Sandro Caeiro Oliveira

CARACTERIZACIÓN DE ESPACIOS HOMOGÉNEOS TRIDIMENSIONALES EN TÉRMINOS DE SU CURVATURA DE RICCI

139a
2019

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sandro Caeiro Oliveira

CARACTERIZACIÓN DE ESPACIOS HOMOGÉNEOS TRIDIMENSIONALES EN TÉRMINOS DE SU CURVATURA DE RICCI

139a

2019

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Caracterización de espacios homogéneos tridimensionales en términos de su curvatura de Ricci

Sandro Caeiro Oliveira

Xullo 2018

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar tengo que dar las gracias a Eduardo García Río y a Miguel Brozos Vázquez, que, después de todos los altibajos que ha sufrido este trabajo, han sabido redirigir todo el esfuerzo para conseguir llevarlo a cabo. Además, debo agradecerles todas las horas dentro y fuera del despacho que le han dedicado a las correcciones, que no han sido pocas. Nunca antes había tenido tanta razón la típica frase "sin vosotros, esto no habría sido posible".

Además, me gustaría hacer mención a algunos profesores que también aportaron su granito de arena, proporcionando algunos de los recursos que se citan a lo largo de la memoria. Gracias, Elena Vázquez Abal, Miguel Domínguez Vázquez y José Antonio Oubiña.

Por otro lado, por su apoyo durante estos cinco años, y en especial este curso, en los buenos momentos y, sobre todo, en los malos y en los peores, me veo obligado a darle las gracias a Bea. Conocer a una amiga así es, sin duda, lo mejor que me han dado las matemáticas.

Por último, y no menos importante, necesito agradecer, esta vez sin dar nombre alguno, a cierta persona que ha sufrido mi estrés tanto como yo, y que me ha brindado su apoyo cuando más lo necesitaba.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es caracterizar las variedades homogéneas de dimensión 3 utilizando el operador de Ricci de cada una de ellas, o equivalentemente, las curvaturas de Ricci de cada variedad estudiada. Para realizar tal estudio, se introducirán las condiciones tipo Einstein, cada una de ellas determinada por un tensor de tipo (0,2) asociado a la curvatura.

Resumo

O obxectivo principal deste traballo é caracterizar as variedades homoxéneas de dimensión 3 facendo uso do operador de Ricci de cada unha delas, ou equivalentemente, das curvaturas de Ricci de cada variedade estudada. Para levar a cabo tal estudo, introduciranse as condicións tipo Einstein, cada una delas determinada por cadanseu tensor de tipo (0,2) asociado á curvatura.

Abstract

The main purpose of this project is to describe the 3-dimensional homogeneous spaces through the Ricci operator, or in an equivalent way, through the Ricci curvatures. To do such an analysis, we will introduce the Einstein-like conditions, each of them determined by a tensor associated with the curvature.

Introducción

En este Trabajo de Fin de Máster se plantea el siguiente problema: ¿podemos caracterizar variedades de Riemann en términos de curvatura? En concreto, nos centramos en los espacios homogéneos de dimensión 3.

Antes de poder resolver la pregunta planteada, necesitamos introducirnos en el ambiente de la Geometría de Riemann. Es por ello que iniciamos esta memoria con un capítulo de preliminares, acercando al lector una serie de conceptos entre los que destacan los tensores asociados a la curvatura. Gracias a estos podemos tratar las condiciones tipo Einstein, que relacionan el tensor métrico de la variedad con los distintos tensores dados anteriormente, y que nos ayudarán a caracterizar las variedades objeto de estudio. Además, se dará una identidad en la que se ven reflejadas dichas condiciones.

En el siguiente capítulo estudiaremos los grupos de Lie. Estas variedades, que además son grupos con la aplicación producto, cumplen ciertas propiedades que serán de utilidad para el estudio de los espacios homogéneos, como la correspondencia biyectiva con las álgebras de Lie. Además, dado que nos centramos en variedades de dimensión 3, contamos con una herramienta para trabajar en las álgebras de Lie que no existe en otras dimensiones: el producto vectorial. Seguidamente, con el fin de facilitar el análisis de los grupos de Lie, los clasificaremos en unimodulares y no unimodulares.

Una vez introducidos los conceptos necesarios de grupos de Lie, estamos en condiciones de tratar los espacios homogéneos en el capítulo siguiente. Utilizando el grupo de isometrías de una variedad, y su correspondiente álgebra de Lie, dada por el conjunto de los campos de Killing sobre la variedad, llegamos a que los espacios homogéneos son los espacios simétricos y los grupos de Lie. Mientras que los espacios simétricos tienen grupo de isometrías de dimensión 6 (en el caso de curvatura seccional constante) o 4 (productos $\mathbb{R} \times N(c)$), existen ciertos grupos de Lie admitiendo métricas invariantes a la izquierda para las que su grupo de isometrías es también de dimensión cuatro. Tal es el caso de las geometrías Nil_3, de las esferas de Berger y de $SL(2, \mathbb{R})$.

Finalmente, caracterizaremos los espacios homogéneos mencionados mediante su curvatura, haciendo uso de las condiciones tipo Einstein presentadas en el Capítulo 1. De este modo, obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 4.2. *Una variedad homogénea de dimensión 3 es $\check{\rho}$-Einstein si y solo si es de curvatura seccional constante o homotética al grupo de Heisenberg con una geometría* Nil_3.

Teorema 4.4. *Una variedad homogénea de dimensión 3 es estrictamente $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein si y solo si es isométrica a una esfera de Berger determinada por el álgebra de Lie dada* *por*

$$[e_1, e_2] = \tfrac{4}{3}\lambda e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda e_2.$$

Teorema 4.4. *Una variedad homogénea de dimensión tres es estrictamente débilmente Einstein si y solo si es isométrica a un grupo de Lie unimodular cuya álgebra de Lie está determinada por los corchetes*

$$[e_1, e_2] = (\lambda_1 + \lambda_2)e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$*, siendo* $\{e_i\}$ *una base ortonormal.*

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo plasmaremos, a modo de introducción, una serie de conceptos y resultados que utilizaremos posteriormente a lo largo de este trabajo.

1.1. Métricas de Riemann: tensor curvatura y curvatura de Ricci. Curvatura seccional.

Una variedad de Riemann (M, g) de dimensión n es una variedad diferenciable M de dimensión n dotada de un campo de tensores de tipo (0,2), g, simétrico y definido positivo, es decir, para todo X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} &g(X, Y) = g(Y, X), \\ &g(X, X) \geq 0, \\ &g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0. \end{aligned}$$

Dicho campo de tensores g se denomina *métrica de Riemann*.

En coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$, denotamos por g_{ij} las componentes de la métrica, y por g^{ij} a las componentes de la inversa de la matriz de la métrica, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

El carácter no degenerado de la métrica g permite identificar tensores tipo covariante y contravariante, de modo que si T es un tensor de tipo $(0, k)$ de la forma

$$T = T_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k},$$

podemos asociarlo a un tensor de tipo $(1, k-1)$, $\tilde{T}$, levantando índices utilizando la métrica, de modo que

$$\tilde{T} = T_{a, i_2, \ldots, i_k} g^{a i_1} \partial_{x^{i_1}} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$$

De forma general, podemos definir el producto escalar de dos tensores covariantes (es decir, de tipo $(0, k)$) Φ y Ψ como una extensión del producto escalar de vectores, del siguiente modo:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \Phi_{i_1, \ldots, i_k} \Psi^{i_1, \ldots, i_k},$$

donde los índices son levantados mediante la métrica.

En particular, sea V un espacio vectorial, sean S, $T : V \to V$ tensores de tipo (1,1), el producto interior de dos tensores de tipo (1,1) viene dado por

$$\langle S, T\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(ST + TS), \tag{1.1}$$

de modo que si S y T son simétricos, entonces

$$\langle S, T\rangle = \mathrm{tr}(ST). \tag{1.2}$$

De esta forma, se verifican las propiedades de linealidad y simetría, y es definido positivo.

Notación 1.1. Cuando nos refiramos a campos de vectores en la variedad, haremos uso de letras mayúsculas, mientras que para los vectores de un espacio vectorial, que asociaremos con el espacio tangente a M en un punto T_pM, utilizaremos letras minúsculas. Del mismo modo, $\{E_i\}$ será siempre una referencia ortonormal, y $\{e_i\}$ una base ortonormal.

Una *conexión* en una variedad de Riemann (M, g) es un operador de la forma

$$\begin{array}{rlcl} D: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & D_XY = \left(X(Y^1),\ldots,X(Y^n)\right), \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. D_XY es lineal en Y: $D_X(aY_1 + bY_2) = aD_XY_1 + bD_XY_2$;
2. D satisface la regla de Leibniz: $D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$;
3. D_XY es tensorial en X: $D_{h_1X_1+h_2X_2}Y = h_1D_{X_1}Y + h_2D_{X_2}Y$;

para cualesquiera constantes a, $b \in \mathbb{R}$ y funciones f, h_1, $h_2 \in \mathfrak{F}(M)$.

Sea D una conexión en M, decimos que es *simétrica* o *libre de torsión* si verifica que

$$D_XY - D_YX = [X, Y].$$

Dada una variedad de Riemann (M, g), existe una única conexión, que denotaremos por ∇, simétrica y de modo que la métrica es paralela respecto de ella, es decir, dados X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y] = 0$, $\nabla g = 0$. Esta conexión se denomina *conexión de Levi-Civita* o *conexión de Riemann*. Además, esta conexión está determinada por la Fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_XY, Z\right) = {} & Xg\left(Y,Z\right) + Yg\left(Z,X\right) - Zg\left(X,Y\right) \\ & - g\left(Y,[X,Z]\right) - g\left(Z,[Y,X]\right) + g\left(X,[Z,Y]\right), \end{aligned}$$

para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

De la fórmula de Koszul, y dado un sistema de coordenadas, podemos obtener los *símbolos de Christoffel* asociados a la conexión de Levi-Civita, siendo estos las n^3 funciones $\{\Gamma_{ij}^k\}$ que verifican

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j,k} \left\{ X^i \partial_{x^i} Y^k + X^i X^j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k},$$

donde $X = X^i \partial_{x^i}$ e $Y = Y^i \partial_{x^i}$. De este modo, estos símbolos de Christoffel vienen dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \tfrac{1}{2} \sum_\ell g^{k\ell} \left(\partial_{x^i} g_{j\ell} + \partial_{x^j} g_{i\ell} - \partial_{x^\ell} g_{ij} \right).$$

Una vez dada la conexión de Levi-Civita de una variedad de Riemann, estamos en condiciones de introducir el concepto de curvatura.

Definición 1.2. Sea (M, g) una variedad de Riemann, y sea ∇ la conexión de Levi-Civita de dicha variedad, definimos el *tensor de curvatura (de Riemann) de tipo (1,3)* como

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z = \left(\nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] \right) Z, \tag{1.3}$$

donde X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Asimismo, definimos el *tensor de curvatura (de Riemann) de tipo (0,4)* como

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,U) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z, U), \tag{1.4}$$

donde X, Y, Z, $U \in \mathfrak{X}(M)$.

Expresado en coordenadas, y utilizando el convenio de notación de Einstein, el tensor de curvatura (1,3) es de la forma

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{ijk}^\ell dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_{x^\ell},$$

siendo

$$\mathcal{R}_{ijk}^\ell \partial_{x^\ell} = \mathcal{R}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \partial_{x^k} = \left\{ \partial_{x^j} \Gamma_{ik}^\ell - \partial_{x^i} \Gamma_{jk}^\ell + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^\ell - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^\ell \right\} \partial_{x^\ell}.$$

Asimismo, el tensor de curvatura de tipo (0,4) expresado en coordenadas es de la forma

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{ijk\ell} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^\ell,$$

siendo

$$\mathcal{R}_{ijk\ell} = \mathcal{R}_{ijk}^r g_{r\ell}.$$

Teorema 1.3. [11] *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n. El tensor $\mathcal{R}$ se anula en todo punto de M si, y solamente si, (M, g) es localmente isométrica a $\mathbb{R}^n$. En ese caso, diremos que dicha variedad es llana.*

Proposición 1.4 (Simetrías del tensor de curvatura)**.** [10] *Sean X, Y, Z, U campos de vectores sobre la variedad de Riemann (M, g). Entonces, el tensor de curvatura $\mathcal{R}$ satisface las siguientes simetrías:*

1. $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) = -\mathcal{R}(Y,X,Z,U) = -\mathcal{R}(X,Y,U,Z)$,

2. $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) = \mathcal{R}(Z,U,X,Y)$,

3. $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) + \mathcal{R}(Y,Z,X,U) + \mathcal{R}(Z,X,Y,U) = 0$,

4. $(\nabla_X\mathcal{R})(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y\mathcal{R})(Z,X,U,V) + (\nabla_Z\mathcal{R})(X,Y,U,V) = 0$.

Observación 1.5. Las igualdades 3 y 4 se denominan Primera y Segunda identidades de Bianchi, respectivamente. Asimismo, las igualdades 1, 2 y 3 son identidades algebraicas.

Si $\mathcal{R} \in \overset{4}{\otimes}V^*$ satisface las tres primeras condiciones de la Proposición 1.4, se dice que $\mathcal{R}$ es un *tensor de curvatura algebraico*. Todo tensor de curvatura algebraico es realizable geométricamente, esto es, existe una variedad (M,g) de tal forma que la curvatura de la variedad en un punto viene dada por el tensor curvatura algebraico prefijado (véase [3]).

Una herramienta de utilidad a la hora de trabajar con tensores y construir nuevos tensores de curvatura a partir de tensores de tipo (0,2) es el producto de Kulkarni-Nomizu.

Definición 1.6. Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial con producto escalar y sean Φ y Ψ dos tensores de tipo (0,2) simétricos sobre V. Definimos el *producto Kulkarni-Nomizu* de Φ y Ψ como

$$\begin{aligned}(\Phi \odot \Psi)(x,y,z,u) = {} & \Phi(x,z)\Psi(y,u) - \Phi(y,z)\Psi(x,u) \\ & + \Phi(y,u)\Psi(x,z) - \Phi(x,u)\Psi(y,z),\end{aligned}$$

con $x,y,z,u \in V$, obteniendo un tensor de curvatura algebraico de tipo (0,4).

Ejemplo 1.7. Dados cuatro vectores $x,y,z,u \in V$, definimos el *tensor de curvatura estándar* como el tensor de tipo (0,4) dado por

$$R^0(x,y,z,u) = \tfrac{1}{2}(g \odot g)(x,y,z,u).$$

Definición 1.8. Sea $\mathcal{R} \in \otimes^4 V^*$ el tensor de curvatura de tipo (0,4), siendo V un espacio vectorial que asociamos con el espacio tangente a la variedad en un punto. Definimos la *curvatura seccional* de un 2-plano $\pi = \operatorname{span}\{x,y\} \subset V$ como

$$\kappa(\pi) = \frac{\mathcal{R}(x,y,x,y)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2} = \frac{\mathcal{R}(x,y,x,y)}{\mathcal{R}^0(x,y,x,y)}.$$

De esta forma, una variedad tendrá curvatura seccional constante si y solamente si el tensor de curvatura $\mathcal{R}$ de tipo (0,4) es un múltiplo del tensor de curvatura estándar $\mathcal{R}^0$, es decir, si y solamente si

$$\mathcal{R} = c\mathcal{R}^0,$$

para algún $c : M \to \mathbb{R}$.

Definición 1.9. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial con producto escalar y $\mathcal{R}$ un tensor curvatura algebraico sobre V. Se define el *tensor de Ricci* asociado a $\mathcal{R}$ como

$$\rho(x, y) = \mathrm{tr}(z \to \mathcal{R}(x, z)y),$$

para todo $x, y \in V$.

Dada una base ortonormal $\{e_i\}$, el tensor de Ricci puede ser expresado como

$$\rho(x, y) = \sum_i g(\mathcal{R}(x, e_i)y, e_i).$$

De las propiedades de simetría de $\mathcal{R}$, se tiene que

$$\rho(x, y) = \sum_i \mathcal{R}(x, e_i, y, e_i) = \sum_i \mathcal{R}(y, e_i, x, e_i) = \rho(y, x),$$

es decir, el tensor de Ricci es simétrico.

Definición 1.10. Definimos el operador de Ricci como el tensor de tipo (1,1), Ric, verificando

$$g(Ric(x), y) = \rho(x, y).$$

Definición 1.11. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial con producto escalar, definimos la *curvatura escalar* de un tensor de curvatura algebraico como

$$Sc = \mathrm{tr}Ric.$$

Sea (M, g) una variedad de Riemann y $(x^1, \dots, x^n)$ un sistema de coordenadas local. Entonces el tensor de Ricci viene dado por

$$\rho = \rho_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

siendo

$$\rho_{ij} = \mathcal{R}_{i\ell j}^{\ell}.$$

Asimismo, el operador de Ricci expresado en coordenadas es de la forma

$$Ric = \rho_i^j dx^i \otimes \partial_{x^j},$$

siendo

$$\rho_i^j = \rho_{i\ell} g^{\ell j}.$$

Dado que el tensor de Ricci es simétrico, se tiene que el operador de Ricci es auto-adjunto y por tanto es diagonalizable en una base ortonormal con autovalores reales, que llamaremos *curvaturas de Ricci*.

Dada una base ortonormal $\{e_i\}$, la curvatura escalar Sc viene dada por

$$Sc = \sum \rho(e_i, e_i) = \sum g(Ric(e_i), e_i).$$

Definición 1.12. Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n. Decimos que (M, g) es una *variedad Einstein* si verifica que el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica, es decir, si existe un λ tal que

$$\rho = \lambda g.$$

Podemos calcular este λ: al darse esta igualdad, se tiene que las trazas de ambos lados de la igualdad coinciden; de esta forma, tenemos que

$$\mathrm{tr}\rho = \mathrm{tr}(\lambda g) = \lambda \mathrm{tr} g.$$

La traza del tensor de Ricci es la curvatura escalar, Sc, y la traza de la métrica es igual a la dimensión de la variedad, n, por lo que sustituyendo y despejando tenemos que

$$\lambda = \frac{Sc}{n}.$$

Por lo tanto, una variedad de Riemann de dimensión n es Einstein si se verifica que

$$\rho = \frac{Sc}{n} g.$$

Proposición 1.13 (Identidad de Bianchi contracta)**.** [10] *Sea (M, g) una variedad de Riemann, entonces se verifica*

$$\mathrm{div}\rho = \frac{1}{2} d\ Sc,$$

donde $d\ Sc$ es la diferencial de la curvatura escalar y div *es el operador divergencia dado por* $(\mathrm{div}\rho)(X) = (\nabla_{E_i}\rho)(E_i, X)$ *en cualquier referencia local ortonormal.*

De esta proposición deducimos que si la variedad es conexa de dimensión al menos 3, entonces la curvatura escalar es constante.

Teorema 1.14. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n. Si la curvatura seccional κ_p es constante en todo $p \in M$, entonces M es una variedad Einstein.*

Demostración. Si la curvatura seccional es constante, entonces el tensor de curvatura de tipo (0,4) $\mathcal{R}$ viene dado por $\mathcal{R} = c\mathcal{R}^0$. Por lo tanto, si calculamos el tensor de Ricci, tenemos que

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= c \sum_i \mathcal{R}^0(x, e_i, y, e_i) = c \sum_i (g(x, y)g(e_i, e_i) - g(x, e_i)g(y, e_i)) \\ &= c(n-1)g(x, y).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica y por tanto la variedad es Einstein. □

Corolario 1.15. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n. Si la curvatura seccional κ_p es constante en todo $p \in M$, entonces la curvatura escalar Sc es constante.*

Demostración. Dado que la curvatura escalar se define como la traza del tensor de Ricci, bastará hallar la traza del tensor de Ricci calculado en la demostración del teorema anterior, de modo que $Sc = c\,n(n-1)$. □

Definición 1.16. Definimos el *tensor de Schouten* de una variedad de Riemann (M,g) de dimensión n, que denotaremos por S, como el tensor tipo (0,2) simétrico

$$S = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{Sc}{2(n-1)}g\right).$$

Definición 1.17. Sea (M,g) una variedad de Riemann de dimensión n. Se define el *tensor de Weyl* de (M,g) como el tensor tipo (0,4) dado por

$$\mathcal{W} = \mathcal{R} - S \odot g.$$

En dimensión 3, el tensor de Weyl es siempre igual a 0 (véase [10]), por lo que se tiene que el tensor de curvatura está determinado por el tensor de Schouten y por la métrica, de modo que

$$\mathcal{R} = S \odot g.$$

1.2. Acción de la curvatura en el espacio de tensores simétricos de tipo (0,2)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial con producto escalar y $\mathcal{R}$ un tensor curvatura algebraico sobre V. El tensor de curvatura actúa de forma natural sobre el espacio de tensores simétricos de tipo (0,2) sobre V. Nuestro objetivo en esta sección es indicar algunas de las propiedades de esta acción con el fin de introducir un nuevo campo de tensores tipo (0,2) sobre variedades de Riemann.

Notación 1.18. Dado un tensor de tipo (0,2) s, denotaremos por Q_s el tensor de tipo (1,1) que verifica

$$s(x,y) = g(Q_s x, y).$$

De este modo, generalizamos el concepto de operador de Ricci, ya que $Q_\rho = Ric$.

Definición 1.19. Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial de dimensión $n \geq 2$, y denotemos con $S^2(V)$ el espacio de los campos de tensores tipo (0,2) simétricos. Sobre él actúa de forma natural el tensor de curvatura como la aplicación

$$\mathring{\mathcal{R}} : S^2(V) \to S^2(V),$$

definida como

$$\mathring{\mathcal{R}}(s)(x,y) := \operatorname{tr}\{z \mapsto \mathcal{R}(x, Q_s(z))y\},$$

donde $s \in S^2(V)$ y $x, y \in V$.

Dada una base ortonormal $\{e_i\}$, tenemos que esta acción viene dada por

$$\mathring{\mathcal{R}}(s)(x,y) = \sum_{i,j} \mathcal{R}(x,e_i,y,e_j)s(e_i,e_j).$$

A continuación se estudian algunas propiedades algebraicas del operador $\mathring{\mathcal{R}}$, que serán utilizadas posteriormente.

Proposición 1.20. *El operador $\mathring{\mathcal{R}}$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *$\mathring{\mathcal{R}}$ es autoadjunto y por tanto diagonalizable con autovalores reales en una base ortonormal.*
2. *$\mathring{\mathcal{R}}g = \rho$.*
3. *$\mathrm{tr}(\mathring{\mathcal{R}}s) = \langle \mathring{\mathcal{R}}s, g\rangle = \langle \rho, s\rangle$.*
4. *$\mathrm{tr}(\mathring{\mathcal{R}}) = -\frac{Sc}{2}$.*
5. *$\mathcal{R}$ es un tensor de curvatura algebraico de Einstein si y solo si g es un autovector de $\mathring{\mathcal{R}}$.*

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de $(V,<,>)$, y sea g el tensor métrico asociado al producto escalar $<,>$.

1. Realizando cálculos elementales, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \mathring{\mathcal{R}}s, r\rangle =& \sum_{i,j} \mathring{\mathcal{R}}s(e_i,e_j)r(e_i,e_j) = \sum_{i,j}\sum_{k,\ell} \mathcal{R}(e_i,e_k,e_j,e_\ell)s(e_k,e_\ell)r(e_i,e_j)\\ =& \sum_{k,\ell}\sum_{i,j} \mathcal{R}(e_k,e_i,e_\ell,e_j)r(e_i,e_j)s(e_k,e_\ell) = \sum_{k,\ell} \mathring{\mathcal{R}}r(e_k,e_\ell)s(e_k,e_\ell)\\ =& \langle s, \mathring{\mathcal{R}}r\rangle.\end{aligned}$$

2. Por la definición de la acción del tensor curvatura, al hacerlo actuar sobre el tensor producto escalar se tiene que

$$\mathring{\mathcal{R}}(g)(x,y) = \sum_{i,j} \mathcal{R}(x,e_i,y,e_j)g(e_i,e_j) = \rho(x,y).$$

3. Por una parte, por ser $\mathring{\mathcal{R}}$ autoadjunto, se tiene la segunda igualdad. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathring{\mathcal{R}}s) &= \sum_{k,r}\sum_{i,j} \mathcal{R}(e_k,e_i,e_r,e_j)s(e_i,e_j)g(e_k,e_r)\\ &= \sum_{k,r} (\mathring{\mathcal{R}}s)(e_k,e_r)g(e_k,e_r) = \langle \mathring{\mathcal{R}}s, g\rangle.\end{aligned}$$

4. En primer lugar, debemos dar una base ortonormal del espacio de tensores simétricos de tipo (0,2). Para ello, tomaremos una base ortogonal y la normalizaremos. La base más sencilla para este cálculo es

$$\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n} \cup \{\xi_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=i+1,\dots,n}},$$

siendo

$$\eta_i = e^i \otimes e^i, \quad \xi_{ij} = e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i,$$

donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de $(V,<,>)$ y $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

Evaluando estos tensores en los vectores de la base se tiene que

$$\eta_i(e_k, e_\ell) = \delta_{ik}\delta_{i\ell}, \quad \xi_{ij}(e_k, e_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}.$$

Dado que el producto interior en (1.1) está definido para tensores de tipo (1,1), debemos reescribir los tensores de la base para poder calcular la norma de estos. Para ello, tomemos

$${}^g\eta_i = e^i \otimes e_i, \quad {}^g\xi_{ij} = e^i \otimes e_j + e^j \otimes e_i.$$

Así,

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \mathrm{tr}({}^g\eta_i^g\eta_j) = \sum_k {}^g\eta_i(e_k)^g\eta_j(e_k) = \sum_k e^i(e_k)e_i\, e^j(e_k)e_j = \delta_{ij};$$

$$\begin{aligned}
\langle \eta_k, \xi_{ij} \rangle &= \mathrm{tr}({}^g\eta_k\, {}^g\xi_{ij}) = \sum_\ell {}^g\eta_k(e_\ell)^g\xi_{ij}(e_\ell) \\
&= \sum_\ell e^k(e_\ell)e_k(e^i(e_\ell)e_j + e^j(e_\ell)e_i) = \sum_\ell \delta_{k\ell}e_k(\delta_{i\ell}e_j + \delta_{j\ell}e_i) \\
&= 2\delta_{ik}\delta_{jk} = 0
\end{aligned}$$

ya que $i \neq j$;

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{ij}, \xi_{k\ell} \rangle &= \mathrm{tr}({}^g\xi_{ij}\, {}^g\xi_{k\ell}) = \sum_r {}^g\xi_{ij}(e_r)^g\xi_{k\ell}(e_r) \\
&= \sum_r (e^i(e_r)e_j + e^j(e_r)e_i)(e^k(e_r)e_\ell + e^\ell(e_r)e_k) \\
&= \sum_r (\delta_{ir}e_j + \delta_{jr}e_i)(\delta_{kr}e_\ell + \delta_{\ell r}e_k) = 2(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle \eta_i, \eta_i \rangle = 1, \quad \langle \xi_{ij}, \xi_{ij} \rangle = 2.$$

De esta forma, podemos tomar la base ortonormal de $S^2(V)$ dada por

$$\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n} \cup \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_{ij} \right\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=i+1,\dots,n}} .$$

Así, la traza del tensor círculo viene dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathring{\mathcal{R}}) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \mathring{\mathcal{R}}\eta_i, \eta_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \langle \mathring{\mathcal{R}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_{ij}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_{ij} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \mathring{\mathcal{R}}\eta_i, \eta_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \langle \mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij}, \xi_{ij} \rangle. \end{aligned}$$

Para mayor comodidad, estudiaremos cada sumando de forma independiente. Por una parte, si evaluamos $\mathring{\mathcal{R}}\eta_i$ en dos vectores de la base tenemos que

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{R}}\eta_i(e_k, e_\ell) &= \sum_{r,s} \mathcal{R}(e_k, e_r, e_\ell, e_s)\eta_i(e_r, e_s) = \sum_{r,s} \mathcal{R}(e_k, e_r, e_\ell, e_s)\delta_{ir}\delta_{is} \\ &= \mathcal{R}(e_k, e_i, e_\ell, e_i) = \mathcal{R}(e_i, e_k, e_i, e_\ell). \end{aligned}$$

De este modo, el tensor de tipo (1,1) asociado a $\mathring{\mathcal{R}}\eta_i$ viene dado por

$${}^{g}(\mathring{\mathcal{R}}\eta_i)(x) = \mathcal{R}(e_i, x)e_i.$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle \mathring{\mathcal{R}}\eta_i, \eta_i \rangle &= \operatorname{tr}\left({}^{g}(\mathring{\mathcal{R}}\eta_i)\ {}^{g}\eta_i \right) = \sum_j \left(g({}^{g}(\mathring{\mathcal{R}}\eta_i)(e_j),\ {}^{g}\eta_i(e_j)) \right) \\ &= \sum_j \left(g(\mathcal{R}(e_i, e_j)e_i, \delta_{ij}e_j) \right) = g(\mathcal{R}(e_i, e_i)e_i, e_i) \\ &= \mathcal{R}(e_i, e_i, e_i, e_i) = 0 \end{aligned}$$

Luego, el primer sumando se anula.

Por otra parte, si evaluamos $\mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij}$ en dos vectores arbitrarios de la base tenemos que

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij}(e_k, e_\ell) &= \sum_{r,s} \mathcal{R}(e_k, e_r, e_\ell, e_s)\xi_{ij}(e_r, e_s) \\ &= \sum_{r,s} \mathcal{R}(e_k, e_r, e_\ell, e_s)(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}) \\ &= \mathcal{R}(e_k, e_i, e_\ell, e_j) + \mathcal{R}(e_k, e_j, e_\ell, e_i). \end{aligned}$$

De este modo, el tensor de tipo (1,1) asociado a $\mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij}$ viene dado por

$${}^{g}(\mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij})(x) = \mathcal{R}(e_i, x)e_j + \mathcal{R}(e_j, x)e_i.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij}, \xi_{ij}\rangle = \operatorname{tr}\left({}^g(\mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij})\ {}^g\xi_{ij}\right) &= \sum_k g({}^g(\mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij})(e_k),\ {}^g\xi_{ij}(e_k)) \\
&= \sum_k g(\mathcal{R}(e_i, e_k)e_j + \mathcal{R}(e_j, e_k)e_i, \delta_{ik}e_j + \delta_{jk}e_i) \\
&= \sum_k (\delta_{ik} g(\mathcal{R}(e_i, e_k)e_j + \mathcal{R}(e_j, e_k)e_i, e_j) \\
&\quad + \delta_{jk} g(\mathcal{R}(e_i, e_k)e_j + \mathcal{R}(e_j, e_k)e_i), e_i)) \\
&= g(\mathcal{R}(e_i, e_i)e_j + \mathcal{R}(e_j, e_i)e_i, e_j) \\
&+ g(\mathcal{R}(e_i, e_j)e_j + \mathcal{R}(e_j, e_j)e_i), e_i) \\
&= \mathcal{R}(e_j, e_i, e_i, e_j) + \mathcal{R}(e_i, e_j, e_j, e_i) \\
&= -2\mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j)
\end{aligned}
$$

De esta forma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \langle \mathring{\mathcal{R}}\xi_{ij}, \xi_{ij}\rangle &= -2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2}\mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \rho(e_i, e_i) = -Sc,
\end{aligned}
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_i, e_i, e_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} \mathcal{R}(e_j, e_i, e_j, e_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{R}(e_i, e_j, e_i, e_j).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\mathrm{tr}(\mathring{\mathcal{R}}) = -\frac{Sc}{2}.$$

5. Si $\mathcal{R}$ es un tensor de curvatura algebraico Einstein, entonces el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica, es decir, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\rho = \lambda g$. Por la segunda propiedad, sabemos que $\rho = \mathring{\mathcal{R}}g$, por lo que obtenemos que $\mathring{\mathcal{R}}g = \lambda g$, por lo que g es un autovector de $\mathring{\mathcal{R}}$.

   Recíprocamente, si g es autovector de $\mathring{\mathcal{R}}$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathring{\mathcal{R}}g = \alpha g$. Nuevamente, por la segunda propiedad, sabemos que $\mathring{\mathcal{R}}g = \rho$, por lo tanto $\rho = \alpha g$ y $\mathcal{R}$ es Einstein.

□

1.3. Tensores simétricos tipo (0,2) asociados a la curvatura

En esta sección introduciremos varios tensores simétricos de tipo (0,2) que se construirán a partir del tensor de curvatura. Todos ellos darán lugar a condiciones geométricas, más débiles que la condición de Einstein, que permitirán caracterizar los espacios homogéneos objetivo de este trabajo.

1.3.1. Condición Einstein

Como hemos dicho anteriormente, una variedad de Riemann (M, g) es Einstein si verifica que $\rho = \lambda g$, con $\lambda = Sc/n$.

En dimensión 2, el hecho de que una variedad sea Einstein no aporta información a mayores; para toda variedad de Riemann de dimensión 2, el tensor de Ricci es múltiplo de la métrica (véase [10]).

En dimensión 3, podemos caracterizar las variedades Einstein por su operador de Ricci, ya que tenemos que

$$\lambda g(x, y) = \rho(x, y) = g(Ric(x), y).$$

Luego, $Ric(x) = \lambda x$, o equivalentemente, $Ric = \lambda Id$.

1.3.2. Condición $\check{\rho}$-Einstein

Dado el tensor de Ricci ρ, definimos el tensor $\check{\rho}$ como el tensor de tipo (0,2) dado por

$$\check{\rho}(x, y) = \sum_i \rho(x, e_i)\rho(y, e_i).$$

La expresión en coordenadas de este tensor viene dada por

$$\check{\rho} = \check{\rho}_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

siendo

$$\check{\rho}_{ij} = \rho_{ik}\rho_j^k.$$

Con este nuevo tensor, diremos que una variedad de Riemann (M, g) de dimensión n es $\check{\rho}$-Einstein si el tensor $\check{\rho}$ es proporcional a la métrica. Es decir, la variedad será $\check{\rho}$-Einstein si existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\check{\rho} = \lambda g.$$

Aplicando trazas, siguiendo un razonamiento análogo al empleado en la condición Einstein, tenemos que una variedad de Riemann será $\check{\rho}$-Einstein si verifica que

$$\check{\rho} = \frac{\|\rho\|^2}{n} g.$$

Un problema abierto que surge a la hora de estudiar esta condición es determinar si verificar dicha condición implica la constancia de la $\|\rho\|$. En cualquier caso, nuestro análisis se centrará en espacios homogéneos, por lo que no será relevante.

De un modo análogo a la condición de Einstein, podemos caracterizar las variedades $\check{\rho}$-Einstein mediante el hecho de que el operador asociado a $\check{\rho}$, $Q_{\check{\rho}}$, sea un múltiplo de la identidad.

Por otro lado, tenemos que $Q_{\check{\rho}} = Ric^2$, ya que

$$\begin{aligned}\check{\rho}(x, y) &= \sum_i \rho(x, e_i)\rho(y, e_i) = \sum_i g(Ric(x), e_i)g(Ric(y), e_i) \\ &= \sum_i g(Ric(x), g(Ric(y), e_i)e_i) = g(Ric(x), Ric(y)) \\ &= g(Ric^2(x), y).\end{aligned}$$

De esta forma, $Ric^2 = \mu^2 Id$, y por lo tanto, el operador de Ricci en este caso es

$$Ric = \varepsilon^i \mu dx^i \otimes \partial_{x^i},$$

con $\varepsilon_i^2 = 1$. En particular, el operador de Ricci en dimensión 3 es de la forma $Ric = \operatorname{diag}(\varepsilon_1\mu, \varepsilon_2\mu, \varepsilon_3\mu)$, con $\varepsilon_i^2 = 1$. De este modo, obtenemos el siguiente Lema.

Lema 1.21. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión 3. Entonces es $\check{\rho}$-Einstein si y solo si la variedad es Einstein o el operador de Ricci es de la forma*

$$Ric = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix},$$

para algún $\mu \in \mathbb{R}$, salvo reordenación de los elementos de la diagonal.

1.3.3. Condición débilmente Einstein

Con un razonamiento similar al seguido para construir el tensor $\check{\rho}$, podemos definir el tensor $\check{\mathcal{R}}$ a partir del tensor de curvatura $\mathcal{R}$ de tipo (0,4), de modo que este es el tensor de tipo (0,2) resultante de contraer el tensor de curvatura respecto de sus 3 últimos índices, es decir,

$$\check{\mathcal{R}}(X,Y) = \sum_{i,j,k} \mathcal{R}(X,E_i,E_j,E_k)\mathcal{R}(Y,E_i,E_j,E_k).$$

Expresado en coordenadas, este tensor viene dado por

$$\check{\mathcal{R}} = \check{\mathcal{R}}_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

siendo

$$\check{\mathcal{R}}_{ij} = \mathcal{R}_{iabc}\mathcal{R}_j^{abc}.$$

Con este tensor ya construido, decimos que una variedad de Riemann (M,g) de dimensión n es débilmente Einstein si existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\check{\mathcal{R}} = \lambda g.$$

Siguiendo el razonamiento usual en esta sección, obtenemos que una variedad de Riemann de dimensión n es débilmente Einstein si verifica que

$$\check{\mathcal{R}} = \tfrac{\|\mathcal{R}\|^2}{n} g.$$

Del mismo modo que en la subsección anterior, al estudiar esta condición surge un problema abierto: determinar si ser débilmente Einstein implica que $\|\mathcal{R}\|$ es constante. Sin embargo, y como en el caso anterior, este problema no será relevante en nuestro trabajo ya que nuestro análisis se centrará en espacios homogéneos. Para un estudio más detallado de esta condición, véase [7].

En dimensión 3, podemos caracterizar las variedades débilmente Einstein mediante su operador de Ricci.

Lema 1.22. [7] *Sea (M,g) una variedad de Riemann de dimensión 3. Entonces es débilmente Einstein si y solo si la variedad es Einstein o el operador de Ricci es de rango uno.*

Por lo tanto, siguiendo este Lema, tenemos que el operador de Ricci en dimensión 3 es de la forma

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

para algún $\mu \in \mathbb{R}$, o bien es un múltiplo de la identidad.

1.3.4. Condición $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein

Dada una variedad de Riemann (M, g) de dimensión n, definimos el tensor $\mathcal{R}[\rho]$ como

$$\mathcal{R}[\rho](x,y) = \mathring{\mathcal{R}}\rho(x,y) = \operatorname{tr}\{z \mapsto \mathcal{R}(x, Ric(z))y\}.$$

De esta forma, decimos que una variedad de Riemann es $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein si el tensor $\mathcal{R}[\rho]$ es proporcional a la métrica, es decir, si existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{R}[\rho] = \lambda g.$$

Estudiando de nuevo las trazas de ambos miembros de la igualdad, tenemos que

$$\operatorname{tr}(\mathcal{R}[\rho]) = \lambda n,$$

donde la traza del tensor $\mathcal{R}[\rho]$ viene dada por la Proposición 1.20, de modo que

$$\operatorname{tr}(\mathcal{R}[\rho]) = \langle \mathcal{R}[\rho], g\rangle = \langle \rho, \rho\rangle = \|\rho\|^2.$$

Por lo tanto, la variedad será $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein si se verifica que

$$\mathcal{R}[\rho] = \frac{\|\rho\|^2}{n} g.$$

Del mismo modo que en subsecciones anteriores, no sabemos si la condición $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein implica que $\|\rho\|^2$ es constante. Sin embargo, en este trabajo vamos a analizar los espacios homogéneos, por lo que este hecho es irrelevante.

Por otro lado, podemos caracterizar las variedades $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein de dimensión 3 mediante su operador de Ricci, que ha de ser un múltiplo de la identidad.

Además, sabemos que en dimensión 3 el tensor de curvatura viene dado por

$$\mathcal{R} = S \odot g = (\rho - \frac{Sc}{4} g) \odot g.$$

Así, el tensor $\mathcal{R}[\rho]$ es de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}[\rho](x,y) &= \sum_{i,j} \mathcal{R}(x, e_i, y, e_j)\rho(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i,j} (\rho \odot g)(x, e_i, y, e_j)\rho(e_i, e_j) - \frac{Sc}{4}(g \odot g)(x, e_i, y, e_j)\rho(e_i, e_j) \\
&= Sc\rho(x,y) + \|\rho\|^2 g(x,y) - \sum_j \rho(x, e_j)\rho(y, e_j) - \sum_i \rho(e_i, y)\rho(e_i, x) \\
&- \frac{Sc}{2}(Scg(x,y) - \rho(x,y)) \\
&= -2\check{\rho}(x,y) + \frac{3}{2} Sc\rho(x,y) + \left(\|\rho\|^2 - \frac{Sc^2}{2}\right) g(x,y).
\end{aligned}$$

Por tanto, el operador asociado a $\mathcal{R}[\rho]$ viene dado por

$$Q_{\mathcal{R}[\rho]} = -2Ric^2 + \frac{3}{2}Sc\,Ric + \left(\|\rho\|^2 - \frac{Sc^2}{2}\right) Id,$$

que relaciona los operadores $Q_{\mathcal{R}[\rho]}$ y Ric. Si $Q_{\mathcal{R}[\rho]}$ es un múltiplo de la identidad, entonces las curvaturas de Ricci están determinadas por una ecuación de segundo grado, lo que implica que al menos dos de ellas han de ser iguales.

Lema 1.23. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión 3. Entonces, la variedad es $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein si y solo si la variedad es Einstein o el operador de Ricci es de la forma*

$$Ric = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix},$$

salvo reordenación de los elementos de la diagonal.

Demostración. Si la variedad es $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein, el operador de Ricci tiene a lo sumo dos autovalores distintos. Si tiene un único autovalor, la variedad es Einstein. Supongamos que el operador tiene dos autovalores distintos, μ y ν, siendo μ de multiplicidad 2. Dado que el operador $Q_{\mathcal{R}[\rho]}$ debe ser múltiplo de la identidad, se tiene que

$$-2\mu^2 + \frac{3}{2}(2\mu+\nu)\mu + (2\mu^2+\nu^2) - \frac{(2\mu+\nu)^2}{2} = -2\nu^2 + \frac{3}{2}(2\mu+\nu)\nu + (2\mu^2+\nu^2) - \frac{(2\mu+\nu)^2}{2}.$$

Realizando los cálculos pertinentes se concluye que o bien ambos autovalores son iguales, y por tanto la variedad es Einstein, o bien el autovalor de multiplicidad 1 es el doble del otro, es decir, $\nu = 2\mu$. □

Observación 1.24. Esta condición es esencialmente distinta de las condiciones de ser $\check{\rho}$-Einstein y débilmente Einstein.

1.4. Identidades universales para la curvatura

La existencia de relaciones entre la curvatura y la topología de una variedad permite obtener identidades que se verifican universalmente para la curvatura. En esta sección consideraremos las identidades básicas en dimensión 2, 3 y 4 que constituyen la motivación para el estudio de las distintas condiciones tipo Einstein consideradas en la sección anterior.

1.4.1. Identidad universal para la curvatura en dimensión 2

El Teorema clásico de Gauss-Bonnet asegura que, sobre variedades compactas, la integral de la curvatura escalar determina la característica de Euler, por lo que el funcional de curvatura

$$\mathbf{S} : g \mapsto \mathbf{S}(g) = \int_M Sc_g\, dvol_g$$

es constante. En consecuencia para cualquier variación $g_t = g+th$, tenemos que la aplicación $\mathbf{S}(t) = \int_M Sc_{g_t}\, dvol_{g_t}$ es constante y, por tanto, su derivada en $t = 0$ se anula. Este hecho muestra que toda variedad 2-dimensional verifica la ecuación de Einstein $\rho - \frac{1}{2}Scg = 0$ (o lo que es equivalente, M es Einstein).

Para el caso bidimensional, se tiene que $\mathcal{R} = \frac{Sc}{4}(g \odot g)$. De esta forma, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.25. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión 2. Entonces,*

$$\mathring{\mathcal{R}}g = \frac{Sc}{2}g, \quad \mathring{\mathcal{R}}\rho = \frac{Sc^2}{4}g, \quad \mathring{\mathcal{R}}s = -\frac{Sc}{2}s,$$

para todo tensor s ortogonal a la métrica g.

Demostración.

- $\mathring{\mathcal{R}}g = \frac{Sc}{2}g$: Dados dos vectores arbitrarios x, y, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathring{\mathcal{R}}g)(x,y) &= \sum_i \mathcal{R}(x,e_i,y,e_i) = \frac{Sc}{4}\sum_i (g\odot g)(x,e_i,y,e_i)\\ &= Scg(x,y) - \frac{Sc}{2}\sum_i g(x,e_i)g(e_i,y)\\ &= Scg(x,y) - \frac{Sc}{2}g(x,y) = \frac{Sc}{2}g(x,y).\end{aligned}$$

- $\mathring{\mathcal{R}}\rho = \frac{Sc^2}{4}g$: Por la Proposición 1.20, sabemos que $\rho = \mathring{\mathcal{R}}g$, por lo que

$$\mathring{\mathcal{R}}\rho = \mathring{\mathcal{R}}(\mathring{\mathcal{R}}g) = \mathring{\mathcal{R}}(\frac{Sc}{2}g),$$

  y por tanto se sigue que $\mathring{\mathcal{R}}\rho = \frac{Sc^2}{4}g$.

- $\mathring{\mathcal{R}}s = -\frac{Sc}{2}s$: Dados dos vectores arbitrarios x, y, se tiene

$$\begin{aligned}\mathring{\mathcal{R}}s(x,y) &= \sum_{i,j} \mathcal{R}(x,e_i,y,e_j)s(e_i,e_j) = \frac{Sc}{4}\sum_{i,j}(g\odot g)(x,e_i,y,e_j)s(e_i,e_j)\\ &= \frac{Sc}{2}\sum_{i,j}\left(g(x,y)g(e_i,e_j) - g(x,e_i)g(e_i,y)\right)s(e_i,e_j)\\ &= \frac{Sc}{2}g(x,y)\langle g,s\rangle - \frac{Sc}{2}\sum_{i,j} g(x,e_i)g(e_j,y)s(e_i,e_j)\\ &= -\frac{Sc}{2}\sum_{i,j} g(x,e_i)g(e_j,y)s(e_i,e_j)\\ &= -\frac{Sc}{2}s(x,y).\end{aligned}$$

□

De este modo, para una base de S^2 de la forma $\{g, s_1, s_2\}$, tenemos que $\mathring{\mathcal{R}}$ viene dado por

$$\mathring{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{Sc}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Sc}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Sc}{2} \end{pmatrix}.$$

1.4.2. Identidad universal para la curvatura en dimensión 4

En dimensión 4 el integrando de Gauss-Bonnet viene dado por

$$\|\mathcal{R}\|^2 - 4\|\rho\|^2 + Sc^2$$

de tal manera que la característica de Euler de una variedad compacta se obtiene como

$$\chi[M] = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \{\|\mathcal{R}\|^2 - 4\|\rho\|^2 + Sc^2\} dVol_g$$

y un proceso análogo al desarrollado en dimensión dos, aunque más complejo, muestra que el tensor de curvatura de toda variedad compacta 4-dimensional verifica (véase [6])

$$\check{\mathcal{R}} - 2\check{\rho} - 2\mathcal{R}[\rho] - Sc\rho - \frac{1}{4}(\|\mathcal{R}\|^2 - 4\|\rho\|^2 + Sc^2)g = 0. \tag{1.6}$$

Reordenando los términos de esta expresión, tenemos la siguiente igualdad:

$$\left(\check{\mathcal{R}} - \frac{\|\mathcal{R}\|^2}{4} g\right) + Sc\left(\rho - \frac{Sc}{4} g\right) - 2\left(\check{\rho} - \frac{\|\rho\|^2}{4} g\right) - 2\left(\mathcal{R}[\rho] - \frac{\|\rho\|^2}{4} g\right) = 0. \tag{1.7}$$

Dado que todo tensor curvatura algebraico se puede realizar como la curvatura en un punto de una variedad compacta, la identidad anterior se extiende a la curvatura de cualquier 4-variedad (compacta o no).

Como toda variedad (M, g) de dimensión 3 se puede considerar de modo trivial como una hipersuperficie totalmente geodésica en la variedad producto $\mathbb{R} \times M$, de la identidad anterior se obtiene la siguiente para dimensión 3:

$$\frac{3Sc}{2}\left(\rho - \frac{Sc}{3} g\right) - 2\left(\check{\rho} - \frac{\|\rho\|^2}{3} g\right) - \left(\mathcal{R}[\rho] - \frac{\|\rho\|^2}{3} g\right) = 0.$$

No obstante, obtendremos esta igualdad trabajando directamente con los tensores.

1.4.3. Identidad universal para la curvatura en dimensión 3

En el caso tridimensional, el tensor de Weyl es nulo (véase [10]). De esta forma, el tensor de curvatura viene dado por $\mathcal{R} = (\rho - \frac{Sc}{4} g) \odot g$. Dado que en la sección anterior ya hemos tratado el tensor $\frac{Sc}{4} g \odot g$, veamos qué ocurre para $\rho \mathring{\odot} g$. Para ello utilizaremos una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ que diagonaliza ρ.

De este modo, tenemos

$$
\begin{aligned}
(\rho \mathring{\odot} g)s(a,b) &= \sum_{i,j} (\rho \odot g)(a, e_i, b, e_j) s(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i,j} [\rho(a,b) g(e_i, e_j) - \rho(a, e_j) g(e_i, b) \\
&\quad + \rho(e_i, e_j) g(a,b) - \rho(e_i, b) g(a, e_j)] \, s(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i,j} \rho(a,b) \delta_{ij} s(e_i, e_j) - \sum_{i,j} \rho(a, e_j) g(e_i, b) s(e_i, e_j) \\
&\quad + \sum_{i,j} \rho(e_i, e_j) g(a,b) s(e_i, e_j) - \sum_{i,j} \rho(e_i, b) g(a, e_j) s(e_i, e_j) \\
&= \rho(a,b) \sum_i s(e_i, e_i) - \sum_{i,j} \rho(a, e_j) s(g(e_i, b) e_i, e_j) \\
&\quad + g(a,b) \sum_{i,j} \rho(e_i, e_j) s(e_i, e_j) - \sum_{i,j} \rho(e_i, b) s(e_i, g(a, e_j) e_j) \\
&= \rho(a,b) \mathrm{tr}(s) + \langle \rho, s \rangle g(a,b) - \sum_j \rho(a, e_j) s(b, e_j) \\
&- \sum_i \rho(e_i, b) s(e_i, a).
\end{aligned}
$$

Lema 1.26. *Dado el tensor $(\rho \mathring{\odot} g)$, se tiene*

$$
(\rho \mathring{\odot} g) g = \rho + Sc g, \quad (\rho \mathring{\odot} g) \rho = \|\rho\|^2 g + Sc \rho - 2 g(Ric(\cdot), Ric(\cdot)).
$$

Demostración.

- $(\rho \mathring{\odot} g) g = \rho + Sc g$: Dados dos vectores arbitrarios a, b, tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\rho \mathring{\odot} g) g(a,b) &= \rho(a,b) \mathrm{tr}(g) + \langle \rho, g \rangle g(a,b) - \sum_j \rho(a, e_j) g(b, e_j) \\
&\quad - \sum_i \rho(e_i, b) g(e_i, a) \\
&= 3\rho(a,b) + Sc g(a,b) - \rho\Big(a, \sum_j g(b, e_j) e_j\Big) \\
&\quad - \rho\Big(b, \sum_i g(e_i, a) e_i\Big) \\
&= \rho(a,b) + Sc g(a,b)
\end{aligned}
$$

- $(\rho \mathbin{\overset{\circ}{\odot}} g)\rho = \|\rho\|^2 g + Sc\rho - 2g(Ric(\cdot), Ric(\cdot))$: Dados dos vectores arbitrarios a, b, se tiene
$$\begin{aligned}(\rho \mathbin{\overset{\circ}{\odot}} g)\rho(a,b) &= \rho(a,b)\mathrm{tr}(\rho) + \langle \rho, \rho\rangle g(a,b) - \sum_j \rho(a,e_j)\rho(b,e_j) \\ &- \sum_i \rho(e_i,b)\rho(e_i,a) \\ &= Sc\rho(a,b) + \|\rho\|^2 g(a,b) - \sum_j \rho(a,e_j)\rho(b,e_j) \\ &- \sum_i \rho(e_i,b)\rho(e_i,a).\end{aligned}$$
Por otro lado, tenemos que
$$\begin{aligned}\sum_j \rho(a,e_j)\rho(b,e_j) =& \sum_j g(Ric(a),e_j)\rho(b,e_j) = \rho\Big(b, \sum_j g(Ric(a),e_j)e_j\Big) \\ &= \rho(b, Ric(a)) = g(Ric(a), Ric(b)).\end{aligned}$$
De este modo, obtenemos
$$(\rho \mathbin{\overset{\circ}{\odot}} g)\rho(a,b) = \|\rho\|^2 g(a,b) + Sc\rho(a,b) - 2g(Ric(a), Ric(b)).$$

□

Por otro lado, tenemos que $\frac{1}{2}(g \mathbin{\overset{\circ}{\odot}} g)s = \mathrm{tr}(s)g - s$, ya que dados dos vectores arbitrarios a, b,
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(g \mathbin{\overset{\circ}{\odot}} g)s(a,b) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(g \odot g)(a,e_i,b,e_j)s(e_i,e_j) \\ &= \sum_{i,j}\left[g(a,b)g(e_i,e_j) - g(a,e_j)g(e_i,b)\right] s(e_i,e_j) \\ &= \sum_i s(e_i,e_i)g(a,b) - s\Big(\sum_i g(b,e_i)e_i, \sum_j g(a,e_j)e_j\Big) \\ &= \mathrm{tr}(s)g(a,b) - s(a,b).\end{aligned}$$
De ambos resultados tenemos que, dados dos vectores arbitrarios a, b,
$$\begin{aligned}\mathring{\mathcal{R}}\rho(a,b) &= \sum_{i,j}\left(\left(\rho - \frac{Sc}{4}g\right) \odot g\right)(a,e_i,b,e_j)\rho(e_i,e_j) \\ &= \sum_{i,j}(\rho \odot g)(a,e_i,b,e_j)\rho(e_i,e_j) - \frac{Sc}{4}\sum_{i,j}(g \odot g)(a,e_i,b,e_j)\rho(e_i,e_j) \\ &= \|\rho\|^2 g(a,b) + Sc\rho(a,b) - 2g\left(Ric(a), Ric(b)\right) \\ &- \frac{Sc}{2}\left(\mathrm{tr}(\rho)g(a,b) - \rho(a,b)\right) \\ &= \left(\|\rho\|^2 - \frac{Sc^2}{2}\right) g(a,b) + \frac{3Sc}{2}\rho(a,b) - 2g(Ric(a), Ric(b)),\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathring{\mathcal{R}}\rho = \left(\|\rho\|^2 - \frac{Sc^2}{2} \right) g + \frac{3Sc}{2}\rho - 2\check{\rho}. \tag{1.8}$$

Teorema 1.27. *Sea $\mathcal{R}$ un tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial con producto escalar $(V, <,>)$ de dimensión tres. Entonces se verifica la identidad:*

$$\frac{3Sc}{2}\left(\rho - \frac{Sc}{3}g\right) - 2\left(\check{\rho} - \frac{\|\rho\|^2}{3}g\right) - \left(\mathcal{R}[\rho] - \frac{\|\rho\|^2}{3}g\right) = 0. \tag{1.9}$$

Demostración. Se sigue reordenando los términos de la expresión (1.8). □

Además, cabe destacar que cada sumando está relacionado con alguna de las condiciones tipo Einstein dadas a lo largo del capítulo:

- el primer sumando se anula si la curvatura escalar es 0 o si el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica, es decir, si la variedad es Einstein,
- el segundo sumando se anula si el tensor $\check{\rho}$ es un múltiplo de la métrica, es decir, si la variedad es $\check{\rho}$-Einstein,
- el tercer sumando se anula si el tensor $\mathcal{R}[\rho]$ es proporcional a la métrica, es decir, si la variedad es $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein.

Capítulo 2

Grupos de Lie

En este capítulo daremos una serie de conceptos y resultados útiles para el estudio de grupos y álgebras de Lie. De este modo, podremos trabajar con ellos de una forma más sencilla en capítulos posteriores.

Decimos que G es un *grupo de Lie* si es una variedad diferenciable a la vez que es un grupo en el sentido algebraico, de modo que la aplicación producto y la aplicación inversión son diferenciables. Por otro lado, un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial dotado de una operación de producto antisimétrico en el espacio vectorial que verifica la identidad de Jacobi $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$. Además, dado un grupo de Lie G, definimos su álgebra de Lie asociada como el conjunto de todos los campos invariantes a la izquierda sobre G. Todas estas definiciones, además de las demostraciones de los resultados siguientes, pueden ser consultadas con mayor detenimiento en el libro [11].

De esta forma, todo grupo de Lie tiene asociada un álgebra de Lie, que puede ser identificada con el espacio tangente en el neutro con el producto corchete dado por el producto corchete del álgebra de los campos de vectores invariantes a la izquierda, ya que los campos de vectores invariantes a la izquierda están en biyección con los vectores del espacio tangente en el neutro. Recíprocamente, por el Tercer Teorema de Lie (véase [5]), tenemos que dada un álgebra de Lie, esta siempre será el álgebra de Lie asociada a algún grupo de Lie simplemente conexo.

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, cualquier producto escalar definido positivo

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R},$$

da lugar a una métrica de Riemann en G sin más que trasladarlo a todo el grupo mediante traslaciones a la izquierda. Así $\langle\cdot,\cdot\rangle$ da lugar a una métrica de Riemann invariante a la izquierda sobre G.

De esta forma, dado un grupo de Lie G dotado de una métrica de Riemann invariante a la izquierda g, existe una única álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dotada de producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que $(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es isomorfo al espacio tangente a G en el neutro e. De este modo, en lugar de estudiar los grupos de Lie, podemos estudiar las álgebras de Lie gracias a la existencia de una biyección entre ambos.

A priori, trabajar con álgebras de Lie puede parecer igual de tedioso que hacer uso de los grupos de Lie. Sin embargo, a la hora de estudiar las variedades de dimensión 3, podemos contar con una herramienta que no existe en dimensiones superiores: la operación *producto vectorial*, que viene dado por el producto de los cuaternios imaginarios. Este producto es bilineal y antisimétrico, y dados dos vectores u y v linealmente independientes, el producto vectorial $u \times v$ es un vector ortogonal tanto a u como a v, cuya norma viene dada por $\sqrt{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}$, y su sentido está determinado por el hecho de verificar que $\{u, v, u \times v\}$ están orientados positivamente. Además, si u y v son linealmente dependientes, su producto vectorial es 0.

Sea G un grupo de Lie conexo de dimensión 3 dotado de una métrica invariante por la izquierda g, y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie asociada. Si escogemos una orientación para el álgebra de Lie de G, tenemos que el producto vectorial está definido.

La operación producto corchete en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada al grupo de Lie G está relacionado con la operación producto vectorial mediante la fórmula

$$[u, v] = L(u \times v),$$

donde L es una aplicación lineal definida unívocamente de $\mathfrak{g}$ en sí misma (véase [12]).

2.1. Grupos de Lie unimodulares

Antes de definir qué es un grupo de Lie unimodular, debemos dar una definición de medida de Haar, ya que esta tiene especial relevancia en la descripción de la unimodularidad de un grupo de Lie dado, aunque para trabajar de una forma más simple haremos uso de una caracterización de estos grupos de Lie más sencilla.

Definición 2.1. Una *medida de Haar* es una medida positiva no nula μ en el σ-anillo M de subconjuntos E de un grupo localmente compacto G generada por la familia de todos los subconjuntos compactos, tomando valores finitos en todo subconjunto compacto de G, y verificando la condición de invarianza por la izquierda,

$$\mu(E) = \mu(gE), \quad \forall E \in M, \forall g \in G,$$

siendo $gE = \{gx \in G | x \in E\}$, o la condición de invarianza por la derecha,

$$\mu(E) = \mu(Eg), \quad \forall E \in M, \forall g \in G,$$

siendo $Eg = \{xg \in G | x \in E\}$. De esta forma, podemos hablar de medida de Haar invariante por la izquierda o por la derecha.

Toda medida de Haar es μ-regular, es decir,

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \in [0, \infty) \mid K \subseteq E \text{ y } K \text{ es compacto}\}, \quad \forall E \in M.$$

Proposición 2.2. *Una medida de Haar invariante por la izquierda (respectivamente, por la derecha) existe y es única.*

Definición 2.3. Sea G un grupo de Lie. Decimos que G es *unimodular* si su medida de Haar invariante por la izquierda es también invariante por la derecha.

Para cada $g \in G$, la aplicación $LgRg^{-1} : G \to G$ da lugar a una aplicación $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, sin más que considerar la aplicación tangente en el neutro de $LgRg^{-1}$. Ello da lugar a una aplicación

$$Ad_g : G \to End(\mathfrak{g})$$

(que verifica la propiedad de representación).

Asociada a dicha aplicación podemos considerar de nuevo su aplicación tangente en el neutro

$$ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$$

dada por $ad(x) = [x, \cdot]$.

Lema 2.4. [12] *El grupo G es unimodular si y solamente si la transformación lineal* $\mathrm{Ad}(g)$ *tiene determinante ± 1 para todo $g \in G$, o equivalentemente, si y solamente si la transformación lineal* $\mathrm{ad}(x)$ *tiene traza cero para todo x en el álgebra de Lie asociada.*

Observación 2.5. Este Lema nos proporciona una caracterización para los grupos de Lie unimodulares, que será la que empleemos en adelante.

Un álgebra de Lie que verifique la condición de $\operatorname{tr}\mathrm{ad}(x) \equiv 0$ se denomina *álgebra de Lie unimodular.*

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie arbitraria. Haciendo uso de la identidad de Jacobi,

$$\mathrm{ad}[x, y] = \mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(x),$$

vemos que $\mathrm{ad}[x, y]$ tiene traza cero. Por lo tanto, la aplicación lineal

$$x \mapsto \operatorname{tr}\mathrm{ad}(x)$$

de $\mathfrak{g}$ en el álgebra de Lie conmutativa $\mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. En particular, su núcleo, dado por

$$\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} | \operatorname{tr}\mathrm{ad}(x) = 0\},$$

es un ideal, que contiene al ideal conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Denominamos a este ideal $\mathfrak{u}$ como *núcleo unimodular* de $\mathfrak{g}$.

Observación 2.6. Si el grupo de Lie conexo G tiene una métrica invariante por la izquierda con las curvaturas de Ricci no negativos, entonces G es unimodular.

La siguiente propiedad es la que utilizaremos en adelante para caracterizar los grupos de Lie unimodulares. Además, nos permite describir todas las métricas invariantes a la izquierda en grupos de Lie unimodulares tridimensionales.

Lema 2.7. *El grupo de Lie G es unimodular si, y solamente si, la transformación lineal L es autoadjunta.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 3 con métrica definida positiva y con una orientación fijada. Tomando una base ortonormal orientada $\{e_1, e_2, e_3\}$, definimos la transformación lineal $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por

$$L(e_1) = [e_2, e_3], \quad L(e_2) = [e_3, e_1], \quad L(e_3) = [e_1, e_2].$$

Entonces, la igualdad $L(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]$ es cierta para todos los elementos de la base, por lo que se verifica $L(x \times y) = [x, y]$ para todo x e y.

Fijando

$$L(e_i) = \sum \alpha_{ij} e_j,$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_1) &= -\alpha_{23} + \alpha_{32} \\ \operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_2) &= -\alpha_{31} + \alpha_{13} \\ \operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_3) &= -\alpha_{12} + \alpha_{21} \end{aligned}$$

Así, $\mathfrak{g}$ es unimodular si y solo si la matriz (α_{ij}) es simétrica, o equivalentemente, si y solo si la transformación lineal L es autoadjunta. □

Si L es autoadjunta, entonces existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ formada por autovectores de L, de modo que $Le_i = \lambda_i e_i$. Cambiando e_1 por su opuesto de ser necesario para mantener o invertir la orientación, podemos considerar la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ orientada positivamente. Así, la operación producto corchete viene dada por

$$\begin{aligned} &[e_2, e_3] = L(e_2 \times e_3) = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = L(e_3 \times e_1) = \lambda_2 e_2, \\ &[e_1, e_2] = L(e_1 \times e_2) = \lambda_3 e_3. \end{aligned}$$

Los autovalores λ_1, λ_2, λ_3 se construyen y ordenan a partir de la orientación tomada; si cambiamos la orientación de $\mathfrak{g}$, la operación producto vectorial cambiará de signo y por tanto los autovalores cambiarán de signo también.

Al ser las traslaciones a la izquierda isometrías del grupo G, han de preservar todos los objetos geométricos construidos a partir de la métrica: conexión de Levi-Civita, tensor de curvatura, tensor de Ricci, etc. Así pues será suficiente determinar dichos objetos a nivel del álgebra de Lie.

Dados los valores de los corchetes de Lie para los vectores de la base ortonormal orientada positivamente, podemos calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica invariante a la izquierda mediante la fórmula de Koszul. Así, podemos calcular el tensor de curvatura $\mathcal{R}$ de tipo (1,3), de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(e_1, e_2) &= \left(\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 - \frac{3}{4}\lambda_3^2 \right) e_3 \times, \\ \mathcal{R}(e_2, e_3) &= \left(\left(\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} \right)^2 - \frac{3}{4}\lambda_1^2 \right) e_1 \times, \\ \mathcal{R}(e_3, e_1) &= \left(\left(\frac{\lambda_3 + \lambda_1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4}\lambda_2^2 \right) e_2 \times . \end{aligned}$$

Una vez calculado el tensor de curvatura, podemos calcular el tensor de Ricci, obteniendo de esta forma el siguiente resultado.

Lema 2.8. *Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de autovectores del operador L. Entonces el operador de Ricci diagonaliza en dicha base, según la expresión*

$$Ric = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - (\lambda_3 - \lambda_1)^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2) \end{pmatrix}.$$

Observación 2.9. De este modo, la curvatura escalar, definida como la traza del operador de Ricci, viene dada por

$$Sc = 2\lambda_1\lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2.$$

Corolario 2.10. *El determinante del operador de Ricci, dado por*

$$\det Ric = \frac{1}{8}(\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2)(\lambda_2^2 - (\lambda_3 - \lambda_1)^2)(\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2),$$

es siempre no negativo y, si el determinante es nulo, entonces al menos dos curvaturas de Ricci son nulas.

Demostración. Para ver que el determinante es no negativo, basta operar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \det Ric &= \frac{1}{8}(\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2)(\lambda_2^2 - (\lambda_3 - \lambda_1)^2)(\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2) \\ &= \frac{1}{8}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^2(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2, \end{aligned}$$

por lo que obtenemos que el determinante es un producto de cuadrados, y por tanto es no negativo.

Veamos ahora que si el determinante es 0, entonces al menos dos elementos de la diagonal del tensor de Ricci son nulos. Por el Lema 2.8, el operador de Ricci es de la forma

$$Ric = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - (\lambda_3 - \lambda_1)^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que se anula el primer elemento de la diagonal. Entonces se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3$ o bien $\lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_3$. Si sustituimos el primer valor de λ_1 en el tercer elemento de la diagonal, tenemos que

$$\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \lambda_3^2 - (\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_2)^2 = \lambda_3^2 - \lambda_3^2 = 0.$$

Del mismo modo, si sustituimos $\lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_3$ en el segundo elemento de la diagonal también se anula. Razonando de forma análoga para el resto de casos obtenemos que si uno de los elementos de la diagonal se anula, se anula al menos otro. $\square$

Modificando la métrica invariante a la izquierda mediante una homotecia el tensor de Ricci no varía, pero sí lo hace el operador de Ricci de forma que las curvaturas de Ricci se ven afectadas por una constante positiva.

Es por ello que el valor preciso de las curvaturas de Ricci no es relevante, pero sí lo es el signo que puedan tomar. Existen seis casos posibles que pueden darse dependiendo del signo de estos autovalores, que estudiaremos brevemente a continuación. Téngase en cuenta que reordenando la base ortonormal tomada, podemos reordenar los autovalores de L, o cambiarlos de signo en su totalidad, por lo que si nos referimos, por ejemplo, a que $\lambda_1, \lambda_2 > 0 > \lambda_3$, serán equivalentes los caso $\lambda_1, \lambda_3 > 0 > \lambda_2$ y $\lambda_1, \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, entre otros.

A continuación describiremos los grupos asociados a los distintos casos (véase [12]).

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$:

  Si los tres autovalores de L son positivos, estamos en el caso del grupo de las matrices unitarias 2×2 de determinante 1, $SU(2)$, homeomorfo a la 3-esfera unitaria, y del grupo de rotaciones de dimensión 3, $SO(3)$, isomorfo a $SU(2)/\{\pm I\}$. Estos grupos de Lie son compactos y simples.

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 > \lambda_3$:

  Si dos autovalores son positivos y el tercero es negativo, se obtienen los grupos de Lie $SL(2, \mathbb{R})$, grupo de las matrices reales 2×2 de determinante 1, y $O(1, 2)$, grupo de Lorentz formado por las transformaciones lineales que preservan la forma cuadrática $t^2 - x^2 - y^2$. Estos grupos de Lie son no compactos y simples.

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 = \lambda_3$:

  Si dos autovalores son positivos y el tercero es nulo, estamos en el caso del grupo de Lie $E(2)$, grupo de los movimientos rígidos del plano euclídeo. Este grupo de Lie es resoluble.

  Con autovalores con estos signos, la variedad tendrá una curvatura de Ricci positiva y dos negativas, o serán todas nulas.

- $\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3 = 0$:

  Si un autovalor es positivo, otro negativo, y otro nulo, se obtiene el grupo de Lie $E(1, 1)$, grupo de los movimientos rígidos en el plano de Minkowski. Este grupo es el producto semidirecto de subgrupos isomorfos a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ y a $\mathbb{R}$, donde cada $x \in \mathbb{R}$ actúa sobre $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ mediante la matriz

  $$\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

  Este grupo de Lie es resoluble.

  Con autovalores con estos signos, la variedad tendrá una curvatura de Ricci positiva y dos negativas, o tendrá una negativa y dos nulas.

- $\lambda_1 > 0 = \lambda_2 = \lambda_3$:

  Si un autovalor es positivo, y los dos restantes son nulos, estamos en el caso del grupo de Heisenberg, grupo de las matrices 3×3 triangulares superiores con 1 como elementos de la diagonal, es decir, matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Este grupo de Lie es nilpotente.

  Con autovalores con estos signos, la variedad tendrá una curvatura de Ricci positiva y dos negativas.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

  Si los autovalores son nulos, el grupo de Lie resultante es $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, el cual es conmutativo.

  Las curvaturas de Ricci de esta variedad son siempre nulas.

2.2. Grupos de Lie no unimodulares

Recuperando la descripción de los grupos de Lie de dimensión 3 dada por Milnor (véase [12]), tenemos el siguiente Lema.

Lema 2.11. *Sea G un grupo de Lie conexo de dimensión 3 no unimodular. Entonces su álgebra de Lie tiene una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que*

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

de modo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

tiene traza $\alpha + \delta = 2$. Si excluimos el caso de que A sea la matriz identidad, entonces el determinante $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ es un invariante por isomorfismos para el álgebra de Lie.

Demostración. Consideremos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión 3 no unimodular. Tomamos e_1 en $\mathfrak{g}$ tal que $\operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_1) = 2$. Dado que $\mathfrak{u} = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}$, denominado *núcleo unimodular*, es conmutativo, la transformación lineal definida como

$$L(u) = [e_1, u]$$

de $\mathfrak{u}$ en sí mismo, con traza 2, es independiente de la elección de e_1.

Si L lleva cada vector en un múltiplo del mismo, se tiene que L es diagonal y por tanto simétrica, por lo que se tendría que el álgebra es unimodular. En otro caso, el determinante de L, D, da lugar a un invariante mediante isomorfismos. Tomando e_2 tal que e_2 y su imagen $L(e_2) = e_3$ son linealmente independientes, las condiciones $\mathrm{tr}(L) = 2$ y $\det(L) = D$ implican que

$$L(e_2) = e_3, \quad L(e_3) = -De_2 + 2e_3.$$

Así, la operación producto corchete está unívocamente determinada. □

Del mismo modo que en el caso unimodular, podemos calcular el tensor de Ricci, y en consecuencia el operador de Ricci y las curvaturas de Ricci, para los grupos de Lie no unimodulares. Utilizando los valores de los corchetes de Lie para los vectores de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, y mediante la fórmula de Koszul, podemos calcular la conexión de Levi-Civita de la variedad dotada de una métrica invariante a la izquierda. Con ella, podemos calcular el tensor de curvatura $\mathcal{R}$ de tipo (1,3), cuyas componentes no nulas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(e_1, e_2)e_1 &= (-\alpha^2 - \tfrac{3}{4}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\beta\gamma + \tfrac{1}{4}\gamma^2)e_2 + (\alpha\gamma + \beta\delta)e_3,\\
\mathcal{R}(e_1, e_2)e_2 &= (\alpha^2 + \tfrac{3}{4}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \tfrac{1}{4}\gamma^2)e_1,\\
\mathcal{R}(e_1, e_2)e_3 &= (\alpha\gamma + \beta\delta)e_1,\\
\mathcal{R}(e_1, e_3)e_1 &= -(\alpha\gamma + \beta\delta)e_2 + (\tfrac{1}{4}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \tfrac{3}{4}\gamma^2 - \delta^2)e_3,\\
\mathcal{R}(e_1, e_3)e_2 &= (\alpha\gamma + \beta\delta)e_1,\\
\mathcal{R}(e_1, e_3)e_3 &= (-\tfrac{1}{4}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\beta\gamma + \tfrac{3}{4}\gamma^2 + \delta^2)e_1,\\
\mathcal{R}(e_2, e_3)e_2 &= (\tfrac{1}{4}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\beta\gamma + \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \alpha\delta)e_3,\\
\mathcal{R}(e_2, e_3)e_3 &= (-\tfrac{1}{4}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \tfrac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\delta)e_2.
\end{aligned}$$

De este modo, podemos calcular el operador de Ricci, siendo este de la forma

$$Ric = \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \delta^2 - \frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(\alpha+\delta) - \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2) & -\alpha\gamma - \beta\delta \\ 0 & -\alpha\gamma - \beta\delta & -\delta(\alpha+\delta) + \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2) \end{pmatrix}.$$

Además, las curvaturas de Ricci, es decir, los autovalores del tensor de Ricci, vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\rho(e_1, e_1) &= -\alpha^2 - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)^2 - \delta^2,\\
\rho(e_2, e_2) &= -\tfrac{1}{2}\left((\alpha+\delta)^2 + \sqrt{((\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2)((\beta-\gamma)^2 + (\alpha+\delta)^2)}\right),\\
\rho(e_3, e_3) &= \tfrac{1}{2}\left(-(\alpha+\delta)^2 + \sqrt{((\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2)((\beta-\gamma)^2 + (\alpha+\delta)^2)}\right).
\end{aligned}$$

Si recordamos, en el Lema 2.11 habíamos fijado $\alpha + \delta = 2$. Por lo tanto, el operador de Ricci resultante será

$$Ric = \begin{pmatrix} -2(\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha - \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2) & -\alpha\gamma - \beta(2-\alpha) \\ 0 & -\alpha\gamma - \beta(2-\alpha) & -2(2-\alpha) + \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2) \end{pmatrix},$$

y las curvaturas de Ricci vendrán dadas por

$$\begin{aligned}
\rho(e_1, e_1) &= -2(\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)^2, \\
\rho(e_2, e_2) &= -2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{((\beta + \gamma)^2 + (2\alpha - 2)^2)((\beta - \gamma)^2 + 4)}, \\
\rho(e_3, e_3) &= -2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{((\beta + \gamma)^2 + (2\alpha - 2)^2)((\beta - \gamma)^2 + 4)}.
\end{aligned}$$

Un cálculo directo a partir de las expresiones anteriores muestra lo siguiente:

1. La curvatura de Ricci

   $$\rho(e_2, e_2) = -2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{((\beta + \gamma)^2 + (2\alpha - 2)^2)((\beta - \gamma)^2 + 4)}$$

   es siempre distinta de cero.

2. Las curvaturas de Ricci $\rho(e_2, e_2) = \rho(e_3, e_3)$ si y solo si $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma$, esto es, la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, en cuyo caso la curvatura seccional es constante y $(G, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es isométrico al espacio hiperbólico.

3. Las curvaturas de Ricci $\rho(e_1, e_1) = \rho(e_2, e_2)$ si y solo si $\alpha = 1 \pm \sqrt{1 - \beta\gamma}$, en cuyo caso $\det A = 0$. Además, en este caso se tiene

   $$\rho(e_1, e_1) = \rho(e_2, e_2) = -4 - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)^2, \quad \rho(e_3, e_3) = \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)^2.$$

4. Las curvaturas de Ricci $\rho(e_1, e_1) = \rho(e_3, e_3)$ si y solo si $\beta = -\gamma$ y $\alpha = 1$, en cuyo caso las tres curvaturas de Ricci son iguales, llegando así al mismo resultado que en el segundo caso.

Teniendo en cuenta las caracterizaciones de condiciones de tipo Einstein introducidas en el Capítulo 1, las igualdades entre curvaturas de Ricci dan lugar al siguiente resultado.

Proposición 2.12. *Sea G un grupo de Lie no unimodular de dimensión tres con una métrica invariante a la izquierda. Entonces:*

(a) G es $\check{\rho}$-Einstein si y solo si es Einstein.

(b) G es débilmente Einstein si y solo si es Einstein.

(c) G es $R[\rho]$-Einstein si y solo si es Einstein.

Capítulo 3

Espacios homogéneos de dimensión 3

En este capítulo introduciremos nociones sobre homogeneidad y grupos de isometría, para posteriormente describir una serie de geometrías con el objetivo final de caracterizarlas mediante las condiciones tipo Einstein en el capítulo siguiente.

En primer lugar, veamos qué es una variedad homogénea.

Definición 3.1. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Decimos que es *homogénea* si para todo $p, q \in M$, existe una isometría φ de modo que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \longrightarrow & M \\ & p & \longmapsto & q. \end{array}$$

3.1. Grupo de isometrías

Sea (M, g) una variedad de Riemann. Definimos el *grupo de isometrías* de la variedad, $Iso(M)$, como el conjunto de todos los difeomorfismos que preservan el tensor métrico (isometrías) con la composición de aplicaciones como operación del grupo. Si la variedad M es de dimensión n, entonces la dimensión del grupo de isometrías es a lo sumo $n(n+1)/2$ (véase [8]).

3.1.1. Campos de Killing

Sea (M, g) una variedad de Riemann, y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores. Decimos que X es un *campo de vectores de Killing* si la derivada de Lie del tensor métrico g respecto de X es 0, es decir, $\mathcal{L}_X g = 0$.

Sea $\mathfrak{K}(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) : \mathcal{L}_X g = 0\}$ el conjunto de los campos de Killing sobre la variedad de Riemann (M, g). Entonces, $\mathfrak{K}(M)$ es un álgebra de Lie con la operación corchete de Lie. En efecto, dados $X, Y \in \mathfrak{K}(M)$, tenemos que

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} g = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y g - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X g = 0.$$

Dado un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir la aplicación del tangente a M en un punto p en sí mismo dada por

$$\begin{aligned} T: \ T_pM &\longrightarrow T_pM \\ \xi \ &\longmapsto T(\xi) = \nabla_\xi X. \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que X es un campo de Killing si y solo si $g(T(\xi),\eta) = -g(\xi, T(\eta))$.

Dado un sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, podemos evaluar $\mathcal{L}_X g$ en los campos de vectores coordenados. De este modo,

$$\begin{aligned} 0 = (\mathcal{L}_X g)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) &= g(\nabla_{\partial_{x^i}} X, \partial_{x^j}) + g(\partial_{x^i}, \nabla_{\partial_{x^j}} X) \\ &= (\partial_{x^i} X^k + X^\ell \Gamma^k_{i\ell}) g_{kj} + (\partial_{x^j} X^k + X^\ell \Gamma^k_{j\ell}) g_{ki}. \end{aligned}$$

Luego, tenemos una ecuación diferencial cuyo espacio de soluciones se corresponde con el conjunto de campos de Killing, por lo que todo campo de Killing está determinado por sus condiciones iniciales: el valor del campo en p, X_p, y el valor de $\nabla X = T$ en p. Por lo tanto, dado que X_p depende de n parámetros, y T es antisimétrico, se tiene que la dimensión del espacio de campos de Killing es a lo sumo

$$\dim \mathfrak{K}(M) \leq \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Teorema 3.2. [13] *Una variedad de Riemann completa y simplemente conexa es homogénea si y solo si para cada punto existe una referencia local de campos de vectores de Killing.*

Por tanto, si una variedad es homogénea, entonces $\dim \mathfrak{K}(M) \geq n$.

Todo grupo de Lie con una métrica invariante a la izquierda es trivialmente un espacio homogéneo (basta considerar las isometrías dadas por las traslaciones a la izquierda), por lo que $\dim \mathfrak{K}(M) \geq \dim G$. De hecho cualquier vector del álgebra de Lie del grupo da lugar a un campo de vectores de Killing.

Lema 3.3. [1] *Sea G un grupo de Lie con una métrica invariante a la izquierda. Entonces, todo campo de vectores invariante a la derecha sobre G es un campo de Killing.*

La existencia de más campos de Killing sobre G es una condición restrictiva como muestra el siguiente

Teorema 3.4. *Un grupo de Lie G de dimensión 3 admite un campo de Killing invariante a la izquierda si y solo si es un espacio simétrico, o bien es uno de los siguientes grupos de Lie:*

- *G con álgebra de Lie asociada determinada por los corchetes*

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = [e_3, e_1] = 0,$$

- *G con álgebra de Lie asociada determinada por los corchetes*

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_1 e_2.$$

Demostración. Estudiemos por separado los grupos unimodulares y los no unimodulares. Para el caso unimodular, consideremos un vector $v = \sum v_i e_i$ en el álgebra de Lie de forma que su trasladado a la izquierda sea Killing. De este modo, la derivada de Lie del tensor métrico respecto de este campo, dada por

$$\mathcal{L}_v g = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)v_3 & (-\lambda_1 + \lambda_3)v_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)v_3 & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)v_1 \\ (-\lambda_1 + \lambda_3)v_2 & (\lambda_2 - \lambda_3)v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

ha de ser nula. Así, tenemos los siguientes casos:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$,

2. $\lambda_1 = \lambda_2$ y $v_1 = v_2 = 0$,

3. $\lambda_1 = \lambda_3$ y $v_1 = v_3 = 0$,

4. $\lambda_2 = \lambda_3$ y $v_2 = v_3 = 0$,

5. $v = 0$.

En el primer caso, la variedad es Einstein. En el último se tiene que el campo de vectores obtenido es el campo de vectores nulo. Los tres casos restantes son análogos entre sí, por lo que analizaremos solo el primero de ellos.

Si $\lambda_1 = \lambda_3$, el operador de Ricci es de la forma $Ric = \mathrm{diag}(\lambda_2\lambda_3 - \frac{\lambda_3^2}{2}, \lambda_2\lambda_3 - \frac{\lambda_3^2}{2}, \frac{\lambda_3^2}{2})$. Por lo tanto, el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie está determinada por los corchetes

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_1 e_2,$$

o, en el caso de que λ_2 sea 0,

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = [e_3, e_1] = 0.$$

En ambos casos el campo de Killing viene dado por $v = e_3$.

Para el caso no unimodular, consideramos nuevamente un vector $v = \sum v_i e_i$ en el álgebra de Lie de forma que su trasladado a la izquierda sea Killing. De este modo, la derivada de Lie del tensor métrico respecto de este campo, dada por

$$\mathcal{L}_v g = \begin{pmatrix} 0 & \alpha v_2 + \gamma v_3 & \beta v_2 + (2-\alpha)v_3 \\ \alpha v_2 + \gamma v_3 & 0 & -(\beta + \gamma)v_1 \\ \beta v_2 + (2-\alpha)v_3 & -(\beta+\gamma)v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

ha de ser nula. Así, tenemos los siguientes casos:

1. $v = 0$,

2. $\alpha = \beta = 0$, $v_1 = v_3 = 0$ y $v_2 \neq 0$,

3. $\alpha = 2$, $\gamma = 0$, $v_1 = v_2 = 0$ y $v_3 \neq 0$,

4. $v_1 = 0$, $-\alpha v_2 = \gamma v_3$ y $(\alpha - 2)v_3 = \beta v_2$, con $v_2, v_3 \neq 0$.

En el primer caso tenemos que el campo obtenido es el campo de vectores nulo.

En el segundo caso (el tercer caso es análogo), se tiene que el operador de Ricci es de la forma $Ric = \mathrm{diag}(-4 - \frac{\gamma^2}{2}, \frac{\gamma^2}{2}, -4 - \frac{\gamma^2}{2})$. El campo que define el vector $v = e_2$ es invariante a la izquierda, pero además es invariante a la derecha, ya que $[v, e_k] = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Por lo tanto, la existencia de este campo de Killing no aumenta la dimensión del álgebra de campos de Killing.

En el último caso, el campo que define el vector $v = v_2 e_2 + v_3 e_3$ es invariante a la izquierda y a la derecha, ya que $[v, e_k] = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Así, la existencia de este campo no aumenta la dimensión del álgebra de campos de Killing. □

El tercer caso (y analogamente el segundo) se corresponde con la situación en que es $R[\rho]$-Einstein, porque $\det A = 0$.

3.2. Espacios simétricos

A lo largo de esta sección supondremos que todas las variedades son conexas y completas. Además serán simplemente conexas o, en otro caso, los resultados se referirán a su recubrimiento universal.

Definición 3.5. Una variedad de Riemann se dice que es *simétrica* si su tensor de curvatura $\mathcal{R}$ es paralelo, es decir, $\nabla \mathcal{R} = 0$.

Equivalentemente, una variedad de Riemann (M, g) es simétrica si para cada punto $p \in M$ existe una isometría de M fijando p y actuando sobre el espacio tangente T_pM como opuesta a la identidad.

Lema 3.6. *Un espacio simétrico de dimensión 3 es de curvatura constante (y por tanto será isométrico a $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{H}^3$) o un producto donde uno de los factores es una superficie con curvatura de Gauss constante (y por tanto será isométrico a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$).*

Demostración. Por definición, una variedad de Riemann (M, g) de dimensión 3 es localmente simétrica si y solo si el tensor $\mathcal{R}$ es paralelo, es decir, si y solo si $\nabla \mathcal{R} = 0$. Pero, si $\mathcal{R}$ es paralelo, el tensor de Ricci ρ también será paralelo. Por otro lado, tenemos el recíproco al trabajar en dimensión tres, ya que $\mathcal{R} = S \odot g$ donde S es el tensor de Schouten. Además, esto es equivalente a decir que el operador de Ricci Ric es paralelo, es decir, $\nabla Ric = 0$.

Por otro lado, dado un campo tensorial de tipo (1,1), si este es paralelo entonces verifica que sus autovalores son constantes, y los autoespacios asociados a dichos autovalores son paralelos. Es decir, dado un campo tensorial T paralelo, y sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sus autovalores, se tiene que si $D = \ker(T - \lambda_i Id)$, entonces $\nabla_X D \subset D$, para todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$.

De este modo, si consideramos una base ortonormal que diagonalice el operador de Ricci, cuyos autovalores denotaremos por α, β y γ, es decir, $Ric = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ en dicha base, entonces los autoespacios asociados a cada autovalor serán distribuciones paralelas, cuyas dimensiones coinciden con las multiplicidades de dichos autovalores. Por ejemplo, $D_\alpha = \ker(Ric - \alpha Id)$ es una distribución paralela con dimensión la multiplicidad de α.

De este modo, podemos reescribir la variedad de Riemann como $M = M_1 \times M_2$ y $g = g_1 \oplus g_2$, de modo que tanto (M_1, g_1) como (M_2, g_2) son variedades de Riemann. Así, si $\nabla Ric = 0$, sus autovalores son constantes y tenemos, en principio, tres casos posibles:

- Un único autovalor con multiplicidad 3: $Ric = \lambda Id$. En este caso, el operador de Ricci es un múltiplo de la métrica, por lo tanto (M, g) es una variedad Einstein.

- Un autovalor con multiplicidad 2: $Ric = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu)$. En este caso, podemos reescribir la variedad como el producto de $\mathbb{R}$ por una variedad de dimensión 2 (superficie). De esta forma tenemos que $M = \mathbb{R} \times N$, con $\dim N = 2$. Sin embargo, $\mathbb{R}$ es una variedad $\mathcal{R}$-llana, por lo que tiene curvatura 0. Por lo tanto, el autovalor μ ha de ser 0, y el operador de Ricci sería $Ric = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, 0)$.

- Tres autovalores distintos: $Ric = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, \nu)$. En este caso, podemos reescribir la variedad como producto de $\mathbb{R}$ por sí mismo, de modo que $M = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Como hemos mencionado anteriormente, $\mathbb{R}$ es una variedad $\mathcal{R}$-llana, por lo que los autovalores asociados a dichos espacios han de ser 0, por lo que el operador de Ricci se anula. Por lo tanto, la variedad es Einstein.

Así, ningún espacio simétrico tendrá un operador de Ricci de la forma $Ric = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$, con $\beta \neq 0$. Por otro lado, en el caso de tener un operador de Ricci de la forma $Ric = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, 0)$, con $\alpha \neq 0$, y al ser α un autovalor constante, se tiene que la variedad puede ser $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, si $\alpha < 0$, o bien $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, si $\alpha > 0$, siendo $\mathbb{H}^2$ el espacio hiperbólico de dimensión 2, y $\mathbb{S}^2$ la esfera de dimensión 2. Es decir, los únicos espacios simétricos proporcionales a la métrica son $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$.

$\square$

3.3. La geometría Nil_3

Como ya se ha visto en el Capítulo 2, el grupo de Heisenberg es el grupo de las matrices 3×3 triangulares superiores con 1 como elementos de la diagonal. Por tanto, su álgebra de Lie viene determinada por el siguiente producto en un espacio vectorial de dimensión tres:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_3, e_1] = 0.$$

La *geometría* Nil_3 está caracterizada por la métrica invariante a la izquierda en el grupo de Heisenberg determinada por el hecho de que la base anterior $\{e_1, e_2, e_3\}$ sea ortonormal. Por lo tanto, el operador de Ricci para esta variedad es el siguiente:

$$Ric = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

La caracterización en el Lema 1.21 muestra que toda geometría Nil_3 es $\check{\rho}$-Einstein.

3.4. Las esferas de Berger

Consideremos $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ una parametrización conforme de un dominio D en $\mathbb{S}^2$, y sea λ el factor conforme, es decir, la métrica de Riemann de la variedad D viene dada por $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$. Podemos dar una parametrización del fibrado tangente a D como

$$(x, y, \theta) \mapsto (\varphi(x, y), \tfrac{1}{\lambda}(\cos\theta\partial_x + \sin\theta\partial_y)).$$

Sean $p = \varphi(x, y) \in D$, $v \in T_pD$ y $V \in T_{(p,v)}TD$. Sea $\alpha(t) = (p(t), v(t))$ una curva tal que $v(t) \in T_{p(t)}D$, $p(0) = p$, $v(0) = v$ y $\dot{\alpha}(0) = V$. Entonces la norma de V viene dada por

$$\|V\|^2_{(p,v)} = \|d\pi(V)\|^2_p + \|\frac{Dv}{dt}(0)\|^2_p,$$

siendo $\pi : TD \to D$ la proyección canónica.

Fijemos $\alpha(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$. Entonces el vector tangente a la curva viene dado por

$$v(t) = \tfrac{1}{\lambda}(\cos\theta(t)\partial_x + \sin\theta(t)\partial_y),$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{Dv}{dt} &= -\tfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}(\cos\theta\partial_x + \sin\theta\partial_y) + \frac{\dot{\theta}}{\lambda}(-\sin\theta\partial_x + \cos\theta\partial_y)\\ &\quad + \tfrac{1}{\lambda}(\cos\theta(\dot{x}\nabla_{\partial_x}\partial_x + \dot{y}\nabla_{\partial_y}\partial_x) + \sin\theta(\dot{x}\nabla_{\partial_x}\partial_y + \dot{y}\nabla_{\partial_y}\partial_y)),\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \dot{x}\lambda_x + \dot{y}\lambda_y,\\ \nabla_{\partial_x}\partial_x &= \tfrac{\lambda_x}{\lambda}\partial_x - \tfrac{\lambda_y}{\lambda}\partial_y,\\ \nabla_{\partial_y}\partial_y &= -\tfrac{\lambda_x}{\lambda}\partial_x + \tfrac{\lambda_y}{\lambda}\partial_y,\\ \nabla_{\partial_x}\partial_y = \nabla_{\partial_y}\partial_x &= -\tfrac{\lambda_y}{\lambda}\partial_x - \tfrac{\lambda_x}{\lambda}\partial_y.\end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$\frac{Dv}{dt} = \tfrac{1}{\lambda^2}(\lambda\dot{\theta} + \dot{y}\lambda_x - \dot{x}\lambda_y)(\cos\theta\ \partial_y - \sin\theta\ \partial_x),$$

y así

$$\|V\|^2_{(p,v)} = \lambda^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{\lambda^2}(\lambda\dot{\theta} + \dot{y}\lambda_x - \dot{x}\lambda_y)^2.$$

Si consideramos $z = \theta$, la métrica del recubrimiento universal de D viene dada por

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (-\tfrac{\lambda_y}{\lambda}dx + \tfrac{\lambda_x}{\lambda}dy + dz)^2.$$

Tomando $D = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ con la métrica de curvatura constante 4 (es decir, la métrica de la esfera de radio $\frac{1}{2}$) dada por la proyección estereográfica, es decir, tomando

$$\lambda = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Así obtenemos

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (2\lambda(ydx - xdy) + dz)^2.$$

Más generalmente, $\mathbb{R}^3$ con la métrica

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau\lambda(ydx - xdy) + dz)^2,$$

siendo

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)},$$

es el recubrimiento universal de una variedad homogénea $\mathbb{E}$, con τ como curvatura del fibrado y $\kappa > 0$ como curvatura de la variedad base.

La base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ viene dada por

$$\begin{aligned}
e_1 &= \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial_x + \sin(\sigma z)\partial_y) + \tau(x\sin(\sigma z) - y\cos(\sigma z))\partial_z,\\
e_2 &= \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial_x + \cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(x\cos(\sigma z) + y\sin(\sigma z))\partial_z,\\
e_3 &= \partial_z,
\end{aligned}$$

con

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau},$$

y verifica

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = \tfrac{\kappa}{2\tau}e_1, \quad [e_3, e_1] = \tfrac{\kappa}{2\tau}e_2,$$

con $\kappa > 0$ y $\tau \neq 0$.Como ya se ha visto en el Capítulo 2, dado que 2τ y $\frac{\kappa}{2\tau}$ comparten signo siempre, estamos en el caso de los grupos $SU(2)$ o bien $SO(3)$.

La geometría de las esferas de Berger está caracterizada por la métrica invariante a la izquierda en uno de los grupos de Lie antes citados, determinada por el hecho de que la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ anterior sea ortonormal. De esta forma, el operador de Ricci, que habíamos calculado de un modo general en el Lema 2.8, es de la forma

$$Ric = \begin{pmatrix} \kappa - 2\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa - 2\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix},$$

de modo que las dos primeras curvaturas de Ricci pueden tomar valores de cualquier signo, y la tercera es siempre positiva.

Se sigue entonces que el operador de Ricci asociado a toda esfera de Berger tiene exactamente dos autovalores iguales. Además, una esfera de Berger es $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein si y solo si

$$2\tau^2 = 2\kappa - 4\tau^2$$

por lo que $\kappa = 3\tau^2$.

Observación 3.7. El operador de Ricci asociado a las esferas de Berger puede ser descompuesto como

$$Ric = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix}.$$

3.5. La geometría $SL(2,\mathbb{R})$

Como hemos visto en el Capítulo 2, $SL(2,\mathbb{R})$ consiste en el grupo de las matrices reales 2×2 de determinante 1. Por lo tanto su álgebra de Lie viene determinada por el siguiente producto en un espacio vectorial de dimensión 3:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 0 > \lambda_3$.

La geometría de $SL(2,\mathbb{R})$ está caracterizada por la métrica invariante a la izquierda en el grupo $SL(2,\mathbb{R})$, determinada por el hecho de que la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sea ortonormal.

De un modo análogo al de las esferas de Berger, podemos describir la geometría $SL(2,\mathbb{R})$ mediante las curvaturas de una variedad base, κ, y del fibrado correspondiente, τ, siendo en este caso $\kappa < 0$ y $\tau \neq 0$.

Del mismo modo que las esferas de Berger podían ser consideradas como fibrados de una esfera de dimensión dos, podemos considerar el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ como el recubrimiento universal del fibrado unitario del hiperboloide $\mathbb{H}^2$ con la métrica euclídea.

Sea $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ una parametrización conforme de $\mathbb{H}^2$ y sea λ su factor conforme, de modo que la métrica de $\mathbb{H}^2$ viene dada por $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$. Así, la métrica correspondiente a $SL(2,\mathbb{R})$ viene dada por

$$\lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left(-\frac{\lambda_y}{\lambda}dx + \frac{\lambda_x}{\lambda}dy + dz\right)^2.$$

Esta métrica determina una variedad homogénea con $\kappa = -1$ y $\tau = -\frac{1}{2}$.

Más generalmente, podemos tomar el modelo del disco de Poincaré para el plano hiperbólico de curvatura constante $\kappa < 0$. La variedad dada por $\mathbb{D}^2(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}) \times \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{D}^2(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}})$ el disco abierto de radio $\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}$, dotada de la métrica

$$\lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau\lambda(ydx - xdy) + dz)^2,$$

con

$$\lambda = \frac{1}{2 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)},$$

es una variedad homogénea con curvatura del fibrado τ y curvatura base $\kappa < 0$. Dada la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, con

$$\begin{aligned}
e_1 &= \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial_x + \sin(\sigma z)\partial_y) + \tau(x\sin(\sigma z) - y\cos(\sigma z))\partial_z,\\
e_2 &= \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial_x + \cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(x\cos(\sigma z) + y\sin(\sigma z))\partial_z,\\
e_3 &= \partial_z,
\end{aligned}$$

con

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau},$$

se verifica que

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = \frac{\kappa}{2\tau} e_1, \quad [e_3, e_1] = \frac{\kappa}{2\tau} e_2.$$

De esta forma, el operador de Ricci viene dado por

$$Ric = \begin{pmatrix} \kappa - 2\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa - 2\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix},$$

de modo que las dos primeras curvaturas de Ricci son negativas y la tercera es positiva.

El operador de Ricci asociado a cada geometría SL(2,R) tiene dos autovalores iguales. Sin embargo, esta geometría no es $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein dado que los autovalores tienen signos opuestos.

Capítulo 4

Caracterización de geometrías homogéneas mediante condiciones tipo Einstein

En este capítulo realizaremos el objetivo de este trabajo: caracterizaremos las variedades homogéneas de dimensión 3 con grupo de isometrías de dimensión 4 mediante las condiciones tipo Einstein dadas en los preliminares. No obstante, gracias al siguiente teorema, veremos acotadas estas variedades considerablemente.

Teorema 4.1. [15] *Una variedad de Riemann de dimensión 3 completa y simplemente conexa es homogénea si y solamente si es simétrica o un grupo de Lie.*

De este modo, tenemos que estudiar las variedades simétricas y los grupos de Lie. Sin embargo, ya hemos estudiado y caracterizado las variedades simétricas en la Sección 3.2, por lo tanto resta analizar el caso de los grupos de Lie.

4.1. Caracterización del grupo de Heisenberg Nil_3

Teorema 4.2. *Una variedad homogénea de dimensión 3 es $\check{\rho}$-Einstein si y solo si es de curvatura seccional constante o homotética al grupo de Heisenberg con una geometría* Nil_3.

Demostración. Ya hemos probado en la sección 3.3 que la geometría Nil_3 es $\check{\rho}$-Einstein. Veremos a continuación que esta es la única geometría homogénea no trivial que verifica dicha condición. Para ello comenzaremos analizando los grupos unimodulares para posteriormente estudiar los no unimodulares.

Queremos que el operador de Ricci sea de la forma dada en el Lema 1.21, por lo que debemos estudiar en qué casos se tiene que dos de los elementos de la diagonal son iguales y el tercero opuesto a ellos. Para ello, en el caso unimodular, vamos a suponer sin pérdida de generalidad que los dos primeros elementos de la diagonal son iguales y el tercero de ellos el opuesto. Por lo tanto, obtenemos las siguientes condiciones sobre los autovalores λ_i:

- $Ric_{11} = Ric_{22}$:

$$\begin{aligned} Ric_{11} = Ric_{22} &\Leftrightarrow \lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = \lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3 \\ &\Leftrightarrow 2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \quad \text{o} \\ \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}; \end{aligned}$$

- $Ric_{11} = -Ric_{33}$:

$$\begin{aligned} Ric_{11} = -Ric_{33} &\Leftrightarrow \lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = -\lambda_3^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = -\lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \quad \text{o} \\ \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}; \end{aligned}$$

- $Ric_{22} = -Ric_{33}$:

$$\begin{aligned} Ric_{22} = -Ric_{33} &\Leftrightarrow \lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2 = -\lambda_3^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3 = -\lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda_1(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \quad \text{o} \\ \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Estudiemos ahora cada uno de estos casos, y veamos que el único grupo de Lie que puede tener un operador de Ricci de la forma deseada es el grupo de Heisenberg.

- $\lambda_1 = \lambda_2$;
  - $\lambda_2 = 0$, y por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
    - $\lambda_1 = 0$. Es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, el grupo de Heisenberg. En este caso el operador de Ricci es de la forma

$$Ric = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_3^2 \neq 0$, luego el grupo de Heisenberg verifica esta condición.

- $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$. Entonces, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, y todos los elementos del operador de Ricci son nulos; no es de la forma buscada.

- $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, o equivalentemente, $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_3 = 0$;
  - $\lambda_1 = 0$, por lo que todos los autovalores son nulos y el operador de Ricci no tiene elementos distintos de 0; no es de la forma buscada.
  - $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$, o equivalentemente $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_3 \neq 0$. De este modo, todos los elementos del Ricci son nulos; no es de la forma buscada.

- $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$;
  - $\lambda_2 = 0$, y por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$;
    - $\lambda_1 = 0$. Es decir, Todos los autovalores son nulos, y por tanto todos los elementos del operador de Ricci son nulos.
    - $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$. Entonces, $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = 0$, y todos los elementos del operador de Ricci son nulos; no es de la forma buscada.
  - $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, o equivalentemente, $\lambda_2 = \lambda_3$ y $\lambda_1 = 0$;
    - $\lambda_1 = 0$, por lo que todos los autovalores son nulos y el operador de Ricci no tiene elementos distintos de 0; no es de la forma buscada.
    - $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$, o equivalentemente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De este modo, todos los elementos del Ricci son nulos; no es de la forma buscada.

Por lo tanto, de todos los posibles casos obtenidos de igualar dos elementos de la diagonal del operador de Ricci entre sí, y al opuesto del tercero, solo obtenemos que estos son no nulos cuando el grupo de Lie tomado es el grupo de Heisenberg.

Veamos ahora el caso no unimodular. Para ello, debemos igualar dos de las curvaturas de Ricci de todas las formas posibles, y comprobaremos qué ocurre con la tercera. Sin embargo, como ya hemos visto en la Proposición 2.12, en ningún caso tendremos que la tercer curvatura de Ricci es igual al opuesto de las otras dos. Por lo tanto, podemos concluir que una variedad homogénea tridimensional es $\check{\rho}$-Einstein si y solo si es homotética al grupo de Heisenberg con una geometría Nil_3, o si es de curvatura seccional constante.

□

4.2. Caracterización de las esferas de Berger y $SL(2,\mathbb{R})$

Teorema 4.3. *El operador de Ricci de una variedad homogénea de dimensión tres tiene exactamente dos autovalores iguales si y solo si es isométrica a una esfera de Berger, a una geometría $SL(2,\mathbb{R})$ o a un grupo de Lie no unimodular dado por el álgebra de Lie*

$$[e_1, e_2] = (1 \pm \sqrt{1-\beta\gamma})e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + (1 \mp \sqrt{1-\beta\gamma})e_3, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal.

Demostración. Como ya hemos visto en las secciones 3.4 y 3.5, el operador de Ricci de las esferas de Berger y la geometría $SL(2,\mathbb{R})$ tiene exactamente dos autovalores iguales. Veamos a continuación que son las únicas geometrías homogéneas sobre grupos de Lie unimodulares con esta propiedad.

Supongamos que el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G está determinada por los corchetes

$$[e_1,e_2]=\lambda_3 e_3, \quad [e_2,e_3]=\lambda_1 e_1, \quad [e_3,e_1]=\lambda_2 e_2,$$

siendo $\{e_i\}$ una base ortonormal. De esta forma, el operador de Ricci de G será de la forma

$$Ric=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_1^2-(\lambda_2-\lambda_3)^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^2-(\lambda_1-\lambda_3)^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^2-(\lambda_1-\lambda_2)^2\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si el operador de Ricci de G tiene dos autovalores iguales, se tiene que

$$\lambda_1^2-(\lambda_2-\lambda_3)^2=\lambda_2^2-(\lambda_1-\lambda_3)^2.$$

Esto equivale a

$$(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)=(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),$$

por lo tanto, se dará la igualdad si $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ o si $\lambda_1=\lambda_2$. En el primer caso, el operador de Ricci obtenido es de la forma

$$Ric=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda_1\lambda_2\end{pmatrix},$$

por lo que estamos ante una variedad débilmente Einstein. En el segundo caso, tenemos que $\lambda_1=\lambda_2$. Si recordamos la descripción de las esferas de Berger y de $SL(2,\mathbb{R})$, teníamos que $\lambda_1=\lambda_2=\frac{\kappa}{2\tau}$ y $\lambda_3=2\tau$, con $\tau\neq 0$ y $\kappa>0$ en el caso de las esferas de Berger y $\kappa<0$ en el caso de $SL(2,\mathbb{R})$. De este modo, si λ_1 y λ_3 tienen el mismo signo, G será una esfera de Berger, y si son de signo opuesto, G será $SL(2,\mathbb{R})$.

Considerando ahora los grupos de Lie no unimodulares, el resultado se sigue de la Proposición 2.12. $\square$

Teorema 4.4. *Una variedad homogénea de dimensión 3 es estrictamente $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein si y solo si es isométrica a una esfera de Berger determinada por el álgebra de Lie dada por*

$$[e_1,e_2]=\tfrac{4}{3}\lambda e_3, \quad [e_2,e_3]=\lambda e_1, \quad [e_3,e_1]=\lambda e_2.$$

Demostración. Por el Lema 1.23, tenemos que los autovalores del operador de Ricci de una variedad homogénea de dimensión 3 $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein son de la forma $(\mu,\mu,2\mu)$, por lo que se trata de un caso particular del Teorema anterior. Además, se vio anteriormente que $SL(2,\mathbb{R})$ y los grupos no unimodulares no podían verificar esta condición para los autovalores, por lo que toda variedad homogénea de dimensión 3 $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein es una esfera de Berger.

Por otro lado, el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie unimodular está determinada por los corchetes

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,$$

siendo $\{e_i\}$ una base ortonormal. De esta modo, el operador de Ricci será de la forma

$$Ric = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para que el operador de Ricci esté en las condiciones exigidas, se debe verificar lo siguiente

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= \lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2, \\ 2(\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2) &= \lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \end{aligned}$$

De la primera igualdad se obtiene que $\lambda_1 = \lambda_2$; sustituyendo esta condición en la segunda igualdad, se obtiene que $4\lambda_1 = 3\lambda_3$, por lo que queda demostrado el Teorema. □

Observación 4.5. La caracterización de las geometrías correspondientes a las esferas de Berger y $SL(2, \mathbb{R})$ es todavía un problema abierto, esto es, decidir cuándo los grupos no unimodulares en el Teorema 4.3 pueden ser isométricos como variedades a las citadas geometrías.

El problema de decidir el carácter isométrico a partir del hecho de tener la misma curvatura es una cuestión más abordable en dimensiones superiores, pero la dimensión tres es especialmente compleja en este sentido (ver, por ejemplo [17]).

4.3. Variedades débilmente Einstein

Teorema 4.6. *Una variedad homogénea de dimensión tres es estrictamente débilmente Einstein si y solo si es isométrica a un grupo de Lie unimodular cuya álgebra de Lie está determinada por los corchetes*

$$[e_1, e_2] = (\lambda_1 + \lambda_2) e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$*, siendo* $\{e_i\}$ *una base ortonormal.*

Demostración. Si G es un grupo de Lie no unimodular, el operador de Ricci nunca puede tener rango uno (salvo que sea cero) como se muestra en la Proposición 2.12, por lo que nuestro estudio se reduce al caso unimodular.

La implicación hacia la izquierda es sencilla. Si sustituimos $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ en el operador de Ricci dado por 2.8, tenemos que efectivamente el operador de Ricci es de la forma $Ric = \mathrm{diag}(0, 0, 2\lambda_1\lambda_2)$, por lo que es débilmente Einstein.

Para probar la implicación hacia la derecha, tenemos que igualar las dos primeras curvaturas de Ricci a cero. De este modo, tenemos que

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = 0,$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0.$$

Si $(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = 0$, se anulan estas curvaturas de Ricci, y la tercera viene dada por $2\lambda_1\lambda_2$. Por lo tanto, el álgebra de Lie asociada viene dada por

$$[e_1, e_2] = (\lambda_1 + \lambda_2)e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

En el caso de anularse $(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$ o $(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, tendríamos que también se anula la tercer curvatura de Ricci, por lo que estaríamos ante una variedad llana. □

Observación 4.7. Teniendo en cuenta los signos de λ_1 y λ_2, la variedad débilmente Einstein se realizará sobre uno de los siguientes grupos de Lie:

- Si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, $\lambda_1 + \lambda_2$ compartirá dicho signo, por lo que tenemos una métrica invariante a la izquierda en el grupo de Lie $SU(2)$ o bien $SO(3)$.
- Si λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos, contamos con dos casos distintos:
  - Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, comparte signo con λ_1 o con λ_2, por lo que tenemos una métrica invariante a la izquierda en el grupo de Lie $O(1, 2)$ o $SL(2, \mathbb{R})$.
  - Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, tenemos una métrica invariante a la izquierda en el grupo de Lie $E(1, 1)$.

Además, el Teorema 4.6 garantiza la existencia de métricas débilmente Einstein en cada uno de los grupos anteriores.

Observación 4.8. Las condiciones tipo Einstein consideradas a lo largo de este capítulo permiten avanzar en la caracterización de las geometrías homogéneas con un alto grado de simetrías de entre las variedades homogéneas. No obstante, la hipótesis de homogeneidad es esencial en los resultados, ya que existen ejemplos de variedades $\mathcal{R}[\rho]$-Einstein que no son homogéneas a pesar de tener curvaturas de Ricci constantes (véase, por ejemplo [2, Capítulo 12]) En particular es importante señalar la existencia de variedades $R[\rho]$-Einstein con curvaturas de Ricci constantes $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = 0$ que no son realizables sobre ningún espacio homogéneo [9], [14].

Sin embargo, la condición $\check{\rho}$-Einstein es más restrictiva. De hecho, se sigue de forma inmediata del trabajo de Yamato [16]

Teorema 4.9. *Una variedad compacta de dimensión 3 $\check{\rho}$-Einstein con curvaturas de Ricci constantes es localmente homogénea y por tanto localmente isométrica a un espacio de curvatura constante o a* Nil_3.

Bibliografía

[1] R.P. Albuquerque. On Lie groups with left invariant semi-riemannian metric. *Proceedings of the 1st International Meeting on Geometry and Topology (Braga, 1997)*, pages 1–13, 1998.

[2] Eric Boeckx, Oldřich Kowalski, and Lieven Vanhecke. *Riemannian manifolds of conullity two.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[3] M Brozos-Vázquez, P Gilkey, H Kang, S Nikčević, and G Weingart. Geometric realizations of curvature models by manifolds with constant scalar curvature. *Differential Geometry and its Applications*, 27(6):696–701, 2009.

[4] Benoît Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv. 82 (2007), no. 1*, pages 87–131, 2005.

[5] Johannes Jisse Duistermaat and Johan AC Kolk. *Lie groups.* Springer Science & Business Media, 2012.

[6] Yunhee Euh, JeongHyeong Park, and Kouei Sekigawa. A curvature identity on a 4-dimensional riemannian manifold. *Results in Mathematics*, 63(1-2):107–114, 2013.

[7] Eduardo García-Río, Ali Haji-Badali, Rodrigo Mariño-Villar, and M. Elena Vázquez-Abal. Locally conformally flat weakly-einstein manifolds. *Arch. Math. (Basel)*, a aparecer.

[8] Shoshichi Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry.* Springer Science & Business Media, 2012.

[9] Oldřich Kowalski. A classification of Riemannian 3-manifolds with constant principal Ricci curvatures $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$. *Nagoya Math. J.*, 132:1–36, 1993.

[10] Wolfgang Kühnel. *Differential geometry*, volume 77. American Mathematical Soc., 2015.

[11] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 1st edition, 2002.

[12] John Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. 1976.

[13] Katsumi Nomizu. On local and global existence of killing vector fields. *Annals of Mathematics*, pages 105–120, 1960.

[14] Benjamin Schmidt and Jon Wolfson. Complete curvature homogeneous metrics on $SL(2,\mathbb{R})$. *Pacific J. Math.*, 273(2):499–509, 2015.

[15] Kouei Sekigawa. On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces. *Tensor (NS)*, 31:87–97, 1977.

[16] Kazuo Yamato. A characterization of locally homogeneous Riemann manifolds of dimension 3. *Nagoya Math. J.*, 123:77–90, 1991.

[17] Shing Tung Yau. Curvature preserving diffeomorphisms. *Ann. of Math. (2)*, 100:121–130, 1974.