

ANTÓN CARLOS VÁZQUEZ MARTÍNEZ

**GEOMETRÍA ERGÓDICA Y  
ASINTÓTICA DE GRAFOS  
ALEATORIOS**

**138**  
**2019**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ANTÓN CARLOS VÁZQUEZ MARTÍNEZ

**GEOMETRÍA ERGÓDICA Y  
ASINTÓTICA DE GRAFOS  
ALEATORIOS**

**138**  
**2019**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2019



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>



CENTRO INTERNACIONAL DE ESTUDOS  
DE DOUTORAMENTO E AVANZADOS  
DA USC (CIEDUS)

TESIS DE DOCTORADO

**GEOMETRÍA ERGÓDICA Y  
ASINTÓTICA DE GRAFOS  
ALEATORIOS**

Antón Carlos Vázquez Martínez

ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

2018

La presente tesis fue dirigida por Fernando Alcalde Cuesta y Álvaro Lozano Rojo. Defendida en la Universidade de Santiago de Compostela el 9 de noviembre de 2018.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Relaciones de equivalencia borelianas en espacios topológicos</b>	<b>7</b>
1.1. Relaciones de equivalencia borelianas . . . . .	7
1.2. Relaciones de equivalencia étale . . . . .	11
1.3. Resultados para relaciones de equivalencia borelianas . . . . .	14
<b>2. Grafos aleatorios repetitivos y tolerancia a la inserción</b>	<b>17</b>
2.1. Espacio de Gromov-Hausdorff . . . . .	17
2.2. Dinámica del espacio de Gromov-Hausdorff . . . . .	19
2.3. Subgrafos aleatorios de grafos de Cayley . . . . .	21
2.4. Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon . . . . .	25
2.5. Percolación de Bernoulli . . . . .	29
2.6. Transición de fase . . . . .	31
2.7. Indistinguibilidad de los clústeres infinitos . . . . .	33
2.8. Percolación invariante . . . . .	35
2.9. Percolación con decorados . . . . .	37
<b>3. Subshifts de tipo finito</b>	<b>41</b>
3.1. El shift de Bernoulli . . . . .	41
3.2. Cadenas de Markov topológicas . . . . .	43
3.3. Medidas de Markov . . . . .	43
3.4. Aplicación del lema a las medidas de Markov . . . . .	45
<b>4. Universalidad de los espacios de Gromov-Hausdorff</b>	<b>47</b>
4.1. Grafos aleatorios frente a subgrafos aleatorios . . . . .	47
4.2. El problema de la factorización . . . . .	50
4.3. Estructura de grafo en relaciones de equivalencia borelianas discretas . . . . .	51
4.4. Ejemplos . . . . .	54
4.5. La aplicación $v$ . . . . .	58
4.6. Coloreado y orientación de aristas . . . . .	60
4.7. Universalidad del espacio $\mathcal{F}_K$ . . . . .	63
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>



# Introducción

Un *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley* es una variable aleatoria donde los estados son subgrafos conexos del grafo de Cayley de un grupo  $G$  con un sistema finito de generadores. Todos estos grafos están enraizados en el elemento neutro. El método principal de construcción de subgrafos aleatorios de un grafo de Cayley consiste en tomar como espacio de configuración el espacio de coloreados en blanco (borrar) y negro (conservar) de las aristas del grafo de Cayley. Cuando la probabilidad de conservar cada arista viene dado por un valor constante se habla de *percolación de Bernoulli* [17, 26]. Estas medidas gozan de una importante propiedad denominada *tolerancia a la inserción* (introducida por Lyons y Schramm en [27]): insertar una arista en un boreliano de medida positiva mantiene la medida positiva.

El espacio de estados de un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley se conoce como *espacio de Gromov-Hausdorff  $\mathcal{G}$  del grafo de Cayley*. La acción del grupo  $G$  sobre los vértices del grafo de Cayley proporciona una familia de transformaciones parciales sobre  $\mathcal{G}$ . Dicha familia genera un pseudogrupo cuya relación orbital  $\mathcal{R}$  es boreliana discreta, de hecho, étale y 2-numerable. En este contexto, la *repetitividad* de un subgrafo es equivalente a la minimalidad de la clausura de su órbita [1, 7, 14, 24]. En [14], É. Ghys construye un ejemplo de minimal que admite una única medida ergódica y  $\mathcal{R}$ -invariante [1, 24]. Esa medida es la ley del subgrafo aleatorio denominado *árbol aleatorio de Ghys-Kenyon*, para el cual todos los estados son subárboles repetitivos.

La tolerancia a la inserción implica que no pueden encontrarse grafos repetitivos en la percolación de Bernoulli. Esta es la motivación original de este trabajo y para llegar a este resultado se hace uso de la ergodicidad en restricción a clústeres infinitos y de la casi-invarianza de la medida. La cuestión es cómo aplicar esta idea en contextos más generales.

La ergodicidad sobre los clústeres infinitos se consigue porque, como demuestran D. Gaboriau y R. Lyons en [13], es equivalente a la *indistinguibilidad de clústeres infinitos*, propiedad que se obtiene gracias a un resultado de R. Lyons y O. Schramm en [27]. Estos autores hablan en realidad en unos contextos más generales que el de la percolación de Bernoulli que son los de la *percolación  $G$ -invariante* y la *percolación con decorados*. De manera que resulta natural estudiar la incompatibilidad de la tolerancia a la inserción con la repetitividad en estos ámbitos.

El siguiente lema fundamental sirve de respuesta a las cuestiones planteadas anteriormente, ya que tanto la percolación de Bernoulli, como la  $G$ -invariante y la percolación con decorados verifican sus hipótesis. Este resultado (publicado en [2]) puede enunciarse de manera general desde el punto de vista de las relaciones de equivalencia borelianas discretas:

**Lema fundamental** (1.3.1). *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y 1-numerable. Sean  $\mathcal{R} \subset$*



$\mathcal{L}$  relaciones de equivalencia borelianas discretas definidas sobre  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad casi-invariante y ergódica respecto de  $\mathcal{R}$ . Sea  $A$  un cerrado  $\mathcal{L}$ -invariante contenido en el soporte de  $\mu$ . Si  $Z$  es un cerrado  $\mathcal{L}$ -minimal de  $X$ , entonces  $Z = A$  o  $\mu(Z) = 0$ .

Aplicando este lema a las relaciones de equivalencia borelianas se llega al siguiente teorema que da respuesta a la cuestión planteada:

**Teorema (1.3.4).** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y 1-numerable. Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta definida en  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad casi-invariante ergódica. Entonces  $\text{supp}(\mu)$  es un minimal o cualquier minimal es de medida nula.*

Ejemplos de medidas del segundo tipo (en las que cualquier minimal es de medida nula) se encuentran en los ejemplos 1.1.24 y 1.1.25 donde se construyen medidas ergódicas y casi-invariantes (en el segundo también invariante) cuyo soporte no es invariante. Aplicaciones del lema fundamental en el contexto de la percolación invariante y con decorados (también descritas en [2]) son introducidas en el capítulo 2 junto con ejemplos de grafos repetitivos.

La utilidad del lema fundamental no se limita a los grafos aleatorios, si no que puede aplicarse al estudio de otros sistemas dinámicos como son las cadenas de Markov topológicas o “subshifts” de tipo finito [9]. Sin entrar a precisar la definición, el lema fundamental permite distinguir comportamientos ergódicos diferentes dependiendo de que el espacio de configuración esté formado por cadenas bidireccionales, en cuyo caso se denota  $\Omega_A$ , o unidireccionales, en cuyo caso se denota  $\Omega_A^R$ , asociadas a una matriz  $A$  de ceros y unos. Las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}_A$  y  $\mathcal{R}_A^R$  inducidas por el shift de Bernoulli coinciden con las relaciones orbital y cofinal definidas por la restricción del shift. Fijada una distribución de probabilidad inicial  $p$  y una matriz estocástica  $\Pi$  tal que  $p\Pi = p$ , se define una medida  $\mu_{\Pi,p}$  o  $\mu_{\Pi,p}^R$  sobre  $\Omega_A$  o  $\Omega_A^R$ , llamada *medida de Markov*. Por un lado, en el caso de cadenas bidireccionales, todos los minimales tienen medida nula:

**Proposición (3.4.2).** *Sea  $\Pi$  una matriz estocástica irreducible y  $\mu_{\Pi,p}$  una medida de Markov sobre  $\Omega_A$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i)  $\Omega_A$  es  $\mathcal{R}_A$ -minimal.
- (ii)  $\Omega_A$  está formado únicamente por la órbita de un elemento periódico de  $\sigma_A$ .
- (iii)  $\Pi = A$ .

**Corolario (3.4.3).** *Sea  $\Pi \neq A$  una matriz estocástica irreducible y  $\mu_{\Pi,p}$  una medida de Markov sobre  $\Omega_A$ . Entonces todo cerrado  $\mathcal{R}_A$ -minimal tiene medida nula con respecto a  $\mu_{\Pi,p}$ .*

Por el contrario, para las cadenas unidireccionales, el soporte de la medida es el único minimal:

**Proposición (3.4.4).** *Sea  $A$  una matriz irreducible. Entonces cualquiera  $\mathcal{R}_A^R$ -clase es densa en  $\Omega_A^R$ .*

**Corolario (3.4.5).** *Si  $A$  es una matriz irreducible, entonces  $\Omega_A^R$  es  $\mathcal{R}_A^R$ -minimal.*

Parece razonable que el concepto de subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley esté relacionado con el concepto de *grafo aleatorio*, introducido por D. Aldous y R. Lyons en [3] aunque aparece implícitamente en el artículo [25] de R. Lyons, R. Pemantle y Y. Peres. Un *grafo aleatorio* es una variable aleatoria donde los estados son clases de isomorfía de grafos enraizados localmente finitos. El espacio de estados  $\mathcal{G}_\bullet$  es un espacio métrico polaco, dotado de una relación de equivalencia étale  $\mathcal{R}_\bullet$  que consiste en cambiar el punto base. Sin embargo la noción entre ambas nociones dista de estar clara.

Primero hay dos maneras de dotar a una relación de equivalencia de una estructura de grafo: por un lado está la dada por Kaimanovich en [20] y por otro la dada por Gaboriau en [11] usando isomorfismos parciales. Toda estructura de grafo en el sentido de Gaboriau dada por una familia de isomorfismos parciales  $\Phi$  define una estructura de grado en el sentido de Kaimanovich  $\mathcal{K}_\Phi$  y recíprocamente:

**Corolario (4.3.5).** *Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta sobre un espacio boreliano estándar  $X$ . Si  $\mathcal{K}$  es una estructura de grafo sobre  $\mathcal{R}$  en el sentido de Kaimanovich tal que las clases  $\mathcal{R}[x]$  son localmente finitas, entonces existe una familia numerable  $\Phi$  de isomorfismos borelianos de  $X$  definiendo una estructura de grafo en el sentido de Gaboriau tal que  $\mathcal{K}_\Phi = \mathcal{K}$ .*

Hay una aplicación natural

$$\iota: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$$

que envía cada subgrafo  $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$  en la clase de isomorfía  $[\mathbb{H}, \mathbf{1}]$ , pero no es inyectiva, aunque se trata de una aplicación expansiva (luego continua y cerrada). Si  $\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P}_0)$  es un subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$ , entonces  $\Theta = \iota \circ \Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet, \mathbb{P})$  es un grafo aleatorio. El objetivo natural sería probar que cualquier grafo aleatorio  $\Theta$  se factoriza a través del espacio de Gromov-Hausdorff asociado a algún grupo libre  $G = F_K$  de rango suficientemente grande. Pero esto no es factible ya que los estados de  $\Theta_0$  estarían representados por árboles.

El pseudogrupo de transformaciones locales que genera la relación  $\mathcal{R}$  sobre el espacio  $\mathcal{G}$  de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley dota a la  $\mathcal{R}$  de una estructura de grafo en el sentido de Gaboriau. Con esta estructura de grafo la clase de equivalencia de un elemento  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  es isomorfa al cociente de  $\mathbb{H}$  por su isotropía. Esta asignación define la aplicación  $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$ .

**Proposición (4.3.7).** *La aplicación  $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  es boreliana y verifica que  $\rho(\mathcal{R}[\mathbb{H}]) = \mathcal{R}_\bullet[\rho(\mathbb{H})]$  para todo  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ .*

Como consecuencia de esta proposición, cada subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$

$$\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P}_0)$$

determina un grafo aleatorio

$$\Theta = \rho \circ \Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet, \mathbb{P})$$

con ley  $\mathbb{P} = \Theta_*(\mu) = \rho_*(\mathbb{P}_0)$ . De esta forma surge como nuevo objetivo probar que: dado un grafo aleatorio

$$\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet, \mathbb{P}),$$

existe un subgrafo aleatorio del grafo de Cayley  $\mathbb{F}_K$

$$\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{F}_K, \mathbb{P}_0)$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Theta_0 \swarrow & & \searrow \Theta \\ \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}_\bullet \end{array}$$

La idea es construir una sección  $\sigma$  de  $\rho$  que permita obtener subgrafos aleatorios a partir de grafos aleatorios.

Como la valencia de los subgrafos aleatorios está siempre acotada, solo tiene sentido plantear la búsqueda de secciones de  $\rho$  en restricción a un subconjunto de  $\mathcal{G}_\bullet$  donde la valencia esté también acotada. Si  $\mathcal{G}_\bullet^{2K}$  denota al subespacio de  $\mathcal{G}_\bullet$  correspondiente a las clases de isomorfía de grafos punteados con valencia acotada por  $2K$  pueden considerarse la aplicación  $\iota: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$  que envía cada  $\mathbb{H} \in \mathcal{F}_K$  sobre  $[\mathbb{H}, \mathbf{1}] \in \mathcal{G}_\bullet^{2K}$  y la aplicación  $v: \mathcal{G}_\bullet^{2K} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$  que envía cada  $[\mathbb{H}, \mathbf{1}] \in \mathcal{G}_\bullet^{2K}$  en la clase de isomorfía de su cubierta universal. De esta forma, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}_\bullet^{2K} & \\ \rho \nearrow & & \downarrow v \\ \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G}_\bullet^{2K} \end{array}$$

donde  $v: \mathcal{G}_\bullet^{2K} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$  es una aplicación continua que verifica  $v(\mathcal{R}_\bullet[[\mathbb{H}, x]]) = \mathcal{R}_\bullet[v([\mathbb{H}, x]])$ .

Eligiendo un sistema de generadores  $S_0$  de modo que  $S = S_0 \cup S_0^{-1}$  sea el sistema de generadores usado para definir el grafo de Cayley  $\mathbb{F}_K$ , se puede asignar una orientación y un coloreado de aristas a cada grafo obtenido como cociente de  $\mathbb{H} \in \mathcal{F}_K$  por su isotropía. De esta forma se define una aplicación  $\hat{\rho}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$  donde el espacio  $\hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$  es el espacio de las clases de isomorfía de grafos orientados y coloreados (usando los generadores de  $S_0$ ) con valencia total (entrante y saliente)  $\leq 2K$ .

**Proposición (4.6.1).** *La aplicación  $\hat{\rho}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$  es boreliana.*

Si  $o: \hat{\mathcal{G}}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  designa la aplicación no expansiva que envía la clase  $[\hat{\mathbb{H}}, x]$  de un grafo orientado en la clase  $[\mathbb{H}, x]$  del grafo no orientado subyacente, entonces  $\hat{\rho}$  hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K} & \\ \hat{\rho} \nearrow & & \downarrow o \\ \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}_\bullet^{2K} \end{array}$$

De esta forma la construcción de la sección  $\sigma$  se lleva a cabo reduciendo el problema a la construcción una sección  $\hat{\sigma}$  de la aplicación  $o$  cuya imagen esté contenida en la imagen de  $\hat{\rho}$ . Esto se logra construyendo un árbol recubridor de cada elemento  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  mediante el algoritmo BFS de búsqueda en anchura. Esto permite demostrar la siguiente proposición.

**Proposición** (4.7.4). *La aplicación  $\sigma: \mathcal{G}_\bullet^k \rightarrow \mathcal{F}_K$  es continua.*

Se obtiene así el resultado fundamental del último capítulo:

**Teorema** (4.7.5). *Dado un grafo aleatorio  $\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet^k, \mathbb{P})$ , existe un subgrafo aleatorio  $\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{F}_K, \mathbb{P}_0)$  con ley  $\mathbb{P}_0 = \sigma_*(\mathbb{P})$  y rango  $K = 3k$  tal que  $\rho \circ \Theta_0 = \Theta$ .  $\square$*

El esquema de la organización de la memoria es el siguiente:

En el primer capítulo se enuncia el lema fundamental que establece una dicotomía para las relaciones de equivalencia definidas sobre espacios topológicos Hausdorff y 1-numerables publicado en [2].

En el segundo capítulo se aplica este lema al estudio de *subgrafos aleatorios de un grafo de Cayley*, distinguiendo grafos *repetitivos* de subgrafos aleatorios obtenidos mediante procesos de percolación como *percolación de Bernoulli* [17, 26], *percolación invariante* [12] o *percolación con decorados* [13, 27].

En el tercer capítulo se aplica el lema fundamental al estudio de las *cadena de Markov topológicas* [9, 22] distinguiendo sus dinámicas según la direccionalidad.

Por último, en el cuarto capítulo se estudia como interaccionan los conceptos de subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley y *grafo aleatorio* [3].



# Capítulo 1

## Relaciones de equivalencia borelianas en espacios topológicos

En este capítulo se demuestra un resultado (lema fundamental 1.3.1) que establece una dicotomía para las relaciones de equivalencia definidas sobre espacios topológicos Hausdorff y 1-numerables [2]. Este lema se aplica al estudio de grafos aleatorios y permite distinguir entre grafos aleatorios *repetitivos* y *tolerantes a la inserción*.

En las secciones 1.1 y 1.2 se recuerdan generalidades relativas a *relaciones de equivalencia borelianas* y *relaciones de equivalencia étale*, respectivamente. En la sección 1.3 se demuestra el resultado central de este capítulo.

### 1.1. Relaciones de equivalencia borelianas

En esta primera sección se recuerdan al lector nociones básicas de teoría de la medida y teoría ergódica para poder enunciar más adelante el lema principal alrededor del cual gira el resto del capítulo.

Una  $\sigma$ -álgebra sobre un conjunto  $X$  es una colección  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$ , que es cerrada para las uniones numerables y los complementarios y contiene al conjunto vacío. Al par  $(X, \mathcal{B})$  se le llama *espacio medible*. Una aplicación

$$f: (X_1, \mathcal{B}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{B}_2)$$

entre dos espacio medibles es *medible* si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_1$  para todo  $B \in \mathcal{B}_2$ . Se llama *endomorfismo* a una aplicación de un espacio en si mismo. Un *isomorfismo medible* es una aplicación biyectiva medible cuya inversa es también medible. Se denomina *auto-morfismo* a un isomorfismo de un espacio en si mismo. Dos espacios medibles se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo medible entre ambos.

Dados dos espacios medibles  $(X, \mathcal{A})$  y  $(Y, \mathcal{B})$  se denomina  $\sigma$ -álgebra producto a la menor  $\sigma$ -álgebra de  $X \times Y$  que hace medibles las proyecciones  $\alpha: X \times Y \rightarrow X$  y  $\beta: X \times Y \rightarrow Y$ , ver [31] para una definición equivalente.

Una *medida* sobre  $(X, \mathcal{B})$  es una función  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  verificando

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

(ii) para toda secuencia numerable  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$  de conjuntos medibles disjuntos se cumple que  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ .

A la terna  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  se la denomina *espacio de medida*, aunque si  $\mathcal{B}$  se deduce del contexto se denotará simplemente por  $(X, \mu)$ . Si además  $\mu(X) = 1$ , se dice que  $\mu$  es una *medida de probabilidad* y  $(X, \mu)$  es un *espacio de probabilidad*.

**Definición 1.1.1.** Dados el espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , el espacio medible  $(Y, \mathcal{B})$  y una aplicación medible  $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  se define la *medida imagen*  $f_*(\mu)$  en  $(Y, \mathcal{B})$  dada por

$$f_*(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

para cada  $B \in \mathcal{B}$ .

**Definición 1.1.2.** Dado un espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y un endomorfismo medible  $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$  se dice que  $\mu$  es *f-invariante* y  $f$  es  *$\mu$ -invariante* cuando  $f_*(\mu) = \mu$ . Se dice que  $\mu$  es *f-casi-invariante* y  $f$  es  *$\mu$ -casi-invariante* cuando  $\mu(A) = 0$  si y solo si  $f_*(\mu)(A) = 0$  para cada  $A \in \mathcal{A}$ .

**Definición 1.1.3.** Dado un espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y  $f$  un endomorfismo  $\mu$ -invariante se dice que  $\mu$  es *f-ergódica* y  $f$  es  *$\mu$ -ergódica* cuando todo  $A \in \mathcal{A}$  verificando  $f^{-1}(A) = A$  cumple que  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$ .

Si  $X$  es un espacio topológico la  $\sigma$ -álgebra de Borel es la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(X)$  generada por los conjuntos abiertos. Se llaman *borelianos* a los conjuntos de  $\mathcal{B}(X)$ . Un espacio medible  $(X, \mathcal{B})$  se denomina *espacio de Borel* si es isomorfo al espacio medible determinado por un espacio topológico dotado de la  $\sigma$ -álgebra de Borel. A las aplicaciones medibles entre espacios borelianos se las denomina aplicaciones borelianas.

Un *espacio polaco* es un espacio topológico homeomorfo a un espacio métrico completo y separable. Un *espacio boreliano estándar* es un espacio medible isomorfo a un espacio polaco dotado de su  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Proposición 1.1.4** ([31, Corollary 4.5.5]). *Entre espacios borelianos estándar cualquier biyección boreliana es automáticamente un isomorfismo boreliano.*

**Teorema 1.1.5** ([31, Theorem 3.3.13]). *Todo espacio boreliano estándar no numerable es isomorfo al intervalo  $[0, 1]$ .*

**Corolario 1.1.6** ([31, Corollary 3.3.16]). *Dos espacios borelianos estándar son isomorfos si y solo si tienen la misma cardinalidad.*

Por tanto todo espacio boreliano estándar infinito es isomorfo a  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{Z}$ .

**Lema 1.1.7** ([28, Lemme 1.1]). *Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios borelianos, siendo  $X$  estándar, entonces toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$  medible de fibras finitas admite una sección medible  $s: Y \rightarrow X$ .*

*Demostración.* Si  $X$  es numerable hereda el orden de  $\mathbb{Z}$ , en caso contrario gracias al teorema 1.1.5 hereda el orden de  $\mathbb{R}$ . De manera que puede definirse  $s(y)$  como el primer punto de  $f^{-1}(y)$ .  $\square$

**Definición 1.1.8.** Un *espacio de probabilidad estándar* es un espacio boreliano estándar dotado de una medida de probabilidad.

En estos espacios se acostumbra llamar *sucesos* a los subconjuntos medibles.

**Teorema 1.1.9.** *Todo espacio de probabilidad estándar sin átomos es isomorfo al intervalo  $[0, 1]$  dotado de la medida de Lebesgue.*

**Definición 1.1.10.** Una relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  sobre un espacio medible (respectivamente boreliano)  $X$  se dice *medible* (respectivamente *boreliana*) si  $\mathcal{R}$  es un conjunto medible (respectivamente boreliano) de  $X \times X$ . Una relación se denomina *discreta* si las clases  $\mathcal{R}[x]$  de cada  $x \in X$  son numerables.

**Definición 1.1.11.** Una acción  $\varphi: G \times X \rightarrow X$  de un grupo  $G$  sobre un espacio boreliano  $X$  se dice *boreliana* si para cada  $g \in G$ , la traslación

$$L_g: x \in X \rightarrow g \cdot x \in X$$

es un isomorfismo boreliano.

Una acción es *libre* si  $L_g(x) = x$  implica  $g = 1$ . Se denomina *estabilizador* o *grupo de isotropía* de un punto  $x \in X$  al subgrupo  $G_x \subset G$  formado por todos los elementos de  $G$  que dejan fijo  $x$ . Una acción de automorfismos borelianos sobre un espacio de probabilidad estándar se dice *esencialmente libre* cuando el boreliano formado por los puntos  $x \in X$  con estabilizador no trivial es de medida nula. Toda acción de un grupo induce una partición de  $X$  en órbitas. Dicha partición permite definir la relación orbital  $\mathcal{R}_G$  que relaciona los puntos de  $X$  que comparten órbita.

**Ejemplo 1.1.12.** Si  $\varphi: G \times X \rightarrow X$  es una acción boreliana de un grupo numerable  $G$ , entonces la imagen  $\mathcal{R}_G = \{(x, g \cdot x) \mid x \in X, g \in G\}$  de la aplicación boreliana

$$\begin{aligned} \delta: G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (x, g \cdot x) \end{aligned}$$

es una relación de equivalencia boreliana discreta.

**Ejemplo 1.1.13.** Cada automorfismo  $f: X \rightarrow X$  define una acción mediante automorfismos borelianos de  $\mathbb{Z}$  sobre  $X$ . La relación orbital de esta acción se denotará por  $\mathcal{R}_f$ . Dos elementos  $x, y \in X$  están  $\mathcal{R}_f$ -relacionados cuando exista  $n \in \mathbb{Z}$  de manera que  $f^n(x) = y$ .

**Ejemplo 1.1.14.** Cada endomorfismo  $f: X \rightarrow X$  define la relación de equivalencia cofinal  $\mathcal{R}_f$  que relaciona dos elementos  $x, y \in X$  cuando existen  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $f^n(x) = f^m(y)$ .

**Proposición 1.1.15.** *Si  $f: X \rightarrow X$  es un endomorfismo cuyas fibras tienen acotada la cardinalidad por un número finito entonces la relación de equivalencia cofinal  $\mathcal{R}_f$  es una relación boreliana discreta.*

*Demostración.* Sea  $k \in \mathbb{N}$  una cota para la cardinalidad de las fibras de  $f$ . Usando un método empleado para demostrar el lema 1.1.7, pueden construirse secciones  $s_i$  de  $f$ ,  $1 \leq i \leq k$ , verificando que  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} \{s_i(x)\} = f^{-1}(x)$  para todo  $x \in X$ . Esta familia de  $k$  automorfismos  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq k}$  define una acción sobre  $X$  mediante automorfismos borelianos del grupo libre de  $k$  generadores. Y finalmente la relación orbital de esta acción coincide con  $\mathcal{R}_f$ .  $\square$



**Teorema 1.1.16** ([10, Theorem 1]). *Toda relación de equivalencia boreliana discreta  $\mathcal{R}$  definida sobre un espacio boreliano estándar  $X$  está inducida por una acción de algún grupo discreto de automorfismos borelianos.*

Se denomina *transformación parcial* de una relación boreliana (respectivamente medible) a un isomorfismo boreliano (respectivamente medible)  $\varphi: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{R}$  entre subconjuntos borelianos (respectivamente medible)  $A$  y  $B$  de  $X$  cuyo grafo esté contenido en  $\mathcal{R}$ , es decir que  $(x, y) \in \mathcal{R}$  para todo  $x \in A$  e  $y \in B$  en los que  $\varphi(x) = y$ .

**Definición 1.1.17.** Una medida  $\mu$  en  $X$  se dice  *$\mathcal{R}$ -invariante* si  $\varphi_*(\mu|_A) = \mu|_B$  para cualquier transformación parcial  $\varphi: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{R}$ , donde  $\mu|_A$  y  $\mu|_B$  son las medidas restringidas a  $A$  y  $B$  respectivamente. Si las transformaciones parciales solo conservan los conjuntos de medida, nula entonces se dice que  $\mu$  es  *$\mathcal{R}$ -casi-invariante* o  $\mathcal{R}$  es *no  $\mu$ -singular*.

La siguiente definición es una caracterización de la casi-invarianza.

**Definición 1.1.18.** Una medida  $\mu$  en  $X$  se dice  *$\mathcal{R}$ -casi-invariante* cuando para cada  $A \subset X$  medible con  $\mu(A) = 0$  su saturación  $\mathcal{R}[A]$  tiene también medida 0.

**Ejemplo 1.1.19.** Sea  $f: X \rightarrow X$  un automorfismo y  $\mathcal{R}_f$  la relación de equivalencia asociada descrita en el ejemplo 1.1.13. Entonces una medida  $\mu$  en  $X$  es  *$f$ -invariante* si y solo si es  $\mathcal{R}_f$ -invariante, y análogamente es  *$f$ -casi-invariante* si y solo si es  $\mathcal{R}_f$ -casi-invariante.

Si se dota al producto  $X \times X$  de la  $\sigma$ -álgebra producto, las proyecciones  $\beta(x, y) = x$  y  $\alpha(x, y) = y$  de  $\mathcal{R}$  son aplicaciones borelianas de  $\mathcal{R}$  en  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  es discreta puede integrarse la medida de contar sobre las fibras de  $\beta$  contra una medida  $\mu$  de  $X$ . De esta forma, se obtiene la medida de contar por la izquierda  $d\tilde{\mu}(x, y) = d\mu(x)$  sobre  $\mathcal{R}$ . Análogamente, usando las fibras de  $\alpha$ , se obtiene la medida de contar por la derecha  $d\tilde{\mu}^{-1}(x, y) = d\mu(y)$  sobre  $\mathcal{R}$ . Estas medidas son equivalentes si y solo si  $\mu$  es  $\mathcal{R}$ -casi-invariante, en cuyo caso se define el cociclo de Radon-Nikodym sobre  $\mathcal{R}$  por  $D(x, y) = d\tilde{\mu}/d\tilde{\mu}^{-1}(x, y)$ , ver [10]. De hecho,  $D \equiv 1$  si y solo si  $\mu$  es  $\mathcal{R}$ -invariante.

Estas definiciones pueden enunciarse también para grupos que actúan de manera boreliana:

**Definición 1.1.20.** Una medida  $\mu$  en  $X$  se dice  *$G$ -invariante* si  $g_*(\mu) = \mu$  para cualquier  $g \in G$ . Si las transformaciones solo conservan los conjuntos de medida nula entonces se dice que  $\mu$  es  *$G$ -casi-invariante*.

**Definición 1.1.21.** Una medida  $\mu$  se dice  *$\mathcal{R}$ -ergódica* si para cada boreliano  $B \subset X$  o bien  $\mu(\mathcal{R}[B]) = 0$  o bien  $\mu(\mathcal{R}[B]) = 1$ .

Si se dota a  $X$  de una topología puede hablarse también de los siguientes conceptos

**Definición 1.1.22.** Un subconjunto cerrado  $Z$  de  $X$  se denomina  *$\mathcal{R}$ -minimal* si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- (i)  $Z$  es un conjunto minimal de la familia de los cerrados  $\mathcal{R}$ -invariantes o  $\mathcal{R}$ -saturados ordenados por inclusión,
- (ii) para cada punto  $z \in Z$ ,  $\overline{\mathcal{R}[z]} = Z$ .

**Definición 1.1.23.** Se llama *soporte* de una medida  $\mu$  al conjunto

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in X \mid \mu(U) > 0, \forall U \subset X \text{ entorno de } x\}.$$

El soporte de una medida es un cerrado, ya que su complementario puede expresarse como la unión de todos los abiertos de medida nula.

Aún suponiendo que la medida  $\mu$  es casi-invariante o invariante y ergódica, el soporte de  $\mu$  no tiene porqué ser  $\mathcal{R}$ -invariante:

**Ejemplo 1.1.24.** Sea  $\mathcal{R}$  la relación de equivalencia boreliana discreta definida sobre  $\mathbb{R}$  con la topología usual cuyas clases son  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$  y conjuntos unitarios. Dado un isomorfismo medible

$$\Theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (0, 1),$$

la medida de probabilidad  $\nu$  sobre  $\mathbb{N}$  definida por

$$\nu(n) = (1/2)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

se proyecta a una medida de probabilidad  $\Theta_*(\nu)$  que se concentra sobre la clase  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ . Esta medida se extiende a una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}$  que es casi-invariante y ergódica respecto de  $\mathcal{R}$ . Sin embargo, su soporte  $\text{supp}(\mu) = [0, 1]$  no es  $\mathcal{R}$ -invariante ya que no contiene a la clase de 0 y 1.

**Ejemplo 1.1.25.** Para obtener un ejemplo similar al anterior pero con una medida invariante, se considera el espacio  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  dotado de la topología producto y de la medida producto  $P_p$  que resultan de dotar a  $\{0, 1\}$  de la topología discreta y de la medida de Bernoulli con pesos  $p$  y  $1 - p$  asociados a 1 y 0 respectivamente para algún  $p \in (0, 1)$ . Esta medida es invariante y ergódica respecto de la acción natural del grupo  $\mathbb{Z}$ , descrita en la ecuación 2.3.1, tal y como se demuestra en las proposiciones 2.5.4 y 2.5.5. Sea  $\Omega_\star = \Omega \sqcup \{\star\}$  la suma topológica de  $\Omega$  con un punto aislado  $\star$  dotada de la medida  $\mu = i_*(P_p)$  inducida por la inclusión. Puede definirse una acción de  $\mathbb{Z}$  que coincide con la natural en  $\Omega - \{1\}$  (donde 1 denota a  $(\dots, 1, 1, 1, \dots) \in \Omega$ ) y que une a los puntos  $\{1\}$  y  $\star$  en la misma órbita. Como dicha órbita es de medida nula la medida  $\mu$  es invariante y ergódica y su soporte  $\text{supp}(\mu) = \Omega$ , el cual dentro de  $\Omega_\star$  es un boreliano no invariante.

## 1.2. Relaciones de equivalencia étale

**Definición 1.2.1** ([15]). Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia en  $X$  dotada de una topología  $\mathcal{T}$ . Sean  $\alpha, \beta: \mathcal{R} \rightarrow X$  las proyecciones naturales dadas por  $\alpha(x, y) = x$  y  $\beta(x, y) = y$ . Se dice que  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  es *étale* cuando:

- (i) las aplicaciones  $\alpha, \beta: \mathcal{R} \rightarrow X$  son homeomorfismos locales,
- (ii) si  $U$  y  $V$  son abiertos de  $\mathcal{R}$ , entonces el conjunto  $UV = \{(x, z) \mid (x, y) \in U, (y, z) \in V, \text{ para algún } y \in X\}$  es también abierto,
- (iii) si  $U \subset \mathcal{R}$  es abierto, entonces lo es también  $U^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in U\}$ .

Una relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  se dice *étale* cuando se le puede dotar de alguna topología  $\mathcal{T}$  con la que  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  sea étale.

En general la topología  $\mathcal{T}$  no coincide con la topología inducida por la topología producto de  $X \times X$ .

La diagonal  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  es un abierto de  $\mathcal{R}$  ya puede expresarse como la unión  $\bigcup_{U \in \mathcal{T}} UU^{-1}$ . Además las proyecciones restringidas a la diagonal  $\alpha|_{\Delta}$  y  $\beta|_{\Delta}$  son homeomorfismos que identifican  $\Delta$  con  $X$ . Por otro lado, como las proyecciones son homeomorfismos locales, las topología de  $\mathcal{R}$  y  $X$  comparten cualquier propiedad local, como por ejemplo la compacidad local o la 1-numerabilidad.

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación de equivalencia étale sobre  $X$ . Entonces  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  es también  $T_1$ . Además, si  $X$  es Hausdorff  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  también lo es.*

*Demostración.* Sean  $(x, y)$  y  $(x', y')$  dos puntos diferentes de  $\mathcal{R}$ . Si  $x \neq x'$ , al ser  $X$  un espacio  $T_1$ , hay dos entornos que separan  $x$  y  $x'$  que, mediante imagen inversa de  $\alpha$ , definen dos entornos que separan  $(x, y)$  y  $(x', y')$ . Si  $x = x'$  entonces  $y \neq y'$ , con lo que se procede de manera análoga usando  $\beta$  en lugar de  $\alpha$ . Con lo que se llega a que  $\mathcal{R}$  es también  $T_1$ . Lo mismo ocurre con la propiedad de Hausdorff.  $\square$

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación de equivalencia étale sobre  $X$ . Las fibras de las proyecciones  $\alpha$  y  $\beta$  son discretas con la topología inducida.*

*Demostración.* Para cada  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , sea  $A$  un entorno abierto de  $(x, y)$  y  $B \subset \Delta$  un entorno abierto del punto  $(x, x)$ . Entonces el abierto  $BA$  corta a  $\alpha^{-1}(x)$  en un único punto por lo que se concluye que  $\alpha^{-1}(x)$  tiene la topología discreta. Para  $\beta$  se razona de manera análoga.  $\square$

Una relación de equivalencia es en realidad un *grupoide* y el término étale proviene de dicho ámbito en cuyo caso se hablará de *grupoide  $r$ -discreto* [29]. Al igual que ocurre con las relaciones borelianas, los conceptos de invarianza y casi-invarianza de medidas respecto de una relación étale se pueden formular mediante transformaciones locales.

**Definición 1.2.4.** Sea  $X$  un espacio topológico. Se llama *pseudogrupo* (de transformaciones locales de  $X$ ) a una familia  $\Gamma$  de homeomorfismos  $f: U \rightarrow V$  entre abiertos  $U = \text{dom}(f)$  y  $V = \text{im}(f)$  de  $X$  que verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si  $f \in \Gamma$  y  $W \subset \text{dom}(f)$ , entonces  $f|_W \in \Gamma$ .
- (ii)  $id_X \in \Gamma$ .
- (iii) Si  $f, g \in \Gamma$  verifican  $\text{im}(f) = \text{dom}(g)$ , entonces  $g \circ f \in \Gamma$ .
- (iv) Si  $f \in \Gamma$ , entonces  $f^{-1} \in \Gamma$ .
- (v) Sea  $f: U \rightarrow V$  un homeomorfismo y supongamos que para cada  $x \in U$ , existe un entorno abierto  $U_x \subset U$  de  $x$  tal que  $f|_{U_x} \in \Gamma$ . Entonces  $f \in \Gamma$ .

Esta noción, que se debe a É. Cartan, puede verse en [18]. Se dice que una familia de homeomorfismos  $\{h_i\}$  genera un pseudogrupo  $\Gamma$  si este es el menor pseudogrupo que contiene a  $\{h_i\}$ , es decir, si los elementos de  $\Gamma$  se obtienen como resultado de restringir, componer, invertir y unir homeomorfismos de la familia  $\{h_i\}$  e identidades. Si existe alguna familia numerable que genere a un pseudogrupo  $\Gamma$  este se dice *de generación numerable* y si existe alguna familia finita se dice *finitamente generado*.

**Definición 1.2.5.** Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo de transformaciones locales de un espacio topológico  $X$ . Una medida de Borel  $\mu$  sobre  $X$  se dice  $\Gamma$ -invariante cuando  $\mu(h(A)) = \mu(A)$  para todo  $h \in \Gamma$  y todo boreliano  $A \subset \text{dom}(h)$ . Se dice que  $\mu$  es  $\mathcal{R}$ -casi-invariante si y solo si se cumple que  $\mu(h(A)) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$  para todo  $h \in \Gamma$  y todo boreliano  $A \subset \text{dom}(h)$ .

Todo pseudogrupo  $\Gamma$  sobre un espacio topológico  $X$  define una *relación orbital*  $\mathcal{R}_\Gamma$  dada por

$$x\mathcal{R}_\Gamma y \iff y = h(x) \text{ para algún } h \in \Gamma,$$

para  $x$  e  $y \in X$ .

**Proposición 1.2.6.** Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo sobre  $X$ . Entonces  $\mathcal{R}_\Gamma$  es una relación étale, dotada de la topología generada por los abiertos  $U_h = \{(x, h(x)) \mid x \in \text{dom}(h)\}$  con  $h \in \Gamma$ .

*Demostración.* La proyección  $\alpha$  restringida a un abierto básico  $U_h$  es un homeomorfismo ya que los pseudogrupos son cerrados para las restricciones a abiertos. Luego  $\alpha$  es un homeomorfismo local. Puesto que  $\Gamma$  es cerrado para la involución, si  $U \subset \mathcal{R}_\Gamma$  es un abierto, entonces  $U^{-1} \subset \mathcal{R}_\Gamma$  es también un abierto. Esto implica que  $\beta$  es un homeomorfismo local. Al ser  $\Gamma$  cerrado por la multiplicación, para cada par de  $U$  y  $V$  abiertos de  $\mathcal{R}_\Gamma$ , el conjunto  $UV$  es también abierto.  $\square$

A su vez, dada una relación de equivalencia étale  $\mathcal{R}$ , puede construirse un pseudogrupo  $\Gamma$  cuya relación de equivalencia orbital  $\mathcal{R}_\Gamma$  es isomorfa a  $\mathcal{R}$ . En efecto, para cada elemento  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , existe un entorno abierto  $A \subset \mathcal{R}$  de  $(x, y)$  sobre el que las proyecciones restringidas son homeomorfismos. De forma que se define una transformación local mediante el homeomorfismo

$$h = \beta|_A \circ \alpha|_A^{-1}: \alpha(A) \rightarrow \beta(A).$$

Esta familia de homeomorfismos genera un pseudogrupo  $\Gamma$  cuyas órbitas coinciden con la clases de  $\mathcal{R}$ .

**Proposición 1.2.7.** Sea  $X$  un espacio topológico dotado de una medida  $\mu$  sobre la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos. Sea  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación de equivalencia étale y  $\Gamma$  su pseudogrupo asociado. Entonces  $\mu$  es  $\mathcal{R}$ -invariante (respectivamente casi-invariante) si y solo si es  $\Gamma$ -invariante (respectivamente casi-invariante).

**Proposición 1.2.8.** Sea  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación de equivalencia étale sobre  $X$ . Sea  $\mu$  una medida  $\mathcal{R}$ -casi-invariante sobre  $X$ . Entonces  $\text{supp}(\mu)$  es un boreliano  $\mathcal{R}$ -invariante.

*Demostración.* Dado  $x \notin \text{supp}(\mu)$ , admite un entorno  $V$  tal que  $\mu(V) = 0$ . Entonces cualquier  $y \in \mathcal{R}[x]$  admite también un entorno  $W$  tal que  $\mu(W) = 0$  ya que hay una transformación parcial  $f \in \Gamma$  que verifica  $f(x) = y$ , por tanto  $y \notin \text{supp}(\mu)$ . Luego el soporte de  $\mu$  es  $\mathcal{R}$ -invariante.  $\square$

A continuación se verá bajo qué condición sobre la topología  $\mathcal{T}$  una relación de equivalencia étale es discreta. Según la proposición 1.2.3, las fibras son discretas y si se supone que  $\mathcal{T}$  es 2-numerable, entonces serán numerables y se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.9.** *Sea  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación de equivalencia étale. Si  $\mathcal{T}$  es 2-numerable, entonces  $\mathcal{R}$  es boreliana discreta.*  $\square$

De hecho, la condición de existencia de una base numerable (que necesariamente implica la 2-numerabilidad de  $X \cong \Delta$ ), puede caracterizarse del siguiente modo:

**Proposición 1.2.10.** *Sea  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación étale sobre un espacio 2-numerable  $X$ . Entonces la topología  $\mathcal{T}$  es 2-numerable si y solo si  $\mathcal{R}$  es la relación de equivalencia orbital de un pseudogrupo  $\Gamma$  de generación numerable.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia étale dotada de una topología 2-numerable. Se consideran los homeomorfismos, que generan el pseudogrupo  $\Gamma$

$$h = \beta|_A \circ \alpha|_A^{-1}: \alpha(A) \rightarrow \beta(A),$$

obtenidos a partir de entornos abiertos de  $A \subset \mathcal{R}$  de  $(x, y) \in \mathcal{R}$  sobre los que las proyecciones restringidas son homeomorfismos. Si la topología es 2-numerable, entonces el pseudogrupo  $\Gamma$  es de generación numerable.

Por otro lado, si  $\Gamma$  es un pseudogrupo de generado por una familia numerable de homeomorfismos  $h$ , entonces las gráficas  $U_h = \{(x, h_n(x)) \mid x \in \text{dom}(h)\}$  forman una base numerable de la topología de  $\mathcal{R}$ .  $\square$

### 1.3. Resultados para relaciones de equivalencia borelianas

Una vez presentado el contexto de las relaciones de equivalencia borelianas puede mostrarse el siguiente resultado, publicado en [2]. Dicho resultado se empleará en las siguientes secciones para enunciar teoremas de incompatibilidad entre propiedades dinámicas como son la tolerancia a la inserción y la repetitividad de grafos aleatorios.

**Lema fundamental 1.3.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y 1-numerable. Sean  $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$  relaciones de equivalencia borelianas discretas definidas sobre  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad casi-invariante ergódica respecto de  $\mathcal{R}$ . Sea  $A$  un cerrado  $\mathcal{L}$ -invariante contenido en el soporte de  $\mu$ . Si  $Z$  es un cerrado  $\mathcal{L}$ -minimal de  $X$ , entonces  $Z = A$  o  $\mu(Z) = 0$ .*

*Demostración.* Para cada punto  $x \in A$ , puesto que  $X$  es un espacio  $T_1$ , la intersección de todos los entornos de  $x$  es  $\{x\}$ . Gracias al carácter 1-numerable es posible restringirse a una familia numerable de entornos  $U_n$  de  $x$ . Puesto que  $x \in \text{supp}(\mu)$ , se tiene que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{x\} \quad \text{y} \quad \mu(U_n) > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\mu$  es casi-invariante y ergódica respecto de  $\mathcal{R}$ , entonces  $\mu(\mathcal{R}[U_n]) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego

$$Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}[U_n]$$

es también un boreliano de medida total. Sea  $Z$  un subconjunto cerrado y  $\mathcal{L}$ -minimal de  $X$  tal que  $\mu(Z) \neq 0$ . Entonces  $Z \cap Y \neq \emptyset$  y existe un punto  $z \in Z \cap Y$ . Por tanto, como  $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ , se verifica que

$$z \in Z \cap \mathcal{R}[U_n] \subset Z \cap \mathcal{L}[U_n]$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hay un punto  $z_n \in Z \cap U_n$ . La sucesión de puntos  $z_n \in Z$  converge a  $x$ . Por ser  $Z$  cerrado,  $x \in Z$  y por tanto  $A \subset Z$ . Como  $A$  es  $\mathcal{L}$ -invariante y  $Z$  es  $\mathcal{L}$ -minimal, se concluye que  $Z = A$ .  $\square$

El siguiente corolario es el enunciado original del lema en [2]:

**Corolario 1.3.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y 1-numerable. Sean  $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$  relaciones de equivalencia borelianas discretas definidas sobre  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad casi-invariante y ergódica respecto de  $\mathcal{R}$ . Sea  $x \in \text{supp}(\mu)$  tal que  $\mathcal{L}[x] = \{x\}$ . Si  $Z$  es un cerrado  $\mathcal{L}$ -minimal de  $X$ , entonces  $Z = \{x\}$  o  $\mu(Z) = 0$ .*

**Corolario 1.3.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y 2-numerable. Sea  $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$  una relación de equivalencia étale y 2-numerable definida sobre  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad casi-invariante ergódica. Entonces  $\text{supp}(\mu)$  es un minimal o cualquier minimal es de medida nula.*

*Demostración.* Aplicando las proposiciones 1.2.8 y 1.2.9 se comprueba que  $\mathcal{R} = \mathcal{L}$  y  $A = \text{supp}(\mu)$  verifican las hipótesis del lema 1.3.1.  $\square$

**Teorema 1.3.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_1$  y 1-numerable. Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta definida en  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad casi-invariante ergódica. Entonces  $\text{supp}(\mu)$  es un minimal o cualquier minimal es de medida nula.*

*Demostración.* Sea  $Z$  un subconjunto cerrado y minimal de  $X$  tal que  $\mu(Z) \neq 0$ . Usando la demostración del lema 1.3.1 en el caso  $\mathcal{R} = \mathcal{L}$  y  $A = \text{supp}(\mu)$ , se deduce que  $\text{supp}(\mu) \subset Z$ . Conviene recordar que en principio el soporte  $\text{supp}(\mu)$  no tiene por qué ser  $\mathcal{R}$ -invariante (ver ejemplos 1.1.24 y 1.1.25).

Para probar el otro contenido, se considera un punto  $z \in Z$  y un entorno  $U$  de  $z$ . Al ser  $Z$  minimal, todas las órbitas que lo conforman intersecan a  $U$  de manera que  $\text{supp}(\mu) \subset Z \subset \mathcal{R}[U]$  y  $\mu(\mathcal{R}[U]) = 1$ . Luego, al ser  $\mu$  casi-invariante, se deduce que  $\mu(U) \neq 0$ . Esto implica que  $z \in \text{supp}(\mu)$ , y por tanto  $Z \subset \text{supp}(\mu)$ .  $\square$

En el capítulo 4 de [24] se presentan medidas cuyo soporte consiste en un minimal. Una de ellas, el ejemplo de Ghys-Kenyon, se muestra en la sección 2.4. Por otro lado, como ejemplo de las medidas cuyos minimales son todos de medida nula se tienen las percolaciones de Bernoulli sobre los subgrafos infinitos de un grafo de Cayley descritas a lo largo de las secciones 2.5, 2.6 y 2.7.

El objetivo del siguiente capítulo es comparar ambas situaciones con la ayuda del lema fundamental 1.3.1.



## Capítulo 2

# Grafos aleatorios repetitivos y tolerancia a la inserción

En este capítulo se describen una serie de ejemplos de grafos aleatorios a los que se aplica el corolario 1.3.2 del lema fundamental.

En la sección 2.1, se describe el *espacio de Gromov-Hausdorff* de los subgrafos de un grafo de Cayley y en la sección 2.2 se caracterizan los subconjuntos minimales en términos de *repetitividad* [7, 14, 24].

En la sección 2.3, se introducen los *subgrafos aleatorios de grafos de Cayley* y se describen los subgrafos aleatorios obtenidos mediante *percolación*. Luego, en la sección 2.4, se da un ejemplo de grafo aleatorio repetitivo.

En las secciones 2.5 y 2.6 se desarrolla el concepto de *percolación de Bernoulli* [17, 26] y sus propiedades clásicas. La aplicación de la dicotomía descrita en este tipo de percolación se desarrolla en la sección 2.7. A continuación, en la sección 2.8, se aborda la aplicación de ese mismo resultado en una situación más general que corresponde a un caso particular de *percolación invariante* en el sentido de [12]. Por último, en la sección 2.9 se muestra como aplicar el mismo criterio a otro tipo de percolación denominada *percolación con decorados* [13, 27].

### 2.1. Espacio de Gromov-Hausdorff

Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S$  un sistema finito de generadores simétrico (i.e.  $S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\} = S$ ) y que no contiene al elemento neutro.

**Definición 2.1.1.** El *grafo de Cayley*  $\mathbb{G} = \text{Cay}(G, S)$  es un grafo localmente finito cuyos vértices son los elementos de  $G$  y dos vértices  $g_1$  y  $g_2$  están unidos por una arista si y solo si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . Identificando cada arista con su opuesta, se obtiene un grafo localmente finito no orientado sin bucles. Este grafo no tendrá tampoco aristas múltiples, salvo en el caso de que  $S$  contenga elementos de torsión de orden 2, en cuyo caso no se identificará la arista correspondiente con su opuesta.

Se llama *longitud* de un elemento  $g \in G$  al número mínimo de generadores de  $S$  necesarios para escribir  $g$  y se define la *distancia de las  $S$ -palabras* entre dos elementos  $g_1$  y  $g_2$  de  $G$  como

$$d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2).$$



Si se dota a cada arista de una métrica que la haga isométrica al intervalo  $[0, 1]$ , la métrica  $d_S$  sobre  $G$  se extiende a una métrica  $d_S$  sobre la realización geométrica de  $\mathbb{G}$  que hace de este un espacio métrico conexo por caminos. Se dice que  $d_S$  es la *métrica de las  $S$ -palabras* sobre  $\mathbb{G}$ . Esta métrica coincide con la métrica natural del grafo  $\mathbb{G}$ . También puede extenderse la acción natural por la derecha de  $G$  sobre sí mismo a una acción de  $G$  en  $\mathbb{G}$  por la izquierda que actúa como grupo de isometrías de manera libre y propiamente discontinua.

**Definición 2.1.2.** Se define el *espacio de Gromov-Hausdorff*  $\mathcal{G}$  del grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  como el espacio formado por los subgrafos conexos de  $\mathbb{G}$  que contienen al elemento neutro.

Este espacio está dotado de una distancia que hace que dos grafos sean más cercanos cuanto mayor sea la bola centrada en el origen en la que coinciden. Más precisamente, dados  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{H}' \in \mathcal{G}$  se define una aplicación con valores en  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  dada por

$$R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = \sup\{N \geq 0 \mid B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, N) = B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, N)\}$$

y una distancia dada por

$$d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = e^{-R(\mathbb{H}, \mathbb{H}')}.$$

De hecho,  $d$  es una *ultramétrica*, i.e.,

$$d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') \leq \max\{d(\mathbb{H}, \mathbb{H}''), d(\mathbb{H}', \mathbb{H}'')\}$$

para cada  $\mathbb{H}, \mathbb{H}', \mathbb{H}'' \in \mathcal{G}$ . Gracias a la desigualdad ultramétrica todas las bolas son abiertos-cerrados. Y en cada bola cualquiera de sus puntos puede considerarse como el centro. Por otro lado, como solo existe una cantidad numerable de bolas diferentes el espacio  $\mathcal{G}$  es 2-numerable y separable. Además el conjunto de los grafos infinitos de  $\mathcal{G}$  es homeomorfo al conjunto de Cantor, salvo si  $G = \mathbb{Z}$ , ver [1].

**Proposición 2.1.3.** *El espacio  $\mathcal{G}$  es compacto.*

*Demostración.* Sea  $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{G}$ . Como el sistema de generadores  $S$  es finito, solo hay una cantidad finita de grafos de diámetro 2. Por tanto puede tomarse una subsucesión  $\{\mathbb{H}_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de manera que  $B_{\mathbb{H}_{1,n}}(\mathbf{1}, 1) = \mathbb{A}_1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , siendo  $\mathbb{A}_1 \in \mathcal{G}$  de diámetro 2. Ahora, repitiendo el procedimiento anterior, si  $\{\mathbb{H}_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión de  $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de manera que  $B_{\mathbb{H}_{k,n}}(\mathbf{1}, k) = \mathbb{A}_k$  es un grafo en  $\mathcal{G}$  de diámetro  $2k$ , entonces se obtiene una subsucesión  $\{\mathbb{H}_{k+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{\mathbb{H}_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $B_{\mathbb{H}_{k+1,n}}(\mathbf{1}, k+1) = \mathbb{A}_{k+1}$  es un grafo en  $\mathcal{G}$  de diámetro  $2(k+1)$  que contiene a  $\mathbb{A}_k$ . De esta manera se tiene una sucesión creciente de grafos finitos

$$\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2 \subset \dots \subset \mathbb{A}_k \subset \dots$$

Por construcción, la unión creciente de los grafos finitos  $\mathbb{A}_k$  define un grafo  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  que es límite de la sucesión diagonal  $\{\mathbb{H}_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . En efecto, la función  $R(\mathbb{H}_{k,k}, \mathbb{H}) \geq k$  y por consiguiente la distancia  $d(\mathbb{H}_{k,k}, \mathbb{H}) \leq e^{-k}$  tiende a 0.  $\square$

Como todo espacio compacto Hausdorff,  $\mathcal{G}$  es localmente compacto. Además, al ser compacto, dotado de la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos, es un espacio boreliano estándar.

El espacio  $\mathcal{G}$  está dotado de una relación de equivalencia boreliana discreta  $\mathcal{R}$  que consiste en cambiar el punto base:

$$\mathcal{R} = \{(\mathbb{H}, \mathbb{H}') \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \exists g \in G: \mathbb{H}' = \mathbb{H}g^{-1}\}.$$

## 2.2. Dinámica del espacio de Gromov-Hausdorff

El espacio de Gromov-Hausdorff  $\mathcal{G}$  del grafo  $\text{Cay}(G, S)$  se puede obtener como cociente del espacio

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{(\mathbb{H}, g) \mid g \in \mathbb{H} \subset \mathbb{G}\},$$

dotado de la pseudométrica

$$\tilde{d}((\mathbb{H}, g), (\mathbb{H}', g')) = e^{-\tilde{R}((\mathbb{H}, g), (\mathbb{H}', g'))},$$

donde

$$\tilde{R}((\mathbb{H}, g), (\mathbb{H}', g')) = \sup\{N \geq 1 \mid \exists g'' \in G : B_{\mathbb{H}}(g, N) = B_{\mathbb{H}'g''}(g'g'', N)\},$$

y la bola  $B_{\mathbb{H}'g''}(g'g'', N) = B_{\mathbb{H}'}(g', N)g''$  es la imagen de  $B_{\mathbb{H}'}(g', N)$  mediante la traslación por  $g'' \in G$ . Obsérvese que la acción por la izquierda de  $G$  sobre  $\mathbb{G}$  induce una acción por la izquierda

$$\begin{aligned} G \times \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \\ (g'', (\mathbb{H}', g')) &\longmapsto (\mathbb{H}'g''^{-1}, g'g''^{-1}) \end{aligned}$$

que conserva la pseudométrica  $\tilde{d}$ . Resulta claro que la órbita de  $(\mathbb{H}, g)$  coincide con el conjunto de elementos de  $\tilde{\mathcal{G}}$  que están a distancia 0 de  $(\mathbb{H}, g)$  y por consiguiente la proyección canónica

$$\begin{aligned} p: \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (\mathbb{H}, g) &\longmapsto \mathbb{H}g^{-1} \end{aligned}$$

pasa al cociente en una isometría

$$\begin{aligned} G \backslash \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ [\mathbb{H}, g] &\longmapsto \mathbb{H}g^{-1} \end{aligned}$$

cuando se dota a  $G \backslash \tilde{\mathcal{G}}$  de la métrica inducida por  $\tilde{d}$  y a  $\mathcal{G}$  de la métrica definida con anterioridad.

**Definición 2.2.1.** Sea  $\tilde{\mathcal{R}}$  la relación de equivalencia definida sobre  $\tilde{\mathcal{G}}$  que consiste en cambiar el punto base sustituyendo  $(\mathbb{H}, g)$  por  $(\mathbb{H}, g')$ . Se llama relación de cambio de punto base a la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{G}$  inducida por  $\tilde{\mathcal{R}}$  y dada por

$$\mathbb{H}\mathcal{R}\mathbb{H}' \Leftrightarrow \exists g \in \mathbb{H} : \mathbb{H}' = \mathbb{H}g^{-1}.$$

En efecto

$$\mathcal{R}[\mathbb{H}] = p(\tilde{\mathcal{R}}[(\mathbb{H}, \mathbf{1})]) = p(\{(\mathbb{H}, g) \mid g \in \mathbb{H}\}) = \{\mathbb{H}g^{-1} \mid g \in \mathbb{H}\}.$$

Esta relación de equivalencia también puede verse como la relación de equivalencia orbital definida por la acción de un pseudogrupo de homeomorfismos  $\Gamma$  generado por  $\tau_g : \mathbb{H} \in \text{dom}(\tau_g) \rightarrow \mathbb{H}g^{-1} \in \text{im}(\tau_g)$  con  $g \in S$  donde  $\text{dom}(\tau_g)$  es el conjunto abierto de todos los grafos  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  que contienen a  $g$  y  $\text{im}(\tau_g)$  es el conjunto abierto de todos los grafos  $\mathbb{H}' = \mathbb{H}g^{-1}$ .

**Proposición 2.2.2.**  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia étale 2-numerable.

*Demostración.* Gracias a que el grupo  $G$  es finitamente generado la familia de homeomorfismos  $\{\tau_g\}_{g \in G}$  es finita. De manera que  $\Gamma$  es un pseudogrupo finitamente generado, con lo que usando la proposición 1.2.10 se prueba que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia étale 2-numerable.  $\square$

Cada órbita  $\mathcal{R}[\mathbb{H}]$  tiene una estructura de grafo determinada por la elección del conjunto de generadores  $S$ . En efecto, dos grafos  $\mathbb{H}'$  y  $\mathbb{H}''$  estarán unidos por una arista cuando exista un generador  $s \in S$  tal que  $\tau_s(\mathbb{H}') = \mathbb{H}''$ . De forma que se deduce que  $\mathcal{R}[\mathbb{H}] \cong Iso(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}$  donde  $Iso(\mathbb{H}) = \{g \in G \mid \mathbb{H} = \mathbb{H}g^{-1}\}$  es el *grupo de isotropía* de  $\mathbb{H}$ . Esta estructura se trabajará más detalladamente en la sección 4.4.

**Definición 2.2.3.** Se llama *envoltura*  $\Omega(\mathbb{H})$  de un grafo  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  a la clausura de la clase  $\mathcal{R}[\mathbb{H}]$ . Por definición  $\Omega(\mathbb{H}) = \overline{\mathcal{R}[\mathbb{H}]}$  es un cerrado saturado por  $\mathcal{R}$ .

Según [7] y [24] la minimalidad de  $\Omega(\mathbb{H})$  equivale al carácter repetitivo de  $\mathbb{H}$ . Intuitivamente, un grafo es *repetitivo* (o tiene la *propiedad de isomorfismo local*) si uno no puede distinguir en qué punto se encuentra observando únicamente un entorno.

**Definición 2.2.4.** Dados  $\mathbb{H}, \mathbb{H}' \in \mathcal{G}$ , se dice que  $B_{\mathbb{H}}(x, r)$  *se embebe fielmente* en  $B_{\mathbb{H}'}(x, R)$ , y se escribe  $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(x, R)$ , si existe  $g \in \mathbb{G}$  verificando que  $B_{\mathbb{H}}(x, r)g = B_{\mathbb{H}'}(xg, r) \subset B_{\mathbb{H}'}(x, R)$ .

**Definición 2.2.5.** Un grafo  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  es *repetitivo* si para cada  $r > 0$  existe  $R > 0$  tal que  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$  para todo  $y \in \mathbb{H}$ . Si fijado  $r > 0$ , existe  $R > 0$  tal que  $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$  para cada par de puntos  $x$  e  $y \in \mathbb{H}$ , entonces  $\mathbb{H}$  se dice *uniformemente repetitivo*.

Por tanto un grafo será repetitivo cuando se pueda encontrar cualquier bola  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r)$  cerca de cualquier punto. Esta propiedad carece de interés en los grafos finitos ya que cualquier grafo finito es trivialmente repetitivo.

**Teorema 2.2.6** ([7, 24]). *Sea  $\Omega(\mathbb{H})$  la envoltura de un elemento  $\mathbb{H}$  de  $\mathcal{G}$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i)  $\mathbb{H}$  es uniformemente repetitivo.
- (ii)  $\mathbb{H}$  es repetitivo.
- (iii)  $\Omega(\mathbb{H})$  es minimal para la inclusión de envolturas.

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Esta implicación es obvia.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Para demostrar que  $\Omega(\mathbb{H})$  es minimal, se ha de comprobar que la clase de equivalencia de cualquier elemento  $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$  es densa en  $\Omega(\mathbb{H})$ . Por una parte, se sabe que  $\Omega(\mathbb{H}') \subset \Omega(\mathbb{H})$ . Luego basta probar que  $\mathbb{H} \in \Omega(\mathbb{H}')$ , en cuyo caso  $\Omega(\mathbb{H}) \subset \Omega(\mathbb{H}')$ . Para ello, se fija  $r > 0$ . Por ser  $\mathbb{H}$  repetitivo, existe  $R \geq r$  tal que  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$  para todo  $y \in \mathbb{H}$ . Puesto que  $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$ , existe algún elemento  $x \in \mathbb{H}$  tal que

$$B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R) = B_{\mathbb{H}x^{-1}}(\mathbf{1}, R) = B_{\mathbb{H}}(x, R)x^{-1}.$$

Por otra parte, si se toma  $y = x$ , la bola  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(x, R)$  por hipótesis. En consecuencia,

$$B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r)gx^{-1} = B_{\mathbb{H}}(g, r)x^{-1} \subset B_{\mathbb{H}}(x, R)x^{-1} = B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R)$$

para algún  $g \in \mathbb{G}$ . Si se llama  $h = gx^{-1}$ , entonces

$$B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) = B_{\mathbb{H}'}(h, r)h^{-1} = B_{\mathbb{H}'h^{-1}}(\mathbf{1}, r)$$

y por tanto  $d(\mathbb{H}, \mathbb{H}'h^{-1}) < e^{-r}$ . Puesto que  $\mathbb{H}$  es límite de trasladados de  $\mathbb{H}'$ , se concluye que  $\mathbb{H} \in \Omega(\mathbb{H}')$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Fijado  $r > 0$ , a cada entero  $S > 0$ , se le asocia el conjunto abierto

$$U_S = \{\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H}) \mid B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, S)\}.$$

Además recubren  $\Omega(\mathbb{H})$ : Para cada elemento  $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$ , como  $\Omega(\mathbb{H})$  es minimal, existe  $x' \in \mathbb{H}'$  tal que  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) = B_{\mathbb{H}'}(x', r)x'^{-1}$ , luego

$$B_{\mathbb{H}'}(x', r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, S)$$

para  $S \geq r + d(\mathbf{1}, x')$ . Por lo tanto  $\mathbb{H}' \in U_S$ . Por otra parte, es obvio que  $\{U_S\}_{S>0}$  es monótona creciente con respecto a la inclusión. Por ser  $\Omega(\mathbb{H})$  compacto, existe  $R > 0$  tal que  $\Omega(\mathbb{H}) = U_R$ . Para cada  $y \in \mathbb{H}$ , el árbol trasladado  $y^{-1}\mathbb{H}$  pertenece a  $U_R$ , luego  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{y^{-1}\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R)$ , con lo que se concluye que  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Se fija  $r > 0$  y se considera un punto arbitrario  $x \in \mathbb{H}$ . Como antes, para cada entero  $S > 0$ , se define el conjunto

$$U_S^x = \{\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H}) \mid B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, S)\}$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, se deduce que existe un radio  $R(r, x)$  tal que  $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$  para todo  $y \in \mathbb{H}$ . No obstante, para poder afirmar que  $\mathbb{H}$  sea uniformemente repetitivo,  $R$  no debe depender del punto  $x$ . En efecto, como solo hay un número finito de clases de traslación de bolas  $B_{\mathbb{H}}(x, r)$  de radio  $r > 0$ , existe una familia finita de puntos  $\{x_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{H}$  tales que las bolas  $B_{\mathbb{H}}(x_i, r)$  representan todas las clases de traslación posibles. Si se toma  $R = \max\{R(r, x_i)\}_{i=1}^n$ , se tiene que  $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R)$  para cada par  $x, y \in \mathbb{H}$ .  $\square$

**Corolario 2.2.7.** *Si  $\Omega(\mathbb{H})$  es la envoltura de un elemento repetitivo  $\mathbb{H}$  de  $\mathcal{G}$ , entonces todos los elementos de  $\Omega(\mathbb{H})$  son repetitivos.*

*Demostración.* Si  $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$ , entonces  $\Omega(\mathbb{H}') \subset \Omega(\mathbb{H})$ . Por minimalidad, se deduce que  $\Omega(\mathbb{H}') = \Omega(\mathbb{H})$ , luego  $\mathbb{H}'$  es repetitivo.  $\square$

## 2.3. Subgrafos aleatorios de grafos de Cayley

**Definición 2.3.1.** Se denomina *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley* a una variable aleatoria cuyo espacio de estados es el espacio de Gromov-Hausdorff  $\mathcal{G}$ , es decir, una aplicación medible

$$\Theta: (X, \mu) \rightarrow \mathcal{G}$$

definida sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  con valores en  $\mathcal{G}$  y cuya distribución o ley se denotará por  $\mathbb{P} = \Theta_*(\mu)$

Una manera usual de construir subgrafos aleatorios de un grafo de Cayley consiste en tomar como espacio de configuración el espacio  $\Omega = \{0, 1\}^E$  donde  $E$  es el *conjunto de aristas* de  $G$ , es decir, el espacio de los coloreados en blanco y negro de las aristas de  $\mathbb{G}$ . Estos coloreados pueden verse también como funciones características de subconjuntos de  $E$ . Se dota a  $\Omega$  de la topología producto, de modo que la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos está generada por los cilindros.

$$C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

con  $e_i \in E$  y  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ . Dado un coloreado  $\omega \in \Omega$ , se dice que una arista  $e \in E$  está *abierta* si  $\omega(e) = 1$  y *cerrada* si  $\omega(e) = 0$ . Se denota  $E \in \Omega$  al coloreado con todas las aristas abiertas y  $\emptyset$  al coloreado con todas las aristas cerradas.

**Definición 2.3.2.** Se llama *proceso de percolación* en un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  a una medida de probabilidad  $P$  sobre el espacio de coloreados  $\Omega$ .

A cada coloreado  $\omega \in \Omega$ , se le asocia un subgrafo  $\mathbb{G}(\omega)$  de  $\mathbb{G}$  cuyo conjunto de vértices coincide con  $G$  y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de  $\omega$ , es decir,  $1_{\mathbb{G}(\omega)} = \omega$ . El grafo  $\mathbb{G}(\omega)$  no es necesariamente conexo y se llama *clúster* a cada una de sus componentes conexas.

**Definición 2.3.3.** Para cada  $g \in G$ , se denota  $C_g(\omega)$  al clúster de  $\mathbb{G}(\omega)$  que contiene a  $g$ . Se llama *aplicación clúster* a la aplicación

$$C: \Omega \rightarrow \mathcal{G}$$

que asocia a cada coloreado  $\omega \in \Omega$  el clúster  $C_1(\omega)$  del elemento neutro  $\mathbf{1} \in \mathbb{G}$ .

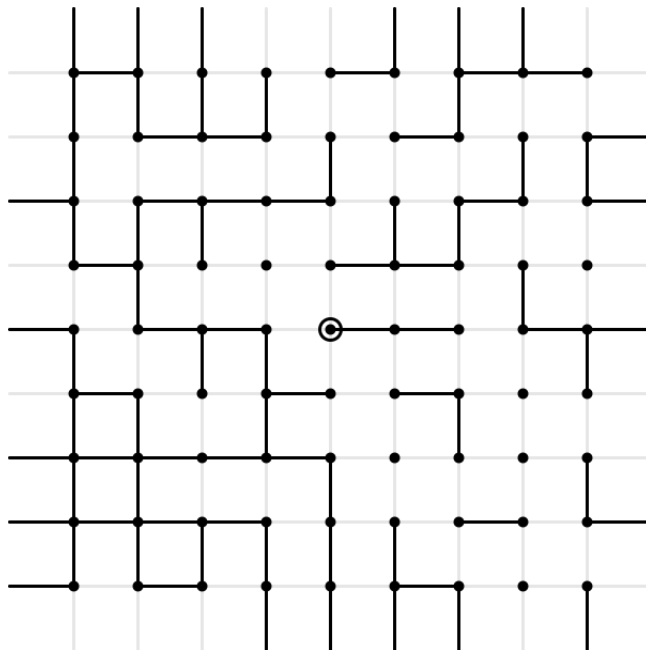


Figura 2.3.1: Coloreado de un proceso de percolación en el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  con sistema de generadores  $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$ . El punto  $\odot$  denota al elemento neutro  $(0, 0)$ .

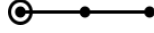


Figura 2.3.2: Clúster  $C_1(\omega)$  del coloreado de la figura 2.3.1

Para comprobar que  $C$  define un subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$  basta probar que es medible. Pero de hecho se tiene el siguiente resultado:

**Lema 2.3.4.** *La aplicación clúster es continua.*

*Demostración.* Para cualquier abierto básico  $B_{\mathcal{G}}(\mathbb{H}, e^{-r})$  de  $\mathcal{G}$

$$C^{-1}(B_{\mathcal{G}}(\mathbb{H}, e^{-r})) = C_{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m},$$

donde  $\alpha_0, \dots, \alpha_n = 1$ ,  $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m = 0$  y  $e_0, \dots, e_n \in E$  son las aristas pertenecientes a la bola  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r)$  y  $e_{n+1}, \dots, e_m \in E$  son las aristas de  $\mathbb{G}$  que no se encuentran en  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r)$  y que tienen algún extremo en un vértice de  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, r - 1)$  si  $r \geq 1$ , ya que en caso contrario  $m = n = 1$ . Luego  $C$  es continua, ya que los cilindros son abiertos en  $\Omega$ .  $\square$

**Definición 2.3.5.** Un *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  definido por un proceso de percolación* es una variable aleatoria de la forma

$$C: (\Omega, P) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P})$$

cuya ley viene dada por  $\mathbb{P} = C_*(P)$ .

Una importante propiedad (introducida por Lyons y Schramm en [27]) con la que se suele trabajar en los subgrafos aleatorios obtenidos mediante percolación es la *tolerancia a la inserción*. Esta consiste en que añadir una arista a los elementos de un suceso de medida positiva cualquiera nunca origine un suceso de medida nula.

**Definición 2.3.6.** Se define la *aplicación de inserción* de una arista  $e \in E$  como la aplicación  $i_e: \Omega \rightarrow \Omega$  definida por

$$i_e(\omega)(e') = \begin{cases} 1, & \text{si } e' = e, \\ \omega(e'), & \text{si } e' \neq e. \end{cases}$$

**Definición 2.3.7.** Se dice que la medida  $P$  es *tolerante a la inserción* si para cada arista  $e \in E$  y todo conjunto boreliano  $B \subset \Omega$  con  $P(B) > 0$  se tiene que

$$P(i_e(B)) > 0.$$

La acción de  $G$  sobre  $\mathbb{G}$  induce una acción natural de  $G$  sobre  $\Omega$  por la izquierda definida por

$$(\omega g)(e) = \omega(g^{-1}e), \tag{2.3.1}$$

para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $g \in G$  y  $e \in E$ . Al hacer actuar el elemento  $g \in G$  sobre un coloreado  $\omega$ , se está trasladando su punto base al elemento  $g$ . De esta forma, cuando  $g \in G$  actúa sobre  $\omega \in \Omega$  se está cambiando el punto base a  $g$ .



Por el lema 2.3.8, como  $\omega' = \omega g^{-1}$ , el clúster  $C_1(\omega) = C_g(\omega) = C_g(\omega'g)$  es igual a  $C_1(\omega')g$ . Por lo tanto, la aplicación  $C$  es compatible con las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}_{cl}$  sobre  $\Omega$  y  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{G}$ .

Para estar en las hipótesis del corolario 1.3.2 del lema fundamental tan solo queda considerar una medida adecuada. Recordar que el conjunto de aristas  $E$  también denota al coloreado de  $\Omega$  con todas las aristas abiertas.

**Teorema 2.3.10.** *Sea  $P$  una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ . Si  $P$  es ergódica casi-invariante respecto de  $\mathcal{R}_{cl}$  y tolerante a la inserción, entonces todo conjunto cerrado  $\mathcal{R}_{cl}$ -minimal  $Z \subset \Omega$  verifica que, o bien  $Z = \{E\}$ , o bien  $P(Z) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de conjuntos de aristas crecientes que alcanza todas las aristas de  $E$ . Se define la aplicación  $i_{F_n}$  como la aplicación resultante de componer todas las  $i_e$  con  $e \in F_n$ . Gracias a la tolerancia a la inserción puede encontrarse una base de entornos  $i_{F_n}(\Omega)$  de  $E$  formada por conjuntos de medida positiva, por lo que  $E$  es un elemento del soporte de  $P$ . Como  $E$  es un punto fijo de la acción de  $G$  se tiene que  $\mathcal{R}_{cl}[E] = \{E\}$ . Aplicando el corolario 1.3.2 del lema fundamental al espacio  $X = \Omega$  dotado de las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{cl} \subset \mathcal{L} = \mathcal{R}_{cl}$  y el punto  $x = E$  se prueba el resultado.  $\square$

En la sección 2.5 se construirá una medida particular verificando las hipótesis de este teorema.

Adaptando la tolerancia a la inserción al espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley se puede dar un resultado similar en dicho contexto.

**Definición 2.3.11.** Se define la *aplicación de inserción* de una arista  $e \in E$  como la aplicación  $i_e: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  definida por  $i_e(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$  donde  $\mathbb{H}'$  es el subgrafo de  $\mathbb{G}$  resultante de añadir la arista  $e$  al grafo  $\mathbb{H}$ .

**Definición 2.3.12.** Se dice que la medida de  $\mathbb{P}$  es *tolerante a la inserción* si para cada arista  $e \in E$  y para todo conjunto boreliano  $B \subset \mathcal{G}$  con  $\mathbb{P}(B) > 0$  se tiene que

$$\mathbb{P}(i_e(B)) > 0.$$

**Teorema 2.3.13.** *Dado un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  con ley  $\mathbb{P}$  casi-invariante, ergódica y tolerante a la inserción, entonces la envoltura de cualquier subgrafo repetitivo propio (i.e. distinto del total)  $\mathbb{H}$  de  $\mathbb{G}$  es de medida nula respecto de la ley  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema 2.3.10 pero aplicando el corolario 1.3.2 del lema fundamental al espacio  $X = \mathcal{G}$  dotado de las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} = \mathcal{R}$  y el punto  $x = \mathbb{G}$ .  $\square$

## 2.4. Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon

Para aclarar el concepto de grafo repetitivo en esta sección se describirá un ejemplo clásico de subgrafo aleatorio cuyos estados verifican dicha propiedad, el llamado *árbol aleatorio de Ghys-Kenyon*.

Para construir este espacio se considera el grupo  $\mathbb{Z}^2$  con el conjunto de generadores  $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$  y se describe un subárbol aperiódico y repetitivo de  $\mathbb{G} = \text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$ ,



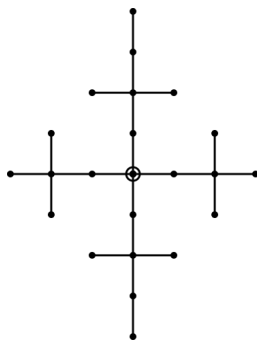
## 2. Grafos aleatorios repetitivos y tolerancia a la inserción

---

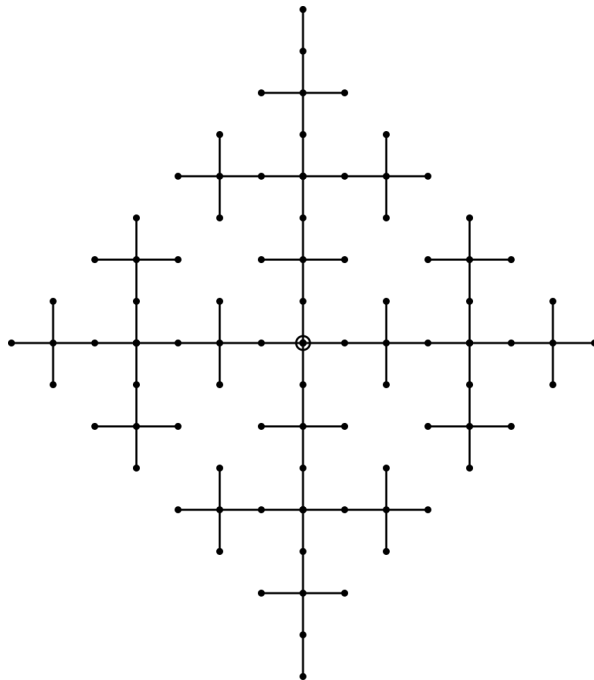
llamado *árbol de Kenyon*. Su envoltura es el *conjunto minimal de Ghys-Kenyon*. Para construirlo, se comienza con la siguiente pieza elemental  $\mathbb{T}_1$ , donde el punto  $\odot$  indica el elemento neutro  $(0, 0)$ :



Después se traslada verticalmente por medio del vector  $(0, 2)$  y seguidamente se le aplican tres rotaciones de centro 0 y ángulo  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $-\frac{\pi}{2}$  respectivamente. Si se eliminan las aristas terminales situadas a izquierda y derecha del segmento horizontal de longitud  $2^3$  contenido en el árbol resultante, se obtiene el árbol  $\mathbb{T}_2$ .



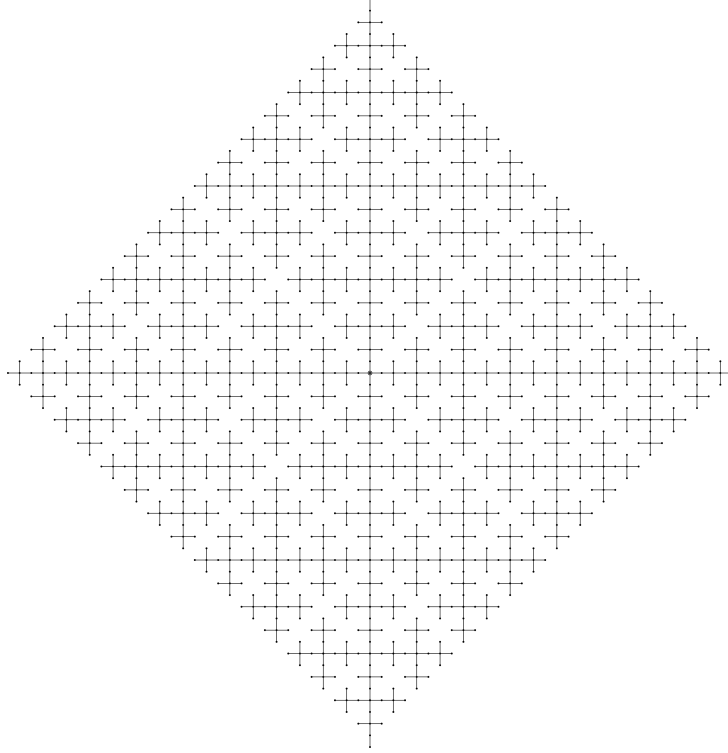
De nuevo, si se traslada  $\mathbb{T}_2$  mediante el vector  $(0, 4)$ , se aplican las mismas rotaciones y se eliminan las aristas terminales del segmento horizontal de longitud  $2^4$ , se obtiene un árbol  $\mathbb{T}_3$ .



Por recurrencia en la etapa  $n$ -ésima, se obtiene un árbol finito  $\mathbb{T}_n$  que corta a los ejes vertical y horizontal en los intervalos  $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$  y  $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$  respectivamente.

**Definición 2.4.1.** Se llama *árbol de Kenyon* al subárbol de  $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$

$$\mathbb{T}_\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{T}_n.$$



El árbol  $\mathbb{T}_\infty$  es aperiódico y repetitivo con cuatro finales [14, 24].

**Definición 2.4.2.** La envoltura  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty} = \overline{\mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty]}$  de  $\mathbb{T}_\infty$  es el *minimal de Ghys-Kenyon*.

Para describir los árboles aleatorios que conforman  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  se puede emplear una codificación simbólica descrita en [1]. Se denota  $\mathcal{S}_4$  el conjunto de las sucesiones formadas por elementos de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Dado que  $\mathcal{S}_4 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  puede dotarse de la topología producto de la topología discreta sobre  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , dicha topología está generada por los cilindros

$$C_{i_0 \dots i_n}^{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \{\beta_0 \cdots \beta_{i_0-1} \alpha_0 \beta_{i_0+1} \cdots \beta_{i_n-1} \alpha_n \beta_{i_n+1} \cdots \mid \beta_i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$$

Para asociarle a cada elemento de  $\mathcal{S}_4$  un elemento de  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  se usa la función

$$r : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{\frac{\pi}{2}ix},$$

donde se identifica  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  de la manera usual. Para cada  $\alpha = \alpha_0 \cdots \alpha_n \cdots \in \mathcal{S}_4$  se define  $\Phi(\alpha) \subset \Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  de manera inductiva. Se parte del punto  $x_0^\alpha = 0$ , se define  $x_1^\alpha = r(\alpha_0)$  y se une  $x_0^\alpha$  con  $x_1^\alpha$  con ayuda de una arista. Se replica este conjunto alrededor de  $x_1^\alpha$  mediante los ángulos  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $-\frac{\pi}{2}$ . Se define  $\mathbb{T}_{\alpha_0}$  precisamente como este conjunto. Ahora se alarga  $\mathbb{T}_{\alpha_0}$  en la dirección de  $r(\alpha_1)$  mediante una arista de longitud 1, que une uno de los extremos de  $\mathbb{T}_{\alpha_0}$  con un nuevo punto  $x_2^\alpha$  a distancia 2 de  $x_1^\alpha$ . Se repite el proceso

de réplica alrededor de  $x_2^\alpha$  obteniendo así un árbol finito  $\mathbb{T}_{\alpha_0\alpha_1}$ . Reiterando este proceso, se obtiene una familia de árboles encajados  $\{\mathbb{T}_{\alpha_0\cdots\alpha_n}\}$  y se define

$$\mathbb{T}_\alpha = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{T}_{\alpha_0\cdots\alpha_n}.$$

Según puede verse en [1, 24], cualquier elemento de  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  que no pertenezca a la clase de  $\mathbb{T}_\infty$  y cuyo origen esté situado en un vértice de valencia 1 o 2 puede ser descrito de este modo de manera única. De manera más precisa, se tiene:

**Proposición 2.4.3** ([1]). *El conjunto minimal de Ghys-Kenyon  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty} = \overline{\mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty]}$  admite una descomposición como unión disjunta*

$$\Omega_{\mathbb{T}_\infty} = \mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[\mathbb{T}_\alpha].$$

Además, la relación de equivalencia inducida sobre  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty} - \mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty]$  coincide con la relación de equivalencia cofinal que identifica dos sucesiones  $\alpha = \alpha_0 \cdots \alpha_n \cdots$  y  $\beta = \beta_0 \cdots \beta_n \cdots$  de  $\mathcal{S}_4$  si existe  $n_0 \geq 0$  tal que  $\alpha_n = \beta_n$  para cada  $n \geq n_0$ .

Para interpretar  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  como un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley hay que dotarlo de una medida de probabilidad. De hecho puede construirse una medida de probabilidad  $\mathcal{R}$ -invariante usando *sucesiones de Følner* tal y como describen S. E. Goodman y J. F. Plante en [16]. El sistema de generadores  $S$  de  $G$  determina un sistema generador  $\Gamma_S = \{\tau_g \mid g \in S\}$  de  $\Gamma$  y se define el borde de  $B \subset \mathcal{G}$  como

$$\partial_{\Gamma_S} B = \{\mathbb{H} \in B \mid \exists g \in S, \mathbb{H}g^{-1} \notin B\}.$$

**Definición 2.4.4.** Una *sucesión de Følner* en  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  es una sucesión  $\{B_n\}$  de subconjuntos finitos de  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial_{\Gamma_S} B_n}{\#B_n} = 0.$$

Puesto que  $\mathbb{T}_\infty$  es un grafo aperiódico, se puede identificar  $\mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty]$  con el propio  $\mathbb{T}_\infty$ . De esta forma, se puede decir que los grafos finitos  $\mathbb{T}_n$  forman una sucesión de Følner. En efecto, los conjuntos  $B_n = \{\mathbb{T}_\infty g^{-1} \mid g \in \mathbb{T}_n\}$  identificados con  $\mathbb{T}_n$  verifican que  $\#\partial_{\Gamma_S}(B_n) = 4$  pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \#B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \#\mathbb{T}_n = \infty.$$

Según se demuestra en [16], tomando posiblemente una subsucesión, las medidas de probabilidad uniformes  $\mu_n$  definidas por los conjuntos finitos  $B_n$

$$\mu_n(B) = \frac{\#(B \cap B_n)}{\#B_n}$$

convergen débilmente a una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ . Esta medida es invariante por la acción de  $\Gamma$  y además su soporte está contenido en el conjunto límite de la sucesión  $B_n$  formado por los puntos límite de sucesiones  $\{\mathbb{H}_n\}$  con  $\mathbb{H}_n \in B_n$ . Por lo tanto:

**Proposición 2.4.5** ([1, 24]). *El minimal de Ghys-Kenyon  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$  posee una medida de probabilidad  $\mathcal{R}$ -invariante.*

En realidad, la medida  $\mu$  es el límite débil de la sucesión de medidas  $\mu_n$  y viene dada por:

$$\begin{aligned} \mu(B_{\Omega_{\mathbb{T}_\infty}}(\mathbb{H}, e^{-r})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(B_n \cap B_{\Omega_{\mathbb{T}_\infty}}(\mathbb{H}, e^{-r}))}{\#B_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{g \in B_n \mid B_{\mathbb{H}}(1, r)g^{-1} = B_{\mathbb{T}_\infty}(g, r)\}}{\#B_n}. \end{aligned}$$

De hecho, según se demuestra en [1, 24],  $\mu$  es  $\mathcal{R}$ -ergódica y es la única medida de probabilidad  $\mathcal{R}$ -invariante que admite  $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ . La inclusión  $\Theta$  de  $(\Omega_{\mathbb{T}_\infty}, \mu)$  en  $\mathcal{G}$  define un subárbol aleatorio del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  al que se denomina *árbol aleatorio de Ghys-Kenyon*, para el cual todos los estados son subárboles repetitivos.

## 2.5. Percolación de Bernoulli

Por otro lado, la percolación de Bernoulli [26] proporciona un ejemplo concreto, en el marco de la definición 2.3.5, de grafo aleatorio tolerante a la inserción. Se trata del proceso aleatorio que asigna a cada arista una probabilidad de permanencia  $p$  y una probabilidad de desaparición  $1 - p$ .

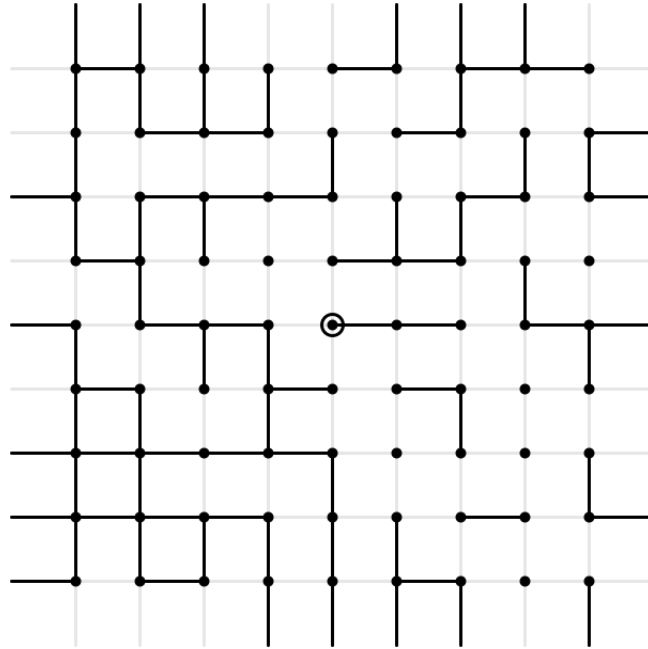


Figura 2.5.1: Percolación de Bernoulli con  $p = \frac{1}{2}$  en el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  con sistema de generadores  $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$ . El punto  $\odot$  denota al elemento neutro  $(0, 0)$ .

**Definición 2.5.1.** Se denomina *percolación de Bernoulli* con *parámetro de supervivencia*  $p$  al espacio de coloreados  $\Omega$  dotado de la medida  $P_p$  obtenida como producto de las medidas de Bernoulli sobre  $\{0, 1\}$  con pesos  $p$  y  $1 - p$  sobre 1 y 0. De modo equivalente, la medida  $P_p$  verifica

$$P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = p^m (1 - p)^{n-m},$$

siendo  $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

**Definición 2.5.2.** Un *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley*  $\mathbb{G}$  definido por un proceso de percolación de Bernoulli es una variable aleatoria de la forma

$$C: (\Omega, P_p) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P}_p)$$

cuya ley viene dada por  $\mathbb{P}_p = C_*(P_p)$ .

En general, se excluirán los casos  $p = 0$  y  $p = 1$ .

**Proposición 2.5.3.** Para cada  $p \in (0, 1)$ , la medida de percolación de Bernoulli  $P_p$  es tolerante a la inserción.

*Demostración.* Sea  $e \in E$  la arista a insertar. Para cualquier cilindro  $C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ , se tiene que:

$$P_p(i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = \begin{cases} P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}), & \text{si } e_i = e, \alpha_i = 1 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}, \\ pP_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}), & \text{si } e_i \neq e \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \frac{p}{1-p}P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}), & \text{si } e_i = e, \alpha_i = 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Luego, para cualquier boreliano  $B \subset \Omega$ , se tiene que:

$$P_p(i_e(B)) > mP_p(B) > 0,$$

donde  $m = \min\{1, p, \frac{p}{1-p}\} > 0$ . □

Como se ha visto en la ecuación 2.3.1, hay una acción natural por la izquierda de  $G$  sobre  $\Omega$  que viene dada por

$$(\omega g)(e) = \omega(g^{-1}e)$$

para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $g \in G$  y  $e \in E$ .

Para poder aplicar el teorema 2.3.10 se requiere también la  $\mathcal{R}$ -casi-invarianza de la medida. En realidad, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.5.4.** La medida de probabilidad  $P_p$  es  $G$ -invariante.

*Demostración.* Para cada  $g \in G$ , se tiene:

$$P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} g) = P_p(C_{e_1 g^{-1}, \dots, e_n g^{-1}}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = p^m (1-p)^{n-m} = P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}),$$

donde  $e_i \in E$ ,  $\alpha_i \in \{0, 1\}$  y  $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . □

Como  $\mathcal{R}_{cl}$  es una subrelación de  $\mathcal{R}_G$  la medida de percolación es también  $\mathcal{R}_{cl}$ -invariante.

**Proposición 2.5.5** ([26]). La medida de probabilidad  $P_p$  es ergódica respecto de la acción del grupo  $G$ .

*Demostración.* Para probar el resultado se comprueba que todo subconjunto boreliano saturado  $A \subset \Omega$  verifica  $P_p(A) = P_p(A)^2$  y en consecuencia  $P_p(A)$  debe ser igual a 0 o 1. Si  $B_1, B_2, D$  son subconjuntos borelianos de  $\Omega$ , entonces

$$|P_p(B_1 \cap D) - P_p(B_2 \cap D)| \leq P_p[(B_1 \cap D) \Delta (B_2 \cap D)] \leq P_p(B_1 \Delta B_2),$$

donde la diferencia simétrica  $\Delta$  viene dada por  $X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ .

Usando [23, Theorem 1.65], dado un subconjunto  $A$  boreliano saturado de  $\Omega$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe un boreliano  $C$  resultante de unir una cantidad finita de cilindros tal que

$$P_p(A \Delta C) < \varepsilon.$$

Sea  $g \in F$  tal que  $C$  y  $Cg$  son sucesos independientes, entonces

$$\begin{aligned} |P_p(A) - P_p(A)^2| &= |P_p(A \cap Ag) - P_p(A)^2| \\ &\leq |P_p(A \cap Ag) - P_p(C \cap Ag)| \\ &\quad + |P_p(C \cap Ag) - P_p(C \cap Cg)| \\ &\quad + |P_p(C \cap Cg) - P_p(C)^2| + |P_p(C)^2 - P_p(A)^2| \\ &\leq P_p(A \Delta C) + P_p(Ag \Delta Cg) \\ &\quad + |P_p(C)P_p(Cg) - P_p(C)^2| \\ &\quad + |P_p(C) - P_p(A)|(P_p(C) + P_p(A)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + 0 + 2\varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Desafortunadamente la  $G$ -ergodicidad no se traduce automáticamente en  $\mathcal{R}_{cl}$ -ergodicidad. En efecto, si  $\mathbb{H}$  es finito entonces  $A = C^{-1}(\mathcal{R}[\mathbb{H}])$  es un boreliano  $\mathcal{R}_{cl}$ -saturado que, gracias a la compatibilidad de  $C$  con  $\mathcal{R}_{cl}$  y  $\mathcal{R}$ , puede expresarse como una unión disjunta finita de cilindros con la que calcular la medida de  $A$ . La caracterización de la ergodicidad de la relación clúster  $\mathcal{R}_{cl}$  será precisada en la sección 2.7.

## 2.6. Transición de fase

Si se quiere prescindir de los clústeres finitos hay que garantizar que no constituyen un conjunto de medida total. Esto depende del parámetro de percolación  $p$ . Por ejemplo, si  $p = 0$ , todas las componentes son finitas y se reducen a un único vértice, mientras que si  $p = 1$ , solo hay una componente infinita. El problema de encontrar valores del parámetro de supervivencia que garanticen la existencia de componentes infinitas es un problema clásico de la teoría de percolación, ver [26]. Para estudiar como varía el proceso de percolación al aumentar  $p$  se hace uso del método de *standard coupling* [17], que engloba los diferentes procesos en uno solo, y la propiedad de la tolerancia a la inserción. El método de standard coupling consiste en sustituir el espacio de coloreados en blanco y negro  $\Omega = \{0, 1\}^E$  por el espacio  $X = [0, 1]^E$ , permitiendo colorear cada arista con toda la gama de grises.

**Definición 2.6.1.** Sea  $X = [0, 1]^E$  dotado de la medida  $\mu$  que se obtiene como producto de las medidas de Lebesgue sobre  $[0, 1]$ . Para cada  $p \in [0, 1]$  se llama *standard coupling* a la aplicación  $\eta_p: [0, 1]^E \rightarrow \{0, 1\}^E$  definida por

$$\eta_p(x)(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } x(e) \leq p, \\ 0, & \text{si } x(e) > p, \end{cases}$$

que verifica  $(\eta_p)_*(\mu) = P_p$

Esto permite comparar las distintas percolaciones de Bernoulli, ya que

$$\eta_{p_1}(x) \leq \eta_{p_2}(x)$$

si  $p_1 \leq p_2$ .

Para cada vértice  $g \in G$ , se define la función

$$\Theta_g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

por

$$\Theta_g(p) = P_p(\{\omega \in \Omega \mid C_g(\omega) \text{ es infinito}\}).$$

Gracias al standard coupling, es fácil ver que la función  $\Theta_g$  es monótona creciente. Por otra parte, la propiedad de tolerancia a la inserción garantiza que

$$\Theta_g(p) > 0 \iff \Theta_{g'}(p) > 0$$

para cualquier par de vértices  $g$  y  $g'$  de  $\mathbb{G}$ .

Se define la función  $\Theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  por

$$\Theta(p) = P_p(\{\omega \in \Omega \mid \exists C_g(\omega) \text{ infinito}\}).$$

Evidentemente

$$\Theta_g(p) \leq \Theta(p) \leq \sum_{g \in G} \Theta_g(p).$$

Con lo que se prueba que  $\Theta$  también es monótona creciente.

Como el suceso  $\{\omega \in \Omega \mid \exists C_g(\omega) \text{ infinito}\}$  es independiente de cualquier conjunto finito de aristas, se tiene que  $\Theta(p) = 0$  o  $\Theta(p) = 1$  según la ley 0-1 de Kolmogorov. Luego existe un valor crítico

$$p_c(\mathbb{G}) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \Theta(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid \Theta(p) = 1\}$$

que fija el paso de una fase subcrítica con  $p < p_c(\mathbb{G})$  en la que todos los clústeres son finitos de manera  $P_p$ -casi segura a una fase supercrítica con  $p > p_c(\mathbb{G})$  en la que existe al menos un clúster infinito de manera  $P_p$ -casi segura.

De esta forma, trabajando en la fase supercrítica, se puede caracterizar la  $\mathcal{R}_{cl}$ -ergodicidad de la medida en restricción al boreliano

$$\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid C_1(\omega) \text{ es infinito}\}.$$

**Lema 2.6.2.** *Si  $p > p_c(\mathbb{G})$ , entonces  $P_p(\Omega_\infty) > 0$ .*

*Demostración.* Si  $p > p_c(\mathbb{G})$ , entonces

$$P_p(\{\omega \in \Omega \mid \exists C_g(\omega) \text{ es infinito}\}) > 0.$$

Ahora bien, este evento se descompone como unión (numerable) de los trasladados  $\Omega_\infty g^{-1}$  por los elementos  $g \in G$ . Puesto que  $P_p$  es  $G$ -invariante

$$P_p(\Omega_\infty g^{-1}) = P_p(\Omega_\infty),$$

de donde se deduce que  $P_p(\Omega_\infty) > 0$ . □

En esta situación, puede dotarse a  $\Omega_\infty$  de la medida de probabilidad

$$P_p^\infty = \frac{1}{P_p(\Omega_\infty)} P_p$$

que sigue siendo tanto  $G$ -invariante como  $\mathcal{R}_{cl}$ -invariante. La aplicación continua

$$C: \Omega_\infty \rightarrow \mathcal{G}$$

es compatible con las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}_{cl}$  y  $\mathcal{R}$ . Si se dota a  $\Omega_\infty$  y  $\mathcal{G}$  de las medidas  $\mathcal{R}_{cl}$ -invariante  $P_p^\infty$  y  $\mathcal{R}$ -invariante  $\mathbb{P}_p^\infty = C_*(P_p^\infty)$ , se obtiene un grafo aleatorio

$$C: (\Omega_\infty, P_p^\infty) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P}_p^\infty)$$

con ley  $\mathcal{R}$ -invariante.

En caso de la unicidad de los clústeres infinitos descrita por Häggström y Peres [19] y Schonmann [30], la medida  $P_p^\infty$  es ergódica. En general, la ergodicidad de  $P_p^\infty$  es consecuencia de un teorema de R. Lyons y O. Schramm [27] que se recuerda a continuación.

## 2.7. Indistinguibilidad de los clústeres infinitos

R. Lyons y O. Schramm definieron el concepto de *indistinguibilidad* de un subgrafo aleatorio como medio para expresar el hecho de que los clústeres infinitos no pueden diferenciarse usando una propiedad invariante por la acción del grupo. Dicha propiedad puede reinterpretarse en términos de ergodicidad de la medida.

**Definición 2.7.1** ([27]). Sea  $\mathcal{P}(G)$  el conjunto de partes del conjunto de vértices  $G$  de  $\mathbb{G}$ . Se dice que un proceso de percolación de Bernoulli en fase supercrítica  $p > p_c(\mathbb{G})$  tiene *clústeres infinitos indistinguibles* si para cada boreliano  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(G) \times \Omega$  invariante por la acción diagonal de  $G$ , o bien el boreliano

$$\Omega_\infty^{\mathcal{A}} = \{\omega \in \Omega_\infty \mid (C, \omega) \in \mathcal{A} \text{ para cada clúster infinito } C \text{ de } \omega\},$$

o bien el boreliano

$$\Omega_\infty^{-\mathcal{A}} = \{\omega \in \Omega_\infty \mid (C, \omega) \notin \mathcal{A} \text{ para cada clúster infinito } C \text{ de } \omega\}$$

tiene medida total.

En un lenguaje menos formal, la indistinguibilidad afirma que de manera casi segura todos los clústeres infinitos de un coloreado son de tipo  $\mathcal{A}$  o todos son de tipo  $\neg\mathcal{A}$ . La siguiente proposición muestra justamente que de manera casi segura en ningún coloreado hay clústeres infinitos de “tipo  $\mathcal{A}$ ” y de “tipo  $\neg\mathcal{A}$ ” simultáneamente.

**Proposición 2.7.2.** *Un proceso de percolación de Bernoulli tal que  $P_p(\Omega_\infty) > 0$  tiene clústeres infinitos indistinguibles si y solo si*

$$P_p^\infty((\Omega_\infty - \Omega_\infty^{-\mathcal{A}}) \cap (\Omega_\infty - \Omega_\infty^{\mathcal{A}})) = 0,$$

para cualquier boreliano  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(V) \times \Omega$  invariante por la acción diagonal de  $G$ .



*Demostración.* Dado que  $(\Omega_\infty - \Omega_\infty^A) \cap (\Omega_\infty - \Omega_\infty^{\neg A}) = \Omega_\infty - (\Omega_\infty^A \cup \Omega_\infty^{\neg A})$ , la igualdad del enunciado equivale a

$$P_p^\infty(\Omega_\infty^A \cup \Omega_\infty^{\neg A}) = 1.$$

Pero de hecho, los conjuntos saturados  $\mathcal{R}_G[\Omega_\infty^A]$  y  $\mathcal{R}_G[\Omega_\infty^{\neg A}] \subset \Omega$  son disjuntos. Por tanto, usando la ergodicidad de  $P_p$  respecto de  $G$ , se llega a que al menos uno de los dos borelianos  $\Omega_\infty^A$  y  $\Omega_\infty^{\neg A}$  tiene que tener medida nula.  $\square$

Como puede verse a continuación, hablar de *indistinguibilidad de los clústeres infinitos* es en realidad hablar de la ergodicidad de la medida  $P_p^\infty$ :

**Proposición 2.7.3** ([13]). *Un proceso de percolación de Bernoulli en  $\mathbb{G}$  tal que  $P_p(\Omega_\infty) > 0$  tiene clústeres infinitos indistinguibles si y solo si la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_{cl}|_{\Omega_\infty}$  inducida por  $\mathcal{R}_{cl}$  en  $\Omega_\infty$  es ergódica.*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{R}_{cl}|_{\Omega_\infty}$  es ergódica. Como  $\Omega_\infty^A$  y  $\Omega_\infty^{\neg A}$  son conjuntos  $\mathcal{R}_{cl}|_{\Omega_\infty}$ -saturados disjuntos tenemos que o bien se verifica  $P_p^\infty(\Omega_\infty^A) = 1$ , o bien se verifica  $P_p^\infty(\Omega_\infty^{\neg A}) = 1$ . Recíprocamente, dado cualquier boreliano  $\mathcal{R}_{cl}|_{\Omega_\infty}$ -saturado  $B \subset \Omega_\infty$  se considera el boreliano

$$\mathcal{A} = \{(C, \omega) \in \mathcal{P}(V) \times B \mid C \text{ es un clúster infinito de } \omega\}.$$

Entonces  $\Omega_\infty^A = B$  y  $\Omega_\infty^{\neg A} = \Omega_\infty - B$ . Por hipótesis, se tiene que  $P_p^\infty(B) = 1$  o  $P_p^\infty(B) = 0$ .  $\square$

Con el siguiente teorema R. Lyons y O. Schramm demuestran la *indistinguibilidad de clústeres infinitos*, y gracias a ello se obtiene la ergodicidad de  $P_p^\infty$ .

**Teorema 2.7.4** ([27]). *Sea  $\mathbb{G}$  el grafo de Cayley de un grupo finitamente generado  $G$ . Cualquier proceso de percolación de Bernoulli  $C: (\Omega, P) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P})$  en la fase supercrítica  $p > p_c(\mathbb{G})$  tiene clústeres infinitos indistinguibles.*

En realidad, el teorema de indistinguibilidad sigue siendo válido en dos situaciones más generales, sobre percolación invariante y sobre grafos aleatorios unimodulares.

Bajo la hipótesis de ergodicidad puede enunciarse una versión del teorema 2.3.10 en el caso concreto de la percolación de Bernoulli:

**Teorema 2.7.5.** *Si se restringe la percolación de Bernoulli sobre el espacio  $\Omega$  con parámetro de supervivencia  $p > p_c$  al boreliano  $\Omega_\infty$  de los coloreados con clústeres infinitos, entonces todo conjunto cerrado  $\mathcal{R}_{cl}$ -minimal  $Z \subset \Omega_\infty$  verifica que, o bien  $Z = \{E\}$  o bien  $P_p^\infty(Z) = 0$ .*

**Corolario 2.7.6.** *Sea  $C: (\Omega, P_p^\infty) \rightarrow \mathcal{G}$  un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley con ley  $\mathbb{P} = C_*(P_p^\infty)$  obtenido mediante un proceso de percolación de Bernoulli restringido a los clústeres infinitos con  $p > p_c$ . Entonces la envoltura de cualquier subgrafo repetitivo propio  $\mathbb{H}$  de  $\mathbb{G}$  es de medida nula respecto de la ley  $\mathbb{P}$ .*

## 2.8. Percolación invariante

Buena parte de las propiedades de la percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley se extiende de manera total o parcial a un tipo de proceso más general, llamado *percolación invariante*.

Estos procesos vienen dados por un tipo particular de variables aleatorias con espacio de estados  $\Omega$ . Sea

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \varphi(g, x) = gx \end{aligned}$$

una acción boreliana sobre un espacio de probabilidad  $X$  que deja invariante una medida de probabilidad  $\mu$ . La acción  $\varphi$  se supondrá esencialmente libre, es decir, el boreliano formado por los puntos de  $x \in X$  con estabilizador no trivial es de medida nula. Sea  $\pi : X \rightarrow \Omega$  una aplicación boreliana  $G$ -equivariante, es decir  $\pi(gx) = \pi(x)g^{-1}$  para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$ . Dicha aplicación define la variable aleatoria

$$\pi : (X, \mu) \rightarrow (\Omega, P).$$

**Definición 2.8.1.** Se llama *proceso de percolación invariante* en un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  a una medida de probabilidad  $G$ -invariante  $P = \pi_*(\mu)$  sobre el espacio de coloreados  $\Omega$ .

La condición de que  $\varphi$  sea esencialmente libre se incluye por coherencia con la definición de *percolación  $G$ -invariante* dada por Gaboriau en [12]. Sin embargo todo lo descrito en esta sección es igualmente válido si se prescinde de dicha hipótesis.

Cualquier proceso de percolación  $G$ -invariante define un subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$  dado por

$$\Theta = C \circ \pi : (X, \mu) \xrightarrow{\pi} (\Omega, P) \xrightarrow{C} (\mathcal{G}, \mathbb{P})$$

con ley  $\mathbb{P} = C_*(P) = (C \circ \pi)_*(\mu)$ .

**Ejemplo 2.8.2.** Un primer ejemplo de percolación  $G$ -invariante es la percolación de Bernoulli, ya que basta tomar  $X = \Omega$ ,  $\mu = P_p$  y  $\pi = id_\Omega$ .

**Ejemplo 2.8.3.** Otro ejemplo de percolación  $G$ -invariante consiste en tomar  $X = \Omega$  y  $\pi = id_\Omega$ , pero considerando una medida  $\mu = P$  arbitraria (ver [27]).

Por definición, la aplicación  $\pi$  es compatible con las relaciones orbitales  $\mathcal{R}_G$  sobre  $X$  y  $\Omega$ . Recuérdese que la primera es una relación de equivalencia medible discreta sobre  $X$ , mientras que la segunda es una relación de equivalencia étale sobre  $\Omega$ . Ahora bien, al igual que ocurre con la percolación de Bernoulli, la composición  $C \circ \pi$  no es compatible con las relaciones  $\mathcal{R}_G$  sobre  $X$  y  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{G}$ , ya que  $C$  no lo es. De nuevo, para solucionar esto se reemplazará la relación de  $X$  por una más fina que sea compatible:

**Definición 2.8.4.** Se llama *relación de equivalencia clúster* a la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_{cl}$  sobre  $X$  definida del siguiente modo: dos puntos  $x, y \in X$  están  $\mathcal{R}_{cl}$ -relacionados si y solo si existe  $g \in \mathbb{G}$  tal que  $y = gx$  con  $g \in C_1(\pi(x))$ .

Para cualquier percolación  $G$ -invariante, se tiene que:

$$(\pi(x)g^{-1})(e) = \pi(x)(ge)$$

para cada  $x \in X$ ,  $g \in G$  y  $e \in E$ .

Luego, al igual que ocurría con la percolación de Bernoulli (lema 2.3.8) se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.8.5.** *La aplicación  $C \circ \pi$  es compatible con las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}_{cl}$  sobre  $X$  y  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{G}$ .*

*Demostración.* Si  $x$  e  $y$  están  $\mathcal{R}_{cl}$ -relacionados, existe  $g \in C_1(\pi(x))$  tal que  $y = gx$ . Luego

$$\pi(y) = \pi(x)g^{-1}.$$

Aplicando el lema 2.3.8, se deduce que el clúster  $C_1(\pi(x)g^{-1})g = C_g(\pi(x))$  coincide con el clúster  $C_1(\pi(y))g = C_g(\pi(y)g)$  de modo que los grafos  $C_1(\pi(x))$  y  $C_1(\pi(y))$  están  $\mathcal{R}$ -relacionados.  $\square$

Aunque se suponga que  $\mu$  es ergódica respecto de la acción de  $G$ , al igual que ocurre con la percolación de Bernoulli, no puede garantizarse la ergodicidad de la medida  $\mu$  de  $X$  respecto de la relación  $\mathcal{R}^{cl}$ . De nuevo, hay que restringirse al boreliano  $X_\infty = \{x \in X \mid C_1(\pi(x)) \text{ es infinito}\}$ , pero en este caso hay que suponer directamente que  $\mu(X_\infty) > 0$ . En tal caso, se dota a  $X_\infty$  de la medida de probabilidad normalizada

$$\mu^\infty = \frac{1}{\mu(X_\infty)}\mu|_{X_\infty}.$$

En este contexto, el concepto de indistinguibilidad de los clústeres infinitos se introduce de modo análogo:

**Definición 2.8.6.** Sea  $\mathcal{P}(G)$  el conjunto de partes del conjunto de vértices  $G$ . Se dirá que una medida de probabilidad  $G$ -invariante  $\mu$  definida sobre  $X$  tal que  $\mu(X_\infty) > 0$  tiene *clústeres infinitos indistinguibles* si para cada boreliano  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(V) \times X$  invariante por la acción diagonal de  $G$ , o bien el boreliano

$$X_\infty^{\mathcal{A}} = \{x \in X_\infty \mid (C, x) \in \mathcal{A} \text{ para cada clúster infinito } C \text{ de } \pi(x)\}$$

o el boreliano

$$X_\infty^{-\mathcal{A}} = \{x \in X_\infty \mid (C, x) \notin \mathcal{A} \text{ para cada clúster infinito } C \text{ de } \pi(x)\}$$

del espacio  $X_\infty$  tiene medida total.

Al igual que en la proposición 2.7.2, si la medida  $\mu$  es  $G$ -ergódica, la indistinguibilidad de los clústeres infinitos es equivalente a que

$$\mu^\infty((X_\infty - X_\infty^{\mathcal{A}}) \cap (X_\infty - X_\infty^{-\mathcal{A}})) = 0,$$

para cualquier boreliano  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(V) \times X$  invariante por la acción diagonal de  $G$ .

Y de nuevo, la indistinguibilidad de los clústeres infinitos garantiza la  $\mathcal{R}_{cl}$ -ergodicidad de la medida.

**Teorema 2.8.7.** *Una medida de probabilidad  $G$ -invariante  $\mu$  definida en  $X$  tal que  $\mu(X_\infty) > 0$  tiene clústeres infinitos indistinguibles si y solo si la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_{cl}|_{X_\infty}$  inducida por  $\mathcal{R}_{cl}$  sobre  $X_\infty$  es ergódica.*

*Demostración.* La prueba es similar a la de la proposición 2.7.3 y se incluye para facilitar la comprensión del lector. Supongamos primero que  $\mathcal{R}_{cl}|_{X_\infty}$  es ergódica. Como  $X_\infty^A$  y  $X_\infty^{-A}$  son conjuntos  $\mathcal{R}_{cl}|_{X_\infty}$ -saturados disjuntos, se tiene que o bien  $\mu^\infty(X_\infty^A) = 1$  o bien  $\mu^\infty(X_\infty^{-A}) = 1$ . Recíprocamente, dado cualquier boreliano  $\mathcal{R}_{cl}|_{X_\infty}$ -saturado  $B \subset X_\infty$  se considera el boreliano

$$\mathcal{A} = \{(C, x) \in \mathcal{P}(V) \times B \mid C \text{ es un clúster infinito de } \pi(x)\}$$

tal que  $X_\infty^{\mathcal{A}} = B$  y  $X_\infty^{-\mathcal{A}} = X_\infty - B$ . Por hipótesis, tenemos que  $\mu^\infty(B) = 1$  o  $\mu^\infty(B) = 0$ .  $\square$

Tanto este teorema, como la definición de clústeres infinitos indistinguibles, están enunciados sobre un espacio de probabilidad estándar  $X$  con medida  $G$ -invariante  $\mu$ . Luego, en particular, son aplicables al el espacio  $\Omega$  con una percolación  $G$ -invariante, donde se aplica la demostración del teorema de indistinguibilidad de R. Lyons y O. Schramm (teorema 2.7.4).

**Corolario 2.8.8** ([27]). *Sea  $P$  una medida de percolación  $G$ -invariante sobre un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  tal que  $P(\Omega_\infty) > 0$ . Si  $P$  es tolerante a la inserción entonces la medida  $P$  tiene clústeres infinitos indistinguibles, es decir, la relación  $\mathcal{R}_{cl}|_{\Omega_\infty}$  inducida por  $\mathcal{R}_{cl}$  sobre  $\Omega_\infty$  es ergódica.*

En esta situación más general, se puede enunciar una nueva versión del teorema 2.3.10 y el correspondiente corolario:

**Teorema 2.8.9.** *Dado  $P^\infty$  un proceso de percolación  $G$ -invariante y tolerante a la inserción restringido a los clústeres infinitos sobre el espacio de coloreados  $\Omega$  del grafo de Cayley  $\mathbb{G}$ , entonces todo conjunto cerrado  $\mathcal{R}_{cl}$ -minimal  $Z \subset \Omega$  verifica que, o bien  $Z = \{E\}$ , o bien  $P^\infty(Z) = 0$ .*

**Corolario 2.8.10.** *Sea  $C: (\Omega, P^\infty) \rightarrow \mathcal{G}$  un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  con ley  $\mathbb{P} = C_*(P^\infty)$  obtenido a partir un proceso de percolación  $G$ -invariante tolerante a la inserción restringido a los clústeres infinitos. Entonces, la envoltura de cualquier subgrafo repetitivo propio  $\mathbb{H}$  de  $\mathbb{G}$  es de medida nula respecto de la ley  $\mathbb{P}$ .*

## 2.9. Percolación con decorados

Una pregunta natural en este momento es como aplicar el lema fundamental 1.3.1 sobre un espacio de probabilidad estándar  $(X, \mu)$  con una medida  $G$ -invariante, como los usados para definir las percolaciones  $G$ -invariantes. Restringiéndo al contexto adecuado, se pueden expresar las hipótesis del lema en términos propios de la teoría de percolación empleando una vía similar a la usada en las secciones anteriores.

Que la tolerancia a la inserción garantice ergodicidad de la medida se consigue, como ya se ha mencionado previamente, por medio del teorema 2.7.4 de indistinguibilidad de clústeres infinitos. En la sección anterior se ha aplicado dicho teorema al espacio de decorados  $\Omega$  de un grafo de Cayley, pero no a un espacio arbitrario  $X$ . Afortunadamente R. Lyons y O. Schramm introducen en [27, Remark 3.4] un proceso más general al que se puede aplicar dicho teorema, véase también [13, Proposition 6]. Este proceso se denomina *percolación con decorados*.

Sea  $Y$  un espacio boreliano estándar dotado de una acción de  $G$ . De esta forma puede considerarse la acción diagonal de  $G$  sobre el espacio boreliano estándar  $X = \Omega \times Y$ , en efecto

$$\begin{aligned} G \times \Omega \times Y &\longrightarrow \Omega \times Y \\ (g, \omega, y) &\longmapsto (g\omega, gy). \end{aligned}$$

**Definición 2.9.1.** A una medida  $\mu$  de probabilidad definida sobre el espacio  $X = \Omega \times Y$  se le llama *percolación con decorados*. Se dirá también que  $\mu$  es un *proceso de percolación con decorados* definido en un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$ .

Sea  $\pi$  la proyección de  $\Omega \times Y$  sobre  $\Omega$ . Una percolación con decorado  $G$ -invariante define una percolación invariante a partir de la variable aleatoria

$$\pi: (\Omega \times Y, \mu) \rightarrow (\Omega, P),$$

mediante la ley  $P = \pi_*(\mu)$ .

**Ejemplo 2.9.2.** En [12], Gaboriau explica que toda percolación  $G$ -invariante puede obtenerse mediante un espacio con acción esencialmente libre.

Sea  $(X, \mu)$  un espacio de probabilidad con medida  $G$ -invariante e  $(Y, \nu)$  un espacio de probabilidad con medida  $G$ -invariante y acción de  $G$  esencialmente libre. Sean  $\pi_1$  y  $\pi_2$  la primera y segunda proyección del espacio producto  $X \times Y$ . La acción diagonal de  $G$  sobre  $(X \times Y, \mu \times \nu)$  es esencialmente libre. Efectivamente, el boreliano

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid g(x, y) = (x, y) \text{ para algún } g \in G\}$$

está contenido en

$$\pi_2^{-1}(\{y \in Y \mid gy = y \text{ para algún } g \in G\})$$

que tiene medida nula porque la acción de  $G$  sobre  $(Y, \nu)$  es esencialmente libre.

La medida  $\mu \times \nu$  se proyecta en  $\mu$ , es decir  $\pi_{1*}(\mu \times \nu) = \mu$ . De esta forma la percolación  $G$ -invariante obtenida mediante  $\pi: (X, \mu) \rightarrow (\Omega, P)$  se obtiene también mediante  $\pi \circ \pi_1: (X \times Y, \mu \times \nu) \rightarrow (\Omega, P)$ .

Siguiendo esta idea puede convertirse una percolación  $G$ -invariante general como la presentada en el ejemplo 2.8.3 en una percolación  $G$ -invariante respecto de una acción esencialmente libre.

Si se tiene el espacio  $\Omega$  con una medida de probabilidad  $G$ -invariante cualquiera  $P$ , puede multiplicarse por el espacio  $\Omega$  dotado de una medida de percolación de Bernoulli  $P_p$ ,  $p \in (0, 1)$ , con lo que se obtiene así una percolación con decorados  $(\Omega \times \Omega, P \times P_p)$ . Las percolaciones de Bernoulli son esencialmente libres de manera que la acción diagonal de  $G$  sobre  $(\Omega \times \Omega, P \times P_p)$  también lo es. La aplicación equivariante original es la identidad  $id_\Omega: \Omega \rightarrow \Omega$ , mientras ahora lo es la primera proyección  $\pi_1: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ . En cualquier caso, la percolación  $G$ -invariante obtenida es la misma  $\pi_{1*}(P \times P_p) = P$ .

Tanto la construcción de la *relación clúster*  $\mathcal{R}_{cl}$ , como la *indistinguibilidad de los clústeres infinitos* y el teorema 2.8.7 (que caracteriza la  $R_{cl}$ -ergodicidad de la medida) se han formulado en el contexto general de un espacio de probabilidad estándar  $X$  con medida  $G$ -invariante. Luego son aplicables al espacio  $X = \Omega \times Y$  dotado de una percolación con decorados  $G$ -invariante  $\mu$ .

El corolario 2.8.8 también es válido para la percolación con decorados, pero antes hay que explicar qué se entiende por tolerancia a la inserción en este contexto.

La *aplicación de inserción* de una arista  $e \in E$  puede extenderse a este contexto definiéndola como  $I_e: \Omega \times Y \rightarrow \Omega \times Y$  dadas por  $I_e(\omega, y) = (i_e(\omega), y)$  para cada  $(\omega, y) \in X$ . De manera que puede decirse que un proceso de percolación con decorados es *tolerante a la inserción* si para cada arista  $e \in E$  y para todo conjunto boreliano  $B \subset \Omega \times Y$  con  $\mu(B) > 0$  se tiene que  $\mu(i_e(B)) > 0$ . Como la indistinguibilidad se define usando la aplicación  $\pi$  hay que pedirle cierta regularidad a dicha proyección para que la tolerancia a la inserción definida en  $\Omega \times Y$  sea útil. Se dice que  $\pi$  es *creciente*, si  $\pi(\omega, y) \supseteq \omega$  para todo  $\omega \in \Omega$  e  $y \in Y$ . De esta forma,  $\pi$  conserva los clústeres infinitos de  $\omega$  y se tiene:

**Teorema 2.9.3** ([27, Remark 3.9],[13, Proposition 6]). *Dado un proceso de percolación con decorados  $\mu$  sobre un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  que sea  $G$ -invariante, tolerante a la inserción y tal que  $\mu(X_\infty) > 0$  con  $\pi$  creciente, entonces la relación  $\mathcal{R}_{cl}|_{X_\infty}$  inducida por  $\mathcal{R}_{cl}$  sobre  $X_\infty$  es ergódica.*

De esta forma, usando el lema fundamental 1.3.2, se puede enunciar una nueva versión del teorema 2.3.10:

**Teorema 2.9.4.** *Sea  $Y$  un espacio topológico  $T_1$  y 1-numerable. Sea  $\mu^\infty$  un proceso de percolación con decorados sobre un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  restringido a los clústeres infinitos que sea  $G$ -invariante y tolerante a la inserción con  $\pi$  creciente. Dado  $A$  un cerrado  $\mathcal{R}_{cl}$ -invariante contenido en el soporte de  $\mu^\infty$ , entonces todo conjunto  $Z \subset \Omega \times Y$  cerrado  $\mathcal{R}_{cl}$ -minimal verifica que o bien  $Z = A$  o bien  $\mu^\infty(Z) = 0$ .*

Cara a la siguiente observación, hay que recordar que el conjunto de aristas  $E$  también denota al coloreado de  $\Omega$  con todas las aristas abiertas.

**Observación 2.9.5.** El conjunto  $A$  puede construirse fácilmente cuando se considera sobre  $\Omega \times Y$  una medida  $\mu$  producto resultante de multiplicar una medida  $\mu_1$  en  $\Omega$  por una medida  $\mu_2$  en  $Y$ . En este caso es sencillo comprobar que el soporte puede expresarse como  $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\mu_1) \times \text{supp}(\mu_2)$ . De manera que este teorema puede aplicarse en los siguiente contextos:

- (i) Cuando  $\mu_1$  es un proceso de percolación invariante y  $\text{supp}(\mu_2) = Y$  puede tomarse  $A = \{E\} \times Y$ , ya que el conjunto unitario  $\{E\}$  es un cerrado contenido en el soporte  $\text{supp}(\mu_1)$ , como se demuestra en 2.3.10.
- (ii) Cuando tanto  $\mu_1$  como  $\mu_2$  son procesos de percolación invariante tolerantes a la inserción puede tomarse  $A = \{E\} \times \{E\}$ , debido de nuevo a que  $\{E\}$  está contenido tanto en  $\text{supp}(\mu_1)$  como en  $\text{supp}(\mu_2)$ .

Al ser  $\mu$  tolerante a la inserción y  $\pi$  equivariante y creciente, la medida  $P = \pi_*(\mu)$  es también tolerante a la inserción. De manera que, proyectando mediante  $\pi$ , se llega a las hipótesis de 2.8.10:

**Corolario 2.9.6.** *Sea  $C \circ \pi: (\Omega \times Y, \mu^\infty) \rightarrow \mathcal{G}$  un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  con ley  $\mathbb{P} = (C \circ \pi)_*(\mu^\infty)$  obtenido a partir un proceso de percolación con decorados  $G$ -invariante y tolerante a la inserción restringido a los clústeres infinitos con  $\pi$  creciente. Entonces la envoltura de cualquier subgrafo repetitivo propio  $\mathbb{H}$  de  $\mathbb{G}$  es de medida nula respecto de la ley  $\mathbb{P}$ .*



# Capítulo 3

## Subshifts de tipo finito

En este capítulo se aplica el lema fundamental 1.3.1 en el contexto de la dinámica simbólica tal y como se describe en [22].

### 3.1. El shift de Bernoulli

Dado  $N \geq 2$ , se definen los espacios

$$\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$$

y  $\Omega_N^R = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}}$ . Si se considera la topología discreta sobre  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ , ésta permite dotar a  $\Omega_N$  y  $\Omega_N^R$  de la topología producto. De esta forma, la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos está generada por los cilindros

$$C_{n_0, \dots, n_k}^{\alpha_0, \dots, \alpha_k} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(n_i) = \alpha_i, i \in 0, \dots, k\}$$

con  $\alpha_i \in \{0, \dots, N-1\}$  y  $n_i \in \mathbb{Z}$  o  $n_i \in \mathbb{N}$  respectivamente. Estos cilindros son conjuntos abiertos y cerrados que sirven como base de la topología.

Es bien conocido que ambos conjuntos son homeomorfos al conjunto de Cantor. Además en este caso, es evidente que cualquier biyección entre los conjuntos de índices da lugar a un homeomorfismo entre  $\Omega_N^R$  y  $\Omega_N$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \Omega_N^R &\longrightarrow \Omega_N \\ (\omega(0), \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4), \dots) &\longmapsto (\dots, \omega(4), \omega(2), \omega(0), \omega(1), \omega(3), \dots). \end{aligned}$$

El conjunto  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  puede identificarse con  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , en cuyo caso, la topología definida previamente puede obtenerse también a partir de la métrica dada por

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega(n) - \omega'(n)|}{\lambda^{|n|}} \quad (3.1.1)$$

para cualquier  $\lambda > 1$  fijado.

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $d_\lambda$  la métrica sobre  $\Omega_N$  definida por (3.1.1). Entonces, si  $2N - 1 < \lambda$ , cada cilindro  $C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$  es una bola abierta y cerrada.*



### 3. Subshifts de tipo finito

*Demostración.* Dados  $\omega, \omega' \in C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$ , se puede acotar la distancia entre ambas aplicaciones mediante

$$d_\lambda(\omega, \omega') \leq \sum_{i=-\infty}^{-n-1} \frac{N-1}{\lambda^{|i|}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{\lambda^{|i|}} = \frac{2(N-1)}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda^n}.$$

De manera que cualquier bola con centro  $\omega$  y radio  $r > \frac{2(N-1)}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda^n}$  verifica  $C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n} \subset B_{\Omega_N}(\omega, r)$ . Al mismo tiempo, si  $\omega \in C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$  y  $\omega'' \notin C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$ , entonces  $\omega$  y  $\omega''$  tienen que diferir al menos en alguna coordenada  $i$ -ésima,  $-n \leq i \leq n$ , con lo que distan al menos  $\frac{1}{\lambda^n}$  entre sí. Por tanto, cualquier bola con centro  $\omega$  y radio  $r < \frac{1}{\lambda^n}$  verifica  $B_{\Omega_N}(\omega, r) \subset C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}$ . Así que si  $2N-1 < \lambda$  las cotas verifican  $\frac{2(N-1)}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda^n} < \frac{1}{\lambda^n}$  con lo que cualquier  $r > 0$  entre ambas permite obtener la igualdad

$$B_{\Omega_N}(\omega, r) = C_{-n, \dots, n}^{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}.$$

□

De manera análoga se demuestra el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $d_\lambda$  la métrica sobre  $\Omega_N^R$  definida por (3.1.1). Entonces, si  $N < \lambda$ , cada cilindro  $C_{0, \dots, n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$  es una bola abierta y cerrada.*

**Definición 3.1.3.** El espacio  $\Omega_N$  está dotado del homeomorfismo  $\sigma_N: \Omega_N \rightarrow \Omega_N$  llamado “*shift de Bernoulli*” definido por

$$\sigma_N(\omega) = \omega',$$

donde  $\omega'(n) = \omega(n+1)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

En  $\Omega_N^R$ , el “*shift de Bernoulli*” es solo un homeomorfismo local no invertible

$$\sigma_N^R: \Omega_N^R \rightarrow \Omega_N^R$$

definido por  $\sigma_N^R(\omega(0), \omega(1), \omega(2), \dots) = (\omega(1), \omega(2), \omega(3), \dots)$ .

**Definición 3.1.4.** Se denomina *sistema dinámico simbólico* a la restricción  $\sigma_N$  o  $\sigma_N^R$  a cualquier subconjunto cerrado de  $\Omega_N$  o  $\Omega_N^R$  invariante.

Estos “*shifts*” definen las relaciones de equivalencia borelianas discretas  $\mathcal{R}_{\sigma_N}$  y  $\mathcal{R}_{\sigma_N^R}$  descritas en los ejemplos 1.1.13 y 1.1.14 respectivamente. Más precisamente:

**Definición 3.1.5.** Se define la *relación de equivalencia orbital*  $\mathcal{R}_{\sigma_N}$  asociada a  $\sigma_N$  de manera que  $\omega \mathcal{R}_{\sigma_N} \omega'$  con  $\omega, \omega' \in \Omega_N$  si existe  $n \in \mathbb{Z}$  de manera que  $\sigma_N^n(x) = y$ .

**Definición 3.1.6.** Se define la *relación de equivalencia cofinal*  $\mathcal{R}_{\sigma_N^R}$  asociada a  $\sigma_N^R$  de manera que  $\omega \mathcal{R}_{\sigma_N^R} \omega'$  con  $\omega, \omega' \in \Omega_N^R$  cuando existen  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $\sigma_N^{Rn}(x) = \sigma_N^{Rm}(y)$ .

## 3.2. Cadenas de Markov topológicas

Una importante familia de sistemas dinámicos simbólicos son las cadenas de Markov topológicas. Estas cadenas consisten en elementos  $\omega$  de  $\Omega_N$  o  $\Omega_N^R$  cuyos posibles valores en  $n + 1$  vienen determinados por el valor en  $n$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{N-1}$  una matriz  $N \times N$  con entradas 0 y 1. Se considera el cerrado  $\sigma_N$ -invariante de  $\Omega_N$  definido por

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N \mid a_{\omega(n)\omega(n+1)} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Usando  $\Omega_N^R$ , se define  $\Omega_A^R$  de manera análoga.

**Definición 3.2.2.** Al sistema dinámico sobre  $\Omega_A$  definido por la restricción  $\sigma_A$  de  $\sigma_N$  a  $\Omega_A$ , se le llama *cadena de Markov topológica* o “*subshift*” de tipo finito determinado por la matriz  $A$ . Análogamente se denota  $\sigma_A^R = \sigma_N^R|_{\Omega_A^R}$ .

Las relaciones de equivalencia borelianas  $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_{\sigma_N}|_{\Omega_A}$  y  $\mathcal{R}_A^R = \mathcal{R}_{\sigma_N^R}|_{\Omega_A^R}$  coinciden con las relaciones de equivalencia orbital y cofinal definidas por  $\sigma_A$  y  $\sigma_A^R$  respectivamente.

Las cadenas de Markov topológicas sobre  $\Omega_A$  (respectivamente sobre  $\Omega_A^R$ ) pueden representarse como caminos infinitos en ambas direcciones (respectivamente en una dirección) sobre el grafo dirigido  $\mathbb{G}_A$  cuyo conjunto de vértices es  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  y cuyas aristas vienen dadas por la matriz de adyacencia  $A$ .

**Lema 3.2.3** ([22, Lemma 1.9.4]). *Para cada  $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$ , el número de caminos de longitud  $m$  sobre  $\mathbb{G}_A$  que comienzan en  $i$  y terminan en  $j$  es igual al coeficiente  $a_{i,j}^m$  de la matriz  $A^m$ .*

Por tanto, cada elemento  $a_{i,i}^m$  de la diagonal de  $A^m$  coincide con el número de lazos de longitud  $m$  sobre  $\mathbb{G}_A$  que comienzan y terminan en  $i$ . Uniendo infinitas copias de un mismo lazo se obtiene un punto periódico para  $\sigma_A$  (respectivamente para  $\sigma_A^R$ ) cuyo período es divisor de  $m$ . Luego se tiene el siguiente resultado:

**Lema 3.2.4.** *Si  $a_{i,i}^m \neq 0$  para algún  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  entonces existe algún punto periódico de  $\sigma_A$  (y de  $\sigma_A^R$ ) cuyo período es divisor de  $m$ .  $\square$*

## 3.3. Medidas de Markov

**Definición 3.3.1.** Una matriz  $\Pi = \{\pi_{ij}\}_{i,j=0,\dots,N-1}$  de orden  $N \times N$  se dice *estocástica* cuando sus coeficientes son no negativos y cumplen que  $\sum_{j=0}^{N-1} \pi_{ij} = 1$  para  $i = 0, \dots, N-1$ . La matriz  $\Pi$  se dice

- (i) *transitiva* si todos los coeficientes  $\pi_{ij}^n$  de  $\Pi^n$  son positivos para algún  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) *irreducible* si para cada par  $(i, j)$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\pi_{ij}^n > 0$ .

A cada matriz estocástica  $\Pi$  se le asocia una matriz  $A$  de 0 y 1 tal que  $\pi_{i,j} = 0$  si y solo si  $a_{i,j} = 0$ . Geométricamente la propiedad de ser transitiva significa que, para algún  $n \in \mathbb{N}$ , todo par de vértices  $(i, j)$  del grafo  $\mathbb{G}_A$  puede unirse con un camino de longitud

$n$ , tanto de  $i$  a  $j$  como a la inversa. Y la propiedad de ser irreducible significa que el grafo  $\mathbb{G}_A$  es *fuertemente conexo*, es decir, que todo par de vértices  $(i, j)$  puede unirse con un camino, tanto de  $i$  a  $j$  como a la inversa.

Cabe destacar que aunque la propiedad de ser transitiva es más fuerte que la de ser irreducible, no son propiedades equivalentes. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es irreducible, pero no transitiva.

**Definición 3.3.2** ([9, Definition 8.9]). Sea  $p = (p_0, \dots, p_{N-1})$  una distribución de probabilidad con  $0 \leq p_i \leq 1$  y  $\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1$ . Sea  $\Pi$  una matriz estocástica tal que  $p\Pi = p$ . Se define la *medida de Markov*  $\mu_{\Pi,p}$  sobre  $\Omega_N$  como la medida  $\sigma_N$ -invariante dada por

$$\mu_{\Pi,p}(C_{0,\dots,n}^{\alpha_0,\dots,\alpha_n}) = p_{\alpha_0} \left( \prod_{i=1}^n \pi_{\alpha_{i-1}\alpha_i} \right).$$

De manera análoga se define la medida  $\sigma_N^R$ -invariante  $\mu_{\Pi,p}^R$  sobre  $\Omega_N^R$  llamada también *medida de Markov*.

Como puede verse, la componente  $p_i$  del vector  $p$  representa la probabilidad de que una configuración  $\omega \in \Omega_N$  (respectivamente  $\omega \in \Omega_N^R$ ) seleccionada aleatoriamente tome el valor  $i$  en la posición 0. Mientras que la componente  $\pi_{ij}$  de la matriz  $\Pi$  representa la probabilidad de que  $\omega$  tome el valor  $j$  justo después del valor  $i$ .

Si  $A$  es la matriz de 0 y 1 asociada a  $\Pi$ , entonces  $\text{supp } \mu_{\Pi,p} = \Omega_A$  y  $\mu_{\Pi,p}$  es una medida  $\sigma_A$  invariante. Análogamente  $\mu_{\Pi,p}^R$  es una medida  $\sigma_A^R$ -invariante sobre  $\Omega_A^R$ .

La relación de equivalencia orbital  $\mathcal{R}_{\sigma_N}$  y la relación de equivalencia inducida  $\mathcal{R}_A$  sobre  $\Omega_A$  son ambas  $\mu_{\Pi,p}$ -invariantes. Sin embargo la relación  $\mathcal{R}_{\sigma_N^R}$  no es necesariamente  $\mu_{\Pi,p}^R$ -casi-invariante:

**Ejemplo 3.3.3.** Sea  $\Omega_2^R = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $\Pi = Id$  y  $p = (0, 1)$  de forma que  $\mu_{\Pi,p}^R$  se concentra sobre el elemento  $\omega \in \Omega^R$  tal que  $\omega(n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\omega' \in \Omega$  con  $\omega'(0) = 0$  y  $\omega'(n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . El conjunto unitario  $\{\omega'\}$  es de medida nula mientras que su conjunto  $\mathcal{R}_{\sigma_N^R}$ -saturado es de medida total ya que  $\omega$  y  $\omega'$  están  $\mathcal{R}_{\sigma_N^R}$ -relacionados.

**Proposición 3.3.4.** Sea  $\Pi$  una matriz estocástica,  $p \in [0, 1]^N$  un vector invariante verificando  $\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1$  y  $A$  la matriz de adyacencia asociada. Entonces  $\mu_{\Pi,p}^R$  es una medida  $\mathcal{R}_A^R$ -casi-invariante sobre  $\Omega_A^R$ .

*Demostración.* Sean  $s_{i,j}: C_0^j \rightarrow C_{0,1}^{i,j}$  los isomorfismos medibles definidos por:

$$s_{i,j}(j, \omega(1), \omega(2), \dots) = (i, j, \omega(2), \dots),$$

para cada par  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $a_{ij} = 1$ . Estas aplicaciones son secciones parciales de  $\sigma_A^R$ . Dados  $\omega$  y  $\omega' \in \Omega_A$ , entonces  $\omega' = \sigma_A^R(\omega)$  si y solo si existe un único par  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  cumpliendo que  $\omega = s_{i,j}(\omega')$ . Por tanto la relación de equivalencia generada por esta familia de isomorfismos es precisamente  $\mathcal{R}_A^R$ . El resultado se concluye gracias a que estas secciones conservan los conjuntos de medida nula, de hecho

$$\mu_{\Pi,p}^R(s_{i,j}(B)) = \frac{p_i \cdot \pi_{i,j}}{p_j} \cdot \mu_{\Pi,p}^R(B)$$

para todo  $s_{i,j}$  y todo boreliano  $B \subset C_0^j$ . □

**Proposición 3.3.5** ([22, Proposition 4.2.14]). *Toda matriz estocástica  $\Pi$  tiene un vector invariante  $p$  de coordenadas no negativas. Si  $\Pi$  es transitiva, dicho vector es único (salvo multiplicación por escalar), 1 es un autovalor simple, y el resto de autovalores de  $\Pi$  tienen valor absoluto menor que uno.*

Cuando  $\Pi$  es una matriz estocástica transitiva, se denota por  $\mu_\Pi$  a la medida de Markov dada por  $\Pi$  y su único vector invariante  $p$  que cumple  $\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1$

**Teorema 3.3.6** ([32, Theorem 1.19]). *Sea  $\mu_{\Pi,p}$  una medida de Markov sobre  $\Omega_N$  (respectivamente  $\Omega_N^R$ ). Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i)  $\mu_{\Pi,p}$  es  $\sigma_N$ -ergódica (respectivamente  $\sigma_N^R$ -ergódica).
- (ii)  $\Pi$  es irreducible.
- (iii) 1 es un autovalor simple de  $\Pi$ .

### 3.4. Aplicación del lema a las medidas de Markov

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $\Pi$  una matriz estocástica irreducible y  $\mu_{\Pi,p}$  (respectivamente  $\mu_{\Pi,p}^R$ ) una medida de Markov sobre  $\Omega_A$  (respectivamente  $\Omega_A^R$ ). Si  $Z \subset \Omega_A$  (respectivamente  $Z \subset \Omega_A^R$ ) es un cerrado  $\mathcal{R}_A$ -minimal (respectivamente  $\mathcal{R}_A^R$ -minimal), entonces  $Z = \Omega_A$  (respectivamente  $Z = \Omega_A^R$ ) o  $\mu_{\Pi,p}(Z) = 0$  (respectivamente  $\mu_{\Pi,p}^R(Z) = 0$ ).*

*Demostración.* Aplicando el lema fundamental 1.3.1 al espacio  $X = \Omega_A$  dotado de las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{R}_A$  y al cerrado  $\mathcal{R}_A$ -invariante  $\Omega_A$ , se obtiene el resultado. La demostración en  $\Omega_A^R$  se realiza de manera análoga.  $\square$

Las cadenas de Markov dan un ejemplo de los dos tipos de medidas que contempla este teorema dependiendo de si se considera  $\Omega_A$  o  $\Omega_A^R$ .

**Proposición 3.4.2.** *Sea  $\Pi$  una matriz estocástica irreducible y  $\mu_{\Pi,p}$  una medida de Markov sobre  $\Omega_A$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i)  $\Omega_A$  es  $\mathcal{R}_A$ -minimal.
- (ii)  $\Omega_A$  está formado únicamente por la órbita de un elemento periódico de  $\sigma_A$ .
- (iii)  $\Pi = A$ .

*Demostración.* (i)  $\iff$  (ii) Al ser  $\Pi$  irreducible también lo es la matriz  $A$  de manera que, gracias al corolario 3.2.4, existe algún punto  $\omega \in \Omega_A$  periódico de  $\sigma_A$ . Si  $m$  es el período de  $\omega$  entonces  $\#\mathcal{R}_A[\omega] = m$ . Al ser  $\mathcal{R}_A[\omega]$  finito es también un cerrado, de manera que se trata de una envoltura  $\mathcal{R}_A$ -minimal.

(ii)  $\implies$  (iii) Si  $\Pi \neq A$  entonces existe un par de índices  $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$  tales que  $\pi_{i,j} \neq 0$  y  $\pi_{i,i} \neq 1$ . Puesto que  $\Pi$  es estocástica, existe también un  $j' \in \{0, \dots, N-1\}$  tal que  $\pi_{i,j'} \neq 0$ . Por tanto  $a_{i,j} = a_{i,j'} = 1$ . Sean  $\omega$  y  $\omega' \in \Omega_A$  tales que  $\omega(0) = \omega'(0) = i$ ,  $\omega(n+1) = j$  siempre que  $\omega(n) = i$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\omega'(n+1) = j'$  siempre que  $\omega'(n) = i$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Resulta claro que  $\omega$  y  $\omega'$  no pertenecen a la misma  $\mathcal{R}_A$ -clase.

(iii)  $\implies$  (ii) Puesto que  $\Pi$  es irreducible, el lema 3.2.3 garantiza que el grafo  $\mathbb{G}_A$  es fuertemente conexo, es decir, que para cada par de vértices  $i$  e  $j$  existe un camino de  $i$

### 3. Subshifts de tipo finito

---

a  $j$  y un camino de  $j$  a  $i$ . Al ser  $\Pi$  estocástica y  $\Pi = A$ , para cada  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  se verifica que  $\pi_{i,j} = 0$  para todo  $j \in \{0, \dots, N-1\}$  salvo para un  $j_i \in \{0, \dots, N-1\}$  con el que  $\pi_{i,j_i} = 1$ , de manera que de cada vértice de  $\mathbb{G}_A$  sale una única arista. Luego  $\mathbb{G}_A$  es un ciclo por lo que para cada vértice  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  existe un único camino infinito  $\omega_i \in \Omega_A$  verificando  $\omega(0) = i$ . El conjunto  $\{\omega_i \in \Omega_A \mid i = 0, \dots, N-1\} = \Omega_A$  forma una única  $\mathcal{R}_A$ -clase.  $\square$

**Corolario 3.4.3.** *Sea  $\Pi \neq A$  una matriz estocástica irreducible y  $\mu_{\Pi,p}$  una medida de Markov sobre  $\Omega_A$ . Entonces todo cerrado  $\mathcal{R}_A$ -minimal tiene medida nula con respecto a  $\mu_{\Pi,p}$ .*  $\square$

El caso de  $\Omega_A^R$  es completamente diferente:

**Proposición 3.4.4.** *Sea  $A$  una matriz irreducible. Entonces cualquiera  $\mathcal{R}_A^R$ -clase es densa en  $\Omega_A^R$ .*

*Demostración.* Dado un camino  $\omega = (\omega(0), \dots, \omega(n-1), \omega(n), \omega(n+1), \dots) \in \Omega_A^R$  la iterada  $n$ -ésima mediante  $\sigma_A^R$  viene dada por  $(\sigma_A^R)^n(\omega) = (\omega(n), \omega(n+1), \dots)$ . Sea  $\omega \in \Omega_A^R$  y  $C_{n_0, \dots, n_k}^{\alpha_0, \dots, \alpha_k} \subset \Omega_A^R$  un cilindro arbitrario. Como  $A$  es irreducible, por el lema 3.2.3, existe un camino de longitud  $n$  que une  $\alpha_k$  con  $\omega(0)$  en  $\mathbb{G}_A$ . De manera que existe un camino infinito  $\omega' \in C_{n_0, \dots, n_k}^{\alpha_0, \dots, \alpha_k}$  verificando que  $(\sigma_A^R)^{n_k+n}(\omega') = \omega$  y por tanto  $\omega \mathcal{R}_A^R \omega'$ .  $\square$

**Corolario 3.4.5.** *Si  $A$  es una matriz irreducible, entonces  $\Omega_A^R$  es  $\mathcal{R}_A^R$ -minimal.*  $\square$

## Capítulo 4

# Universalidad de los espacios de Gromov-Hausdorff

Hasta ahora se ha trabajado con el concepto de subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  definido mediante el espacio de Gromov-Hausdorff  $\mathcal{G}$ . En este capítulo, se estudia el concepto de *grafo aleatorio*, introducido por D. Aldous y R. Lyons en [3], para ver de que manera se interrelacionan ambos conceptos.

Para relacionar ambos conceptos se acude a las *estructuras de grafo* sobre relaciones de equivalencias medibles discretas introducidas por Kaimanovich en [20] y Gaboriau en [11].

### 4.1. Grafos aleatorios frente a subgrafos aleatorios

La noción de grafo aleatorio ha sido introducida por D. Aldous y R. Lyons en [3] aunque aparece implícitamente en el trabajo de R. Lyons, R. Pemantle y Y. Peres en [25]. Estos autores definen *grafo aleatorio* como una variable aleatoria que toma valores en el espacio  $\mathcal{G}_\bullet$  de clases de isomorfía de grafos localmente finitos con punto base. Este espacio puede escribirse como el límite inverso

$$\mathcal{G}_\bullet = \varprojlim \mathcal{G}_\bullet(n),$$

donde  $\mathcal{G}_\bullet(n)$  denota el espacio de las clases de isomorfía de grafos finitos con punto base y radio acotado por  $n$ . Gracias a que los grafos tienen punto base, es posible tomar bolas cerradas centradas en esos puntos para comparar los grafos. De esta forma puede dotarse al espacio  $\mathcal{G}_\bullet$  de una estructura métrica mediante la distancia:

$$d([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}', x']) = e^{-R([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}', x'])},$$

donde

$$R([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}', x']) = \sup\{N \geq 0 \mid B_{\mathbb{H}}(x, N) \cong B_{\mathbb{H}'}(x', N)\}.$$

La métrica así definida hace de  $\mathcal{G}_\bullet$  un espacio boreliano estándar.

**Proposición 4.1.1.** *El espacio  $\mathcal{G}_\bullet$  es polaco.*

*Demostración.* El espacio  $\mathcal{G}_\bullet$  es completo. Efectivamente, dada una sucesión de Cauchy  $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  existe un  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}_\bullet$  tal que para cada  $N \in \mathbb{N}$  se cumple que  $B_{\mathbb{H}}(x, N) = B_{\mathbb{H}_n}(x, N)$  a partir de determinado índice. Luego  $\mathbb{H}$  es límite de la sucesión  $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

El espacio  $\mathcal{G}_\bullet$  es separable. Ya que, el conjunto de los grafos finitos es un conjunto numerable denso en  $\mathcal{G}_\bullet$ .  $\square$

Al igual que el espacio de Gromov-Hausdorff  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{G}$ , el espacio  $\mathcal{G}_\bullet$  está dotado de la relación de equivalencia boreliana discreta  $\mathcal{R}_\bullet$  que consiste en cambiar el punto base [5]. Formalmente esta relación puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_\bullet = \{([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}', x']) \in \mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet \mid \exists y \in \mathbb{H}: [\mathbb{H}', x'] = [\mathbb{H}, y]\}.$$

**Proposición 4.1.2.** *La relación  $\mathcal{R}_\bullet$  es étale.*

*Demostración.* Se define una topología  $\mathcal{T}$  sobre  $\mathcal{R}_\bullet$  generada por los abiertos básicos  $V_{\mathbb{H},x,y,n}$  formados por los pares  $([\mathbb{H}', x'], [\mathbb{H}', y']) \in \mathcal{R}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet$  tales que

$$[B_{\mathbb{H}}(x, n), x] = [B_{\mathbb{H}'}(x', n), x'] \text{ y } [B_{\mathbb{H}}(x, n), y] = [B_{\mathbb{H}'}(x', n), y']$$

para cada  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  y  $n \in \mathbb{N}$  verificando que  $y \in B_{\mathbb{H}}(x, n)$ .

La primera proyección  $\alpha: \mathcal{R}_\bullet \rightarrow X$  es un homeomorfismo local. En efecto,  $\alpha|_{V_{\mathbb{H},x,y,n}}$  es una biyección ya que, la segunda componente depende de la primera. Además puede verse que

$$\alpha(V_{\mathbb{H},x,y,m}) = B_{\mathcal{G}_\bullet}([\mathbb{H}, x], e^{-m})$$

para cualquier  $m > n$ .

Dados  $[\mathbb{H}_1, x_1], [\mathbb{H}_2, x_2] \in \mathcal{G}_\bullet$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  verificando que  $y_1 \in B_{\mathbb{H}_1}(x_1, n_1)$  y  $y_2 \in B_{\mathbb{H}_2}(x_2, n_2)$  el conjunto  $V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1} V_{\mathbb{H}_2, x_2, y_2, n_2}$  (en el sentido de la definición 1.2.1) puede escribirse como los pares  $([\mathbb{H}', x'], [\mathbb{H}', z']) \in \mathcal{R}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet$  para los que existe un  $y' \in B_{\mathbb{H}'}(x', n_1)$  verificando

$$[B_{\mathbb{H}_1}(x_1, n_1), x_1] = [B_{\mathbb{H}'}(x', n_1), x'], [B_{\mathbb{H}_1}(x_1, n_1), y_1] = [B_{\mathbb{H}'}(x', n_1), y'],$$

$$[B_{\mathbb{H}_2}(x_2, n_2), x_2] = [B_{\mathbb{H}'}(y', n_2), y'] \text{ y } [B_{\mathbb{H}_2}(x_2, n_2), y_2] = [B_{\mathbb{H}'}(y', n_2), z']\}.$$

De forma que, dado un  $([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}, z]) \in V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1} V_{\mathbb{H}_2, x_2, y_2, n_2}$ , su entorno  $V_{\mathbb{H}, x, z, n_1 + n_2}$  está contenido en  $V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1} V_{\mathbb{H}_2, x_2, y_2, n_2}$ . Luego  $V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1} V_{\mathbb{H}_2, x_2, y_2, n_2}$  es abierto.

Dado  $[\mathbb{H}_1, x_1] \in \mathcal{G}_\bullet$  y  $n_1 \in \mathbb{N}$  verificando que  $y_1 \in B_{\mathbb{H}_1}(x_1, n_1)$ , el conjunto  $V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1}^{-1}$  (en el sentido de la definición 1.2.1) puede escribirse como:

$$\{([\mathbb{H}', x'], [\mathbb{H}', y']) \in \mathcal{R}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet \mid [B_{\mathbb{H}_1}(x_1, n_1), x_1] = [B_{\mathbb{H}'}(y', n_1), y'] \text{ y } [B_{\mathbb{H}_1}(x_1, n_1), y_1] = [B_{\mathbb{H}'}(y', n_1), x']\}.$$

De forma que, dado un  $([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}, y]) \in V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1}^{-1}$ , su entorno  $V_{\mathbb{H}, x, y, 2n_1}$  está contenido en  $V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1}^{-1}$ . Luego  $V_{\mathbb{H}_1, x_1, y_1, n_1}^{-1}$  es un abierto. Ahora, procediendo de manera análoga a como con la proyección  $\alpha: \mathcal{R}_\bullet \rightarrow X$ , se prueba que la proyección  $\beta: \mathcal{R}_\bullet \rightarrow X$  es un homeomorfismo local.  $\square$

**Definición 4.1.3.** Un *grafo aleatorio* es una aplicación medible

$$\Theta: (X, \mu) \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$$

definida sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$ . Se llama *ley de  $\Theta$*  a la medida de probabilidad  $\mathbb{P} = \Theta_*(\mu)$  inducida por  $\mu$  sobre  $\mathcal{G}_\bullet$ .

Por otro lado, como se ha indicado en la sección 2.1, si se dota al espacio de Gromov-Hausdorff  $\mathcal{G}$  de un grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  de una medida de probabilidad  $\mu$ , se obtiene un subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$  según la definición 2.3.1. Por comodidad, se vuelve a recordar la definición 2.3.1:

**Definición 4.1.4.** Sea  $\mathcal{G}$  el espacio de Gromov-Hausdorff asociado al grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  de un grupo finitamente generado  $G$ . Un *subgrafo aleatorio* de  $\mathbb{G}$  es una variable aleatoria

$$\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P}_0)$$

donde  $(X, \mu)$  es un espacio boreliano estándar dotado de una medida de probabilidad  $\mu$  y  $\mathbb{P}_0 = \Theta_{0*}(\mu)$  es la ley de  $\Theta_0$ .

La aplicación natural  $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  que envía cada  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  sobre  $[\mathbb{H}, \mathbf{1}] \in \mathcal{G}_\bullet$  permite interpretar cualquier subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$  como grafo aleatorio en el sentido de [3]. El objetivo de este capítulo es demostrar que, recíprocamente, cualquier grafo aleatorio, bajo cierta condición de geometría acotada, se puede interpretar como un subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley. Antes de precisar esto es necesario introducir alguna notación.

Sea  $\mathcal{G}_\bullet^k \subset \mathcal{G}_\bullet$  el subespacio formado por las clases de isomorfía de los grafos enraizados de valencia acotada por  $k$ . Al igual que  $\mathcal{G}_\bullet$ , este espacio admite una estructura de límite inverso

$$\mathcal{G}_\bullet^k = \varprojlim \mathcal{G}_\bullet^k(n),$$

donde  $\mathcal{G}_\bullet^k(n) \subset \mathcal{G}_\bullet(n)$  son los espacios formados por las clases de isomorfía de grafos finitos enraizados con radio acotado por  $n$  y valencia acotada por  $k$ .

Usando un argumento diagonal, puede verse que  $\mathcal{G}_\bullet^k$  es un espacio métrico compacto.

**Definición 4.1.5.** Un grafo aleatorio  $\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet, \mathbb{P})$  tiene *geometría acotada* si todos los estados pertenecen a algún subespacio  $\mathcal{G}_\bullet^k$  y por tanto  $\Theta$  puede expresarse como una variable aleatoria de la forma

$$\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet^k, \mathbb{P}).$$

La aplicación natural

$$\iota: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet \tag{4.1.1}$$

no es inyectiva, pero se trata de una aplicación continua y cerrada. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.6.** *La aplicación  $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  es una aplicación no expansiva, es decir*

$$d(\iota(\mathbb{H}), \iota(\mathbb{H}')) \leq d(\mathbb{H}, \mathbb{H}'),$$

para cada  $\mathbb{H}, \mathbb{H}' \in \mathcal{G}$ . Además  $\iota(\mathcal{R}[\mathbb{H}]) = \mathcal{R}_\bullet[\iota(\mathbb{H})]$ .

*Demostración.* La distancia entre  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{H}'$  viene dada por:

$$d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = e^{-R(\mathbb{H}, \mathbb{H}')},$$

donde  $R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = \sup\{R \geq 0 \mid B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R) = B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R)\}$ . Pero la distancia de las imágenes viene dada por:

$$d([\mathbb{H}, \mathbf{1}], [\mathbb{H}', \mathbf{1}]) = e^{-R([\mathbb{H}, \mathbf{1}], [\mathbb{H}', \mathbf{1}])},$$



donde  $R([\mathbb{H}, \mathbf{1}], [\mathbb{H}', \mathbf{1}]) = \sup\{R \geq 0 \mid [B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R)] = [B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R)]\}$ . Puesto que coincidir en una bola centrada en  $\mathbf{1}$  es una condición más fuerte que hacerlo salvo isomorfismo, se tiene que  $R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') \geq R([\mathbb{H}, \mathbf{1}], [\mathbb{H}', \mathbf{1}])$ , con lo que se concluye el resultado.

Por último, la clase de equivalencia  $\mathcal{R}[\mathbb{H}]$  engloba todos los desplazados de  $\mathbb{H}$  de manera que al aplicarle  $\iota$  se obtienen las clases de isomorfía de  $\mathbb{H}$  con punto base en cada uno de sus vértices.  $\square$

Como consecuencia de esta proposición, cada subgrafo aleatorio de  $\mathbb{G}$

$$\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P}_0)$$

determina un grafo aleatorio

$$\Theta = \iota \circ \Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet, \mathbb{P})$$

con ley  $\mathbb{P} = \Theta_*(\mu) = \iota_*(\mathbb{P}_0)$ . Si  $G$  es de finitamente generado,  $\Theta$  se factoriza a través del subespacio  $\mathcal{G}_\bullet^k$  donde  $k$  es una cota superior del número de elementos del sistema simétrico de generadores de  $G$  usado para definir el grafo de Cayley  $\mathbb{G}$ .

Una cuestión natural es decidir si cualquier grafo aleatorio se obtiene de este modo a partir de algún grupo finito. Sea  $F_K$  el grupo libre con  $K$  generadores y  $\mathcal{F}_K = \mathcal{G}(F_K)$  es espacio de Gromov-Hausdorff asociado a su grafo de Cayley  $\mathbb{F}_K$ . Es razonable plantearse la siguiente cuestión:

**Cuestión 4.1.7.** *¿Se factoriza cualquier grafo aleatorio de geometría acotada*

$$\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet^k, \mathbb{P})$$

*a través de  $\mathcal{F}_K$  para  $K$  suficientemente grande?*

Los estados de  $\Theta_0$  y  $\Theta$  están representados por árboles pero en un grafo aleatorio arbitrario esto no se cumple. Por tanto, no cabe esperar que cualquier grafo aleatorio admita una factorización como la propuesta. Para solventar este problema, en la siguiente sección se reformula la cuestión.

## 4.2. El problema de la factorización

Para lograr una factorización universal, se sustituye (4.1.1)

$$\iota: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$$

por una nueva aplicación

$$\rho: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K},$$

que asigna a cada árbol  $\mathbb{H}$  que contenga al elemento neutro  $\mathbf{1}$  la clase de isomorfía de la  $\mathcal{R}$ -clase de equivalencia. Esto es

$$\rho(\mathbb{H}) = [\mathcal{R}[\mathbb{H}], \mathbb{H}] = [Iso(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}, \mathbb{H}],$$

donde  $Iso(\mathbb{H}) \subset F_K$  esá formado los elementos de  $F_K$  que dejan fijo  $\mathbb{H}$  e  $Iso(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}$  es el cociente de  $\mathbb{H}$  por la acción por la izquierda del grupo de isotropía  $Iso(\mathbb{H})$ . Obviamente  $\rho$  solo depende de la clase de traslación de  $\mathbb{H}$ .

Sea  $v: \mathcal{G}_{\bullet}^{2K} \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}^{2K}$  la aplicación definida por

$$v([\mathbb{H}, x]) = [\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}],$$

donde  $[\mathbb{H}, x]$  es la clase de isomorfía de un grafo  $\mathbb{H}$  con punto base  $x$  y  $[\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}]$  es la clase de isomorfía de su cubierta universal  $\tilde{\mathbb{H}}$  con punto base  $\tilde{x}$ .

Por definición, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G}_{\bullet}^{2K} \\ & \nearrow \rho & \downarrow v \\ \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G}_{\bullet}^{2K} \end{array} \quad (4.2.2)$$

ya que

$$v(\rho(\mathbb{H})) = v\left(\left[Iso(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}, \mathbb{H}\right]\right) = [\mathbb{H}, \mathbf{1}] = \iota(\mathbb{H}).$$

Ahora se puede reformular la cuestión 4.1.7 del siguiente modo

**Cuestión 4.2.1.** *Dado un grafo aleatorio  $\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_{\bullet}^k, \mathbb{P})$ , ¿existe un subgrafo aleatorio  $\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{F}_K, \mathbb{P}_0)$  tal que*

$$\rho \circ \Theta_0: X \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}^{2K}$$

*coincida con*

$$\Theta: X \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}^k \subset \mathcal{G}_{\bullet}^{2K}.$$

Para precisar las estructuras de grafo de los estados se necesita introducir estructuras de grafo sobre las clases de  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_{\bullet}$ .

### 4.3. Estructura de grafo en relaciones de equivalencia borelianas discretas

Hay dos maneras de dotar de una estructura de grafo a las relaciones de equivalencia borelianas sobre espacios borelianos estándar. Por un lado está la introducida por Kaimanovich en [20]:

**Definición 4.3.1.** Sea  $X$  un espacio boreliano estándar. Una *estructura de grafo* en una relación de equivalencia boreliana discreta  $\mathcal{R}$  es un subconjunto boreliano simétrico  $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$ . Dos puntos  $x, y \in X$  se dice que *están unidos por una arista* si  $(x, y) \in \mathcal{K}$ . Se dice que una estructura de grafo  $\mathcal{K}$  es *de valencia acotada por  $k$*  si cada vértice  $x \in X$  admite a lo sumo  $k$  aristas incidentes, es decir

$$\#\{(x', y') \in \mathcal{K} \mid x = x'\} \leq k$$

para todo  $x \in X$ .

Una estructura de grafo  $\mathcal{K}$  sobre  $\mathcal{R}$  dota a cada clase  $\mathcal{R}[x]$  de una estructura de grafo y se denota por  $\mathcal{K}[x]$  a la componente conexa del vértice  $x$ .

**Definición 4.3.2.** Sea  $X$  un espacio boreliano estándar,  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta dotada de una estructura de grafo  $\mathcal{K}$ . Se define la *relación de equivalencia generada por  $\mathcal{K}$*  como la relación de equivalencia boreliana discreta  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{R}$  que relaciona dos puntos  $x$  e  $y$  de  $X$  cuando  $\mathcal{K}[x] = \mathcal{K}[y]$ .

De hecho,  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  es justamente la menor subrelación de equivalencia de  $\mathcal{R}$  que contiene a  $\mathcal{K}$ . Las relaciones  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  coinciden cuando  $\mathcal{K}$  dota a cada  $\mathcal{R}$ -clase de una estructura de grafo conexa.

Gaboriau introduce en [11] un concepto equivalente usando isomorfismos parciales. En la definición original de Gaboriau se pide que estos isomorfismos conserven la medida, pero aquí se usará una versión menos restrictiva que se corresponde mejor con la definición de estructura de grafo dada por Kaimanovich.

**Definición 4.3.3.** Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta sobre un espacio boreliano estándar. Se dice que una familia  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$  de isomorfismos parciales  $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$  entre subconjuntos borelianos de  $X$ , finita o infinitamente numerable, define una estructura de grafo sobre  $\mathcal{R}$  si la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  coincide con la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_{\Phi}$  definida por la acción del pseudogrupo  $\Gamma_{\Phi}$  de transformaciones borelianas de  $X$  generado por  $\Phi$ .

Si se consideran los grafos de las transformaciones  $\varphi_i$  y de sus inversas  $\varphi_i^{-1}$ , la unión  $\mathcal{K}_{\Phi}$  es un subconjunto boreliano simétrico de  $\mathcal{R}$  que define una estructura de grafo en el sentido de Kaimanovich.

Si  $\Phi$  es finito, se dice que la estructura de grafo sobre  $\mathcal{R}$  es *de geometría acotada*. Si los dominios  $A_i$  y  $B_i$  de los elementos  $\varphi_i$  de  $\Phi$  y sus inversas  $\varphi_i^{-1}$  verifican que las intersecciones infinitas son vacías, entonces se dice que la estructura definida por  $\Phi$  es *localmente finita* o *de valencia finita*.

En realidad, cualquier estructura de grafo en el sentido de Kaimanovich puede obtenerse por este procedimiento.

**Teorema 4.3.4** ([28, Proposition 1.3]). *Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta sobre un espacio boreliano estándar  $X$ . Si  $\mathcal{K}$  es una estructura de grafo de geometría acotada por  $k$  sobre  $\mathcal{R}$ , entonces existe una familia finita  $\Phi$  de isomorfismos borelianos de  $X$  tal que  $\mathcal{K}_{\Phi} = \mathcal{K}$ .*

*Demostración.* Por definición, la primera proyección

$$\pi_1|_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \subset X \times X \rightarrow X$$

es una aplicación boreliana con fibras finitas. Por el lema 1.1.7, fijado un punto  $x_0 \in X$  y una arista  $(x_0, y_0) \in \mathcal{K}$ , existe una sección boreliana  $s: X \rightarrow \mathcal{K}$  tal que  $s(x_0) = (x_0, y_0)$ . Obviamente la imagen de  $s$  es la gráfica de una aplicación boreliana  $\varphi: X \rightarrow X$  tal que  $\varphi(x_0) = y_0$ . Enumerando los elementos de cada fibra de  $\pi_1|_{\mathcal{K}}$ , el espacio  $X$  se descompone en borelianos disjuntos  $A_i$  tales que  $\varphi_i = \varphi|_{A_i}$  es inyectivo. Si se llama  $B_i = \varphi_i(A_i)$ , entonces  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$  define una estructura de grafo  $\mathcal{K}_{\Phi} = \mathcal{K}$ .  $\square$

**Corolario 4.3.5.** *Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana discreta sobre un espacio boreliano estándar  $X$ . Si  $\mathcal{K}$  es una estructura de grafo sobre  $\mathcal{R}$  tal que las clases  $\mathcal{R}[x]$  son localmente finitas, entonces existe una familia numerable  $\Phi$  de isomorfismos borelianos de  $X$  tal que  $\mathcal{K}_{\Phi} = \mathcal{K}$ .*

*Demostración.* Para cada entero  $n \geq 1$ , se considera el boreliano

$$X_n = \{x \in X \mid \#(\pi_1|_{\mathcal{K}})^{-1}(x) \leq n\}.$$

Sea  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{X_1 \times X_1}$ . Se pueden definir inductivamente los borelianos

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}|_{X_n \times X_n} - \mathcal{K}_{n-1}, \quad n > 1.$$

Por construcción,  $\mathcal{K}_n$  es una estructura de grafo para la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}|_{X_n \times X_n}$ . Como consecuencia del teorema 4.3.4, para cada  $n \geq 1$ , existe una familia finita  $\Phi_n$  de isomorfismos borelianos de  $X_n$  tal que  $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{\Phi_n}$ . Ahora  $\Phi = \cup_{n \geq 1} \Phi_n$  es una familia numerable de isomorfismos borelianos de  $X = \cup_{n \geq 1} X_n$  tal que  $\mathcal{K}_{\Phi} = \mathcal{K}$ .  $\square$

Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana sobre un espacio boreliano estándar  $X$ . Si  $\mathcal{K}$  es una estructura de grafo sobre  $\mathcal{R}$ , se define una aplicación natural

$$\rho_{\mathcal{K}}: X \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}$$

por

$$\rho_{\mathcal{K}}(x) = [\mathcal{R}[x], x],$$

donde  $\mathcal{R}[x] = \mathcal{K}[x]$  está dotada de la estructura de grafo definida por  $\mathcal{K}$ .

La clase de isomorfía de  $\mathcal{K}[x]$  depende únicamente de la clase de  $x$ , luego  $x\mathcal{R}y$  implica  $\rho_{\mathcal{K}}(x)\mathcal{R}_{\bullet}\rho_{\mathcal{K}}(y)$ . De hecho,  $\rho_{\mathcal{K}}(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}_{\bullet}[\rho_{\mathcal{K}}(x)]$ . Pero clases diferentes pueden ser enviadas en una misma clase.

Por otro lado, según el corolario 4.3.5, la estructura de grafo  $\mathcal{K}$  está definida por una familia numerable  $\Phi$  de isomorfismos borelianos  $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$  entre subconjuntos borelianos de  $X$ . Para cada elemento  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_{\bullet}$ , la bola  $B_{\mathcal{G}_{\bullet}}([\mathbb{H}, x], r)$  tiene por imagen inversa mediante  $\rho_{\mathcal{K}}$  un conjunto que puede expresarse como uniones e intersecciones numerables de los borelianos  $A_i$  y  $B_i$ . De forma que puede probarse la proposición:

**Proposición 4.3.6.** *Si la estructura de grafo  $\mathcal{K}$  es localmente finita, entonces*

$$\rho_{\mathcal{K}}: X \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}$$

*es una aplicación boreliana compatible con las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_{\bullet}$ .*

Sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia boreliana sobre un espacio boreliano estándar  $X$  y  $\Phi$  una familia numerable de isomorfismos parciales  $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$  entre subconjuntos borelianos de  $X$ . Se define la aplicación natural

$$\rho: X \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}$$

dada por  $\rho(x) = [\Phi[x], x] \in \mathcal{G}_{\bullet}$ , donde  $\Phi[x]$  denota al grafo cuyo conjunto de vértices es  $\mathcal{R}_{\Phi}[x]$  y cuyo conjunto de aristas es  $\{(x', \varphi) \in \mathcal{R}_{\Phi}[x] \times \Phi \mid x' \in \text{dom}(\varphi)\}$ . De esta forma, cada arista  $(x', \varphi)$  del grafo  $\Phi[x]$  une el vértice  $x'$  con el vértice  $\varphi(x')$ . Razonando de manera similar que con la aplicación  $\rho_{\mathcal{K}}$  puede probarse la proposición:

**Proposición 4.3.7.** *Sea  $\Phi$  una familia de isomorfismos parciales de valencia finita en  $X$ , entonces*

$$\rho: X \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}$$

*es una aplicación boreliana compatible con las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_{\bullet}$ .*

Al igual que ocurre con  $\rho_{\mathcal{K}}$  también se verifica que  $\rho(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}_{\bullet}[\rho(x)]$  y clases diferentes pueden ser enviadas en una misma clase.

A diferencia del grafo  $\mathcal{K}[x]$ , el grafo  $\Phi[x]$  admite aristas múltiples. Por tanto  $\mathcal{K}[x]$  será isomorfo al grafo  $\Phi[x]$  únicamente cuando este último no tenga aristas múltiples.

Una familia de isomorfismos parciales  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$  sobre un espacio boreliano estándar  $X$  se dice *sin aristas múltiples* cuando los grafos  $\Phi[x]$  no tienen aristas múltiples. Para cualquier familia  $\Phi$ , los dominios de los isomorfismos parciales pueden restringirse de modo que no intersequen ni entre sí ni con los rangos de los isomorfismos. De esta forma se obtiene una nueva familia de isomorfismos parciales  $\Phi$  tal que  $\mathcal{K}_{\Phi} = \mathcal{K}$  (y por tanto  $\mathcal{K}[x] = \Phi[x]$  para todo  $x \in X$ ) pero sin aristas múltiples.

## 4.4. Ejemplos

En esta sección se estudian las aplicaciones  $\rho$  y  $\rho_{\mathcal{K}}$  en dos situaciones naturales: si  $X$  es el espacio  $\mathcal{G}$  de Gromov-Hausdorff de los subgrafos de un grafo de Cayley y si  $X$  es el espacio  $\mathcal{G}_{\bullet}$  de clases de isomorfía de grafos localmente finitos con punto base.

### Espacio $\mathcal{G}$ de Gromov-Hausdorff de los subgrafos de un grafo de Cayley

Sea  $\mathcal{G}$  el espacio de Gromov-Hausdorff de los subgrafos del grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  de un grupo finitamente generado  $G$  determinado por el sistema de generadores  $S$ . Sea  $S_0$  un conjunto de generadores de  $G$  sin elementos distintos inversos entre sí tal que  $S = S_0 \cup S_0^{-1}$ . De esta forma, salvo elementos de torsión 2, el conjunto  $S_0$  es la mitad del conjunto  $S$ .

Sea  $\mathcal{R}$  la relación de equivalencia étale que identifica dos subgrafos  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{H}'$  de  $\mathbb{G}$  si  $\mathbb{H}' = \mathbb{H}g^{-1}$  para algún  $g \in G$ , que se puede interpretar como el cambio de punto base de  $\mathbb{H}$  de  $\mathbf{1}$  a  $g$ . Como se ha visto en la sección 4.3, la clase de equivalencia

$$\mathcal{R}[\mathbb{H}] = \{\mathbb{H}g^{-1} \mid g \in \mathbb{H}\}$$

admite una estructura natural de grafo cociente de  $\mathbb{H}$  por la acción del grupo de isotropía  $Iso(\mathbb{H}) = \{g \in G \mid \mathbb{H}g^{-1} = \mathbb{H}\}$ . Esta estructura está definida por la familia  $\Phi$  de homeomorfismos parciales  $\tau_g : \mathbb{H} \in \text{dom}(\tau_g) \rightarrow \mathbb{H}g^{-1} \in \text{im}(\tau_g)$  con  $g \in S_0$  donde  $\text{dom}(\tau_g)$  es el conjunto abierto de todos los grafos  $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$  que contienen a  $g$  y  $\text{im}(\tau_g)$  es el conjunto abierto de todos los grafos  $\mathbb{H}' = \mathbb{H}g^{-1}$ . La estructura de grafo generada por  $\Phi$  tiene en general aristas múltiples, incluso aunque  $S$  carezca de elementos de torsión 2.

La aplicación

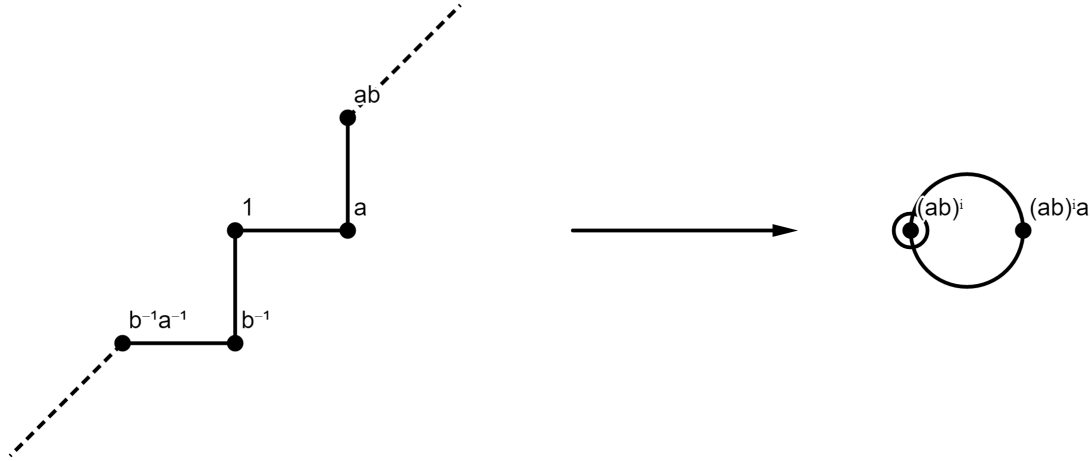
$$\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}$$

ha sido definida con anterioridad en el caso particular  $G = F_K$ . Viene dada por

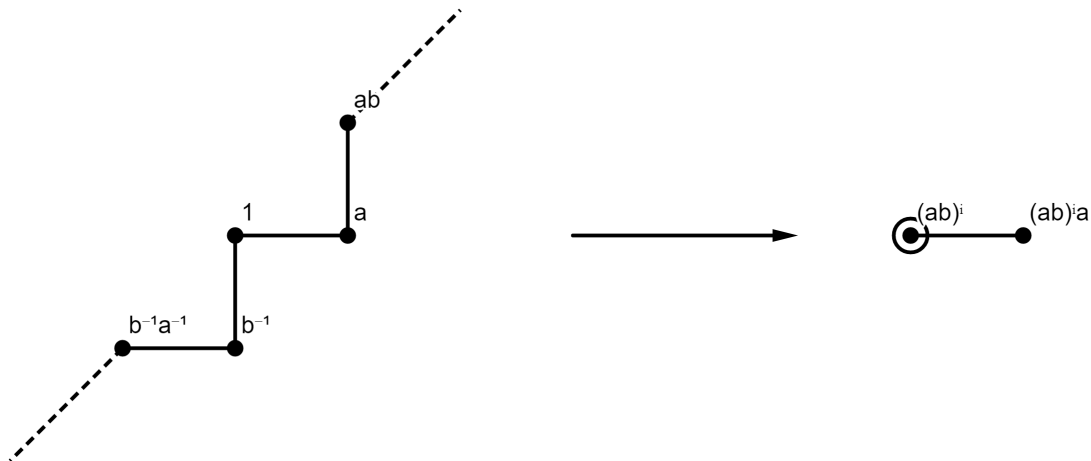
$$\rho(\mathbb{H}) = [Iso(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}, \mathbf{1}] \in \mathcal{G}_{\bullet}.$$

**Ejemplo 4.4.1.** Sea  $\mathcal{F}_2$  el espacio de Gromov-Hausdorff asociado al grafo de Cayley  $\mathbb{F}_2$  del grupo libre  $F_2$  generado por dos elementos. Sea  $S = \{a^{\epsilon}, b^{\epsilon}\}$  con  $\epsilon = \pm 1$  el sistema de generadores empleado para definir este grafo de Cayley  $\mathbb{F}_2$  y sea  $S_0 = \{a, b\}$ . En

esta situación se considera el grafo  $\mathbb{H} \in \mathcal{F}_2$  cuyo conjunto de aristas es  $\{(ab)^i, (ab)^i a \in F_2 \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . El grafo  $Iso(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}$  tiene por vértices las órbitas  $\{(ab)^i\}$  y  $\{(ab)^i a\}$  con dos aristas  $a$  y  $b$  uniendo ambos puntos, ya que  $\tau_a((ab)^i) = (ab)^i a$  y  $\tau_b((ab)^i a) = (ab)^{i+1}$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ . Por tanto  $\rho(\mathbb{H})$  se corresponde con la clase de isomorfía de un grafo punteado con aristas múltiples.

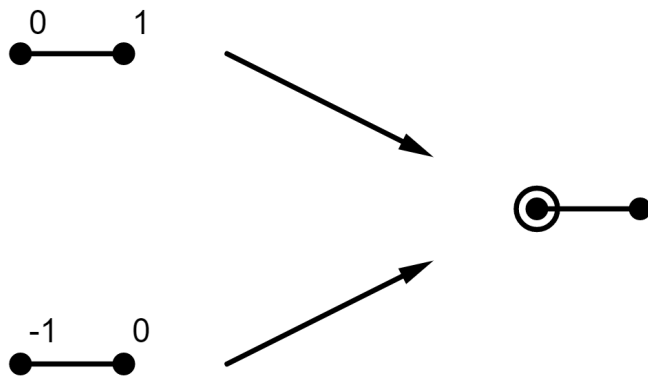


Por otro lado, si  $\mathcal{K}$  es la estructura de grafo en el sentido de Kaimanovich definida por  $\Phi$ , con este ejemplo puede ver que  $\rho_{\mathcal{K}}$  no hace conmutativo el diagrama 4.2.2. En efecto,  $\rho_{\mathcal{K}}(\mathbb{H})$  se corresponde con la clase de isomorfía del grafo punteado de dos vértices unidos por una arista.

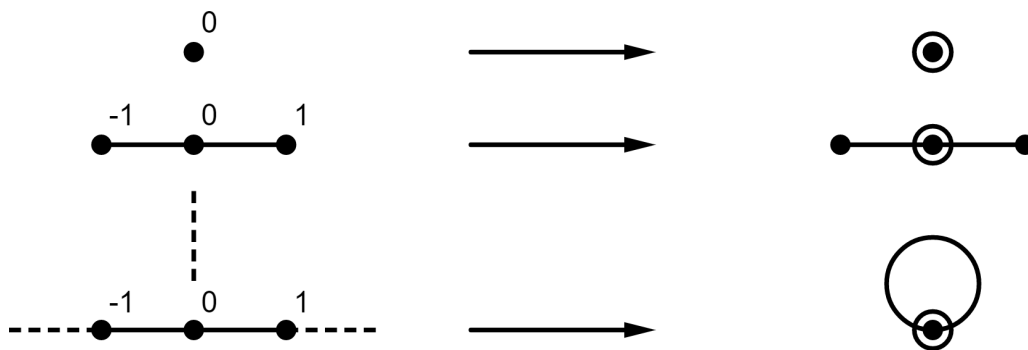


Se puede observar que la aplicación  $\rho$  no es inyectiva, ni tampoco es continua.

**Ejemplo 4.4.2.** Sea  $\mathcal{G}$  el espacio de Gromov-Hausdorff de los subgrafos del grafo de Cayley  $\mathbb{G}$  de  $\mathbb{Z}$  determinado por el sistema de generadores  $S = \{\pm 1\}$ . Los grafos cuyos vértices son  $\{0, 1\}$  y  $\{-1, 0\}$  son isomorfos por lo que tienen la misma imagen mediante  $\rho$ , luego  $\rho$  no es inyectiva:



Los grafos  $\mathbb{H}_n$ , cuyos vértices son los puntos de los segmentos  $[-n, n]$  en  $\mathbb{Z}$ , tienen grupo de isotropía trivial, de manera que  $\rho(\mathbb{H}_n) = [\mathbb{H}_n, 0]$ . La sucesión  $\{\mathbb{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $\mathcal{G}$  al grafo total  $\mathbb{G}$ . Por otra parte, la isotropía de  $\mathbb{G}$  es  $\mathbb{Z}$  por tanto la imagen  $\rho(\mathbb{G})$  se corresponde con la clase de un grafo formado por un único vértice con un ciclo sobre el. Sin embargo, la sucesión  $\{\rho(\mathbb{H}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $\rho(\mathbb{G})$ , luego  $\rho$  no es continua.



### Espacio $\mathcal{G}_\bullet$ de clases de isomorfía de grafos localmente finitos con punto base

La relación de equivalencia  $\mathcal{R}_\bullet$  sobre  $\mathcal{G}_\bullet$  admite una estructura natural de grafo

$$\mathcal{K} = \{([\mathbb{H}, x], [\mathbb{H}', x']) \in \mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet \mid \exists y \sim x : [\mathbb{H}', x'] = [\mathbb{H}, y]\}.$$

En este caso la aplicación

$$\rho_{\mathcal{K}} : \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$$

asocia a cada clase de isomorfía  $[\mathbb{H}, x]$  de  $\mathbb{H}$  con punto base  $x$  la clase de isomorfía

$$\rho_{\mathcal{K}}([\mathbb{H}, x]) = [Aut(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}, Aut(\mathbb{H})(x)]. \tag{4.4.3}$$

del grafo  $Aut(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}$  obtenido al cocientar  $\mathbb{H}$  por la acción natural del grupo de automorfismos  $Aut(\mathbb{H})$  con punto base la órbita  $Aut(\mathbb{H})x$  de  $x$ .

Como en el caso de la aplicación  $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , la aplicación  $\rho_{\mathcal{K}} : \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  no es ni inyectiva, ni continua.

**Proposición 4.4.3.** *Un elemento  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  es un punto fijo de la aplicación  $\rho_K: \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  si y solo si  $\mathbb{H}$  no tiene aristas múltiples y es rígido, es decir,  $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{Id\}$ .*

*Demostración.* Si  $\mathbb{H}$  es un grafo sin aristas múltiples y  $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{Id\}$  entonces, usando la igualdad (4.4.3), se deduce que  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  es un punto fijo de la aplicación  $\rho_K$ .

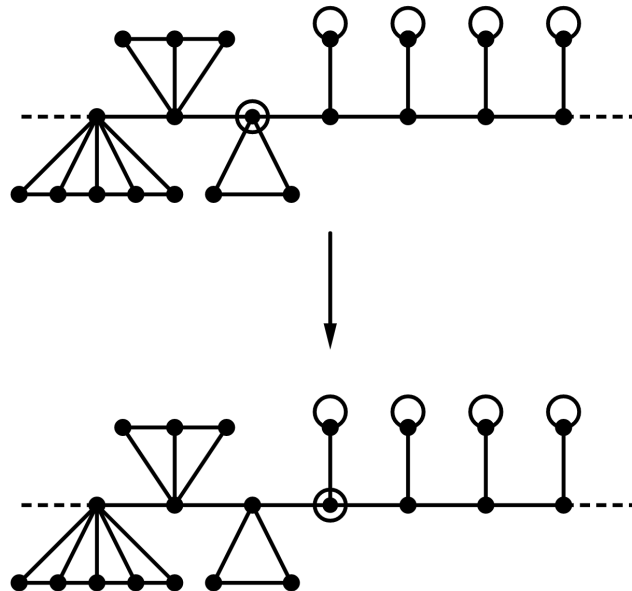
Recíprocamente si  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  es un punto fijo entonces  $\mathbb{H}$  no tiene aristas múltiples ya que en la imagen de  $\rho_K$  solo hay clases de grafos sin aristas múltiples. Si  $\text{Aut}(\mathbb{H}) \neq \{Id\}$  entonces existen dos vértices  $y$  e  $z \in \mathbb{H}$  distintos en la misma órbita de la acción de  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ . Por tanto, dado un  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $y$  e  $z \in B_{\mathbb{H}}(x, r)$  se verifica que  $\sharp B_{\mathbb{H}}(x, r) > \sharp B_{\text{Aut}(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}}(\text{Aut}(\mathbb{H})(x), r)$ , de manera que  $[\mathbb{H}, x]$  no es un punto fijo de  $\rho_K$ .  $\square$

El hecho de que los grafos estén enraizados juega un papel fundamental a la hora de probar esta proposición. En el siguiente ejemplo se construye un grafo sin aristas múltiples y no rígido donde la aplicación  $\rho_K$  conserva la estructura de grafo pero no la posición de la raíz.

**Ejemplo 4.4.4.** Sea  $\mathbb{G}$  el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}$  con el conjunto de generadores  $\{\pm 1\}$ , sea  $\mathbb{S}_i$  con  $i \in \mathbb{N}$  el árbol de  $n$  vértices con valencia acotada por 2 (es decir, la línea de longitud  $i$ ) y sea  $\mathbb{O}$  el grafo con un solo vértice y una sola arista (uniendo dicho vértice consigo mismo). Sea  $v$  la función que asigna un grafo a cada número entero:

$$v(i) = \begin{cases} \mathbb{S}_{1+2^{-1+n}}, & \text{si } i > 0, \\ \mathbb{O}, & \text{si } i \leq 0. \end{cases}$$

Ahora se construye el grafo  $\mathbb{H}$  uniendo cada vértice  $i$  del grafo  $\mathbb{G}$  mediante una arista a cada uno de los vértices de los grafos  $v(i)$  (nótese que para cada  $i \leq 0$  se consideran copias diferentes de  $\mathbb{O}$ ).



El grupo de automorfismos del grafo  $\mathbb{H}$  no es trivial ya que los  $v(i)$  con  $i > 0$  proporcionan vértices cuya órbita consta de 2 elementos. Aunque las clases de isomorfía  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  no son puntos fijos de la aplicación  $\rho_K$  la  $\mathcal{R}_\bullet$ -clase que forman es  $\rho_K$ -invariante, a pesar de que  $\rho_K^{-1}([\mathbb{H}, x]) \not\subset \mathcal{R}_\bullet[[\mathbb{H}, x]]$ .



## 4.5. La aplicación $v$

**Definición 4.5.1.** Sea  $v: \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  la aplicación descrita en la sección 4.2 y definida por

$$v([\mathbb{H}, x]) = [\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}]$$

donde  $\tilde{\mathbb{H}}$  es la cubierta universal del grafo  $\mathbb{H}$  y  $\tilde{x}$  es un punto de la fibra de  $x$ .

**Proposición 4.5.2.** *La aplicación  $v: \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  es una aplicación continua verificando  $v(\mathcal{R}_\bullet[[\mathbb{H}, x]]) = \mathcal{R}_\bullet[[\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}]]$ .*

*Demostración.* Sea  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet$  y su imagen

$$v([\mathbb{H}, x]) = [\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}]$$

en  $\mathcal{G}_\bullet$ . La bola  $B_{\mathcal{G}_\bullet}([\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}], e^{-n})$  está formada por las clases de isomorfía de grafos cuyas bolas de radio  $n$  centradas en el punto base son isomorfas a  $B_{\tilde{\mathbb{H}}}(\tilde{x}, n)$ . Para cada elemento

$$[\mathbb{H}', x'] \in v^{-1}(B_{\mathcal{G}_\bullet}([\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}], e^{-n})),$$

se tiene que

$$v([\mathbb{H}', x']) = [\tilde{\mathbb{H}}', \tilde{x}' ] \in B_{\mathcal{G}_\bullet}([\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}], e^{-n}),$$

donde  $\tilde{\mathbb{H}}'$  es la cubierta universal de  $\mathbb{H}'$  con punto base  $\tilde{x}'$ . Esto significa que

$$B_{\tilde{\mathbb{H}}'}(\tilde{x}', n) \cong B_{\tilde{\mathbb{H}}}(\tilde{x}, n)$$

luego

$$B_{\mathbb{H}'}(x', n) \cong B_{\mathbb{H}}(x, n).$$

Ahora se comprueba que

$$B_{\mathcal{G}_\bullet}([\mathbb{H}', x'], e^{-n}) \subset v^{-1}(B_{\mathcal{G}_\bullet}([\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}], e^{-n})).$$

En efecto, si  $[\mathbb{H}'', x''] \in B_{\mathcal{G}_\bullet}([\mathbb{H}', x'], e^{-n})$ , entonces

$$B_{\mathbb{H}''}(x'', n) \cong B_{\mathbb{H}'}(x', n).$$

Pasando a la cubierta universal se deduce que

$$B_{\tilde{\mathbb{H}}''}(\tilde{x}'', n) \cong B_{\tilde{\mathbb{H}}'}(\tilde{x}', n) \cong B_{\tilde{\mathbb{H}}}(\tilde{x}, n).$$

Luego

$$v([\mathbb{H}'', x'']) \in B_{\mathcal{G}_\bullet}([\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}], e^{-n}).$$

Por otro lado, la estructura de grafo de la cubierta universal  $\tilde{\mathbb{H}}$  viene determinada unicamente por la estructura de grafo de  $\mathbb{H}$ . Por tanto el cambio del punto base  $x$  solo supone cambiar el punto base de  $\tilde{x}$ , así que  $v$  es compatible con la relación  $\mathcal{R}_\bullet$ . Además dado un  $[\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}]$  puede obtenerse una preimagen  $[\mathbb{H}, x]$  cocientando  $\mathbb{H}$  por un subgrupo adecuado de su grupo de automorfismos. Luego  $v(\mathcal{R}_\bullet[[\mathbb{H}, x]]) = \mathcal{R}_\bullet[[\tilde{\mathbb{H}}, \tilde{x}]]$ .  $\square$

La aplicación  $v$  es en realidad una retracción continua de  $\mathcal{G}_\bullet$  sobre el subespacio  $\mathcal{A}_\bullet$  de las clases de isomorfía de árboles. Al restringirse al subespacio  $\mathcal{G}_\bullet^{2K}$  de clases de isomorfía de grafos de valencia acotada  $\leq 2K$ , entonces

$$v: \mathcal{G}_\bullet^{2K} \rightarrow \mathcal{A}_\bullet^{2K} \subset \mathcal{G}_\bullet^{2K}$$

sigue siendo una retracción continua. Como se ha indicado en la sección 4.2, esta aplicación hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G}_\bullet^{2K} \\ & \nearrow \rho & \downarrow v \\ \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G}_\bullet^{2K} \end{array}$$

Ya que

$$v(\rho(\mathbb{H})) = v\left(\left[Iso(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}, \mathbf{1}\right]\right) = [\mathbb{H}, \mathbf{1}] = \iota(\mathbb{H}).$$

La razón de elegir trabajar con  $\rho$  en lugar de  $\rho_K$  es que si se sustituye  $\rho$  por  $\rho_K$  en el diagrama 4.2.2 se pierde la conmutatividad. En efecto, basta acudir al grafo descrito en 4.4.1 para encontrar un ejemplo donde dicho diagrama no sería conmutativo.

Como se dijo en la proposición 4.3.7, la aplicación

$$\rho: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$$

es una aplicación boreliana compatible con las relaciones de equivalencia  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_\bullet$  sobre  $\mathcal{F}_K$  y  $\mathcal{G}_\bullet^{2K}$  respectivamente.

De acuerdo con la cuestión 4.2.1, dado un grafo aleatorio

$$\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet^k, \mathbb{P})$$

el propósito consiste en construir un subgrafo aleatorio del grafo de Cayley  $\mathbb{F}_K$

$$\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{F}_K, \mathbb{P}_0)$$

que haga el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \Theta_0 \swarrow & & \searrow \Theta \\ \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}_\bullet^k \subset \mathcal{G}_\bullet^{2K} \end{array}$$

La idea es tomar  $K = 3k$  de modo que  $\mathbb{F}_K$  sea el grafo de Cayley del grupo libre  $F_{3k}$  construido a partir del sistema de generadores  $S = \{a_i^\epsilon, b_i^\epsilon, c_i^\epsilon\}_{i=1}^k$  con  $\epsilon = \pm 1$ . Se define  $\rho$  mediante la familia de homeomorfismos parciales construida a partir de  $S_0 = \{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^k$ , como se explica en la sección 4.4. A continuación se construye una sección

$$\sigma: \mathcal{G}_\bullet^k \rightarrow \mathcal{F}_K$$

de la aplicación

$$\rho: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$$

en restricción a  $\mathcal{G}_\bullet^k$  y se define

$$\Theta_0 = \sigma \circ \Theta: X \rightarrow \mathcal{F}_K.$$

Obsérvese que, en tal caso, la medida

$$\mathbb{P}_0 = (\Theta_0)_*(\mu) = \sigma_*(\Theta_*(\mu)) = \sigma_*(\mathbb{P}).$$

Por esta razón en lo sucesivo se prescindirá de las medidas para centrarse en la construcción de  $\sigma$ . Este proceso puede esquematizarse con el siguiente diagrama conmutativo donde las flechas discontinuas representan las aplicaciones que construir:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \swarrow \Theta_0 & & \searrow \Theta & \\
 \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}_\bullet^{2K} & \xleftarrow{\sigma} & \mathcal{G}_\bullet^k \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow v \\
 \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G}_\bullet^{2K} & \xleftarrow{\sigma} & \mathcal{G}_\bullet^k
 \end{array} \tag{4.5.4}$$

## 4.6. Coloreado y orientación de aristas

Como se acaba de comentar, para construir  $\sigma$ , será necesario levantar la aplicación

$$\rho: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^{2K}$$

al espacio  $\hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$  de las clases de isomorfía de grafos orientados y coloreados con valencia total (entrante y saliente)  $\leq 2K$ . Por construcción, los elementos de la imagen de  $\rho$  están representados por grafos no orientados cuyas aristas están etiquetadas o coloreadas por los elementos del sistema finito de generadores  $S_0 = \{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^k$  de  $\mathbb{F}_K$ , a partir del que se obtiene  $S = \{a_i^\epsilon, b_i^\epsilon, c_i^\epsilon\}_{i=1}^k$  simetrizando  $S_0$ ,  $\epsilon = \pm 1$ . La misma propiedad puede exigirse a los representantes de las clases en  $\hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$ , aunque no es imprescindible, ya que la propiedad se limitará a las clases en la imagen de la aplicación levantada.

Se tiene una aplicación

$$\hat{\rho}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$$

definida por

$$\hat{\rho}(\mathbb{H})[\mathcal{R}[\mathbb{H}], \mathbb{H}] = [Iso(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}, \mathbb{H}]$$

donde  $Iso(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}$  está dotado de la orientación inducida por la orientación de  $\mathbb{H} \subset \mathbb{F}_k$  relativa al sistema de generadores  $S_0$ .

Si  $o: \hat{\mathcal{G}}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$  designa la aplicación que envía la clase  $[\hat{\mathbb{H}}, x]$  de un grafo orientado en la clase  $[\mathbb{H}, x]$  del grafo no orientado subyacente, entonces  $\hat{\rho}$  hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K} & \\
 \hat{\rho} \nearrow & & \downarrow o \\
 \mathcal{F}_K & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{G}_\bullet^{2K}
 \end{array}$$

Siguiendo un esquema similar de demostración al dado para la proposición 4.3.6 puede probarse que  $\hat{\rho}$  es boreliana. Ahora bien, teniendo en cuenta que la aplicación  $\rho$  es una aplicación no expansiva, lo que se demuestra de modo similar a la demostración de la proposición 4.1.6, se puede probar a partir del siguiente resultado:

**Proposición 4.6.1.** *La aplicación  $\hat{\rho}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$  es boreliana.*

*Demostración.* Se considera un elemento  $\mathbb{H} \in \mathcal{F}_K$  y un representante  $\hat{\mathbb{H}}$  de la clase  $\hat{\rho}(\mathbb{H}) = [\hat{\mathbb{H}}]$ . Entonces

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{-1}(B_{\hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}}(\hat{\rho}(\mathbb{H}), e^{-n})) &= \{\mathbb{H}' \in \mathcal{F}_K \mid \hat{\rho}(\mathbb{H}') \in B_{\hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}}(\hat{\rho}(\mathbb{H}), e^{-n})\} \\ &= \{\mathbb{H}' \in \mathcal{F}_K \mid d(\hat{\rho}(\mathbb{H}'), \hat{\rho}(\mathbb{H})) \leq e^{-n}\} \\ &= \{\mathbb{H}' \in \mathcal{F}_K \mid R = R(\hat{\rho}(\mathbb{H}'), \hat{\rho}(\mathbb{H})) \geq n\} \\ &= \{\mathbb{H}' \in \mathcal{F}_K \mid B_{\hat{\mathbb{H}}'}(\hat{\mathbf{1}}, n) \cong B_{\hat{\mathbb{H}}}(\hat{\mathbf{1}}, n)\} \end{aligned}$$

donde  $\hat{\mathbf{1}}$  representa a la clase del elemento neutro  $\mathbf{1}$  módulo  $Iso(\mathbb{H})$

Sea  $\hat{B}$  el grafo  $B_{\hat{\mathbb{H}}}(\hat{\mathbf{1}}, n)$  y  $\mathbb{H}' \in \hat{\rho}^{-1}(B_{\hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}}(\hat{\rho}(\mathbb{H}), e^{-n}))$ . Se consideran los diagramas de fibrados localmente triviales con fibra discreta:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\hat{B}) \hookrightarrow \mathbb{H} & & (p')^{-1}(\hat{B}') \hookrightarrow \mathbb{H}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{B} \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}} & & \hat{B}' \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \downarrow p & & \downarrow p' \\ \hat{B} \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}} & & \hat{B}' \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}}' \end{array}$$

En restricción a las componentes conexas de  $p^{-1}(\hat{B})$  y  $(p')^{-1}(\hat{B}')$  que contienen al elemento neutro, se obtienen cubiertas universales de  $\hat{B}$

$$\begin{array}{ccc} U \hookrightarrow \mathbb{H} & & U' \hookrightarrow \mathbb{H}' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ \hat{B} \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}} & & \hat{B}' \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \downarrow p & & \downarrow p' \\ \hat{B} \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}} & & \hat{B}' \hookrightarrow \hat{\mathbb{H}}' \end{array}$$

De hecho, los árboles  $U$  y  $U'$  son isomorfos y sus grupos de automorfismos como subgrafos de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{H}'$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} Iso(\mathbb{H})_U &= \{h \in Iso(\mathbb{H}) \mid Uh^{-1} = U\} \\ Iso(\mathbb{H}')_{U'} &= \{h' \in Iso(\mathbb{H}') \mid U'(h')^{-1} = U'\}. \end{aligned}$$

Aunque son subgrupos del grupo  $Iso(U) = \{h \in \mathbb{F}_K \mid Uh^{-1} = U\}$ , en principio no tienen por qué coincidir con éste.

Como  $U$  es una componente conexa de  $p^{-1}(\hat{B})$  y  $(p')^{-1}(\hat{B}')$ , se verifica que:

$$\begin{aligned} Iso(\mathbb{H})_U \setminus U &= B_{\hat{\mathbb{H}}}(\hat{\mathbf{1}}, n) = \hat{B} \\ Iso(\mathbb{H}')_{U'} \setminus U' &= B_{\hat{\mathbb{H}}'}(\hat{\mathbf{1}}, n). \end{aligned}$$

Luego es necesario que

$$Iso(\mathbb{H})_U = Iso(\mathbb{H}')_{U'}.$$

Ahora bien, aunque  $\mathbb{H}'$  contenga al motivo  $U$  y verifique  $Iso(\mathbb{H})_U = Iso(\mathbb{H}')_{U'}$ , esto no garantiza que  $\mathbb{H}' \in \hat{\rho}^{-1}(B_{\hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}}([\hat{\mathbb{H}}], e^{-n}))$ .

#### 4. Universalidad de los espacios de Gromov-Hausdorff

---

Para asegurar que  $U$  es una componente conexa de  $p^{-1}(B_{\hat{\mathbb{H}}'}(\hat{\mathbf{1}}, n))$  es necesario añadir una condición adicional para cada  $h \in Iso(\mathbb{H}') - Iso(\mathbb{H})_U$ :

$$Uh^{-1} \cap \partial(U) = \emptyset,$$

donde  $\partial(U)$  es el borde de  $U$  descrito como unión del borde interior

$$\partial_i(U) = \{u \in U \mid \exists v \notin U: v \sim u\}$$

y el borde exterior

$$\partial_e(U) = \{u \in \mathbb{H}' - U \mid \exists u \in U: v \sim u\}.$$

Se recuerda que  $u \sim v$  significa que los vértices  $u$  y  $v$  están unidos por una arista.

Si se denota  $X_U = \{\mathbb{H}' \in \mathcal{F}_K \mid U \subset \mathbb{H}'\}$ , entonces el conjunto  $\hat{\rho}^{-1}(B_{\hat{\mathcal{G}}^{2K}}([\hat{\mathbb{H}}], e^{-n}))$  es igual a

$$\{\mathbb{H}' \in X_U \mid Iso(\mathbb{H})_U = Iso(\mathbb{H}')_U, Uh^{-1} \cap \partial U = \emptyset; \forall h \in Iso(\mathbb{H}') - Iso(\mathbb{H}')_U\},$$

que puede reescribirse como

$$Y_U \cap (X_U - Z_U)$$

donde  $Y_U$  es

$$\{\mathbb{H}' \in X_U \mid Iso(\mathbb{H})_U = Iso(\mathbb{H}')_U\}$$

y  $Z_U$  es

$$\{\mathbb{H}' \in X_U \mid \exists h \in Iso(\mathbb{H}') - Iso(\mathbb{H}')_U: Uh^{-1} \cap \partial(U) \neq \emptyset\}.$$

Para concluir, basta probar el carácter boreliano de estos conjuntos. En primer lugar,  $X_U$  se trata de un conjunto de Borel como se prueba en [24]. La familia de bolas  $B_N = \{B_{\mathcal{F}_K}(\mathbb{H}', e^{-N}) \mid \mathbb{H}' \in X_U\}$  es finita ya que forma una partición por abiertos de un subconjunto cerrado  $X_U$  de un compacto  $\mathcal{F}_K$ . Entonces

$$Y_U = \{\mathbb{H}' \in X_U \mid Iso(\mathbb{H})_U = Iso(\mathbb{H}')_U\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{B' \in B_N} \bigcap_{g \in Iso(\mathbb{H})_U} B'g^{-1}$$

es un boreliano. Sea  $\mathcal{S} = \{h \in \mathbb{F}_K - Iso(\mathbb{H})_U \mid Uh^{-1} \cap \partial(U) \neq \emptyset\}$ . El conjunto

$$\begin{aligned} Z_U &= \{\mathbb{H}' \in X_U \mid \exists h \in Iso(\mathbb{H}') - Iso(\mathbb{H}')_U: Uh^{-1} \cap \partial(U) \neq \emptyset\} \\ &= \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{B' \in B_N} \bigcup_{g \in \mathcal{S}} \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} B'g^m \end{aligned}$$

también es un boreliano. Por tanto se deduce que

$$\hat{\rho}^{-1}(B_{\hat{\mathcal{G}}^{2K}}(\hat{\rho}(\mathbb{H}), e^{-n})) = Y_U \cap (X_U - Z_U)$$

es un conjunto de Borel. □

Para terminar se considera la aplicación

$$\hat{\iota}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}^{2K}$$

análoga a la aplicación  $\iota: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}^{2K}$ , es decir, que asocia a cada subárbol  $\mathbb{H}$  de  $\mathbb{F}_K$  el grafo orientado con aristas etiquetadas que se obtiene a partir de  $S_0 = \{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^k$  del modo habitual.

**Proposición 4.6.2.** *La aplicación  $\hat{\iota}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$  es una isometría.*

*Demostración.* En el dominio, la distancia entre  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{H}'$  viene dada por:

$$d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = e^{-R(\mathbb{H}, \mathbb{H}')}$$

donde  $R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = \sup\{R \geq 0 \mid B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R) = B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R)\}$ .

La distancia de las imágenes viene dada por:

$$d([\hat{\mathbb{H}}, \mathbf{1}], [\hat{\mathbb{H}}', \mathbf{1}]) = e^{-R([\hat{\mathbb{H}}, \mathbf{1}], [\hat{\mathbb{H}}', \mathbf{1}])}$$

donde  $R([\hat{\mathbb{H}}, \mathbf{1}], [\hat{\mathbb{H}}', \mathbf{1}]) = \sup\{R \geq 0 \mid [B_{\hat{\mathbb{H}}}(\mathbf{1}, R)] = [B_{\hat{\mathbb{H}}'}(\mathbf{1}, R)]\}$ .

La aplicación  $\hat{\iota}$  es claramente biyectiva. Por tanto las bolas  $B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R)$  y  $B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R)$  de radio  $R \geq 0$  sobre los grafos  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{H}' \in \mathcal{F}_K$  son iguales si y solo si las clases  $[B_{\hat{\mathbb{H}}}(\mathbf{1}, R)] = \hat{\iota}(B_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}, R))$  y  $[B_{\hat{\mathbb{H}}'}(\mathbf{1}, R)] = \hat{\iota}(B_{\mathbb{H}'}(\mathbf{1}, R))$  coinciden, con lo que llega al resultado.  $\square$

## 4.7. Universalidad del espacio $\mathcal{F}_K$

En esta sección se construye una sección

$$\sigma: \mathcal{G}_{\bullet}^k \rightarrow \mathcal{F}_K$$

de la aplicación  $\rho: \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}^{2K}$  dando una respuesta afirmativa a la cuestión 4.2.1. Para ello, después de la última observación de la sección anterior, basta construir una aplicación

$$\hat{\sigma}: \mathcal{G}_{\bullet}^k \subset \mathcal{G}_{\bullet}^{2K} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$$

de modo que la imagen de  $\hat{\sigma}$  esté contenida en la imagen de  $\hat{\iota}$ , es decir, tal que

$$\hat{\iota} \circ \sigma = \hat{\sigma}.$$

Para cada elemento  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_{\bullet}^k$ , la idea es construir primero un grafo orientado  $\hat{\mathbb{H}}$  con aristas etiquetadas por  $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^k$  de modo que  $o([\hat{\mathbb{H}}, x]) = [\mathbb{H}, x]$  y a continuación levantar orientaciones y etiquetados a la cubierta universal  $\mathbb{U}$  de  $\mathbb{H}$  con punto base  $u$  de modo que se obtenga un grafo orientado  $(\mathbb{U}, u)$  que representa una clase

$$\hat{\sigma}([\mathbb{H}, x]) = [\hat{\mathbb{U}}, u].$$

Si se cambia el punto  $x$  por un punto  $y$ , los grafos orientados correspondientes no son isomorfos. Luego la aplicación  $[\mathbb{H}, x] \rightarrow [\hat{\mathbb{H}}, x]$  no es compatible con  $\hat{\mathcal{R}}_{\bullet}$  y  $\mathcal{R}_{\bullet}$ . Sin embargo, sea  $\hat{\mathbb{H}}$  fuertemente conexo o no, la orientación y coloración de las aristas se levanta a  $\mathbb{U}$  con independencia de la elección de punto base  $u$ .

Para construir  $\hat{\mathbb{H}}$  se usa una aplicación auxiliar que proporciona un árbol recubridor de manera recurrente mediante el *algoritmo BFS de búsqueda en anchura*, ver [8]. Sea

$$T = T_{BFS}: \mathcal{G}_{\bullet}^k \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}^k$$

la aplicación que asocia a cada clase  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_{\bullet}^k$  la clase  $T([\mathbb{H}, x]) = [\mathbb{T}, x]$  del árbol recubridor  $\mathbb{T}$  de  $\mathbb{H}$  construido por medio del algoritmo BFS. La aplicación  $T$  se obtiene como límite proyectivo de las aplicaciones

$$T_n: \mathcal{G}_\bullet^k(n) \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^k(n), \quad n \geq 0,$$

que hacen conmutativos el diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\bullet^k(n+1) & \xrightarrow{T_{n+1}} & \mathcal{G}_\bullet^k(n+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{G}_\bullet^k(n) & \xrightarrow{T_n} & \mathcal{G}_\bullet^k(n) \end{array}$$

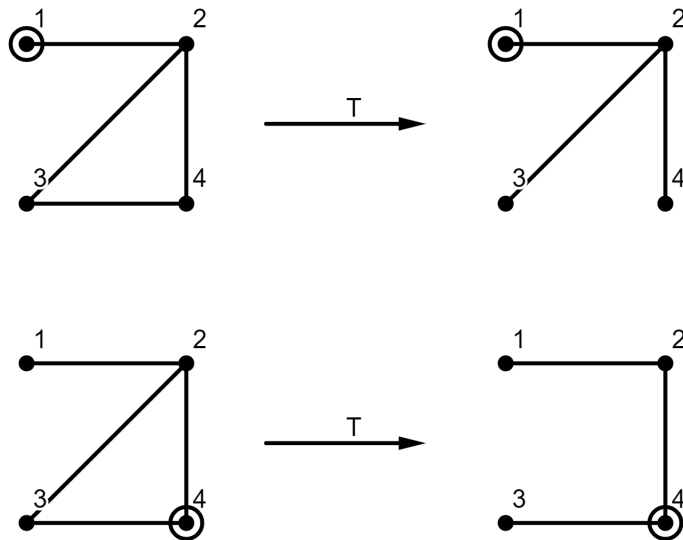
De forma que, para cada clase  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_\bullet^k(n)$ , la imagen  $T_n([\mathbb{H}, x]) = [\mathbb{T}_n, x]$  donde  $\mathbb{T}_n$  se obtiene mediante la eliminación de, encada vértice  $y \in \mathbb{H} - \mathbb{T}_{n-1}$ , todas las aristas adyacentes a  $y$  salvo una que conecte  $y$  con  $\mathbb{T}_{n-1}$ . Y  $T_0$  lleva cualquier elemento de  $\mathcal{G}_\bullet^k(0)$  a la clase del grafo punteado con un solo vértice y sin aristas.

Gracias a esto se tiene el siguiente lema:

**Lema 4.7.1.** *La aplicación  $T = T_{BFS}: \mathcal{G}_\bullet^k \rightarrow \mathcal{G}_\bullet^k$  es continua.* □

Cabe destacar que la aplicación  $T$  no es compatible con la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_\bullet$  de  $\mathcal{G}_\bullet^k$ :

**Ejemplo 4.7.2.** Sea  $\mathbb{H}$  el grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{1, 2, 3, 4\}$  y cuyo conjunto de aristas es  $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ . Sea  $\mathbb{H}_1$  el grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{1, 2, 3, 4\}$  y cuyo conjunto de aristas es  $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ . Sea  $\mathbb{H}_4$  el grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{1, 2, 3, 4\}$  y cuyo conjunto de aristas es  $\{(1, 2), (3, 4), (2, 4)\}$ . En esta situación se verifica que  $T([\mathbb{H}, 1]) = [\mathbb{H}_1, 1]$  y que  $T([\mathbb{H}, 4]) = [\mathbb{H}_4, 4]$ , pero  $[\mathbb{H}_1, 1]$  y  $[\mathbb{H}_4, 4]$  no están  $\mathcal{R}_\bullet$ -relacionados.



Ahora, para construir  $\hat{\mathbb{H}}$ , se dota a las aristas de  $\mathbb{T}$  de la orientación que viene determinada por el orden de los vértices que proporciona el algoritmo BFS y se colorean usando los colores  $a_1, \dots, a_k$  de manera coherente con el orden de modo que dos aristas con el mismo origen tengan colores diferentes.

Las aristas de  $\mathbb{H}$  que no pertenecen a  $\mathbb{T}$  se orientan de cualquier modo, por ejemplo siguiendo la orientación determinada por el orden de los vértices vecinos de  $\mathbb{T}$ . Se llamarán *horizontales* a las aristas de  $\mathbb{T}$  y *verticales* a las restantes aristas de  $\mathbb{H}$ .

Las aristas verticales se colorean de modo que cuando compartan vértice tengan colores diferentes. En principio, usando  $b_1, \dots, b_k$  se lograría hacerlo en torno al primer vértice considerado. Para colorear las aristas que salen de un vértice vecino, sin preocuparse de repetir los colores, se usan los restantes colores  $c_1, \dots, c_k$ .

De este modo, se obtiene un grafo orientado con aristas coloreadas  $\hat{\mathbb{H}}$  que representa una clase  $[\hat{\mathbb{H}}, x] \in \hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$ . La clase del grafo no orientado subyacente  $o([\hat{\mathbb{H}}, x]) \in \mathcal{G}_{\bullet}^{2K}$  es la imagen de  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_{\bullet}^{2K}$ .

**Lema 4.7.3.** *No hay dos elementos de  $\mathcal{G}_{\bullet}^k$  tales que los elementos correspondientes de  $\hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$  estén  $\hat{\mathcal{R}}_{\bullet}$ -relacionados.*

*Demostración.* En efecto, para cada elemento  $[\hat{\mathbb{H}}, x] \in \hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$  asociado a  $[\mathbb{H}, x] \in \mathcal{G}_{\bullet}^k$ , el vértice  $x$  es el único de  $\hat{\mathbb{H}}$  al que no llega ninguna arista coloreada con una  $a_1, \dots, a_k$  con  $i = 1, \dots, d$ .  $\square$

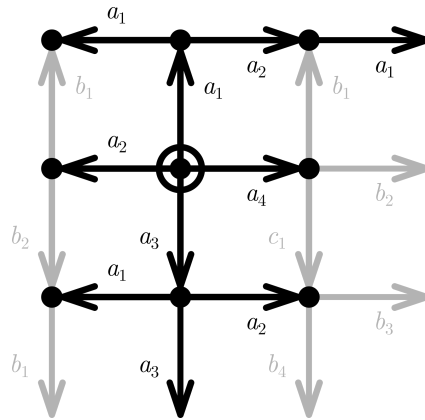


Figura 4.7.1: Las aristas negras se corresponden a las del subárbol  $\mathbb{T}$ . Como puede apreciarse la arista coloreada por el color  $c_1$ , no puede colorearse con ningún color del tipo  $b$ .

No obstante,  $[\hat{\mathbb{H}}, x]$  no pertenece a la imagen de la aplicación  $\hat{\iota}: \mathcal{F}_K \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_{\bullet}^{2K}$ . Para completar la construcción de  $\hat{\sigma}$ , se considera la cubierta universal  $\mathbb{U}$  de  $\mathbb{H}$  con punto base fijado  $u$  que se proyecte sobre  $x$  y se levanta la orientación y el coloreado de las aristas de  $\mathbb{H}$  para obtener un grafo orientado con aristas coloreadas  $\hat{\mathbb{U}}$  tal que  $o([\hat{\mathbb{U}}, u]) = [\mathbb{U}, u]$ . Ahora se define

$$\hat{\sigma}([\mathbb{H}, x]) = [\hat{\mathbb{U}}, u]$$

Por fin,

$$\sigma: \mathcal{G}_{\bullet}^k \rightarrow \mathcal{F}_K$$

está dado por

$$\hat{\iota} \circ \sigma = \hat{\sigma}$$

Por construcción

$$\hat{\rho}(\hat{\sigma}([\mathbb{H}, x])) = \hat{\rho}([\hat{\mathbb{U}}, u]) = \left[ Iso(\hat{\mathbb{U}}) \setminus \hat{\mathbb{U}}, Iso(\hat{\mathbb{U}}u) \right] = [\hat{\mathbb{U}}, x]$$



y eso implica que

$$\rho(\sigma([\mathbb{H}, x])) = o([\hat{\mathbb{H}}, x]) = [\mathbb{H}, x].$$

**Proposición 4.7.4.** *La aplicación  $\sigma: \mathcal{G}_\bullet^k \rightarrow \mathcal{F}_K$  es continua.*

*Demostración.* En realidad se prueba que la aplicación

$$\hat{\sigma}: \mathcal{G}_\bullet^k \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}$$

es continua. Para conseguir que  $\hat{\sigma}$  sea continua basta con asignar orientaciones y colores de manera recurrente usando la aplicación  $T_{BFS}$ . De esta forma, la aplicación  $\hat{\sigma}$  se obtiene como límite proyectivo de las aplicaciones

$$\hat{\sigma}_n: \mathcal{G}_\bullet^k(n) \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}(n), \quad n \geq 0$$

Para  $n = 0$ , la aplicación  $\hat{\sigma}_0: \mathcal{G}_\bullet^k(0) \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}(0)$  es obviamente continua ya que se trata de la identidad. Si se supone que  $\hat{\sigma}_n$  es continua, entonces  $\hat{\sigma}_{n+1}$  hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\bullet^k(n+1) & \xrightarrow{\hat{\sigma}_{n+1}} & \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}(n+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{G}_\bullet^k(n) & \xrightarrow{\hat{\sigma}_n} & \hat{\mathcal{G}}_\bullet^{2K}(n) \end{array}$$

y es continua. □

Si se restringe la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{F}_K$  a la saturación de la imagen  $\sigma(\mathcal{G}_\bullet^k)$  de  $\sigma$ , entonces  $\sigma(\mathcal{G}_\bullet^k)$  es un dominio fundamental compacto de dicha restricción. Desde el punto de vista de la medida, la medida  $\mathbb{P}_0 = \sigma_*(\mathbb{P})$  es disipativa. Sin embargo, eso no implica que la ley  $\mathbb{P}$  del grafo aleatorio lo sea, ni que la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_\bullet$  sobre  $\mathcal{G}_\bullet^k$  admita un dominio fundamental ya que las clases de equivalencia representadas por los estado del grafo aleatorio  $\Theta$  son uniones de diferentes clases de equivalencia representadas por estados del grafo aleatorio  $\Theta_0$ .

**Teorema 4.7.5.** *Dado un grafo aleatorio  $\Theta: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{G}_\bullet^k, \mathbb{P})$ , existe un subgrafo aleatorio  $\Theta_0: (X, \mu) \rightarrow (\mathcal{F}_K, \mathbb{P}_0)$  con ley  $\mathbb{P}_0 = \sigma_*(\mathbb{P})$  y rango  $K = 3k$  tal que  $\rho \circ \Theta_0 = \Theta$ . □*

# Bibliografía

- [1] Alcalde Cuesta, F., Lozano Rojo, A. y Macho Stadler, M.: *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*. En *Équations différentielles et singularités. En l'honneur de J. M. Aroca*, vol. 323, págs. 1–16. Paris: Société Mathématique de France, 2009.
- [2] Alcalde Cuesta, F., Lozano Rojo, A. y Vázquez Martínez, A. C.: *Insertion-tolerance and repetitiveness of random graphs*. *Stochastics and Dynamics*, 17(03):1750023, 2017.
- [3] Aldous, D. y Lyons, R.: *Processes on Unimodular Random Networks*. *Electron. J. Probab.*, 12:1454–1508, 2007.
- [4] Ash, R. B.: *Measure, Integration, and Functional Analysis*. Academic Press, 1972, ISBN 9781483265100.
- [5] Benjamini, I. y Curien, N.: *Ergodic theory on stationary random graphs*. *Electron. J. Probab.*, 17:20 pp., 2012.
- [6] Benjamini, I. y Schramm, O.: *Recurrence of Distributional Limits of Finite Planar Graphs*. *Electron. J. Probab.*, 6:13 pp., 2001.
- [7] Blanc, E.: *Propriétés génériques des laminations*. Tesis de Doctorado, Université Claude Bernard (Lyon), 2001. dirigida por Hector, Gilbert.
- [8] Cormen, T. H., Leiserson, C. E. y Rivest, R. L.: *Introduction to Algorithms*. MIT Electrical Engineering and Computer Science. The MIT Press, 1990, ISBN 0262530910.
- [9] Denker, M., Grillenberger, C. y Sigmund, K.: *Ergodic Theory on Compact Spaces*, vol. 527 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976, ISBN 978-3-540-07797-8.
- [10] Feldman, J. y Moore, C. C.: *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2):289–324, 1977.
- [11] Gaboriau, D.: *Coût des relations d'équivalence et des groupes*. *Inventiones mathematicae*, 139(1):41–98, Jan 2000.
- [12] Gaboriau, D.: *Invariant percolation and harmonic Dirichlet functions*. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 15(5):1004–1051, Oct 2005.

- [13] Gaboriau, D. y Lyons, R.: *A measurable-group-theoretic solution to von Neumann's problem*. *Inventiones mathematicae*, 177(3):533–540, Sep 2009.
- [14] Ghys, E.: *Laminations par surfaces de Riemann*. *Panor. Synthèses*, 8:49–95, 1999.
- [15] Giordano, T., Putnam, I. y Skau, C.: *Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems*. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24(2):441–475, 2004.
- [16] Goodman, S. E. y Plante, J. F.: *Holonomy and averaging in foliated sets*. *J. Differential Geom.*, 14(3):401–407, 1979.
- [17] Grimmett, G.: *Percolation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [18] Haefliger, A.: *Foliations and compactly generated pseudogroups*, págs. 275–295. World Scientific, 2011.
- [19] Häggström, O. y Peres, Y.: *Monotonicity of uniqueness for percolation on Cayley graphs: all infinite clusters are born simultaneously*. *Probability Theory and Related Fields*, 113(2):273–285, Feb 1999.
- [20] Kaimanovich, V. A.: *Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable*. En Turaev, V. y Vershik, A. (eds.): *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry: Rokhlin's memorial*, vol. 202 de *American Mathematical Society Translations: Series 2*, págs. 151–166. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2001.
- [21] Kaimanovich, V. A.: *Equivalence relations and random graphs: an introduction to graphical dynamics*. En *Ergodic Theory and Dynamical Systems: Perspectives and Prospects del 2010/2011 EPSRC Symposium on Ergodic Theory and Dynamical Systems*, University of Warwick, April 2012.
- [22] Katok, A. y Hasselblatt, B.: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [23] Klenke, A.: *Probability Theory: A Comprehensive Course*. Universitext. Springer-Verlag London, 2014, ISBN 978-1-4471-5361-0.
- [24] Lozano Rojo, A.: *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tesis de Doctorado, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, 2008. dirigida por Fernando Alcalde Cuesta y Marta Macho Stadler.
- [25] Lyons, R., Pemantle, R. y Peres, Y.: *Ergodic theory on Galton-Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure*. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(3):593–619, 1995.
- [26] Lyons, R. y Peres, Y.: *Probability on Trees and Networks*. *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, 2017.
- [27] Lyons, R. y Schramm, O.: *Indistinguishability of Percolation Clusters*. *Ann. Probab.*, 27(4):1809–1836, Oct. 1999.

- [28] Paulin, F.: *Proprietes Asymptotiques des Relations d'Equivalences Mesurees Discretes*. Markov Process. Related Fields, 5(2):163–200, 1999, ISSN 1024-2953.
- [29] Renault, J.: *A Groupoid Approach to  $C^*$ -Algebras*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [30] Schonmann, R. H.: *Percolation in  $\infty+1$  dimensions at the uniqueness threshold*. En *Perplexing Problems in Probability: Festschrift in Honor of Harry Kesten*, vol. 44 de *Progress in Probability*, págs. 53–67. Birkhäuser, 1999.
- [31] Srivastava, S. M.: *A Course on Borel Sets*, vol. 180 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [32] Walters, P.: *An Introduction to Ergodic Theory*, vol. 79 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1982, ISBN 978-0-387-95152-2.

