f_x f_{ttt} - 2f_{ttxy}), \\
(\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_x, \partial_y) &= \frac{1}{8} (4f_{txxy} + f_t (2f_{txx} + f_{tty}) + 2f_{ttyy} - 3f_x f_{ttx} \\
&\quad - f_y f_{ttt} - 2f f_{ttxy}), \\
(\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) &= \frac{1}{4} (2f f_{ttxy} - f_{tx} f_t^2 - 2f_{xxx} f_t - 3f_{txy} f_t + f_x f_{tt} f_t \\
&\quad + f f_{ttx} f_t - 2f_{xxy} - f_{ty} f_{tx} - 2f_{txyy} + 2f_x f_{txx} \\
&\quad + f_{xy} f_{tt} + 2f_x f_{tty} + f_y f_{ttx} - f f_x f_{ttt}).
\end{aligned}$$

Por un cálculo largo pero directo se demuestra que una métrica de Walker dada por la Ecuación (3.4) tiene tensor de Cotton paralelo si y sólo si la función  $f$  verifica el siguiente

sistema de ecuaciones

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{tttt} = f_{tttx} = f_{ttxx} = f_{txxx} = 0, \\ f_t f_{ttt} - 2f_{ttty} = 0, \\ 2f_{ttxy} - f_x f_{ttt} = 0, \\ 4f_{txxy} + f_t (2f_{txx} + f_{tty}) + 2f_{ttyy} - 3f_y f_{ttx} - f_y f_{ttt} - 2f_x f_{ttty} = 0, \\ (f_{tx})^2 + 2f_{xxxx} + f_t f_{txx} + 2f_{txxy} - f_{xx} f_{tt} - 2f_x f_{ttx} = 0, \\ f_{tx} (f_t)^2 + (2f_{xxx} + 3f_{txy}) f_t + 2f_{xxxy} + f_{ty} f_{tx} \\ + 2f_{txyy} - f_{xy} f_{tt} - f_x (2f_{txx} + f_t f_{tt} + 2f_{tty}) - (f_y + f f_t) f_{ttx} = 0. \end{array} \right.$$

De la primera ecuación en (3.9) obtenemos

$$f(t, x, y) = \alpha(x, y) + t(\beta(y) + x\xi(y) + x^2\delta(y)) + t^2(\mu(y) + x\phi(y)) + t^3\gamma(y).$$

Ahora bien, derivando la segunda ecuación dos veces con respecto a  $t$ , se sigue que  $\gamma(y) = 0$ . Así, la tercera ecuación se reduce a  $\phi'(y) = 0$  con lo que  $\phi(y) = K$ . Derivando ahora la cuarta ecuación dos veces con respecto a  $t$  obtenemos  $K = 0$ . A su vez, si la derivamos dos veces con respecto a  $x$  obtenemos

$$(3.10) \quad \delta(y) (2\delta(y) + \mu'(y)) = 0,$$

y derivando una vez más esta cuarta ecuación, en este caso con respecto a  $t$ , obtenemos

$$(3.11) \quad \mu(y) (2\delta(y) + \mu'(y)) = 0.$$

Por tanto, las Ecuaciones (3.10) y (3.11) implican que  $\delta(y) = -\frac{1}{2}\mu'(y)$ . En este punto, la única componente no nula del tensor de Cotton está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = & \frac{1}{8} \{ 4\mu(y)\alpha_x(x, y) - 4\alpha_{xxx}(x, y) - x^3\mu'(y)^2 + 3x^2\xi(y)\mu'(y) \\ & - 2\beta(y)(\xi(y) - x\mu'(y)) - 2x\xi(y)^2 + 4x\mu''(y) - 4\xi'(y) \}. \end{aligned}$$

Derivando ahora la última ecuación en (3.9) con respecto a  $t$  y tras un cálculo directo se obtiene que

$$\mu(y) \tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = 0.$$

Entonces, puesto que el tensor de Cotton es paralelo, si  $\tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = 0$  en algún punto entonces el tensor de Cotton se anula en todo punto y, por tanto, la variedad es localmente conformemente llana. Es decir, podemos suponer que  $\mu(y) = 0$ . En tal caso, la quinta ecuación en (3.9) se transforma en

$$2\alpha_{xxxx}(x, y) + \xi(y) = 0,$$

y así  $\alpha(x, y) = -\frac{1}{48}x^4\xi(y)^2 + \mathcal{D}(y)x^3 + \mathcal{C}(y)x^2 + \mathcal{B}(y)x + \mathcal{A}(y)$ . Nuevamente por un cálculo directo, se demuestra que la única componente no nula del tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  está dada por

$$\tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{4} (12\mathcal{D}(y) + \beta(y)\xi(y) + 2\xi'(y)),$$

y derivando la última ecuación en (3.9) con respecto a  $x$  obtenemos

$$8\xi(y)\tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = 0.$$

Como antes, si  $\tilde{C}(\partial_y, \partial_y)$  no es idénticamente nulo, entonces se tiene que  $\xi(y) = 0$ . Es decir, el tensor de Cotton está determinado por  $\tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = -3\mathcal{D}(y)$ , lo que implica que  $\mathcal{D}(y) \neq 0$  en todo punto excepto en el caso localmente conformemente llano. Además, la última ecuación en (3.9) se reduce a  $\mathcal{D}(y)\beta(y) + \mathcal{D}'(y) = 0$ , de donde  $\beta(y) = -\frac{\mathcal{D}'(y)}{\mathcal{D}(y)}$ .

En este punto, la métrica (3.4) está determinada por

$$f(t, x, y) = -\frac{\mathcal{D}'(y)}{\mathcal{D}(y)}t + \mathcal{D}(y)x^3 + \mathcal{C}(y)x^2 + \mathcal{B}(y)x + \mathcal{A}(y),$$

y mediante un cálculo directo se demuestra que el operador de Ricci asociado a esta métrica es 2-pasos nilpotente. Ahora bien, una variedad Walker de dimensión tres tiene operador de Ricci 2-pasos nilpotente si y sólo si es estricta, es decir, si y sólo si admite un campo de vectores nulo y paralelo (véase [14]), con lo que existen coordenadas de Walker  $(t, x, y)$ , posiblemente distintas a las consideradas hasta ahora, respecto a las cuales la métrica se expresa como

$$(3.12) \quad g_f = 2dt \circ dy + dx \circ dx + f(x, y)dy \circ dy,$$

para una nueva función  $f(x, y)$  que no depende de la nueva coordenada  $t$ . De este modo, la única componente no nula del tensor de Cotton es

$$\tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2}f_{xxx},$$

y las componentes no nulas de  $\nabla \tilde{C}$  están dadas por

$$(\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2}f_{xxxx}, \quad (\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2}f_{xxyy}.$$

A partir de estas expresiones, y después de un cálculo directo, se obtiene que una métrica de Walker estricta es esencialmente conformemente simétrica si y sólo si

$$(3.13) \quad f(x, y) = \kappa x^3 + x^2\mathcal{A}(y) + \mathcal{B}(y)x + \mathcal{C}(y),$$

para funciones derivables arbitrarias  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  y una constante real no nula  $\kappa$ .

En lo que resta de la demostración comprobaremos que cualquier métrica determinada por la Ecuación (3.13) es localmente isométrica a alguna métrica dada por la Ecuación (3.3) para una función  $\alpha(y)$  adecuada. Para ello seguiremos los pasos realizados en [40]. Sea  $g_f$  una métrica Walker definida por la Ecuación (3.12) y consideremos la aplicación

$$T(t, x, y) = (t - \phi_y x + \psi, x + \phi, y),$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones de  $y$  derivables. Entonces  $T$  define una isometría entre  $g_f$  y otra métrica Walker  $g_{\tilde{f}}$  dada por la Ecuación (3.12) para alguna función

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + \phi, y) - 2x\phi_{yy} + \phi_y^2 + 2\psi_y.$$

Sea  $g_{b,\kappa}$  una métrica Walker dada por  $g_{b,\kappa} = 2dt \circ dy + dx \circ dx + (\kappa x^3 + \mathbf{b}(y)x)dy \circ dy$  definida por alguna función derivable  $\mathbf{b}(y)$  y alguna constante no nula  $\kappa$ . Entonces  $T$  define una isometría entre  $g_{b,\kappa}$  y la métrica Walker  $g_{\tilde{f}}$  donde

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) &= \kappa(x + \phi)^3 + \mathbf{b}(y)(x + \phi) - 2x\phi_{yy} + \phi_y^2 + 2\psi_y \\ &= \kappa x^3 + 3\kappa\phi x^2 + (\mathbf{b}(y) + 3k\phi^2 - 2\phi_{yy})x + \mathbf{b}(y)\phi + \kappa\phi^2 + \phi_y^2 + 2\psi_y.\end{aligned}$$

Tomando  $\mathcal{A} = 3\kappa\phi$ ,  $\mathcal{B} = \mathbf{b} + 3k\phi^2 - 2\phi_{yy}$  y escogiendo  $\psi$  tal que  $\mathcal{C} = \mathbf{b}(y)\phi + \kappa\phi^2 + \phi_y^2 + 2\psi_y$ , tenemos que  $T$  define una isometría entre  $g_{b,\kappa}$  y una métrica de Walker  $g_f$  con  $f(x, y)$  dada por la Ecuación (3.13).

Finalmente observemos que  $\kappa$  no es relevante en la discusión previa puesto que

$$\tilde{T}(t, x, y) = \left( \sqrt{\varepsilon\kappa}t, \varepsilon x, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\kappa}}y \right)$$

es una isometría entre  $g_{b,\kappa}$  y  $g_{\mathbf{a}} = 2dt \circ dy + dx \circ dx + (x^3 + \mathbf{a}(y)x)dy \circ dy$ , donde la función  $\mathbf{a}(y)$  está dada por  $\mathbf{a}(y) = (|\kappa|)^{-1}\mathbf{b}(|\kappa|^{-1/2}y)$  y  $\varepsilon = \text{Sign}(\kappa)$ . Lo que concluye la demostración.  $\square$

**Observación 3.5.** Cualquier métrica esencialmente conformemente simétrica  $g_{\mathbf{a}}$  dada por la Ecuación (3.3) está determinada por una función  $\mathbf{a}(y)$ . Por tanto, es natural preguntarse si dos funciones diferentes  $\mathbf{a}(y)$  y  $\mathbf{b}(y)$  determinan la misma clase de isometría. Para responder a esta cuestión, primero observemos que el núcleo y la imagen del operador de Ricci,  $\hat{\rho}$ , de cualquier métrica dada por la Ecuación (3.3) están generados por

$$\text{Ker } \hat{\rho} = \langle \partial_t, \partial_x \rangle, \quad \text{Im } \hat{\rho} = \langle \partial_t \rangle.$$

Así, cualquier isometría (local) debe preservar estos subespacios.

Sea  $\Phi = ({}^1\Phi(t, x, y), {}^2\Phi(t, x, y), {}^3\Phi(t, x, y))$  una isometría entre  $g_{\mathbf{a}}$  y  $g_{\mathbf{b}}$ , (i.e.  $\Phi^*g_{\mathbf{b}} = g_{\mathbf{a}}$ ). Puesto que  $\Phi$  tiene que preservar  $\text{Ker } \hat{\rho}$  e  $\text{Im } \hat{\rho}$ , se tiene que  ${}^3\Phi$  depende sólo de la coordenada  $y$  y  ${}^2\Phi$  es una función de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Además,

$$1 = g_{\mathbf{a}}(\partial_x, \partial_x) = g_{\mathbf{b}}(\Phi_*\partial_x, \Phi_*\partial_x) = ({}^2\Phi_x)^2,$$

con lo que  ${}^2\Phi(x, y) = \varepsilon_1 x + \varphi(y)$  siendo  $\varepsilon_1^2 = 1$ . A su vez, puesto que cualquier isometría ha de preservar el tensor de Ricci (i.e.,  $\Phi^*\rho_{\mathbf{b}} = \rho_{\mathbf{a}}$ , donde  $\rho_{\mathbf{a}}$  y  $\rho_{\mathbf{b}}$  son los tensores de Ricci de  $g_{\mathbf{a}}$  y  $g_{\mathbf{b}}$ , respectivamente), se tiene que en cualquier punto  $p = (t, x, y)$

$$-3x = \rho_{\mathbf{a}}(\partial_y, \partial_y)|_p = \rho_{\mathbf{b}}(\Phi_*\partial_y, \Phi_*\partial_y)|_{\Phi(p)} = -3(\varepsilon_1 x + \varphi(y)) ({}^3\Phi_y)^2,$$

de donde se sigue que  $\varphi(y) = 0$ ,  ${}^3\Phi(y) = \varepsilon_2 y + \alpha$  y  $\varepsilon_1 = 1$ , siendo  $\varepsilon_2^2 = 1$  y  $\alpha$  una constante arbitraria. Ahora bien,

$$0 = g_{\mathbf{a}}(\partial_x, \partial_y) = g_{\mathbf{b}}(\Phi_*\partial_x, \Phi_*\partial_y) = \varepsilon_2 {}^1\Phi_x,$$

de donde obtenemos que  ${}^1\Phi$  depende sólo de las coordenadas  $t$  e  $y$ , i.e.  ${}^1\Phi(t, x, y) = \Psi(t, y)$ . Además,

$$1 = g_a(\partial_t, \partial_y) = g_b(\Phi_*\partial_t, \Phi_*\partial_y) = \varepsilon_2 \Psi_t,$$

y entonces,  $\Psi(t, y) = \varepsilon_2 t + \Upsilon(y)$ . Por tanto, para cualquier punto  $p$  tenemos

$$x^3 + \mathbf{a}(y)x = g_a(\partial_y, \partial_y)|_p = g_b(\Phi_*\partial_y, \Phi_*\partial_y)|_{\Phi(p)} = x^3 + \mathbf{b}(\varepsilon_2 y + \alpha)x + 2\varepsilon_2 \Upsilon_y,$$

con lo que obtenemos  $\Upsilon(y) = \beta$ . Finalmente resulta que  $\Phi$  es una isometría de  $g_a$  a  $g_b$  si y sólo si

$$\Phi = (\varepsilon_2 t + \beta, x, \varepsilon_2 y + \alpha), \text{ y } \mathbf{a}(y) = \mathbf{b}(\varepsilon_2 y + \alpha), \quad \varepsilon_2^2 = 1.$$

Esto demuestra que:

*“El espacio de las clases de isometría de las variedades esencialmente conformemente simétricas de dimensión tres coincide con el espacio de funciones diferenciables de una variable  $\mathbf{a}(y)$ , salvo parametrización de velocidad constante.”*

**Observación 3.6.** Cualquier variedad Lorentziana esencialmente conformemente simétrica de dimensión  $n \geq 4$  tiene curvatura de Ricci recurrente (véase [34]). En dimensión  $n = 3$  esta propiedad también se verifica puesto que cualquier métrica Walker dada por la Ecuación (3.3) (de hecho, cualquier métrica Walker dada por la Ecuación (3.12)) tiene curvatura de Ricci recurrente.

Por otra parte, es conocido que cualquier variedad 2-simétrica (i.e.,  $\nabla^2 R = 0$  pero  $\nabla R \neq 0$ ) de dimensión tres tiene tensor de Cotton paralelo. A su vez, por los resultados obtenidos en [2] y en [8] se tiene que cualquier variedad 2-simétrica de dimensión tres es localmente conformemente llana. Por tanto, a partir de estos hechos, resulta que una variedad esencialmente conformemente simétrica de dimensión tres no puede ser 2-simétrica.

Finalmente, se sigue del trabajo realizado en [40] que las variedades esencialmente conformemente simétricas de dimensión tres no son localmente homogéneas (es más, no pueden ser 1-curvatura homogéneas)

## 3.2. Otras condiciones de paralelismo

Motivado por el estudio del tensor de Ricci y con el objetivo de generalizar las métricas Einstein, Alfred Gray trasladó en [45] las simetrías de la derivada covariante del tensor de Ricci (i.e., las procedentes de las simetrías de  $\rho$  y de la identidad de Bianchi  $\operatorname{div} \rho = \frac{1}{2} d\tau$ ) a un contexto algebraico y consideró el espacio de los tensores de tipo  $(0, 3)$  con las simetrías de  $\nabla \rho$ . Dicho espacio se descompone de forma natural bajo la acción del grupo ortogonal en tres subespacios irreducibles. Puesto que el tensor de Cotton tiene traza y divergencia nulas, siguiendo la terminología introducida por Gray en [45], establecemos las siguientes definiciones

- El tensor de Cotton es *cíclico paralelo*, o equivalentemente un *tensor Killing*, si  $(\nabla_X \tilde{C})(X, X) = 0$ .

- El tensor de Cotton es *Codazzi* si  $(\nabla_X \tilde{C})(Y, Z) = (\nabla_Y \tilde{C})(X, Z)$ .
- $(M, g)$  es una  $\mathcal{C}^\perp$ -variedad si

$$\begin{aligned} (\nabla_X \tilde{C})(Y, Z) = \frac{1}{(n+2)(n-1)} \{nX(\text{tr } \tilde{C})g(Y, Z) \\ + \frac{1}{2}(n-2)[Y(\text{tr } \tilde{C})g(X, Z) + Z(\text{tr } \tilde{C})g(X, Y)]\}, \end{aligned}$$

para todos los campos de vectores  $X, Y, Z$  en  $M$ .

Puesto que la clase  $\mathcal{C}^\perp$  se reduce a la clase de las variedades de dimensión tres conformemente simétricas, ya que  $\text{tr } \tilde{C} = 0$ , el objetivo de esta sección es estudiar las métricas de Walker en dimensión tres con tensor de Cotton cíclico paralelo y aquellas para las que el tensor de Cotton es Codazzi. Además, particularizamos los resultados al caso de que la variedad sea Walker estricta, obteniendo que en dicha situación si el tensor de Cotton es cíclico paralelo ha de ser necesariamente paralelo. No obstante, este resultado no se mantiene cuando el tensor de Cotton es Codazzi, es decir, una variedad Walker estricta con tensor de Cotton Codazzi no es necesariamente conformemente simétrica o, equivalentemente, su tensor de Cotton no es necesariamente paralelo. Este estudio permite poner de manifiesto la existencia de ejemplos de variedades cuyo tensor de Cotton es Killing o Codazzi, pero no paralelo y es el punto de partida para posteriores estudios en esta sección.

### 3.2.1. Variedades Walker con tensor de Cotton cíclico paralelo

Analizamos en este apartado cuándo una variedad Walker  $(M, g_f)$  con

$$(3.14) \quad g_f = 2 dt \circ dy + dx \circ dx + f(t, x, y) dy \circ dy,$$

tiene tensor de Cotton cíclico paralelo. Como veremos, dicha condición es muy rígida en el contexto de la geometría Walker.

**Teorema 3.7.** *El tensor de Cotton de una variedad Walker de dimensión tres  $(M, g_f)$  es cíclico paralelo si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

- (i) *existen funciones derivables  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ , con constantes reales  $\alpha$  y  $\beta$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$\begin{aligned} f(t, x, y) = \mathcal{A}t^3 + (\mathcal{B}x + \mathcal{C})t^2 + \frac{1}{3\mathcal{A}}(\mathcal{B}^2x^2 + 2\mathcal{B}\mathcal{C}x + 6\mathcal{A}' + \mathcal{C}^2 + 3\alpha)t \\ + \frac{1}{27\mathcal{A}^2}\{\mathcal{B}^3x^3 + 3\mathcal{B}^2\mathcal{C}x^2 + 3(6\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{B}(\mathcal{C}^2 + 3\alpha))x \\ + 18\mathcal{A}\mathcal{C}' + 3\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^3 + 9\alpha\mathcal{C} + 27\beta\}, \end{aligned}$$

(ii) existen funciones derivables  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{D}(y) \neq 0$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como

$$f(t, x, y) = (\mathcal{D}x + \mathcal{E})t - \frac{1}{48}\mathcal{D}^2x^4 - \frac{1}{12}(2\mathcal{D}' + \mathcal{D}\mathcal{E})x^3 + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I},$$

(iii) existen funciones derivables  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{F}(y) \neq 0$ , tal que la función  $f$  se expresa localmente como

$$f(t, x, y) = -\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}}t + \mathcal{F}x^3 + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I},$$

(iv) existen funciones derivables  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como

$$f(t, x, y) = \mathcal{E}t + \mathcal{G}x^2 + \mathcal{H}x + \mathcal{I},$$

(v) existen funciones derivables  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{C}(y) \neq 0$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como

$$\begin{aligned} f(t, x, y) = & \mathcal{C}t^2 - \left(\frac{1}{2}\mathcal{C}'x^2 - \mathcal{D}x - \mathcal{E}\right)t \\ & + \frac{1}{16\mathcal{C}^2} \{ \mathcal{C}(\mathcal{C}')^2x^4 - 4\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{C}'x^3 - 4(2\mathcal{C}\mathcal{C}'' - 3(\mathcal{C}')^2 + \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{C}' - \mathcal{C}\mathcal{D}^2)x^2 \\ & - 8(3\mathcal{D}\mathcal{C}' - 2\mathcal{C}\mathcal{D}' - \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E})x + 16\mathcal{C}(\mathcal{C}\mathcal{F} + \Xi(x, y)) \}, \end{aligned}$$

donde

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y)e^{\sqrt{\mathcal{C}(y)}x} + \mathcal{H}(y)e^{-\sqrt{\mathcal{C}(y)}x}, & \text{si } \mathcal{C}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y)\cos(\sqrt{-\mathcal{C}(y)}x) + \mathcal{H}(y)\sin(\sqrt{-\mathcal{C}(y)}x), & \text{si } \mathcal{C}(y) < 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Por un cálculo largo pero directo usando la Ecuación (3.8) se demuestra que el tensor de Cotton de una variedad Walker de dimensión tres es cíclico paralelo si y sólo si

$$(3.15) \quad \begin{cases} f_{tttt} = f_{tttx} = f_{ttxx} = f_{txxx} = 0, \\ 2f_{ttty}f - 2f_{ttyy} - 2f_{txxy} + 2f_{xxxx} + f_{tt}f_y \\ \quad + f_{tx}f_x - f_{ty}f_t - f_{tx}f_t - f_{tt}f_{xx} + f_{tx}^2 = 0, \\ 2f_{ttxy}f - 2f_{txyy} - 2f_{xxxy} - f_{tt}f_xf + f_{tx}f_t + f_{tx}f_y + 2f_{tty}f_x \\ \quad + 2f_{txx}f_x - 3f_{txy}f_t - 2f_{xxx}f_t + f_{tt}f_{xy} + f_{tt}f_tf_x - f_{tx}f_{ty} - f_{tx}f_t^2 = 0. \end{cases}$$

Integrando en la primera ecuación en (3.15) obtenemos la existencia de funciones derivables  $P$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , y una función diferenciable  $Q$ , dependiendo de las coordenadas  $(x, y)$ , tales que

$$(3.16) \quad f(t, x, y) = \mathcal{A}(y)t^3 + (\mathcal{B}(y)x + \mathcal{C}(y))t^2 + (P(y)x^2 + \mathcal{D}(y)x + \mathcal{E}(y))t + Q(x, y).$$

Derivando ahora en la segunda ecuación en (3.15) respecto a  $t$  dos veces obtenemos

$$(3.17) \quad 3P(y)\mathcal{A}(y) - \mathcal{B}(y)^2 = 0,$$

y consideramos dos casos diferentes dependiendo de si  $\mathcal{A}(y)$  se anula o no.

*Primer caso:*  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ .

En este caso, la Ecuación (3.17) implica que  $P(y) = \frac{\mathcal{B}(y)^2}{3\mathcal{A}(y)}$  y por tanto la Ecuación (3.16) se transforma en

$$(3.18) \quad f(t, x, y) = \mathcal{A}(y)t^3 + (\mathcal{B}(y)x + \mathcal{C}(y))t^2 + \left(\frac{\mathcal{B}(y)^2}{3\mathcal{A}(y)}x^2 + \mathcal{D}(y)x + \mathcal{E}(y)\right)t + Q(x, y).$$

Derivando ahora en la segunda ecuación de (3.15) respecto a  $t$  una vez y respecto a  $x$  dos veces resulta  $\mathcal{A}(y)Q_{xxxx}(x, y) = 0$ , y puesto que estamos suponiendo que  $\mathcal{A}(y) \neq 0$  se sigue que

$$(3.19) \quad Q(x, y) = S(y)x^3 + T(y)x^2 + U(y)x + V(y),$$

para ciertas funciones  $S$ ,  $T$ ,  $U$  y  $V$  que dependen únicamente de la coordenada  $y$ . Continuamos derivando la última ecuación de (3.15) respecto a  $t$  cuatro veces y obtenemos  $\mathcal{A}(y)(3\mathcal{A}(y)\mathcal{D}(y) - 2\mathcal{B}(y)\mathcal{C}(y)) = 0$ , de donde se sigue que

$$(3.20) \quad \mathcal{D}(y) = \frac{2\mathcal{B}(y)\mathcal{C}(y)}{3\mathcal{A}(y)}.$$

Derivando ahora la segunda ecuación en (3.15) respecto a  $t$  y  $x$  obtenemos la igualdad  $27\mathcal{A}(y)^2S(y) - \mathcal{B}(y)^3 = 0$ , y así

$$(3.21) \quad S(y) = \frac{\mathcal{B}(y)^3}{27\mathcal{A}(y)^2},$$

mientras que derivando en la última ecuación en (3.15) respecto a  $t$  tres veces y respecto a  $x$  una vez resulta

$$9\mathcal{A}(y)^2T(y) - \mathcal{B}(y)^2\mathcal{C}(y) = 0,$$

y por tanto

$$(3.22) \quad T(y) = \frac{\mathcal{B}(y)^2\mathcal{C}(y)}{9\mathcal{A}(y)^2}.$$

A continuación, derivando la última ecuación en (3.15) respecto a  $t$  tres veces obtenemos

$$3\mathcal{A}(y)^2U(y) + 2\mathcal{B}(y)\mathcal{A}'(y) - 2\mathcal{A}(y)\mathcal{B}'(y) - \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(y)\mathcal{E}(y) = 0,$$

y así

$$(3.23) \quad U(y) = -\frac{1}{3\mathcal{A}(y)^2} \{2\mathcal{B}(y)\mathcal{A}'(y) - 2\mathcal{A}(y)\mathcal{B}'(y) - \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(y)\mathcal{E}(y)\}.$$

Derivando una vez más la segunda ecuación en (3.15) respecto a  $t$  resulta

$$3\mathcal{A}(y)\mathcal{E}'(y) + 3\mathcal{A}'(y)\mathcal{E}(y) - 6\mathcal{A}''(y) - 2\mathcal{C}(y)\mathcal{C}'(y) = 0,$$

de donde, integrando de forma directa, obtenemos

$$(3.24) \quad \mathcal{E}(y) = \frac{1}{3\mathcal{A}(y)} (6\mathcal{A}'(y) + \mathcal{C}(y)^2 + 3\alpha),$$

siendo  $\alpha$  un número real. En este punto, la Ecuación (3.15) se reduce a

$$9\mathcal{A}(y)^2 V'(y) + 18\mathcal{A}(y)\mathcal{A}'(y)V(y) - 6\mathcal{A}(y)\mathcal{C}''(y) \\ - 6\mathcal{A}'(y)\mathcal{C}'(y) - 2\mathcal{B}(y)\mathcal{B}'(y) - \mathcal{C}(y)^2\mathcal{C}'(y) - 3\alpha\mathcal{C}'(y) = 0,$$

e integrando de forma directa se obtiene

$$(3.25) \quad V(y) = \frac{1}{27\mathcal{A}(y)^2} (18\mathcal{A}(y)\mathcal{C}'(y) + 3\mathcal{B}(y)^2 + \mathcal{C}(y)^3 + 9\alpha\mathcal{C}(y) + 27\beta),$$

donde  $\beta$  es un número real. Haciendo uso de las Ecuaciones (3.19)–(3.25) en la Ecuación (3.18) se obtiene el caso (i).

Segundo caso:  $\mathcal{A}(y) = 0$ .

En este caso, la Ecuación (3.17) implica que  $\mathcal{B}(y) = 0$  y derivando en la segunda ecuación en (3.15) respecto a  $t$  obtenemos

$$(3.26) \quad \mathcal{C}(y)(\mathcal{C}'(y) + 2P(y)) = 0.$$

Si en primer lugar suponemos  $\mathcal{C}(y) = 0$ , entonces derivando la última ecuación en (3.15) respecto a  $t$  y respecto a  $x$  implica que  $P(y) = 0$  y la Ecuación (3.16) se transforma en

$$(3.27) \quad f(t, x, y) = (\mathcal{D}(y)x + \mathcal{E}(y))t + Q(x, y).$$

Además, la segunda ecuación en (3.15) se reduce a  $2Q_{xxxx}(x, y) = -\mathcal{D}(y)^2$  y por tanto existen funciones diferenciables  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{I}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que

$$(3.28) \quad Q(x, y) = -\frac{1}{48}\mathcal{D}(y)^2 x^4 + \mathcal{F}(y)x^3 + \mathcal{G}(y)x^2 + \mathcal{H}(y)x + \mathcal{I}(y),$$

y la Ecuación (3.15) es equivalente a

$$\mathcal{D}(y)(2\mathcal{D}'(y) + \mathcal{D}(y)\mathcal{E}(y) + 12\mathcal{F}(y))x + 2\mathcal{D}''(y) \\ + 3\mathcal{E}(y)\mathcal{D}'(y) + \mathcal{D}(y)\mathcal{E}'(y) + 12\mathcal{F}'(y) + \mathcal{D}(y)\mathcal{E}(y)^2 + 12\mathcal{E}(y)\mathcal{F}(y) = 0.$$

Derivando respecto a  $x$  obtenemos  $\mathcal{D}(y)(2\mathcal{D}'(y) + \mathcal{D}(y)\mathcal{E}(y) + 12\mathcal{F}(y)) = 0$ . Ahora bien, si  $\mathcal{D}(y) \neq 0$ , entonces  $\mathcal{F}(y) = -\frac{1}{12}(2\mathcal{D}'(y) + \mathcal{D}(y)\mathcal{E}(y))$  y considerando las Ecuaciones

(3.27) y (3.28) se obtiene el caso (ii). Por otra parte, si  $\mathcal{D}(y) = 0$  entonces las ecuaciones anteriores se reducen a  $\mathcal{F}'(y) + \mathcal{E}(y)\mathcal{F}(y) = 0$  y considerando de nuevo las Ecuaciones (3.27) y (3.28) se obtienen de forma directa los casos (iii) e (iv), dependiendo de si  $\mathcal{F}(y)$  es idénticamente nula o no.

Finalmente, supongamos que  $\mathcal{C}(y) \neq 0$  en la Ecuación (3.26). En este caso resulta que  $P(y) = -\frac{1}{2}\mathcal{C}'(y)$  y

$$(3.29) \quad f(t, x, y) = \mathcal{C}(y)t^2 + \left(\mathcal{D}(y)x - \frac{1}{2}\mathcal{C}'(y)x^2 + \mathcal{E}(y)\right)t + Q(x, y).$$

A su vez, la segunda ecuación en (3.15) se reduce a

$$4Q_{xxxx}(x, y) - 4\mathcal{C}(y)Q_{xx}(x, y) + 3\mathcal{C}'(y)^2x^2 - 4\mathcal{C}''(y) - 6\mathcal{D}(y)\mathcal{C}'(y)x - 2\mathcal{E}(y)\mathcal{C}'(y) + 2\mathcal{D}(y)^2 = 0,$$

e integrando de forma directa se obtiene la existencia de funciones derivables  $S$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que

$$(3.30) \quad \begin{aligned} 16\mathcal{C}(y)^2Q(x, y) &= \mathcal{C}(y)\mathcal{C}'(y)^2x^4 - 4\mathcal{C}(y)\mathcal{D}(y)\mathcal{C}'(y)x^3 \\ &- 4(2\mathcal{C}(y)\mathcal{C}''(y) - 3\mathcal{C}'(y)^2 + \mathcal{C}(y)\mathcal{E}(y)\mathcal{C}'(y) - \mathcal{C}(y)\mathcal{D}(y)^2)x^2 \\ &+ 16\mathcal{C}(y)^2S(y)x + 16\mathcal{C}(y)(\mathcal{C}(y)\mathcal{F}(y) + \Xi(x, y)), \end{aligned}$$

donde

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y)e^{\sqrt{\mathcal{C}(y)}x} + \mathcal{H}(y)e^{-\sqrt{\mathcal{C}(y)}x}, & \text{si } \mathcal{C}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y)\cos(\sqrt{-\mathcal{C}(y)}x) + \mathcal{H}(y)\sin(\sqrt{-\mathcal{C}(y)}x), & \text{si } \mathcal{C}(y) < 0. \end{cases}$$

A continuación, derivando en la última ecuación en (3.15) respecto a  $t$  implica que

$$2\mathcal{C}(y)^2S(y) + 3\mathcal{D}(y)\mathcal{C}'(y) - 2\mathcal{C}(y)\mathcal{D}'(y) - \mathcal{C}(y)\mathcal{D}(y)\mathcal{E}(y) = 0,$$

y por tanto,

$$(3.31) \quad S(y) = -\frac{1}{2\mathcal{C}(y)^2}(3\mathcal{D}(y)\mathcal{C}'(y) - 2\mathcal{C}(y)\mathcal{D}'(y) - \mathcal{C}(y)\mathcal{D}(y)\mathcal{E}(y)).$$

Es decir, la Ecuación (3.15) se verifica y haciendo uso de las Ecuaciones (3.30) y (3.31) en la Ecuación (3.29) se obtiene el caso (v).  $\square$

**Corolario 3.8.** *Sea  $(M, g_f)$  una variedad Walker estricta de dimensión tres. Si  $(M, g_f)$  tiene tensor de Cotton cíclico paralelo entonces ha de ser necesariamente paralelo.*

*Demostración.* Recordemos que, en virtud del Teorema 1.10, una variedad Walker estricta admite un sistema local de coordenadas  $(t, x, y)$  respecto al cual el tensor métrico Lorentziano se expresa como

$$(3.32) \quad g_f = 2 dt \circ dy + dx \circ dx + f(x, y) dy \circ dy.$$

Por la Ecuación (3.7) tenemos que el único término no nulo del tensor de Cotton está dado por

$$(3.33) \quad \tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2} f_{xxx},$$

y por tanto, su derivada covariante está determinada por las componentes no nulas

$$(3.34) \quad (\nabla_{\partial_x} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2} f_{xxxx}, \quad (\nabla_{\partial_y} \tilde{C})(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2} f_{xxxy}.$$

Con esto se sigue ya de forma directa que el tensor de Cotton de una variedad Walker estricta dada por la Ecuación (3.32) es cíclico paralelo si y sólo si es paralelo.  $\square$

**Observación 3.9.** Cabe destacar que el único caso no trivial en el Teorema 3.7, es decir, tal que el tensor de Cotton sea cíclico paralelo pero no paralelo,  $\nabla \tilde{C} \neq 0$ , es el caso (i).

### 3.2.2. Variedades Walker con tensor de Cotton Codazzi

Los tensores Codazzi juegan un papel importante en muchos aspectos de la geometría pseudo-Riemanniana. Por ejemplo, como ya hemos visto, el tensor de Schouten de cualquier variedad localmente conformemente llana es un tensor Codazzi. Motivados por esto, y como una generalización de las métricas obtenidas en el Teorema 3.4, determinamos en este apartado todas las métricas Walker de dimensión tres dadas por la Ecuación (3.32) cuyo tensor de Cotton es Codazzi.

**Teorema 3.10.** *El tensor de Cotton de una variedad Walker de dimensión tres  $(M, g_f)$  es Codazzi si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

(i) *existen funciones derivables  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$f(t, x, y) = (\mathcal{B}x^2 + \mathcal{C}x + \mathcal{D})t - \frac{1}{90}\mathcal{B}^2x^6 - \frac{1}{30}\mathcal{B}\mathcal{C}x^5 \\ - \frac{1}{48}(8\mathcal{B}' + 4\mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{C}^2)x^4 + \mathcal{E}x^3 + \mathcal{F}x^2 + \mathcal{G}x + \mathcal{H},$$

(ii) *existen funciones derivables  $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , con  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ , tales que la función  $f$  se expresa localmente como*

$$\begin{aligned}
f(t, x, y) &= \mathcal{A}t^2 - \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}'x^2 - \mathcal{C}x - \mathcal{D}\right)t \\
&\quad + \frac{1}{16\mathcal{A}^2} \left\{ \mathcal{A}(\mathcal{A}')^2 x^4 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{A}'x^3 - 4(2\mathcal{A}\mathcal{A}'' - 3(\mathcal{A}')^2 + \mathcal{A}\mathcal{D}\mathcal{A}' - \mathcal{A}\mathcal{C}^2)x^2 \right. \\
&\quad \left. + 16\mathcal{A}^2\mathcal{E}x + 16\mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{F} + \Xi(x, y)) \right\},
\end{aligned}$$

donde

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y)e^{\sqrt{\mathcal{A}(y)}x} + \mathcal{H}(y)e^{-\sqrt{\mathcal{A}(y)}x}, & \text{si } \mathcal{A}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y)\cos(\sqrt{-\mathcal{A}(y)}x) + \mathcal{H}(y)\operatorname{sen}(\sqrt{-\mathcal{A}(y)}x), & \text{si } \mathcal{A}(y) < 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Por un cálculo largo pero directo a partir de la Ecuación (3.8) se obtiene que el tensor de Cotton de una variedad Walker de dimensión tres es Codazzi si y sólo si

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{ttt} &= f_{ttt} = 0, \\ 2f_{ttty} + 2f_{tttx} - f_{tt}f_t &= 0, \\ 6f_{ttxy} + 4f_{ttxx} - 3f_{tt}f_x &= 0, \\ 2f_{ttty}f + 4f_{tttx}f - 2f_{ttty} - 8f_{ttxy} - 4f_{ttxx} \\ + f_{tt}f_y + 7f_{tt}f_x - f_{tt}f_t - 4f_{tt}f_t + 2f_{tt}f_{xx} - 2f_{tt}^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Integrando la primera ecuación de (3.35) se obtiene la existencia de una función derivable  $P$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , y de funciones diferenciables  $Q$ ,  $S$  y  $T$ , dependiendo de las coordenadas  $(x, y)$ , tales que

$$f(t, x, y) = P(y)t^3 + Q(x, y)t^2 + S(x, y)t + T(x, y).$$

Derivando ahora la segunda ecuación respecto a  $t$  dos veces obtenemos que  $P(y)$  es idénticamente nula. Así, la segunda ecuación se reduce a  $Q_{xx} = 0$ , con lo que  $Q(x, y) = \mathcal{U}(y)x + \mathcal{A}(y)$  para ciertas funciones derivables  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{A}$  dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ . Además, derivando la última ecuación respecto a  $t$  dos veces obtenemos  $\mathcal{U}(y) = 0$ , y por tanto

$$f(t, x, y) = \mathcal{A}(y)t^2 + S(x, y)t + T(x, y).$$

La tercera ecuación se reduce de este modo a  $S_{xxx}(x, y) = 0$ , lo que implica la existencia de funciones derivables  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ , tales que  $S(x, y) = \mathcal{B}(y)x^2 + \mathcal{C}(y)x + \mathcal{D}(y)$ , y

$$(3.36) \quad f(t, x, y) = \mathcal{A}(y)t^2 + (\mathcal{B}(y)x^2 + \mathcal{C}(y)x + \mathcal{D}(y))t + T(x, y).$$

En este punto,  $f(t, x, y)$  verifica las tres primeras ecuaciones de (3.35) y la última de ellas se corresponde con

$$(3.37) \quad \begin{aligned} &2T_{xxx}(x, y) - 2T_{xx}(x, y)\mathcal{A}(y) + 2\mathcal{A}(y)(\mathcal{A}'(y) + 2\mathcal{B}(y))t \\ &\quad + \mathcal{B}(y)(\mathcal{A}'(y) + 8\mathcal{B}(y))x^2 + \mathcal{C}(y)(\mathcal{A}'(y) + 8\mathcal{B}(y))x \\ &\quad + 2\mathcal{A}''(y) + \mathcal{D}(y)\mathcal{A}'(y) + 8\mathcal{B}'(y) + 4\mathcal{B}(y)\mathcal{D}(y) + \mathcal{C}(y)^2 = 0. \end{aligned}$$

En lo que resta de la demostración analizaremos la ecuación anterior. Observemos que derivándola respecto a  $t$  se obtiene

$$(3.38) \quad \mathcal{A}(y) (\mathcal{A}'(y) + 2\mathcal{B}(y)) = 0,$$

por lo que consideramos dos casos diferentes en función de si  $\mathcal{A}(y)$  se anula o no.

Comencemos suponiendo que  $\mathcal{A}(y) = 0$ . En este caso, la Ecuación (3.37) se reduce a

$$2T_{xxxx}(x, y) + 8\mathcal{B}(y)^2 x^2 + 8\mathcal{B}(y)\mathcal{C}(y)x + 8\mathcal{B}'(y) + 4\mathcal{B}(y)\mathcal{D}(y) + \mathcal{C}(y)^2 = 0,$$

e integrando de forma directa obtenemos

$$T(x, y) = -\frac{1}{90}\mathcal{B}(y)^2 x^6 - \frac{1}{30}\mathcal{B}(y)\mathcal{C}(y)x^5 - \frac{1}{48}(8\mathcal{B}'(y) + 4\mathcal{B}(y)\mathcal{D}(y) + \mathcal{C}(y)^2)x^4 \\ + \mathcal{E}(y)x^3 + \mathcal{F}(y)x^2 + \mathcal{G}(y)x + \mathcal{H}(y).$$

De este modo, haciendo uso de la expresión dada en la Ecuación (3.36) se obtiene el caso (i).

Supongamos ahora que  $\mathcal{A}(y) \neq 0$ . La Ecuación (3.38) implica que  $\mathcal{B}(y) = -\frac{1}{2}\mathcal{A}'(y)$  y por tanto la Ecuación (3.37) se reduce a

$$4T_{xxxx}(x, y) - 4\mathcal{A}(y)T_{xx}(x, y) + 3\mathcal{A}'(y)^2 x^2 \\ - 6\mathcal{C}(y)\mathcal{A}'(y)x - 4\mathcal{A}''(y) - 2\mathcal{D}(y)\mathcal{A}'(y) + 2\mathcal{C}(y)^2 = 0.$$

Integrando de forma directa en esta ecuación obtenemos dos posibilidades para la función  $T(x, y)$ , dependiendo del signo de  $\mathcal{A}(y)$ . De forma más precisa,

$$16\mathcal{A}(y)^2 T(x, y) = \mathcal{A}(y)\mathcal{A}'(y)^2 x^4 - 4\mathcal{A}(y)\mathcal{C}(y)\mathcal{A}'(y)x^3 \\ - 4(2\mathcal{A}(y)\mathcal{A}''(y) - 3\mathcal{A}'(y)^2 + \mathcal{A}(y)\mathcal{D}(y)\mathcal{A}'(y) - \mathcal{A}(y)\mathcal{C}(y)^2)x^2 \\ + 16\mathcal{A}(y)^2 \mathcal{E}(y)x + 16\mathcal{A}(y)(\mathcal{A}(y)\mathcal{F}(y) + \Xi(x, y)),$$

donde

$$\Xi(x, y) = \begin{cases} \mathcal{G}(y)e^{\sqrt{\mathcal{A}(y)}x} + \mathcal{H}(y)e^{-\sqrt{\mathcal{A}(y)}x}, & \text{si } \mathcal{A}(y) > 0, \\ \mathcal{G}(y)\cos(\sqrt{-\mathcal{A}(y)}x) + \mathcal{H}(y)\sin(\sqrt{-\mathcal{A}(y)}x), & \text{si } \mathcal{A}(y) < 0. \end{cases}$$

Es decir, el caso (ii) se obtiene ahora de forma directa a partir de la Ecuación (3.36).  $\square$

**Observación 3.11.** Es posible obtener ejemplos no triviales en cada uno de los casos enunciados en el Teorema 3.10, es decir, tal que el tensor de Cotton sea Codazzi pero no paralelo. De este modo, para el caso (i) basta que  $\mathcal{B}(y) \neq 0$ . Mientras que para el caso (ii) es suficiente con que  $\mathcal{E}(y) \neq \frac{\mathcal{A}(y)\mathcal{C}(y)\mathcal{D}(y) - 3\mathcal{C}(y)\mathcal{A}'(y) + 2\mathcal{A}(y)\mathcal{C}'(y)}{2\mathcal{A}(y)^2}$  si  $\mathcal{A}(y) > 0$ .

**Corolario 3.12.** *El tensor de Cotton de una variedad Walker estricta  $(M, g)$  de dimensión tres es Codazzi si y sólo si la métrica está dada por*

$$(3.39) \quad g_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = 2 dt \circ dy + dx \circ dx + (\mathbf{b}(y)x^3 + \mathbf{a}(y)x)dy \circ dy,$$

donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son funciones derivables arbitrarias dependiendo de la coordenada  $y$ .

*Demostración.* Se sigue de la Ecuación (3.34) que el tensor de Cotton de una variedad Walker estricta de dimensión tres es Codazzi pero no paralelo si y sólo si

$$f_{xxxx} = 0 \quad \text{y} \quad f_{xxx}y \neq 0.$$

Así, la métrica Walker dada por la Ecuación (3.32) está determinada por la función

$$(3.40) \quad f(x, y) = \alpha(y)x^3 + \beta(y)x^2 + \gamma(y)x + \delta(y),$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son funciones derivables en la coordenada  $y$ .

En lo que resta de la demostración comprobaremos que cualquier métrica dada por la Ecuación (3.39) es localmente isométrica a alguna métrica dada por la Ecuación (3.40) para funciones  $\mathbf{a}(y)$  y  $\mathbf{b}(y)$  adecuadas. Para ello procedemos como en la demostración del Teorema 3.4. Sea  $g_f$  una métrica Walker (3.32) y sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación diferenciable dada por

$$T(t, x, y) = (t - \varphi_y x + \psi, x + \varphi, y),$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones derivables dependiendo únicamente de la coordenada  $y$ . De este modo  $T$  define una isometría entre  $g_f$  y otra métrica Walker  $g_{\tilde{f}}$  dada por la Ecuación (3.32) para alguna función

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + \varphi, y) - 2x\varphi_{yy} + \varphi_y^2 + 2\psi_y.$$

Consideremos ahora una métrica Walker dada por la Ecuación (3.39) definida por funciones arbitrarias  $\mathbf{a}(y)$  y  $\mathbf{b}(y)$ . Entonces  $T$  define una isometría entre dos métricas Walker  $g_f$  y  $g_{\tilde{f}}$  donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= \mathbf{b}(y)(x + \varphi)^3 + \mathbf{a}(y)(x + \varphi) - 2x\varphi_{yy} + \varphi_y^2 + 2\psi_y \\ &= \mathbf{b}(y)x^3 + 3\mathbf{b}(y)\varphi x^2 + (\mathbf{a}(y) + 3\mathbf{b}(y)\varphi^2 - 2\varphi_{yy})x + \mathbf{a}(y)\varphi + \mathbf{b}(y)\varphi^2 + \varphi_y^2 + 2\psi_y. \end{aligned}$$

Tomando  $\alpha(y) = \mathbf{b}(y)$ ,  $\beta$  definida por  $\beta(y) = 3\mathbf{b}(y)\varphi$ ,  $\gamma$  definida por  $\gamma(y) = \mathbf{a}(y) + 3\mathbf{b}(y)\varphi^2 - 2\varphi_{yy}$  y escogiendo  $\psi$  tal que  $\delta(y) = \mathbf{a}(y)\varphi + \mathbf{b}(y)\varphi^2 + \varphi_y^2 + 2\psi_y$ , se tiene que  $T$  define una isometría entre la métrica Walker definida por la Ecuación (3.40) y una métrica Walker  $g_f$  con  $f(x, y)$  dada por la Ecuación (3.32); lo que termina la demostración.  $\square$

A partir de estos resultados obtenemos las siguientes consecuencias:

- Existen métricas Walker con tensor de Cotton Codazzi que no son conformemente simétricas. Estas métricas no son homogéneas, incluso no son 1-curvatura homogéneas [40].
- De forma similar a lo obtenido a partir del Teorema 3.4, resulta que el espacio de las clases de isometría de las métricas de Walker estrictas de dimensión tres con tensor de Cotton Codazzi coincide con el espacio de las funciones diferenciables de una variable  $(\mathbf{a}(y), \mathbf{b}(y))$ , salvo reparametrizaciones de velocidad constante.

### 3.3. Solitones de Cotton homogéneos

Recordemos que un *solitón de Cotton* es una variedad pseudo-Riemanniana admitiendo un campo de vectores  $X$  tal que

$$(3.41) \quad \mathcal{L}_X g + \tilde{C} = \lambda g.$$

El problema de existencia de solitones de Cotton es en general un problema abierto; no obstante, en [26] se demuestra que un solitón de Cotton Riemanniano compacto  $(M, g, X)$  es necesariamente localmente conformemente llano y  $X$  es un campo de vectores de Killing, por tanto, en tal caso no existen solitones de Cotton no triviales. Además, en el caso no compacto, los autores dan ejemplos de existencia de solitones de Cotton contractivos no triviales en el grupo de Heisenberg.

Estudiamos en esta sección los solitones de Cotton en los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres. De este modo, en la Sección 3.3.1 estudiamos la existencia de solitones de Cotton invariantes a la izquierda no triviales; mientras que en la Sección 3.3.2 determinamos los solitones de Cotton algebraicos, lo que nos permitirá construir ejemplos de solitones de Cotton Lorentzianos homogéneos contractivos y expansivos no invariantes y no triviales en el grupo de Heisenberg (tanto en el caso Riemanniano como en el Lorentziano) y en el grupo  $E(1, 1)$ , es decir, en el grupo de los movimientos rígidos del espacio de Minkowski de dimensión dos,  $\mathbb{R}_1^2$ .

#### 3.3.1. Solitones de Cotton invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos

En esta sección particularizamos el estudio de la existencia de solitones de Cotton al caso de soluciones invariantes a la izquierda de la Ecuación (3.41) en las álgebras de Lie Lorentzianas clasificadas en la Sección 1.2.1. De este modo, resolvemos las correspondientes ecuaciones, obteniendo una descripción completa de todos los solitones de Cotton no triviales invariantes a la izquierda.

Puesto que el tensor de Cotton, dado por la Ecuación (3.1), tiene traza nula, si un campo de vectores de Killing  $X$  verifica la Ecuación (3.41) entonces  $\tilde{C} = 0$  y  $(M, g)$  es localmente conformemente llana. Recíprocamente, si  $(M, g)$  es localmente conformemente llana y homogénea, entonces cualquier solitón de Cotton es un campo de vectores homotético y por tanto es de Killing o el operador de Ricci es dos pasos nilpotente y  $(M, g, X)$  resulta también un solitón de Yamabe. Los grupos de Lie Lorentzianos localmente conformemente llanos de dimensión tres han sido estudiados por Calvaruso en [18]. Trasladamos su clasificación a nuestro contexto, con el fin de unificar la notación usada en el resto del capítulo.

**Lema 3.13.** [18] *Un grupo de Lie Lorentziano de dimensión tres  $(G, g)$  es localmente conformemente llano si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- (i)  $(G, g)$  es localmente simétrico y

- (i.a) de Tipo Ia con  $\alpha = \beta = \gamma$  o cualquier permutación cíclica de  $\alpha = \beta, \gamma = 0$  (en cualquiera de estos casos  $(G, g)$  es de curvatura seccional constante),
- (i.b) de Tipo II con  $\alpha = \beta = 0$ , y por tanto llano,
- (i.c) de Tipo IV.1 con curvatura seccional constante o, equivalentemente, si verifica  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ , o  $\beta = \gamma = \delta = 0$  y  $\alpha \neq 0$ ,
- (i.d) de Tipo IV.2 con curvatura seccional constante o, equivalentemente, si verifica  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  y  $\delta \neq 0$ , o  $\beta = \gamma = \delta = 0$  y  $\alpha \neq 0$ ,
- (i.e) de Tipo IV.3 y llano, o de otra manera  $\gamma = \delta = 0$  y  $\alpha \neq 0$ ,
- (i.f) de Tipo  $\mathfrak{S}$  y por tanto de curvatura seccional constante.

(ii)  $(G, g)$  es no localmente simétrico y

- (ii.a) de Tipo Ib con  $\alpha = -2\gamma$  y  $\beta = \pm\sqrt{3}\gamma$ ,
- (ii.b) de Tipo III con  $\alpha = 0$ ,
- (ii.c) de Tipo IV.3 con  $\gamma = 0$  y  $\alpha\delta(\alpha - \delta) \neq 0$ .

En el resto de la sección centraremos nuestra atención en el estudio de la existencia de solitones de Cotton no triviales. Debido a esto, haremos uso del Lema 3.13 de forma reiterada para excluir aquellos casos correspondientes a grupos de Lie localmente conformemente llanos. En particular, los resultados obtenidos en esta sección pueden resumirse en la siguiente caracterización geométrica

**Teorema 3.14.** *Un grupo de Lie Lorentziano  $(G, g)$  admite un solitón de Cotton no trivial invariante a la izquierda si y sólo si el operador de Cotton es nilpotente. De forma más precisa, el grupo de Lie Lorentziano  $(G, g)$  ha de ser alguno de los siguientes*

- (i) de Tipo II con  $\alpha = \beta \neq 0$  y localmente isométrico a  $O(1, 2)$  o a  $SL(2, \mathbb{R})$ ,
- (ii) de Tipo II con  $\alpha = 0 \neq \beta$  y localmente isométrico a  $E(1, 1)$ ,
- (iii) de tipo III con  $\alpha \neq 0$  y localmente isométrico a  $O(1, 2)$  o  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Observemos que este resultado pone de manifiesto la diferencia entre el caso Riemanniano y el caso Lorentziano, puesto que cualquier operador autoadjunto y nilpotente se anula en el caso Riemanniano. Antes de demostrar este resultado haremos un estudio caso por caso de lo que ocurre en las diferentes álgebras de Lie.

### Caso unimodular

En este apartado consideramos la existencia de solitones de Cotton invariantes a la izquierda en los grupos de Lie Lorentzianos unimodulares cuyas correspondientes álgebras de Lie fueron introducidas en la Sección (1.2.1).

### i) Tipo Ia

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo Ia viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por

$$[e_1, e_2] = -\gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

Sea  $X = \sum \xi_i e_i$  un campo de vectores invariante a la izquierda. Los términos no nulos de la derivada de Lie de la métrica,  $\mathcal{L}_X g$ , están dados por

$$(3.42) \quad (\mathcal{L}_X g)_{12} = (\alpha - \beta)\xi_3, \quad (\mathcal{L}_X g)_{13} = (\gamma - \alpha)\xi_2, \quad (\mathcal{L}_X g)_{23} = (\beta - \gamma)\xi_1.$$

Asímismo, las componentes no nulas del tensor de Cotton vienen dadas por

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= \frac{1}{2} (2\alpha^3 - \alpha^2(\beta + \gamma) - (\beta - \gamma)^2(\beta + \gamma)), \\ \tilde{C}_{22} &= \frac{1}{2} (2\beta^3 - \beta^2(\alpha + \gamma) - (\alpha - \gamma)^2(\alpha + \gamma)), \\ \tilde{C}_{33} &= -\frac{1}{2} (2\gamma^3 - \gamma^2(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Veamos que en este primer caso los solitones de Cotton invariantes a la izquierda son necesariamente triviales.

**Teorema 3.15.** *Si un grupo de Lie Lorentziano unimodular  $(G, g)$  de Tipo Ia es un solitón de Cotton invariante a la izquierda entonces es necesariamente trivial.*

*Demostración.* De las Ecuaciones (3.42) y (3.43) se sigue que un campo de vectores invariante a la izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  es un solitón de Cotton si y sólo si

$$(3.44) \quad \begin{cases} \xi_1(\beta - \gamma) = \xi_2(\gamma - \alpha) = \xi_3(\alpha - \beta) = 0, \\ \alpha^2(\beta + \gamma) + (\beta - \gamma)^2(\beta + \gamma) - 2\alpha^3 + 2\lambda = 0, \\ \beta^2(\alpha + \gamma) + (\alpha - \gamma)^2(\alpha + \gamma) - 2\beta^3 + 2\lambda = 0, \\ \gamma^2(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta) - 2\gamma^3 + 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Observemos que la primera ecuación en (3.44) implica que la existencia de solitones de Cotton no nulos es posible sólo si  $\alpha = \beta$ , o  $\alpha = \gamma$ , o  $\beta = \gamma$ . Supongamos que  $\alpha = \beta$  (el estudio de los otros dos casos es completamente análogo). Bajo esta consideración, la primera ecuación en (3.44) implica que  $\beta = \gamma$  o  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . En el primer caso, si  $\beta = \gamma$ , el grupo de Lie tiene curvatura seccional constante  $-\frac{\alpha^2}{4}$ . En el segundo caso, si  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , la Ecuación (3.44) se reduce a

$$\gamma^2(\beta - \gamma) - 2\lambda = 0, \quad \gamma^2(\beta - \gamma) + \lambda = 0,$$

con lo que se sigue que si  $\beta \neq \gamma$  entonces necesariamente  $\gamma = 0$  y el grupo de Lie es llano. Tenemos por tanto que, en cualquiera de los casos, el solitón de Cotton es trivial.  $\square$

## ii) Tipo Ib

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo Ib está determinada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por

$$[e_1, e_2] = \beta e_2 - \gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\gamma e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1;$$

siendo  $\beta \neq 0$ . Sea  $X = \sum \xi_i e_i$  un campo de vectores invariante a la izquierda. Los términos no nulos de la derivada de Lie de la métrica están dados por

$$(3.45) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{12} &= \xi_2 \beta + \xi_3 (\alpha - \gamma), & (\mathcal{L}_X g)_{13} &= \xi_3 \beta + \xi_2 (\gamma - \alpha), \\ (\mathcal{L}_X g)_{22} &= (\mathcal{L}_X g)_{33} = -2\beta \xi_1, \end{aligned}$$

mientras que el tensor de Cotton está determinado por

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= -2\tilde{C}_{22} = 2\tilde{C}_{33} = \alpha^3 - \alpha^2 \gamma + 4\beta^2 \gamma, \\ \tilde{C}_{23} &= \frac{1}{2}\beta (\alpha^2 + 4\beta^2 - 8\gamma^2 + 4\alpha\gamma). \end{aligned}$$

Veamos que, al igual que para el caso unimodular de Tipo Ia, no obtenemos solitones de Cotton no triviales invariantes a la izquierda en este caso.

**Teorema 3.16.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular  $(G, g)$  de Tipo Ib no admite solitones de Cotton invariantes a la izquierda no nulos.*

*Demostración.* Para un campo de vectores invariante a la izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , las Ecuaciones (3.45) y (3.46) implican que  $X$  es un solitón de Cotton si y sólo si

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 \beta + \xi_3 (\alpha - \gamma) = 0, \\ \xi_3 \beta + \xi_2 (\gamma - \alpha) = 0, \\ \beta (\alpha^2 + 4\alpha\gamma + 4\beta^2 - 8\gamma^2) = 0, \\ \alpha^3 - \alpha^2 \gamma + 4\beta^2 \gamma - \lambda = 0, \\ \alpha^3 - \alpha^2 \gamma + 4\beta^2 \gamma + 2\lambda + 4\beta \xi_1 = 0, \\ \alpha^3 - \alpha^2 \gamma + 4\beta^2 \gamma + 2\lambda - 4\beta \xi_1 = 0. \end{array} \right.$$

Como  $\beta \neq 0$  se obtiene a partir de la primera ecuación en (3.47) que  $\xi_2 = \frac{\xi_3(\gamma - \alpha)}{\beta}$  y, como consecuencia, la segunda ecuación en (3.47) es equivalente a  $\xi_3(\beta^2 + (\gamma - \alpha)^2) = 0$ . De este modo, tenemos que  $\xi_3 = 0$  y, por tanto también  $\xi_2 = 0$ . Finalmente, de las dos últimas ecuaciones en (3.47) obtenemos  $\xi_1 = 0$ , lo cual finaliza la demostración.  $\square$

### iii) Tipo II

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo II viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$  por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - (\beta - \frac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2})e_2 - \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1;$$

con lo que la derivada de Lie de la métrica está dada por

$$(3.48) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{12} &= \frac{1}{2}(\xi_2 + (2\alpha - 2\beta - 1)\xi_3), & (\mathcal{L}_X g)_{13} &= \frac{1}{2}(\xi_3 - (2\alpha - 2\beta + 1)\xi_2), \\ (\mathcal{L}_X g)_{22} &= (\mathcal{L}_X g)_{33} = -(\mathcal{L}_X g)_{23} = -\xi_1. \end{aligned}$$

Además, el tensor de Cotton está determinado por

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= \alpha^2(\alpha - \beta), & \tilde{C}_{22} &= -\frac{1}{4}(2\alpha^3 - 8\beta^2 + 4\alpha\beta - \alpha^2(2\beta - 1)), \\ \tilde{C}_{23} &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - 8\beta^2 + 4\alpha\beta), & \tilde{C}_{33} &= \frac{1}{4}(2\alpha^3 + 8\beta^2 - 4\alpha\beta - \alpha^2(2\beta + 1)). \end{aligned}$$

Analizamos a continuación los solitones de Cotton invariantes a la izquierda en este caso.

**Teorema 3.17.** *Un grupo de Lie Lorentziano  $(G, g)$  de Tipo II admite solitones de Cotton invariantes a la izquierda no triviales si y sólo si se verifica alguna de las condiciones siguientes*

(i)  $\alpha = \beta \neq 0$ , y entonces  $G = O(1, 2)$  o  $G = SL(2, \mathbb{R})$ ,

(ii)  $\alpha = 0 \neq \beta$ , y entonces  $G = E(1, 1)$ .

Además, en ambos casos, los solitones de Cotton son siempre estables y están dados respectivamente por:

(i)  $X = \frac{3}{4}\beta^2 e_1 + \kappa(e_2 + e_3)$ , donde  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $X = 2\beta^2 e_1$ .

*Demostración.* Considerando las Ecuaciones (3.48) y (3.49), la condición para ser un campo de vectores solitón de Cotton invariante a la izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  puede ser expresada como

$$(3.50) \quad \begin{cases} \xi_2 + \xi_3(2\alpha - 2\beta - 1) = 0, \\ \xi_3 - \xi_2(2\alpha - 2\beta + 1) = 0, \\ \alpha^2 - 8\beta^2 + 4\alpha\beta + 4\xi_1 = 0, \\ \alpha^2(\alpha - \beta) - \lambda = 0, \\ 2\alpha^3 - 8\beta^2 + 4\alpha\beta - \alpha^2(2\beta - 1) + 4\xi_1 + 4\lambda = 0, \\ 2\alpha^3 + 8\beta^2 - 4\alpha\beta - \alpha^2(2\beta + 1) - 4\xi_1 + 4\lambda = 0. \end{cases}$$

Sumando la primera y la segunda ecuación obtenemos  $(\alpha - \beta)(\xi_2 - \xi_3) = 0$ . De este modo resulta que  $\alpha = \beta$  o  $\xi_2 = \xi_3$ . Supongamos en primer lugar que  $\alpha = \beta$ . En este caso, la cuarta ecuación implica que  $\lambda = 0$ . Ahora bien, de la primera ecuación se sigue que  $\xi_2 = \xi_3$  y finalmente la última ecuación implica que  $\xi_1 = \frac{3}{4}\beta^2$ . Con estas condiciones la Ecuación (3.50) se verifica y el solitón de Cotton es no trivial siempre que  $\alpha = \beta \neq 0$ , lo que demuestra (i).

Analizamos ahora el caso  $\xi_2 = \xi_3$ , con  $\alpha \neq \beta$ . En este caso, la primera ecuación implica que  $\xi_3(\alpha - \beta) = 0$  y así  $\xi_3 = 0$ . Por otra parte, de la cuarta ecuación tenemos  $\lambda = \alpha^2(\alpha - \beta)$ . Además, de las dos últimas ecuaciones obtenemos  $\alpha^2(\alpha - \beta) = 0$ , y por tanto  $\alpha = 0$ . Finalmente, la Ecuación (3.50) se reduce a  $\xi_1 = 2\beta^2$ , lo que demuestra (ii).

Con estos resultados y a partir de la clasificación de los grupos de Lie Lorentzianos obtenida en [19] se sigue que  $G$  es localmente isométrico a  $O(1, 2)$  o a  $SL(2, \mathbb{R})$  en el caso (i), y a  $E(1, 1)$  en el caso (ii). □

**Observación 3.18.** Los solitones de Cotton invariantes a la izquierda en un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo II son gradiente si y sólo si  $\alpha = 0 \neq \beta$ . Para demostrar esto, analizamos los dos casos diferentes que obtuvimos en el Teorema 3.17. Primero, supongamos que  $\alpha = \beta \neq 0$ ; en este caso, los solitones de Cotton invariantes a la izquierda son de la forma  $X = \frac{3}{4}\beta^2 e_1 + \kappa(e_2 + e_3)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ , y así la forma dual  $X^b$  está dada por

$$X^b = \frac{3}{4}\beta^2 e^1 + \kappa(e^2 - e^3).$$

Por un cálculo directo obtenemos que

$$dX^b = -\beta\kappa(e^1 \wedge e^2 - e^1 \wedge e^3) - \frac{3}{4}\beta^3 e^2 \wedge e^3,$$

y por tanto el solitón de Cotton nunca es gradiente. Si suponemos ahora que  $\alpha = 0 \neq \beta$ , en este caso, el solitón de Cotton invariante a la izquierda está dado por  $X = 2\beta^2 e_1$  y su correspondiente 1-forma dual está determinada por

$$X^b = 2\beta^2 e^1,$$

de donde se sigue que  $dX^b = 0$ . Concluimos de este modo que existe una función diferenciable  $\varphi$  tal que  $X = \nabla\varphi$ .

#### iv) Tipo III

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo III viene dada respecto a una base ortogonal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de signatura  $(++-)$ , como

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3;$$

y así la derivada de Lie de la métrica está dada por

$$(3.51) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{11} &= -\sqrt{2}(\xi_2 + \xi_3), & (\mathcal{L}_X g)_{12} &= (\mathcal{L}_X g)_{13} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}}, & (\mathcal{L}_X g)_{22} &= \sqrt{2} \xi_3, \\ (\mathcal{L}_X g)_{23} &= \frac{\xi_3 - \xi_2}{\sqrt{2}}, & (\mathcal{L}_X g)_{33} &= -\sqrt{2} \xi_2; \end{aligned}$$

mientras que el tensor de Cotton está determinado por

$$(3.52) \quad \tilde{C}_{12} = \tilde{C}_{13} = \frac{3\alpha^2}{2\sqrt{2}}, \quad \tilde{C}_{22} = \tilde{C}_{23} = \tilde{C}_{33} = 3\alpha.$$

Para este caso tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.19.** *Un grupo de Lie Lorentziano unimodular  $(G, g)$  de Tipo III admite un solitón de Cotton invariante a la izquierda no trivial si y sólo si  $\alpha \neq 0$ , con lo que  $G = O(1, 2)$  o  $G = SL(2, \mathbb{R})$ . Además, en tal caso, el solitón de Cotton es estable y está dado por  $X = -\frac{3\alpha^2}{2}e_1 + \frac{3\alpha}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)$ .*

*Demostración.* Dado un campo de vectores invariante a la izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , las Ecuaciones (3.51) y (3.52) implican que  $X$  es un solitón de Cotton si y sólo si

$$(3.53) \quad \begin{cases} 2\xi_1 + 3\alpha^2 = 0, \\ \sqrt{2} \xi_2 + \sqrt{2} \xi_3 + \lambda = 0, \\ 3\sqrt{2} \alpha - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 3\alpha + \sqrt{2} \xi_3 - \lambda = 0, \\ 3\alpha - \sqrt{2} \xi_2 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Si  $\alpha = 0$ , se sigue de esta Ecuación que el grupo de Lie no admite solitones de Cotton invariantes a la izquierda no nulos. Supongamos entonces que  $\alpha \neq 0$ . La primera ecuación implica que  $\xi_1 = -\frac{3\alpha^2}{2}$  mientras que la segunda ecuación implica que  $\xi_2 = -\xi_3 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ . Ahora bien, de las dos últimas ecuaciones obtenemos  $\lambda = 0$  y  $\xi_3 = -\frac{3\alpha}{\sqrt{2}}$ . Finalmente, de la clasificación de los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres obtenidos en [19] se sigue que  $G$  es localmente isométrico a  $O(1, 2)$  o a  $SL(2, \mathbb{R})$ . □

**Observación 3.20.** Un grupo de Lie Lorentziano unimodular de Tipo III no admite ningún solitón de Cotton gradiente invariante a la izquierda. De hecho, considerando el solitón de Cotton determinado en el Teorema 3.19, su forma dual  $X^b$  está dada por

$$X^b = -\frac{3\alpha^2}{2}e^1 + \frac{3\alpha}{\sqrt{2}}(e^2 + e^3),$$

y por un cálculo directo se obtiene que

$$dX^b = \frac{3\alpha^2}{2\sqrt{2}} \left( e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 + \sqrt{2} \alpha e^2 \wedge e^3 \right).$$

Así, el solitón de Cotton  $X$  no es gradiente.

### Caso no unimodular

En este apartado estudiamos la existencia de solitones de Cotton invariantes a la izquierda en grupos de Lie Lorentzianos no unimodulares de dimensión tres; cuyas correspondientes álgebras de Lie fueron introducidas en la Sección 1.2.1. Excluiremos el estudio de los grupos de Tipo  $\mathfrak{S}$ , puesto que cualquier métrica invariante a la izquierda definida en ellos tiene curvatura seccional constante (véanse [61] y [69]) y por tanto son localmente conformemente llanos, con lo que no admiten solitones de Cotton no triviales. Además, los triviales son necesariamente cero. Por otra parte, demostramos a continuación que para el resto de los casos no unimodulares los solitones de Cotton también son triviales.

#### i) Tipo IV.1

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.1 viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  verificando  $g(e_1, e_1) = -g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -1$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$ . Así, la derivada de Lie de la métrica está determinada por

$$(3.54) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{11} &= -2\alpha\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{12} &= (\beta - \gamma)\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{13} &= \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \\ (\mathcal{L}_X g)_{22} &= 2\delta\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{23} &= -\beta\xi_1 - \delta\xi_2 \end{aligned}$$

y el tensor de Cotton por

$$(3.55) \quad \begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= -\frac{1}{2}(\beta^3 - 2\gamma^3 - \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + 2\gamma\delta^2 - \beta\delta^2), \\ \tilde{C}_{12} &= \delta(\alpha(\alpha - \delta) - \beta(\beta - \gamma)), \\ \tilde{C}_{22} &= -\frac{1}{2}(2\beta^3 - \gamma^3 - 2\alpha^2\beta - \beta^2\gamma + \gamma\delta^2 + \alpha\beta\delta), \\ \tilde{C}_{33} &= -\frac{1}{2}(\beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha - \beta + \gamma - \delta). \end{aligned}$$

Demostramos a continuación la no existencia de solitones de Cotton invariantes a la izquierda no triviales en este caso.

**Teorema 3.21.** *Si un grupo de Lie Lorentziano no unimodular  $(G, g)$  de Tipo IV.1 es un solitón de Cotton invariante a la izquierda entonces es necesariamente trivial.*

*Demostración.* Recordemos a lo largo de la demostración que las álgebras de Lie de este tipo verifican las relaciones  $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ . Las Ecuaciones (3.54) y (3.55) implican que un campo de vectores invariante a la izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  es un solitón

de Cotton si y sólo si

$$(3.56) \quad \begin{cases} \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0, \\ \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0, \\ (\beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha - \beta + \gamma - \delta) + 2\lambda = 0, \\ \delta(\alpha(\alpha - \delta) - \beta(\beta - \gamma)) + (\beta - \gamma)\xi_3 = 0, \\ \beta^3 - 2\gamma^3 - \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + 2\delta^2\gamma - \beta\delta^2 + 4\alpha\xi_3 - 2\lambda = 0, \\ 2\beta^3 - \gamma^3 - 2\alpha^2\beta - \beta^2\gamma + \gamma\delta^2 + \alpha\beta\delta - 4\delta\xi_3 + 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Analizamos primero el caso  $\alpha = 0$ . En esta situación  $\beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ . De este modo, la segunda ecuación implica que  $\xi_2 = 0$ . Por otra parte, la cuarta ecuación se reduce a  $\gamma\xi_3 = 0$  y por tanto  $\gamma = 0$  o  $\xi_3 = 0$ . Si  $\gamma = 0$  resulta que el grupo de Lie es localmente conformemente llano y, por tanto, el solitón de Cotton es trivial. Si  $\xi_3 = 0$  y  $\gamma \neq 0$  entonces de las dos últimas ecuaciones se sigue que  $(\gamma - \delta)(\gamma + \delta) = 0$ , lo que implica que la curvatura seccional es constante e igual a  $-\frac{\delta^2}{4}$ , por lo que el solitón de Cotton ha de ser trivial.

Supongamos ahora que  $\alpha \neq 0$ . En este caso  $\gamma = \frac{\beta\delta}{\alpha}$  y la primera ecuación implica que  $\xi_1 = -\frac{\beta\delta\xi_2}{\alpha^2}$ , mientras que la segunda ecuación se reduce a

$$(3.57) \quad (\alpha^2 - \beta^2) \delta\xi_2 = 0.$$

Si  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$  entonces  $\alpha = \varepsilon\beta$  y  $\gamma = \varepsilon\delta$ , siendo  $\varepsilon^2 = 1$ . Bajo estas condiciones el grupo de Lie es de curvatura seccional constante  $-\frac{1}{4}(\beta + \varepsilon\delta)^2$  con lo que el solitón de Cotton es trivial.

Por otra parte, si ahora  $\delta = 0$  en la Ecuación (3.57) se tiene que  $\gamma = 0$  y, por tanto, la cuarta ecuación en (3.56) es equivalente a  $\beta\xi_3 = 0$ . Ahora bien, para  $\beta = 0$  el grupo de Lie es localmente conformemente llano, con lo que el solitón de Cotton es trivial. Por otra parte, si  $\xi_3 = 0$  y  $\beta \neq 0$  entonces la Ecuación (3.56) se reduce a

$$\beta^3 - \alpha^2\beta - 2\lambda = 0, \quad \beta^3 - \alpha^2\beta + \lambda = 0.$$

Por tanto  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ , lo que demuestra que el grupo de Lie es de curvatura seccional constante y el solitón es de nuevo trivial.

Finalmente estudiamos el caso  $\xi_2 = 0$  en la Ecuación (3.57). Supongamos  $\delta \neq 0$  y  $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$  para evitar los casos previos. Observemos que, en este caso,  $\xi_1 = 0$  y la cuarta ecuación en (3.56) se transforma en

$$(\alpha - \delta) (\delta (\alpha^2 - \beta^2) + \beta\xi_3) = 0.$$

Si  $\alpha = \delta$  entonces la Ecuación (3.56) se reduce a  $\lambda = 0$  y  $\delta\xi_3 = 0$ ; así  $\xi_3 = 0$  y el solitón de Cotton es cero. Supongamos, por tanto, que  $\alpha \neq \delta$ . De este modo tenemos  $\delta(\alpha^2 - \beta^2) + \beta\xi_3 = 0$ . A partir de esta expresión observemos que  $\beta$  es necesariamente

diferente de cero ya que estamos suponiendo  $\delta(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0$ . Es decir,  $\xi_3 = -\frac{\delta(\alpha^2 - \beta^2)}{\beta}$  y por la tercera ecuación en (3.56) tenemos

$$\lambda = -\frac{\beta(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \delta)^2(\alpha + \delta)}{2\alpha^3},$$

y la Ecuación (3.56) se reduce a

$$\begin{cases} \alpha^2\beta^2 - 3\beta^2\delta^2 + 2\alpha\beta^2\delta + 4\alpha^4 = 0, \\ 3\alpha^2\beta^2 - \beta^2\delta^2 - 2\alpha\beta^2\delta - 4\alpha^2\delta^2 = 0. \end{cases}$$

Se sigue ahora que  $(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \delta^2) = 0$ , lo cual es una contradicción, lo que termina la demostración.  $\square$

## ii) Tipo IV.2

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.2 viene dada respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  verificando  $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = 1$ , por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ . Por tanto la derivada de Lie de la métrica viene dada por

$$(3.58) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{11} &= 2\alpha\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{12} &= (\beta + \gamma)\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{13} &= -\alpha\xi_1 - \gamma\xi_2, \\ (\mathcal{L}_X g)_{22} &= 2\delta\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{23} &= -\beta\xi_1 - \delta\xi_2. \end{aligned}$$

El tensor de Cotton está dado por

$$(3.59) \quad \begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= \frac{1}{2}(\beta^3 + 2\gamma^3 + \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + 2\gamma\delta^2 + \beta\delta^2), \\ \tilde{C}_{12} &= \delta(\alpha(\alpha - \delta) + \beta(\beta + \gamma)), \\ \tilde{C}_{22} &= -\frac{1}{2}(2\beta^3 + \gamma^3 + 2\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma\delta^2 - \alpha\beta\delta), \\ \tilde{C}_{33} &= -\frac{1}{2}(\beta - \gamma)((\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2). \end{aligned}$$

Para este caso tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.22.** *Si un grupo de Lie Lorentziano no unimodular  $(G, g)$  de Tipo IV.2 es un solitón de Cotton invariante a la izquierda entonces es necesariamente trivial.*

*Demostración.* Recordemos para la demostración que las álgebras de Lie de este tipo verifican las relaciones  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ . Para un campo de vectores invariante a la

izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , las Ecuaciones (3.58) y (3.59) implican que  $X$  es un solitón de Cotton si y sólo si

$$(3.60) \quad \begin{cases} \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 = 0, \\ \beta\xi_1 + \delta\xi_2 = 0, \\ (\beta - \gamma)((\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2) - 2\lambda = 0, \\ \delta(\alpha(\alpha - \delta) + \beta(\beta + \gamma)) + (\beta + \gamma)\xi_3 = 0, \\ \beta^3 + 2\gamma^3 + \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + 2\delta^2\gamma + \beta\delta^2 + 4\alpha\xi_3 - 2\lambda = 0, \\ 2\beta^3 + \gamma^3 + 2\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma\delta^2 - \alpha\beta\delta - 4\delta\xi_3 + 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Supongamos primero que  $\alpha = 0$ . En este caso,  $\beta = 0$  y  $\delta \neq 0$ , y por la tercera y la quinta ecuación obtenemos que  $\gamma(\gamma^2 + \delta^2) = 0$ . Por tanto  $\gamma = 0$  y el grupo de Lie es localmente conformemente llano, es decir, dicho solitón de Cotton invariante a la izquierda es trivial.

Supongamos ahora que  $\alpha \neq 0$ . De este modo  $\gamma = -\frac{\beta\delta}{\alpha}$  y la primera ecuación implica que  $\xi_1 = \frac{\beta\delta\xi_2}{\alpha^2}$ . Ahora, la segunda ecuación es equivalente a

$$(3.61) \quad (\alpha^2 + \beta^2) \delta\xi_2 = 0,$$

y por tanto  $\delta = 0$  o  $\xi_2 = 0$ . Si  $\delta = 0$  entonces la cuarta ecuación en (3.60) se reduce a  $\beta\xi_3 = 0$ . En tal caso, si  $\xi_3 = 0$  entonces la Ecuación (3.60) se reduce a

$$\beta^3 + \alpha^2\beta + \lambda = 0, \quad \beta^3 + \alpha^2\beta - 2\lambda = 0,$$

lo que implica que  $\beta = 0$ . Por tanto necesariamente ha de ser  $\beta = 0$  en cualquier caso, de donde se sigue que el grupo de Lie es localmente conformemente llano. Es decir, el solitón de Cotton es trivial.

Finalmente, analizamos el caso  $\xi_2 = 0$  en la Ecuación (3.61). Supongamos que  $\delta \neq 0$  para evitar el caso previo. Observemos que en esta situación  $\xi_1 = 0$  y la cuarta ecuación en (3.60) es equivalente a

$$(\alpha - \delta)(\delta(\alpha^2 + \beta^2) + \beta\xi_3) = 0.$$

Si  $\alpha = \delta$  entonces la Ecuación (3.60) se reduce a  $\lambda = 0$  y  $\delta\xi_3 = 0$ ; así  $\xi_3 = 0$  y el solitón de Cotton se anula. Ahora, si  $\alpha \neq \delta$  entonces  $\delta(\alpha^2 + \beta^2) + \beta\xi_3 = 0$ . Observemos que  $\beta$  debe ser no nula ya que estamos suponiendo que  $\delta \neq 0$ . Es decir,  $\xi_3 = -\frac{\delta(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta}$  y la tercera ecuación en (3.60) implica que

$$\lambda = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \delta)^2(\alpha + \delta)}{2\alpha^3}.$$

Ahora, dicha ecuación se reduce a

$$\begin{cases} 4\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^2\delta + 3\beta^2\delta^2 = 0, \\ \alpha^2(3\beta^2 + 4\delta^2) - 2\alpha\beta^2\delta - \beta^2\delta^2 = 0, \end{cases}$$

de donde se sigue que  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha - \delta)(\alpha + \delta) = 0$ . Puesto que estamos suponiendo que  $\alpha \neq \delta$  y, además,  $\alpha + \delta \neq 0$ , entonces tenemos  $\alpha = \pm\beta$  y en tal caso el sistema de ecuaciones mencionado anteriormente no tiene solución (ya que  $\delta \neq 0$ ). Esto termina la demostración.  $\square$

### iii) Tipo IV.3

Recordemos que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de Tipo IV.3 está determinada respecto a una base pseudo-ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  con

$$g(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por las siguientes constantes de estructura

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde  $\alpha + \delta \neq 0$  y  $\alpha\gamma = 0$ . Así, la derivada de Lie de la métrica y el tensor de Cotton en la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  vienen dados por

$$(3.62) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{11} &= 2\alpha\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{12} &= \gamma\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{13} &= -\alpha\xi_1 - \gamma\xi_2 - \beta\xi_3, \\ (\mathcal{L}_X g)_{23} &= -\delta\xi_3, & (\mathcal{L}_X g)_{33} &= 2(\beta\xi_1 + \delta\xi_2), \end{aligned}$$

y por

$$(3.63) \quad \tilde{C}_{11} = \gamma^3, \quad \tilde{C}_{23} = \frac{\gamma^3}{2}, \quad \tilde{C}_{33} = \frac{\beta\gamma^2}{2}.$$

Demostramos ahora que en este caso los solitones de Cotton invariantes a la izquierda son triviales.

**Teorema 3.23.** *Si un grupo de Lie Lorentziano no unimodular  $(G, g)$  de Tipo IV.3 es un solitón de Cotton invariante a la izquierda entonces es necesariamente trivial.*

*Demostración.* Haciendo uso de las Ecuaciones (3.62) y (3.63) se sigue que un campo de vectores invariante a la izquierda  $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  es un solitón de Cotton si y sólo si

$$(3.64) \quad \begin{cases} \gamma\xi_3 = 0, \\ \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 + \beta\xi_3 = 0, \\ 2\alpha\xi_3 + \gamma^3 - \lambda = 0, \\ \gamma^3 - 2\delta\xi_3 + 2\lambda = 0, \\ \beta\gamma^2 + 4\beta\xi_1 + 4\delta\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Recordemos que las álgebras de Lie de este tipo verifican las ecuaciones  $\alpha\gamma = 0$  y  $\alpha + \delta \neq 0$ . En primer lugar, si suponemos  $\alpha = \gamma = 0$  entonces el grupo de Lie es llano, por lo que el solitón de Cotton es trivial. Ahora bien, si  $\alpha = 0$  y  $\gamma \neq 0$  entonces la primera ecuación en (3.64) implica que  $\xi_3 = 0$ , y por tanto de la tercera y la cuarta ecuación en (3.64) obtenemos  $\gamma = 0$ , lo que es una contradicción. Finalmente, si  $\gamma = 0$  y  $\alpha \neq 0$  entonces el grupo de Lie es localmente conformemente llano y por tanto el solitón de Cotton es trivial.  $\square$

A partir de los resultados obtenidos hasta este momento en esta sección estamos ya en condiciones de demostrar la caracterización geométrica dada en el Teorema 3.14 sobre la existencia de solitones de Cotton invariantes a la izquierda en los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres:

#### Demostración del Teorema 3.14.

Si analizamos los diferentes casos obtenidos en los Teoremas 3.17 y 3.19 se obtiene que el correspondiente operador de Cotton es dos pasos nilpotente para los grupos de Lie Lorentzianos unimodulares de Tipo II con  $\alpha = \beta \neq 0$  o  $\alpha = 0 \neq \beta$ , en particular

$$\widehat{C} = \Xi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donde  $\Xi = \frac{3\alpha^2}{4}$  si  $\alpha = \beta \neq 0$ , o  $\Xi = 2\beta^2$  si  $\alpha = 0 \neq \beta$ . Mientras que el grado de nilpotencia es tres para los grupos de Lie Lorentzianos unimodulares de Tipo III con  $\alpha \neq 0$ , ya que en este caso resulta

$$\widehat{C} = 3\alpha \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} & 1 & 1 \\ -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, analizando caso por caso el operador de Cotton en los diferentes grupos de Lie Lorentzianos tanto unimodulares como no unimodulares obtenemos, mediante un cálculo largo pero directo, que los casos con operador de Cotton nilpotente son precisamente aquellos obtenidos los Teoremas 3.17 y 3.19.  $\square$

**Observación 3.24.** En el caso Riemanniano, los grupos de Lie unimodulares se corresponden con los de Tipo Ia, mientras que el caso no unimodular se corresponde con el Tipo  $\mathfrak{S}$  y con el Tipo IV.2 discutidos previamente.

Con respecto al Tipo Ia y al Tipo IV.2, el comportamiento es exactamente igual en los casos Riemannino y Lorentziano, puesto que el Teorema 3.15 y el Teorema 3.22 se verifican en ambas situaciones. En consecuencia, puesto que los espacios localmente simétricos y los grupo de Lie de Tipo  $\mathfrak{S}$  son localmente conformemente llanos, se tiene:

*Las variedades Riemannianas homogéneas de dimensión tres no admiten solitones de Cotton invariantes a la izquierda no triviales.*

Así, cualquier solitón de Cotton Riemanniano invariante a la izquierda es un solitón de Yamabe, con lo que en el caso Riemanniano esto implica que la variedad es necesariamente llana. No obstante, la situación es diferente cuando se considera la existencia de solitones de Cotton no triviales y no invariantes. En particular, siguiendo argumentos análogos a los que realizaremos en la última parte de la Subsección 3.3.2 es posible demostrar que el grupo de Heisenberg,  $H_3$ , dotado con la métrica invariante a la izquierda dada por  $g = dx \circ dx + (1 + x^2)dy \circ dy - 2xdy \circ dz + dz \circ dz$  es un solitón de Cotton Riemanniano no trivial, no invariante y contractivo.

### 3.3.2. Solitones de Cotton algebraicos Lorentzianos

Como hemos visto, los solitones de Cotton se corresponden con puntos fijos para el flujo de Cotton salvo difeomorfismos y homotecias. No obstante, el comportamiento específico de las variedades homogéneas nos permite considerar condiciones más fuertes que la de ser solitón de Cotton. Más precisamente, podemos considerar soluciones solitón para el flujo de Cotton salvo automorfismos en vez de difeomorfismos, en cuyo caso se dice que dicho solitón es un solitón de Cotton algebraico. Sea  $(G, g)$  un grupo de Lie simplemente conexo dotado con una métrica de Lorentz invariante  $g$  y sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie del grupo  $G$ . Siguiendo las ideas del trabajo de Lauret (véase [57]), se dice que  $(G, g)$  es un *solitón de Cotton algebraico* si verifica

$$(3.65) \quad \widehat{C} = \lambda \text{id} + D,$$

donde  $\widehat{C}$  representa el operador de Cotton ( $g(\widehat{C}(X), Y) = \widetilde{C}(X, Y)$ ),  $\lambda$  es un número real y  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  es una derivación del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , i.e.,

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

A continuación demostramos que la condición de ser solitón de Cotton algebraico es más fuerte que la de ser solitón de Cotton.

**Proposición 3.25.** *Sea  $(G, g)$  un grupo de Lie simplemente conexo dotado con una métrica Lorentziana invariante a la izquierda  $g$ . Si  $(G, g)$  es un solitón de Cotton algebraico, es decir, si verifica la Ecuación (3.65), entonces es un solitón de Cotton donde el campo de vectores,  $X$ , verificando la Ecuación (3.41) está dado por*

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p), \quad \text{con} \quad d\varphi_t|_e = \exp\left(\frac{t}{2}D\right),$$

siendo  $e$  el elemento neutro de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $(G, g)$  un solitón de Cotton algebraico. Denotemos por  $\{e_i\}$  una base pseudo-ortonormal y definamos una familia 1-paramétrica de automorfismos  $\varphi_t$  dados por

$d\varphi_t|_e = \exp\left(\frac{t}{2}D\right)$ . Considerando los campos de vectores  $X$  dados por  $X = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t(p)$ , un cálculo directo demuestra que la derivada de Lie en la dirección de  $X$  está dada por

$$(\mathcal{L}_X g)(e_i, e_j) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*g(e_i, e_j) = \frac{1}{2}(g(De_i, e_j) + g(e_i, De_j)),$$

para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\tilde{C}(e_i, e_j) &= \frac{1}{2}\left(g(\widehat{C}(e_i), e_j) + g(e_i, \widehat{C}(e_j))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g((\lambda \text{id} + D)(e_i), e_j) + g(e_i, (\lambda \text{id} + D)(e_j))\right) \\ &= \lambda g(e_i, e_j) + (\mathcal{L}_X g)(e_i, e_j),\end{aligned}$$

lo que demuestra que  $(G, g, X)$  es un solitón de Cotton.  $\square$

En vista de esta proposición, parece natural preguntarse si un solitón de Cotton en un grupo de Lie proviene de un solitón de Cotton algebraico o no. A continuación damos respuesta a esta pregunta determinando todos los solitones algebraicos en los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres y construyendo a partir de ellos ejemplos de solitones homogéneos no invariantes a la izquierda. Los grupos de Lie Lorentzianos correspondientes se obtienen de la clasificación realizada en [19].

**Teorema 3.26.** *Un grupo de Lie  $(G, g)$  de dimensión tres dotado con una métrica Lorentziana invariante a la izquierda es un solitón de Cotton algebraico si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i)  $(G, g)$  es de Tipo Ia con  $\alpha = \beta = 0$  y  $\gamma \neq 0$ , o cualquier permutación cíclica de ellos. En este caso,  $\lambda = -2\gamma^3$  y  $G = H_3$  es el grupo de Heisenberg.

(ii)  $(G, g)$  es de Tipo Ib con  $\alpha = 0$  y  $\gamma = \frac{\varepsilon\sqrt{2}\beta}{2}$ . En este caso,  $\lambda = 2\varepsilon\sqrt{2}\beta^3$  con  $\varepsilon^2 = 1$ , y  $G = E(1, 1)$ .

*Demostración.* Estudiamos la existencia de solitones de Cotton algebraicos en álgebras de Lie Lorentzianas de dimensión tres. Para ello, es suficiente con estudiar cuando un operador  $D$  de la forma

$$D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$$

es una derivación del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Comenzamos dicho estudio con las álgebras de Tipo Ia. De la Ecuación (3.43) se obtiene que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$  es una derivación si y sólo si

$$(3.66) \quad \begin{cases} \gamma(\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha(\beta^2 - \gamma^2) + \beta^3 + \beta\gamma^2 - 2\gamma^3 - \lambda) = 0, \\ \beta(\alpha^3 - \alpha^2\gamma - \alpha(\gamma^2 - \beta^2) - 2\beta^3 + \beta^2\gamma + \gamma^3 - \lambda) = 0, \\ \alpha(2\alpha^3 - \alpha^2(\beta + \gamma) - \beta^3 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 - \gamma^3 + \lambda) = 0. \end{cases}$$

Si todas las constantes de estructura se anulan entonces el álgebra de Lie es conmutativa con lo que el solitón de Cotton algebraico es trivial. Así, supongamos que al menos una de ellas no se anula, por ejemplo  $\gamma \neq 0$ . En tal caso, de la primera ecuación obtenemos que  $\lambda = \gamma^2(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta) - 2\gamma^3$ . De este modo, la Ecuación (3.66) se transforma en

$$(3.67) \quad \begin{cases} \beta(\beta - \gamma)(\alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) - 3\beta^2 - 2\beta\gamma - 3\gamma^2) = 0, \\ \alpha(\alpha - \gamma)(3\alpha^2 + 2\alpha(\gamma - \beta) - (\beta - \gamma)(\beta + 3\gamma)) = 0. \end{cases}$$

Una primera solución no trivial se obtiene tomando  $\alpha = \beta = 0$  y  $\lambda = -2\gamma^3$ . Por otra parte, para  $\alpha \neq 0$  y  $\beta = 0$  un cálculo directo demuestra que  $\alpha = \gamma$ , y en este caso la variedad es localmente conformemente llana. La misma conclusión se obtiene para  $\alpha = 0$  y  $\beta \neq 0$ . Finalmente, supongamos  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ . Si  $\alpha = \gamma$  o  $\beta = \gamma$  o  $\alpha = \beta$  la Ecuación (3.67) implica que  $\alpha = \beta = \gamma$  y por tanto la curvatura seccional es constante, es decir, la variedad es localmente conformemente llana. Si  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$  la Ecuación (3.67) se reduce a

$$(3.68) \quad \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) - 3\beta^2 - 2\beta\gamma - 3\gamma^2 = 0, \\ 3\alpha^2 + 2\alpha(\gamma - \beta) - (\beta - \gamma)(\beta + 3\gamma) = 0. \end{cases}$$

De esta última ecuación obtenemos  $(\alpha - \beta)^2 + 3\gamma^2 = 0$ , lo que es una contradicción. Procediendo de forma análoga para  $\alpha \neq 0$  o  $\beta \neq 0$  obtenemos (i).

Consideremos ahora el Tipo Ib. De la Ecuación (3.46), teniendo en cuenta que  $\beta \neq 0$  se sigue que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$  es una derivación si y sólo si

$$(3.69) \quad \begin{cases} \alpha^3 + 4\alpha\gamma^2 + 8\beta^2\gamma - 8\gamma^3 - \lambda = 0, \\ \alpha^2 + 4\alpha\gamma + 4\beta^2 - 8\gamma^2 = 0, \\ \alpha\lambda = 0. \end{cases}$$

La última ecuación en (3.69) implica que  $\alpha = 0$  o  $\lambda = 0$ . Supongamos primero que  $\alpha = 0$ . En este caso la Ecuación (3.69) se reduce a

$$(3.70) \quad \begin{cases} 8\beta^2\gamma - 8\gamma^3 - \lambda = 0, \\ \beta^2 - 2\gamma^2 = 0, \end{cases}$$

con lo que se verifica (ii). Supongamos ahora que  $\lambda = 0$  y  $\alpha \neq 0$ . Entonces, la Ecuación (3.69) se reduce a

$$(3.71) \quad \begin{cases} 8\gamma^3 - \alpha^3 - 4\alpha\gamma^2 - 8\beta^2\gamma = 0, \\ \alpha^2 + 4\alpha\gamma + 4\beta^2 - 8\gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Por un cálculo largo pero directo se demuestra que  $\alpha = -2\gamma$  y  $\beta = \pm\sqrt{3}\gamma$ , y en este caso la variedad es localmente conformemente llana.

El resto de los diferentes tipos de álgebras de Lie Lorentzianas de dimensión tres no definen solitones de Cotton no triviales. Para la demostración de este hecho basta proceder como en los casos anteriores.

Analicemos el Tipo II. Por la Ecuación (3.49) tenemos que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$  es una derivación si y sólo si

$$(3.72) \quad \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha^2\beta - 4\alpha\beta^2 + 8\beta^3 + 2\lambda = 0, \\ \alpha^3(2\beta - 1) + \alpha^2(1 - 2\beta^2) - 4\alpha(\beta - 1)\beta + 8\beta^3 - 8\beta^2 + 4\beta\lambda - 2\lambda = 0, \\ \alpha^3(2\beta + 1) + \alpha^2(1 - 2\beta^2) + 4\alpha\beta(\beta + 1) - 8\beta^3 - 8\beta^2 + 4\beta\lambda + 2\lambda = 0, \\ \alpha^4 - \alpha^3\beta - \alpha\lambda = 0. \end{cases}$$

De nuevo por un cálculo largo pero directo se tiene que  $\alpha = \beta = \lambda = 0$ , con lo que, sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.49), resulta que la variedad es localmente conformemente llana.

Analizamos ahora el Tipo III. Por la Ecuación (3.52) tenemos que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$  es una derivación si y sólo si

$$(3.73) \quad \begin{cases} 3\alpha^3 + 6\alpha + 2\lambda = 0, \\ \alpha^2 = 0, \\ \alpha(9\alpha + 4\lambda) = 0, \\ 3\alpha^3 + 6\alpha - 2\lambda = 0, \\ \alpha(4\lambda - 15\alpha) = 0, \\ \alpha(3\alpha - 2\lambda) = 0. \end{cases}$$

Con lo que, por la segunda ecuación tenemos que  $\alpha = 0$  y, por tanto, de la primera ecuación obtenemos que  $\lambda = 0$ . Así, sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.52) tenemos que la variedad es localmente conformemente llana.

Pasamos ahora a analizar el caso de las álgebras de Lie no unimodulares. Empezamos por el Tipo IV.1. Por la Ecuación (3.55) tenemos que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$  es una derivación si y

sólo si

$$(3.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^3(\beta + \gamma) - \alpha(\beta^3 - 2\beta^2\gamma + \beta(\delta^2 - 5\gamma^2) - 2\gamma^3 + \gamma\delta^2 + 4\lambda) \\ \qquad \qquad \qquad -\beta\delta(3\beta^2 + 4\beta\gamma + \gamma^2) = 0, \\ 2\alpha^3\delta - \alpha^2(4\beta^2 + 3\beta\gamma - 3\gamma^2 + 4\delta^2) + \alpha\delta(3\beta^2 - 4\beta\gamma - 3\gamma^2 + 2\delta^2) \\ \qquad \qquad \qquad + \beta(4\beta^3 - 2\beta^2\gamma + 5\beta\delta^2 - 2\gamma^3 + 3\gamma\delta^2 + 4\lambda) = 0, \\ 2\alpha^3\delta + \alpha\delta(-3\beta^2 - 4\beta\gamma + 3\gamma^2 + 2\delta^2) + \alpha^2(3\beta\gamma + 5\gamma^2 - 4\delta^2) \\ \qquad \qquad \qquad - 2\beta^3\gamma + 3\beta^2\delta^2 - \beta(2\gamma^3 + 3\gamma\delta^2) + 4\gamma(\gamma^3 - \gamma\delta^2 + \lambda) = 0, \\ \qquad \qquad \qquad \alpha^2\delta(\beta + \gamma)\alpha\gamma(\beta^2 + 4\beta\gamma + 3\gamma^2) + \\ \qquad \qquad \qquad -\delta(2\beta^3 + 5\beta^2\gamma + \beta(2\gamma^2 + \delta^2) - \gamma^3 + \gamma\delta^2 - 4\lambda) = 0. \end{array} \right.$$

Para demostrar que todos los casos posibles dan lugar a variedades localmente conformemente llanas establecemos la siguiente casuística. En primer lugar supongamos que  $\alpha = 0$ . De este modo, la Ecuación (3.74) se reduce a

$$(3.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\gamma^3 - \gamma\delta^2 + \lambda) = 0, \\ \gamma^3 - \gamma\delta^2 + 4\lambda = 0, \end{array} \right.$$

y así, por un cálculo largo pero directo, tenemos las siguientes posibilidades:  $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$ , o  $\alpha = \beta = \lambda = 0$  y  $\delta = -\gamma$ , o  $\alpha = \beta = \lambda = 0$  y  $\delta = \gamma$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.55) resulta que la variedad es localmente conformemente llana. Para estudiar ahora el caso  $\alpha \neq 0$  consideramos dos situaciones:  $\delta = 0$  y  $\delta \neq 0$ . Si  $\delta = 0$  la Ecuación (3.74) se reduce a

$$(3.76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^5\beta - \alpha^3(\beta^3 + 4\lambda) = 0, \\ -\alpha^2\beta + \beta^3 + \lambda = 0, \end{array} \right.$$

de donde, por un cálculo largo pero directo, obtenemos las siguientes posibilidades:  $\beta = \gamma = \delta = \lambda = 0$ , o  $\gamma = \delta = \lambda = 0$  y  $\beta = -\alpha$ , o  $\gamma = \delta = \lambda = 0$  y  $\beta = \alpha$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.55) tenemos que la variedad es localmente conformemente llana. Finalmente, si  $\delta \neq 0$ , multiplicando la primera Ecuación en (3.74) por  $\alpha^2$ , la cuarta por  $\alpha^3/\delta$  y restándolas obtenemos que  $\lambda = 0$ . De este modo, la Ecuación (3.74) se reduce a

$$(3.77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \delta)(\alpha + \delta)^2 = 0, \\ (\alpha^2 - \beta^2)(\delta\alpha^4 - 2(\beta^2 + \delta^2)\alpha^3 + \delta(\beta^2 + \delta^2)\alpha^2 + \beta^2\delta^3) = 0, \\ (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \delta)(\alpha^4 - \delta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 + \beta^2\delta\alpha + 2\beta^2\delta^2) = 0, \\ \beta(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \delta)(\alpha + \delta)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Y así, a partir de estas igualdades, tenemos las siguientes posibilidades:  $\beta = -\alpha$  y  $\delta = -\gamma$ , o  $\beta = \alpha$  y  $\delta = \alpha$ , o  $\delta = \alpha$  y  $\gamma = \beta$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.55) la

variedad resulta localmente conformemente llana.

Estudiamos ahora el Tipo IV.2. Por la Ecuación (3.59) tenemos que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$  es una derivación si y sólo si

$$(3.78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^3(\beta - \gamma) + 4\alpha^2\delta(\gamma - \beta) \\ +\alpha(\beta^3 + 3\beta(\gamma^2 + \delta^2) - 4\gamma^3 - 3\gamma\delta^2 + 4\lambda) - \beta\delta(3\beta^2 - 4\beta\gamma + \gamma^2) = 0, \\ 2\alpha^3\delta - \alpha^2(4\beta^2 - 5\beta\gamma + 3\gamma^2 + 4\delta^2) \\ +\alpha\delta(9\beta^2 + 3\gamma^2 + 2\delta^2) - \beta(4\beta^3 + 2\beta^2\gamma + \beta\delta^2 + 2\gamma^3 + \gamma\delta^2 + 4\lambda) = 0, \\ -2\alpha^3\delta + \alpha^2(\beta\gamma + \gamma^2 + 4\delta^2) - \alpha\delta(3\beta^2 + 9\gamma^2 + 2\delta^2) \\ +2\beta^3\gamma + 3\beta^2\delta^2 + \beta(2\gamma^3 - 5\gamma\delta^2) + 4\gamma(\gamma^3 + \gamma\delta^2 - \lambda) = 0, \\ 3\alpha^2\delta(\beta - \gamma) + \alpha(\beta^2\gamma - 4\beta(\gamma^2 + \delta^2) + 3\gamma^3 + 4\gamma\delta^2) \\ +\delta(4\beta^3 - 3\beta^2\gamma + \beta\delta^2 - \gamma^3 - \gamma\delta^2 + 4\lambda) = 0. \end{array} \right.$$

Si suponemos que  $\alpha = 0$ , por tratarse de un álgebra de Lie Tipo IV.2 tenemos que  $\delta \neq 0$  y  $\beta = 0$ . Con estas consideraciones esta ecuación se reduce a

$$(3.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\gamma^3 + \delta^2\gamma - \lambda) = 0, \\ \gamma^3 + \delta^2\gamma - 4\lambda = 0, \end{array} \right.$$

y así, por un cálculo directo, tenemos que  $\gamma = \lambda = 0$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.59) tenemos que la variedad es localmente conformemente llana. Por otra parte, podemos estudiar el caso  $\alpha \neq 0$  en dos pasos, cuando  $\delta = 0$  y cuando  $\delta \neq 0$ . Si  $\delta = 0$  la Ecuación (3.78) se reduce a

$$(3.80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^3 + \alpha^2\beta + 4\lambda = 0, \\ \beta(\beta^3 + \alpha^2\beta + \lambda) = 0, \end{array} \right.$$

y así tenemos que  $\beta = \lambda = 0$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación (3.59) resulta que la variedad es localmente conformemente llana. Finalmente, si  $\delta \neq 0$  multiplicando la primera ecuación de (3.78) por  $\alpha^2$ , la cuarta por  $\alpha^3/\delta$  y restándolas obtenemos que  $\beta(\alpha - \delta) = 0$ . De este modo, tanto si  $\beta = 0$  como si  $\alpha - \delta = 0$  tenemos que  $\lambda = 0$  y, por la Ecuación (3.59), que la variedad es localmente conformemente llana.

Finalmente analizamos el Tipo IV.3. Por la Ecuación (3.63) tenemos que  $D = \widehat{C} - \lambda \text{Id}$

es una derivación si y sólo si

$$(3.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha\gamma(3\alpha^2 - \alpha\delta + \gamma(\beta + 3\gamma)) = 0, \\ \gamma(\beta(3\alpha^2 - \alpha\delta + \beta\gamma) + 3\alpha\gamma\delta) = 0, \\ \alpha(3\beta\gamma^2 - \gamma^3 + 4\lambda) = 0, \\ \beta(\gamma^3 + 2\lambda) = 0, \\ \gamma(-3\alpha^2(\beta - \gamma) + \alpha\beta\delta - \beta^2\gamma) = 0, \\ \gamma(3\alpha^2\gamma - 3\alpha\gamma\delta + 4\gamma^3 - 4\lambda) = 0, \\ 3\alpha\beta\gamma^2 + \delta(\gamma^3 - 4\lambda) = 0, \\ \gamma(-3\alpha^2\delta + \alpha(3\gamma^2 + \delta^2) - \beta\gamma\delta) = 0. \end{array} \right.$$

Ahora bien, por tratarse de un álgebra de Lie Tipo IV.3 tenemos que  $\alpha = 0$  o  $\gamma = 0$ . Si  $\gamma = 0$  tenemos de forma directa por la Ecuación (3.63) que la variedad es localmente conformemente llana. Por otra parte, si  $\alpha = 0$  la Ecuación (3.81) se reduce a

$$(3.82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^2\gamma^2 = 0, \\ \beta(\gamma^3 + 2\lambda) = 0, \\ 4\gamma(\gamma^3 - \lambda) = 0, \\ \delta(\gamma^3 - 4\lambda) = 0, \\ \beta\gamma^2\delta = 0. \end{array} \right.$$

y puesto que además  $\alpha + \delta \neq 0$ , por ser de Tipo IV.3, por un cálculo largo pero directo tenemos que  $\gamma = \lambda = 0$ . Sustituyendo en la Ecuación (3.63) cualquiera de estas posibilidades obtenemos que la variedad es localmente conformemente llana.  $\square$

**Observación 3.27.** El caso (i) en el Teorema 3.26 se corresponde con el álgebra de Lie asociada al grupo de Heisenberg, mientras que el caso (ii) se corresponde con el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie resoluble  $E(1, 1)$ . Un estudio análogo puede hacerse en el caso Riemanniano para demostrar que únicamente el grupo de Heisenberg Riemanniano admite solitones de Cotton algebraicos. En este sentido, en [26] los autores obtienen la expresión del solitón de Cotton asociado al solitón de Cotton algebraico Riemanniano en el grupo de Heisenberg.

**Observación 3.28.** El Teorema 3.26 pone de manifiesto que los solitones de Cotton invariantes a la izquierda no provienen necesariamente de solitones de Cotton algebraicos.

En lo que resta de sección demostramos *la existencia de solitones de Cotton no invariantes y no triviales en variedades de Lorentz homogéneas de dimensión tres* a partir de la existencia de solitones de Cotton algebraicos obtenida en el Teorema 3.26. Observemos

que el Teorema 3.14 implica que cualquier grupo de Lie Lorentziano admitiendo un solitón de Cotton invariante a la izquierda tiene necesariamente operador de Cotton nilpotente; no obstante, dicha condición no se verifica para los grupos de Lie obtenidos en el Teorema 3.26. Es decir, los grupos de Lie admitiendo solitones de Cotton algebraicos proporcionan ejemplos de solitones de Cotton no invariantes.

### Solitones de Cotton no invariantes en el grupo de Heisenberg

Comenzamos con el grupo de Heisenberg Lorentziano. En [75] se demuestra que es posible dotar a este grupo de tres métricas Lorentzianas invariantes a la izquierda diferentes, salvo isometría y reescalado, dadas por

$$\begin{aligned} g_1 &= -dx \circ dx + (1 + x^2)dy \circ dy + 2xdy \circ dz + dz \circ dz, \\ g_2 &= dx \circ dx + (1 - x^2)dy \circ dy - 2xdy \circ dz - dz \circ dz, \\ g_3 &= dx \circ dx + (-1 + 3x - x^2)dy \circ dy + 2dz \circ dz. \end{aligned}$$

La métrica  $g_3$  es llana (véase [69]) y por tanto un solitón de Cotton trivial, mientras que las métricas  $g_1$  y  $g_2$  son solitones de Ricci contractivos no gradientes (véanse [71] y [72]). A continuación analizamos las métricas  $g_1$  y  $g_2$  por separado. Empezando con la métrica  $g_1$ , para un campo de vectores  $X = \mathcal{A}(x, y, z)\partial_x + \mathcal{B}(x, y, z)\partial_y + \mathcal{C}(x, y, z)\partial_z$  su derivada de Lie está dada por

$$(3.83) \quad \begin{aligned} (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_x, \partial_x) &= -2\mathcal{A}_x, \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_x, \partial_y) &= -\mathcal{A}_y + (x^2 + 1)\mathcal{B}_x + x\mathcal{C}_x, \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_x, \partial_z) &= -\mathcal{A}_z + x\mathcal{B}_x + \mathcal{C}_x, \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_y, \partial_y) &= 2(x\mathcal{A} + (x^2 + 1)\mathcal{B}_y + x\mathcal{C}_y), \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_y, \partial_z) &= \mathcal{A} + x\mathcal{B}_y + (x^2 + 1)\mathcal{B}_z + \mathcal{C}_y + x\mathcal{C}_z, \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_z, \partial_z) &= 2(x\mathcal{B}_z + \mathcal{C}_z), \end{aligned}$$

y el tensor de Cotton de tipo  $(0, 2)$  está determinado por

$$(3.84) \quad \tilde{C}(\partial_x, \partial_x) = -\frac{1}{2}, \quad \tilde{C}(\partial_y, \partial_y) = \frac{1}{2} - x^2, \quad \tilde{C}(\partial_y, \partial_z) = -x, \quad \tilde{C}(\partial_z, \partial_z) = -1.$$

Las Ecuaciones (3.83) y (3.84) implican que  $X$  es un solitón de Cotton si y sólo si

$$(3.85) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\mathcal{A}_x + 1 - 2\lambda = 0, \\ 2x\mathcal{B}_z + 2\mathcal{C}_z - 1 - \lambda = 0, \\ \mathcal{A}_z - x\mathcal{B}_x - \mathcal{C}_x = 0, \\ \mathcal{A}_y - (x^2 + 1)\mathcal{B}_x - x\mathcal{C}_x = 0, \\ \mathcal{A} + x\mathcal{B}_y + (x^2 + 1)\mathcal{B}_z + \mathcal{C}_y + x\mathcal{C}_z - x - x\lambda = 0, \\ 4x\mathcal{A} + 4(x^2 + 1)\mathcal{B}_y + 4x\mathcal{C}_y - 2x^2 + 1 - 2(x^2 + 1)\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Integrando la primera y la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, y, z) &= \mathcal{A}_1(y, z) + \frac{1}{4}(2\lambda - 1)x, \\ \mathcal{C}(x, y, z) &= \mathcal{C}_1(x, y) - \mathcal{B}(x, y, z)x + \frac{1}{2}(\lambda + 1)z.\end{aligned}$$

De este modo, la tercera ecuación se transforma en

$$\mathcal{B}(x, y, z) = (\mathcal{C}_1)_x(x, y) - (\mathcal{A}_1)_z(y, z),$$

y por tanto derivando la cuarta ecuación con respecto a  $x$  y  $z$  obtenemos  $(\mathcal{A}_1)_{zz} = 0$ , y así

$$\mathcal{A}_1(y, z) = \mathcal{A}_2(y)z + \mathcal{A}_3(y).$$

Derivando ahora la quinta ecuación con respecto a  $z$  obtenemos  $\mathcal{A}_2(y) = 0$  con lo que la cuarta ecuación se transforma en  $(\mathcal{C}_1)_{xx}(x, y) - \mathcal{A}'_3(y) = 0$ , de donde se sigue que

$$\mathcal{C}_1(x, y) = \frac{1}{2}\mathcal{A}'_3(y)x^2 + \mathcal{C}_2(y)x + \mathcal{C}_3(y).$$

En este punto, la quinta ecuación se reduce a

$$4\mathcal{A}_3(y) + 4\mathcal{C}'_3(y) + (2\mathcal{A}'_3(y)x + 4\mathcal{C}'_2(y) - 3)x = 0,$$

y por un cálculo directo a partir de esta ecuación se demuestra que

$$\mathcal{A}_3(y) = \kappa_1 y + \kappa_2, \quad \mathcal{C}_2(y) = \frac{3}{4}y + \kappa_3, \quad \mathcal{C}_3(y) = -\frac{\kappa_1}{2}y^2 - \kappa_2 y + \kappa_4,$$

donde  $\kappa_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Es decir, la Ecuación (3.85) se reduce finalmente a  $\lambda - 2 = 0$  con lo que se concluye que  $(H_3, g_1)$  es un solitón de Cotton si y sólo si es contractivo con  $\lambda = 2$  y  $X$  está dado por

$$X = (\kappa_1 y + \frac{3}{4}x + \kappa_2)\partial_x + (\kappa_1 x + \frac{3}{4}y + \kappa_3)\partial_y - (\frac{\kappa_1}{2}(x^2 + y^2) + \kappa_2 y - \frac{3}{2}z - \kappa_4)\partial_z.$$

Observemos que como un caso especial de los solitones de Cotton obtenidos anteriormente, se tiene que  $X = \frac{3}{4}x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y + \frac{3}{2}z\partial_z$  define un solitón de Cotton completo en  $(H_3, g_1)$ .

Teniendo en cuenta esto, se puede ver que el operador de Cotton asociado,  $\widehat{C}$ , viene dado con respecto a la base de campos coordenados por

$$\widehat{C}(\partial_x) = \frac{1}{2}\partial_x, \quad \widehat{C}(\partial_y) = \frac{1}{2}\partial_y - \frac{3}{2}x\partial_z, \quad \widehat{C}(\partial_z) = -\partial_z.$$

Como consecuencia, dicho operador diagonaliza con autovalores  $\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  y por tanto el solitón de Cotton no puede ser invariante a la izquierda (véase el Teorema 3.14). Además, el operador de Ricci,  $\widehat{\rho}$ , está dado por

$$\widehat{\rho}(\partial_x) = \frac{1}{2}\partial_x, \quad \widehat{\rho}(\partial_y) = \frac{1}{2}\partial_y - x\partial_z, \quad \widehat{\rho}(\partial_z) = -\frac{1}{2}\partial_z,$$

y por tanto no tiene al cero como autovalor, lo que implica que dicho solitón no es gradiente (véase [26]).

**Observación 3.29.** Un estudio completamente análogo puede realizarse para la métrica  $g_2$ , obteniendo en dicho caso que  $(H_3, g_2)$  es un solitón de Cotton si y sólo si es expansivo con  $\lambda = -2$  y el campo de vectores solitón está dado por

$$X = (\kappa_1 y - \frac{3}{4}x + \kappa_2)\partial_x - (\kappa_1 x + \frac{3}{4}y - \kappa_3)\partial_y + (\frac{\kappa_1}{2}(x^2 - y^2) - \kappa_2 y - \frac{3}{2}z + \kappa_4)\partial_z,$$

donde  $\kappa_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . De nuevo, el solitón de Cotton es no invariante a la izquierda y no gradiente.

### Solitones de Cotton no invariantes en $E(1,1)$

El grupo de Lie  $E(1,1)$  admite dos tipos de solitones de Cotton algebraicos (salvo signo  $\varepsilon = \pm 1$ , véase el Teorema 3.26) y por tanto puede dotarse con una métrica invariante a la izquierda con operador de Cotton no nilpotente admitiendo algún solitón de Cotton. Además, estos solitones de Cotton son necesariamente no invariantes (véase el Teorema 3.14).

Para nuestro propósito consideramos la referencia construída en [72]

$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \frac{1}{2} (e^x \partial_y + e^{-x} \partial_z), \quad E_3 = \frac{1}{2} (e^x \partial_y - e^{-x} \partial_z),$$

y su correferencia asociada dada por

$$E^1 = dx, \quad E^2 = e^{-x} dy + e^x dz, \quad E^3 = e^{-x} dy - e^x dz.$$

De ahora en adelante consideramos las métricas invariantes a la izquierda correspondientes al Teorema 3.26-(ii). En primer lugar consideremos la métrica  $g_1$  dada por

$$g_1 = \frac{2}{3}(E^1)^2 - (E^2)^2 + 2\sqrt{6}(E^2 E^3) - 3(E^3)^2,$$

o en coordenadas locales

$$g_1 = \frac{2}{3} dx \circ dx + (2\sqrt{6} - 4)e^{-2x} dy \circ dy + 4dy \circ dz - (2\sqrt{6} + 4)e^{2x} dz \circ dz.$$

Así, para un campo de vectores  $X = \mathcal{A}(x, y, z)\partial_x + \mathcal{B}(x, y, z)\partial_y + \mathcal{C}(x, y, z)\partial_z$  la derivada de Lie de la métrica está dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_x, \partial_x) &= \frac{4}{3} \mathcal{A}_x, \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_x, \partial_y) &= \frac{2}{3} (\mathcal{A}_y + 3(\sqrt{6} - 2)e^{-2x} \mathcal{B}_x + 3\mathcal{C}_x), \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_x, \partial_z) &= \frac{2}{3} (\mathcal{A}_z + 3\mathcal{B}_x - 3(\sqrt{6} + 2)e^{2x} \mathcal{C}_x), \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_y, \partial_y) &= 4\mathcal{C}_y - 4(\sqrt{6} - 2)e^{-2x} (\mathcal{A} - \mathcal{B}_y), \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_y, \partial_z) &= 2((\sqrt{6} - 2)e^{-2x} \mathcal{B}_z + \mathcal{B}_y + \mathcal{C}_z - (\sqrt{6} + 2)e^{2x} \mathcal{C}_y), \\ (\mathcal{L}_X g_1)(\partial_z, \partial_z) &= 4\mathcal{B}_z - 4(\sqrt{6} + 2)e^{2x} (\mathcal{A} + \mathcal{C}_z), \end{aligned} \tag{3.86}$$

y por un cálculo directo se demuestra que  $X = \frac{3y}{\sqrt{2}}\partial_y + \frac{3z}{\sqrt{2}}\partial_z$  es un solitón de Cotton contractivo con  $\lambda = 2\sqrt{2}$ . Además, debido a la no existencia de campos de vectores homotéticos en  $E(1,1)$  se sigue que este es el único solitón de Cotton módulo campos de Killing.

A continuación consideramos la métrica Lorentziana  $g_2$  en  $E(1,1)$  dada por

$$g_2 = \frac{2}{3}(E^1)^2 - 3(E^2)^2 + 2\sqrt{6}(E^2 E^3) - (E^3)^2,$$

o en coordenadas locales

$$g_2 = \frac{2}{3}dx \circ dx + (2\sqrt{6} - 4)e^{-2x}dy \circ dy - 4dy \circ dz - (2\sqrt{6} + 4)e^{2x}dz \circ dz.$$

Procediendo como en el caso anterior obtenemos que  $X = -\frac{3y}{\sqrt{2}}\partial_y - \frac{3z}{\sqrt{2}}\partial_z$  es un solitón de Cotton expansivo para  $\lambda = -2\sqrt{2}$ . Además, es el único solitón de Cotton expansivo módulo campos de Killing.

**Observación 3.30.** Como observación final del capítulo cabe destacar una vez más que los solitones de Cotton no invariantes construídos en esta sección provienen de los solitones de Cotton algebraicos obtenidos en el Teorema 3.26. Además, cabe destacar que los solitones de Cotton algebraicos tienen un comportamiento opuesto con respecto a los solitones de Cotton invariantes en los grupos de Lie puesto que los solitones de Cotton invariantes a la izquierda no se obtienen de los algebraicos.



# Capítulo 4

## Formas de Killing en variedades nearly Kähler

Un objeto de especial importancia en geometría diferencial son los campos de vectores de Killing. Estos campos se caracterizan por inducir isometrías infinitesimales; es decir, un *campo de vectores de Killing* es aquel cuyo flujo preserva una métrica dada. El conjunto de todos estos campos genera el álgebra de Lie del grupo de las isometrías de una variedad de Riemann y el número de ellos linealmente independientes mide el grado de simetría de la variedad. En variedades compactas este número está acotado superiormente por la dimensión del grupo de isometrías de la esfera estándar donde, además, la igualdad se verifica si y sólo si la variedad es isométrica a dicha esfera.

Existen diferentes definiciones generalizando el concepto de campo de vectores de Killing. Una de las más estudiadas en la literatura son los *campos de vectores conformes*, definidos como aquellos campos de vectores cuyo flujo preserva la clase conforme de una métrica dada. No obstante, existen otras generalizaciones también muy estudiadas en la literatura. En particular, en la Sección 2.2 hemos obtenido los campos de vectores afín Killing y 1-armónicos invariantes a la izquierda definidos sobre los grupos de Lie Lorentzianos de dimensión tres.

No obstante, mucho menos estudiada en la literatura es la generalización del concepto de campo de vectores de Killing, y en general de campo de vectores conforme, al espacio de las formas diferenciales. Dichos objetos son los conocidos como formas de Killing o, en general, formas de Killing conformes o formas twistor. Una  $k$ -forma  $u$  se llama  *$k$ -forma de Killing conforme* o  *$k$ -forma twistor* si y sólo si  $u$  verifica la ecuación diferencial

$$(4.1) \quad \nabla_X u = \frac{1}{k+1} X \lrcorner du - \frac{1}{n-k+1} X^\flat \wedge \delta u,$$

para todo campo de vectores  $X$  en  $M$ , donde  $X^\flat$  es la 1-forma dual del campo de vectores  $X$  y “ $\lrcorner$ ” representa el operador contracción de un campo de vectores con una forma. Cuando la  $k$ -forma  $u$  es, además, cocerrada se dice que  $u$  es una  *$k$ -forma de Killing*. Observemos que por la Ecuación (4.1) la condición de ser forma de Killing es equivalente a que  $X \lrcorner \nabla_X u = 0$  para cualquier campo de vectores  $X$  en  $M$ . Por otra parte, en el caso de que la forma de

Killing conforme  $u$  sea cerrada se dice que es una  $k$ -forma  $*$ -Killing. Cuando  $k = 1$  las formas de Killing y las formas de Killing conformes son duales de campos de vectores de Killing y de campos de vectores conformes, respectivamente.

Las formas de Killing como generalizaciones de los campos de Killing fueron introducidas por K. Yano en [93]. Posteriormente S. Tachibana en [83], para el caso de 2-formas, y de modo más general S. Tachibana y T. Kashiwada en [50] y [84] introdujeron las formas de Killing conformes generalizando los campos de vectores conformes. En particular, los primeros ejemplos no triviales de formas twistor se obtuvieron en la esfera estándar. En dicho caso es posible demostrar que cualquier  $k$ -forma twistor es una combinación lineal de autoformas para el autovalor más pequeño del operador de Laplace sobre las  $k$ -formas cerradas y cocerradas.

Recientemente A. Moroianu y U. Semmelmann entre otros profundizaron en el estudio de las formas de Killing conformes en variedades de Riemann compactas dotadas de determinadas estructuras geométricas, como por ejemplo variedades de Kähler, espacios simétricos,  $G_2$  y  $\text{Spin}_7$  variedades, etc. (véanse [63], [78], [79], [80] y las referencias en ellos señaladas para más información); obteniendo resultados globales sobre la existencia y no existencia de formas de Killing conformes sobre tales variedades. En el caso particular de formas de Killing, ambos autores demuestran que en las variedades de Riemann con grupo de holonomía  $G_2$  o  $\text{Spin}_7$  dichas formas son necesariamente paralelas. Un resultado análogo fue obtenido previamente por Yamaguchi en [92] para las variedades de Kähler compactas, i.e., toda forma de Killing sobre una variedad de Kähler compacta es necesariamente paralela.

Cuando se consideran variedades compactas, como se hace por ejemplo en los resultados citados anteriormente, es posible caracterizar las formas de Killing conformes en términos del Laplaciano. Esto es, dada una  $k$ -forma de Killing conforme  $u$ , aplicando la Ecuación (4.1) dos veces se obtiene la fórmula de tipo Weitzenböck

$$(4.2) \quad \nabla^* \nabla u = \frac{1}{k+1} \delta du + \frac{1}{n-k+1} d\delta u,$$

donde recordemos que  $\nabla^* \nabla := -\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}$  representa el Laplaciano bruto. De este modo, y puesto que  $\Delta = \delta d + d\delta = \nabla^* \nabla + q(R)$ , con  $q(R) = \sum e_j \wedge e_i \lrcorner R_{e_j e_i}$ , se obtiene que una  $k$ -forma  $u$  es una  $k$ -forma de Killing conforme si y sólo si se verifica la siguiente fórmula de tipo Weitzenböck (véase [78])

$$(4.3) \quad q(R)u = \frac{k}{k+1} \delta du + \frac{n-k}{n-k+1} d\delta u.$$

Una propiedad importante del espacio generado por todas las formas de Killing conformes es que permanece estable por la acción del operador estrella de Hodge,  $*$ . En particular, por ser  $*$  un operador paralelo, lleva  $k$ -formas de Killing en  $(n-k)$ -formas  $*$ -Killing. Recordemos que para variedades Riemannianas el operador estrella de Hodge verifica las siguientes igualdades:  $*^2 \eta = (-1)^{k(n-k)} \eta$ ,  $\delta \eta = (-1)^{n(k+1)+1} * d * \eta$  y  $*(e_j \wedge \eta) = (-1)^k e_j \lrcorner * \eta$ , donde  $\eta \in \Lambda^k M$ .

Si restringimos este resultado a las formas de Killing se obtiene que en una variedad compacta una  $k$ -forma  $u$  cocerrada es una forma de Killing si y sólo si verifica la ecuación

$$(4.4) \quad \Delta u = \frac{k+1}{k} q(R)u.$$

Puesto que el operador  $q(R)$  actúa sobre 1-formas como el operador de Ricci, este resultado es una generalización directa de la caracterización de los campos de vectores de Killing en variedades compactas como los campos de vectores en el núcleo de  $\Delta - 2\hat{\rho}$  y cuya divergencia es nula. De forma análoga, se tiene que una  $k$ -forma cerrada  $u$  es  $*$ -Killing si y sólo si verifica la ecuación

$$(4.5) \quad \Delta u = \frac{n-k+1}{n-k} q(R)u,$$

donde  $n$  es la dimensión de la variedad  $M$ .

Una vez hecha esta breve introducción sobre formas de Killing conformes, nuestro objetivo en este capítulo es estudiar las formas de Killing en las variedades nearly Kähler de dimensión seis.

Como vimos en el Capítulo 1, una *variedad nearly Kähler* es una variedad casi Hermítica  $(M, g, J)$  tal que la estructura casi compleja  $J$  verifica la relación

$$(4.6) \quad (\nabla_X J)X = 0,$$

para todo campo de vectores  $X$  en  $M$ . Además, si para todo campo de vectores no nulo  $X$  en  $M$  se tiene que  $(\nabla_X J) \neq 0$  entonces se dice que  $(M, g, J)$  es una *variedad nearly Kähler estricta*. Por tanto, una variedad nearly Kähler estricta puede considerarse como el opuesto de una variedad Kähler. Debido a esto, para estudiar las propiedades geométricas de tales variedades resulta útil considerar la *conexión Hermítica canónica*, definida como

$$(4.7) \quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J)Y,$$

ya que verifica las propiedades  $\bar{\nabla}g = \bar{\nabla}J = 0$ . Esta conexión se extiende de forma natural al fibrado de las formas como

$$(4.8) \quad \bar{\nabla}_X = \nabla_X - (T_X)_*,$$

donde  $(T_X)_* = \frac{1}{2} e_i \wedge T_X e_i \lrcorner \cdot$ , siendo  $T_X Y := T(X, Y) = -J(\nabla_X J)Y$  la torsión de  $\bar{\nabla}$ , que además verifica la identidad  $\bar{\nabla}T = 0$ . Por otra parte, a partir de la estructura casi compleja  $J$  se define su *2-forma de Kähler*, que denotaremos por  $\omega$ , como  $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ . Es importante destacar que, con el fin de simplificar las notaciones, a lo largo de este capítulo identificaremos los vectores con sus 1-formas duales siempre que no suponga riesgo de confusión.

El tensor curvatura asociado a la conexión Hermítica canónica, que denotaremos por  $\bar{R}$ , está relacionado con el tensor curvatura Riemanniano por la siguiente expresión

$$(4.9) \quad R_{WXYZ} - \bar{R}_{WXYZ} = \frac{1}{2}g((\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z) \\ - \frac{1}{4}\{g((\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z) - g((\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y)\}.$$

A lo largo de este trabajo centraremos nuestra atención en las variedades nearly Kähler de dimensión seis. Una de las principales propiedades geométricas de estas variedades es que son de *tipo constante*, esto es, verifican la relación

$$(4.10) \quad g((\nabla_U J)X, (\nabla_Y J)Z) = \alpha^2\{g(U, Y)g(X, Z) - g(U, Z)g(X, Y) \\ - g(U, JY)g(X, JZ) + g(U, JZ)g(X, JY)\},$$

para cualesquiera campos de vectores  $U, X, Y, Z$  en  $M$ , y para  $\alpha$  una constante real. A partir de esta propiedad podemos considerar la  $J$ -base adaptada  $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2, e_3, Je_3\}$ , donde  $e_1$  y  $e_2$  son campos de vectores arbitrarios y  $e_3$  es el campo de vectores dado por  $e_3 := \alpha(\nabla_{e_1} J)e_2$ . En lo sucesivo consideraremos la normalización de esta  $J$ -base tal que la constante  $\alpha$  tome el valor uno, y por tanto la curvatura escalar sea  $\tau = 30$ .

Haciendo uso de esta  $J$ -base podemos definir la siguiente base para el complexificado del espacio tangente  $T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ ,

$$(4.11) \quad \epsilon_j = 1/\sqrt{2}(e_j - iJe_j) \in T^{1,0}M \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}_j = 1/\sqrt{2}(e_j + iJe_j) \in T^{0,1}M.$$

De forma análoga, a partir de los isomorfismos musicales, definimos la siguiente base para el complexificado del espacio de las 1-formas  $\Lambda^1M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M$ ,

$$(4.12) \quad \epsilon^j = 1/\sqrt{2}(e^j + iJe^j) \in \Lambda^{1,0}M \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon}^j = 1/\sqrt{2}(e^j - iJe^j) \in \Lambda^{0,1}M,$$

que, además, verifican las siguientes relaciones  $(\epsilon_i)^b = \bar{\epsilon}^i$  y  $(\bar{\epsilon}_i)^b = \epsilon^i$ .

Considerando estas bases de los complexificados, el término involucrando la torsión en la Ecuación (4.8) se reduce a

$$(4.13) \quad (T_X)_* = \frac{1}{2}\{\epsilon^i \wedge T_X \epsilon_i \lrcorner \cdot + \bar{\epsilon}^i \wedge T_X \bar{\epsilon}_i \lrcorner \cdot\},$$

resultando que si  $X \in T^{1,0}M$  entonces el operador  $(T_X)_*$  lleva formas de tipo  $\Lambda^{p,q}M$  en formas de tipo  $\Lambda^{p+1,q-1}M$ ; mientras que si  $X \in T^{0,1}M$  lleva formas de tipo  $\Lambda^{p,q}M$  en formas de tipo  $\Lambda^{p-1,q+1}M$ . Además, estas bases también permiten obtener la *descomposición de Hodge* de la diferencial exterior y de la codiferencial. De este modo, el operador  $d$  se descompone en

$$(4.14) \quad d = N + \partial + \bar{\partial} + \bar{N},$$

donde

$$\begin{aligned}
(4.15) \quad N &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p+2,q-1}, \quad N := \frac{1}{2}\epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge T_{\epsilon_i} \epsilon_{j \lrcorner} \cdot; \\
\partial &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p+1,q}, \quad \partial := \epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i}; \\
\bar{\partial} &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p,q+1}, \quad \bar{\partial} := \bar{\epsilon}^i \wedge \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}; \\
\bar{N} &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p-1,q+2}, \quad \bar{N} := \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i \wedge \bar{\epsilon}^j \wedge T_{\bar{\epsilon}_i} \bar{\epsilon}_{j \lrcorner} \cdot;
\end{aligned}$$

mientras que el operador  $\delta$  se descompone en

$$(4.16) \quad \delta = N^* + \partial^* + \bar{\partial}^* + \bar{N}^*,$$

donde

$$\begin{aligned}
(4.17) \quad N^* &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p-2,q+1}, \quad N^* := \frac{1}{2}(T_{\bar{\epsilon}_i} \bar{\epsilon}_j)^{\flat} \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \epsilon_{i \lrcorner} \cdot; \\
\partial^* &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p-1,q}, \quad \partial^* := -\epsilon_i \lrcorner \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}; \\
\bar{\partial}^* &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p,q-1}, \quad \bar{\partial}^* := -\bar{\epsilon}_i \lrcorner \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}; \\
\bar{N}^* &: \Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p+1,q-2}, \quad \bar{N}^* := \frac{1}{2}(T_{\epsilon_r} \epsilon_s)^{\flat} \wedge \bar{\epsilon}_r \lrcorner \bar{\epsilon}_s \lrcorner \cdot.
\end{aligned}$$

A partir de estas descomposiciones de Hodge y de las identidades  $d^2 = 0 = \delta^2$  se obtienen las relaciones

$$(4.18) \quad \partial^2 + \{\bar{\partial}, N\} = \bar{\partial}^2 + \{\partial, \bar{N}\} = \{\partial, \bar{\partial}\} + \{N, \bar{N}\} = \{\partial, N\} = \{\bar{N}, \bar{\partial}\} = N^2 = \bar{N}^2 = 0,$$

y

$$\begin{aligned}
(4.19) \quad (\partial^*)^2 + \{\bar{\partial}^*, N^*\} &= (\bar{\partial}^*)^2 + \{\partial^*, \bar{N}^*\} = \{\partial^*, \bar{\partial}^*\} + \{N^*, \bar{N}^*\} = \{\partial^*, N^*\} \\
&= \{\bar{N}^*, \bar{\partial}^*\} = (N^*)^2 = (\bar{N}^*)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Existen también relaciones entre los operadores dados en la Ecuación (4.15) y los dados en la Ecuación (4.17). Dichas relaciones se conocen como las *identidades de Kähler* y vienen dadas por los operadores algebraicos  $\Lambda := i \epsilon_j \lrcorner \bar{\epsilon}_j \lrcorner \cdot$  y  $L := i \epsilon^j \wedge \bar{\epsilon}^j \wedge \cdot$  del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(4.20) \quad [\Lambda, \partial] &= i\bar{\partial}^*, \quad [\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*, \quad [\Lambda, N] = 2i\bar{N}^*, \quad [\Lambda, \bar{N}] = -2iN^*, \\
[L, \partial^*] &= i\bar{\partial}, \quad [L, \bar{\partial}^*] = -i\partial, \quad [L, N^*] = 2i\bar{N}, \quad [L, \bar{N}^*] = -2iN.
\end{aligned}$$

Además, los operadores  $\Lambda$  y  $L$  están relacionados con la aplicación identidad del espacio  $\Lambda^{p,q}M$  mediante la expresión  $[\Lambda, L] = (n - p - q)id_{\Lambda^{p,q}}$ .

Finalmente, haciendo uso también de las Ecuaciones (4.14) y (4.16), el operador Laplaciano,  $\Delta = d\delta + \delta d$ , se descompone del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(4.21) \quad \Delta &= \{N, \partial^*\} + \{N, N^*\} + \{N, \bar{N}^*\} + \{N, \bar{\partial}^*\} \\
&\quad + \{\partial, \partial^*\} + \{\partial, N^*\} + \{\partial, \bar{N}^*\} + \{\partial, \bar{\partial}^*\} \\
&\quad + \{\bar{\partial}, \partial^*\} + \{\bar{\partial}, N^*\} + \{\bar{\partial}, \bar{N}^*\} + \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\} \\
&\quad + \{\bar{N}, \partial^*\} + \{\bar{N}, N^*\} + \{\bar{N}, \bar{N}^*\} + \{\bar{N}, \bar{\partial}^*\},
\end{aligned}$$

donde  $\{A, B\} = AB + BA$  para cualquiera de estos sumandos. Además, existen numerosas relaciones entre estos términos (véase [88]), siendo algunas de las más relevantes

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \{\bar{\partial}, N^*\} &= \{\partial^*, \bar{N}\} = \{\bar{\partial}, N^*\} = \{\bar{N}^*, \partial\} = \{N, \bar{N}^*\} = \{\bar{N}, N^*\} = 0; \\ \{\partial^*, \bar{\partial}\} &= -\{\bar{N}, \bar{\partial}^*\} = -\{N^*, \partial\}; \\ \{\bar{\partial}^*, \partial\} &= -\{\bar{N}^*, \bar{\partial}\} = -\{N, \partial^*\}; \\ \{\partial, \partial^*\} &= \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^*\} + 2(p - q)(n - p - q)id_{\Lambda^{p,q}}. \end{aligned}$$

Una vez recordadas estas propiedades de las variedades nearly Kähler podemos comenzar a estudiar las formas de Killing sobre ellas. De este modo cabe destacar que, a diferencia de lo realizado en el Capítulo 2, consideraremos esta generalización de campo de vectores de Killing sobre variedades Riemannianas y no sobre variedades Lorentzianas. Estructuramos este capítulo del siguiente modo. En la Sección 4.1 se estudian las formas de Killing paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica; mientras que las formas de Killing de orden puro no necesariamente  $\bar{\nabla}$ -paralelas son estudiadas en la Sección 4.2. Los resultados de esta sección aparecen recogidos en [68].

## 4.1. Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas

No existen en la literatura muchos resultados relacionados con la existencia de formas de Killing (ni en general de formas de Killing conformes) en variedades nearly Kähler. U. Semmelmann obtiene en [78] que si  $(M^n, g, J)$  es una variedad casi Hermítica entonces su 2-forma de Kähler  $\omega$  es una forma de Killing si y sólo si se trata de una variedad nearly Kähler. A su vez, el autor también obtiene en dicho trabajo que para las variedades nearly Kähler de dimensión seis estrictas la 3-forma  $\star d\omega$  (que no es más que un múltiplo de la torsión de la conexión Hermítica canónica) es también una forma de Killing. Cabe destacar en este punto que tanto  $\omega$  (por ser  $\bar{\nabla}$  una conexión Hermítica) como  $\star d\omega$  (véase [5]) son  $\bar{\nabla}$ -paralelas. Estudiamos a continuación la existencia o no de otras formas de Killing  $\bar{\nabla}$ -paralelas sobre las variedades nearly Kähler de dimensión seis estrictas. En lo sucesivo, cuando nos refiramos a las variedades nearly Kähler de dimensión seis estrictas estaremos considerando todas aquellas variedades nearly Kähler compactas de dimensión seis no isométricas a  $\mathbb{S}^6$  con su métrica estándar.

Para realizar este estudio, tomaremos una sección  $u$  del fibrado  $\Lambda^k M$  paralela respecto a la conexión Hermítica canónica y consideraremos caso por caso los posibles valores para  $k$ : 1, 2, 3, 4 y 5; en el caso  $k = 6$  la forma  $u$  resulta un múltiplo de la forma de volumen y por tanto es de forma directa una forma de Killing. Para el resto de los casos posibles haremos uso de forma recurrente de la caracterización de ser una forma de Killing para formas cocerradas dada por la Ecuación (4.4). No obstante, puesto que  $\Delta = \nabla^* \nabla + q(R)$  podemos reducir esta condición a la ecuación

$$(4.23) \quad \nabla^* \nabla u = \frac{1}{k} q(R)u.$$

Además, como la conexión de Levi-Civita está relacionada con la conexión Hermítica canónica mediante el tensor  $(T)_*$ , y por tanto el tensor curvatura  $R$  con el tensor curvatura  $\bar{R}$ , es posible expresar la condición dada por la Ecuación (4.23) en términos de la conexión  $\bar{\nabla}$ . En particular, y puesto que estamos considerando variedades nearly Kähler de dimensión seis estrictas, a partir de las Ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtiene en [65] la relación

$$(4.24) \quad q(R) - q(\bar{R}) = \frac{1}{8} \{ -(e_i \wedge e_j)_*(e_i \wedge e_j)_* + 3(e_i \wedge e_j)_*(Je_i \wedge Je_j)_* \\ - (e_i \wedge Je_i)_*(e_j \wedge Je_j)_* \},$$

donde  $(X \wedge Y)_*(Z) = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$  para cualesquiera campos de vectores  $X, Y, Z$  en  $M$ .

Por otra parte, sea  $p \in M$  un punto arbitrario y consideremos una referencia ortonormal  $\{e_i\}$  tal que en el punto  $p$  sea  $\nabla$ -paralela, i.e. tal que  $(\nabla_{e_i} e_j)|_p = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, 6$ . Bajo estas consideraciones tenemos que en el punto  $p$  el Laplaciano bruto  $\nabla^* \nabla$  se reduce a  $\nabla^* \nabla = -\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} = -\nabla_{e_i} \nabla_{e_i}$ . Además, ya que

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i - 1/2 J(\nabla_{e_i} J)e_i = \nabla_{e_i} e_i = 0,$$

se obtiene que el Laplaciano bruto asociado a la conexión  $\bar{\nabla}$  y definido como  $\bar{\nabla}^* \bar{\nabla} := -\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} + \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{e_i} e_i}$ , se reduce de modo análogo a  $\bar{\nabla}^* \bar{\nabla} = -\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i}$ . Ahora bien, por la Ecuación (4.8) se tiene que ambos Laplacianos brutos están relacionados por la expresión

$$(4.25) \quad \nabla^* \nabla = \bar{\nabla}^* \bar{\nabla} - 2(T_{e_i})_* \bar{\nabla}_{e_i} - (T_{e_i})_*(T_{e_i})_*.$$

De este modo, y puesto que por ser  $u$  paralela respecto a la conexión Hermítica canónica verifica que  $q(\bar{R})u = \bar{\nabla}^* \bar{\nabla} u = (T_{e_i})_* \bar{\nabla}_{e_i} u = 0$ , la ecuación diferencial dada por la expresión (4.23) se reduce a la ecuación algebraica

$$(4.26) \quad -(T_{e_i})_*(T_{e_i})_* u = \frac{1}{8k} \{ -(e_i \wedge e_j)_*(e_i \wedge e_j)_* + 3(e_i \wedge e_j)_*(Je_i \wedge Je_j)_* \\ - (e_i \wedge Je_i)_*(e_j \wedge Je_j)_* \} u.$$

Como consecuencia del trabajo realizado en los siguientes apartados estaremos en condiciones de concluir el siguiente resultado

**Teorema 4.1.** *Sea  $M$  una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta. Las únicas formas de Killing (salvo multiplicación por un escalar) paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica son la 2-forma de Kähler y la 3-forma torsión.*

### Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas de orden uno

El estudio de las formas de Killing de orden uno permite un análisis especial ya que sus duales consisten en campos de vectores de Killing y recíprocamente. Además, como la

conexión Hermítica canónica es métrica, una 1-forma es  $\bar{\nabla}$ -paralela si y sólo si su campo de vectores dual es  $\bar{\nabla}$ -paralelo. Así, el estudio de las 1-formas de Killing  $\bar{\nabla}$ -paralelas es equivalente al estudio de los campos de vectores de Killing  $\bar{\nabla}$ -paralelos.

Sea  $\xi$  un campo de vectores  $\bar{\nabla}$ -paralelo en  $M$ , entonces

$$\nabla_X \xi = \frac{1}{2} J(\nabla_X J)\xi$$

y, por tanto

$$X \lrcorner \nabla_X \xi = \langle \nabla_X \xi, X \rangle = \frac{1}{2} \langle J(\nabla_X J)\xi, X \rangle = \frac{1}{2} \langle J\xi, (\nabla_X J)X \rangle = 0.$$

De este modo, resulta que todo campo de vectores  $\xi$  paralelo respecto a la conexión Hermítica canónica es un campo de vectores de Killing. Ahora bien, en [62] se demuestra que si  $\xi$  es un campo de vectores de Killing entonces la derivada de Lie de la estructura casi compleja  $J$  con respecto a  $\xi$  se anula, i.e.,  $\mathcal{L}_\xi J = 0$ . No obstante, dado  $\xi$  un campo de vectores  $\bar{\nabla}$ -paralelo y  $X$  un campo de vectores en  $M$  se verifica que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi J)X &= \mathcal{L}_\xi(JX) - J(\mathcal{L}_\xi X) \\ &= [\xi, JX] - J[\xi, X] \\ &= \nabla_\xi JX - \nabla_{JX}\xi - J\nabla_\xi X + J\nabla_X \xi \\ &= \frac{1}{2} \{ J(\nabla_\xi J)JX - J(\nabla_{JX} J)\xi - JJ(\nabla_\xi J)X + JJ(\nabla_X J)\xi \} \\ &= 2(\nabla_\xi J)X. \end{aligned}$$

De este modo, como  $X$  es un campo de vectores arbitrario y  $M$  es un variedad nearly Kähler estricta, resulta que  $\mathcal{L}_\xi J = 0$  si y sólo si  $\xi$  es el campo de vectores cero. Por tanto, no existen campos de vectores de Killing  $\bar{\nabla}$ -paralelos.

### Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas de orden dos

El fibrado de las 2-formas,  $\Lambda^2 M$ , se descompone bajo la acción del grupo  $SU(3)$  en las siguientes componentes irreducibles

$$(4.27) \quad \Lambda^2 M \approx \Lambda^{(2,0)+(0,2)} M \oplus \Lambda_0^{1,1} M \oplus \mathbb{R}\omega,$$

donde  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)} M = \Lambda^{2,0} M \oplus \Lambda^{0,2} M$  y  $\Lambda_0^{1,1} M$  denota el conjunto de las formas de tipo  $(1,1)$  primitivas; es decir, aquellas formas de tipo  $(1,1)$  cuya contracción con la 2-forma de Kähler se anula.

Comenzamos estudiando el caso en el que la forma  $u$  es una sección  $\bar{\nabla}$ -paralela de uno solo de los subespacios dados en la Ecuación (4.27). Como vimos anteriormente, la 2-forma de Kähler de una variedad nearly Kähler, no necesariamente de dimensión seis, es una forma de Killing; por tanto, si  $u$  es una sección cocerrada de  $\mathbb{R}\omega$  entonces es una forma de Killing. Para estudiar el resto de posibilidades haremos uso del siguiente resultado previo

**Lema 4.2.** *Sea  $(M, g, J)$  una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta. Entonces se verifican:*

$$(i) \quad 2X \lrcorner \Psi^+ = \sum (\nabla_{e_i} J)X \wedge e_i,$$

$$(ii) \quad g(X \lrcorner \Psi^+, Y \lrcorner \Psi^+) = 2g(X, Y),$$

para cualesquiera campos de vectores  $X$  e  $Y$  en  $M$  y donde  $\Psi^+$  es la 3-forma definida como  $\Psi^+ := \nabla \omega = \frac{1}{3} d\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge Je_2 \wedge Je_3 - Je_1 \wedge e_2 \wedge Je_3 - Je_1 \wedge Je_2 \wedge e_3$ , siendo  $\{e_i\}$  la  $J$ -base definida anteriormente.

*Demostración.*

(i) Se sigue de forma directa a partir de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} 3X \lrcorner \Psi^+ &= X \lrcorner d\omega \\ &= X \lrcorner \sum e_i \wedge \nabla_{e_i} \omega \\ &= \sum g(X, e_i) \nabla_{e_i} \omega - \sum e_i \wedge (\nabla_{e_i} \omega)(X, e_j) e_j \\ &= \nabla_X \omega - \sum e_i \wedge (\nabla_{e_i} J)X \\ &= \frac{1}{3} X \lrcorner d\omega - \sum e_i \wedge (\nabla_{e_i} J)X \\ &= X \lrcorner \Psi^+ - \sum e_i \wedge (\nabla_{e_i} J)X. \end{aligned}$$

(ii) Por el resultado anterior y por las Ecuaciones (4.6) y (4.10) tenemos que

$$\begin{aligned} g(X \lrcorner \Psi^+, Y \lrcorner \Psi^+) &= \sum g(\frac{1}{2}(\nabla_{e_i} J)X \wedge e_i, \frac{1}{2}(\nabla_{e_j} J)Y \wedge e_j) \\ &= \frac{1}{4} \sum g((\nabla_{e_i} J)X, (\nabla_{e_i} J)Y) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum g((\nabla_{e_i} J)X, e_j) g((\nabla_{e_j} J)Y, e_i) \\ &= \frac{1}{4} \sum \{g((\nabla_{e_i} J)X, (\nabla_{e_i} J)Y) - g((\nabla_{(\nabla_{e_i} J)X} J)Y, e_i)\} \\ &= \frac{1}{4} (\sum g((\nabla_{e_i} J)X, (\nabla_{e_i} J)Y) + \sum g((\nabla_Y J)(\nabla_{e_i} J)X, e_i)) \\ &= \frac{1}{4} (\sum g((\nabla_{e_i} J)X, (\nabla_{e_i} J)Y) - \sum g((\nabla_{e_i} J)X, (\nabla_Y J)e_i)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum g((\nabla_{e_i} J)(\nabla_{e_i} J)X, Y) \\ &= 2g(X, Y). \end{aligned}$$

□

En general, si  $u$  es una forma  $\bar{\nabla}$ -paralela sobre una variedad nearly Kähler  $M$  de

dimensión seis estricta, por la Ecuación (4.8) resulta que

$$\begin{aligned}
2 \nabla_X u &= 2(T_X)_* u \\
&= \sum e_j \wedge T_X e_j \lrcorner u \\
&= - \sum e_j \wedge g(J(\nabla_X J)e_j, e_i) e_i \lrcorner u \\
&= - \sum e_j \wedge g(e_j, (\nabla_X J)J e_i) e_i \lrcorner u \\
&= - \sum (\nabla_X J)J e_i \wedge e_i \lrcorner u \\
&= \sum (\nabla_X J)e_i \wedge J e_i \lrcorner u,
\end{aligned}$$

y ya que  $\delta = -e_j \lrcorner \nabla_{e_j}$  se tiene

$$\begin{aligned}
(4.28) \quad -2 \delta(u) &= \sum 2 e_j \lrcorner \nabla_{e_j} u \\
&= \sum e_j \lrcorner \{(\nabla_{e_j} J)e_i \wedge J e_i \lrcorner u\} \\
&= - \sum (\nabla_{e_j} J)e_i \wedge e_j \lrcorner J e_i \lrcorner u.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si  $u$  es una 2-forma y aplicamos  $\delta(u)$  a un campo de vectores  $X$  arbitrario en  $M$  obtenemos por el Lema 4.2 que

$$\begin{aligned}
(4.29) \quad -2 \delta(u)(X) &= - \sum g((\nabla_{e_j} J)e_i, X) u(J e_i, e_j) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum g(u, J(\nabla_{e_j} J)X \wedge e_j) \\
&= - \sum g(u, (\nabla_{e_j} J)JX \wedge e_j) \\
&= -2 g(u, JX \lrcorner \Psi^+),
\end{aligned}$$

donde la igualdad (\*) se obtiene como sigue

$$\begin{aligned}
\sum g(u, J(\nabla_{e_j} J)X \wedge e_j) &= \sum g(\frac{1}{2}u(e_k, e_l)e_k \wedge e_l, J(\nabla_{e_j} J)X \wedge e_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum u(e_k, e_l) \{g(J(\nabla_{e_j} J)X, e_k)g(e_l, e_j) \\
&\quad - g(e_k, e_j)g(e_l, J(\nabla_{e_j} J)X)\} \\
&= \frac{1}{2} (\sum u(e_k, e_j)g(J(\nabla_{e_j} J)X, e_k) \\
&\quad - \sum u(e_j, e_l)g(e_l, J(\nabla_{e_j} J)X)) \\
&= - \sum u(e_l, e_j)g((\nabla_{J e_j} J)X, e_l) \\
&= \sum u(e_l, J e_j)g((\nabla_{e_j} J)X, e_l) \\
&= - \sum u(e_l, J e_j)g(X, (\nabla_{e_j} J)e_l),
\end{aligned}$$

donde substituyendo los índices de suma, el  $j$  por  $i$  y el  $l$  por  $j$ , y reordenando se deduce ya la igualdad buscada.

En el caso particular en que  $u$  sea una sección de  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)}M$ , y puesto que la aplicación  $X \mapsto X \lrcorner \Psi^+$  define un isomorfismo entre  $TM$  y  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)}M$ , es posible encontrar un campo

de vectores  $\xi$  tal que  $u = \xi \lrcorner \Psi^+$ . De este modo la Ecuación (4.29) se reduce aplicando el Lema 4.2 a

$$\delta(u)(X) = g(\xi \lrcorner \Psi^+, JX \lrcorner \Psi^+) = 2g(\xi, JX).$$

Como el campo de vectores  $X$  fue tomado de forma arbitraria se tiene que  $\delta(u) = 0$  si y sólo si  $\xi = 0$  o, equivalentemente, si y sólo si  $u = 0$ . Se obtiene así que no existen formas cocerradas  $\bar{\nabla}$ -paralelas de tipo  $(2, 0) + (0, 2)$  y, por tanto, no existen formas de Killing que sean secciones de  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)}M$  en  $M$ .

Por otra parte, se sigue de la Ecuación (4.29) que si una sección  $u$  de  $\Lambda^{1,1}M$  es paralela respecto a la conexión Hermítica canónica entonces, como la descomposición dada por la Ecuación (4.27) está formada por subespacios ortogonales entre sí, es necesariamente cocerrada. En particular, en [64] y en [65] se obtiene que si  $u \in \Lambda_0^{1,1}M$  es una 2-forma  $\bar{\nabla}$ -paralela, verifica que  $(q(R) - q(\bar{R}))u = q(R)u = -u$  y  $(\nabla^*\nabla - \bar{\nabla}^*\bar{\nabla})u = \nabla^*\nabla u = u + (J\delta u) \lrcorner \Psi^+ = u$ . Ahora bien, como  $\Delta = \nabla^*\nabla + q(R)$  se sigue que  $u$  es armónica y, por ser  $M$  compacta, es cerrada y cocerrada. Si además suponemos que  $u$  es una forma de Killing entonces por la Ecuación (4.23) ha de ser necesariamente paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible. En función de estos resultados se obtiene que no existen formas de Killing de tipo  $(1, 1)$  primitivas.

Finalmente, en el caso en que  $u = u^0 + u^1 + u_0^1$ , donde  $u^0$  es una sección de  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)}M$ ,  $u^1$  de  $\mathbb{R}\omega$  y  $u_0^1$  de  $\Lambda_0^{1,1}M$ ; se tiene por la Ecuación (4.29) que para un campo de vectores  $X$  en  $M$  arbitrario

$$-2\delta(u)(X) = -2g(u^0, JX \lrcorner \Psi^+)$$

y, por tanto,  $u$  es cocerrada si y sólo si,  $u^0 = 0$ . Además, puesto que en [62] se demuestran las igualdades  $\nabla^*\nabla\omega = 4\omega$  y  $q(R)\omega = 8\omega$  por la Ecuación (4.23) se deduce que  $u$  es una forma de Killing si y sólo si lo son  $u^1$  y  $u_0^1$ . Como por lo visto anteriormente  $u_0^1$  no puede ser una forma de Killing hemos demostrado el siguiente lema.

**Lema 4.3.** *Dada una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta, la única forma de Killing (salvo multiplicación por un escalar) de orden dos paralela respecto a la conexión Hermítica canónica es la 2-forma de Kähler.*

### Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas de orden tres

El fibrado de las formas de orden tres,  $\Lambda^3M$ , se descompone bajo la acción del grupo  $SU(3)$  en los siguientes subespacios irreducibles

$$\Lambda^3M \approx \Lambda^{(3,0)+(0,3)}M \oplus \Lambda_0^{(2,1)+(1,2)}M \oplus (\Lambda^1M \wedge \omega),$$

donde las secciones de  $\Lambda_0^{(1,2)+(2,1)}M$  generan el conjunto de las *formas primitivas de tipo*  $(1, 2) + (2, 1)$ ; es decir, las combinaciones lineales de las formas de tipo  $(1, 2)$  y de las de tipo  $(2, 1)$  que se anulan por la contracción con la 2-forma de Kähler; mientras que  $\Lambda^{(3,0)+(0,3)}M$  representa el espacio  $\Lambda^{0,3}M \oplus \Lambda^{3,0}M$ .

El subespacio  $\Lambda^{(3,0)+(0,3)}M$  tiene dimensión dos y está generado por las 3-formas  $\bar{\nabla}$ -paralelas  $\Psi^+ := \frac{1}{3}d\omega$  y  $\Psi^- := \frac{1}{3}(\star d\omega)$ <sup>1</sup>. En particular la forma

$$\star d\omega = -Je_1 \wedge Je_2 \wedge Je_3 + Je_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge Je_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge Je_3,$$

es la 3-forma asociada a la torsión de la conexión  $\bar{\nabla}$  y, por lo visto anteriormente, es una forma de Killing. Por su parte,  $d\omega$  no es cocerrada ya que de serlo y por ser  $M$  compacta resultaría

$$0 = \int_M g(\delta d\omega, \omega) = \int_M g(d\omega, d\omega) = 9 \int_M g(\nabla\omega, \nabla\omega) = 9\|\nabla\omega\|^2,$$

lo cual no puede ser por tratarse  $M$  de una variedad nearly Kähler estricta. Así pues,  $\star d\omega$  no es una forma de Killing ya que no es cocerrada.

Consideremos ahora una sección  $u = X \wedge \omega$  de  $\Lambda^1 M \wedge \omega$  paralela respecto a la conexión Hermítica canónica. Como la 2-forma de Kähler es  $\bar{\nabla}$ -paralela se tiene que  $u$  es  $\bar{\nabla}$ -paralela si y sólo si lo es el campo de vectores  $X$ . Ahora bien, por la Ecuación (4.28) y el Lema 4.2 resulta que

$$\begin{aligned} -2\delta(u) &= -\sum(\nabla_{e_j}J)e_i \wedge e_j \lrcorner Je_i \lrcorner (X \wedge \omega) \\ &= -\sum(\nabla_{e_j}J)e_i \wedge e_j \lrcorner \{g(Je_i, X)\omega - X \wedge Je_i \lrcorner \omega\} \\ &= \sum(\nabla_{e_j}J)JX \wedge e_j \lrcorner \omega + \sum(\nabla_X J)e_i \wedge Je_i \lrcorner \omega - \sum(\nabla_{e_j}J)e_i \wedge X \wedge e_j \lrcorner Je_i \lrcorner \omega \\ &= \frac{1}{2}(\sum(\nabla_{e_j}J)JX \wedge e_j \lrcorner (e_k \wedge Je_k) + \sum(\nabla_X J)e_i \wedge Je_i \lrcorner (e_k \wedge Je_k)) \\ &= \frac{1}{2}\sum\{(\nabla_{e_k}J)JX \wedge Je_k - (\nabla_{Je_k}J)JX \wedge e_k \\ &\quad - (\nabla_X J)Je_k \wedge Je_k - (\nabla_X J)e_k \wedge e_k\} \\ &= \frac{1}{2}\sum\{(\nabla_{Je_k}J)X \wedge Je_k + (\nabla_{e_k}J)X \wedge e_k + (\nabla_{e_k}J)X \wedge e_k + (\nabla_{e_k}J)X \wedge e_k\} \\ &= 2(\nabla_{e_j}J)X \wedge e_j \\ &= 4X \lrcorner \Psi^+, \end{aligned}$$

con lo que  $\delta u = -2X \lrcorner \Psi^+$ . De este modo, la forma  $u$  nunca es cocerrada y, por tanto, no es una forma de Killing.

Por otra parte, sea ahora  $u$  una sección  $\bar{\nabla}$ -paralela de  $\Lambda_0^{(1,2)+(2,1)}M$ . En [65] se demuestra que  $(\nabla^*\nabla - \bar{\nabla}^*\bar{\nabla})u = \nabla^*\nabla u = u$  y que  $(q(R) - q(\bar{R}))u = q(R)u = -u$ , con lo que  $u$  resulta una forma armónica ya que  $\Delta = \nabla^*\nabla + q(R)$ . Así, si suponemos que  $u$  es una forma de Killing, por la Ecuación (4.23) resulta que ha de ser paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible.

Finalmente, supongamos que  $u = u^0 + u^1 + u_0^1$ , donde  $u^0$  es una sección del fibrado  $\Lambda^{(0,3)+(3,0)}M$ ,  $u^1$  de  $\Lambda^1 M \wedge \omega$  y  $u_0^1$  de  $\Lambda_0^{(1,2)+(2,1)}M$ ; es una forma de Killing paralela respecto a la conexión Hermítica canónica. En [65] también se demuestra que  $q(R)u^0 = 9u^0$ ,  $q(R)u^1 = -u^1$ ,  $q(R)u_0^1 = -u_0^1$  y  $\nabla^*\nabla u_0^1 = u_0^1$ ; mientras que por un cálculo largo pero directo se obtiene

<sup>1</sup>Observemos que  $\Psi^*$  y  $\Psi^-$  se corresponden con las definidas en [65].

que  $\nabla^* \nabla u^0 = 3u^0$  y  $\nabla^* \nabla u^1 = 3u^1$ . Por tanto, a partir de la Ecuación (4.23) tenemos que la forma  $u$  es una forma de Killing si y sólo si lo son  $u^0$ ,  $u_0^1$  y  $u^1$ ; lo cual, como vimos, no es posible. En función de estos resultados podemos enunciar el siguiente resultado.

**Lema 4.4.** *Si  $(M, g, J)$  es una variedad nearly Kähler estricta de dimensión seis, la única forma de Killing (salvo multiplicación por un escalar) de orden tres paralela respecto a la conexión Hermítica canónica es la 3-forma torsión.*

Cabe destacar en este punto, que el hecho de que la torsión de la conexión Hermítica canónica de una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta, pensada como una 3-forma, sea una forma de Killing se puede extender a cualquier variedad nearly Kähler y, en general, a cualquier variedad verificando las condiciones del siguiente teorema.

**Teorema 4.5.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann dotada de una conexión métrica  $\tilde{\nabla}$  cuya torsión  $T$  es  $\tilde{\nabla}$ -paralela y totalmente antisimétrica; es decir, tal que su torsión pensada como el tensor de tipo  $(0, 3)$  dado por  $T(X, Y, Z) = g(T(X, Y), Z)$  es totalmente antisimétrica. Entonces  $T$  es una 3-forma de Killing.*

*Demostración.* La conexión  $\tilde{\nabla}$  está relacionada con la conexión de Levi-Civita,  $\nabla$ , mediante la expresión  $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2} T_X Y$  por tratarse de una conexión métrica con torsión totalmente antisimétrica. De este modo, ambas conexiones se levantan al fibrado de las  $p$ -formas relacionadas por la fórmula  $\tilde{\nabla}_X = \nabla_X - \frac{1}{2} e_i \wedge (T_X e_i) \lrcorner \cdot$ , donde  $\{e_i\}$  es una base ortonormal local de  $TM$ . Ahora bien, como  $\tilde{\nabla} T = 0$  resulta que  $\nabla_X T = \frac{1}{2} e_i \wedge (T_X e_i) \lrcorner T$  con lo que la torsión es una forma de Killing si y sólo si  $X \lrcorner \{e_i \wedge (T_X e_i) \lrcorner T\} = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned} X \lrcorner \{e_i \wedge (T_X e_i \lrcorner T)\} &= (X \lrcorner e_i) \wedge (T_X e_i \lrcorner T) - e_i \wedge (X \lrcorner T_X e_i \lrcorner T) \\ &= -e_i \wedge T(T_X e_i, X, \cdot) \\ &= -T(T_X e_i, X, e_j) e_i \wedge e_j \\ &= -g(T_X e_i, T_X e_j) e_i \wedge e_j = 0; \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por ser el coeficiente simétrico en  $e_i$  y  $e_j$  y  $e_i \wedge e_j$  antisimétrico.  $\square$

### Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas de orden cuatro

Consideremos una sección  $\eta$  del fibrado  $\Lambda^4 M$  paralela respecto a la conexión Hermítica canónica y supongamos que es una forma de Killing. Por lo visto anteriormente, la forma  $u = \star \eta$  es una 2-forma  $\ast$ -Killing  $\bar{\nabla}$ -paralela y, por tanto, ha de verificar la ecuación (4.5).

Cuando la forma  $u$  es en particular una sección de  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)} M$  paralela respecto a la conexión  $\bar{\nabla}$ , y puesto que las formas  $\frac{1}{\sqrt{2}} T_{e_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} J e_i \lrcorner \psi^+$  generan una base ortonormal del espacio  $\Lambda^{(2,0)+(0,2)} M$ , se puede expresar como

$$u = \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{2}} T_{e_i} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} T_{e_i} = \left\langle u, T_{e_i} \right\rangle \frac{1}{2} T_{e_i} = \frac{1}{4} u(e_j, e_k) T_{e_i}(e_j, e_k) T_{e_i}.$$

Además, por un cálculo largo pero directo se obtiene que las formas  $T_{e_i}$  verifican la igualdad  $T_{e_i} \wedge T_{e_i} = 2\omega^2$  (véase [65]). De este modo, el Laplaciano bruto actuando sobre la 2-forma  $u$ ,  $\nabla^* \nabla u = -(T_{e_i})_*(T_{e_i})_* u$  se reduce a

$$\begin{aligned}
4(T_{e_i})_*(T_{e_i})_* u &= T_{e_i} e_j \wedge e_j \lrcorner (T_{e_i} e_k \wedge e_k \lrcorner u) \\
&= T_{e_i} e_j \wedge T_{e_i} (e_k, e_j) \wedge e_k \lrcorner u - u(e_k, e_j) T_{e_i} e_j \wedge T_{e_i} e_k \\
&= T_{e_i} T_{e_i} e_k \wedge e_k \lrcorner u - u(e_k, e_j) T_{e_i} e_j \wedge T_{e_i} e_k - u(e_j, e_k) T_{e_i} (e_j, e_k) T_{e_i} + 4u \\
&= -4e_k \wedge e_k \lrcorner u - e_j \lrcorner \{u(e_k, e_j) T_{e_i} \wedge T_{e_i} e_k\} + 4u \\
&= -8u - 1/2 e_j \lrcorner e_k \lrcorner \{u(e_k, e_j) T_{e_i} \wedge T_{e_i}\} + 4u \\
&= -8u - e_j \lrcorner e_k \lrcorner \{u(e_k, e_j) \omega \wedge \omega\} + 4u \\
&= -8u - u(e_k, e_j) e_j \lrcorner \{(e_k \lrcorner \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (e_k \lrcorner \omega)\} + 4u \\
&= -8u - 2u(e_k, e_j) e_j \lrcorner \{(e_k \lrcorner \omega) \wedge \omega\} + 4u \\
&= -8u - 2u(e_k, e_j) e_j \lrcorner \{J e_k \wedge \omega\} + 4u \\
&= -8u - 2(e_j \lrcorner J e_k) u(e_k, e_j) \omega + 2u(e_k, e_j) J e_k \wedge (e_j \lrcorner \omega) + 4u \\
&= -8u - 2u(e_k, J e_k) \omega + 2u(e_k, e_j) J e_k \wedge J e_j + 4u \\
&= -8u - 2u(J e_k, J e_j) J e_k \wedge J e_j + 4u \\
&= -8u - 2u(e_k, e_j) e_k \wedge e_j + 4u \\
&= -8u - 4u + 4u \\
&= -8u,
\end{aligned}$$

con lo que  $\nabla^* \nabla u = -(T_{e_i})_*(T_{e_i})_* u = 2u$ .

A su vez, como vimos anteriormente, el Laplaciano bruto aplicado a una sección  $u$  de  $\Lambda_0^{1,1} M$  paralela respecto a la conexión  $\bar{\nabla}$  se reduce a  $\nabla^* \nabla u = -(T_{e_i})_*(T_{e_i})_* u = u$ ; mientras que  $\nabla^* \nabla \omega = -(T_{e_i})_*(T_{e_i})_* \omega = 4\omega$ . De este modo, podemos resumir estos resultados en la siguiente expresión

$$(4.30) \quad \nabla^* \nabla u = \nabla^* \nabla u - \bar{\nabla}^* \bar{\nabla} u = \begin{cases} 2u, & \text{si } u \in \Lambda^{(2,0)+(0,2)} M \\ u, & \text{si } u \in \Lambda_0^{1,1} M \\ 4u, & \text{si } u \in \mathbb{R}\omega. \end{cases}$$

Por otra parte, podemos resumir los resultados vistos anteriormente para la acción del operador  $q(R)$  sobre formas  $\bar{\nabla}$ -paralelas como

$$(4.31) \quad q(R) - q(\bar{R}) = \begin{cases} 4u, & \text{si } u \in \Lambda^{(2,0)+(0,2)} M \\ -u, & \text{si } u \in \Lambda_0^{1,1} M \\ 8u, & \text{si } u \in \mathbb{R}\omega. \end{cases}$$

Finalmente, a partir de las Ecuaciones (4.30) y (4.31) se obtiene de forma directa que la Ecuación (4.5) no se verifica en ningún caso, con lo que se concluye que no existen formas

\*-Killing de orden dos  $\bar{\nabla}$  paralelas y, por tanto, tampoco existen formas de Killing de orden cuatro  $\bar{\nabla}$ -paralelas. Además, si la forma  $u$  fuera una combinación lineal de secciones de cada uno de los subespacios dados en la Ecuación (4.27) y verificara la propiedad de ser Killing, por las Ecuaciones (4.30) y (4.31) debería de serlo cada una de sus componentes, lo que, como vimos, no es posible. A partir de estos resultados podemos enunciar el siguiente lema.

**Lema 4.6.** *En una variedad nearly Kähler estricta de dimensión seis no existen formas de Killing de orden cuatro paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica.*

### Formas de Killing $\bar{\nabla}$ -paralelas de orden cinco

Análogamente al caso de las formas de orden cuatro, si suponemos ahora que  $\eta$  es una forma de Killing de orden cinco paralela respecto a la conexión  $\bar{\nabla}$ , entonces  $u = \star\eta$  es una 1-forma \*-Killing y, en particular, cerrada. Ahora bien, en [64] se demuestra que en una variedad nearly Kähler de dimensión seis no isométrica a la esfera estándar y con curvatura escalar normalizada tal que  $\tau = 30$ , cualquier 1-forma cerrada y  $\bar{\nabla}$ -paralela es necesariamente armónica, con lo que, aplicando la Ecuación (4.5), se tiene que también ha de ser paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible. Resumimos este resultado en el siguiente lema.

**Lema 4.7.** *En una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta no existen formas de Killing de orden cinco paralelas respecto a la conexión Hermítica canónica.*

## 4.2. Formas de Killing de tipo puro

En esta sección estudiamos las formas de Killing de *tipo puro*, es decir, las formas de Killing que son secciones de uno y sólo uno de los subespacios  $\Lambda^{p,q}M$  en los que se descompone  $\Lambda^{p+q}M$ . No obstante, a diferencia de lo realizado en la Sección (4.1), consideraremos formas no necesariamente  $\bar{\nabla}$ -paralelas. Para realizar este estudio haremos uso del complejo del espacio tangente y, por tanto, de las bases dadas en las Ecuaciones (4.11) y (4.12). Al igual que para las formas  $\bar{\nabla}$ -paralelas realizaremos este estudio en función de los diferentes órdenes que pueden tomar las formas y los analizaremos caso por caso.

### Formas de Killing de orden uno puras

Como vimos anteriormente, el fibrado de las formas de orden uno,  $\Lambda^1M$ , se descompone en los siguientes subespacios  $\bar{\nabla}$ -invariantes

$$\Lambda^1M = \Lambda^{0,1}M \oplus \Lambda^{1,0}M,$$

con lo que cualquier 1-forma  $u$  se puede escribir como  $u = u_0 + u_1$  donde  $u_0$  es una sección de  $\Lambda^{0,1}M$  y  $u_1$  de  $\Lambda^{1,0}M$ .

Supongamos ahora que  $u$  es, además, una forma de Killing. Por tanto ha de verificar la ecuación

$$\nabla_X u = \frac{1}{2} X \lrcorner du,$$

que en términos de la conexión Hermítica canónica y por la Ecuación (4.14) se reduce a

$$\bar{\nabla}_X u + (T_X)_* u = \frac{1}{2} X \lrcorner Nu + \frac{1}{2} X \lrcorner \partial u + \frac{1}{2} X \lrcorner \bar{\partial} u + \frac{1}{2} X \lrcorner \bar{N} u.$$

Ahora bien, si tomamos un campo de vectores  $X \in T^{1,0}M$  y agrupamos los términos que se obtienen de la ecuación anterior en función de los tipos de las formas imagen obtenemos las siguientes identidades

$$(4.32) \quad \begin{aligned} 2\bar{\nabla}_X u_0 &= X \lrcorner \partial u_0 + X \lrcorner \bar{\partial} u_1, \\ 2\bar{\nabla}_X u_1 &= -2(T_X)_* u_0 + X \lrcorner Nu_0 + X \lrcorner \partial u_1. \end{aligned}$$

A partir de la primera de estas igualdades, de la Ecuación (4.15) y puesto que los operadores  $\epsilon^j \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \cdot$  y  $\bar{\epsilon}^j \wedge \bar{\epsilon}_{j \lrcorner} \cdot$  actúan en el subespacio  $\Lambda^{p,q}M$  como  $pid_{\Lambda^{p,q}}$  y  $qid_{\Lambda^{p,q}}$  respectivamente, tenemos que

$$(4.33) \quad \begin{aligned} 2\partial u_0 &= 2\epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i} u_0 \\ &= \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \partial u_0 + \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \bar{\partial} u_1 \\ &= \partial u_0 + \bar{\partial} u_1, \end{aligned}$$

de donde se sigue de forma directa la igualdad

$$(4.34) \quad \partial u_0 = \bar{\partial} u_1.$$

Es posible realizar un análisis similar para la segunda igualdad de la Ecuación (4.32), sin embargo, en tal caso se llega a una igualdad de tipo  $0 = 0$ , con lo que no obtenemos ninguna información nueva. Análogamente, se puede hacer un estudio similar considerando un campo de vectores  $X \in T^{0,1}M$ , no obstante, los resultados que se obtienen son los mismos.

Por otra parte, por tratarse  $u$  de una forma de Killing ha de ser necesariamente cocerrada. De este modo, a partir de la Ecuación (4.16) obtenemos las siguientes igualdades

$$(4.35) \quad \begin{aligned} N^* u_0 = \partial^* u_0 = \bar{N}^* u_0 = N^* u_1 = \bar{\partial}^* u_1 = \bar{N}^* u_1, \\ \bar{\partial}^* u_0 + \partial^* u_1 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $u = u_0$ , es decir, que  $u$  es una forma de tipo  $(0,1)$ . Bajo esta consideración se tiene por la Ecuación (4.34) que  $\partial u_0 = 0$ . De este modo, el operador Laplaciano actuando sobre  $u_0$  se reduce a

$$(4.36) \quad \Delta u_0 = \delta du_0 = N^* Nu_0 + \partial^* Nu_0 + \bar{\partial}^* \bar{\partial} u_0 + \bar{N}^* \bar{\partial} u_0.$$

Donde estos cuatro términos se pueden agrupar en dos sumandos según sus diferentes órdenes. Así,  $N^*Nu_0 + \bar{\partial}^*\bar{\partial}u_0$  es una sección de  $\Lambda^{0,1}M$ , mientras que  $\partial^*Nu_0 + \bar{N}^*\bar{\partial}u_0$  es una sección de  $\Lambda^{1,0}M$ . Analizando cada uno de estos sumandos por separado resulta, utilizando las Ecuaciones (4.22), (4.34) y (4.35), que

(a) para el subespacio  $\Lambda^{0,1}M$

$$\begin{aligned}
N^*Nu_0 + \bar{\partial}^*\bar{\partial}u_0 &= N^*Nu_0 + \{\bar{\partial}^*, \bar{\partial}\}u_0 \\
&= N^*Nu_0 + \{\partial, \partial^*\}u_0 + 4u_0 \\
&= N^*Nu_0 + 4u_0 \\
&\stackrel{(*)}{=} 2u_0 + 4u_0 \\
&= 6u_0,
\end{aligned}$$

donde la igualdad (\*) se obtiene del siguiente modo

$$\begin{aligned}
N^*Nu_0 &= \frac{1}{2} \sum (T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j)^b \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \epsilon_i \lrcorner \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^k \wedge \epsilon^l \wedge T_{\epsilon_k} \epsilon_l \lrcorner u_0 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \epsilon_i \lrcorner \left\{ \epsilon^k \wedge \epsilon^l \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \left\{ \epsilon^l \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_i, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \left\{ \epsilon^k \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \right\} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_j, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \right. \\
&\quad \left. - \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_j} \epsilon_i, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \right\} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_j, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \\
&= \frac{1}{2} \sum g(T_{\bar{e}_j} \bar{e}_r, T_{\epsilon_j} \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \\
&\stackrel{(**)}{=} \left\{ \delta_j^j \delta_r^s - \delta_j^s \delta_r^j \right\} \bar{e}^r \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \\
&= \left\{ 3 \delta_r^s - \delta_r^s \right\} \bar{e}^r \wedge \bar{e}_s \lrcorner u_0 \\
&= 2 \bar{e}^r \wedge \bar{e}_r \lrcorner u_0 \\
&= 2u_0,
\end{aligned}$$

donde, en este caso, la igualdad (\*) se obtiene renombrando los índices de suma y la igualdad (\*\*) se obtiene a partir de la Ecuación (4.10).

(b) Mientras que para el subespacio  $\Lambda^{1,0}M$  tenemos

$$\begin{aligned}
\partial^*Nu_0 + \bar{N}^*\bar{\partial}u_0 &= \{\partial^*, N\}u_0 + \{\bar{N}^*, \bar{\partial}\}u_0 \\
&= -2\{\partial^*, \partial\}u_0 = 0
\end{aligned}$$

A partir de estas expresiones se deduce de forma directa que si  $u = u_0$  es una 1-forma de Killing entonces necesariamente es una autoforma del operador Laplaciano tal que  $\Delta u_0 = 6u_0$ .

Ahora bien, por el Teorema de Lichnerowicz-Obata (véanse [60] y [70]) resulta que si  $(M^n, g)$  es una variedad de Riemann cerrada con  $\rho \geq (n-1)\kappa$ , siendo  $\kappa$  una constante positiva, entonces el primer autovalor positivo,  $\lambda_1$ , del operador Laplaciano verifica  $\lambda_1 \geq n\kappa$ . Donde, además, la igualdad se verifica si y sólo si  $M$  es isométrica a la esfera estándar. De este modo, si consideramos que una forma  $u$  sección de  $\Lambda^1 M$  es una 1-forma de Killing tal que  $\Delta u = \mu u$ , y tomamos la función  $f$  definida como  $f := g(u, u) = |u|^2$  (en particular supondremos que esta norma no es constante ya que dicha situación fue estudiada en [62]), resulta que para una base ortonormal paralela en el punto  $p$  se verifica en dicho punto que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla^* \nabla f \\ &= -\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} f \\ &= -\nabla_{e_i} \{ \langle e_i \lrcorner du, u \rangle \} \\ &= -\langle e_i \lrcorner \nabla_{e_i} du, u \rangle - \frac{1}{2} \langle e_i \lrcorner du, e_i \lrcorner du \rangle \\ &= \mu f - |du|^2. \end{aligned}$$

De este modo, si  $M$  es una variedad nearly Kähler de dimensión seis estricta y normalizada tal que  $\tau = 30$ , entonces verifica las hipótesis citadas anteriormente para  $\kappa = 1$ . Así, si consideramos una base ortonormal de funciones  $\{f_i\}$  para el espacio de las funciones diferenciables definidas en  $M$  tales que  $\Delta f_i = \lambda f_i$  resulta que  $\Delta f_i \geq 6f_i$ . De este modo, expresando la función  $f$  como una combinación lineal de los elementos de la base  $\{f_i\}$  resulta que  $\mu \geq 6$ . Como estamos considerando variedades nearly Kähler no isométricas a la esfera estándar ha de ser  $\mu > 6$  con lo que podemos concluir la no existencia de formas de Killing de tipo  $(0, 1)$ .

Finalmente, si suponemos una 1-forma de Killing  $u = u_1$ , es decir, tal que  $u$  sea una sección del fibrado  $\Lambda^{1,0} M$ , entonces mediante un análisis completamente análogo al realizado anteriormente se obtiene que tampoco existen formas de Killing de dicho tipo.

### Formas de Killing de orden dos puras

El fibrado de las dos formas  $\Lambda^2 M$  se descompone en los siguientes subespacios  $\bar{\nabla}$ -invariantes

$$\Lambda^2 M \cong \Lambda^{0,2} M \oplus \Lambda^{1,1} M \oplus \Lambda^{2,0} M,$$

con lo que toda sección  $u$  de  $\Lambda^2 M$  se puede escribir como  $u = u_0 + u_1 + u_2$  donde  $u_0$  es una sección de  $\Lambda^{0,2} M$ ,  $u_1$  de  $\Lambda^{1,1} M$  y  $u_2$  de  $\Lambda^{2,0} M$ .

Consideremos una 2-forma  $u$  que supondremos, además, una forma de Killing. Así, como vimos, ha de verificar la identidad

$$\nabla_X u = \frac{1}{3} X \lrcorner du,$$

que en términos de la conexión Hermítica canónica y por la Ecuación (4.14) se reduce a

$$\bar{\nabla}_X u + (T_X)_* u = \frac{1}{3} X \lrcorner Nu + \frac{1}{3} X \lrcorner \partial u + \frac{1}{3} X \lrcorner \bar{\partial} u + \frac{1}{3} X \lrcorner \bar{N} u.$$

Tomando ahora  $X \in T^{1,0}M$  y emparejando los términos en función de los tipos de las formas imagen se obtienen estas tres identidades

$$(4.37) \quad \begin{aligned} 3\bar{\nabla}_X u_0 &= X \lrcorner \partial u_0 + X \lrcorner \bar{\partial} u_1 + X \lrcorner \bar{N} u_2, \\ 3\bar{\nabla}_X u_1 &= X \lrcorner N u_0 + X \lrcorner \partial u_1 + X \lrcorner \bar{\partial} u_2 - 3(T_X)_* u_0, \\ 3\bar{\nabla}_X u_2 &= X \lrcorner N u_1 + X \lrcorner \partial u_2 - 3(T_X)_* u_1. \end{aligned}$$

A partir de las dos primeras igualdades de la Ecuación (4.37), de la Ecuación (4.15) y puesto que los operadores  $\epsilon^j \wedge \epsilon_{j \lrcorner} \cdot$  y  $\bar{\epsilon}^j \wedge \bar{\epsilon}_{j \lrcorner} \cdot$  actúan en el subespacio  $\Lambda^{p,q}M$  como  $pid_{\Lambda^{p,q}}$  y  $q id_{\Lambda^{p,q}}$  respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} 3\partial u_0 &= 3\epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i} u_0 \\ &= \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \partial u_0 + \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \bar{N} u_2 + \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \bar{\partial} u_1 \\ &= \partial u_0 + \bar{N} u_2 + \bar{\partial} u_1, \end{aligned}$$

y, por otro lado, que

$$\begin{aligned} 3\partial u_1 &= 3\epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i} u_1 \\ &= \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} N u_0 + \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \partial u_1 + \epsilon^i \wedge \epsilon_{i \lrcorner} \bar{\partial} u_2 - 3\epsilon^i \wedge (T_{\epsilon_i})_* u_0 \\ &= 2N u_0 + 2\partial u_1 + 2\bar{\partial} u_2 - \frac{3}{2}\epsilon^i \wedge \epsilon^j \wedge T_{\epsilon_i} \epsilon_{j \lrcorner} u_0 \\ &= 2N u_0 + 2\partial u_1 + 2\bar{\partial} u_2 - 3N u_0. \end{aligned}$$

Así pues, se obtienen las relaciones

$$(4.38) \quad 2\partial u_0 = \bar{\partial} u_1 + \bar{N} u_2, \quad 2\bar{\partial} u_2 = \partial u_1 + N u_0.$$

En cuanto a la tercera de las igualdades dada en la Ecuación (4.37), si trabajamos con ella de un modo análogo a lo hecho para las dos primeras llegamos a una identidad de tipo  $0 = 0$  y, por tanto, no obtenemos ninguna información nueva. A su vez, si ahora consideramos un campo de vectores  $X \in T^{0,1}M$  y seguimos un camino análogo con el operador  $\bar{\partial}$  obtenemos nuevamente las ecuaciones dadas en (4.38).

Por otra parte, como  $u$  es una forma de Killing ha de ser cocerrada por definición. De este modo, por la Ecuación (4.16) se obtiene que las proyecciones de  $\delta u$  en cada uno de los subespacios  $\Lambda^{0,1}M$  y  $\Lambda^{1,0}M$  verifican las relaciones

$$(4.39) \quad \begin{aligned} 0 &= N^* u_0 = \partial^* u_0 = N^* u_1 = \bar{N}^* u_1 = \bar{\partial}^* u_2 = \bar{N}^* u_2, \\ 0 &= \bar{\partial}^* u_0 + \partial^* u_1 + N^* u_2, \\ 0 &= \bar{N}^* u_0 + \bar{\partial}^* u_1 + \partial^* u_2. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $u = u_0$ . Bajo esta hipótesis las Ecuaciones (4.38) y (4.39) se reducen a

$$(4.40) \quad 0 = \partial u_0 = N u_0 = 0, \quad N^* u_0 = \partial^* u_0 = \bar{\partial}^* u_0 = \bar{N}^* u_0 = 0.$$

Ahora bien, siguiendo pasos análogos a los realizados para el caso de campos de vectores de tipo  $(0, 1)$  se tiene que para una forma arbitraria de tipo  $(0, 2)$  se verifica la igualdad  $N^*Nu_0 = 4u_0$ , lo cual es una contradicción con el hecho de que para una forma de Killing  $Nu_0 = 0$ . De este modo obtenemos la no existencia de formas de Killing de tipo  $(0, 2)$ .

Si suponemos  $u = u_1$ , las Ecuaciones (4.38) y (4.39) se reducen a

$$(4.41) \quad 0 = \bar{\partial}u_1 = \partial u_1 = 0, \quad N^*u_1 = \partial^*u_1 = \bar{\partial}^*u_1 = \bar{N}^*u_1 = 0.$$

Y así, es posible expresar el Laplaciano de  $u_1$  como

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= (\delta d + d\delta)u_1 = \delta du_1 \\ &= (N^* + \partial^* + \bar{\partial}^* + \bar{N}^*)(N + \bar{N})u_1 \\ &= N^*Nu_1 + \bar{N}^*\bar{N}u_1 + \partial^*Nu_1 + \bar{\partial}^*\bar{N}u_1. \end{aligned}$$

Veamos que los términos no tensoriales de esta expresión  $\partial^*Nu_1$  y  $\bar{\partial}^*\bar{N}u_1$ , secciones de  $\Lambda^{2,0}M$  y  $\Lambda^{0,2}M$  respectivamente, se anulan. Como cada uno de estos operadores son secciones de subespacios diferentes podemos estudiarlos por separado. De este modo, por la Ecuación (4.22) tenemos que

(a) por una parte

$$\begin{aligned} \partial^*Nu_1 &= \{\partial^*, N\}u_1 - N\partial^*u_1 \\ &= -\{\bar{\partial}^*, \partial\}u_1 - N\partial^* = 0, \end{aligned}$$

(b) y por otro lado

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^*\bar{N}u_1 &= \{\bar{\partial}^*, \bar{N}\}u_1 - \bar{N}\bar{\partial}^*u_1 \\ &= -\{\partial^*, \bar{\partial}\}u_1 - \bar{N}\bar{\partial}^*u_1 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene que el Laplaciano actuando sobre  $u_1$  se reduce a

$$(4.42) \quad \Delta u_1 = N^*Nu_1 + \bar{N}^*\bar{N}u_1.$$

Ahora bien, a partir de las definiciones de los operadores  $N$  y  $N^*$  dados en las Ecuaciones

(4.15) y (4.17) obtenemos que

$$\begin{aligned}
N^* N u_1 &= \frac{1}{2} \sum (T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j)^b \wedge \epsilon_{j \downarrow} \epsilon_{i \downarrow} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^k \wedge \epsilon^l \wedge T_{\epsilon_k} \epsilon_{l \downarrow} u_1 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \downarrow} \epsilon_{i \downarrow} \left\{ \epsilon^k \wedge \epsilon^l \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \downarrow} \left\{ \epsilon^l \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \right\} \right. \\
&\quad - \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_i, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \downarrow} \left\{ \epsilon^k \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \right\} \\
&\quad \left. + \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon_{j \downarrow} \left\{ \epsilon^k \wedge \epsilon^l \wedge \epsilon_{i \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \right\} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_j, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \right. \\
&\quad - \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^l \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad - \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_j} \epsilon_i, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad + \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_i, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad + \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_j} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^l \wedge \epsilon_{i \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad - \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_j, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{i \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad \left. + \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_l, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon^l \wedge \epsilon_{j \downarrow} \epsilon_{i \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \right\} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_i} \epsilon_j, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad + \sum g(T_{\bar{e}_i} \bar{e}_j, \bar{e}_r) g(T_{\epsilon_k} \epsilon_i, \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&= \frac{1}{2} \sum g(T_{\bar{e}_j} \bar{e}_r, T_{\epsilon_j} \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\quad - \sum g(T_{\bar{e}_j} \bar{e}_r, T_{\epsilon_k} \epsilon_s) \bar{e}^r \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&\stackrel{(**)}{=} \left\{ \delta_j^j \delta_r^s - \delta_j^s \delta_r^j \right\} \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 - 2 \left\{ \delta_j^k \delta_r^s - \delta_j^s \delta_r^k \right\} \bar{e}^r \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{s \downarrow} u_1 \\
&= \left\{ 3 \delta_r^s - \delta_r^s \right\} \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{s \downarrow} u_1 - 2 \left\{ \bar{e}^r \wedge \epsilon^j \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{r \downarrow} u_1 - \bar{e}^k \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{j \downarrow} u_1 \right\} \\
&= 2 \bar{e}^r \wedge \bar{e}_{r \downarrow} u_1 - 2 \bar{e}^r \wedge \epsilon^j \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{r \downarrow} u_1 + 2 \bar{e}^k \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{j \downarrow} u_1 \\
&= 2 \bar{e}^k \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{j \downarrow} u_1,
\end{aligned}$$

donde la igualdad (\*) se obtiene renombrando los índices de suma y la igualdad (\*\*) se obtiene a partir de la Ecuación (4.10). Siguiendo pasos análogos para el segundo sumando de la Ecuación (4.42) tenemos también que  $\bar{N}^* \bar{N} u_1 = 2 \bar{e}^k \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{j \downarrow} u_1$ . Por tanto, dicha Ecuación (4.42) se reduce a

$$\Delta u_1 = 4 \bar{e}^k \wedge \epsilon^k \wedge \epsilon_{j \downarrow} \bar{e}_{j \downarrow} u_1.$$

Así, si  $u_1$  es un múltiplo de  $\omega$  entonces  $\Delta u_1 = 12 u_1$ , mientras que si  $u_1$  es una sección de  $\Lambda_0^{1,1} M$  resulta que  $\Delta u_1 = 0$ , i.e.,  $u_1$  es una forma armónica. Ahora bien, en tal caso, por ser  $u_1$  una forma de Killing armónica ha de ser necesariamente paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible. De este modo, se concluye que no existen formas de Killing de tipo (1, 1) primitivas.

Finalmente, si  $u = u_2$  podemos proceder de forma similar a lo hecho para formas de tipo  $(0, 2)$ . Así, las Ecuaciones (4.38) y (4.39), se reducen a

$$(4.43) \quad 0 = \bar{\partial}u_2 = \bar{N}u_2 = 0, \quad N^*u_2 = \partial^*u_2 = \bar{\partial}^*u_2 = \bar{N}^*u_2 = 0.$$

Del mismo modo, siguiendo también los pasos análogos al caso de las formas de tipo  $(0, 2)$ , se obtiene que para una forma cualquiera de tipo  $(2, 0)$  se verifica la igualdad  $\bar{N}^*\bar{N}u_2 = 4u_2$ , lo cual es una contradicción con el hecho de que  $\bar{N}u_2 = 0$  para las formas de Killing. De este modo, se deduce la no existencia de formas de Killing de tipo  $(2, 0)$ .

### Formas de Killing de orden tres puras

Para analizar las formas de Killing de orden tres puras seguimos pasos similares al caso anterior. El fibrado de las 3-formas  $\Lambda^3 M$  se descompone en subespacios invariantes como

$$(4.44) \quad \Lambda^3 M = \Lambda^{0,3} M \oplus \Lambda^{1,2} M \oplus \Lambda^{2,1} M \oplus \Lambda^{3,0} M.$$

Así, una 3-forma arbitraria  $u$  puede expresarse como la suma  $u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ , donde  $u_0$  es una sección de  $\Lambda^{0,3} M$ ,  $u_1$  de  $\Lambda^{1,2} M$ ,  $u_2$  de  $\Lambda^{2,1} M$  y  $u_3$  de  $\Lambda^{3,0} M$ . Si además suponemos que se trata de una forma de Killing ha de verificar la ecuación

$$\nabla_X u = \frac{1}{4} X \lrcorner du,$$

que en términos de la conexión  $\bar{\nabla}$  dada en la Ecuación (4.8) y de la descomposición de la diferencial exterior dada por la Ecuación (4.14) se expresa como

$$(4.45) \quad \bar{\nabla}_X u + (T_X)_* u = \frac{1}{4} X \lrcorner N u + \frac{1}{4} X \lrcorner \partial u + \frac{1}{4} X \lrcorner \bar{\partial} u + \frac{1}{4} X \lrcorner \bar{N} u.$$

En el caso particular de que  $X \in T^{1,0} M$  se obtienen a partir de la Ecuación (4.45) las igualdades

$$(4.46) \quad \begin{aligned} 4\bar{\nabla}_X u_0 &= X \lrcorner \partial u_0 + X \lrcorner \bar{\partial} u_1 + X \lrcorner \bar{N} u_2, \\ 4\bar{\nabla}_X u_1 &= X \lrcorner \partial u_1 + X \lrcorner \bar{\partial} u_2 + X \lrcorner N u_0 + X \lrcorner \bar{N} u_3 - 4(T_X)_* u_0, \\ 4\bar{\nabla}_X u_2 &= X \lrcorner \partial u_2 + X \lrcorner \bar{\partial} u_3 + X \lrcorner N u_1 - 4(T_X)_* u_1, \\ 4\bar{\nabla}_X u_3 &= -4(T_X)_* u_2. \end{aligned}$$

Mientras que si  $X \in T^{0,1} M$  resultan

$$(4.47) \quad \begin{aligned} 4\bar{\nabla}_X u_0 &= -4(T_X)_* u_1, \\ 4\bar{\nabla}_X u_1 &= X \lrcorner \partial u_0 + X \lrcorner \bar{\partial} u_1 + X \lrcorner \bar{N} u_2 - 4(T_X)_* u_2, \\ 4\bar{\nabla}_X u_2 &= X \lrcorner \partial u_1 + X \lrcorner \bar{\partial} u_2 + X \lrcorner N u_0 + X \lrcorner \bar{N} u_3 - 4(T_X)_* u_3, \\ 4\bar{\nabla}_X u_3 &= X \lrcorner \partial u_2 + X \lrcorner \bar{\partial} u_3 + X \lrcorner N u_1. \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\partial = \epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i}$  y  $\bar{\partial} = \bar{\epsilon}^i \wedge \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}$ , por un cálculo análogo al hecho para las formas de orden dos se obtienen a partir de las Ecuaciones (4.46) y (4.47) las relaciones

$$(4.48) \quad \begin{aligned} 3\partial u_0 &= \bar{\partial} u_1 + \bar{N} u_2, & \partial u_3 &= -N u_2, \\ \partial u_1 &= \bar{\partial} u_2 - N u_0 + \bar{N} u_3, & \bar{\partial} u_0 &= -\bar{N} u_1, \\ 3\bar{\partial} u_3 &= \partial u_2 + N u_1. \end{aligned}$$

Además, por ser  $u$  una forma de Killing ha de ser cocerrada, i.e.  $\delta u = 0$ ; y así por la Ecuación (4.16) resultan las siguientes identidades

$$(4.49) \quad \begin{aligned} 0 &= N^* u_0 = N^* u_1 = \partial^* u_0 = \bar{\partial}^* u_3 = \bar{N}^* u_2 = \bar{N}^* u_3, \\ N^* u_2 + \partial^* u_1 + \bar{\partial}^* u_0 &= 0, \\ N^* u_3 + \partial^* u_2 + \bar{\partial}^* u_1 + \bar{N}^* u_0 &= 0, \\ \partial^* u_3 + \bar{\partial}^* u_2 + \bar{N}^* u_1 &= 0. \end{aligned}$$

Si suponemos que  $u$  es una forma pura de cualquiera de los subespacios dados por la Ecuación (4.44) se tiene, aplicando de forma directa las Ecuaciones (4.48) y (4.49), que la forma  $u$  es armónica en cualquiera de los casos. Ahora bien, por ser una forma de Killing armónica, por la ecuación (4.23) ha de ser paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible. Se concluye de este modo que no existen formas de Killing de orden tres de tipo puro.

### Formas de Killing de orden cuatro puras

El fibrado de las formas de orden cuatro  $\Lambda^4 M$  se descompone en tres subespacios diferentes  $\bar{\nabla}$ -invariantes tal que

$$(4.50) \quad \Lambda^4 M = \Lambda^{1,3} M \oplus \Lambda^{2,2} M \oplus \Lambda^{3,1} M.$$

Por tanto, cualquier sección  $u$  de  $\Lambda^4 M$  se puede expresar como una suma de formas de tipo puro  $u = u_1 + u_2 + u_3$ , donde  $u_1$  es una sección de  $\Lambda^{1,3} M$ ,  $u_2$  de  $\Lambda^{2,2} M$  y  $u_3$  de  $\Lambda^{3,1} M$ .

Si suponemos que  $u$  es, además, una forma de Killing ha de verificar la ecuación

$$\nabla_X u = \frac{1}{5} X \lrcorner du,$$

que en términos de la conexión  $\bar{\nabla}$  y de la descomposición de la diferencial exterior dada por la Ecuación (4.14) se expresa como

$$\bar{\nabla}_X u + (T_X)_* u = \frac{1}{5} X \lrcorner N u + \frac{1}{5} X \lrcorner \partial u + \frac{1}{5} X \lrcorner \bar{\partial} u + \frac{1}{5} X \lrcorner \bar{N} u.$$

De este modo, si tomamos  $X \in T^{1,0} M$  se obtienen las siguientes identidades

$$(4.51) \quad \begin{aligned} 5\bar{\nabla}_X u_1 &= X \lrcorner \partial u_1 + X \lrcorner \bar{\partial} u_2 + X \lrcorner \bar{N} u_3, \\ 5\bar{\nabla}_X u_2 &= X \lrcorner N u_1 + X \lrcorner \partial u_2 + X \lrcorner \bar{\partial} u_3 - 5(T_X)_* u_1, \\ 5\bar{\nabla}_X u_3 &= -5(T_X)_* u_2. \end{aligned}$$

Mientras que si  $X \in T^{0,1}M$  entonces

$$(4.52) \quad \begin{aligned} 5\bar{\nabla}_X u_1 &= -5(T_X)_* u_2 \\ 5\bar{\nabla}_X u_2 &= X \lrcorner \partial u_1 + X \lrcorner \bar{\partial} u_2 + X \lrcorner \bar{N} u_3 - 5(T_X)_* u_3 \\ 5\bar{\nabla}_X u_3 &= X \lrcorner N u_1 + X \lrcorner \partial u_2 + X \lrcorner \bar{\partial} u_3. \end{aligned}$$

Aplicando, de forma análoga al caso de las 2-formas, las identidades dadas en las Ecuaciones (4.51) y (4.52) a los operadores  $\partial = \epsilon^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i}$  y  $\bar{\partial} = \bar{\epsilon}^i \wedge \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}$  resulta que

$$(4.53) \quad \begin{aligned} 3\partial u_1 &= 2\bar{\partial} u_2 + 2\bar{N} u_3, & \partial u_3 &= -N u_2, \\ 2\partial u_2 &= -2N u_1 + 3\bar{\partial} u_3, & \bar{\partial} u_1 &= -\bar{N} u_2. \end{aligned}$$

Además, como  $u$  es una forma cocerrada, se obtienen a partir de la descomposición del operador  $\delta$  dada por la Ecuación (4.16) las siguientes relaciones

$$(4.54) \quad \begin{aligned} 0 &= N^* u_1 = \bar{N}^* u_3, & N^* u_2 + \partial^* u_1 &= 0, \\ N^* u_3 + \partial^* u_2 + \bar{\partial}^* u_1 &= 0, & \bar{N}^* u_2 + \bar{\partial}^* u_3 &= 0, \\ \partial^* u_3 + \bar{\partial}^* u_2 + \bar{N}^* u_1 &= 0. \end{aligned}$$

Si consideramos ahora que  $u$  es una forma pura de cualquiera de los subespacios dados por la Ecuación (4.50) se tiene, aplicando de forma directa las Ecuaciones (4.53) y (4.54), que la forma  $u$  es armónica en cualquiera de los casos. Ahora bien, por ser una forma de Killing armónica, por la Ecuación (4.23) ha de ser paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible. Se concluye de este modo que no existen formas de Killing de orden cuatro de tipo puro.

### Formas de Killing de orden cinco puras

El fibrado de las formas de orden cinco  $\Lambda^5 M$  se descompone en la suma de dos subespacios disjuntos  $\bar{\nabla}$ -invariantes

$$(4.55) \quad \Lambda^5 M = \Lambda^{2,3} M \oplus \Lambda^{3,2} M.$$

De este modo, cualquier sección arbitraria de  $\Lambda^5 M$  puede expresarse como una suma  $u = u_2 + u_3$  donde  $u_2$  es una sección de  $\Lambda^{2,3} M$  y  $u_3$  de  $\Lambda^{3,2} M$ .

Consideremos una sección  $u$  de este fibrado que, además, supondremos que es una forma de Killing. Por ser  $u$  una forma de Killing verifica la identidad

$$\nabla_X u = \frac{1}{6} X \lrcorner du$$

que en términos de la conexión  $\bar{\nabla}$  y de la descomposición del operador  $d$  dada en la Ecuación (4.14) se expresa como

$$\bar{\nabla}_X u + (T_X)_* u = \frac{1}{6} X \lrcorner N u + \frac{1}{6} X \lrcorner \partial u + \frac{1}{6} X \lrcorner \bar{\partial} u + \frac{1}{6} X \lrcorner \bar{N} u.$$

Si tomamos  $X \in T^{1,0}M$  a partir de esta igualdad se obtienen las relaciones

$$(4.56) \quad 6\bar{\nabla}_X u_2 = X \lrcorner \partial u_2 + X \lrcorner \bar{\partial} u_3, \quad 6\bar{\nabla}_X u_3 = -6(T_X)_* u_2.$$

Mientras que si  $X \in T^{0,1}M$  resultan las identidades

$$(4.57) \quad 6\bar{\nabla}_X u_2 = -6(T_X)_* u_3, \quad 6\bar{\nabla}_X u_3 = X \lrcorner \partial u_2 + X \lrcorner \bar{\partial} u_3.$$

Haciendo uso de las Ecuaciones (4.56) y (4.57) en las expresiones de los operadores  $\partial = e^i \wedge \bar{\nabla}_{\epsilon_i}$  y  $\bar{\partial} = \bar{e}^i \wedge \bar{\nabla}_{\bar{\epsilon}_i}$  se obtienen estas nuevas igualdades

$$(4.58) \quad \partial u_3 = -N u_2 = 0, \quad \partial u_2 = \bar{\partial} u_3, \quad \bar{\partial} u_2 = -\bar{N} u_3 = 0.$$

Finalmente, puesto que  $u$  es cocerrada por ser una forma de Killing, de la descomposición del operador  $\delta$  dada por la Ecuación (4.16) se deducen las siguientes relaciones

$$(4.59) \quad \begin{aligned} N^* u_2 = \bar{N}^* u_3 = 0, & \quad \partial^* u_3 + \bar{\partial}^* u_2 = 0, \\ N^* u_3 + \partial^* u_2 = 0, & \quad \bar{\partial}^* u_3 + \bar{N}^* u_2 = 0. \end{aligned}$$

Si consideramos ahora que  $u$  es una forma pura de cualquiera de los subespacios dados por la Ecuación (4.55), a partir de las Ecuaciones (4.53) y (4.54) se tiene de forma directa que en cualquiera de los casos la forma  $u$  es armónica. Ahora bien, por ser una forma de Killing armónica por la Ecuación (4.23) ha de ser paralela respecto a la conexión de Levi-Civita, lo cual no es posible. Se concluye de este modo que no existen formas de Killing de orden cinco de tipo puro.

Finalmente, agrupando todos estos resultados, hemos demostrado el siguiente Teorema

**Teorema 4.8.** *En una variedad nearly Kähler estricta de dimensión seis la única forma de Killing (salvo multiplicación por un escalar) de tipo puro es la 2-forma de Kähler.*



# Bibliografía

- [1] M. T. K. Abbassi, G. Calvaruso, D. Perrone; Harmonic sections of tangent bundles equipped with Riemannian  $g$ -natural metrics, *Q. J. Math.* **62** (2011), 259–288.
- [2] D.V. Alekseevsky, A. Galaev; Two-symmetric Lorentzian manifolds , *J. Geom. Phys.* **61** (2011), 2331–2340.
- [3] W. Batat, M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, S. Gavino-Fernández; Ricci solitons on Lorentzian manifolds with large isometry groups, *Bull. London Math. Soc.* **43** (2011), 1219–1227.
- [4] C. L. Bejan, M. Benyounes; Harmonic  $\varphi$ -morphisms, *Beiträge Algebra Geom.* **44** (2003), 309–321.
- [5] F. Belgun, A. Moroianu; Nearly-Kähler 6-manifolds with reduced holonomy, *Ann. Global Anal. Geom.* **19** (2001), 307–319.
- [6] L. Bérard-Bergery; Les espaces homogènes riemanniens de dimension 4. Riemannian geometry in dimension 4, *Textes Math.*, **3**, CEDIC, (1981), 40–60.
- [7] D. Bini, R.T. Jantzen, G. Miniutti; The Cotton, Simon-Mars and Cotton-York tensors in stationary spacetimes, *Classical Quantum Gravity* **18** (2001), 4969–4981.
- [8] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. Senovilla; Structure of second-order symmetric lorentzian manifolds, *J. Eur. Math. Soc.*, **15** (2013), 595–634.
- [9] \_\_\_\_\_; Complete classification of second-order symmetric spacetimes, *J. Phys.: Conf. Ser.* **229** (2010), 012021.
- [10] M. Blau, M. O’Loughlin; Homogeneous plane waves, *Nuclear Phys. B* **654** (2003), 135–176.
- [11] H.W.Brinkmann; On Riemann spaces conformal to Euclidean spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **9** (1923), 1–3.
- [12] \_\_\_\_\_; Einstein spaces which are mapped conformally on each other, *Math. Ann.* **94** (1925), 119–145.

- [13] M. Brozos-Vázquez, G. Calvaruso, E. García-Río, S. Gavino-Fernández; Three-dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons, *Israel J. Math* **188** (2012), 385–403.
- [14] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo; *The Geometry of Walker Manifolds*, Synthesis Lect. Mathematics and Statistics **5**, Morgan & Claypool Publ., Williston, VT, 2009.
- [15] J.B. Butruille; Classification des variétés approximativement Kähleriennes homogènes, *Ann. Global Anal. Geom.*, **27** (2005), 201–225.
- [16] M. Cahen, J. Leroy, M. Parker, F. Tricerri, L. Vanhecke; Lorentz manifolds modelled on a Lorentz symmetric space, *J. Geom. Phys.* **7** (1990), 571–581.
- [17] M. Cahen, N. Wallach; Lorentzian symmetric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 585–591.
- [18] G. Calvaruso; Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds, *Geom. Dedicata* **127** (2007), 99–119.
- [19] ———; Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1279–1291. Addendum: *J. Geom. Phys.* **58** (2008), 291–292.
- [20] ———; Harmonicity properties of invariant vector fields on three-dimensional Lorentzian Lie groups, *J. Geom. Phys.* **61** (2011), 498–515.
- [21] G. Calvaruso, A. Zaeim; Four-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds, *Monatsh. Math.*, DOI 10.1007/s00605-013-0588-9.
- [22] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, J. Seoane-Bascoy, R. Vázquez-Lorenzo; Three-dimensional conformally symmetric manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.* , DOI 10.1007/s10231-013-0349-3.
- [23] ———; The geometry of the Cotton tensor in dimension three, *Pure and Applied Differential Geometry PADGE 2012* (2013), 55–62.
- [24] ———; Three-dimensional manifolds with special Cotton tensors (preprint).
- [25] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, M.E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo; Curvature operators and generalizations of symmetric spaces in Lorentzian geometry, *Adv. Geom.* **12** (2012), 83–100.
- [26] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo; A note on compact Cotton solitons, *Classical Quantum Gravity* **29** (2012), 205014.
- [27] E. Calviño-Louzao, L. M. Hervella, J. Seoane-Bascoy, R. Vázquez-Lorenzo; Homogeneous Cotton Solitons, *J. Phys. A* **46** (2013), 285204.

- [28] E. Calviño-Louzao, J. Seoane-Bascoy, M.E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo; Three-dimensional homogeneous Lorentzian Yamabe solitons, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **82** (2012), 193–203.
- [29] ———; One-harmonic invariant vector fields on three-dimensional Lie groups, *J. Geom. Phys.* **62** (2012), 1532–1547.
- [30] ———; Invariant Ricci collineations on three dimensional Lie groups, (preprint).
- [31] A.M. Candela, J.L. Flores, M. Sánchez; On general plane fronted waves. Geodesics. *Gen. Relativity Gravitation* **35** (2003), 631–649.
- [32] L.A. Cordero, Ph. Parker; Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups, *Rend. Mat. VII* **17** (1997), 129–155.
- [33] M. Dajczer, K. Nomizu; On sectional curvature of indefinite metrics II *Math. Ann.* **247** (1980), 279–282.
- [34] A. Derdzinski, W. Roter; Some theorems on conformally symmetric manifolds, *Tensor (N.S.)* **32** (1978), 11–23.
- [35] ———; Projectively flat surfaces, null parallel distributions, and conformally symmetric manifolds, *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 565–602.
- [36] ———; The local structure of conformally symmetric manifolds, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **16** (2009), 117–128.
- [37] C.T.J. Dodson, M. Trinidad Pérez, M. E. Vázquez-Abal; Harmonic-Killing vector fields, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **9** (2002), 481–490.
- [38] A. Fialkow; Conformal geodesics, *Trans. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 443–473.
- [39] A.S. Galaev; Lorentzian manifolds with recurrent curvature tensor, arXiv: 1011.6541v2.
- [40] E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević; Homogeneity of Lorentzian three-manifolds with recurrent curvature, *Math. Nach.* **287** (2014), 32–47.
- [41] E. García-Río, A. Haji-Badali, M.E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo; Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008), 557–572.
- [42] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal; Harmonic endomorphism fields, *Illinois J. Math.* **41** (1997), 23–30.
- [43] S. Gavino-Fernández; *The geometry of Lorentzian Ricci solitons*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología **125**, Universidad de Santiago de Compostela, 2012.

- [44] A. Gray; The structure of nearly Kähler manifolds, *Math. Ann.* **223** (1976), 233–248.
- [45] ———; Einstein-like metrics which are not Einstein, *Geom. Dedicata* **7** (1978), 259–280.
- [46] A. Gray, L. M. Hervella; The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), 35–58.
- [47] G.S. Hall; The global extension of local symmetries in general relativity, *Classical Quantum Gravity* **6** (1989), 157–161.
- [48] G.S. Hall, M.S. Capocci; Classification and conformal symmetry in three-dimensional space-times, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1466–1478.
- [49] K. Honda; Conformally Flat Semi-Riemannian Manifolds with Commuting Curvature and Ricci Operators, *Tokyo J. Math.* **26**, (2003), 241–260.
- [50] T. Kashiwada; On conformal Killing tensor, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **19** (1968), 67–74.
- [51] Y. Kerbrat; Transformations conformes des variétés pseudo- Riemanniennes, *J. Diff. Geom.* **11** (1976), 547–571.
- [52] A. U. O. Kisisel, O. Sarioglu, B. Tekin; Cotton flow, *Classical Quantum Gravity* **25** (2008), 165019.
- [53] S. Kobayashi; A theorem on the affine transformation group of a Riemannian manifold, *Nagoya Math. J.* **9** (1955), 39–41.
- [54] J.J. Konderak; One Harmonic vector fields, *Publicacions Matemàtiques* **36** (1992), 217–228.
- [55] W. Kühnel; *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [56] W. Kühnel and H.B. Rademacher; Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry, *J. Math. pures et appl.* **74** (1995), 453–481.
- [57] J. Lauret; Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2007), 627–666.
- [58] J. M. Lee; *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, **176**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [59] T. Leistner; Conformal holonomy of C-spaces, Ricci-flat, and Lorentzian manifolds, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), 458–478.
- [60] A. Lichnerowicz; *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris 1958.

- [61] J. Milnor; Curvature of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.
- [62] A. Moroianu, P.A. Nagy, U. Semmelmann; Unit Killing vector fields on nearly Kähler manifolds, *Internat. J. Math.*, **16** (2005), 281–301.
- [63] A. Moroianu, U. Semmelmann; Twistor forms on Kähler manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Serie V*, **II** (2003), 823–845.
- [64] ———; The Hermitian Laplace operator on nearly Kähler manifolds, *Comm. Math. Phys.*, **294** (2010), 251–272.
- [65] ———; Infinitesimal Einstein deformations of nearly Kähler metrics, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363** (2011), 3057–3069.
- [66] P. A. Nagy; On nearly-Kähler geometry, *Ann. Global Anal. Geom.* **22** (2002), 167–178.
- [67] ———; Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations, *Asian J. Math.* **6** (2002), 481–504.
- [68] A. M. Naveira, U. Semmelmann, J. Seoane-Bascoy; Killing forms on six dimensional nearly Kähler manifolds (preprint).
- [69] K. Nomizu; Left-invariant Lorentz metrics on Lie groups, *Osaka J. Math.* **16** (1979), 143–150.
- [70] M. Obata; Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 333–340.
- [71] K. Onda; Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups, *Geom. Dedicata* **147** (2010), 313–322.
- [72] ———; Examples of algebraic Ricci solitons in the Pseudo-Riemannian case, arXiv:1112.0424v3.
- [73] B. O’Neill; *Semi-Riemannian Geometry*, New York: Academic Press, 1983.
- [74] C. Oniciuc; Pseudo-Riemannian metrics on tangent bundle and harmonic problems, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **7** (2000), 443–454.
- [75] N. Rahmani, S. Rahmani; Lorentzian geometry of Heisenberg group, *Geom. Dedicata* **118** (2006), 133–140.
- [76] G. de Rham; Sur la reductibilité d’un espace de Riemann, *Comment. Math. Helv.* **26** (1952), 328–344.
- [77] K. Sekigawa; On some three-dimensional curvature homogeneous spaces, *Tensor (N.S.)* **31** (1977), 87–97.

- [78] U. Semmelmann; Conformal Killing forms on Riemannian manifolds, *Math. Z.* **245** (2003), 503–527.
- [79] ———; Killing forms on  $G_2$ - and Spin(7)-manifolds, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 1752–1766.
- [80] ———; *Conformal Killing forms on Riemannian manifolds*, Habilitationsschrift.
- [81] F.C. Sousa, J.B. Fonseca, C. Romero; Equivalence of three-dimensional spacetimes, *Classical Quantum Gravity* **25** (2008), 035007.
- [82] S. E. Stepanov, V. N. Shelepova; A remark on Ricci solitons. (Russian) *Mat. Zametki* **86** (2009), 474–477; translation in *Math. Notes* **86** (2009), 447–450.
- [83] S. Tachibana; On conformal Killing tensor in a Riemannian space, *Tohoku Math. J.* **21** (1969), 56–64.
- [84] S. Tachibana, T. Kashiwada; On the integrability of Killing-Yano’s equation, *J. Math. Soc. Japan* **21** (1969), 259–265.
- [85] Y. Tashiro; Complete Riemannian manifolds and some vector fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117** (1965), 251–275.
- [86] M. Trinidad Pérez; *Campos de vectores armónicos-Killing*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología **96**, Universidad de Santiago de Compostela, 2003.
- [87] M. E. Vázquez-Abal; Harmonicity on the tangent bundle of order  $r$ , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991), 131–136.
- [88] M. Verbitsky; Hodge theory on nearly Kähler manifolds, *Geometry & Topology* **15** (2011), 2111–2133.
- [89] A.G. Walker; Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2)* **1** (1950), 69–79.
- [90] ———; On Ruse’s spaces of recurrent curvature, *Proc. London Math. Soc. (2)* **52** (1950), 36–64.
- [91] H. Wu; On the de Rham decomposition theorem, *Illinois J. Math.* **8** (1964), 291–311.
- [92] S. Yamaguchi; On a Killing  $p$ -form in a compact Kählerian manifold, *Tensor (N.S.)* **29** (1975), no. 3, 274–276.
- [93] K. Yano; Some remarks on tensor fields and curvature, *Ann. of Math.* **55** (1952), 328–347.
- [94] J. W. York Jr.; Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971), 1656–1658.