Javier Seoane Bascoy

CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS HOMOGÉNEOS KÄHLER RIEMANNIANOS DE DIMENSIÓN CUATRO

139b
2019

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Javier Seoane Bascoy

CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS HOMOGÉNEOS KÄHLER RIEMANNIANOS DE DIMENSIÓN CUATRO

139b

2019

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Caracterización de los espacios homogéneos Kähler riemannianos de dimensión cuatro

Javier Seoane Bascoy

Xullo 2015

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo Fin de Máster que presenta el alumno Javier Seoane Bascoy para optar al Título de Máster en Matemáticas por la Universidade de Santiago de Compostela bajo la dirección de los profesores María Elena Vázquez Abal y Esteban Calviño Louzao.

Índice general

Resumen **4**

Introducción **5**

1. Preliminares **9**
- 1.1. Variedades pseudo-Riemannianas . . . 9
- 1.2. Grupos y álgebras de Lie . . . 13
  - 1.2.1. Espacios homogéneos . . . 16
- 1.3. Variedades Kähler . . . 17

2. Grupos de Lie resolubles de dimensión cuatro **19**
- 2.1. Álgebras de Lie resolubles . . . 19

3. Grupos de Lie Kählerianos de dimensión cuatro **25**
- 3.1. Estructuras Kähler . . . 25
- 3.2. Propiedades de los tensores curvatura . . . 27
- 3.3. El espacio 3-simétrico Riemanniano . . . 43

Bibliografía **47**

Resumen

Los espacios homogéneos conforman una familia de variedades diferenciables de especial importancia tanto en Matemáticas como en Física. En general, todo espacio homogéneo se puede identificar con un espacio cociente de dos grupos de Lie, lo que permite que muchas de sus propiedades geométricas se puedan estudiar a partir de las álgebras de Lie de estos dos grupos. A su vez, si el espacio homogéneo tiene dimensión cuatro y está dotado de una métrica Riemanniana es conocido que ha de ser necesariamente un grupo de Lie o un espacio localmente simétrico.

En esta memoria haremos uso de la clasificación obtenida por G. P. Ovando de las álgebras de Lie de dimensión cuatro admitiendo una estructura Kähler, esto es, una estructura casi compleja paralela respecto a la conexión de Levi Civita, para obtener una caracterización de los espacios homogéneos Kähler Riemannianos de dimensión cuatro.

Abstract

Homogeneous spaces generate a family of manifolds of special importance both in Mathematics and Physics. In general, the fact that homogeneous spaces can be identified with the quotient of two Lie groups allows to study many of its geometrical properties from the Lie algebra of those two groups. Moreover, if a homogeneous space has dimension four and is equipped with a Riemannian metric then it is necessarily a Lie group or a locally symmetric space.

In this memoir we will consider the classification of four dimensional Lie algebras admitting a Kähler structure, that is, an almost complex structure which is parallel respect to the Levi Civita connection, given by G. P. Ovando in order to get a characterization of four-dimensional homogeneous Riemannian Kähler spaces.

Introducción

El estudio de la curvatura es un aspecto central en geometría. La curvatura constituye el invariante algebraico más simple de la estructura pseudo-Riemanniana y proporciona no sólo información geométrica sobre la misma, sinó también información de índole topológica sobre la variedad subyacente. Por otra parte, la existencia de estructuras adicionales sobre la variedad (estructura Kähler, Sasakiana,...) también aporta gran información geométrica y topológica sobre ella ya que esta influye de forma notable en las propiedades del tensor curvatura. Aunque a lo largo de esta memoria se consideran variedades pseudo-Riemannianas Kähler (en particular Riemannianas y de signatura neutra), prestaremos especial atención al caso Riemanniano.

Las variedades pseudo-Riemannianas se pueden clasificar de multitud de maneras diferentes dependiendo de las propiedades geométricas o topológicas en las que se esté interesado. Una de estas clasificaciones, ampliamente estudiadas en la bibliografía y que tiene un papel relevante a lo largo de esta memoria, es la relacionada con el carácter simétrico y sus generalizaciones. Los espacios simétricos fueron caracterizados geométricamente por Cartan por el hecho de que sus simetrías geodésicas son isometrías. Este resultado motivó el estudio de diversas condiciones sobre las simetrías geodésicas y otros tipos de transformaciones locales en un intento de generalizar los espacios simétricos.

Centrándonos en las transformaciones locales alrededor de un punto fijo, el estudio se ha basado en el análisis de aplicaciones locales no necesariamente involutivas ($s_p^2 = id$), sinó en la existencia e influencia geométrica de isometrías s_p para las que $s_p^k = id$ para algún natural k. El estudio de los llamados espacios simétricos generalizados surge en este contexto. Un ejemplo ilustrativo de estas transformaciones se construye asociado a una estructura casi Hermítica (g, J). De este modo, considerando una raíz de orden tres de la unidad $S = \frac{1}{2}id + \frac{\sqrt{3}}{2}J$ se tiene que las transformaciones

$$s_{S,p} : \exp_p(ru) \mapsto \exp_p(rSu)$$

verifican $s_{S,p}^3 = id$, siendo el germen de la teoría de espacios 3-simétricos (véase [11] para más información).

Generalizando las construcciones anteriores, una *s-estructura* en una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es una familia $\{s_p, p \in M\}$ de isometrías de la variedad de modo que p es un punto fijo aislado, las cuales se llaman *simetrías en* p. (M, g) es un espacio simétrico si para cada punto $p \in M$ admite una simetría s_p la cual es una reflexión geodésica en p (es decir, $s_p^2 = id_M$ para todo $p \in M$). Una s-estructura se dice que es *regular* si la aplicación

$(p,q) \in M \times M \to s_p(q)$ es diferenciable y además, para cada par de puntos $p, q \in M$ se tiene

$$s_p \circ s_q = s_{\overline{p}} \circ s_p, \quad \text{donde} \quad \overline{p} = s_p(q).$$

Una s-estructura $\{s_p\}$ se dice que es de *orden* k $(k \geq 2)$ si para todo $p \in M$, $s_p^k = id_M$, y k es el mínimo de todos los naturales que verifican dicha propiedad. Además se dice que una s-estructura es de *orden infinito* si no existe ningún natural k para el que $s_p^k = id_M$.

Un *espacio simétrico generalizado* es una variedad pseudo-Riemanniana (M,g) con al menos una s–estructura regular. Kowalski ha probado que los espacios simétricos generalizados son necesariamente homogéneos y en [15] dio una clasificación de los mismos en dimensiones bajas.

Por su parte, los espacios homogéneos tienen un papel muy importante tanto en Matemáticas como en Física. Una variedad homogénea es una variedad diferenciable, M, sobre la que actúa a la izquierda un grupo de Lie, G, de forma transitiva; por tanto, una variedad homogénea puede identificarse con el espacio cociente G/H, donde $H = \{g \in G |\, go = o\}$ es el subgrupo de isotropía de un punto $o \in M$, por ejemplo $o = eH$. En particular, la clasificación de estos espacios en dimensiones bajas ha sido un problema muy estudiado en la literatura. En el caso Riemanniano, cuando la variedad (M,g) tiene dimensión cuatro, Bérard-Bergery demostró en [2] que si además la variedad es conexa, simplemente conexa y completa entonces (M,g) es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie equipado con una métrica Riemanniana invariante a la izquierda.

Con estas consideraciones, el objetivo de este trabajo es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.22 *El espacio 3-simétrico Riemanniano es el único espacio (salvo homotecias) homogéneo Riemanniano de dimensión cuatro y no simétrico que admite una estrucutra Kähler invariante a la izquierda.*

Motivados por este hecho, y puesto que nuestro objetivo consiste en obtener espacios homogéneos no localmente simétricos, centraremos nuestro estudio en aquellos grupos de Lie que no lo son. Además, por los resultados obtenidos por Chu en [9], es conocido que si un grupo de Lie admite una estructura Kähleriana, y por tanto una estructura simpléctica, este ha de ser necesariamente resoluble. Una clasificación puramente algebraica para estos grupos de Lie a partir de sus álgebras de Lie fue obtenida por Ovando (véanse [20], [21], [22] y [23]). En ellos, además, obtiene las álgebras de Lie resolubles que admiten una estructura simpléctica y construye una estructura casi compleja Kähleriana invariante a la izquierda compatible.

A lo largo de esta memoria recordaremos esta clasificación adaptando las notaciones a nuestro objetivo para, a continuación, hacer un estudio caso por caso de las propiedades de sus respectivos tensores curvatura. De este modo, obtenemos los siguientes resultados en el caso Riemanniano:

Caso Riemanniano

Álgebra de Lie	*Llana*	*Ricci llano*	*Localmente simétrica*
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	✗	✗	✓
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	✓	✓	✓
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	✗	✗	✓
$\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ (1,2)	✗	✗	✓
$\mathfrak{d}_{4,2}$ (2)	✗	✗	✗
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$ (1)	✗	✗	✓
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ $(1, 2, 3, 4)$	✗	✗	✓

Mientras que para el caso de signatura neutra obtenemos que:

Caso de signatura neutra

Álgebra de Lie	*Llana*	*Operador de Ricci diagonalizable*	*Localmente simétrica*
$\mathfrak{rh}_3$	✓	✓	✓
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	✗	✓	✓
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	✓	✓	✓
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	✗	✓	✓
$\mathfrak{r}'_2$ (1)	✗	✗	✓
$\mathfrak{r}'_2$ (2)	✗	✓(Ricci llana)	✗
$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$	✗	✓(Ricci llana)	✗
$\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ (1,2)	✗	✓	✓
$\mathfrak{d}_{4,1}$	✗	✗	✓
$\mathfrak{d}_{4,2}$ (1)	✗	✓(Ricci llana)	✗
$\mathfrak{d}_{4,2}$ (2)	✗	✓	✗
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$ (2)	✗	✓	✓
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ (1,2,3,4)	✗	✓	✓

Cabe destacar que los números que aparecen entre paréntesis en cada una de las tablas hacen referencia al orden de las estructuras Kähler obtenidas por Ovando en sus trabajos.

Finalmente, a partir de la tabla obtenida para el caso Riemanniano, resulta que la única álgebra de Lie que no induce un espacio localmente simétrico es $\mathfrak{d}_{4,2}$ equipada con la segunda de las estructuras Kähler dada en la clasificación de Ovando. Dicha álgebra de Lie posee un tensor de Weyl de rango máximo que, a su vez, se descompone en un tensor de Weyl autodual (W^+) y en un tensor de Weyl anti-autodual (W^-) que coinciden con los respectivos W^+ y W^- del único espacio 3-simétrico Riemanniano. Así, haciendo uso de los resultados obtenidos por Hall en [13] se obtiene que dichos espacios han de ser localmente isométricos salvo homotecias (véanse [1], [5], [6] y [10] para más información).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos un resumen de los principales conceptos que utilizaremos en esta memoria e introducimos las definiciones que motivan el estudio realizado en los capítulos posteriores. En la primera sección recordamos herramientas y notaciones básicas en geometría pseudo-Riemanniana. En la Sección 1.2 introducimos los grupos y las álgebras de Lie y, a partir de ellos, los espacios homogéneos. Finalmente recordamos en la Sección 1.3 el concepto de variedad casi-Hermítica, prestando especial atención a las variedades Kähler.

En general omitiremos las demostraciones de los resultados presentados en este capítulo ya que se encuentran detalladas en monografías tanto de geometría Riemanniana como pseudo-Riemanniana (véanse por ejemplo [16], [17] y [19]).

1.1. Variedades pseudo-Riemannianas

El objeto principal de estudio en esta memoria son variedades Riemannianas de dimensión cuatro. Debido a que estas son casos particulares de variedades pseudo-Riemannianas, en este capítulo introducimos las herramientas básicas y fijamos las notaciones de la memoria en su generalidad, particularizándola en su momento a cada contexto.

Una *variedad pseudo-Riemanniana* es una variedad diferenciable de dimensión n dotada de un tensor métrico g (i.e. un tensor de tipo (0,2) simétrico y no degenerado) de signatura $(\nu, n-\nu)$. En lo sucesivo denotaremos a estas variedades por el par (M, g). En particular, se dice que una variedad pseudo-Riemanniana es *Riemanniana* si el tensor métrico es definido positivo, *Lorentziana* si su signatura es $(1, n-1)$ y de *signatura neutra* si su signatura es (m, m) siendo $n = 2m$.

En general, es posible dotar a las variedades pseudo-Riemannianas de diferentes conexiones, que denotaremos de forma genérica por D. Asociado a cada una de estas conexiones se define su tensor *torsión*, $\mathcal{T}$, como:

$$\mathcal{T}(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y]. \tag{1.1}$$

Entre todas las conexiones existe una de especial interés, la llamada *conexión de Levi-Civita*. Dicha conexión, que denotaremos por ∇, es la única conexión libre de torsión

($\mathcal{T} \equiv 0$) que paraleliza la métrica g; i.e., dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ la conexión ∇ verifica

$$\mathcal{T}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \tag{1.2}$$

y

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{1.3}$$

Además, su expresión explícita viene dada por la *fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ + g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde X, Y, Z son campos de vectores en M.

Asociado a la conexión de Levi-Civita se define el *tensor curvatura de tipo* $(1, 3)$ como

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z \tag{1.5}$$

y, a partir de este, el *tensor curvatura de tipo* $(0, 4)$ asociado como

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V). \tag{1.6}$$

En general, el tensor curvatura verifica las siguientes simetrías algebraicas

$$\begin{aligned} &R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V), \\ &R(X, Y, Z, V) = R(Z, V, X, Y), \\ &\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} R(X, Y, Z, V) = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

y la identidad diferencial

$$\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \big\{(\nabla_X R)(Y, Z, U, V)\big\} = 0, \tag{1.8}$$

donde $\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}$ representa la suma cíclica respecto a X, Y, Z. En particular, la última identidad de la Ecuación (1.7) y la dada en la Ecuación (1.8) se conocen como *primera* y *segunda identidad de Bianchi* respectivamente.

Es bien conocido que el análisis de dicho tensor curvatura, R, es fundamental en el estudio de las variedades pseudo-Riemannianas ya que constituye el invariante básico que codifica todas sus propiedades geométricas.

Diversas contracciones del tensor de curvatura permiten obtener nuevos tensores importantes. El primero de ellos es el *tensor de Ricci*, ρ, definido como la traza del tensor curvatura

$$\rho(X, Y) = \operatorname{tr}\{Z \mapsto R(X, Z)Y\}.$$

En capítulos posteriores trabajaremos también con el *operador de Ricci*, $\widehat{\rho}$, definido a partir del tensor de Ricci como $g(\widehat{\rho}(X), Y) = \rho(X, Y)$. Dado que el tensor de Ricci es simétrico, el operador de Ricci es autoadjunto y por tanto diagonalizable en el caso Riemanniano. No obstante, el caso pseudo-Riemanniano necesita un análisis más detallado puesto que un operador autoadjunto puede tener forma de Jordan no trivial.

En una base arbitraria $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM, denotando con $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$\rho(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R(x, e_i, y, e_j), \qquad \tau = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \rho(e_i, e_j), \tag{1.9}$$

donde (g^{ij}) denota la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica, en cuyo caso se tiene que $\rho = \frac{\tau}{n} g$.

Puesto que el operador curvatura, R, verifica la Ecuación (1.7) y la primera identidad de Bianchi, podemos interpretarlo como un endomorfismo autoadjunto del espacio de 2-formas $\Lambda^2(M)$ y, por tanto, descomponerlo en componentes ortogonales respecto al producto interior inducido por la métrica, g, en el espacio de las 2-formas, el cual está dado por la expresión:

$$\langle\langle x \wedge y, z \wedge w \rangle\rangle = g(x, z) g(y, w) - g(y, z) g(x, w).$$

De este modo, considerando el *tensor de Schouten*, S, que es el tensor de tipo $(0, 2)$ definido por:

$$S = \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g \right), \tag{1.10}$$

se tiene la siguiente descomposición ortogonal:

$$R = \mathfrak{U} + \mathfrak{Z} + W, \tag{1.11}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{\tau}{2n(n-1)} g \odot g, \\ \mathfrak{Z} &= \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{n} g \right) \odot g, \\ W &= R - \mathfrak{U} - \mathfrak{Z} = R - S \odot g, \end{aligned}$$

donde $\odot$ representa el *producto de Kulkarni-Nomizu* definido como:

$$\begin{aligned} (B \odot D)(X, Y, Z, V) = B(X, Z) D(Y, V) + B(Y, V) D(X, Z) \\ - B(X, V) D(Y, Z) - B(Y, Z) D(X, V), \end{aligned}$$

para dos formas bilineales simétricas B y D cualesquiera.

La componente W es un tensor de tipo $(0,4)$ conocido como *tensor de Weyl*. Su expresión explícita es

$$
\begin{aligned}
W(X,Y,Z,V) = R(X,Y,Z,V) &+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\Big\{g(X,Z)g(Y,V) - g(Y,Z)g(X,V)\Big\}\\
&- \frac{1}{n-2}\Big\{\rho(X,Z)g(Y,V) - \rho(Y,Z)g(X,V)\\
&\qquad + \rho(Y,V)g(X,Z) - \rho(X,V)g(Y,Z)\Big\},
\end{aligned}
$$

para cualesquiera X,Y,Z,V campos de vectores en M.

La descomposición del tensor curvatura establecida en la Ecuación (1.11) presenta simplificaciones notables en dimensiones bajas. En dimensión 2 el tensor curvatura es de la forma $R = \frac{\tau}{2}\, g \odot g$, donde $\frac{\tau}{2}$ se corresponde con su curvatura de Gauss. En dimensión 3, el tensor curvatura viene determinado por su tensor de Schouten como $R = S \odot g$ y, por tanto, está determinado a su vez por el tensor de Ricci. En dimensión 4 la situación es más compleja, pero las propiedades del operador estrella de Hodge permiten refinar la descomposición anterior de la curvatura.

En particular, sea $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro equipado de un producto interior de signatura arbitraria. Sea $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ una base ortonormal de V y sea $\{e^1,e^2,e^3,e^4\}$ su base dual asociada. Consideramos el espacio de 2-formas

$$
\Lambda^2(V) = \langle\{e^i \wedge e^j \,:\, i,j \in \{1,2,3,4\},\, i<j\}\rangle.
$$

Se define el operador estrella de Hodge $\star$ actuando en $\Lambda^2(V)$ como

$$
e^i \wedge e^j \wedge \star(\,e^k \wedge e^l) = (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k)\, \varepsilon_i \varepsilon_j\, e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4,
$$

donde $\varepsilon_i = \langle\, e_i, e_i\,\rangle$ y δ^i_j representa la delta de Kronecker. Las propiedades del operador de Hodge están influenciadas por las distintas signaturas del producto escalar $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Así, $\star$ define una estructura compleja (esto es $\star^2 = -\,\mathrm{Id}_{\Lambda^2(V)}$) en signatura Lorentziana, mientras que $\star$ define una estructura producto (esto es $\star^2 = \mathrm{Id}_{\Lambda^2(V)}$) en signatura Riemanniana o neutra. En esta última situación, el operador estrella de Hodge induce una descomposición del espacio de 2-formas $\Lambda^2(V) = \Lambda^2_+(V) \oplus \Lambda^2_-(V)$, donde $\Lambda^2_+(V)$ y $\Lambda^2_-(V)$ denotan los espacios de 2-formas autoduales y anti-autoduales, respectivamente

$$
\Lambda^2_+(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V) : \star\alpha = \alpha\}, \qquad \Lambda^2_-(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V) : \star\alpha = -\alpha\}.
$$

En una base ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ los subespacios autodual y anti-autodual están generados por

$$
\Lambda^2_\pm = \langle\{E^\pm_1, E^\pm_2, E^\pm_3\}\rangle,
$$

donde

$$
\begin{aligned}
E^\pm_1 &= (e^1 \wedge e^2 \pm \varepsilon_3\varepsilon_4 e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2},\\
E^\pm_2 &= (e^1 \wedge e^3 \mp \varepsilon_2\varepsilon_4 e^2 \wedge e^4)/\sqrt{2},\\
E^\pm_3 &= (e^1 \wedge e^4 \pm \varepsilon_2\varepsilon_3 e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2}\}.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

La métrica inducida en $\Lambda^2(V)$ a partir del producto escalar, dada por

$$\langle\langle x \wedge y, z \wedge w \rangle\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle\langle x, w\rangle$$

es Riemanniana si $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ es definido positivo y de signatura $(+ + - - --)$ si $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ es un producto escalar de signatura neutra $(2, 2)$. Además, en este último caso la restricción de la métrica a los subespacios $\Lambda^2_\pm$ es de signatura $(+ - -)$.

De este modo, interpretando el tensor curvatura como un endomorfismo de $\Lambda^2(M)$, en dimensión cuatro la $O(4)$-descomposición ($O(2, 2)$-descomposición en el caso en que (M, g) tenga signatura neutra) establecida en la Ecuación (1.11) resulta:

$$R \equiv \frac{\tau}{12}\ \mathrm{Id}_{\Lambda^2(M)} + \rho_0 + W :\ \Lambda^2(M) \longrightarrow \Lambda^2(M), \tag{1.13}$$

donde W denota el tensor de Weyl y ρ_0 el tensor de Ricci sin traza,

$$\rho_0(x, y) = \rho(x, y) - \tfrac{\tau}{4}\,\langle x, y\rangle.$$

Denotando por $W^\pm$ la restricción del tensor de Weyl a los subespacios $\Lambda^2_\pm(M)$, se dice que un tensor curvatura es *autodual* (respectivamente *anti-autodual*) si $W^- = 0$ (respectivamente $W^+ = 0$). Por lo tanto podemos extender la $O(4)$-descomposición, o bien la $O(2, 2)$-descomposición en el caso en que la variedad tenga signatura neutra, dada en la Ecuación (1.13) como

$$R \equiv \frac{\tau}{12}\ \mathrm{Id}_{\Lambda^2(M)} + \rho_0 + W^+ + W^- :\ \Lambda^2(M) \longrightarrow \Lambda^2(M). \tag{1.14}$$

1.2. Grupos y álgebras de Lie

Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable en la que está definida una operación que lo dota de una estructura algebraica de grupo y para la cual son diferenciables las aplicaciones producto, μ, e inversa, ι, definidas respectivamente por: $\mu(a, b) = ab$; $a, b \in G$ y $\iota(a) = a^{-1}$, $a \in G$. Se dice que $H \subset G$ es un *subgrupo de Lie de* G si es a la vez un subgrupo y una subvariedad de G. Asociadas a las aplicaciones producto e inversa existen otras tres aplicaciones fundamentales en el estudio de los grupos de Lie, que para cada $g \in G$ denotaremos por $L_g, R_g, I_g : G \longrightarrow G$, y que están dadas por

$$L_g(a) = ga, \qquad R_g(a) = ag, \qquad I_g(a) = gag^{-1}. \tag{1.15}$$

Dichas aplicaciones se denominan *traslación a la izquierda*, *traslación a la derecha* y *conjugación por g* respectivamente. En general, estas aplicaciones son difeomorfismos de G mientras que la conjugación I_g es, además, un *homomorfismo de grupos de Lie*; es decir, un homomorfismo en el sentido abstracto de grupos, por lo que se dice que es un *automorfismo de G*.

Una herramienta importante en el estudio de los grupos de Lie es su álgebra de Lie asociada. No obstante, a pesar de que la motivación del estudio de las álgebras de Lie proviene de la teoría de grupos de Lie, es posible definirla de forma abstracta. Así pues, un *álgebra de Lie* sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real V dotado con una aplicación $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, llamada *corchete de Lie*, con las siguientes propiedades:

(i) Antisimétrica: $[x, y] = -[y, x]$.

(ii) Bilineal: $[a\,x + b\,y, z] = a[x, z] + b[y, z]$.

(iii) Verifica la *identidad de Jacobi*: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

Para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Es conocido que sobre toda variedad los campos de vectores forman un álgebra de Lie de dimensión infinita, pero en el caso particular en el que la variedad además sea un grupo de Lie existe un álgebra de Lie de dimensión finita íntimamente asociada a él y en la que se encuentran reflejadas las propiedades locales de dicho grupo. Para obtener dicha álgebra de Lie es necesario definir los campos de vectores invariantes a la izquierda. Un campo de vectores x sobre un grupo de Lie G verificando

$$(L_g)_* x = x,$$

para cualquier $g \in G$ se denomina *campo de vectores invariante a la izquierda*; mientras que el espacio vectorial $\mathfrak{g} := \{x \in \mathfrak{X}(G) : x \text{ es invariante a la izquierda}\}$ equipado con el producto corchete de campos de vectores usual se conoce como el *álgebra de Lie* de G. Además, dicha álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, se identifica de forma canónica con el espacio tangente a G en el elemento neutro e, $T_e G$.

El álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, de un grupo de Lie, G, está directamente relacionada con él mediante la aplicación $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, llamada *aplicación exponencial*, donde $exp(x)$ no es más que el valor para $t = 1$ del único subgrupo uniparamétrico de G; es decir, del único homomorfismo $exp_x : \mathbb{R} \longrightarrow G$, cuyo vector tangente en $t = 0$ es x_e. El nombre de exp viene motivado por el hecho de que para el grupo lineal general de un espacio vectorial dicha aplicación coincide con la exponencial de matrices usual.

Es bien conocido que si G y H son dos grupos de Lie y $\varphi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo, entonces la aplicación exponencial hace el diagrama siguiente conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "d\varphi"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

A su vez, un *homomorfismo* entre dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es una aplicación lineal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que $\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)]$. Cuando ψ es un homomorfismo biyectivo de $\mathfrak{g}$ en si mismo, entonces ψ se dice que es un *automorfismo* de $\mathfrak{g}$. Cabe destacar que todo homomorfismo de grupos de Lie, φ, induce de forma natural el homomorfismo de álgebras de Lie dado por φ_{*e}.

Ahora bien, volviendo a las tres aplicaciones definidas anteriormente en la Ecuación (1.15), la conjugación I_g puede pensarse como una actuación a la izquierda de un grupo de Lie sobre sí mismo, por lo que induce la representación $Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$ dada por $Ad(g) = (I_g)_{*e}$ y que se denomina *representación adjunta*. De este modo, el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_g"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "Ad_g"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, si se denota la diferencial de dicha representación en el elemento neutro por ad, i.e. $Ad_{*e} = ad$, se obtiene también el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "ad"] & End(\mathfrak{g}) \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

Esta nueva aplicación ad verifica la propiedad de que

$$ad(x)(y) \equiv ad_x y = [x, y],$$

para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{g}$.

Dependiendo de las diferentes naturalezas que puede presentar el *álgebra derivada de* $\mathfrak{g}$, es decir, el álgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, las álgebras de Lie se pueden clasificar en diferentes familias. Dos de estas familias que tendrán un papel importante a lo largo de esta memoria son las álgebras de Lie resolubles y las álgebras de Lie nilpotentes. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *resoluble* si la *serie derivada*:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \geqslant [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \geqslant [[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \geqslant \dots$$

finaliza en la subálgebra cero. Por otra parte, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si la *serie central*:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \geqslant [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}] \geqslant [[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}], \mathfrak{g}] \geqslant \dots$$

finaliza en la subálgebra cero. Así, no es difícil comprobar a partir de estas definiciones que todo álgebra de Lie nilpotente es necesariamente resoluble.

Por otra parte, desde un punto de vista puramente algebraico es posible considerar el producto directo e incluso semidirecto de álgebras de Lie. Para ello debemos introducir primero el concepto de derivación de un álgebra de Lie. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, una derivación de $\mathfrak{g}$ es una aplicación $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ verificando:

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy], \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

El conjunto de derivaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denota por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Con estas consideraciones, si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son dos álgebras de Lie y $\pi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_2)$ se define su producto semidirecto, denotado como $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\pi \mathfrak{g}_2$, como el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ dotado del producto corchete dado por:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2] + \pi(x_1)y_2 - \pi(y_1)x_2).$$

1.2.1. Espacios homogéneos

Una *variedad homogénea* es una variedad M sobre la que actúa a la izquierda un grupo de Lie, G, de forma transitiva, es decir, para cualesquiera $p, q \in M$, existe un elemento $g \in G$ tal que $gp = q$. Por tanto, una variedad homogénea puede identificarse con el espacio cociente G/H, donde $H = \{g \in G | go = o\}$ es el *subgrupo de isotropía* de un punto $o \in M$, por ejemplo $o = eH$. Se deduce de esta definición que el subgrupo H es un subgrupo cerrado pero no necesariamente conexo. Recíprocamente, cualquier subgrupo cerrado, H, de un grupo de Lie, G, define una variedad homogénea $M = G/H$ tal que la proyección natural de G sobre G/H es diferenciable.

En función de las diferentes propiedades que tenga el cociente G/H se diferencian distintas clases de espacios homogéneos. Así, se dice que $M = G/H$ es un *espacio homogéneo reductivo* si el álgebra de Lie de G, $\mathfrak{g}$, admite una descomposición en subespacios vectoriales $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, tal que $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. A partir de esta última condición es posible deducir que $ad_{\mathfrak{h}}\mathfrak{m} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H; además, el recíproco es cierto si H es un subgrupo conexo.

El espacio homogéneo G/H se dice *espacio homogéneo de Riemann* si M es una variedad de Riemann tal que la métrica g es invariante para la acción de G sobre G/H dada por $T_r(sH) = rsH, \forall r, s \in G$; es decir, para cada $r \in G$ el difeomorfismo T_r es una isometría, o equivalentemente, $\langle x_o, y_o \rangle = \langle T_r(x_o), T_r(y_o) \rangle$ para cualesquiera $x_o, y_o \in T_o(G/H)$. Una métrica con esta propiedad se denomina *métrica G-invariante*.

Cuando G/H, equipado con una métrica invariante por H, admite una descomposición $Ad(H)$-invariante $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ verificando la igualdad

$$\langle [x, y]_{\mathfrak{m}}, z \rangle + \langle y, [x, z]_{\mathfrak{m}} \rangle = 0,$$

se dice que es un *espacio homogéneo de Riemann naturalmente reductivo*.

Un espacio homogéneo naturalmente reductivo que además verifica la propiedad $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ se conoce como *espacio homogéneo simétrico* o, simplemente, *espacio simétrico*. Los espacios simétricos también se caracterizan por ser aquellos en los que las geodésicas generadas por un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ son las mismas que las generadas por el campo $-X$.

En general, los espacios simétricos fueron generalizados por Kowalski en [15] haciendo uso de las s-estructuras. Una *s-estructura* en una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es una familia $\{s_p, p \in M\}$ de isometrías de la variedad (que se denominan simetrías en p) tal que p es un punto fijo aislado. Además, una s-estructura se dice *regular* si la aplicación $(p, q) \in M \times M \to s_p(q)$ es diferenciable y para cada par de puntos $p, q \in M$ se tiene que $s_p \circ s_q = s_{\overline{p}} \circ s_p$, donde $\overline{p} = s_p(q)$. Además, una s-estructura $\{s_p\}$ se dice de *orden k ($k \geq 2$)* si, para todo $p \in M$, $s_p^k = Id_M$ y k es el mínimo de todos los números naturales verificando esta propiedad. Una s-estrucutra se dice de *orden infinito* si no existe un número natural k tal que $s_p^k = Id_M$. Así, un *espacio simétrico generalizado* es una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) que admite al menos una s-estructura regular. En particular, cuando $k = 2$ se obtienen los espacios simétricos y cuando $k = 3$ se obtienen los espacios 3-simétricos. Para un estudio más detallado de las propiedades geométricas de los espacios simétricos generalizados véase [15].

Volviendo al caso general, la clasificación de los espacios homogéneos pseudo-Riemannianos en dimensiones bajas ha sido un problema muy estudiado en la bibliografía. En el caso Riemanniano, Sekigawa demostró en [24] que toda variedad Riemanniana homogénea (M, g) de dimensión tres conexa, simplemente conexa y completa es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie equipado con una métrica invariante a la izquierda. El resultado análogo en el caso Lorentziano fue demostrado posteriormente en [**?**]. Así, considerando estos dos resultados, se tiene que una variedad pseudo-Riemanniana homogénea (M, g) de dimensión tres conexa, simplemente conexa y completa es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie de dimensión tres dotado de una métrica invariante a la izquierda.

Cuando la variedad (M, g) tiene dimensión cuatro la situación es similar. En particular, Bérard-Bergery demostró que en el caso Riemanniano una variedad homogénea conexa, simplemente conexa y completa de dimensión cuatro es un espacio simétrico o es isométrica a un grupo de Lie dotado de una métrica Riemanniana invariante a la izquierda (véase [2]).

1.3. Variedades Kähler

Una variedad de Riemann (M, g) de dimensión $n = 2m$ equipada con una *estructura casi-Hermítica* compatible con la métrica, es decir, un endomorfismo J, llamado *estructura casi compleja*, del espacio tangente tal que $J^2 = -id$ y $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y en M, se dice que es una *variedad casi-Hermítica*. A partir de la estructura casi compleja, J, de cualquier variedad casi-Hermítica se define su *2-forma de Kähler*, o *2-forma fundamental*, que denotaremos por ω, como $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$. En función de las diferentes propiedades que puede tener la derivada covariante de la 2-forma de Kähler, $\nabla\omega$, A. Gray y L. M. Hervella clasificaron en [12] las variedades casi-Hermíticas estableciendo la existencia de dieciséis clases primitivas diferentes, siendo una de las más relevantes la formada por las variedades Kähler.

Un variedad Kähler es una variedad casi-Hermítica tal que la conexión de Levi-Civita paraleliza la estructura casi compleja, es decir, tal que $\nabla J = 0$. Así, puesto que la conexión de Levi-Civita es métrica resulta también que $\nabla\omega = 0$. De este modo se obtiene que las variedades Kähler también son un caso especial de variedades simplécticas. Recordemos que una *variedad simpléctica* es una variedad diferenciable que admite una 2-forma cerrada no degenerada, conocida como *2-forma simpléctica*.

En general, las estructuras simplécticas resultan de gran utilidad en la descripción y estudio de diferentes propiedades geométricas. En particular, es conocido (véase [9]) que si un grupo de Lie de dimensión cuatro admite una 2-forma simpléctica entonces ha de ser necesariamente resoluble. De este modo, todo grupo de Lie de dimensión cuatro Kähleriano ha de ser necesariamente resoluble. Motivados por este hecho, cuando estudiemos las álgebras de Lie de dimensión cuatro en esta memoria nos restringiremos a aquellas que son resolubles.

Además, cuando se consideran grupos de Lie Kählerianos es deseable que la estructura casi compleja J verifique ciertas propiedades de invarianza, en particular que verifique la

igualdad:
$$J_g((L_g)_{*e}X_e) = (L_g)_{*e}(J_eX_e).$$
Cuando en un grupo de Lie Kähleriano se satisface esta propiedad se dice que la estructura casi compleja J es *invariante a la izquierda*. A lo largo de esta memoria, y aunque no se haga referencia a ello, cuando hablemos de estructuras Kähler sobre grupos de Lie estamos considerando estructuras casi complejas invariantes a la izquierda.

Capítulo 2

Grupos de Lie resolubles de dimensión cuatro

De forma general, las álgebras de Lie se pueden intentar clasificar desde un punto de vista puramente algebraico en función de sus constantes de estructura o, equivalentemente, en función de las diferentes expresiones que admite su aplicación adjunta, $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$. En el caso particular de las álgebras de Lie resolubles de dimensión cuatro, la clasificación realizada en [22] sigue pasos análogos a los realizados en [18] para la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión tres. De este modo, la idea que se sigue es la de obtener las álgebras de Lie de dimensión cuatro resolubles como extensiones de las álgebras de Lie unimodulares de dimensión tres.

En este capítulo presentamos los principales pasos dados para la obtención de dicha clasificación (para más detalle véanse [20], [21], [22] y [23]). Para comenzar, puesto que para lograr nuestro objetivo es necesario trabajar con álgebras de Lie resolubles de dimensión cuatro considerándolas como extensiones de ciertas álgebras de Lie de dimensión tres, y puesto que toda subálgebra de Lie de un álgebra de Lie resoluble es también resoluble, recordamos en este capítulo la clasificación de estas álgebras de Lie de dimensión menor o igual a tres.

2.1. Álgebras de Lie resolubles

Como vimos en el Capítulo 1, un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, se dice *resoluble* si la *serie derivada*:

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \geqslant [[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] \geqslant [[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]],[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]] \geqslant \dots$$

finaliza en la subálgebra cero. En el caso particular de que la dimensión de dichas álgebras sea a lo sumo tres es posible clasificarlas del siguiente modo:

Proposición 2.1. [22] *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie real resoluble tal que* $\dim \mathfrak{g} \leq 3$*. Entonces* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a una y sólo una de las siguientes álgebras de Lie;* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{aff}((\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$, $\lambda \leq 1$ *y* $\mathfrak{r}'_{3,\lambda}$, $\lambda \geq 0$*; donde:*

- $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *(o también denotada como* $\mathfrak{sol}_2$*) es el álgebra de Lie de dimensión dos no abeliana del grupo de los movimientos afines de la recta real. Sus constantes de estructura no nulas están dadas por:*

$$[e_1, e_2] = e_2.$$

- $\mathfrak{h}_3$ *es el álgebra de Heisenberg de dimensión tres, cuyas constantes de estructura no nulas están dadas por:*

$$[e_1, e_2] = e_3.$$

- $\mathfrak{r}_3$ *es el álgebra de Lie cuyas constantes de estructura no nulas son:*

$$[e_1, e_2] = e_2, \qquad [e_1, e_3] = e_2 + e_3.$$

- $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ *es el álgebra de Lie con constantes de estructura no nulas*

$$[e_1, e_2] = e_2, \qquad [e_1, e_3] = \lambda e_3.$$

- $\mathfrak{r}'_{3,\lambda}$ *es el álgebra de Lie cuyas constantes de estructura no nulas están dadas por*

$$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, \qquad [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3.$$

Observación 2.2. Entre las álgebras de Lie que aparecen en la Proposición 2.1 existen cuatro que jugarán un papel relevante en lo sucesivo en esta memoria. Es por ello, por lo que recordamos aquí los grupos de Lie matriciales de los cuales son sus álgebras de Lie.

- Asociado a $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ tenemos el grupo afín de la recta real, Aff($\mathbb{R}$), que está dado explícitamente por el grupo matricial:

$$Aff(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b, a \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\}.$$

- Asociado a $\mathfrak{h}_3$ tenemos el grupo de Heisenberg (H_3), que está dado explícitamente por el siguiente grupo matricial:

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Asociado a $\mathfrak{r}_{3,-1}$ (también denotado por $\mathfrak{e}(1,1)$) tenemos el grupo de los movimientos rígidos del plano de Minkowski ($E(1,1)$). Explícitamente está dado por:

$$E(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Asociado a $\mathfrak{r}'_{3,0}$ (también denotado por $\mathfrak{e}(2)$) se tiene el grupo de Lie de los movimientos rígidos del plano Euclídeo. Explícitamente está dado por:

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \, x, y \in \mathbb{R}, \, \alpha \in \mathbb{S}^1 \right\}.$$

Retomando la clasificación de las álgebras de Lie resolubles de dimensión cuatro, hemos visto que la clasificación realizada en [22] está basada en la extensión de las álgebras de Lie unimodulares de dimensión tres. Recordemos que un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, se dice *unimodular* si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Ahora bien, puesto que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[x,y]}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \,\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \,\mathrm{ad}_x) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, la aplicación $\chi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi(x) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)), \tag{2.1}$$

resulta ser un homomorfismo de álgebras de Lie. De este modo, el núcleo de la aplicación χ, $\mathfrak{u} = \ker(\chi)$, es un ideal de $\mathfrak{g}$ que contiene a su conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, que se conoce como *núcleo unimodular de* $\mathfrak{g}$, y que, a su vez, es trivialmente una subálgebra unimodular de $\mathfrak{g}$.

Una clasificación para las álgebras de Lie de dimensión tres fue dada en [18], donde, en el caso unimodular, se obtienen estas seis posibles álgebras de Lie diferentes:

Álgebra de Lie	Grupo de Lie asociado	Descripción
$\mathfrak{su}(2)$ o $\mathfrak{so}(3)$	$SU(2)$ o $SO(3)$	Compacto y simple
$\mathfrak{sl}(2\mathbb{R})$ o $\mathfrak{so}(1,2)$	$SL(2,\mathbb{R})$ o $O(1,2)$	Simple y no compacto
$\mathfrak{e}(2)$	$E(2)$	Resoluble
$\mathfrak{e}(1,1)$	$E(1,1)$	Resoluble
$\mathfrak{h}_3$	Grupo de Heisenberg	Nilpotente
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	Conmutativo

Observación 2.3. Debido a esta clasificación, las únicas álgebras de Lie unimodulares de la Proposición 2.1 son $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{r}_{3,1} = \mathfrak{e}(1,1)$ y $\mathfrak{r}'_{3,0} = \mathfrak{e}(2)$.

Por otra parte, de forma general, dado un ideal $\mathfrak{u}$ de codimensión uno de un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, y un elemento, e_0, tal que $e_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{u}$, entonces se tiene de forma directa que:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes_\varphi \mathfrak{u},$$

donde $\varphi : \mathbb{R}e_0 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{u})$ es una aplicación lineal tal que $\varphi(e_0) = ad(e_0)$. Por tanto, la sucesión exacta corta dada por:

$$0 \to \mathfrak{u} \to \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \to 0,$$

se rompe debido al hecho de que $\mathbb{R}$ tiene dimensión uno.

Con estas consideraciones se tienen ya las herramientas suficientes para demostrar que cualquier álgebra de Lie real resoluble es un producto semidirecto de $\mathbb{R}$ y un ideal unimodular de dimensión tres, es decir:

Proposición 2.4. [22] *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real resoluble de dimensión cuatro. Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to \mathfrak{u} \to \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \to 0,$$

donde $\mathfrak{u}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ isomorfo a una y solo una de las siguientes álgebras de Lie: $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{e}(1,1)$ o $\mathfrak{e}(2)$; de tal modo que $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_\varphi \mathfrak{u}$.

Observación 2.5. Para la demostración de esta proposición se diferencian dos casos. Uno cuando el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es no unimodular, en cuyo caso se toma como ideal $\mathfrak{u}$ el núcleo unimodular, que por la clasificación de Milnor ha de ser una de las cuatro álgebras de Lie de la tabla anterior; o dos, cuando $\mathfrak{g}$ es unimodular se hace un estudio caso por caso en función de la dimensión del álgebra derivada, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, de la aplicación *ad* restringida a ella.

Ahora bien, volviendo nuevamente a la clasificación, a partir de estos productos semidirectos es posible expresar las álgebras de Lie resolubles de dimensión cuatro como productos directos de las diferentes álgebras de Lie que intervienen en la Proposición 2.1. Debido a ello, y puesto que para los productos semidirectos necesitamos conocer las derivaciones de las respectivas álgebras de Lie las recordamos aquí.

Lema 2.6. [22] *El álgebra de las derivaciones de $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}(1,1)$ y $\mathfrak{h}_3$ están dadas respectivamente por:*

- *Sea $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{e}(2)$ tal que $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$. Entonces:*

$$\operatorname{Der} \mathfrak{e}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & a & -b \\ d & b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

- *Sea $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{e}(1,1)$ tal que $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = -e_3$. Entonces:*

$$\operatorname{Der} \mathfrak{e}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & a & 0 \\ d & 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

- *Sea $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{h}_3$ tal que $[e_1, e_2] = e_3$. Entonces:*

$$\operatorname{Der} \mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & & 0 \\ b & c & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix} \middle| \, A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}); b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

A partir de estas derivaciones y de sus respectivas formas de Jordan posibles se obtiene la siguiente clasificación de las álgebras de Lie resolubles de dimensión cuatro.

Teorema 2.7. [21] *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real resoluble de dimensión cuatro. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una y sólo una de las siguientes álgebras de Lie:* $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2 := \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{rh}_3 := \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{rr}_3 := \mathbb{R} \times \mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{rr}_{3,\lambda} := \mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,\lambda}$, $|\lambda| \leq 1$, $\mathfrak{rr}'_{3,\lambda} := \mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,\lambda}$, $\lambda > 1$, *o a una de las siguientes álgebras de Lie con los corchetes respecto a una base $\{e_i\}$ dados por:*

- $\mathfrak{n}_4$*:* $[e_4, e_1] = e_2$, $[e_4, e_2] = e_3$,
- $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ *o* $\mathfrak{r}'_2$*:* $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = -e_3$,
- $\mathfrak{r}_4$*:* $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = e_1 + e_2$, $[e_4, e_3] = e_2 + e_3$,
- $\mathfrak{r}_{4,\lambda}$*:* $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = \lambda e_2$, $[e_4, e_3] = e_2 + \lambda e_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}$*:* $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = \mu e_2$, $[e_4, e_3] = \lambda e_3$, $\mu\lambda \neq 0$, $-1 < \mu \leq \lambda \leq 1$ *o* $-1 = \mu \leq \lambda < 0$,
- $\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda}$*:* $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = \mu e_2 - \lambda e_3$, $[e_4, e_3] = \lambda e_2 + \mu e_3$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$,
- $\mathfrak{d}_4$*:* $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$,
- $\mathfrak{d}_{4,\lambda}$*:* $[e_4, e_1] = \lambda e_1$, $[e_4, e_2] = (1 - \lambda)e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_1, e_2] = e_3$, $\lambda \geq \frac{1}{2}$,
- $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$*:* $[e_4, e_1] = \frac{\lambda}{2}e_1 - e_2$, $[e_4, e_2] = e_1 + \frac{\lambda}{2}e_2$, $[e_4, e_3] = \lambda e_3$, $[e_1, e_2] = e_3$, $\lambda \geq 0$,
- $\mathfrak{h}_4$*:* $[e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1$, $[e_4, e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2$, $[e_4, e_3] = e_3$, $[e_1, e_2] = e_3$.

Además, entre estas álgebras, las unimodulares son: $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,-1}$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,0}$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{4,-1/2}$, $\mathfrak{r}_{4,\mu,-1-\mu}$ *con* $(-1 < \mu \leq -1/2)$, $\mathfrak{r}'_{4,\mu,-\mu/2}$, $\mathfrak{d}_4$ *y* $\mathfrak{d}'_{4,0}$.

Observación 2.8. Además, los corchetes respecto a una base $\{e_i\}$ de las álgebras de Lie $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{rh}_3$, $\mathfrak{rr}_3$, $\mathfrak{rr}_{3,\lambda}$ y $\mathfrak{rr}'_{3,\lambda}$ están dados por (véase [21]):

- $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_4$,
- $\mathfrak{rh}_3$: $[e_1, e_2] = e_3$,
- $\mathfrak{rr}_3$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_2 + e_3$,
- $\mathfrak{rr}_{3,\lambda}$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = \lambda e_3$, $\lambda \in [-1, 1]$,
- $\mathfrak{rr}'_{3,\lambda}$: $[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3$, $[e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$, $\lambda \geq 0$.

Capítulo 3

Grupos de Lie Kählerianos de dimensión cuatro

A lo largo de este capítulo expondremos los resultados obtenidos en esta memoria, es decir, caracterizaremos el espacio 3-simétrico Riemanniano como el único espacio homogéneo Riemanniano de dimensión cuatro, conexo, simplemente conexo, completo y no localmente simétrico que admite una estructura Kähleriana invariante a la izquierda.

Como vimos en los capítulos precedentes, por los resultados de Bérard-Bergery (véase [2]) podemos centrar nuestro estudio de los espacios homogéneos directamente en los grupos de Lie. Además, puesto que admitir una estructura Kähleriana implica necesariamente admitir una estructura simpléctica, podemos centrarnos directamente en aquellos grupos de Lie que son resolubles.

De este modo, en la Sección 3.1 recordamos la clasificación dada por Ovando de las álgebras de Lie resolubles que se pueden dotar de una estructura simpléctica, adaptando sus notaciones a nuestros intereses. A continuación, en la Sección 3.2 se hace un estudio caso por caso de las propiedades del tensor curvatura de cada una de estas álgebras de Lie para, finalmente, obtener en la Sección 3.3 la caracterización del espacio 3-simétrico Riemanniano buscada.

3.1. Estructuras Kähler

Como fue comentado en el capítulo anterior, una variedad Kähler es una variedad casi-Hermítica con la propiedad $\nabla J = 0$ o, análogamente, $\nabla \omega = 0$. De este modo se obtiene que las variedades Kähler también son un caso especial de variedades simplécticas.

En el caso particular de que la variedad sea un grupo de Lie es conocido (véase [9]) que si este admite una 2-forma simpléctica entonces ha de ser necesariamente resoluble. Como nuestro objetivo en esta memoria es trabajar con grupos de Lie Kählerianos recordamos aquí la clasificación de las álgebras de Lie resolubles que admiten una estructura Kähler invariante a la izquierda (véase [21]):

Álgebra de Lie	Estructura compleja	2-forma fundamental
$\mathfrak{rh}_3$	$Je_1 = e_2,\ Je_3 = e_4$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & c & a & b \\ -c & 0 & -b & a \\ -a & b & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad a^2+b^2 \neq 0$
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	$Je_1 = e_2,\ Je_3 = e_4$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix};\quad ab \neq 0$
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	$Je_1 = e_4,\ Je_2 = e_3$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad ab \neq 0$
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	$Je_1 = e_2,\ Je_3 = e_4$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix};\quad ab \neq 0$
$\mathfrak{r}'_2$	$J_1e_1 = e_3,\ J_1e_2 = e_4$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & -a \\ -a & -b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad a^2+b^2 \neq 0$
	$J_2e_1 = -e_2,\ J_2e_3 = e_4$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -c & b & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad bc \neq 0$
$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$	$Je_4 = e_1,\ Je_2 = e_3$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -b & 0 & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{pmatrix};\quad a^2+b^2 \neq 0$
$\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$	$J_1e_4 = e_1,\ J_1e_2 = e_3$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad ab \neq 0$
	$J_2e_4 = e_1,\ J_2e_2 = -e_3$	
$\mathfrak{d}_{4,1}$	$Je_1 = e_4,\ Je_2 = e_3$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ -b & 0 & a & 0 \end{pmatrix};\quad a-b \neq 0$
$\mathfrak{d}_{4,2}$	$J_1e_4 = -e_2,\ J_1e_1 = e_3$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ -a & -b & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad a \neq 0$
	$J_2e_4 = -2e_1,\ J_2e_2 = e_3$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad ab \neq 0$

Álgebra de Lie	Estructura compleja	2-forma fundamental
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$	$J_1e_4 = e_3,\ J_1e_1 = e_2$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix};\quad a \neq 0$
	$J_2e_4 = e_3,\ J_2e_1 = -e_2$	
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda},\ \lambda \neq 0$	$J_1e_4 = e_3,\ J_1e_1 = e_2$	$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a\lambda \\ 0 & 0 & a\lambda & 0 \end{pmatrix};\quad a \neq 0$
	$J_2e_4 = -e_3,\ J_2e_1 = e_2$	
	$J_3e_4 = -e_3,\ J_3e_1 = -e_2$	
	$J_4e_4 = e_3,\ J_4e_1 = e_2$	

Tabla 3.1: Clasificación de las álgebras de Lie Kählerianas de dimensión cuatro.

3.2. Propiedades de los tensores curvatura

En esta sección consideramos las álgebras de Lie resolubles de dimensión cuatro admitiendo una estructura simpléctica dadas en la Tabla 3.1 y hacemos un estudio caso por caso de las propiedades de sus respectivos tensores curvatura. Tanto a la hora de escribir las componentes de dichos tensores como las constantes de estructura de las álgebras omitiremos las nulas y aquellas que se deduzcan de sus propias simetrías.

Tipo $\mathfrak{rh}_3$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{rh}_3$ y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella, respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1, e_2] = e_3. \tag{3.1}$$

Tomando la estructura Kähleriana, J, y la 2-forma, ω, dadas en la Tabla 3.1 y haciendo uso de la relación $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$, se obtiene que el producto interior en $\mathfrak{rh}_3$ está dado por la expresión matricial:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} c & 0 & b & -a \\ 0 & c & a & b \\ b & a & 0 & 0 \\ -a & b & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

De este modo, la existencia de una caja 2×2 de ceros en esta expresión matricial hace que la métrica asociada en el espacio homogéneo sea de signatura neutra. Por otra parte además, a partir de la Ecuación (3.2) y de las constantes de estructura del álgebra, dadas en la Ecuación (3.1), resulta que el tensor curvatura es idénticamente nulo y, por tanto, el espacio homogéneo es llano. En definitiva, hemos obtenido el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *El álgebra de Lie $\mathfrak{rh}_3$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra y, además, llana.*

Tipo $\mathfrak{rr}_{3,0}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{rr}_{3,0}$ y sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1, e_2] = e_2. \tag{3.3}$$

Puesto que $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$, donde J y ω son respectivamente la estructura Kähleriana y la 2-forma fundamental dadas en la Tabla 3.1, resulta que el producto interior en $\mathfrak{rr}_{3,0}$ está dado por la expresión:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

con lo que la métrica inducida en el espacio homogéneo puede ser Riemanniana o de signatura neutra.

A su vez, haciendo uso de las Ecuaciones (3.3) y (3.4) resulta que la única componente no nula del tensor curvatura (salvo las correspondientes dadas por sus simetrías) está dada por:

$$R(e_1, e_2)e_1 = -e_2;$$

con lo que el tensor de Ricci se reduce a las componentes:

$$\rho(e_1, e_1) = -1 \qquad \text{y} \qquad \rho(e_2, e_2) = -1;$$

de donde, a partir de la Ecuación (3.4), se obtiene que su operador de Ricci asociado es diagonalizable en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ya que está dado por la expresión:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, por un cálculo largo pero directo, se obtiene que la derivada covariante del tensor curvatura es nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. De este modo, y puesto que el tensor métrico es paralelo respecto a la conexión de Levi-Civita resulta que el operador de Ricci también es paralelo, con lo que el espacio homogéneo ha de ser necesariamente el producto de una superficie llana (plano Euclídeo) y una superficie con curvatura de Gauss constante. Recapitulando todos estos resultados hemos obtenido lo siguiente:

Teorema 3.2. *El álgebra de Lie $\mathfrak{rr}_{3,0}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable; con lo que la variedad resulta el producto del espacio Euclídeo con una superficie de curvatura de Gauss constante.*

Tipo $\mathfrak{rr}'_{3,0}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{rr}'_{3,0}$ y consideremos una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas se simplifican a:

$$[e_1, e_2] = -e_3 \qquad \text{y} \qquad [e_1, e_3] = e_2. \tag{3.5}$$

Haciendo uso de la estructura Kähleriana, J, y de la 2-forma fundamental, ω, dadas en la Tabla 3.1 resulta que el producto interior asociado en $\mathfrak{rr}'_{3,0}$ viene dado por la expresión:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

resultando así que la métrica inducida en el espacio homogéneo puede ser Riemanniana o de signatura neutra. Así, por un cálculo largo pero directo a partir de las Ecuaciones (3.5) y (3.6), resulta que el tensor curvatura es idénticamente nulo y, por tanto, el espacio homogéneo es llano. Resumiendo estos resultados hemos obtenido lo siguiente:

Teorema 3.3. *El álgebra de Lie $\mathfrak{rr}'_{3,0}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es llano.*

Tipo $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$

Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$. Por lo visto en el Teorema 2.7 las constantes de estructura no nulas respecto a esta base son:

$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad \text{y} \qquad [e_3, e_4] = e_4. \tag{3.7}$$

Puesto que la estructura compleja y la 2-forma de Kähler dadas en la Tabla 3.1 están relacionadas por la expresión $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$, se tiene que el producto interior en $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ está dado por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

con lo que la métrica inducida en el espacio homogéneo es Riemanniana o de signatura neutra.

Por otra parte, a partir de las Ecuaciones (3.7) y (3.8) y tras un cálculo largo pero directo, se obtiene que las únicas componentes no nulas del tensor curvatura (salvo las dadas por sus simetrías) son:

$$R(e_1, e_2)e_1 = -e_2 \qquad \text{y} \qquad R(e_3, e_4)e_3 = -e_4. \tag{3.9}$$

Así pues, las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$\rho(e_1, e_1) = \rho(e_2, e_2) = \rho(e_3, e_3) = \rho(e_4, e_4) = -1,$$

de donde, a partir de la Ecuación (3.8), resulta que el operador de Ricci es diagonalizable respecto a la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y está dado por:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

A su vez, a partir de las Ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) se obtiene que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. De este modo, por la Ecuación (3.10) y puesto que el tensor métrico también es paralelo, resulta que el espacio homogéneo es el producto de dos superficies con curvatura de Gauss constante. Por tanto, recapitulando todos estos resultados tenemos que:

Teorema 3.4. *El álgebra de Lie $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable; con lo que la variedad resulta el producto de dos superficies de curvatura de Gauss constante.*

Tipo $\mathfrak{r}'_2$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_2$ y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_4] = -e_3. \tag{3.11}$$

Por lo dado en la Tabla 3.1 se tiene que en este álgebra de Lie existen dos posibles estructuras complejas Kähler, analizaremos cada una de ellas por separado.

Primer caso

Considerando la primera opción de la Tabla 3.1 para la estructura Kähleriana, J, y para la 2-forma, ω, y haciendo uso de la relación $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$, el producto interior asociado en $\mathfrak{r}_2'$ está dado por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & -a \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

con lo que el espacio homogéneo es necesariamente de signatura neutra. De este modo, a partir de las Ecuaciones (3.11) y (3.12) y tras un cálculo largo pero directo, se obtiene que las únicas componentes no nulas del tensor curvatura (salvo las correspondientes dadas por sus simetrías) son:

$$\begin{array}{lll} R(e_1,e_3)e_1 = -e_3, & R(e_1,e_3)e_2 = -e_4, & R(e_1,e_4)e_1 = -e_4, \\ R(e_1,e_4)e_2 = e_3, & R(e_2,e_3)e_2 = e_3, & R(e_2,e_4)e_2 = e_4. \end{array} \tag{3.13}$$

De este modo, haciendo uso de la Ecuación (3.12), resulta que el tensor de Ricci está determinado por:

$$\rho(e_1,e_1) = -\rho(e_2,e_2) = \rho(e_3,e_3) = -\rho(e_4,e_4) = -2;$$

de donde, nuevamente a partir de la Ecuación (3.12) se obtiene que el operador de Ricci toma la siguiente expresión matricial:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{2a}{a^2+b^2} & \frac{2b}{a^2+b^2} & 0 & 0 \\ -\frac{2b}{a^2+b^2} & -\frac{2a}{a^2+b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a}{a^2+b^2} & \frac{2b}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2b}{a^2+b^2} & -\frac{2a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, a partir de las Ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13), resulta que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. Así, hemos obtenido lo siguiente:

Proposición 3.5. *El álgebra de Lie $\mathfrak{r}_2'$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra. Además, el espacio homogéneo resultante es localmente simétrico*

Segundo caso

Para el segundo caso posible dado en la Tabla 3.1, y teniendo en cuenta la relación $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$, resulta que el producto interior asociado en $\mathfrak{r}_2'$ está dado por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} -a & 0 & c & -b \\ 0 & -a & -b & -c \\ c & -b & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

con lo que la métrica g es necesariamente de signatura neutra. Así, a partir de las Ecuaciones (3.11) y (3.14) y por un cálculo largo pero directo, se tiene que las componentes no nulas del tensor curvatura están dadas por:

$$R(e_1,e_2)e_1 = \frac{-2a}{b^2+c^2}(be_3+ce_4) \quad \text{y} \quad R(e_1,e_2)e_2 = \frac{2a}{b^2+c^2}(be_4-ce_3). \tag{3.15}$$

De este modo, haciendo uso de la Ecuación (3.14) se obtiene que el tensor de Ricci es idénticamente nulo. Además, a partir de las Ecuaciones (3.11) y (3.15) resulta que las componentes no nulas de la derivada covariante del tensor curvatura son:

$$(\nabla_{e_1}R)(e_1,e_2)e_1 = \frac{-8a}{b^2+c^2}(be_3+ce_4) \quad \text{y} \quad (\nabla_{e_1}R)(e_1,e_2)e_2 = \frac{8a}{b^2+c^2}(be_4-ce_3),$$

con lo que el espacio homogéneo no es un espacio localmente simétrico. De este modo, recapitulando todos los resultados que hemos obtenido que:

Proposición 3.6. *El álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_2$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra. Además, el espacio homogéneo es Ricci llano pero no localmente simétrico.*

Tipo $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$ y tomemos $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1,e_4] = -e_1, \qquad [e_2,e_4] = e_2 \qquad \text{y} \qquad [e_3,e_4] = e_3. \tag{3.16}$$

A su vez, en términos de esta base la estructura compleja Kähleriana y su 2-forma fundamental asociada están dadas respectivamente por las expresiones de la Tabla 3.1. Así, de estas dos expresiones, resulta que el producto interior inducido en dicha álgebra de Lie está dado por:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} -c & b & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & 0 & -b \\ 0 & -a & -b & -c \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

con lo que el espacio homogéneo es necesariamente de signatura neutra.

Por otra parte, por un cálculo largo pero directo a partir de las Ecuaciones (3.16) y (3.17), se obtiene que las únicas componentes del tensor curvatura que no se anulan (salvo las correspondientes dadas por sus simetrías) son:

$$R(e_1,e_4)e_1 = \frac{-3c}{a^2+b^2}(ae_2+be_3) \qquad \text{y} \qquad R(e_1,e_4)e_4 = \frac{3c}{a^2+b^2}(ae_3-be_2), \tag{3.18}$$

de lo que se sigue, haciendo uso de la Ecuación (3.17), que el tensor de Ricci es idénticamente nulo.

Por otra parte, a partir de las Ecuaciones (3.16) y (3.18) se tiene que las únicas componentes no nulas de la derivada covariante del tensor curvatura están dadas por:

$$(\nabla_{e_4}R)(e_1,e_2)e_1 = \frac{12c}{a^2+b^2}(ae_2+be_3) \quad \text{y} \quad (\nabla_{e_4}R)(e_1,e_2)e_4 = \frac{12c}{a^2+b^2}(be_2-ae_3);$$

con lo que el espacio homogéneo no es localmente simétrico.

Proposición 3.7. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$ *dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra. Además, el espacio homogéneo es Ricci llano pero no localmente simétrico.*

Tipo $\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ y sea $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1,e_4]=-e_1, \quad [e_2,e_4]=\delta e_3, \quad \text{y} \quad [e_1,e_3]=-\delta e_2. \tag{3.19}$$

A partir de los resultados obtenidos en la Tabla 3.1 se tiene que en dicha álgebra de Lie existen dos posibles estructuras complejas Kählerianas distintas, estudiamos cada una de ellas por separado.

Primer caso

En primer lugar consideremos la primera de las opciones dadas en la Tabla 3.1 De este modo, a partir de la relación $\omega(X,Y)=\langle JX,Y\rangle$, resulta que el producto interior en $\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ está determinado por:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

con lo que el espacio homogéneo puede ser Riemanniano o de signatura neutra.

Por otra parte, por un cálculo largo pero directo a partir de las Ecuaciones (3.19) y (3.20), se tiene que la única componente no nula del tensor curvatura, salvo las dadas por las simetrías correspondientes, es:

$$R(e_1,e_4)e_1 = e_4, \tag{3.21}$$

de donde, haciendo uso de la Ecuación (3.20), se obtiene que las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$\rho(e_1,e_1)=\rho(e_4,e_4)=-1$$

y, por tanto, el operador de Ricci está dado por:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Finalmente, a partir de las Ecuaciones (3.19) y (3.21), resulta que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nulo, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. Así, por la expresión del operador de Ricci dada por la Ecuación (3.22) resulta que el espacio homogéneo es el producto de un plano Euclídeo y una superficie con curvatura de Gauss constante. Recopilando todos estos cálculos hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 3.8. *El álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable, con lo que la variedad resulta el producto del plano Euclídeo y una superficie de curvatura de Gauss constante.*

Segundo caso

Para la segunda de las opciones dadas en la Tabla 3.1 se tiene que el producto interior en $\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$ asociado está dado por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

con lo que el espacio homogéneo puede ser Riemanniano o de signatura neutra. De este modo, a partir de las Ecuaciones (3.19) y (3.23), se tiene que el tensor curvatura está determinado por la componente:

$$R(e_1, e_4)e_1 = -e_4, \tag{3.24}$$

y las correspondientes componentes dadas por sus simetrías. Así pues, el tensor de Ricci asociado está determinado por:

$$\rho(e_1, e_1) = \rho(e_4, e_4) = -1$$

y, por tanto, el operador de Ricci se reduce a:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

A su vez, a partir de las Ecuaciones (3.19) y (3.24), resulta que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. Así, y a partir de la expresión del operador de Ricci dado por la Ecuación (3.25), resulta que el espacio homogéneo es un producto del plano Euclídeo y de una superficie con curvatura de Gauss constante. De este modo, hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 3.9. *El álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable, con lo que la variedad resulta ser el producto del plano Euclídeo y de una superficie de curvatura de Gauss constante.*

Tipo $\mathfrak{d}_{4,1}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,1}$ y sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_4] = -e_1, \qquad \text{y} \qquad [e_3, e_4] = -e_3. \tag{3.26}$$

Respecto a esta base la estructura Kähleriana J y la 2-forma ω son las dadas en la Tabla 3.1, de donde, a partir de la relación $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$ resulta que el producto interior en $\mathfrak{d}_{4,1}$ está dado por:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} b & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

por lo que el espacio homogéneo resultante es necesariamente de signatura neutra.

Por otra parte, y tras un cálculo largo pero directo a partir de las Ecuaciones (3.26) y (3.27), se tiene que el tensor curvatura está determinado por los valores:

$$\begin{gathered} R(e_1, e_2)e_1 = -e_2, \quad R(e_1, e_2)e_4 = -e_3, \\ R(e_1, e_4)e_1 = -e_4, \quad R(e_1, e_4)e_2 = -e_3, \quad R(e_3, e_4)e_4 = e_3 \end{gathered} \tag{3.28}$$

y las correspondientes componentes dadas por sus simetrías. Así, haciendo uso de la Ecuación (3.27), el tensor de Ricci está determinado por:

$$\rho(e_1, e_1) = \rho(e_4, e_4) = -2,$$

con lo que el operador de Ricci asociado viene dado por la expresión:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{a} \\ \frac{2}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

resultando ser 2-pasos nilpotente. Además, a partir de las Ecuaciones (3.26) y (3.28) se tiene que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. Por tanto, en función de estos resultados hemos obtenido que:

Proposición 3.10. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,1}$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra. Además, el espacio homogéneo es localmente simétrico con operador de Ricci 2-pasos nilpotente.*

Tipo $\mathfrak{d}_{4,2}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ y tomemos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas son:

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_4] = -2e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = -e_3. \tag{3.30}$$

Por lo obtenido en la Tabla 3.1 en este álgebra de Lie es posible definir dos estructuras complejas Kählerianas, analizaremos cada una de ellas por separado.

Primer caso

Para la primera de las opciones de la Tabla 3.1 se tiene que el producto interior en $\mathfrak{d}_{4,2}$ está dado por la expresión:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

con lo que el espacio homogéneo ha de ser necesariamente de signatura neutra. Por otro lado, a partir de las Ecuaciones (3.30) y (3.31) se tiene que las componentes no nulas del tensor curvatura son:

$$R(e_2, e_4)e_2 = -\frac{3b}{a}e_3 \qquad \text{y} \qquad R(e_2, e_4)e_4 = \frac{3b}{a}e_1, \tag{3.32}$$

junto con las correspondientes obtenidas a partir de sus simetrías. De este modo, a partir de las Ecuaciones (3.30) y (3.32), se tiene en primer lugar que el tensor de Ricci es idénticamente nulo y en segundo lugar que las componentes no nulas de la derivada covariante del tensor curvatura son:

$$(\nabla_{e_4} R)(e_2, e_4)e_2 = -\frac{12b}{a}e_3 \qquad \text{y} \qquad (\nabla_{e_4} R)(e_2, e_4)e_4 = \frac{12b}{a}e_1,$$

con lo que el espacio homogéneo no es localmente simétrico. De este modo, recapitulando estos resultados hemos obtenido que:

Proposición 3.11. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra. Además, el espacio homogéneo es Ricci llano pero no localmente simétrico.*

Segundo caso

Para la segunda de las opciones de la Tabla 3.1 el producto interior en $\mathfrak{d}_{4,2}$ está dado por la expresión:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

por lo que el espacio homogéneo puede ser Riemanniano o de signatura neutra. De este modo, a partir de las Ecuaciones (3.26) y (3.48), las componentes del tensor curvatura no nulas están dadas por:

$$\begin{array}{lll} R(e_1,e_2)e_1 = -\frac{1}{4}e_2, & R(e_1,e_2)2_2 = \frac{b}{2a}e_1, & R(e_1,e_2)e_3 = \frac{b}{4a}e_4, \\ R(e_1,e_2)e_4 = -\frac{1}{2}e_3, & R(e_1,e_3)e_1 = -\frac{1}{4}e_3, & R(e_1,e_3)e_2 = \frac{b}{2a}e_1, \\ R(e_1,e_3)e_3 = \frac{b}{2a}e_1, & R(e_1,e_3)e_4 = \frac{1}{2}e_2, & R(e_1,e_4)e_1 = -e_4, \\ R(e_1,e_4)e_2 = -e_3, & R(e_1,e_4)e_3 = e_2, & R(e_1,e_4)e_4 = 4e_1, \\ R(e_2,e_3)e_2 = \frac{b}{a}e_3, & R(e_2,e_4)e_2 = -\frac{b}{2a}e_4, & R(e_3,e_4)e_3 = -\frac{b}{2a}e_4. \end{array} \tag{3.34}$$

Así, a partir de estos valores, se obtiene que el tensor de Ricci está determinado por las expresiones:

$$\rho(e_1,e_1) = -\frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad \rho(e_4,e_4) = -6$$

y, por tanto, su operador de Ricci asociado está dado por:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{a} \end{pmatrix}; \tag{3.35}$$

con lo que resulta diagonalizable en la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. A su vez, a partir de las Ecuaciones (3.30), (3.48) y (3.34), se sigue que las componentes no nulas de la derivada covariante del tensor curvatura están dadas por:

$$\begin{array}{ll} (\nabla_{e_2}R)(e_1,e_2)e_2 = -\frac{3b}{2a}e_3, & (\nabla_{e_2}R)(e_1,e_2)e_3 = \frac{3b}{2a}e_2, \\ (\nabla_{e_3}R)(e_1,e_3)e_2 = \frac{3b}{2a}e_3, & (\nabla_{e_3}R)(e_1,e_3)e_3 = -\frac{3b}{2a}e_2, \\ (\nabla_{e_2}R)(e_2,e_3)e_1 = -\frac{3b}{2a}e_2, & (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_3)e_1 = \frac{3b}{2a}e_3, \\ (\nabla_{e_2}R)(e_2,e_3)e_2 = \frac{3b^2}{a^2}e_1, & (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_3)e_2 = \frac{3b^2}{2a^2}e_4, \\ (\nabla_{e_2}R)(e_2,e_3)e_3 = \frac{3b^2}{2a^2}e_4, & (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_3)e_3 = -\frac{3b^2}{a^2}e_1, \\ (\nabla_{e_2}R)(e_2,e_3)e_3 = \frac{3b^2}{2a^2}e_4, & (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_3)e_3 = -\frac{3b^2}{a^2}e_1, \\ (\nabla_{e_2}R)(e_2,e_3)e_4 = -\frac{3b}{a}e_3, & (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_3)e_4 = -\frac{3b}{a}e_2, \\ (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_a)e_2 = \frac{3b}{a}e_3, & (\nabla_{e_3}R)(e_2,e_4)e_3 = -\frac{3b}{a}e_2, \\ (\nabla_{e_2}R)(e_3,e_4)e_2 = \frac{3b}{a}e_3, & (\nabla_{e_2}R)(e_3,e_4)e_3 = -\frac{3b}{a}e_2, \end{array}$$

de lo que se sigue que el espacio homogéneo no es localmente simétrico. Finalmente, recapitulando todos estos resultados, se obtiene que:

Teorema 3.12. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas o de signatura neutra. En cualquiera de los casos el operador de Ricci es diagonalizable pero el espacio homogéneo no es localmente simétrico.*

Tipo $\mathfrak{d}_{4,1/2}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,1/2}$ y tomemos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura no nulas están dadas por:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \quad [e_2, e_4] = \frac{1}{2}e_2, \quad [e_3, e_4] = -e_3. \tag{3.36}$$

Nuevamente por lo obtenido en la Tabla 3.1 se tiene que para este caso particular exiten dos posibles estructuras complejas Kählerianas. Analizamos cada una de ellas por separado:

Primer caso

Para la primera de las opciones, a partir de la relación $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$ se tiene que el producto interior en $\mathfrak{d}_{4,1/2}$ está dado por:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

con lo que el espacio homogéneo es necesariamente Riemanniano. Así, a partir de las Ecuaciones (3.36) y (3.37) y tras un cálculo largo pero directo, se obtiene que las componentes del tensor curvatura están dadas por:

$$\begin{array}{lll} R(e_1, e_2)e_1 = -e_2, & R(e_1, e_2)e_3 = \frac{1}{2}e_4 & R(e_1, e_3)e_1 = -\frac{1}{4}e_3, \\ R(e_1, e_3)e_2 = \frac{1}{4}e_4 & R(e_1, e_4)e_1 = -\frac{1}{4}e_3, & R(e_1, e_4)e_2 = -\frac{1}{4}e_3, \\ R(e_2, e_3)e_2 = -\frac{1}{4}e_3, & R(e_2, e_4)e_2 = -\frac{1}{4}e_4, & R(e_3, e_4)e_3 = -e_4, \end{array} \tag{3.38}$$

de donde se obtiene que el tensor de Ricci está determinado por las expresiones:

$$\rho(e_1, e_1) = \rho(e_2, e_2) = \rho(e_3, e_3) = \rho(e_4, e_4) = -\frac{3}{2}$$

y, por tanto, su operador de Ricci asociado está dado por la expresión:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2a} \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Por otra parte, tras un cálculo largo pero directo a partir de las Ecuaciones (3.36), (3.37) y (3.38), resulta que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo resulta ser localmente simétrico. Finalmente, a partir de estos cálculos se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.13. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,1/2}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite únicamente métricas Riemannianas. Además el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable con un único autovalor no nulo.*

Observación 3.14. Un estudio más detallado del tensor curvatura para este álgebra de Lie, en concreto de su operador de Jacobi asociado para cada vector z no nulo, el cual está dado por la aplicación $R(z,\cdot)z : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, donde $(R(z,\cdot)z)x = R(z,x)z$, muestra que este es diagonalizable actuando sobre vectores unitarios con autovalores constantes 0, $-\frac{1}{a}$ y $-\frac{1}{4a}$ (de multiplicidad dos). Así, aplicando los resultados obtenidos en [8] se tiene que este caso es localmente isométrico a un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.

Segundo caso

Para la segunda de las opciones, el producto interior en $\mathfrak{d}_{4,1/2}$ está dado por la expresión:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}; \tag{3.40}$$

de lo que se sigue que el espacio homogéneo es necesariamente de signatura neutra. Así, haciendo uso de las Ecuaciones (3.42) y (3.43) y tras un cálculo largo pero directo, se obtiene que el tensor curvatura está determinado por las expresiones:

$$\begin{array}{lll} R(e_1,e_2)e_1 = e_2, & R(e_1,e_2)e_3 = \frac{1}{2}e_4, & R(e_1,e_3)e_1 = \frac{1}{4}e_3, \\ R(e_1,e_3)e_2 = \frac{1}{4}e_4, & R(e_1,e_4)e_1 = \frac{1}{4}, & R(e_1,e_4)e_2 = -\frac{1}{4}e_3, \\ R(e_2,e_3)e_2 = \frac{1}{4}e_3, & R(e_2,e_4)e_2 = \frac{1}{4}e_4, & R(e_3,e_4)e_3 = -e_4. \end{array} \tag{3.41}$$

De este modo, a partir de la Ecuación (3.40) resulta que el tensor de Ricci está dado por:

$$\rho(e_1,e_1) = \rho(e_2,e_2) = -\rho(e_3,e_3) = -\rho(e_4,e_4) = \frac{3}{2},$$

de donde se sigue que su operador de Ricci asociado está determinado por la expresión:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2a} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a partir de las Ecuaciones (3.36) (3.40), (3.41) se obtiene que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, por lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. De este modo, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 3.15. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,1/2}$ dotada de la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 ha de ser necesariamente de signatura neutra. Además, el espacio homogéneo es localmente simétrico con operador de Ricci diagonalizable con un único autovalor no nulo.*

Observación 3.16. Un estudio más detallado del tensor curvatura para este álgebra de Lie, en concreto de su operador de Jacobi asociado para cada vector z no nulo, muestra que este es diagonalizable actuando sobre vectores unitarios con autovalores constantes 0, $-\frac{1}{a}$ y $-\frac{1}{4a}$ (de multiplicidad dos). Así, aplicando los resultados obtenidos en [3] se tiene que este caso es localmente isométrico a un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.

Tipo $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base para ella respecto a la cual las constantes de estructura son:

$$(3.42)\qquad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = e_2 - \frac{\lambda}{2}, \quad [e_2, e_4] = -e_1 - \frac{\lambda}{2}e_2, \quad [e_3, e_4] = -\lambda e_3.$$

Por lo obtenido en la Tabla 3.1 en este álgebra de Lie existen cuatro posibles estructuras complejas Kählerianas diferentes. Debido a la similitud de los cálculos en cualquiera de los casos estudiamos aquí dos de ellas, siendo los otros casos análogos.

Primer caso

Consideramos en primer lugar la primera de las opciones dadas en la Tabla 3.1. A partir de la relación $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$, el producto interior en $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ está dado por:

$$(3.43)\qquad \langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\lambda \end{pmatrix};$$

con lo que el espacio homogéneo puede ser Riemanniano o de signatura neutra. De este modo, a partir de las Ecuaciones (3.42) y (3.43) resulta que el tensor curvatura está determinado por:

$$(3.44)\qquad \begin{array}{lll} R(e_1, e_2)e_1 = -\lambda e_2, & R(e_1, e_2)e_3 = \frac{\lambda}{2}e_4, & R(e_1, e_3)e_1 = -\frac{\lambda}{4}e_3, \\ R(e_1, e_3)e_2 = \frac{\lambda}{4}e_4, & R(e_1, e_4)e_1 = -\frac{\lambda}{4}e_4, & R(e_1, e_4)e_2 = -\frac{\lambda}{4}e_3, \\ R(e_2, e_3)e_2 = -\frac{\lambda}{4}e_3, & R(e_2, e_4)e_2 = -\frac{\lambda}{4}e_4, & R(e_3, e_4)e_3 = -\lambda^2 e_4. \end{array}$$

Así, haciendo uso de la Ecuación (3.43), resulta que el tensor de Ricci está dado por:

$$\rho(e_1, e_1) = \rho(e_2, e_2) = -\frac{3\lambda}{2} \qquad \text{y} \qquad \rho(e_3, e_3) = \rho(e_4, e_4) = -\frac{3\lambda^2}{2},$$

de donde se sigue que el operador de Ricci asociado se reduce a:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} -\frac{3\lambda}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\lambda}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\lambda}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3\lambda}{2a} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, tras un cálculo largo pero directo a partir de las Ecuaciones (3.42), (3.43) y (3.44), se tiene que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. Así, a partir de estos cálculos se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.17. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable con un único autovalor no nulo.*

Observación 3.18. Un estudio más detallado del tensor curvatura para este álgebra de Lie, en concreto de su operador de Jacobi asociado para cada vector z no nulo, muestra que este es diagonalizable actuando sobre vectores unitarios con autovalores constantes 0, $-\frac{\lambda}{a}$ y $-\frac{\lambda}{4a}$ (de multiplicidad dos). Así, aplicando los resultados obtenidos en [3] y en [8] se tiene que este caso es localemente isométrico a un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.

Segundo caso

Para la segunda de las opciones de la Tabla 3.1 el producto interior en $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ está dado por la expresión:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a\lambda \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

con lo que el espacio homogéneo puede ser nuevamente Riemanniano o de signatura neutra. Por otra parte, a partir de las Ecuaciones (3.42) y (3.45) resulta que el tensor curvatura está determinado por:

$$\begin{array}{lll} R(e_1,e_2)e_1 = \lambda e_2, & R(e_1,e_2)e_3 = \frac{\lambda}{2}e_4, & R(e_1,e_3)e_1 = \frac{\lambda}{4}e_3, \\ R(e_1,e_3)e_2 = \frac{\lambda}{4}e_4, & R(e_1,e_4)e_1 = \frac{\lambda}{4}e_4, & R(e_1,e_4)e_2 = -\frac{\lambda}{4}e_3, \\ R(e_2,e_3)e_2 = \frac{\lambda}{4}e_3, & R(e_2,e_4)e_2 = \frac{\lambda}{4}e_4, & R(e_3,e_4)e_3 = -\lambda^2 e_4, \end{array} \tag{3.46}$$

con lo que, haciendo uso de la Ecuación (3.45), las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$\rho(e_1,e_1) = \rho(e_2,e_2) = \frac{3\lambda}{2} \qquad \text{y} \qquad \rho(e_3,e_3) = \rho(e_4,e_4) = -\frac{3\lambda^2}{2},$$

de donde se deduce que su operador de Ricci asociado es:

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{3\lambda}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda}{2a} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a partir de las Ecuaciones (3.42), (3.45) y (3.46), se tiene que la derivada covariante del tensor curvatura es idénticamente nula, con lo que el espacio homogéneo es localmente simétrico. Así, recopilando estos resultados se obtiene que:

Teorema 3.19. *El álgebra de Lie $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ dotada con la estructura Kähler dada en la Tabla 3.1 admite métricas Riemannianas y de signatura neutra. Además, en cualquiera de los casos, el espacio homogéneo es localmente simétrico y el operador de Ricci es diagonalizable con un único autovalor no nulo.*

Observación 3.20. Un estudio más detallado del tensor curvatura para este álgebra de Lie, en concreto de su curvatura seccional holomorfa, $K(x, Jx) = R(x, Jx, x, Jx)$, $x \in \mathfrak{g}$, muestra que esta es constante. Por tanto, se trata de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.

Resumimos los resultados obtenidos en esta sección en las siguientes tablas. En primer lugar nos centramos en el caso Riemanniano:

Caso Riemanniano

Álgebra de Lie	*Llana*	*Ricci llano*	*Localmente simétrica*
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	✗	✗	✓
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	✓	✓	✓
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	✗	✗	✓
$\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ (1,2)	✗	✗	✓
$\mathfrak{d}_{4,2}$ (2)	✗	✗	✗
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$ (1)	✗	✗	✓
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ $(1,2,3,4)$	✗	✗	✓

Mientras que para el caso de signatura neutra tenemos que:

Caso de signatura neutra

Álgebra de Lie	*Llana*	*Operador de Ricci diagonalizable*	*Localmente simétrica*
$\mathfrak{rh}_3$	✓	✓	✓
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	✗	✓	✓
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	✓	✓	✓
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	✗	✓	✓
$\mathfrak{r}'_2$ (1)	✗	✗	✓
$\mathfrak{r}'_2$ (2)	✗	✓(Ricci llana)	✗
$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$	✗	✓(Ricci llana)	✗
$\mathfrak{r}'_{4,0,\lambda}$ (1,2)	✗	✓	✓
$\mathfrak{d}_{4,1}$	✗	✗	✓
$\mathfrak{d}_{4,2}$ (1)	✗	✓(Ricci llana)	✗
$\mathfrak{d}_{4,2}$ (2)	✗	✓	✗
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$ (2)	✗	✓	✓
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ (1,2,3,4)	✗	✓	✓

3.3. El espacio 3-simétrico Riemanniano

En esta sección obtendremos finalmente la caracterización del espacio 3-simétrico buscada. Para ello tendremos que hacer un estudio más profundo del tensor curvatura del álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ (2), concretamente, de su tensor de Weyl asociado. El tensor de Weyl de una variedad pseudo-Riemanniana sólo depende de la clase conforme de la métrica. En particular, si g y $\overline{g} = e^{2\sigma}g$ son métricas conformemente equivalentes, entonces los tensores de Weyl de tipo $(1,3)$, W y $\overline{W}$, coinciden (equivalentemente, los tensores de Weyl de tipo (0,4) verifican la relación $\overline{W} = e^{2\sigma}W$). Un posible recíproco para este resultado fue obtenido por Hall en [13]:

Teorema 3.21. [13] Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana cuyo tensor de Weyl es de rango máximo. Entonces cualquier otra métrica $\overline{g}$ en M con el mismo tensor de Weyl de tipo $(1,3)$ es localmente conformemente equivalente a la métrica g.

Ahora bien, para poder aplicar este resultado debemos conocer mejor quién es el espacio 3-simétrico Riemannniano de dimensión cuatro. Los espacios simétricos generalizados pseudo-Riemannianos de esta dimensión fueron clasificados por Černý y Kowalski en [7], donde obtienen cuatro tipos diferentes. Siguiendo su clasificación, y puesto que los espacios simétricos generalizados del Tipo II y III son necesariamente de signatura neutra y los de tipo IV son espacios simétricos, centraremos nuestra atención en los espacios simétricos generalizados de Tipo I.

Los espacios simétricos generalizados de este Tipo son de orden tres y su espacio modelo se corresponde con $\mathbb{R}^4$ dotado con un tensor métrico, g, Riemanniano (signatura $(4,0)$ o $(0,4)$) o de signatura neutra cuya expresión en coordenadas locales (x,y,u,v) está dada por:

$$\begin{aligned} g = \;& \pm[(\sqrt{1+x^2+y^2}-x)\,du\circ du + (\sqrt{1+x^2+y^2}+x)\,dv\circ dv - 2y\,du\circ dv] \\ & +\lambda[(1+y^2)\,dx\circ dx + (1+x^2)\,dy\circ dy - 2xy\,dx\circ dy]/(1+x^2+y^2), \end{aligned}$$

donde λ es una constante no nula. Si centramos nuestra atención en el caso Riemanniano se tiene que una base ortonormal local está dada por:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}}(-y\partial_x + x\partial_y), \qquad e_2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{\lambda(x^2+y^2)}}(x\partial_x + y\partial_y),$$

$$e_3 = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}y\mu_{-1}}\partial_u + \frac{1}{\sqrt{2}\mu_{-1}}\partial_v, \qquad e_4 = \frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}y\mu_{1}}\partial_u + \frac{1}{\sqrt{2}\mu_{1}}\partial_v,$$

donde:

$$\mu_\epsilon(x,y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\epsilon y^2 + (x-\sqrt{x^2+y^2+1})(x\epsilon+\sqrt{x^2+y^2})}}, \qquad \epsilon = \pm 1.$$

Ahora bien, considerando la orientación en el espacio inducida por la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ se tiene que el tensor de Weyl autodual y el tensor de Weyl anti-autodual se pueden escribir respecto a la base ortonormal $\{E_i^\pm\}$ de $\Lambda^\pm(M)$ respectivamente como:

$$W^+ = \frac{\tau}{12}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad W^- = \frac{\tau}{12}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde la curvatura escalar toma el valor $\tau = -\frac{3}{\lambda}$.

Con estas consideraciones estamos ya en disposición de enunciar el resultado perseguido a lo largo de esta memoria:

Teorema 3.22. *El espacio 3-simétrico Riemanniano es el único espacio (salvo homotecias) homogéneo Riemanniano de dimensión cuatro y no simétrico que admite una estructura Kähler invariante a la izquierda.*

Demostración. Como vimos en las secciones anteriores, si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es una base para $\mathfrak{d}_{4,2}$ respecto a la cual las constantes de estructura no nulas (salvo las correspondientes simetrías) son:

$$(3.47) \qquad [e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_4] = -2e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = -e_3,$$

es posible construír una estructura Kähler en ella donde el endomorfismo J y su 2-forma fundamental asociada están dadas respectivamente por las expresiones:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $ab \neq 0$. Esta estructura Kähler induce en ella un producto interior Riemanniano o de signatura neutra dado por la expresión:

$$(3.48) \qquad \langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Tanto en el caso Riemanniano como en el caso de signatura neutra la variedad resulta no localmente simétrica. Ahora bien, si centramos nuestra atención en el caso Riemanniano se tiene que sus tensores de Weyl autodual y anti-autodual se reducen a:

$$W^+ = \frac{\tau}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad W^- = \frac{\tau}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

siendo $\tau = -\frac{6}{a}$. Además, el operador de Ricci resulta diagonalizable en dicha base reduciéndose a:

$$(3.49) \qquad \widehat{\rho} = \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De este modo, haciendo uso de la descomposición del tensor curvatura dada en la Ecuación (1.14), se obtiene que el tensor de Weyl es de rango máximo. Así, por el Teorema 3.21 (y después de un reorientación adecuada de la basae $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$) resulta que el grupo de Lie asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ es conformemente equivalente al espacio 3-simétrico Riemanniano.

Finalmente, calculando la norma del tensor de Weyl de tipo $(0, 4)$ del espacio 3-simétrico se tiene que $||W|| = g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma} g^{l\delta} W_{ijkl} W_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\dfrac{\tau}{\lambda}$, mientras que la correspondiente norma para el álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ es $-\dfrac{2\tau}{a}$; de donde se sigue que el factor conforme ha de ser constante. $\square$

Observación 3.23. De forma alternativa, los operadores $W^{\pm}$ asociados al álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4,2}$ tienen un autovalor distinguido, $\pm\frac{\tau}{6}$, cuyo autoespacio está generado por $E_3^{\pm}$. De este modo, resulta que el $Ker(W^{\pm} \mp \frac{\tau}{6} id_{\Lambda^{\pm}})$ define una 2-forma autodual y una 2-forma anti-autodual, $\Omega_{\pm} = \sqrt{2}E_3^{\pm}$, globalmente en M. A su vez, estas 2-formas definen una estructura almost Kähler, J_+, y una estructura opuesta Kähler, J_-, dadas por las expresiones $g(J_{\pm}X, Y) = \Omega_{\pm}(X, Y)$ (véase [23] para más información sobre la estructura almost Kähler).

Así, por los resultados obtenidos en [1], se deduce de forma directa que el espacio homogéneo ha de ser necesariamente localmente isométrico al único espacio 3-simétrico Riemanniano (véase también [6] para más información).

Bibliografía

[1] V. Apostolov, J. Armstrong and T. Draghici; Local rigidity of certain classes of almost Kähler 4-manifolds, *Annals Global Analysis Geom.* **21** (2002), 151–176.

[2] L. Bérard-Bergery; Les espaces homogènes riemanniens de dimension 4. Riemannian geometry in dimension 4, Textes Math., **3**, CEDIC, (1981), 40–60.

[3] N. Blažić, N. Bokan y Z. Rakić; Osserman pseuo-Riemannian manifolds of signature $(2, 2)$, *J. Aust. Math. Soc.* **71** (2001), 367–395.

[4] G. Calvaruso, A. Zaeim; Four-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds, *Monatsh. Math.,* DOI 10.1007/s00605-013-0588-9.

[5] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo; Local rigidy and nonrigidity of symplectic pairs, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **41 (2)** (2012), 241–252.

[6] ______; Geometric properties of generalized symmetric spaces, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **145A** (2015), 47–71.

[7] J. Černý, O. Kowalski; Classification of generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \leq 4$, *Tensor (N. S.)* **38** (1982), 256–267.

[8] Q. S. Chi; A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 187–202.

[9] B. Y. Chu; Symplectic homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **197** (1974), 145–159.

[10] A. Fino; Almost Kähler 4-dimensional Lie groups with J-invariant Ricci tensor, *Diff. Geom. Applic.* **23** (2005), 26–37.

[11] A. Gray, Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3, *J. Differential Geometry* **7** (1972), 343–369.

[12] A. Gray, L. M. Hervella; The sixteen clases of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), 35–58.

[13] G. Hall; Some remarks on the converse of Weyl's conformal theorem, *J. Geom. Phys.* **60** (2010), 1–7.

[14] O. Kowalski; Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leq 5$, *Rozpravy České Akad.* **85** (1975), no. 8.

[15] ______; *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Mathematics **vol. 805**, Springer, 1980.

[16] W. Kühnel; *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[17] J. M. Lee; *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, **176**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[18] J. Milnor; Curvature of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.

[19] B. O'Neill; *Semi-Riemannian Geometry*, New York: Academic Press, 1983.

[20] G. Ovando; Invariant complex structures on solvable real Lie groups, *Manuscripta math.* **103** (2000), 19–30.

[21] ______; Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups, *Revista de la Unión Matemática Argentina* **45** (2004), 55–67.

[22] ______; Product structures on four dimensional solvable Lie algebras, *Homology, Homotopy and Applications* **7(1)** (2005), 9–37.

[23] ______; Four dimensional symplectic Lie algebras, *Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry* **47** (2006), No. 2, 419–434.

[24] K. Sekigawa; On some three-dimensional curvature homogeneous spaces, *Tensor* (N.S.) **31** (1977), 87–97.