Balbina Casas Méndez
M. Gloria Fiestras Janeiro
Ignacio García Jurado
Julio González Díaz

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

MANUAIS
UNIVERSITARIOS

USC editora
manuais

Balbina Casas Méndez es doctora en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela, de cuyo Departamento de Estadística e Investigación Operativa es profesora desde 1999. Desde 2010 es la secretaria de la Sociedade Galega para a Promoción da Estatística e a Investigación de Operacións de la que es miembro fundador. Sus principales líneas de investigación son el estudio de los juegos cooperativos, la elección social y las aplicaciones de la investigación operativa.

María Gloria Fiestras Janeiro es profesora titular en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Vigo. Sus líneas de investigación están relacionadas con la teoría de juegos y sus aplicaciones. Ha impartido cursos de teoría de juegos en el programa de doctorado en Estadística e Investigación Operativa y de redes y planificación en el Máster Interuniversitario en Técnicas Estadísticas.

Ignacio García Jurado es catedrático de estadística e investigación operativa de la Universidad de La Coruña. Ha sido presidente de la SEIO (Sociedad de Estadística e Investigación Operativa) y de la SGAPEIO (Sociedade Galega para a Promoción da Estatística e da Investigación de Operacións) y director del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Santiago de Compostela. Sus líneas de investigación principales son la teoría de juegos y la investigación operativa.

Julio González Díaz es doctor en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela y actualmente investigador del programa Ramón y Cajal en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la misma universidad. Ha sido investigador posdoctoral en la Universidad Autónoma de Barcelona y en la Northwestern University (Illinois, Estados Unidos), con financiación de los programas Juan de la Cierva y Marie Curie, respectivamente. Sus líneas de investigación principales son la teoría de juegos y la investigación operativa.

Introducción a la teoría de juegos

USC , editora

manuais

Vol. 15

Balbina Casas Méndez
M. Gloria Fiestras Janeiro
Ignacio García Jurado
Julio González Díaz

INTRODUCCIÓN
A LA TEORÍA DE JUEGOS

2012
Universidade de Santiago de Compostela

Edita
Edicións USC
Campus Vida
15782 Santiago de Compostela
https://www.usc.gal/publicacions

DOI: https://dx.doi.org/10.15304/9788498879278

A nuestras familias.

Prefacio

La teoría de juegos es la teoría matemática que se ocupa de los problemas de decisión interactivos. Tales problemas pueden caracterizarse por los tres hechos siguientes: (a) hay varios agentes que toman decisiones, (b) en función de las decisiones de todos se produce un resultado, y (c) cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de posibles resultados.

Los primeros problemas de decisión interactivos que llamaron la atención de los matemáticos fueron los juegos de estrategia. Quizá por ello, la terminología de tales juegos se usa normalmente para referirse a los distintos elementos involucrados en un problema de decisión interactivo. Así pues, llamamos *juego* a un problema de decisión interactivo, *jugador* a cada agente que participa en el juego, *estrategias* a las posibles decisiones que los jugadores pueden tomar, etc.

La teoría clásica de juegos es una teoría ideal normativa, en el sentido de que prescribe qué debe hacer un grupo de jugadores racionales involucrados en un juego; racionales en el sentido de que saben lo que quieren, actúan tratando de conseguir lo que quieren, y saben cómo deben actuar para conseguir lo que quieren. Más recientemente se ha comenzado a desarrollar una teoría de juegos normativa para jugadores con racionalidad limitada e incluso una teoría de juegos descriptiva. De todos modos, en este libro nos centraremos en la teoría de juegos ideal normativa.

Dentro de la teoría de juegos conviven en realidad dos teorías: la teoría de juegos no cooperativa y la teoría de juegos cooperativa. La no cooperativa supone que todos los elementos del juego y todas las posibilidades estratégicas de los jugadores pueden describirse con precisión a través de un modelo matemático. El enfoque no cooperativo consiste, pues, en analizar el modelo que describe nuestro problema, buscando para cada jugador sus mejores estrategias teniendo en cuenta que los demás también usarán sus mejores estrategias. La teoría de juegos cooperativa supone en cambio que los posibles modos de cooperar de los jugadores (de tomar acuerdos vinculantes) son muy variados y complejos, de modo que resulta inviable describirlos a través de un modelo matemático sencillo. El enfoque cooperativo es, por tanto, asumir de entrada que los jugadores van a cooperar y a actuar de un modo socialmente óptimo y centrarse más bien en cómo deben repartirse los jugadores los beneficios de su cooperación.

A continuación incluimos un breve repaso de los principales hitos en la historia de la teoría de juegos. Probablemente, el primer precursor de la teoría de juegos fue A. Cournot y su análisis del duopolio, publicado en 1838, en el que introduce un concepto muy próximo al equilibrio de Nash. Más tarde, en los inicios del siglo XX, algunos importantes matemáticos, como E. Zermelo y E. Borel, se interesan por los juegos de estrategia y por los juegos bipersonales de suma nula. El primer teorema importante de la teoría de juegos es el Teorema minimax, demostrado por el matemático húngaro John von Neumann en 1928. John von Neumann volvió a la teoría de juegos algunos años más tarde, cuando colaboró en Princeton con el economista Oskar Morgenstern. En 1944 ambos publicaron la primera edición de su famoso libro “The Theory of Games and Economic Behavior”; ese momento suele considerarse el del nacimiento de la teoría de juegos. Desde entonces la teoría de juegos se ha desarrollado como resultado de la cooperación entre matemáticos y economistas. En 1950 John Nash publicó su primer artículo sobre el concepto de equilibrio. Hoy en día, el equilibrio de Nash y la teoría que nació a raíz de él desempeñan un papel muy importante en el desarrollo de las ciencias sociales, especialmente de la economía. En 1994 John Nash recibió el Premio Nobel de Economía conjuntamente con J. Harsanyi y con R. Selten por sus contribuciones a la teoría del equilibrio en juegos no cooperativos. Más recientemente, otros investigadores en teoría de juegos recibieron el Premio Nobel de Economía. En 2005 R. Aumann y T. Schelling lo obtuvieron por sus contribuciones al análisis de los conflictos y la cooperación a través de la teoría de juegos; en 2007 el premio fue para L. Hurwicz, E. Maskin y R. Myerson por haber puesto los fundamentos de la teoría del diseño de mecanismos. Todos estos premios muestran el importante papel desarrollado por la teoría de juegos como principal herramienta matemática para analizar la interacción social y el gran impacto que esta teoría ha tenido en la economía. En 1999, se creó la Game Theory Society (GTS) para promover la investigación, la enseñanza y las aplicaciones de la teoría de juegos. En su página web, la GTS proporciona recursos relativos a la teoría de juegos tales como herramientas de software e información sobre revistas y congresos. Periódicamente, la GTS organiza un congreso mundial de teoría de juegos; el primero tuvo lugar en Bilbao en 2000.

Para terminar el prefacio ofrecemos unos comentarios generales sobre este libro. Está pensado para ser utilizado como texto principal de un curso de introducción a la teoría de juegos de entre 45 y 60 horas (seis créditos ECTS). Abarca tanto los contenidos básicos de la teoría no cooperativa como los de la teoría cooperativa. Cuenta con numerosos ejemplos y ejercicios. Está escrito con un estilo riguroso, no informal, aunque pretende introducir los contenidos matemáticos de un modo asequible a todo tipo de estudiantes universitarios siempre que tengan conocimientos elementales de matemáticas (los adquiridos, por ejemplo, en un curso introductorio que contenga elementos de análisis matemático y de álgebra lineal). Nos gustaría señalar que los contenidos de este libro han evolucionado en paralelo con los de González-Díaz y otros (2010), aunque este último es un texto más exhaustivo que puede ser utilizado para profundizar en la teoría de juegos.

Agradecimientos. Los autores agradecen los comentarios de dos evaluadores anónimos y de los miembros de la Comisión Editorial Académica de la Universidad de Santiago de Compostela. También agradecen el apoyo financiero del Gobierno de España a través de los proyectos ECO2008-03484-C02-02 y MTM2011-27731-C03, y de la Xunta de Galicia a través del proyecto INCITE09-207-064-PR.

Índice general

Tema 1

Introducción a la Teoría de la Decisión

Contenidos

1.1. Preliminares

En este capítulo presentamos una breve introducción a la teoría matemática de la decisión para problemas con un decisor, a la que es habitual referirse con el nombre de *teoría de la decisión*. Con ello ponemos las bases para desarrollar en los capítulos siguientes la teoría matemática de la decisión para problemas en los que interaccionan varios decisores, es decir, las bases para desarrollar la teoría de juegos.

Definición 1.1.1. Un **problema de decisión** es un par $(A, \succeq)$, donde A es el conjunto de alternativas y $\succeq \subset A \times A$ es una relación binaria sobre A,[1] *completa* (es decir, para cualesquiera $a, b \in A$, $a \not\succeq b$ implica que $b \succeq a$) y *transitiva* (para cualesquiera $a, b, c \in A$, $a \succeq b$ y $b \succeq c$ implica que $a \succeq c$), que recoge las *preferencias débiles* de un decisor sobre A. Para todo $a, b \in A$, $a \succeq b$ se interpreta como que "el decisor es indiferente entre a y b o prefiere a sobre b".

Es natural introducir dos nuevas relaciones binarias asociadas a cualquier problema de decisión $(A, \succeq)$: la *preferencia estricta* $\succ$ y la *indiferencia* $\sim$. Tales relaciones se definen del siguiente modo: para cualesquiera $a, b \in A$,

- $a \succ b$ si y sólo si $b \not\succeq a$.
- $a \sim b$ si y sólo si $a \succeq b$ y $b \succeq a$.

La siguiente proposición resume las propiedades más relevantes de la preferencia estricta y la indiferencia en un problema de decisión. Su demostración es muy sencilla y se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 1.1.1. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión y sean $a, b, c \in A$. Entonces se cumple que:*

1) $a \succ b$ implica que $b \not\succ a$ (es decir, $\succ$ es irreflexiva).

2) $\succ$ es transitiva.

3) $a \sim a$ (es decir, $\sim$ es reflexiva) y $a \sim b$ implica que $b \sim a$ (es decir, $\sim$ es simétrica). Además, $\sim$ es transitiva.[2]

4) $a \succ b$ y $b \sim c$ implica que $a \succ c$.

[1] Para todo $a, b \in A$ denotamos $(a, b) \in \succeq$ por $a \succeq b$.

[2] Como $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, es lo que llamamos una *relación de equivalencia*.

5) $a \sim b$ y $b \succ c$ implica que $a \succ c$.

6) Se tiene una y sólo una de las tres siguientes relaciones: $a \succ b$, $b \succ a$, $a \sim b$.

Decimos que una relación binaria $\succeq$ sobre A es *antisimétrica* si, para cualesquiera $a, b \in A$, se tiene que $a \succeq b$ y $b \succeq a$ implican que $a = b$. Podemos asociar con cada problema de decisión $(A, \succeq)$ uno nuevo cuya preferencia débil sea antisimétrica. Para comprobar esto definimos, para todo $a \in A$, el conjunto $I(a) = \{b \in A : b \sim a\}$ y consideramos $(A/\!\sim, \succeq_i)$, donde $A/\!\sim = \{I(a) : a \in A\}$ es la partición de A definida por $\sim$, y $\succeq_i$ está dada, para cada $I, J \in A/\!\sim$ por: $I \succeq_i J$ si y sólo si $a \succeq b$ para todo $a \in I$ y $b \in J$. Claramente $(A/\!\sim, \succeq_i)$ es un problema de decisión bien definido (ya que $\succeq_i$ es completa y transitiva) y, además, $\succeq_i$ es antisimétrica.

1.2. Utilidad Ordinal

En esta sección introducimos y analizamos el concepto de función de utilidad ordinal (a la que llamaremos, simplemente, función de utilidad). En un problema de decisión, una función de utilidad es aquella que asigna un número real a cada alternativa conservando el orden dado por las preferencias del decisor. A continuación damos la definición formal.

Definición 1.2.1. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Una **función de utilidad** que representa $\succeq$ es una aplicación $u : A \to \mathbb{R}$ que cumple que, para cualesquiera $a, b \in A$, $a \succeq b$ si y sólo si $u(a) \geq u(b)$.

Es fácil comprobar que u es una función de utilidad que representa $\succeq$ si y sólo si se tiene: para todo $a, b \in A$, $a \succ b$ si y sólo si $u(a) > u(b)$. Además, si u es una función de utilidad que representa $\succeq$ se tiene: para todo $a, b \in A$, $a \sim b$ si y sólo si $u(a) = u(b)$.

A continuación se discuten dos ejemplos en los que se analizan dos problemas de decisión concretos, desde el punto de vista de la utilidad ordinal.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos el problema de decisión $(A, \succeq)$, dado por $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $a \succeq a$, $a \succeq c$, $a \succeq d$, $b \succeq a$, $b \succeq b$, $b \succeq c$, $b \succeq d$, $b \succeq e$, $c \succeq a$, $c \succeq c$, $c \succeq d$, $d \succeq d$, $e \succeq a$, $e \succeq b$, $e \succeq c$, $e \succeq d$, $e \succeq e$. Notemos que, para caracterizar un problema de decisión $(A, \succeq)$, es suficiente proporcionar $\succ$, o $A/\!\sim$ y $\succeq_i$, o $A/\!\sim$ y $\succ_i$. En este caso, por ejemplo, sería suficiente decir que $A/\!\sim = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ y, además, $\{a, c\} \succ_i \{d\}$, $\{b, e\} \succ_i \{a, c\}$, $\{b, e\} \succ_i \{d\}$. Observemos que existen infinitas funciones de utilidad representando $\succeq$. Por ejemplo, $u : A \to \mathbb{R}$ dada por $u(a) = 1$, $u(b) = 2$, $u(c) = 1$, $u(d) = 0$ y $u(e) = 2$ es una de tales funciones. Está claro que dar una función de utilidad es una manera simple de caracterizar $(A, \succeq)$. $\diamond$

Ejemplo 1.2.2. Sea el problema de decisión $(\mathbb{R}^n, \succeq_L)$, donde $\succeq_L$ es el orden lexicográfico; es decir, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x \succeq_L y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{o} \\ \text{existe } i \in N \text{ tal que } x_j = y_j \ \forall j < i \text{ y } x_i > y_i. \end{cases}$$

En este caso, si $n \geq 2$, no existe una función de utilidad representando $\succeq_L$. Para probarlo supongamos que existe u representando $\succeq_L$. Tomemos $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) \in \mathbb{Q}$ tal que $u(x, \ldots, x, 1) > f(x) > u(x, \ldots, x, 0)$ (notemos que $(x, \ldots, x, 1), (x, \ldots, x, 0) \in \mathbb{R}^n$ y que $(x, \ldots, x, 1) >_L (x, \ldots, x, 0)$, por lo cual $u(x, \ldots, x, 1) > u(x, \ldots, x, 0)$). Pero entonces f es obviamente una aplicación inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$, lo cual es imposible. $\diamond$

De los ejemplos anteriores surge una pregunta de manera natural: ¿bajo qué condiciones la preferencia débil de un problema de decisión puede ser representada por una función de utilidad? En lo que queda de esta sección se responde a esta pregunta. El siguiente resultado proporciona una respuesta parcial.

Proposición 1.2.1. *Tomemos un problema de decisión $(A, \succeq)$ y supongamos que A es un conjunto numerable. Entonces, existe una función de utilidad u que representa $\succeq$.*

Demostración. Como A es un conjunto numerable, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$. Para todo $i, j \in \mathbb{N}$, definimos

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{ si } a_i, a_j \in A \text{ y } a_i \succ a_j \\ \\ 0 \ \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, para cada $a_i \in A$, definimos $u(a_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_{ij}$. Notemos que u está bien definida, ya que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ es convergente. Además, está claro que u representa $\succeq$. $\square$

Ahora vamos a proporcionar una condición necesaria y suficiente para que en un problema de decisión exista una función de utilidad que represente las preferencias del decisor. Para hacerlo, necesitamos dar algunas definiciones y resultados previos.

Definición 1.2.2. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. $B \subset A$ se dice **denso en orden** en A si, para cada $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a_1$, existe $b \in B$ con $a_2 \succeq b \succeq a_1$.

Definición 1.2.3. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Tomemos $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a_1$. (a_1, a_2) se denomina **salto** si, para cada $b \in A$, se tiene que $b \succeq a_2$ o $a_1 \succeq b$. Si (a_1, a_2) es un salto, a_1 y a_2 se denominan extremos del salto. Denotemos por A^* el conjunto de extremos de saltos de A.

Lema 1.2.2. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Supongamos que $\succeq$ es antisimétrica.*

1) *Si existe $B \subset A$ numerable y denso en orden en A, entonces A^* es numerable.*

2) *Si existe una función de utilidad representando $\succeq$, entonces A^* es numerable.*

Demostración. 1) Denotemos por A_1^* y A_2^* los conjuntos de extremos superiores e inferiores, respectivamente, de los saltos y tomemos $B \subset A$ denso en orden en A. Si (a_1, a_2) es un salto, entonces existe $b \in B$ con $a_1 = b$ o $a_2 = b$ (notemos que $\succeq$ es antisimétrica). Por tanto, existe una biyección de $A_1^* \backslash B$ en un subconjunto de B (emparejando cada extremo inferior de un salto que no está en B con el correspondiente extremo superior del salto, que debe de estar en B). De esta forma, $A_1^* \backslash B$ es un conjunto numerable. Entonces

$$A^* = (A_1^* \backslash B) \cup (A_2^* \backslash B) \cup (A^* \cap B)$$

es un conjunto numerable.

2) Supongamos que u es una función de utilidad representando $\succeq$ y notemos que, para cada salto (a_1, a_2), podemos encontrar $q \in \mathbb{Q}$ con $u(a_2) > q > u(a_1)$. Por tanto, A^* es un conjunto numerable. □

Teorema 1.2.3. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Supongamos que $\succeq$ es antisimétrica. Entonces $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad si y sólo si existe $B \subset A$ numerable y denso en orden en A.*

Demostración. Tomemos $B \subset A$ numerable y denso en orden en A. Decimos que a es el primer (último) elemento en A si no existe $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \neq a$, con $\bar{a} \succeq a$ ($a \succeq \bar{a}$). Notemos que el primer o el último elemento de A pueden no existir; ahora bien, si existen, son únicos. Denotemos por $\bar{B}$ el conjunto conteniendo B y el primer y último elementos de A (si existen). Notemos que $B^* = \bar{B} \cup A^*$ es un conjunto numerable y, entonces, existe una función de utilidad v representando $\succeq$ en B^*. Ahora, para cada $a \in A$, definimos $u(a)$ de la siguiente forma:

$$u(a) = \sup\{v(b) \,:\, b \in B^*,\, a \succeq b\}.$$

Veamos que u está bien definida. Si $a \in B^*$, claramente $u(a) = v(a)$. Si $a \notin B^*$, entonces existen $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a \succ a_1$. Como B es denso en orden en A, existen $b_1, b_2 \in B$ con

$$a_2 \succeq b_2 \succ a \succ b_1 \succeq a_1.$$

Entonces, el conjunto $\{v(b) \,:\, b \in B^*,\, a \succeq b\}$ es no vacío ($v(b_1)$ pertenece a dicho conjunto) y acotado superiormente (por $v(b_2)$). De esta forma tiene supremo y $u(a)$ está bien definido para cada $a \in A$. Vamos a comprobar que u es una función de utilidad representando $\succeq$ en A. Tomemos $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a_1$. Vamos a ver que existen $b_1, b_2 \in B^*$ con $a_2 \succeq b_2 \succ b_1 \succeq a_1$. Si $a_1, a_2 \in B^*$, entonces podemos tomar $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$. Si $a_1 \notin B^*$, como B es denso en orden en A, existe $b_2 \in B$ con $a_2 \succeq b_2 \succ a_1$. Notemos que (a_1, b_2) no puede ser un salto. Por tanto, debe existir $\hat{a} \in A$ con $b_2 \succ \hat{a} \succ a_1$ y, de esta forma, debe existir $b_1 \in B$ con $\hat{a} \succeq b_1 \succ a_1$. Si $a_2 \notin B^*$ podemos hacer un razonamiento análogo. Así podemos asegurar que $u(a_2) > u(a_1)$, ya que se tiene

$$u(a_2) \geq v(b_2) > v(b_1) \geq u(a_1).$$

Notemos que esto también implica que $a_2 \succ a_1$ para cada $a_1, a_2 \in A$ con $u(a_2) > u(a_1)$ (teniendo en cuenta que $\succeq$ es antisimétrica). Recíprocamente, supongamos que existe una función de utilidad u representando $\succeq$ en A. Denotemos por $\bar{\mathbb{Q}}^2$ el subconjunto de $\mathbb{Q}^2$ dado por:

$$\bar{\mathbb{Q}}^2 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \,:\, \text{existe}\, a \in A \,\text{con}\, q_2 > u(a) > q_1\}.$$

Para cada $(q_1, q_2) \in \bar{\mathbb{Q}}^2$ escojamos $a \in A$ con $u(a) \in (q_1, q_2)$ y denotemos por $\bar{B}$ el conjunto de todos los $a \in A$ escogidos de esta forma. Claramente $\bar{B}$ es un conjunto numerable y, por tanto, también lo es el conjunto $B = A^* \cup \bar{B}$. Para finalizar la demostración vamos a comprobar que B es denso en orden en A. Tomemos $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a_1$ y supongamos que (a_1, a_2) no es un salto (de otra forma se puede tomar $b = a_1$ o $b = a_2$). Entonces, existe $\bar{a} \in A$, con $a_2 \succ \bar{a} \succ a_1$, y $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ con

$$u(a_2) > q_2 > u(\bar{a}) > q_1 > u(a_1).$$

Así $q_1, q_2 \in \bar{\mathbb{Q}}^2$ y existe $b \in B$ con $q_2 > u(b) > q_1$. Por tanto, $a_2 \succ b \succ a_1$. $\square$

Corolario 1.2.4. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Entonces $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad si y sólo si existe $B \subset A$ numerable denso en orden en A.*

Demostración. Consideremos el problema de decisión $(A/\sim, \succeq_i)$, que verifica que $\succeq_i$ es antisimétrica. Es fácil comprobar que $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad si y sólo si $\succeq_i$ puede ser representada por una función de utilidad. Es también inmediato comprobar que existe un subconjunto numerable de A denso en orden en A (con respecto a $\succeq$) si y sólo si existe un subconjunto numerable de $A/\sim$ denso en orden en $A/\sim$ (con respecto a $\succeq_i$). Entonces, el corolario se sigue del teorema. □

Para terminar esta sección, se proporciona un resultado que muestra que la función de utilidad que representa una preferencia débil es única salvo transformaciones estrictamente crecientes. La demostración es muy sencilla y se deja como ejercicio para el lector.

Definición 1.2.4. Una aplicación $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **estrictamente creciente** si se cumple alguna de las siguientes tres condiciones equivalentes para todo $x, y \in S$:

1) $x > y$ implica $f(x) > f(y)$.

2) $x > y$ si y sólo si $f(x) > f(y)$.

3) $x \geq y$ si y sólo si $f(x) \geq f(y)$.

Proposición 1.2.5. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión y supongamos que u es una función de utilidad que representa $\succeq$. Entonces, v es otra función de utilidad que representa $\succeq$ si y sólo si existe una función estrictamente creciente $f : u(A) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$, $v(a) = f(u(a))$.*

1.3. Utilidad Lineal

En esta sección tratamos con *problemas de decisión convexos*, que son problemas de decisión $(X, \succeq)$ tales que X es un subconjunto convexo de un espacio vectorial real. En este contexto estamos interesados en las llamadas funciones de utilidad *lineales*, que introducimos a continuación.

Definición 1.3.1. Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo. Una **función de utilidad lineal** que representa $\succeq$ es una aplicación $u : X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones para todo $x, y \in X$:

- $x \succeq y$ si y sólo si $u(x) \geq u(y)$.
- Para todo $t \in [0,1]$, $u(tx+(1-t)y) = tu(x)+(1-t)u(y)$.

Veamos ahora algunas propiedades que pueden cumplir las preferencias del decisor en un problema de decisión convexo.

Definición 1.3.2. Se dice que $\succeq$ es **independiente** si para todos $x, y, z \in X$ y todo $t \in (0,1]$, $x \succeq y$ si y sólo si $tx+(1-t)z \succeq ty+(1-t)z$.

Definición 1.3.3. Se dice que $\succeq$ es **continua** si para todos $x, y, z \in X$ tales que $x \succ y \succ z$ existe $t \in (0,1)$ tal que $y \sim tx+(1-t)z$.

Ambas propiedades son claras y se explican por sí mismas; al final de esta sección discutiremos brevemente su interés desde la perspectiva aplicada de la teoría de la decisión. Obsérvese que en la propiedad de independencia $t \in (0,1]$, pues si $t=0$ la equivalencia correspondiente no tendría sentido.

A continuación demostramos que estas dos propiedades son una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función de utilidad lineal. De hecho, es inmediato comprobar que si en un problema de decisión convexo $(X, \succeq)$ existe una función de utilidad lineal que representa $\succeq$, entonces $\succeq$ es independiente y continua. Sin embargo, la suficiencia no es fácil de probar; para hacerlo empezamos dando algunos resultados previos.

Proposición 1.3.1. *Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo. Supongamos que $\succeq$ es independiente y supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_2 \succ x_1$. Si $s, t \in [0,1]$ con $s > t$ entonces $sx_2+(1-s)x_1 \succ tx_2+(1-t)x_1$.*

Demostración. Notemos en primer lugar que en las condiciones de la proposición se tiene que $t < 1$. Teniendo en cuenta que $\succeq$ verifica la propiedad de independencia

$$\frac{s-t}{1-t}x_2+\frac{1-s}{1-t}x_1 \succ \frac{s-t}{1-t}x_1+\frac{1-s}{1-t}x_1 = x_1.$$

Es inmediato que

$$sx_2+(1-s)x_1 = tx_2+(1-t)(\frac{s-t}{1-t}x_2+\frac{1-s}{1-t}x_1).$$

Haciendo uso nuevamente de la propiedad de independencia de $\succeq$,

$$tx_2+(1-t)(\frac{s-t}{1-t}x_2+\frac{1-s}{1-t}x_1) \succ tx_2+(1-t)x_1,$$

con lo que concluye la demostración. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de esta proposición.

Corolario 1.3.2. *Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo y supongamos que $\succeq$ es independiente y continua. Entonces, para todos $x, y, z \in X$ tales que $x \succ y \succ z$, existe un único $t \in (0,1)$ con $y \sim tx + (1-t)z$.*

Ahora podemos probar el resultado más importante de esta sección.

Teorema 1.3.3. *Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo. Supongamos que $\succeq$ es independiente y continua. Entonces:*

1) Existe una función de utilidad lineal u que representa $\succeq$.

2) u es única salvo transformaciones afines positivas; es decir, para toda $v : X \to \mathbb{R}$, v es otra función de utilidad lineal que representa $\succeq$ si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ tal que $v(x) = au(x) + b$ para todo $x \in X$.

Demostración. El resultado se tiene inmediatamente si $x \sim y$ para todos $x, y \in X$ (basta tomar $u(x) = a$ para todo $x \in X$, siendo a un número real). En otro caso, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_2 \succ x_1$. Denotamos $[x_1, x_2] = \{x \in X : x_2 \succeq x \succeq x_1\}$ y definimos $u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ como:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \sim x_1 \\ 1 & \text{si } x \sim x_2 \\ t \in (0,1) \text{ tal que } x \sim tx_2 + (1-t)x_1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el corolario anterior u está bien definida (t es único) y por la proposición anterior u es una función de utilidad que representa $\succeq$ sobre $[x_1, x_2]$. Vamos a ver que u es lineal. Sean $x, y \in [x_1, x_2]$ y $t \in [0,1]$. Como $\succeq$ es independiente, entonces

$$tx + (1-t)y \sim t(u(x)x_2 + (1-u(x))x_1) + (1-t)(u(y)x_2 + (1-u(y))x_1)$$

que es igual a

$$(tu(x) + (1-t)u(y))x_2 + (t(1-u(x)) + (1-t)(1-u(y)))x_1.$$

Por tanto, $u(tx + (1-t)y) = tu(x) + (1-t)u(y)$. Veamos ahora la unicidad de u sobre $[x_1, x_2]$. Es inmediato que cada transformación afín positiva de u es otra función de utilidad lineal que representa $\succeq$. Recíprocamente, sea

v una función de utilidad lineal que representa $\succeq$. Entonces otra función de utilidad lineal que representa $\succeq$ es w, definida para cada $x \in [x_1, x_2]$ como:

$$w(x) = \frac{v(x)}{v(x_2) - v(x_1)} - \frac{v(x_1)}{v(x_2) - v(x_1)}.$$

Se tiene que $w(x_2) = 1$ y $w(x_1) = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} w(x) &= w(u(x)x_2 + (1 - u(x))x_1) \\ &= u(x)w(x_2) + (1 - u(x))w(x_1) = u(x). \end{aligned}$$

De esta forma, para todo $x \in [x_1, x_2]$,

$$v(x) = (v(x_2) - v(x_1))u(x) + v(x_1).$$

Para terminar la demostración vamos a ver cómo extender u a todo X. Para ello sea $x \in X \backslash [x_1, x_2]$ y tomemos $[y_1, y_2] \subset X$ tal que $x \in [y_1, y_2]$ y $[x_1, x_2] \subset [y_1, y_2]$. Podemos construir una función de utilidad lineal $\bar{v}$ que representa $\succeq$ sobre $[y_1, y_2]$ como hicimos antes para $[x_1, x_2]$. Entonces, si para cada $y \in [y_1, y_2]$ definimos $v(y)$ como

$$v(y) = \frac{\bar{v}(y) - \bar{v}(x_1)}{\bar{v}(x_2) - \bar{v}(x_1)},$$

se tiene que v es una función de utilidad lineal representando $\succeq$ sobre $[y_1, y_2]$ y por tanto sobre $[x_1, x_2]$. Notemos además que $v(x_2) = u(x_2) = 1$ y $v(x_1) = u(x_1) = 0$ por lo que razonando como antes con w tenemos que u y v coinciden sobre $[x_1, x_2]$. Observemos que si se hubiera escogido un intervalo diferente $[z_1, z_2]$ conteniendo a x y a $[x_1, x_2]$, la extensión de u a x habría sido la misma. En efecto, supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 \succ x$. En tal caso, v (la extensión de u a $[y_1, y_2]$) y w (la extensión de u a $[z_1, z_2]$) serían funciones de utilidades lineales sobre $[x, x_2]$ con valores iguales en x_1 y x_2 y, en consecuencia, serían idénticas sobre $[x, x_2]$. Por tanto, definimos $u(x) = v(x)$. Para comprobar que u es una función de utilidad lineal sobre X basta tener en cuenta que, para todos $x, y \in X$, u es una función de utilidad lineal sobre $[\bar{x}, \bar{y}]$ con $x, y \in [\bar{x}, \bar{y}]$ y $[x_1, x_2] \subset [\bar{x}, \bar{y}]$. Finalmente, la unicidad sobre X se puede comprobar de la misma forma que la unicidad sobre $[x_1, x_2]$. Notemos que $w(x) = u(x)$ para $x \notin [x_1, x_2]$ simplemente por definición. □

La teoría de la utilidad lineal desempeña un papel relevante en la teoría de juegos porque es la base teórica que hace posible algunos de sus más importantes modelos y conceptos. En concreto, a continuación veremos que la utilidad lineal nos permite desarrollar una teoría de la decisión en ambiente de riesgo, es decir, en situaciones en las que está presente la aleatoriedad. Tales situaciones tienen mucha importancia en la teoría de juegos.

Sea A un conjunto finito de alternativas. Una *lotería* sobre A es una distribución de probabilidad sobre sus elementos. Denotamos por $L(A)$ el conjunto de loterías sobre A, es decir,

$$L(A) = \{x \in [0,1]^A : \sum_{a \in A} x(a) = 1\}.$$

Observemos que $L(A)$ es un subconjunto convexo del espacio vectorial real $\mathbb{R}^A$ y que es igual a la envoltura convexa de $\{e_a : a \in A\}$, donde cada e_a es la lotería en $L(A)$ dada por: $e_a(\hat{a}) = 0$, para todo $\hat{a} \in A \backslash \{a\}$ y $e_a(a) = 1$.

Definición 1.3.4. Sea $(L(A), \succeq)$ un problema de decisión convexo. Una aplicación $u : A \to \mathbb{R}$ es una **función de utilidad de von Neumann y Morgenstern** que representa $\succeq$ si, para todos $x, y \in L(A)$, se tiene que:

$$x \succeq y \Leftrightarrow \sum_{a \in A} u(a)x(a) \geq \sum_{a \in A} u(a)y(a).$$

Notemos que las funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern están definidas en A y representan las preferencias de un decisor en $L(A)$ por lo que son una herramienta útil para representar las preferencias de un decisor en ambiente de riesgo. La conexión entre utilidad lineal y utilidad de von Neumann y Morgenstern se muestra en el resultado siguiente.

Proposición 1.3.4. *Sea $(L(A), \succeq)$ un problema de decisión convexo. Entonces, existe una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern representando $\succeq$ si y sólo si existe una función de utilidad lineal representando $\succeq$.*

Demostración. Supongamos que u es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern representando $\succeq$. Si definimos $v : L(A) \to \mathbb{R}$ como $v(x) = \sum_{a \in A} u(a)x(a)$, para todo $x \in L(A)$, v es una función de utilidad lineal que representa $\succeq$. Recíprocamente, si v es una función de utilidad lineal que representa $\succeq$, vamos a definir $u : A \to \mathbb{R}$ como $u(a) = v(e_a)$, para todo $a \in A$. Vemos que u es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern que representa $\succeq$ si notamos que cada $x \in L(A)$ se puede escribir como $\sum_{a \in A} x(a)e_a$. $\square$

Las funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern se llaman también funciones de utilidad *cardinal*, porque no se limitan a dar una ordenación de las alternativas y permiten representar preferencias sobre loterías ($L(A)$) calculando las correspondientes utilidades esperadas (sobre A). Esta aproximación es más general de lo que inicialmente podría parecer, como ilustramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.3.1. Supongamos que un decisor tiene que escoger entre dos opciones: a) 1 millón de euros con toda seguridad y b) 2 millones de euros con probabilidad 1/2 y 0 euros con probabilidad 1/2. El concepto de utilidad esperada no implica que el decisor será necesariamente indiferente entre las dos opciones; es decir, la utilidad cuando obtiene 2 millones de euros no tiene por qué ser el doble de la utilidad cuando obtiene 1 millón. Un decisor cuya utilidad por una cierta cantidad de dinero sea exactamente esa cantidad ($u(x) = x$) es "neutral al riesgo" y sería indiferente entre a) y b). Un decisor con "aversión al riesgo" elegiría a) (su función de utilidad sería cóncava; por ejemplo $u(x) = \sqrt{x}$) y un decisor con "propensión al riesgo" elegiría b)(su función de utilidad sería convexa; por ejemplo $u(x) = x^2$).

$\diamond$

Como veremos en los próximos capítulos, las funciones de utilidad y, más concretamente, las funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern desempeñan un importante papel en el desarrollo de la teoría de juegos. En este capítulo simplemente hemos tratado de dar sus correspondientes definiciones y de probar que bajo ciertas condiciones generales (y razonables) existen funciones de utilidad e incluso funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern que representan las preferencias de un decisor racional. Fishburn (1970), French (1986), Kreps (1988), y Mas-Colell y otros (1995) incluyen discusiones acerca de si tales condiciones son realmente naturales y también contienen presentaciones más exhaustivas de la teoría de la utilidad. Aunque se recomienda al lector que consulte esos textos para un estudio más profundo de la teoría de la decisión unipersonal, terminamos este capítulo con dos ejemplos que, de algún modo, critican las propiedades de independencia y continuidad, respectivamente. En todo caso, creemos que las críticas puestas sobre la mesa por estos ejemplos, que responden a circunstancias muy singulares, son casi irrelevantes en el contexto de este libro y no suponen un menoscabo de las firmes bases en las que se asienta la teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern.

Ejemplo 1.3.2. *La paradoja de Allais (Allais, 1953)* muestra una inconsistencia entre el comportamiento real observado y la propiedad de independencia. Supongamos un decisor al que se le pide escoger entre la opción

O_1, ganar 1 millón de euros con toda seguridad, o la opción P_1, ganar 5 millones de euros con probabilidad 0.1, 1 millón de euros con probabilidad 0.89 y nada con probabilidad 0.01. A continuación el decisor debe escoger entre O_2, ganar 1 millón de euros con probabilidad 0.11 y nada con probabilidad 0.89, y la opción P_2, ganar 5 millones de euros con probabilidad 0.1 y nada con probabilidad 0.9. En la práctica se observa que la mayoría de la gente escoge O_1 en la primera etapa y P_2 en la segunda. Sin embargo, este proceder es inconsistente con la propiedad de independencia. En efecto, supongamos que el decisor tiene preferencias sobre $L(A)$ con $A = \{0, 1, 5\}$, donde 0, 1 y 5 significan 0, 1 y 5 millones de euros, respectivamente. Por otro lado, utilizaremos que para todo $a \in A$, e_a denota la lotería que selecciona a con probabilidad 1. De esta forma, las cuatro opciones se pueden identificar con determinadas loterías.

Opción	Lotería
O_1	$0.11e_1 + 0.89e_1$
P_1	$0.11(\frac{0.01}{0.11}e_0 + \frac{0.1}{0.11}e_5) + 0.89e_1$
O_2	$0.11e_1 + 0.89e_0$
P_2	$0.11(\frac{0.01}{0.11}e_0 + \frac{0.1}{0.11}e_5) + 0.89e_0$

Tabla 1.3.1: Descomposiciones de las opciones del decisor para ilustrar la paradoja de Allais.

A la vista de la Tabla 1.3.1, si la preferencia débil del decisor sobre $L(A)$ cumple la propiedad de independencia, entonces $O_1 \succeq P_1$ implica que $O_2 \succeq P_2$, lo cual es inconsistente con el comportamiento observado con mayor frecuencia. Esta paradoja ha motivado el desarrollo de teorías de la utilidad alternativas para los problemas de decisión en ambiente de riesgo. Sin embargo, la teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern sigue siendo ampliamente utilizada hoy en día; la paradoja de Allais se puede interpretar como un ejemplo de aparición de comportamientos irracionales en una situación singular cuando los decisores no son particularmente reflexivos. $\diamond$

Ejemplo 1.3.3. Consideremos un problema de decisión $(L(A), \succeq)$ donde A es el conjunto $\{10, 0, M\}$ donde 10 significa ganar 10 euros, 0 significa ganar 0 euros y M significa morir. Para un decisor estándar se tiene que $10 \succ 0 \succ M$. Si $\succeq$ cumple la propiedad de continuidad, entonces existe $t \in (0, 1)$ tal que $0 \sim t10 + (1 - t)M$. Ahora bien, esto significa que el decisor estaría dispuesto a arriesgar su vida sólo por la posibilidad de ganar 10 euros, lo cual incluso para t muy próximo a 1 no parece muy creíble a primera vista. Sin embargo, analizando el ejemplo con más cuidado, hemos de reconocer que los seres humanos asumimos pequeños riesgos muchas veces para obtener muy pequeñas recompensas (por ejemplo al cruzar la calle para comprar un periódico o conducir el coche para ir al cine). $\diamond$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Considérese un problema de decisión $(A, \succeq)$ donde $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $\succeq$ viene caracterizada por: $1 \succeq 0$, $2 \succeq 1$, $2 \succeq 3$, $3 \succeq 2$, $0 \succeq 4$, $0 \succeq 1$.

a) Encuéntrese una función de utilidad que represente $\succeq$.

b) Encuéntrese un subconjunto minimal denso en orden en A indicando todos los huecos de $\succeq$.

Ejercicio 1.2. Considérese un problema de decisión $(\mathbb{R}, \succeq)$. Indíquese razonadamente si es posible que tanto $f(x) = x^2 - 3x$ como $g(x) = x - 3$ representen $\succeq$.

Ejercicio 1.3. Demuéstrese que el orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$ no cumple la propiedad de continuidad.

Ejercicio 1.4. Supóngase que la función f del Ejercicio 1.2. es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern de un decisor en el conjunto de loterías sobre $\mathbb{R}$. Considérese una lotería que selecciona -1 con probabilidad 1/2, 1 con probabilidad 2/10 y 2 con probabilidad 3/10.

a) Dígase cuál es la utilidad de esa lotería según f.

b) Encuéntrese, si existe, otra función de utilidad de von Neumann y Morgenstern h que represente las mismas preferencias y de modo que $h(0) = 1$ y $h(1) = 2$.

Ejercicio 1.5. Sea A el conjunto de los diez primeros números naturales positivos. Supóngase que un decisor tiene unas preferencias definidas sobre las loterías sobre A que cumplen completitud, transitividad, independencia y continuidad. Supóngase también que el decisor prefiere estrictamente 10 a 1 y que es indiferente entre n y la lotería que selecciona 1 con probabilidad $1/n$ y 10 con probabilidad 1-$(1/n)$ para todo $n \in \{2, \ldots, 9\}$. Proporciónese una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern de A en $\mathbb{R}$ que represente esta preferencia.

Ejercicio 1.6. Considérese el problema de decisión $(A, \succeq_L)$, donde $\succeq_L$ es el orden lexicográfico y $A = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$. Si existe alguna función de utilidad representando $\succeq_L$ indíquese y proporcionese una; si no, razónese por qué.

Ejercicio 1.7. Considérese un problema de decisión $(A, \succeq)$ tal que el conjunto A es $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la preferencia estricta es: $1 \succ 0$, $1 \succ 2$, $1 \succ 3$, $1 \succ 4$, $2 \succ 0$, $2 \succ 4$, $3 \succ 0$, $3 \succ 4$. Encuéntrese una función de utilidad que represente estas preferencias.

Ejercicio 1.8. Considérese el problema de decisión $(A, \succeq)$ tal que $\succeq$ puede representarse por la función de utilidad $u(x) = (x - 2)^2$, para todo $x \in A$. Encuéntrese un subconjunto de A minimal denso en orden indicando todos los huecos de $\succeq$.

Ejercicio 1.9. Supóngase que la función u del Ejercicio 1.8 es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern que representa las preferencias de un decisor en el conjunto de loterías sobre $\mathbb{R}$. Considérese una lotería que selecciona 0 con probabilidad 1/3, 1 con probabilidad 1/6 y 2 con probabilidad 1/2.

a) Dígase cuál es la utilidad de esa lotería según u.

b) Encuéntrese, si existe, otra función de utilidad de von Neumann y Morgenstern $\bar{u}$ representando las mismas preferencias y de modo que $\bar{u}(0)$=3 y $\bar{u}(1)$=2.

Ejercicio 1.10. Supóngase que u es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern que representa las preferencias de un decisor en el conjunto de loterías sobre $\mathbb{R}$. Supóngase también que $u(0) = 2$, $u(1) = 1$ y el decisor es indiferente entre 2 y la lotería que selecciona 0 con probabilidad 1/4 y 1 con probabilidad 3/4.

a) Calcúlese $u(2)$.

b) Supóngase ahora que v es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern que representa las mismas preferencias. Si $v(0) = 1$ y $v(2) = 0$, calcúlese $v(1)$.

Ejercicio 1.11. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión tal que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\succeq$ es independiente y continua. Supongamos que $4 \succ 3 \succ 2 \succ 1$ y que: (a) 3 es indiferente a la lotería que selecciona 4 con probabilidad 1/3 y 1 con probabilidad 2/3, y (b) 2 es indiferente a la lotería que selecciona

1 con probabilidad 1/10 y 3 con probabilidad 9/10. Proporciónese una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern en A que represente estas preferencias y que asigne valor 0 a 1 y 1 a 4.

Ejercicio 1.12. Considérese un problema de decisión $(A, \succeq)$ tal que el conjunto A es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\succeq$ viene caracterizada por: $1 \succeq 4$, $2 \succeq 3$, $3 \succeq 2$, $3 \succeq 5$, $4 \succeq 1$, $5 \succeq 1$.

a) Encuéntrese una función de utilidad $f : A \to \mathbb{R}$ que represente estas preferencias.

b) Proporciónense todos los huecos de $\succeq$ que tengan a 5 como extremo inferior.

c) Encuéntrese un subconjunto minimal denso en orden en A.

Tema 2

Juegos en Forma Estratégica

Contenidos

2.1. Introducción a los Juegos en Forma Estratégica

Un *juego en forma estratégica* es un modelo estático que describe problemas de decisión en los que interaccionan varios jugadores. De acuerdo a este modelo, los jugadores toman sus decisiones simultánea e independientemente y, aunque los jugadores podrían comunicarse y tomar acuerdos informales antes de que el juego comience, se supone que no disponen de mecanismos que les permitan tomar acuerdos *vinculantes*. A lo largo de este libro asumiremos que todos los jugadores son racionales en el sentido de que intentan maximizar su propia utilidad. A continuación damos la definición formal de juego en forma estratégica.

Definición 2.1.1. Un juego **en forma estratégica** G con conjunto de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$ es una $2n$-tupla $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ donde, para todo $i \in N$, X_i es el conjunto de estrategias del jugador i y $H_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ es su función de pago, que asigna a cada perfil de estrategias $x \in X$ el pago que i obtiene si se juega de acuerdo a tal perfil.

En realidad, en un problema de decisión en el que interaccionan los jugadores de N están involucrados los siguientes elementos:

- $\{X_i\}_{i \in N}$, los conjuntos de estrategias de los jugadores.
- R, el conjunto de posibles resultados.
- Una aplicación $f : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to R$ que asigna a cada perfil de estrategias x su correspondiente resultado $f(x)$.
- $\{\succeq_i\}_{i \in N}$, las preferencias de los jugadores sobre R (relaciones binarias completas y transitivas).

La definición de juego en forma estratégica asume que las preferencias de los jugadores pueden representarse a través de funciones de utilidad. Si para cada $i \in N$ denotamos por h_i su función de utilidad, la correspondiente función de pago H_i viene dada, para todo perfil de estrategias $x \in X$, por $H_i(x) = h_i(f(x))$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. *Dilema del prisionero.* Dos sospechosos de un delito grave y de un pequeño hurto son ubicados en celdas diferentes. Se sabe que son culpables de ambos hechos, pero no hay pruebas de que hayan cometido el delito. A ambos se les da la oportunidad de confesar. Si ambos confiesan el delito, cada uno de ellos pasará 10 años en la cárcel. Si sólo uno confiesa, actuará como testigo contra el otro (que pasará 15 años en la cárcel) y no recibirá castigo. Finalmente, si ninguno confiesa, serán juzgados por el hurto y cada uno de ellos pasará en la cárcel 1 año. Siguiendo la terminología común para este juego, nos vamos a referir a la confesión como "delatar" (D) y a la no confesión como "no delatar" (ND). En tal caso, el juego del dilema del prisionero se puede representar como el juego en forma estratégica (X_1, X_2, H_1, H_2) dado por:

- $X_1 = X_2 = \{ND, D\}$;
- $H_1(ND, ND) = -1$, $H_1(ND, D) = -15$, $H_1(D, ND) = 0$ y, por último, $H_1(D, D) = -10$; y
- $H_2(ND, ND) = -1$, $H_2(ND, D) = 0$, $H_2(D, ND) = -15$ y, por último, $H_2(D, D) = -10$.

La Tabla 2.1.1 muestra una representación más conveniente de este juego, que es la forma habitual de representar juegos en forma estratégica bipersonales con conjuntos finitos de estrategias.

	ND	D
ND	$-1, -1$	$-15, 0$
D	$0, -15$	$-10, -10$

Tabla 2.1.1: El dilema del prisionero.

El dilema del prisionero es un clásico en teoría de juegos. Ha sido ampliamente utilizado en ámbitos teóricos, aunque también para propósitos más aplicados en sociología o economía. El resultado "cooperativo", $(-1, -1)$, es bastante bueno para ambos jugadores; es "casi" todo lo que pueden obtener en el juego. Ahora bien, para cada jugador, la estrategia D conduce a un pago estrictamente más alto que ND, independientemente de la estrategia elegida por el otro jugador. De esta forma, un decisor racional debería jugar siempre D. Así, si ambos jugadores se comportan racionalmente, obtienen pagos $(-10, -10)$, que son mucho peores que los pagos en el resultado "cooperativo". Muchas situaciones de la vida real pueden ser vistas como un juego del dilema del prisionero. Por ejemplo, en la carrera nuclear entre los EEUU y la URSS durante la denominada Guerra Fría, ambos países debían decidir si producir o no armas nucleares; en esta situación, los pagos tendrían una estructura similar a los de la Tabla 2.1.1. $\diamond$

Ejemplo 2.1.2. *Oligopolio de Cournot (Cournot, 1838).* Se considera un conjunto N de empresas que producen un cierto producto. Cada empresa i decide el número de unidades que va a producir, $x_i \in [0, \infty)$, siendo el coste de producción $c_i(x_i)$. El precio de una unidad en el mercado es $p(\sum_{j\in N} x_j)$ (depende de la cantidad total producida). Esta situación se modeliza mediante un juego en forma estratégica $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ donde, para cada empresa $i \in N$, $X_i = [0, \infty)$ y $H_i(x) = p(\sum_{j\in N} x_j)x_i - c_i(x_i)$ (para todo $x \in X$). $\diamond$

Ejemplo 2.1.3. *Subasta al primer precio.* Se subasta un objeto y N es el conjunto de potenciales compradores. La valoración que hace el jugador i del objeto es v_i. Supongamos que $v_1 > \ldots > v_n > 0$. Las reglas de la subasta son:

1) Los jugadores realizan sus pujas, $\{x_i\}_{i\in N}$, simultánea e independientemente.

2) El objeto se asigna al jugador que puja más alto y, en caso de empate, a aquel que más valora el objeto entre los que han pujado más alto.

3) El jugador que obtiene el objeto paga lo que ha pujado por él.

La subasta al primer precio se puede representar como el juego en forma estratégica $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ tal que, para cualquier $i \in N$, $X_i = [0, \infty)$ y

$$H_i(x) = \begin{cases} v_i - x_i & \text{si } i = i(x) \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $i(x) = \min\{j \in N : x_j = \max_{l\in N} x_l\}$. $\diamond$

Ejemplo 2.1.4. *Subasta al segundo precio.* En una subasta al segundo precio las reglas son las mismas que en una al primer precio con una única excepción: ahora el jugador que obtiene el objeto paga una cantidad igual al máximo de las pujas de los otros jugadores. Por tanto, el juego en forma estratégica correspondiente a esta situación es el mismo que en el ejemplo anterior salvo que ahora

$$H_{i(x)}(x) = v_{i(x)} - \max\{x_j : j \in N\backslash\{i(x)\}\}.$$

$\diamond$

Ejemplo 2.1.5. *Una situación interactiva multietápica.* Un juego en forma estratégica es un modelo estático, en el sentido de que asume que los jugadores eligen sus estrategias simultáneamente. Sin embargo, las situaciones interactivas multietápicas también pueden ser representadas mediante juegos en forma estratégica. Esto tiene sentido cuando los jugadores involucrados en una situación conflictiva multietápica quieren hacer un análisis estratégico de la situación, de modo que antes de empezar el juego consideran todas las posibles circunstancias en las que tienen que tomar decisiones y las correspondientes consecuencias de cada posible decisión. Esto lo pueden hacer construyendo un juego en forma estratégica. Para ilustrar este planteamiento consideremos una situación con dos agentes y tres etapas:

Etapa 1. El jugador 1 elige entre arriba (u) y abajo (d).

Etapa 2. El jugador 2, tras observar la elección del jugador 1, elige entre arriba (U) y abajo (D).

Etapa 3. Si en las dos primeras etapas se elige arriba, el jugador 1 elige de nuevo entre techo (t) y base (b) y después el juego termina. En otro caso no se realizan más elecciones y el juego termina.

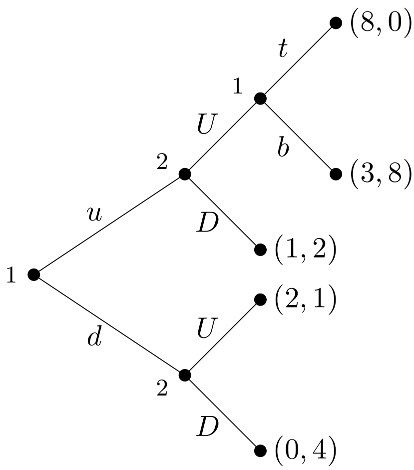


Figura 2.1.1: Situación interactiva multietápica.

Los pagos para todos los posibles resultados se muestran en el árbol de la Figura 2.1.1 (la primera y la segunda componente de los vectores de pagos son los pagos al primer y al segundo jugador, respectivamente). El jugador 1 tiene que tomar una decisión cuando el juego empieza y también en la etapa 3. Una estrategia del jugador 1 es un plan para todas las circunstancias en las que tiene que tomar una decisión. El conjunto de estrategias del jugador 1 es:

$$X_1 = \{ut, ub, dt, db\},$$

donde, por ejemplo, ud quiere decir "mi plan es escoger u en la etapa 1 y escoger d en la etapa 3". El jugador 2 tiene que tomar una decisión en la etapa 2, tras observar la decisión del jugador 1 en la etapa 1. Su conjunto de estrategias es:

$$X_2 = \{UU, UD, DU, DD\},$$

donde la primera etiqueta de la estrategia muestra el plan del jugador 2 si el jugador 1 ha elegido u y la segunda etiqueta de la estrategia muestra el plan del jugador 2 si el jugador 1 ha elegido d. Por ejemplo, DU quiere decir "mi plan es escoger D si el jugador 1 elige u y escoger U si el jugador 1 elige d". De esta forma, el juego en forma estratégica asociado es el que se describe en la Tabla 2.1.2. $\diamond$

	UU	UD	DU	DD
ut	$8, 0$	$8, 0$	$1, 2$	$1, 2$
ub	$3, 8$	$3, 8$	$1, 2$	$1, 2$
dt	$2, 1$	$0, 4$	$2, 1$	$0, 4$
db	$2, 1$	$0, 4$	$2, 1$	$0, 4$

Tabla 2.1.2: Una situación interactiva multietápica.

2.2. El Equilibrio de Nash en Juegos en Forma Estratégica

El concepto de solución más importante para juegos en forma estratégica es el equilibrio de Nash. Fue introducido en Nash (1950b) y Nash (1951); por su impacto en la teoría económica, John Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994. En Kohlberg (1990) se dice que la idea principal del equilibrio de Nash es hacer una importante simplificación y, en vez de preocuparse de cómo se desarrollará la interacción entre los jugadores, preguntarse cuáles serán los resultados estables de tal interacción. De hecho, un equilibrio de Nash de un juego en forma estratégica no es más que un perfil de estrategias tal que ningún jugador gana desviándose unilateralmente de él; en este sentido puede decirse que el concepto de equilibrio de Nash busca resultados estables de la situación interactiva descrita por el juego en forma estratégica.

Definición 2.2.1. Sea $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ un juego en forma estratégica. Un **equilibrio de Nash** de G es un perfil de estrategias $x \in X$ que cumple que

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i),$$

para todo $x'_i \in X_i$ y todo $i \in N$, donde el perfil (x_{-i}, x'_i) es:

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Busquemos ahora los equilibrios de Nash en los ejemplos considerados en la sección anterior.

Ejemplo 2.2.1. El único equilibrio de Nash del *dilema del prisionero* es (D, D). De hecho, como ya hemos argumentado, (D, D) es el único comportamiento racional en un contexto no cooperativo. ◇

Ejemplo 2.2.2. Vamos a considerar de nuevo el *oligopolio de Cournot* con las siguientes hipótesis adicionales:

1) $n = 2$, es decir, se trata de un *duopolio*.

2) $c_i(x_i) = cx_i$ para todo $i \in \{1, 2\}$, donde $c > 0$.

3) La función precio está dada por:

$$p(x_1 + x_2) = \begin{cases} a - (x_1 + x_2) & \text{si } a > x_1 + x_2 \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $a > c$.

La función de pago resultante para cada $i \in \{1, 2\}$ es:

$$H_i(x) = \begin{cases} x_i(a - x_1 - x_2 - c) & \text{si } a > x_1 + x_2 \\ \\ -x_i c & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un equilibrio de Nash de este juego (también denominado equilibrio de Cournot) es un par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X_1 \times X_2$ tal que:

$$H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq H_1(x_1, \bar{x}_2),\ \forall x_1 \in X_1,$$

$$H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq H_2(\bar{x}_1, x_2),\ \forall x_2 \in X_2.$$

Consideremos las funciones $f_i(x) = x_i(a - x_1 - x_2 - c)$ $(i \in \{1, 2\})$. Se tiene que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = -2x_1 + a - x_2 - c,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = -2x_2 + a - x_1 - c.$$

Y por tanto,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{a - x_2 - c}{2},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{a - x_1 - c}{2}.$$

Se tiene además que

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(x) = -2$$

para todo $x \in X$. Por tanto, si para cada $x_{-i} \in X_{-i}$ y cada $i \in N$ denotamos por $B_i(x_{-i})$ el conjunto de mejores respuestas del jugador i a x_{-i} dado por

$$\{x_i' \in X_i = [0, \infty) \,:\, H_i(x_{-i}, x_i') \geq H_i(x_{-i}, \hat{x}_i),\ \forall \hat{x}_i \in X_i\},$$

se tiene que

$$B_1(x_2) = \begin{cases} \frac{a-x_2-c}{2} & \text{si } x_2 < a - c \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$B_2(x_1) = \begin{cases} \frac{a-x_1-c}{2} & \text{si } x_1 < a - c \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La única solución del sistema, dada por

$$x_1 = \tfrac{a-x_2-c}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \tfrac{a-x_1-c}{2},$$

es el punto $\bar{x} = (\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3})$ y constituye el único equilibrio de Nash del juego. Se tiene además que, para todo $i \in \{1, 2\}$,

$$H_i(\bar{x}) = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Obsérvese que, si en vez de dos duopolistas hubiera un único monopolista en el mercado, su función de pago sería

$$H(x) = \begin{cases} x(a - x - c) & \text{si } a > x \\ \\ -xc & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $f(x) = x(a - x - c)$ se tiene que $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = \frac{a-c}{2}$. Como $f''(x) = -2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que el nivel óptimo de producción y el pago correspondiente para un monopolista son:

$$\hat{x} = \frac{a-c}{2} \text{ y } H(\hat{x}) = \frac{(a-c)^2}{4}.$$

De lo anterior se deduce que, en equilibrio, el beneficio del monopolista es mayor que la suma de los beneficios de los duopolistas. Además, como $\hat{x} < \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, el precio de cada unidad en el mercado es menor en el caso del duopolio. $\diamond$

Ejemplo 2.2.3. Es fácil comprobar que en la *subasta al primer precio* descrita en el Ejemplo 2.1.3 el conjunto de equilibrios de Nash es el formado por los perfiles de estrategias $x \in [0, \infty)^n$ que satisfacen las tres siguientes condiciones:

1) $x_1 \in [v_2, v_1]$,

2) $x_j \leq x_1$ para todo $j \in N \backslash \{1\}$ y

3) $x_j = x_1$ para algún $j \in N \backslash \{1\}$.

Obsérvese que en cualquier equilibrio de Nash el primer jugador obtiene el objeto. $\diamond$

Ejemplo 2.2.4. Es fácil comprobar que en la *subasta al segundo precio* descrita en el Ejemplo 2.1.4 el perfil de estrategias $v = (v_1, \ldots, v_n)$ satisface la siguiente condición: para cada $i \in N$, cada $x'_i \in X_i$ y cada $x_{-i} \in X_{-i}$ se tiene que $H_i(x_{-i}, v_i) \geq H_i(x_{-i}, x'_i)$. Esta condición implica que v es un equilibrio de Nash de este juego. Nótese que, si se juega v, el jugador 1 obtiene el objeto; ahora bien, hay equilibrios de Nash en los que el jugador 1 no se lleva el objeto (véase, por ejemplo, $x = (0, v_1 + 1, 0, \ldots, 0)$). $\diamond$

Ejemplo 2.2.5. En la *situación interactiva multietápica* descrita en el Ejemplo 2.1.5 se ve claramente que el único equilibrio de Nash es (ut, DD). Obsérvese que, para encontrar un equilibrio de Nash en un juego en el que los jugadores tienen un conjunto finito de estrategias, basta encontrar una celda de las correspondientes matrices para la cual el pago al primer jugador es el máximo de su columna y el pago al segundo jugador es el máximo de su fila. $\diamond$

Aunque los ejemplos anteriores podrían dar la impresión contraria, no todos los juegos en forma estratégica tienen equilibrios de Nash. Comprobémoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.6. *Pares o nones.*[1] Los jugadores 1 y 2 tienen que escoger simultánea e independientemente un número natural. Si la suma de los números escogidos es par, entonces gana el jugador 1 y si la suma es impar entonces gana el jugador 2. Esencialmente, todo lo que importa para este juego es si el número escogido es par (P) o impar (I) y, por tanto, el juego en forma estratégica que describe esta situación es el que se recoge en la Tabla 2.2.1; claramente, este juego no tiene equilibrios de Nash. $\diamond$

	P	I
P	$1,-1$	$-1,1$
I	$-1,1$	$1,-1$

Tabla 2.2.1: El juego de pares o nones.

A continuación vamos a presentar el teorema de Nash, que da una condición suficiente para la existencia de equilibrios de Nash en un juego en forma estratégica. Para enunciar y demostrar el teorema de Nash debemos introducir algunos conceptos y resultados de análisis de correspondencias. Una introducción más completa a este tema y la demostración de los resultados que aquí sólo enunciamos pueden encontrarse en Ichiishi (1983) y González-Díaz y otros (2010).

Definición 2.2.2. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$.

1) Una **correspondencia** F de X en Y es una aplicación de X en 2^Y (la clase de todos los subconjuntos de Y).

2) Se dice que una correspondencia F es **semicontinua superiormente** si para toda sucesión $\{x^k\} \subset X$ que converge a $x \in X$ y todo abierto G de Y que contiene a $F(x)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F(x^k) \subset G$ para todo $k \geq k_0$.[2]

3) Se dice que una correspondencia F es **no vacía, cerrada o convexa** si, para todo $x \in X$, $F(x)$ es un subconjunto de Y no vacío, cerrado o convexo, respectivamente.

4) Una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ es **cuasi-cóncava** si para todo $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq r\}$ es convexo o, equivalentemente, si

[1] Este es un juego que aparece frecuentemente en la literatura. En inglés se le conoce como *matching pennies*. En español es común llamarle como lo hacemos nosotros porque es esencialmente idéntico al popular juego de pares o nones.

[2] La definición de correspondencia semicontinua superiormente generaliza la de aplicación continua.

para cualesquiera $x, \hat{x} \in X$ y para todo $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)\hat{x}) \geq \min\{f(x), f(\hat{x})\}$. Claramente la concavidad implica cuasi-concavidad ya que la concavidad requiere que $f(\alpha x + (1-\alpha)\hat{x}) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(\hat{x})$ y $\alpha f(x) + (1-\alpha) f(\hat{x}) \geq \min\{f(x), f(\hat{x})\}$.

Teorema 2.2.1 (Teorema del punto fijo de Kakutani)**.** *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y compacto y sea F una correspondencia de X en X no vacía, semicontinua superiormente, cerrada y convexa. Entonces, F tiene al menos un punto fijo, es decir, existe $x \in X$ tal que $x \in F(x)$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de Nash.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Nash)**.** *Sea $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ un juego en forma estratégica que cumple las siguientes condiciones para todo $i \in N$:*

1) X_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$ no vacío, convexo y compacto.

2) H_i es continua.

3) Para todo $\bar{x}_{-i}$, la función de x_i dada por $H_i(\bar{x}_{-i}, x_i)$ es cuasi-cóncava en X_i.

Entonces, G tiene al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Tomemos la correspondencia $B : X \to X$ definida por $B(x) = \prod_{i \in N} B_i(x_{-i})$ donde, para todo $i \in N$,

$$B_i(x_{-i}) = \{x_i' \, : \, H_i(x_{-i}, x_i') \geq H_i(x_{-i}, \hat{x}_i), \; \forall \hat{x}_i \in X_i\},$$

es decir, es el conjunto de mejores respuestas de i a x_{-i}. Veamos que, para cada $i \in N$, B_i cumple las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani.

- *No vacía.* Es inmediato ya que toda función continua definida en un compacto alcanza su máximo.
- *Cerrada.* Es también inmediato por la continuidad de las funciones de pago y la compacidad del conjunto de estrategias.
- *Convexa.* Sean $x_{-i} \in X_{-i}$ y $\hat{x}_i \in B_i(x_{-i})$. Sea $r = H_i(x_{-i}, \hat{x}_i)$. Entonces se puede escribir $B_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i \, : \, H_i(x_{-i}, x_i) \geq r\}$. Aplicando la cuasi-concavidad de H_i se tiene que B_i es convexa.

- *Semicontinua superiormente.* Procederemos por reducción al absurdo y para ello supongamos que B_i no es semicontinua superiormente. Entonces existe una sucesión $\{x_{-i}^k\} \subset X_{-i}$ que converge a $\bar{x}_{-i} \in X_{-i}$ y un abierto $B^* \subset X_i$ con $B_i(\bar{x}_{-i}) \subset B^*$ y cumpliendo que para todo $k_0 \in \mathbb{N}$ existe $k \geq k_0$ tal que $B_i(x_{-i}^k) \not\subset B^*$. Esto implica que existe una sucesión $\{\hat{x}_i^m\} \subset X_i$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\hat{x}_i^m \in B_i(x_{-i}^m) \backslash B^*$. Ahora, como X_i es compacto, $\{\hat{x}_i^m\}$ tiene una subsucesión convergente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{\hat{x}_i^m\}$ converge y sea $x_i^0 \in X_i$ su límite. Ya que B^* es un abierto, $X_i \backslash B^*$ es un cerrado y por tanto $x_i^0 \in X_i \backslash B^*$, con lo que $x_i^0 \notin B_i(\bar{x}_{-i})$ (puesto que $B_i(\bar{x}_{-i}) \subset B^*$). Ahora, para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x_i \in X_i$, $H_i(x_{-i}^m, \hat{x}_i^m) \geq H_i(x_{-i}^m, x_i)$ pues $\hat{x}_i^m \in B_i(x_{-i}^m)$. Tomando límites y usando la continuidad de H_i se tiene que, para todo $x_i \in X_i$, $H_i(\bar{x}_{-i}, x_i^0) \geq H_i(\bar{x}_{-i}, x_i)$. Por tanto $x_i^0 \in B_i(\bar{x}_{-i})$, con lo que se llega a una contradicción.

Se tiene entonces que B satisface las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani y que, por tanto, tiene un punto fijo. Ahora bien, si x es un punto fijo de B, entonces x es un equilibrio de Nash del juego G. $\square$

Obsérvese que ninguno de los juegos de los ejemplos tratados hasta ahora está en las condiciones del teorema de Nash. Sin embargo, la condición suficiente que nos da este resultado se puede aplicar a una importante clase de juegos, como veremos en las secciones siguientes.

2.3. Juegos Bipersonales de Suma Nula

Muchos de los primeros trabajos de teoría de juegos se concentraron en una clase particular de juegos en forma estratégica: los *juegos bipersonales de suma nula*. Tales juegos tienen la particularidad de que los dos jugadores involucrados tienen intereses totalmente contrapuestos.

Definición 2.3.1. Un **juego bipersonal de suma nula** es un juego en forma estratégica $G = (X, Y, H_1, H_2)$ tal que para todo perfil de estrategias $(x, y) \in X \times Y$, $H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0$.

Para caracterizar un juego bipersonal de suma nula es suficiente dar la función de pago de uno de los jugadores; habitualmente se da la del jugador 1 y se denota por H. De esta forma y para simplificar se suele decir que G es la terna (X, Y, H). En esta sección supondremos también que H está acotada en $X \times Y$.

Los juegos bipersonales de suma nula representan situaciones en las que los jugadores tienen intereses totalmente contrapuestos de forma que si el jugador 1 prefiere (x, y) a (x', y'), entonces el otro jugador prefiere (x', y') a (x, y). John von Neumann fue quien primero analizó los juegos bipersonales de suma nula y quien introdujo los siguientes conceptos.

Definición 2.3.2. Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula.

- Para cada $x \in X$, $\Lambda(x) = \inf_{y \in Y} H(x, y)$. $\Lambda(x)$ es la mínima ganancia que puede obtener el jugador 1 si utiliza x.
- El **valor inferior** de G, denotado por λ, está dado por:

  $$\lambda = \sup_{x \in X} \Lambda(x),$$

  y representa el pago que el jugador 1 puede garantizarse por sí mismo en el juego G.
- Para cada $y \in Y$, $\Gamma(y) = \sup_{x \in X} H(x, y)$. $\Gamma(y)$ es la máxima pérdida que puede tener el jugador 2 si utiliza y.
- El **valor superior** de G, denotado por γ, está dado por:

  $$\gamma = \inf_{y \in Y} \Gamma(y),$$

  y representa la pérdida que como mucho tendrá el jugador 2 en el juego G, es decir, el pago que el jugador 1 obtendrá como mucho en el juego G.

Las interpretaciones que acabamos de hacer sugieren que el valor inferior de un juego bipersonal de suma nula es menor o igual que su valor superior. Efectivamente, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$, $\Lambda(x) = \inf_{y \in Y} H(x, y) \leq \sup_{x \in X} H(x, y) = \Gamma(y)$. Por lo tanto, $\lambda \leq \gamma$.

Definición 2.3.3. Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula. Decimos que G está **estrictamente determinado** (o que tiene **valor**) si sus valores inferior y superior coinciden, es decir, $\lambda = \gamma$. En ese caso, decimos que $V = \lambda = \gamma$ es el valor del juego.

El valor es el pago que el jugador 1 se puede garantizar por sí mismo y el opuesto del pago que el jugador 2 se puede garantizar por sí mismo. En aquellos juegos bipersonales de suma nula que no tienen valor, el problema no está estrictamente determinado en el sentido de que no está claro cómo se va a repartir $\gamma - \lambda$.

Definición 2.3.4. Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula con valor V.

- Se dice que $x \in X$ es una *estrategia óptima* del jugador 1 si $V = \Lambda(x)$.
- Se dice que $y \in Y$ es una *estrategia óptima* del jugador 2 si $V = \Gamma(y)$.

Los siguientes ejemplos ilustran las diversas posibilidades que pueden darse en relación con el valor y las estrategias óptimas de un juego bipersonal de suma nula.

Ejemplo 2.3.1. *Un juego bipersonal de suma nula finito con valor y estrategias óptimas de los jugadores.* Consideremos el juego bipersonal de suma nula dado por la siguiente tabla.

	L	R
U	2	2
D	1	3

Claramente, $\Lambda(U) = 2$ y $\Lambda(D) = 1$, por lo que $\lambda = 2$. Por otro lado, $\Gamma(L) = 2$ y $\Gamma(R) = 3$, por lo que $\gamma = 2$. En consecuencia, el valor de este juego es 2 y, además, U y L son estrategias óptimas de los jugadores uno y dos, respectivamente. Notemos que si un juego finito bipersonal de suma nula tiene valor, entonces ambos jugadores tienen estrategias óptimas. $\diamond$

Ejemplo 2.3.2. *Un juego bipersonal de suma nula infinito con valor y estrategias óptimas de los jugadores.* Consideremos el juego bipersonal de suma nula infinito $([0,1],[0,1],H)$ donde, para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, $H(x,y) = 4xy - 2x - 2y + 1$.[3] Por tanto,

$$\Lambda(x) = \inf_{y\in[0,1]} [(4x-2)y - 2x + 1] = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1/2 \\ 0 & \text{si } x = 1/2 \\ 1-2x & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

y, en consecuencia, $\lambda = 0$. De forma análoga,

$$\Gamma(y) = \sup_{x\in[0,1]} [(4y-2)x - 2y + 1] = \begin{cases} 1-2y & \text{si } y < 1/2 \\ 0 & \text{si } y = 1/2 \\ 2y-1 & \text{si } y > 1/2 \end{cases}$$

[3] Este juego es la extensión mixta del juego de pares o nones (ver Sección 2.4).

y, por tanto, $\gamma = 0$. De esta forma el valor del juego es cero, y $x = y = 1/2$ son las únicas estrategias óptimas de los jugadores uno y dos, respectivamente. $\diamond$

Ejemplo 2.3.3. *Un juego bipersonal de suma nula infinito que no tiene valor.* Consideremos el juego bipersonal de suma nula

$$([0,1],[0,1],H)$$

tal que, para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, $H(x,y) = \frac{1}{1+(x-y)^2}$. Entonces,

$$\Lambda(x) = \inf_{y\in[0,1]} \frac{1}{1+(x-y)^2} = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-1)^2} & \text{si } x \leq 1/2 \\ \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

y por tanto $\lambda = \Lambda(1/2) = 4/5$. Por otro lado, para todo $y \in [0,1]$,

$$\Gamma(y) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{1+(x-y)^2} = 1.$$

Así, $\lambda < \gamma$ y el juego no está estrictamente determinado. $\diamond$

Ejemplo 2.3.4. *Un juego bipersonal de suma nula infinito con valor y estrategias óptimas para el jugador 1.* Consideremos el juego bipersonal de suma nula $((0,1),(0,1),H)$ tal que para todo $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, $H(x,y) = xy$. Es fácil ver que $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in (0,1)$ y, entonces, $\lambda = 0$. Además, $\Gamma(y) = y$ para todo $y \in (0,1)$ y $\gamma = 0$. Por tanto, el juego está estrictamente determinado, su valor es cero, el conjunto de estrategias óptimas del jugador 1 es $(0,1)$ y el jugador 2 no tiene estrategias óptimas. $\diamond$

Ejemplo 2.3.5. *Un juego bipersonal de suma nula infinito con valor y sin estrategias óptimas para los jugadores.* Consideremos el juego bipersonal de suma nula $((0,1),(1,2),H)$ tal que, para todo $(x,y) \in (0,1) \times (1,2)$, $H(x,y) = xy$. Es fácil ver que $\Lambda(x) = x$ para todo $x \in (0,1)$ y, entonces, $\lambda = 1$. Además, $\Gamma(y) = y$ para todo $y \in (1,2)$ y $\gamma = 1$. Por tanto, el juego está estrictamente determinado, su valor es uno, y los jugadores no tienen estrategias óptimas. $\diamond$

Hasta ahora no hemos hablado de equilibrios de Nash en el ámbito de los juegos bipersonales de suma nula, a pesar de que éstos son juegos en forma estratégica. Podríamos, pues, preguntarnos cuál es la relación entre las aproximaciones de Nash y de von Neumann en este contexto. A continuación tratamos esta cuestión.

Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula. Un equilibrio de Nash de G es un par $(x, y) \in X \times Y$ tal que, para todo $x' \in X$ y todo $y' \in Y$,

$$H(x, y) \geq H(x', y),$$

$$-H(x, y) \geq -H(x, y'),$$

o, equivalentemente,

$$H(x', y) \leq H(x, y) \leq H(x, y').$$

Un punto $(x, y) \in X \times Y$ que satisface la condición anterior se denomina punto de silla de la función H. Queda, pues, claro que en juegos bipersonales de suma nula, un equilibrio de Nash y un punto de silla de la función de pago del jugador 1 son lo mismo. Los dos resultados siguientes muestran que la teoría de Nash para juegos en forma estratégica es una generalización de la teoría de von Neumann para juegos bipersonales de suma nula.

Proposición 2.3.1. *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula y supongamos que $(x, y) \in X \times Y$ es un equilibrio de Nash de G. Entonces se cumple:*

1) G está estrictamente determinado.

2) x es una estrategia óptima del jugador 1 e y es una estrategia óptima del jugador 2.

3) $V = H(x, y)$.

Demostración. En las hipótesis de la proposición se tiene que:

- $\lambda = \sup_{x' \in X} \Lambda(x') \geq \Lambda(x) = \inf_{y' \in Y} H(x, y') \geq H(x, y)$.
- $H(x, y) \geq \sup_{x' \in X} H(x', y) = \Gamma(y) \geq \inf_{y' \in Y} \Gamma(y') \geq \gamma$.

Como $\lambda \leq \gamma$, entonces todas las desigualdades anteriores son igualdades y se tiene la demostración. $\square$

Proposición 2.3.2. *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula. Supongamos que G está estrictamente determinado y que $x \in X$ e $y \in Y$ son estrategias óptimas de los jugadores uno y dos, respectivamente. Entonces (x, y) es un equilibrio de Nash de G y $V = H(x, y)$.*

Demostración. En las hipótesis de la proposición, para todo $x' \in X$ y todo $y' \in Y$,

$$H(x', y) \leq \sup_{x'' \in X} H(x'', y) = \Gamma(y) = V = \Lambda(x) = \inf_{y'' \in Y} H(x, y'') \leq H(x, y').$$

Tomando $x' = x$ e $y' = y$ se obtiene que $V = H(x, y)$ y concluye la demostración. □

Observación 2.3.1. Por las proposiciones anteriores, si (x, y) y (x', y') son equilibrios de Nash del juego bipersonal de suma nula G, entonces (x, y') y (x', y) son también equilibrios de Nash de G y, además,

$$H(x, y) = H(x', y') = H(x', y) = H(x, y').$$

Sin embargo, esto no es cierto para cualquier juego bipersonal como veremos, por ejemplo, al estudiar los juegos bimatriciales.

Observación 2.3.2. Un **juego bipersonal de suma constante** es un juego en forma estratégica $G = (X, Y, H_1, H_2)$ tal que, para todo perfil de estrategias $(x, y) \in X \times Y$, $H_1(x, y) + H_2(x, y) = k$, siendo k una constante real. Obviamente, un juego de suma nula es un juego de suma constante con $k = 0$. Sin embargo, desde el punto de vista estratégico, analizar el juego G es lo mismo que analizar el juego de suma nula $G^1 = (X, Y, H_1)$ ya que $(x, y) \in X \times Y$ es un equilibrio de Nash de G si y sólo si es un equilibrio de Nash de G^1.

2.4. Estrategias Mixtas en Juegos Finitos

En lo que queda de este capítulo nos centraremos en la clase de los juegos finitos, que definimos a continuación.

Definición 2.4.1. Un **juego finito** es un juego en forma estratégica

$$G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$$

cuyos jugadores tienen conjuntos de estrategias finitos, es decir, tal que $|X_i| = m_i$ para todo $i \in N$ (siendo cada m_i un número natural).

El teorema de Nash visto anteriormente no se puede aplicar a los juegos finitos, ya que los conjuntos de estrategias no son convexos. Por otro lado, ya hemos visto un juego finito sin equilibrios de Nash: el juego de pares o nones. Sin embargo, hay un “ingenio teórico” que nos permite extender el juego y garantizar la existencia de equilibrios de Nash en la versión extendida de todo juego finito: tal ingenio consiste en aumentar las posibilidades estratégicas de los jugadores y considerar que no sólo tienen sus estrategias iniciales (que pasaremos a denominar *estrategias puras*), sino que también pueden escoger loterías sobre sus conjuntos finitos de estrategias puras. Esta extensión del juego original se llama *extensión mixta* y las estrategias de los jugadores en la extensión mixta se llaman *estrategias mixtas*.

Aunque nos hemos referido a la extensión mixta de un juego como un "ingenio teórico", las estrategias mixtas surgen de modo natural en muchas situaciones en la práctica. Vamos a discutir brevemente esta cuestión en el ejemplo siguiente (y, más tarde, en otras partes de este libro), en el que introducimos informalmente la extensión mixta de un juego en forma estratégica. Después del ejemplo daremos una definición formal. Para una discusión más detallada de la importancia, interpretaciones y relevancia de las estrategias mixtas se puede consultar Osborne y Rubinstein (1994).

Ejemplo 2.4.1. Consideremos de nuevo el *juego de pares o nones* y supongamos ahora que los jugadores, además de escoger P o I, pueden escoger también una lotería L que selecciona P con probabilidad $1/2$ e I con probabilidad $1/2$. Supongamos también que los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern y, por tanto, sus funciones de pago se pueden extender al conjunto de perfiles de estrategias mixtas calculando sus correspondientes esperanzas matemáticas. El juego resultante viene dado por la Tabla 2.4.1.

	P	I	L
P	$1,-1$	$-1,1$	$0,0$
I	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$
L	$0,0$	$0,0$	$0,0$

Tabla 2.4.1: El juego de pares o nones modificado.

Para calcular las funciones de pago del juego extendido hemos tenido en cuenta que, dado que estamos en un juego en forma estratégica, los jugadores eligen sus loterías independientemente. Así por ejemplo:

$$H_1(L,L) = \frac{1}{4}H_1(P,P) + \frac{1}{4}H_1(P,I) + \frac{1}{4}H_1(I,P) + \frac{1}{4}H_1(I,I) = 0.$$

Observemos que este juego tiene un equilibrio de Nash: (L,L). La extensión mixta del juego de partida es un nuevo juego en forma estratégica en el que los jugadores pueden escoger cualquier lotería sobre $\{P,I\}$. Es fácil comprobar que el único equilibrio de Nash de este juego es (L,L). Una posible interpretación de esto es la siguiente. En el juego de pares o nones es muy importante para cada uno de los jugadores que el otro no tenga ninguna información sobre si elegirá finalmente P o I. Para ello, lo mejor es que ni él mismo lo sepa, lo cual puede llevarse a efecto seleccionando la estrategia L. $\diamond$

Definición 2.4.2. Sea $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ un juego finito. La **extensión mixta** de G es el juego en forma estratégica

$$E(G) = (S_1, \ldots, S_n, H_1, \ldots, H_n)$$

donde, para cada jugador $i \in N$,

1) $S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{X_i} \,:\, s_i(x_i) \geq 0\ \forall x_i \in X_i,\ \sum_{x_i \in X_i} s_i(x_i) = 1\}$ y

2) $H_i(s) = \sum_{x \in X} H_i(x) s(x)$, para todo $s \in S$, donde $S = \prod_{i \in N} S_i$ y $s(x)$ denota el producto $s_1(x_1) \times \ldots \times s_n(x_n)$.

Observación 2.4.1. La extensión mixta de un juego finito sólo tiene sentido cuando los jugadores tienen preferencias sobre el conjunto de loterías definidas sobre el conjunto de posibles resultados y sus funciones de utilidad son funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern (ver la definición de juego en forma estratégica y la discusión posterior).

Observación 2.4.2. $E(G)$ es una extensión de G en el sentido de que, para todo jugador i, cada elemento de X_i, o estrategia pura, puede ser identificado con un elemento de S_i, o estrategia mixta, por lo que podemos escribir $X_i \subset S_i$. Por otro lado, las funciones de pago de los jugadores en $E(G)$ son extensiones de las funciones de pago de los jugadores en G.

Observación 2.4.3. El conjunto de estrategias del jugador i lo vamos a identificar en ocasiones con el símplex de $\mathbb{R}^{m_i}$ dado por:

$$\{s_i \in \mathbb{R}^{m_i} \,:\, s_i^k \geq 0\ \forall k \in \{1, \ldots, m_i\},\ \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k = 1\}.$$

Observación 2.4.4. La extensión mixta de un juego finito cumple las hipótesis del teorema de Nash y, por lo tanto, un corolario de tal teorema es que la extensión mixta de un juego finito tiene siempre, al menos, un equilibrio de Nash. De hecho, éste fue el resultado probado por John Nash en su artículo original.

Para terminar esta sección daremos algunas definiciones y resultados básicos en relación con los juegos finitos.

Definición 2.4.3. Sea $E(G)$ la extensión mixta de un juego finito y sean $s_i \in S_i$, una estrategia del jugador i, y $s \in S$ un perfil de estrategias.

1) El **soporte** de s_i es el conjunto $C(s_i)$ dado por:

$$\{x_i \in X_i \,:\, s_i(x_i) > 0\}.$$

2) El **soporte** de s es el conjunto $C(s)$ dado por:

$$\prod_{i\in N} C(s_i) = \{x \in X \,:\, s(x) > 0\}.$$

3) Se dice que s_i es **completamente mixta** si $C(s_i) = X_i$. Se dice que s es completamente mixta si $C(s) = X$ o, equivalentemente, si s_i es completamente mixta para todo $i \in N$.

4) El **conjunto de mejores respuestas puras** del jugador i a s_{-i} es el conjunto

$$PB_i(s_{-i}) = \{x_i \in X_i \,:\, H_i(s_{-i}, x_i) \geq H_i(s_{-i}, x'_i)\ \forall x'_i \in X_i\}.$$

Usaremos la notación $PB(s) = \prod_{i\in N} PB_i(s_{-i})$.

Proposición 2.4.1. *En la extensión mixta de un juego finito, para todo $i \in N$, $s_i \in S_i$ y $s \in S$, se cumple:*

1) $s_i \in B_i(s_{-i})$ si y sólo si $C(s_i) \subset PB_i(s_{-i})$.

2) s es un equilibrio de Nash de $E(G)$ si y sólo si $C(s) \subset PB(s)$.

3) s es un equilibrio de Nash de $E(G)$ si y sólo si $H_i(s) \geq H_i(s_{-i}, x_i)$ para todo $x_i \in X_i$ y todo $i \in N$.

Demostración. Es fácil ver que $H_i(s) = \sum_{x_i\in X_i} H_i(s_{-i}, x_i)s_i(x_i)$, con lo que la proposición se sigue inmediatamente. □

Obsérvese que el apartado 3) de la proposición anterior implica que si un perfil de estrategias es un equilibrio de Nash de un juego finito G también lo es de $E(G)$.

2.5. Juegos Bimatriciales

Definición 2.5.1. Un **juego bimatricial** es la extensión mixta de un juego bipersonal finito (M, N, H_1, H_2), donde $M = \{1, \dots, m\}$ y $N = \{1, \dots, n\}$. Por tanto, un juego bimatricial es una 4-tupla (S_m, S_n, H_1, H_2) tal que:

1) $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m \, : \, x_i \geq 0 \; \forall i \in M, \; \sum_{i \in M} x_i = 1\}$.

2) $S_n = \{y \in \mathbb{R}^n \, : \, y_j \geq 0 \; \forall j \in N, \; \sum_{j \in N} y_j = 1\}$.

3) Para todo $(x, y) \in S_m \times S_n$,
$$H_1(x, y) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} H_1(i, j) x_i y_j = x A y^t,$$
donde $A = (H_1(i, j))_{i \in M, j \in N}$ es una matriz $m \times n$.

4) Para todo $(x, y) \in S_m \times S_n$,
$$H_2(x, y) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} H_2(i, j) x_i y_j = x B y^t,$$
donde $B = (H_2(i, j))_{i \in M, j \in N}$ es una matriz $m \times n$.

Nótese que para caracterizar un juego bimatricial es suficiente conocer el par de matrices (A, B).

La clase de los juegos bimatriciales ha sido muy estudiada. Hay muchos resultados disponibles en relación al concepto de equilibrio de Nash en juegos bimatriciales, e incluso hay algoritmos para buscar equilibrios de Nash en un juego bimatricial. El más conocido de tales algoritmos es el introducido en Lemke y Howson (1964). Parthasarathy y Raghavan (1971) es un excelente texto sobre juegos bipersonales que, a pesar de ser relativamente antiguo, sigue siendo una importante referencia en este tema.

En el caso de los juegos bimatriciales 2×2 resulta especialmente sencillo determinar todos sus equilibrios de Nash. Dado (A, B), un juego bimatricial $m \times n$, podemos considerar los siguientes conjuntos:
$$B_1 = \{(x, y) \in S_m \times S_n \, : \, H_1(x, y) \geq H_1(x', y) \; \forall x' \in S_m\},$$
$$B_2 = \{(x, y) \in S_m \times S_n \, : \, H_2(x, y) \geq H_2(x, y') \; \forall y' \in S_n\}.$$
El conjunto de equilibrios de Nash del juego es $B_1 \cap B_2$. Cuando tenemos $m = n = 2$, podemos identificar las estrategias de los jugadores con sus primeras componentes. En tal caso, B_1 y B_2 son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y su intersección se puede obtener geométricamente. A continuación vamos a ilustrar este procedimiento con un par de ejemplos.

Ejemplo 2.5.1. *La batalla de los sexos.* Una pareja debe decidir el espectáculo al que irá después de cenar. Él (el primer jugador) prefiere ir al cine, mientras que ella (el segundo jugador) prefiere ir al teatro. Ambos prefieren, en cualquier caso, ir juntos al espectáculo menos preferido que solos a su primera opción. El juego en forma estratégica correspondiente a esta situación aparece en la Tabla 2.5.1.

	Cine	Teatro
Cine	$2,1$	$0,0$
Teatro	$-1,-1$	$1,2$

Tabla 2.5.1: La batalla de los sexos.

La batalla de los sexos es un problema de coordinación: hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras (C,C) y (T,T), pero el primer jugador prefiere (C,C) mientras que el segundo prefiere (T,T). Para ilustrar el procedimiento que describimos arriba vamos a calcular a continuación todos los equilibrios de Nash de la extensión mixta de la batalla de los sexos. Observemos que los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores 1 y 2 se pueden identificar con el intervalo [0,1], con lo que una estrategia del jugador 1 será $x \in [0,1]$ y una estrategia del jugador 2 será $y \in [0,1]$ (aunque realmente x representa la estrategia $(x, 1-x)$ e y representa la estrategia $(y, 1-y)$). Vamos a calcular las funciones de pago en la extensión mixta del juego:

$$H_1(x,y) = xAy^t = (x, 1-x)A(y, 1-y)^t = x(4y-1) + (1-2y),$$

$$H_2(x,y) = xBy^t = (x, 1-x)B(y, 1-y)^t = y(4x-3) + (2-2x).$$

Consideremos primero $H_1(x,y)$ y obtengamos B_1:

1) Si $y < 1/4$, la función es decreciente en x porque su pendiente es negativa; por tanto, el mejor pago se obtiene con $x = 0$.

2) Si $y = 1/4$, la función es constante en x porque su pendiente es nula; por tanto, el mejor pago se obtiene para cualquier $x \in [0,1]$.

3) Si $y > 1/4$, la función es creciente en x porque su pendiente es positiva; por tanto, el mejor pago se obtiene con $x = 1$.

En definitiva:

$$B_1 = \{(0,y) : y \in [0, 1/4)\} \cup \{(x, 1/4) : x \in [0,1]\} \cup \{(1,y) : y \in (1/4, 1]\}.$$

Análogamente consideremos $H_2(x,y)$ y obtengamos B_2:

1) Si $x < 3/4$, la función es decreciente en y porque su pendiente es negativa; por tanto, el mejor pago se obtiene con $y = 0$.

2) Si $x = 3/4$, la función es constante en y porque su pendiente es nula; por tanto, el mejor pago se obtiene para cualquier $y \in [0, 1]$.

3) Si $x > 3/4$, la función es creciente en y porque su pendiente es positiva; por tanto, el mejor pago se obtiene con $y = 1$.

En consecuencia:

$$B_2 = \{(x, 0) : x \in [0, 3/4)\} \cup \{(3/4, y) : y \in [0, 1]\} \cup \{(x, 1) : x \in (3/4, 1]\}.$$

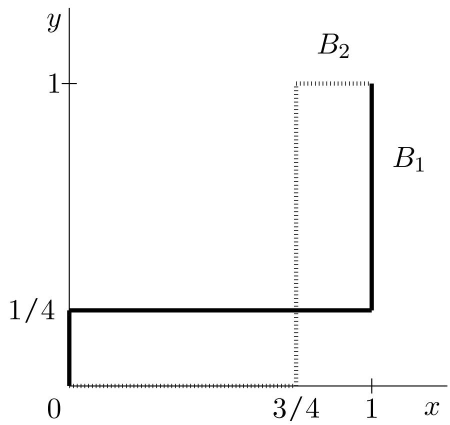


Figura 2.5.1: B_1 y B_2 en la batalla de los sexos.

En la Figura 2.5.1 vemos la representación de B_1 y B_2. En vista de tal representación, es claro que $B_1 \cap B_2 = \{(0, 0)\} \cup \{(3/4, 1/4)\} \cup \{(1, 1)\}$ y que el conjunto de equilibrios de Nash del juego es $\{((0, 1), (0, 1)) = (T, T)\} \cup \{((3/4, 1/4), (1/4, 3/4))\} \cup \{((1, 0), (1, 0)) = (C, C)\}$. $\diamond$

Ejemplo 2.5.2. *El juego de la instigación.* Un ladrón debe decidir si robar o no en un almacén durante la noche. El vigilante que trabaja para el propietario del almacén debe decidir si dormir o no mientras se supone que debe estar vigilando el almacén. Si el ladrón intenta robar y el vigilante se encuentra durmiendo, el ladrón conseguirá una joya de mucho valor (J) y el vigilante será castigado ($-F$). Si el ladrón intenta robar y el vigilante no está durmiendo, el ladrón será enviado a prisión ($-P$) y el vigilante será recompensado (M). Si el ladrón no intenta robar y el vigilante duerme, éste habrá descansado (R). Supongamos que J, F, P, M y R son números reales positivos. El juego en forma estratégica asociado con esta situación es el dado por la Tabla 2.5.2. Identificaremos una estrategia del ladrón

	Dormir	No dormir
Robar	$J, -F$	$-P, M$
No robar	$0, R$	$0, 0$

Tabla 2.5.2: El juego de la instigación.

(jugador 1) como la probabilidad de que vaya a robar ($x \in [0,1]$) y una estrategia del vigilante (jugador 2) con la probabilidad de que duerma ($y \in [0,1]$). Vamos a calcular las funciones de pago de la extensión mixta del juego:

- $H_1(x,y) = xAy^t = (x, 1-x)A(y, 1-y)^t = x[(J+P)y - P]$,
- $H_2(x,y) = xBy^t = (x, 1-x)B(y, 1-y)^t$ que, en este caso, se reduce a $y[(-F-M-R)x + R] + Mx$.

Consideremos primero $H_1(x,y)$ y obtengamos B_1:

1) Si $y < P/(J+P)$, la función es decreciente en x porque su pendiente es negativa; por tanto, el mejor pago se obtiene con $x = 0$.

2) Si $y = P/(J+P)$, la función es constante en x porque su pendiente es nula; por tanto, el mejor pago se obtiene para cualquier $x \in [0,1]$.

3) Si $y > P/(J+P)$, la función es creciente en x porque su pendiente es positiva; por tanto, el mejor pago se obtiene con $x = 1$.

Consideremos ahora $H_2(x,y)$ y obtengamos B_2:

1) Si $x > R/(F+M+R)$, la función es decreciente en y porque su pendiente es negativa; por tanto, el mejor pago se obtiene con $y = 0$.

2) Si $x = R/(F+M+R)$, la función es constante en y porque su pendiente es nula; por tanto, el mejor pago se obtiene para cualquier $y \in [0,1]$.

3) Si $x < R/(F+M+R)$, la función es creciente en y porque su pendiente es positiva; por tanto, el mejor pago se obtiene con $y = 1$.

En definitiva, B_1 y B_2 vienen dados por:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{(0,y) : y \in [0, \frac{P}{P+J})\} \cup \{(x, \frac{P}{P+J}) : x \in [0,1]\} \\
&\cup \{(1,y) : y \in (\frac{P}{P+J}, 1]\}, \\
B_2 &= \{(x,1) : x \in [0, \frac{R}{R+F+M})\} \cup \{(\frac{R}{R+F+M}, y) : y \in [0,1]\} \\
&\cup \{(x,0) : x \in (\frac{R}{R+F+M}, 1]\}.
\end{aligned}
$$

En la Figura 2.5.2 hemos representado B_1 y B_2. Claramente, el conjunto

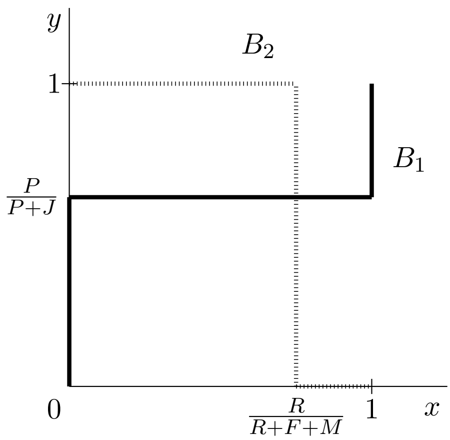


Figura 2.5.2: B_1 y B_2 en el juego de la instigación.

$B_1 \cap B_2$ viene dado por $\{(\frac{R}{R+F+M}, \frac{P}{P+J})\}$ y, por lo tanto, el conjunto de los equilibrios de Nash del juego es

$$\{((\frac{R}{R+F+M}, \frac{F+M}{R+F+M}), (\frac{P}{P+J}, \frac{J}{P+J}))\}.$$

Un hecho que llama la atención en este ejemplo es que la estrategia en equilibrio del ladrón no depende de la recompensa o del castigo que podría llegar a tener (J o P) sino de las recompensas o castigos del vigilante (M, R o F). Por lo tanto, si un regulador externo que desee disminuir la probabilidad de que un ladrón robe debe escoger entre aumentar el castigo para el ladrón (P) o aumentar los incentivos y/o castigos para el vigilante (M y/o F) debería tener en cuenta los resultados que recoge la Tabla 2.5.3. Este ejemplo también nos permite presentar una nueva interpretación de las estrategias mixtas. Obsérvese que el juego de la instigación es un problema

INSTIGACIÓN	CONSECUENCIAS
Aumentar P, el castigo para el ladrón	El ladrón roba lo mismo El vigilante duerme más
Aumentar M y/o F, el incentivo y/o el castigo para el vigilante	El ladrón roba menos El vigilante duerme lo mismo

Tabla 2.5.3: Resultados del juego de instigación.

de los denominados de "inspección". El "ladrón" se puede ver como alguien que decide si actuar o no de acuerdo con la ley (por ejemplo una persona que tiene que pagar impuestos), y el "vigilante" como un inspector. Incluso podemos ir más allá y ver al jugador 1 como una población de contribuyentes y al jugador 2 como una población de inspectores. De esta forma, una estrategia mixta del jugador 1 se puede pensar como la proporción de contribuyentes que no actúan dentro de la ley y una estrategia mixta del jugador 2 como la proporción de inspectores que no realizan adecuadamente su trabajo. En este contexto, si el regulador es el Gobierno de una nación, su objetivo es conseguir que los contribuyentes no defrauden en el pago de impuestos. Para ello, de acuerdo al análisis anterior, el Gobierno debería acentuar las medidas encaminadas a que los inspectores hagan bien su trabajo, más que las dirigidas a castigar a los infractores. $\diamond$

A pesar de que la clase de los juegos bimatriciales 2×2 es un subconjunto muy pequeño del conjunto de los juegos en forma estratégica, lo cierto es que puede ser usada para describir y analizar una amplia variedad de situaciones reales surgidas en la política, la economía, la biología, la literatura, la sociología, la antropología, etc. En este sentido, el dilema del prisionero es un juego especialmente emblemático y ha sido utilizado con profusión por los investigadores en ciencias sociales. A continuación mostramos un ejemplo para ilustrar la afirmación anterior.

Ejemplo 2.5.3. Este ejemplo, que muestra una aplicación del dilema del prisionero en el campo de la psicología experimental, está tomado de Deutsch (1958, 1960) y de Straffin (1993). En los años 50 un grupo de psicólogos creó el test F-escala para cuantificar la tendencia de una persona a adherirse a sistemas ideológicos autoritarios. En los dos trabajos mencionados, Deutsch estudió la conexión entre la F-escala y los conceptos habituales de confianza, suspicacia y fiabilidad (ya que las personas muy suspicaces o muy poco fidedignas podrían tal vez tender con más fuerza a adherirse a sistemas ideológicos autoritarios). Para ello, pidió a 55 alumnos de un curso introductorio de psicología que jugaran la siguiente versión modificada del dilema del prisionero. El jugador 1 elige entre ND y D. Entonces, el jugador 2 escoge entre ND y D tras observar la elección del jugador 1. Los pagos a los jugadores son los dados en la Tabla 2.5.4. Cada estudiante

	ND	D
ND	$9, 9$	$-10, 10$
D	$10, -10$	$-9, -9$

Tabla 2.5.4: Descripción de los pagos.

debía jugar el juego dos veces, una como jugador 1 y otra como jugador 2. Los estudiantes no sabían en ningún caso quién era el otro jugador. De hecho, cuando un estudiante era el jugador 2, el jugador 1 era "ficticio" (era el propio experimentador) y siempre escogía ND. Deutsch utilizó las siguientes definiciones para su análisis:

Confiado: es escoger ND cuando se actúa como jugador 1.

Suspicaz: es escoger D cuando se actúa como jugador 1.

Fidedigno: es escoger ND cuando se actúa como jugador 2 y el jugador 1 eligió ND.

No fidedigno: es escoger D cuando se actúa como jugador 2 y el jugador 1 eligió ND.

Para realizar un análisis estadístico de los resultados, Deutsch dividió las puntuaciones obtenidas en la F-escala en tres categorías: baja, media y alta. Las correspondientes tablas de contingencia se muestran en las Tablas 2.5.5 y 2.5.6. Si se utiliza un test χ^2 se puede rechazar con niveles de significa-

	Fidedigno	No fidedigno
Confiado	24	5
Suspicaz	4	22

Tabla 2.5.5: F-scala. Primera tabla de resultados.

	Baja	Media	Alta
Confiado y fidedigno	12	10	2
Suspicaz o no fidedigno	2	7	0
Suspicaz y no fidedigno	0	13	9

Tabla 2.5.6: F-scala. Segunda tabla de resultados.

ción razonables la hipótesis de independencia de las variables cualitativas consideradas en ambos casos. Por todo lo dicho, algunas conclusiones del experimento son las siguientes:

- Cada estudiante tiende a pensar que los otros se comportarán como él mismo se comporta.

- Los estudiantes más suspicaces y menos fidedignos tienden a obtener puntuaciones altas en la F-escala.

Hay un par de observaciones que se deben hacer en relación a este ejemplo. La primera es que, estrictamente hablando, como sólo trata con estrategias puras, el experimento no se enmarca en el contexto de los juegos bimatriciales, sino en el de los juegos bipersonales finitos (recuérdese que un juego bimatricial es la extensión mixta de un juego bipersonal finito). Por otro lado, con los pagos dados en la Tabla 2.5.4, es claro que un jugador racional debe ser suspicaz y no fidedigno. De hecho, las definiciones de confiado, suspicaz, fidedigno y no fidedigno sólo son aceptables desde el punto de vista de la teoría de juegos si los números de la Tabla 2.5.4 describen únicamente ganancias monetarias, pero las verdaderas funciones de utilidad de los jugadores incorporan también consideraciones éticas y psicológicas. $\diamond$

2.6. Juegos Matriciales y Algoritmos

Definición 2.6.1. Un **juego matricial** es la extensión mixta de un juego bipersonal de suma nula finito (M, N, H), donde $M = \{1, \ldots, m\}$ y $N = \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, un juego matricial es una terna (S_m, S_n, H) tal que:

1) $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m \,:\, x_i \geq 0 \;\forall i \in M,\; \sum_{i \in M} x_i = 1\}$.

2) $S_n = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, y_j \geq 0 \;\forall j \in N,\; \sum_{j \in N} y_j = 1\}$.

3) Para todo $(x, y) \in S_m \times S_n$,

$$H(x, y) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} H(i, j) x_i y_j = x A y^t,$$

donde $A = (H(i, j))_{i \in M, j \in N}$ es la matriz $m \times n$ que contiene los pagos del jugador 1.

Obsérvese que para caracterizar un juego matricial es suficiente dar la matriz A.

Obviamente, todo juego matricial puede verse como un juego bimatricial, aunque el recíproco no es cierto. Por tanto, el teorema de Nash implica que todo juego matricial tiene un equilibrio de Nash. Por la Proposición 2.3.1, se tiene entonces que todo juego matricial está estrictamente determinado. Éste es el resultado conocido como **teorema minimax**, que fue probado por John von Neumann en 1928. Aunque nosotros lo estamos presentando como un corolario del teorema de Nash, existen diferentes pruebas directas del teorema minimax, algunas de ellas muy elegantes: una basada en un teorema de separación para conjuntos convexos, una basada en un lema de alternativas para matrices, una basada en un teorema de punto fijo de Brower; incluso hay una que utiliza únicamente el principio de inducción. El lector interesado puede encontrar algunas de estas demostraciones en Owen (1995) y González-Díaz y otros (2010).

Vamos a ver a continuación dos métodos para resolver juegos matriciales (por "resolver un juego matricial" entendemos encontrar su valor y los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores). Comenzamos por un método geométrico para juegos matriciales $2 \times n$. Para describirlo necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.6.1. *Consideremos un juego matricial $m \times n$ dado por la matriz A. Entonces, para todo $x \in S_m$ y todo $y \in S_n$,*

$$\Lambda(x) = \min_{j \in N} xP_j,$$

$$\Gamma(y) = \max_{i \in M} Q_i y^t,$$

donde P_j y Q_i denotan la columna j-ésima y la fila i-ésima de A, respectivamente.

Demostración. Sólo vamos a probar la primera de las igualdades (la segunda se probaría análogamente). Sea $x \in S_m$. Claramente,

$$\Lambda(x) = \inf_{y \in S_n} xAy^t \leq \min_{j \in N} xP_j.$$

Por otro lado, dado $y \in S_n$,

$$xAy^t = \sum_{k \in N} (xP_k) y_k \geq \sum_{k \in N} (\min_{j \in N} xP_j) y_k = \min_{j \in N} xP_j.$$

Por tanto, $\Lambda(x) = \inf_{y \in S_n} xAy^t \geq \min_{j \in N} xP_j$, con lo que se tiene el resultado. □

Consideramos ahora un juego matricial $2 \times n$ dado por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Podemos identificar una estrategia del jugador 1, $x \in S_2$, con su primera componente, y utilizando la proposición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= \max_{x\in[0,1]} \Lambda(x) = \max_{x\in[0,1]} \min_{j\in N}[(x, 1-x)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix}] \\ &= \max_{x\in[0,1]} \min_{j\in N}[a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})x]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para calcular el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 1, será suficiente representar, para cada $j \in N$, los segmentos $\{(x, a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})x) \ : \ x \in [0, 1]\}$, obtener su envoltura inferior y buscar el conjunto de puntos $\bar{x} \in S_m$ que maximiza esa envoltura. La Figura 2.6.1 ilustra este procedimiento.

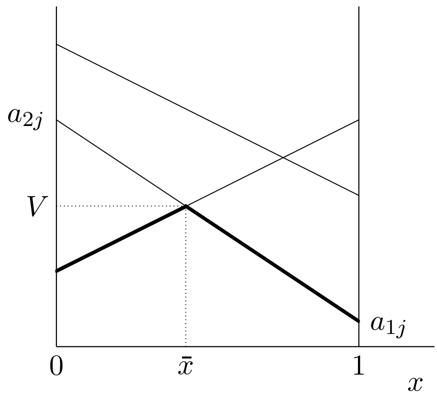


Figura 2.6.1: Resolución gráfica de un juego $2 \times n$.

Ahora, para calcular el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2, debemos tener en cuenta que $y \in S_n$ es una de tales estrategias si y sólo si:

$$\begin{aligned} V = \Gamma(y) &= \max_{x\in[0,1]} H(x, y) \\ &= \max_{x\in[0,1]} xAy^t = \max_{x\in[0,1]} [\sum_{j\in N} [a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})x]y_j]. \end{aligned}$$

En consecuencia, una estrategia óptima del jugador 2 vendrá dada por un elemento de S_n que proporciona una combinación convexa de los segmentos

$\{(x, a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})x) : x \in [0,1]\}$ que se encuentra bajo el segmento $\{(x, V) : x \in [0,1]\}$. A continuación vamos a ilustrar este método con un par de ejemplos.

Ejemplo 2.6.1. Resolvamos el juego matricial dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 2.6.2 están representados los segmentos correspondientes a las columnas de A, $\{(x, 1+x) : x \in [0,1]\}$, $\{(x, 4-2x) : x \in [0,1]\}$, $\{(x, 3) : x \in [0,1]\}$, y su envoltura inferior. Claramente, el valor de este juego es $V = 2$, el conjunto de estrategias del jugador 1 es $O_1(A) = \{(1,0)\}$ y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2 es la envoltura convexa de (1,0,0) y (2/3,1/3,0), esto es $O_2(A) = \text{conv}(\{(1,0,0), (2/3,1/3,0)\})$. Para obtener $O_2(A)$, la forma más sencilla será combinar una recta creciente y otra decreciente de entre las que cortan a la recta $y = V$ $(y = 2)$ y conseguir que la pendiente de esa combinación sea nula. La recta será paralela al eje de abscisas y pasa por los puntos $(0, V)$ y $(1, V)$. Si ahora tomamos una combinación convexa de las expresiones $1 + x$ y $4 - 2x$ de la forma $\alpha(1 + x) + (1 - \alpha)(4 - 2x) = (3\alpha - 2)x + 4 - 3\alpha$, con $\alpha \in [0, 1]$, entonces, por la condición de pendiente nula, $\alpha = 2/3$. ◇

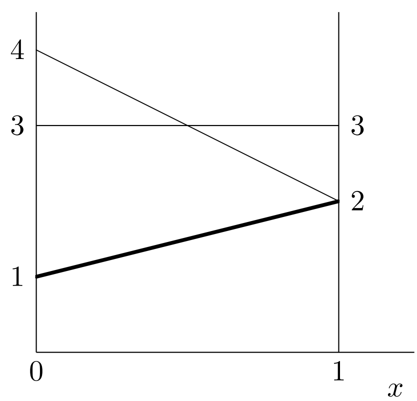


Figura 2.6.2: Resolución gráfica del juego del Ejemplo 2.6.1.

Ejemplo 2.6.2. Resolvamos el juego matricial dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este es un juego matricial $m \times 2$ y se puede resolver con el método visto para juegos matriciales $2 \times n$ intercambiando los nombres de los jugadores. El juego matricial resultante es el dado por la matriz siguiente.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 2.6.3 están representados los segmentos correspondientes a

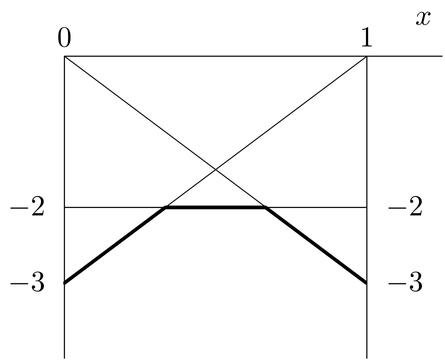


Figura 2.6.3: Resolución gráfica del juego del ejemplo 2.6.2.

las columnas de B, $\{(x, -3+3x) : x \in [0,1]\}$, $\{(x,-2) : x \in [0,1]\}$, $\{(x, -3x) : x \in [0,1]\}$, y su envoltura inferior. Claramente, $V_B = -2$, $O_1(B) = \text{conv}(\{(1/3, 2/3), (2/3, 1/3)\})$ y $O_2(B) = \{(0,1,0)\}$. Por tanto, en el juego matricial dado por A tenemos $V_A = 2$, $O_1(A) = \{(0,1,0)\}$ y $O_2(A) = \text{conv}(\{(1/3, 2/3), (2/3, 1/3)\})$. $\diamond$

A continuación vamos a describir el denominado **método de las submatrices**, que es un algoritmo para resolver cualquier juego matricial $m \times n$. Se basa en la caracterización de los puntos extremos de los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores.

Proposición 2.6.2. *Sea A un juego matricial $m \times n$ y tomemos $x \in S_m$ e $y \in S_n$. Entonces:*

1) $x \in O_1(A)$ si y sólo si $xP_j \geq V$, para todo $j \in N$.

2) $y \in O_2(A)$ si y sólo si $Q_i y^t \leq V$, para todo $i \in M$.

Demostración. Probamos sólo la primera equivalencia (la segunda se probaría análogamente).

"$\Rightarrow$" Supongamos que $x \in O_1(A)$. Entonces, por la Proposición 2.6.1, $V = \Lambda(x) = \text{mín}_{j \in N} xP_j$. Consecuentemente, $V \leq xP_j$ para todo $j \in N$.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $xP_j \geq V$ para todo $j \in N$. Aplicando nuevamente la Proposición 2.6.1:

$$V = \max_{x' \in S_m} \Lambda(x') \geq \Lambda(x) = \min_{j \in N} xP_j \geq V$$

con lo que concluye la demostración. $\square$

Proposición 2.6.3. *Sea A un juego matricial $m \times n$. Entonces, los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores, $O_1(A)$ y $O_2(A)$, son conjuntos convexos y compactos.*

Demostración. En virtud de la Proposición 2.6.2, los conjuntos son claramente convexos. También está claro que son acotados. Son cerrados ya que las funciones Λ y Γ son continuas y $O_1(A) = \Lambda^{-1}(\{V\})$ y $O_2(A) = \Gamma^{-1}(\{V\})$. $\square$

Proposición 2.6.4. *Sea A un juego matricial $m \times n$, y tomemos $x \in S_m$, $y \in S_n$. Entonces, $x \in O_1(A)$ e $y \in O_2(A)$ si y sólo si $xP_j \geq Q_i y^t$ para todo $i \in M$ y todo $j \in N$.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Esta implicación es una consecuencia de la Proposición 2.6.2.

"$\Leftarrow$" Si $xP_j \geq Q_i y^t$ para todo $i \in M$ y todo $j \in N$, entonces

$$V = \gamma \leq \Gamma(y) = \max_{i \in M} Q_i y^t \leq \min_{j \in N} xP_j = \Lambda(x) \leq \lambda = V.$$

Por lo tanto, todas las desigualdades anteriores son igualdades y con esto termina la demostración. $\square$

Proposición 2.6.5. *Sean A y A' dos juegos matriciales $m \times n$ tales que $a'_{ij} = a_{ij} + k$, para todo $i \in M$ y todo $j \in N$ (siendo a_{ij} y a'_{ij} los elementos de A y A', respectivamente). Entonces, $V_{A'} = V_A + k$, $O_1(A) = O_1(A')$ y $O_2(A) = O_2(A')$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que, para todo $x \in S_m$ y todo $y \in S_n$, $\Lambda_{A'}(x) - \Lambda_A(x) = \Gamma_{A'}(y) - \Gamma_A(y) = k$. $\square$

Definición 2.6.2. Sea A un juego matricial $m \times n$ y consideremos $x \in S_m$ e $y \in S_n$. El par (x, y) se denomina una **solución simple** de A si $xP_j = Q_i y^t$ para todo $i \in M$ y todo $j \in N$.

Obsérvese que si (x, y) es una solución simple de A, entonces es también un equilibrio de Nash de A, aunque el recíproco no es cierto en general.

A continuación enunciamos los tres teoremas principales en los que se basa el método de las submatrices. Sus demostraciones son bastante largas y pueden encontrarse, por ejemplo, en Parthasarathy y Raghavan (1971) o González-Díaz y otros (2010). El primero de tales teoremas es un resultado clásico de análisis convexo y los otros dos son debidos a Shapley y Snow (1950).

Teorema 2.6.6 (Teorema de Krein-Milman)**.** *Todo subconjunto no vacío, convexo y compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto extremo (esto es, un punto $x \in S$ tal que $S\backslash\{x\}$ es convexo). Además, si S_e es el conjunto de puntos extremos de S, entonces $S = \operatorname{conv}(S_e)$.*

Teorema 2.6.7. *Sea A un juego matricial $n \times n$ con $|A| \neq 0$. Entonces, el juego A tiene una solución simple si y sólo si todos los números $R_1, \ldots, R_n, C_1, \ldots, C_n$ son no positivos o todos son no negativos donde, para todo $i, j \in N$,*

1) $R_i = \sum_{j \in N} a^*_{ij}$,

2) $C_j = \sum_{i \in N} a^*_{ij}$,

siendo $A^* = (a^*_{ij})$ la matriz adjunta de A, es decir, $A^* = |A|(A^{-1})^t$. Además, si A tiene una solución simple, entonces tiene una única solución simple dada por:

$$\Big(\frac{1}{\sum_{i \in N} R_i}(R_1, \ldots, R_n), \frac{1}{\sum_{j \in N} C_j}(C_1, \ldots, C_n)\Big).$$

Teorema 2.6.8. *Sea A un juego matricial $m \times n$ con valor distinto de cero. Entonces:*

1) Los conjuntos de puntos extremos de $O_1(A)$ y $O_2(A)$ son finitos.

2) Tomemos $x \in O_1(A)$ e $y \in O_2(A)$. Entonces x es un punto extremo de $O_1(A)$ e y es un punto extremo de $O_2(A)$ si y sólo si existe B, una submatriz cuadrada y no singular de A, tal que (x_B, y_B) es una solución simple de B (x_B denota el vector obtenido de x tras borrar las componentes correspondientes a las filas de A que no están en B e y_B se define análogamente).

Ahora podemos dar el **método de las submatrices**. Consiste simplemente en encontrar todos los puntos extremos de los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores (ya sabemos que hay un número finito de tales puntos) buscando soluciones simples en todas las submatrices cuadradas y no singulares de la matriz del juego. Por la Proposición 2.6.3 y el teorema de Krein-Milman, los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores son las envolturas convexas de sus puntos extremos. A continuación describimos el método para un juego matricial $m \times n$ caracterizado por la matriz A.

Paso 1. El algoritmo sólo se puede aplicar si $V_A \neq 0$. Si $V_A = 0$ o si no tenemos seguridad de que $V_A \neq 0$, aplicaremos el algoritmo al juego matricial $\hat{A}$, donde $\hat{A}$ es una matriz con todos sus elementos positivos que se obtiene sumando a todos los elementos de A una constante adecuada. Claramente, $V_{\hat{A}} > 0$ y, por la Proposición 2.6.5, resolver $\hat{A}$ es lo mismo que resolver A. Por tanto, sin pérdida de generalidad, suponemos que $V_A \neq 0$.

Paso 2. Se buscan los equilibrios de Nash puros de A (un equilibrio de Nash puro de A es un elemento de tal matriz que sea el máximo de su columna y el mínimo de su fila). Si (x, y) es un equilibrio de Nash puro de A, entonces x es un punto extremo de $O_1(A)$ e y es un punto extremo de $O_2(A)$ (teniendo en cuenta el segundo apartado del Teorema 2.6.8, siendo B una matriz 1×1).

Paso 3. (Se repite para $i \in \{2, \ldots, \min\{m, n\}\}$). Para cada submatriz $i \times i$ de A que sea no singular, se estudian si tiene una solución simple haciendo uso del Teorema 2.6.7. Si la tiene, se completa con ceros (en las filas y columnas borradas de A para obtener la submatriz en consideración) hasta tener un par $(x, y) \in S_m \times S_n$. Si $x \in O_1(A)$ e $y \in O_2(A)$ (usar la Proposición 2.6.4 para comprobarlo), entonces x es un punto extremo de $O_1(A)$ e y es un punto extremo de $O_2(A)$ (teniendo en cuenta el Teorema 2.6.8).

El siguiente ejemplo ilustra el uso del método de las submatrices para resolver un juego matricial.

Ejemplo 2.6.3. Resolvamos el juego matricial del Ejemplo 2.6.1 haciendo uso del método de las submatrices.

Paso 1. Observemos que todos los elementos de A son positivos; por tanto su valor es positivo.

Paso 2. $((1, 0), (1, 0, 0))$ es un equilibrio de Nash puro de A. En consecuencia, $(1, 0)$ es un punto extremo de $O_1(A)$ y $(1, 0, 0)$ es un punto extremo de $O_2(A)$.

Paso 3.1. Consideramos A_1, la submatriz de A de dimensión 2×2 dada por:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $|A_1| \neq 0$. A_1^* está dada por:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$R_1 = 3$, $R_2 = 0$, $C_1 = 2$ y $C_2 = 1$, por lo que $((1,0),(2/3,1/3))$ es una solución simple de A_1. Tomemos ahora $((1,0),(2/3,1/3,0))$ y notemos que, para todo $j \in \{1,2\}$ y todo $i \in \{1,2,3\}$,

$$(1,0)P_j \geq 2 = Q_i(2/3,1/3,0)^t.$$

En consecuencia, $((1,0),(2/3,1/3,0)) \in O_1(A) \times O_2(A)$, $(1,0)$ es un punto extremo de $O_1(A)$ y (2/3,1/3,0) es un punto extremo de $O_2(A)$.

Paso 3.2. Consideramos ahora A_2, la submatriz de A de dimensión 2×2 dada por:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $|A_2| \neq 0$. A_2^* está dada por:

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$R_1 = 2$, $R_2 = -1$, $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, por lo que A_2 no tiene soluciones simples.

Paso 3.3. Consideramos ahora A_3, la submatriz de A de dimensión 2×2 dada por:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $|A_3| \neq 0$. A_3^* está dada por:

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$R_1 = -1$, $R_2 = -1$, $C_1 = 0$ y $C_2 = -2$, por lo que $((1/2, 1/2), (0, 1))$ es una solución simple de A_3. Tomemos ahora, $((1/2, 1/2), (0, 0, 1))$ y notemos que,

$$(1/2, 1/2)P_1 = 3/2 \leq 3 = Q_1(0, 0, 1)^t.$$

Por lo tanto, $((1/2, 1/2), (0, 0, 1)) \notin O_1(A) \times O_2(A)$.

En conclusión, $O_1(A) = \{(1, 0)\}$ y $O_2(A) = \text{conv}(\{(1, 0, 0), (2/3, 1/3, 0)\})$. El valor del juego es $V = H((1, 0), (1, 0, 0)) = 2$. $\diamond$

Terminamos esta sección con una aplicación de los juegos matriciales en antropología.

Ejemplo 2.6.4. Este ejemplo está tomado de Davenport (1960) y Straffin (1993). En su artículo, Davenport ilustra con un ejemplo que los patrones de comportamiento social a veces pueden ser respuestas funcionales a problemas que la sociedad debe resolver. Davenport estudió una aldea de Jamaica, donde alrededor de doscientos habitantes se ganaban la vida gracias a la pesca. Los caladeros se podían clasificar en bancos interiores (entre 5 y 15 millas de la costa) y bancos exteriores (entre 15 y 22 millas de la costa). Veintiséis tripulaciones de pescadores pescaban en canoas utilizando una clase de nasas que se vaciaban tres días por semana. Debido a las especiales características del fondo submarino, de vez en cuando se producían corrientes muy fuertes que afectaban a los bancos exteriores y que eran muy difíciles de prever. Los capitanes de las tripulaciones debían tomar una de las tres estrategias siguientes: pescar en los bancos interiores (I), pescar en los bancos exteriores (O), pescar en ambos bancos (I-O). Pescar en los bancos interiores es más seguro (en el sentido de que, cuando se producen las corrientes, el pescado de los bancos exteriores se pierde) y más fácil (en el sentido de que están más próximos a la costa). Sin embargo, en los bancos exteriores se puede obtener mejor pescado. La Tabla 2.6.1 muestra la estimación realizada por Davenport de los beneficios medios mensuales, en libras esterlinas, para los capitanes de las canoas, dependiendo de la estrategia de pesca utilizada y del hecho de que se produjeran corrientes (R) o no (N). Él destaca que hizo estas estimaciones antes de planear hacer un análisis de los datos por medio de la teoría de juegos. Los capitanes de las canoas se enfrentaban a un problema de decisión en un entorno de riesgo que se podía tratar como un juego matricial 3×2. Si se resuelve utilizando alguno de los dos métodos explicados, el resultado es que el primer jugador tiene una única estrategia óptima $(0.67, 0, 0.33)$. Sorprendentemente, el comportamiento real de los capitanes es muy próximo a esta estrategia óptima. Davenport observó que el 69 % de ellos escogía la estrategia I,

	R	N
I	17.3	11.5
O	-4.4	20.6
I-O	5.2	17

Tabla 2.6.1: Juego de Davenport de los pescadores jamaicanos.

el 31 % seguía la estrategia I-O y ningún capitán usaba la estrategia O. También observó que las corrientes se producían un 25 % del tiempo, lo cual es también bastante próximo a la única estrategia óptima del jugador 2: $(0.31, 0.69)$. La crítica que se puede hacer a este análisis es que esta situación no es realmente un juego, porque si bien los pescadores buscan maximizar sus objetivos, no ocurre lo mismo con el jugador 2 que no está escogiendo su "estrategia". Por lo tanto, un comportamiento racional para el jugador 1 sería observar las corrientes y responder de manera óptima. Ahora bien, la estrategia del jugador 1 que maximiza su pago esperado, asumiendo que las corrientes se producen un 25 % del tiempo, es (0,1,0). Contra este último punto de vista se puede argumentar que las corrientes son impredecibles y que el porcentaje de tiempo que se producen, visto como una variable aleatoria, tiene mucha varianza. Esto puede explicar que la sociedad prefiera la estrategia maxmin que, con independencia de las corrientes, garantiza un resultado razonable (en realidad, muy próximo al óptimo) que asegura la supervivencia de la aldea. $\diamond$

2.7. Juegos Matriciales y Programación Lineal

En esta sección comprobaremos que resolver un juego matricial es, en cierto sentido, equivalente a resolver un par de problemas de programación lineal duales y obtendremos un nuevo algoritmo para resolver juegos matriciales. La programación lineal es un campo muy importante de la investigación operativa desde que George B. Dantzig introdujo en 1947 el método símplex. Para los lectores no familiarizados con la programación lineal presentamos a continuación una breve introducción a dicho campo. Bazaraa y otros (1990) es, entre otras muchas, una buena referencia para profundizar en la programación lineal. El libro de Owen (1995), aunque es un libro de teoría de juegos, incluye un capítulo sobre programación lineal en el que se desarrolla el método símplex y la teoría de la dualidad.

Definición 2.7.1. Un **problema de programación lineal** es un problema de optimización con restricciones en el que tanto la función a optimizar, también llamada función objetivo, como las restricciones son lineales. Todo problema de programación lineal se puede expresar como:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & cx^t \\ \text{sujeto a} & xA \geq b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde A es una matriz $m \times n$, c es un vector $1 \times m$ y b es un vector $1 \times n$. Queremos encontrar una solución factible para el problema (es decir, un vector $x \in \mathbb{R}^m$ que satisfaga las desigualdades) de modo que minimice la función objetivo cx^t dentro del conjunto de soluciones factibles; de tal solución decimos que es óptima para este problema.

Definición 2.7.2. El **dual del problema** de la definición anterior es el siguiente problema de programación:

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & by^t \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq c^t, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Ahora queremos encontrar una solución factible para el problema (es decir, un vector $y \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga las desigualdades) de modo que maximice la función objetivo by^t dentro del conjunto de soluciones factibles; de tal solución decimos que es óptima para este problema.

Si tenemos un par de problemas como los de las dos definiciones anteriores, nos referimos al primero como el problema primal (P) y al segundo como el problema dual (D). A continuación enunciamos un importante resultado de programación lineal: el teorema de dualidad.

Teorema 2.7.1 (Teorema de dualidad)**.** *Sean (P) y (D) un par de problemas de programación lineal duales. Entonces,*

1) *(P) tiene una solución óptima si y sólo si (D) tiene una solución óptima.*

2) *Supongamos que x e y son soluciones factibles de los problemas (P) y (D), respectivamente. Entonces, x es una solución óptima de (P) e y es una solución óptima de (D) si y sólo si $cx^t = by^t$.*

A continuación vamos a probar que para resolver un juego matricial es suficiente resolver un par de problemas de programación lineal duales. Consideremos un juego matricial A con un valor positivo (en vista de la proposición 2.6.5 podemos hacer esta suposición sin pérdida de generalidad). Para encontrar el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 1 basta resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & \Lambda \\ \text{sujeto a} & xP_j \geq \Lambda, \ \forall j \in N, \\ & xJ_m^t = 1, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde $J_m = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Claramente, este problema es equivalente al siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \frac{1}{\Lambda} \\ \text{sujeto a} & xA \geq \Lambda J_n, \\ & xJ_m^t = 1, \\ & \Lambda > 0, \ x \geq 0. \end{array} \tag{2.7.1}$$

Consideremos ahora el problema que describimos a continuación:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & uJ_m^t \\ \text{sujeto a} & uA \geq J_n, \\ & u \geq 0. \end{array} \tag{2.7.2}$$

Es un ejercicio sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 2.7.2. *a) Si el par (x, Λ) es una solución óptima del problema (2.7.1), entonces u es una solución óptima del problema (2.7.2) donde, para todo $i \in M$,*

$$u_i = \frac{1}{\Lambda} x_i.$$

b) Si u es una solución óptima del problema (2.7.2), entonces (x, Λ) es una solución óptima del problema (2.7.1) donde, para todo $i \in M$,

$$x_i = \frac{1}{uJ_m^t} u_i, \ \text{y} \ \Lambda = \frac{1}{uJ_m^t}.$$

Ahora podemos proceder de modo análogo desde el punto de vista del jugador 2. Para encontrar el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2 basta resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \Gamma \\ \text{sujeto a} & Q_i y^t \leq \Gamma, \ \forall i \in M, \\ & yJ_n^t = 1, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Claramente, este problema es equivalente al siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & \frac{1}{\Gamma} \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq \Gamma J_m^t, \\ & yJ_n^t = 1, \\ & y \geq 0. \end{array} \tag{2.7.3}$$

Consideremos ahora el problema que describimos a continuación (que es dual del problema (2.7.2):

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & wJ_n^t \\ \text{sujeto a} & Aw^t \leq J_m^t, \\ & w \geq 0. \end{array} \tag{2.7.4}$$

De nuevo, es un ejercicio sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 2.7.3. *a) Si el par (y, Γ) es una solución óptima del problema (2.7.3), entonces w es una solución óptima del problema (2.7.4) donde, para todo $j \in N$,*

$$w_j = \frac{1}{\Gamma} y_j.$$

b) Si w es una solución óptima del problema (2.7.4), entonces (y, Γ) es una solución óptima del problema (2.7.3) donde, para todo $j \in N$,

$$y_j = \frac{1}{wJ_n^t} w_j, \text{ y } \Gamma = \frac{1}{wJ_n^t}.$$

Como conclusión podemos decir que, para resolver un juego matricial A, es suficiente resolver los problemas (2.7.2) y (2.7.4) que son un par de problemas de programación lineal duales. Nótese que este resultado implica que el algoritmo del símplex puede ser usado para resolver un juego matricial.

Vamos a ver ahora que, para resolver un par de problemas de programación lineal, es suficiente resolver un cierto juego matricial. Para ello precisamos unas definiciones y resultados básicos.

Definición 2.7.3. Un juego matricial $n \times n$ caracterizado por la matriz A se dice **simétrico** si los jugadores son intercambiables, esto es, si $A = -A^t$.

Proposición 2.7.4. *Sea A un juego matricial $n \times n$ simétrico. Entonces, su valor V es cero y, además, $O_1(A) = O_2(A)$.*

Demostración. Tomemos $x, y \in S_n$ tales que $x \in O_1(A)$ e $y \in O_2(A)$. Entonces, para cualesquiera $x', y' \in S_n$,

$$x' A y^t \leq x A y^t \leq x A y'^t,$$

o, equivalentemente, tomando transpuestas y multiplicando por -1,

$$-y A^t x'^t \geq -y A^t x^t \geq -y' A^t x^t.$$

Teniendo en cuenta que $A = -A^t$,

$$y A x'^t \geq y A x^t \geq y' A x^t,$$

lo que quiere decir que $y \in O_1(A)$ y $x \in O_2(A)$. Por tanto, efectivamente, $O_1(A) = O_2(A)$. Además,

$$V = x A y^t = x(-A^t) y^t = y(-A) x^t = -V,$$

por lo que $V = 0$. □

Definición 2.7.4. Sea A un juego matricial $m \times n$. Una fila Q_i se denomina **relevante** si existe $x \in O_1(A)$ tal que $x_i > 0$. Una columna P_j se denomina **relevante** si existe $y \in O_2(A)$ tal que $y_j > 0$.

Proposición 2.7.5. *Sea A un juego matricial $m \times n$.*

1) Si P_j es una columna relevante, entonces se tiene que $xP_j = V$ para todo $x \in O_1(A)$.

2) Si Q_i es una fila relevante, entonces se tiene que $Q_i y^t = V$ para todo $y \in O_2(A)$.

Demostración. Probamos sólo la primera afirmación (la segunda se probaría análogamente). Sea P_j una columna relevante y supongamos que existe $x \in O_1(A)$ tal que $xP_j \neq V$. Como $x \in O_1(A)$, utilizando la Proposición 2.6.4 sabemos que $xP_k \geq V$ para todo $k \in N$. Entonces $xP_j > V$. Como P_j es relevante, podemos tomar $y \in O_2(A)$ tal que $y_j > 0$. En tal caso,

$$V = x A y^t = \sum_{k \in N} (xP_k) y_k = \sum_{k \in N \setminus \{j\}} (xP_k) y_k + (xP_j) y_j > V,$$

lo cual es una contradicción. □

Consideremos ahora un par de problemas de programación lineal duales (P) y (D) según las definiciones 2.7.1 y 2.7.2. Consideremos el siguiente juego matricial B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A & -c^t \\ -A^t & 0 & b^t \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que se trata de un juego matricial simétrico, por lo que su valor es cero y además $O_1(B) = O_2(B)$. A partir de ahora en juegos matriciales simétricos, al referirnos a una estrategia óptima de los jugadores diremos sencillamente *una estrategia óptima del juego*.

Teorema 2.7.6. *Los problemas (P) y (D) tienen soluciones óptimas si y sólo si el juego matricial B tiene una estrategia óptima cuya última componente es positiva.*

Demostración. Sea $(x, y, \alpha) \in S_{m+n+1}$ ($x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$) una estrategia óptima de B. Entonces,

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -c^t \\ -A^t & 0 & b^t \\ c & -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ \alpha \end{pmatrix} \leq 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Ay^t - c^t\alpha &\leq 0, \\ -A^t x^t + b^t\alpha &\leq 0, \\ cx^t - by^t &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene al aplicar la Proposición 2.7.5, porque la última fila de B es relevante ya que $\alpha > 0$. Tomemos $x^* = (1/\alpha)x$ e $y^* = (1/\alpha)y$. Claramente x^* es una solución factible de (P) e y^* es una solución factible de (D). Dado que $cx^t - by^t = 0$, aplicando el teorema de dualidad, x^* es una solución óptima de (P) e y^* es una solución óptima de (D).

Recíprocamente, supongamos que x^* es una solución óptima de (P) e y^* es una solución óptima de (D). Tomemos entonces (x, y, α), donde $x = \alpha x^*$, $y = \alpha y^*$ y

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sum_{i \in M} x_i^* + \sum_{j \in N} y_j^*}.$$

Obsérvese que $\alpha > 0$ y $(x, y, \alpha) \in S_{m+n+1}$. Además

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -c^t \\ -A^t & 0 & b^t \\ c & -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ \alpha \end{pmatrix} \leq 0,$$

lo cual concluye la demostración. □

2.8. Refinamientos del Equilibrio de Nash en Juegos Finitos

La idea principal que subyace en el concepto de equilibrio de Nash es la de buscar perfiles de estrategias que se sustenten por sí mismos o, en otras palabras, que se autoimpongan. Por autoimponerse entendemos que si a los jugadores se les propone (o ellos mismos informalmente acuerdan) jugar según uno de tales perfiles, ningún jugador tiene incentivos para desviarse unilateralmente de él. Está claro que para que un perfil de estrategias se autoimponga debe ser un equilibrio de Nash; sin embargo, ésta no es una condición suficiente. Lo vamos a ilustrar con un par de ejemplos.

Ejemplo 2.8.1. Consideremos la extensión mixta del juego bipersonal finito que recoge la siguiente tabla.

	L	R
L	$1,1$	$0,0$
R	$0,0$	$0,0$

Este juego tiene dos equilibrios de Nash puros: (L, L) y (R, R). Sin embargo, (R, R) no se autoimpone realmente. Supongamos que los jugadores han acordado informalmente jugar (R, R) y consideremos, por ejemplo, el jugador 1. Éste no pierde si juega L en lugar de R e, incluso, puede llegar a ganar si el jugador 2 también se desvía de R. Por tanto, el jugador 1 jugará L, lo que quiere decir que (R, R) no se autoimpone realmente. El jugador 2 puede hacer un razonamiento análogo de modo que, incluso aunque los jugadores hubiesen acordado jugar (R, R), finalmente jugarán (L, L). Nótese que (L, L), en cambio, es un equilibrio de Nash que sí se autoimpone. $\diamond$

Ejemplo 2.8.2. Consideremos la extensión mixta del juego bipersonal finito que recoge la siguiente tabla.

	L	R
L	$1,1$	$10,0$
R	$0,10$	$10,10$

Este juego tiene también dos equilibrios de Nash puros: (L, L) y (R, R). Ahora bien, (R, R) no se autoimpone y el razonamiento es análogo al del ejemplo anterior. Supongamos que los jugadores han acordado informalmente jugar (R, R) y consideremos, por ejemplo, el jugador 1. Éste no pierde si juega L en lugar de R e, incluso, puede salir beneficiado si el jugador 2 también se desvía de R (beneficiado con respecto a lo que ganaría de haber elegido R). Por tanto, el jugador 1 jugará L, lo que quiere decir que (R, R) no se autoimpone realmente. El jugador 2 puede hacer un razonamiento análogo de modo que, incluso aunque los jugadores hubiesen acordado jugar (R, R), finalmente jugarán (L, L). Nótese que (L, L), en cambio, es un equilibrio de Nash que sí se autoimpone. Este ejemplo pone de manifiesto una vez más que la teoría de juegos no cooperativos no busca resultados socialmente óptimos, sino resultados socialmente estables. Aquí (R, R) es socialmente más deseable que (L, L), pero sólo (L, L) es realmente posible en un contexto no cooperativo. $\diamond$

Estos ejemplos pueden ayudarnos a entender que si en un juego en forma estratégica queremos encontrar un perfil de estrategias que se autoimponga, debemos buscarlo dentro del conjunto de sus equilibrios de Nash pero, en ocasiones, debemos requerir condiciones adicionales. En definitiva estos ejemplos ilustran la necesidad de *refinar* el concepto de equilibrio de Nash. En esta sección únicamente presentaremos una breve introducción a este campo de los refinamientos del equilibrio de Nash y lo haremos en el contexto de los juegos finitos (aunque algunos de los conceptos que vamos a introducir se pueden extender de modo inmediato a la clase de todos los juegos en forma estratégica). Para un estudio en profundidad de este tema se puede consultar el libro van Damme (1991).

Considéremos un juego finito $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ y su extensión mixta $E(G) = (S_1, \ldots, S_n, H_1, \ldots, H_n)$. A continuación definiremos el concepto de *equilibrio perfecto*, uno de los más importantes refinamientos del equilibrio de Nash. Fue introducido en Selten (1975) y su idea principal consiste en seleccionar aquellos equilibrios de Nash que siguen siendo equilibrios incluso en el caso de que los jugadores puedan cometer pequeños errores cuando escogen sus estrategias. Por esta razón el equilibrio perfecto se denomina también *equilibrio de la mano temblorosa*.

Definición 2.8.1. Una **perturbación de G** es un vector $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ tal que, para todo $i \in N$, η_i es una aplicación de X_i en $\mathbb{R}$ que satisface:

1) $\eta_i(x_i) > 0$, para todo $x_i \in X_i$.

2) $\sum_{x_i \in X_i} \eta_i(x_i) < 1$.

Denotaremos por $P(G)$ el conjunto de perturbaciones de G.

Definición 2.8.2. La **η-perturbación de G** es el juego en forma estratégica (G, η) dado por:

$$(G, \eta) = (S_1(\eta_1), \ldots, S_n(\eta_n), H_1, \ldots, H_n),$$

donde, para todo $i \in N$,

1) $S_i(\eta_i) = \{s_i \in S_i : s_i(x_i) \geq \eta_i(x_i) \; \forall x_i \in X_i\}$.

2) H_i es la restricción de la función de pago del jugador i en $E(G)$ a $S(\eta) = \prod_{i \in N} S_i(\eta_i)$.

Una η-perturbación de G es simplemente una versión modificada de $E(G)$ en la que todos los jugadores juegan todas sus estrategias puras con una probabilidad positiva (mayor o igual que la cota inferior dada por la perturbación). Por otra parte, observemos que (G, η) está en las condiciones del teorema de Nash, por lo que podemos asegurar que tiene al menos un equilibrio de Nash.

Definición 2.8.3. Un perfil de estrategias $s \in S$ se denomina **equilibrio perfecto** de $E(G)$ si existen dos sucesiones $\{\eta^k\} \subset P(G)$, con $\{\eta^k\} \to 0$, y $\{s^k\} \subset S$, con $\{s^k\} \to s$ de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$, s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k).[4]

A continuación presentamos un resultado que será de utilidad para analizar el concepto de equilibrio perfecto.

Proposición 2.8.1. *Sea $(G, \eta) = (S_1(\eta_1), \ldots, S_n(\eta_n), H_1, \ldots, H_n)$ la η-perturbación del juego finito $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$. Entonces $s \in S(\eta)$ es un equilibrio de Nash de (G, η) si y sólo si, para todo $i \in N$ y todo $x_i \in X_i$, se cumple la siguiente condición:*

$$x_i \notin PB_i(s_{-i}) \Rightarrow s_i(x_i) = \eta_i(x_i).$$

Demostración. Para cada $s \in S(\eta)$ y cada $i \in N$,

$$H_i(s) = \sum_{x_i \in X_i} H_i(s_{-i}, x_i) s_i(x_i).$$

A la vista de tal expresión, es fácil comprobar que el enunciado de la proposición es cierto. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que (L, L) es el único equilibrio perfecto en el juego del Ejemplo 2.8.1; análogamente se puede comprobar que (L, L) es el único equilibrio perfecto en el juego del Ejemplo 2.8.2.

Ejemplo 2.8.3. Consideremos el juego $E(G)$ del Ejemplo 2.8.1. Sea ahora $\{\eta^k\} \subset P(G)$ una sucesión de perturbaciones de G que converge a cero, y tomemos $k \in \mathbb{N}$ y $s \in S(\eta^k)$. Obsérvese que

$$H_1(L, s_2) = s_2(L) > 0 = H_1(R, s_2),$$

[4] Dada una sucesión $\{x^k\}$ escribimos $\{x^k\} \to a$ si $\lim_{k \to \infty} x^k = a$.

$$H_2(s_1, L) = s_1(L) > 0 = H_2(s_1, R).$$

En consecuencia, la Proposición 2.8.1 implica que el único equilibrio de Nash de (G, η^k) es $s^k \in S(\eta)$ dado por:

$$s_i^k(L) = 1 - \eta_i^k(R),\ \ s_i^k(R) = \eta_i^k(R),\ \ i \in \{1, 2\}. \tag{2.8.1}$$

De este modo, para cualquier sucesión de perturbaciones $\{\eta^k\} \subset P(G)$ que converge a cero, podemos asociar una única sucesión $\{s^k\} \subset S$ de equilibrios de Nash de los juegos (G, η^k) asociados. Dicha sucesión es la definida, para todo $k \in \mathbb{N}$, por (2.8.1). Obsérvese que, como $\{\eta^k\} \to 0$, entonces $\{s^k\} \to (L, L)$. En consecuencia, (L, L) es el único equilibrio perfecto de este juego. ◇

Los dos resultados siguientes muestran que todo equilibrio perfecto es un equilibrio de Nash y que la extensión mixta de un juego finito posee, al menos, un equilibrio perfecto.

Teorema 2.8.2. *Si $s \in S$ es un equilibrio perfecto de $E(G)$, entonces es un equilibrio de Nash de $E(G)$.*

Demostración. Como s es un equilibrio perfecto existen dos sucesiones $\{\eta^k\}$ y $\{s^k\}$ en las condiciones de la Definición 2.8.3. En vista de la Proposición 2.8.1, s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k) si y sólo si, para todo $i \in N$ y todo $x_i \in X_i$, se cumple la siguiente condición:

$$x_i \notin PB_i(s_{-i}^k) \Rightarrow s_i^k(x_i) = \eta_i^k(x_i).$$

Supongamos ahora que s no es un equilibrio de Nash de $E(G)$. Entonces, teniendo en cuenta la Proposición 2.4.1, existen $i \in N$ y $x_i \in X_i$ tal que $x_i \notin PB_i(s_{-i})$ y $s_i(x_i) > 0$. Pero en tal caso, como $\{\eta^k\} \to 0$ y $\{s^k\} \to s$, tomando k suficientemente grande, $x_i \notin PB_i(s_{-i}^k)$ y $s_i^k(x_i) > \eta_i^k(x_i)$, lo que contradice el hecho de que s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k). □

Teorema 2.8.3. *La extensión mixta de un juego finito G tiene, al menos, un equilibrio perfecto.*

Demostración. Consideremos una sucesión de perturbaciones $\{\eta^k\} \subset P(G)$ con $\{\eta^k\} \to 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escojamos s^k, un equilibrio de Nash del juego (G, η^k). Como S es un conjunto compacto, la sucesión $\{s^k\} \subset S$ tiene una subsucesión convergente que converge a un $\bar{s} \in S$. Claramente, $\bar{s}$ es un equilibrio perfecto de $E(G)$. □

El concepto de equilibrio perfecto está muy relacionado con la idea de dominancia que formalizamos en las definiciones siguientes. Informalmente, una estrategia s_i de un jugador i se dice no dominada si no existe otra estrategia que nunca es peor y que algunas veces es mejor que s_i.

Definición 2.8.4. Sean $s_i, s'_i \in S_i$ dos estrategias del jugador i en $E(G)$. Decimos que s'_i **domina a** s_i si:

1) $H_i(\bar{s}_{-i}, s'_i) \geq H_i(\bar{s}_{-i}, s_i)$, para todo $\bar{s}_{-i} \in S_{-i}$, y

2) $H_i(\hat{s}_{-i}, s'_i) > H_i(\hat{s}_{-i}, s_i)$, para algún $\hat{s}_{-i} \in S_{-i}$.

Equivalentemente, s'_i domina a s_i si:

1) $H_i(\bar{x}_{-i}, s'_i) \geq H_i(\bar{x}_{-i}, s_i)$, para todo $\bar{x}_{-i} \in X_{-i}$, y

2) $H_i(\hat{x}_{-i}, s'_i) > H_i(\hat{x}_{-i}, s_i)$, para algún $\hat{x}_{-i} \in X_{-i}$.

Definición 2.8.5. Sea $s_i \in S_i$ una estrategia del jugador i en $E(G)$. Se dice que s_i **es no dominada** si no existe $s'_i \in S_i$ que la domina. Diremos que $s \in S$ es un **perfil de estrategias no dominado** si, para todo $i \in N$, s_i es no dominada. Finalmente, **un equilibrio de Nash no dominado** de $E(G)$ es un perfil de estrategias no dominado $s \in S$ que, además, es un equilibrio de Nash de $E(G)$.[5]

Obsérvese que los juegos de los Ejemplos 2.8.1 y 2.8.2 tienen un único equilibrio perfecto, (L, L), que también es el único equilibrio de Nash no dominado. Esto no es una coincidencia, tal como muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.8.4. *Sea $E(G)$ la extensión mixta de un juego finito. Entonces:*

1) Todo equilibrio perfecto de $E(G)$ es un equilibrio no dominado de Nash del juego $E(G)$.

2) Si $E(G)$ es un juego bimatricial, entonces un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto de $E(G)$ si y sólo si es un equilibrio de Nash no dominado de $E(G)$.

La demostración de este resultado se puede encontrar en van Damme (1991) y González-Díaz y otros (2010). Notemos que si $n > 2$ puede haber equilibrios de Nash no dominados que no sean perfectos, tal como muestra el siguiente ejemplo.

[5] Obsérvese que este concepto se puede extender de modo directo a cualquier juego en forma estratégica.

Ejemplo 2.8.4. (van Damme, 1991) Consideremos la extensión mixta del juego finito de tres personas de la Tabla 2.8.1, en la que el jugador 1 elige fila, el jugador 2 elige columna y el jugador 3 elige matriz. Es un sencillo ejercicio comprobar que (R, L, L) es un equilibrio de Nash no dominado que no es perfecto. $\diamond$

	L	R
L	$1, 1, 1$	$1, 0, 1$
R	$1, 1, 1$	$0, 0, 1$

L

	L	R
L	$1, 1, 0$	$0, 0, 0$
R	$0, 1, 0$	$1, 0, 0$

R

Tabla 2.8.1: Representación de un juego de tres jugadores.

El equilibrio perfecto es uno de los refinamientos más importantes del concepto de equilibrio de Nash. Sin embargo, existen otros muchos refinamientos en la literatura ya que no es tarea fácil dar una condición que siempre seleccione perfiles de estrategias que se autoimpongan y que, al mismo tiempo, dé lugar a un resultado de existencia en la extensión mixta de cualquier juego finito. El siguiente ejemplo muestra que puede haber equilibrios perfectos que no se autoimponen.

Ejemplo 2.8.5. Consideremos la extensión mixta del juego bipersonal finito que recoge la siguiente tabla.

	L	R
L	$7, 7$	$0, 0$
C	$0, 0$	$1, 2$
R	$5, 5$	$5, 5$

Este juego tiene dos equilibrios de Nash puros: (L, L) y (R, R). Sin embargo (R, R) no se autoimpone realmente. Efectivamente, supongamos que los jugadores han acordado informalmente jugar (R, R) y consideremos el jugador 2. Si el jugador 1 juega según lo acordado, el jugador 2 es completamente indiferente entre jugar L o R. Ahora bien, al desviarse, el jugador 2 podría ganar (si el jugador 1 también se desvía y elige L) o perder (si el jugador 1 también se desvía y elige C). De todas formas, el jugador 1 nunca va a escoger C, que siempre es peor para él que R; si el jugador 1 se desvía, debe escoger L. Por tanto, el jugador 2, que conoce este hecho, se desviará y escogerá L. Finalmente, el jugador 1, que es capaz de anticipar que el jugador 2 puede hacer este razonamiento, también se va a desviar y escogerá L. $\diamond$

Vamos a ver ahora otros dos refinamientos del equilibrio de Nash: el primero está inspirado en la definición del equilibrio de Nash y el segundo está basado en la definición del equilibrio perfecto.

Definición 2.8.6. Sea $E(G)$ la extensión mixta de un juego finito. Un **equilibrio estricto** de $E(G)$ es un perfil de estrategias $s \in S$ que satisface que $H_i(s) > H_i(s_{-i}, s'_i)$, para todo $s'_i \in S_i \backslash \{s_i\}$ y para todo $i \in N$.[6]

A la vista de esta definición es obvio que todo equilibrio estricto es un equilibrio de Nash. Además, es fácil comprender que un equilibrio estricto de $E(G)$ es siempre un perfil de estrategias puras.

Definición 2.8.7. Un perfil de estrategias $s \in S$ se denomina **equilibrio estrictamente perfecto** de $E(G)$ si para toda sucesión $\{\eta^k\} \subset P(G)$, con $\{\eta^k\} \to 0$, existe una sucesión $\{s^k\} \subset S$, con $\{s^k\} \to s$, tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k).

Claramente, todo equilibrio estrictamente perfecto es un equilibrio perfecto ya que siempre existe una sucesión $\{\eta^k\} \subset P(G)$, con $\{\eta^k\} \to 0$. Para terminar esta sección vamos a estudiar la relación entre el equilibrio estricto y el equilibrio estrictamente perfecto, así como la existencia de tales equilibrios en la extensión mixta de un juego finito.

Proposición 2.8.5. *Sea $E(G)$ la extensión mixta de un juego finito y sea $s \in S$ un equilibrio estricto de $E(G)$. Entonces, s es también estrictamente perfecto.*

Demostración. Como s debe ser un perfil de estrategias puras (pues es estricto), se puede escribir $s = x$. Tomemos una sucesión $\{\eta^k\} \subset P(G)$ con $\{\eta^k\} \to 0$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $i \in N$ definimos la estrategia mixta s_i^k como:

1) $s_i^k(x_i) = 1 - \sum_{x'_i \in X_i \backslash \{x_i\}} \eta_i^k(x'_i)$, y

2) $s_i^k(x'_i) = \eta_i^k(x'_i)$, para todo $x'_i \in X_i \backslash \{x_i\}$.

Claramente, $\{s^k\} \to x$. Además, si k es suficientemente grande se tiene que s^k es un equilibrio de Nash del juego perturbado (G, η^k). □

El recíproco de este resultado no es cierto, como se puede ver con el siguiente ejemplo.

[6] Obsérvese que este concepto se puede extender de modo directo a cualquier juego en forma estratégica.

Ejemplo 2.8.6. Consideremos la extensión mixta del juego de pares o nones (Ejemplos 2.2.6 y 2.3.2). Ya hemos razonado que el único equilibrio de Nash es $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$. Claramente, no es un equilibrio estricto ya que no es un perfil de estrategias puras. Por otro lado, es fácil comprobar que un equilibrio de Nash completamente mixto (ver Definición 2.4.3) es siempre estrictamente perfecto. Por tanto, $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$ es un equilibrio estrictamente perfecto que no es estricto. $\diamond$

El siguiente ejemplo muestra que la extensión mixta de un juego bipersonal finito puede no tener equilibrios estrictamente perfectos.

Ejemplo 2.8.7. Consideremos la extensión mixta del juego bipersonal finito que recoge la Tabla 2.8.2. Es un ejercicio sencillo comprobar que este juego no tiene equilibrios estrictamente perfectos. $\diamond$

	L	C	R
L	$1, 1$	$1, 0$	$0, 0$
R	$1, 1$	$0, 0$	$1, 0$

Tabla 2.8.2: Juego bipersonal del Ejemplo 2.8.7.

A continuación mostramos la relación entre los conceptos que hemos considerado en esta sección. Aquellos conceptos que aparecen subrayados no cumplen un teorema general de existencia para la extensión mixta de un juego finito.

<table><tr><td><u>Estricto</u></td><td>$\Rightarrow$</td><td><u>Estrictamente Perfecto</u></td><td>$\Rightarrow$</td><td>Perfecto</td><td>$\Rightarrow$</td><td>Nash no Dominado</td><td>$\Rightarrow$</td><td>Nash</td></tr></table>

2.9. Ejercicios

Ejercicio 2.1 (Las tres ciudades (Carreras y otros, 2001))**.** Dos empresas competidoras que denotaremos por E1 y E2, respectivamente, venden cierto tipo de material informático en un mercado constituido por tres ciudades, Orense, Pontevedra y Vigo. Ambas empresas han decidido incrementar su actividad en una de las tres ciudades, por medio de promociones, publicidad, más puntos de venta, etc. Un sondeo ha revelado que, según las decisiones que tomen ambas, la cuota total de mercado que controlará la empresa 1 queda descrita, en porcentaje, por la siguiente tabla.

E1/E2	Orense	Pontevedra	Vigo
Orense	40 %	50 %	90 %
Pontevedra	70 %	55 %	55 %
Vigo	45 %	55 %	40 %

La diferencia hasta el 100 % es la cuota de mercado que controlará la empresa 2. No hay más información que considerar, salvo que ambas empresas conocen el sondeo reflejado en la tabla, que tomarán sus decisiones en secreto y al mismo tiempo y que, lógicamente, cada una de ellas quiere optimizar su cuota de mercado. Determínese cuál de las tres ciudades debería escoger cada una de las dos empresas.

Ejercicio 2.2 (El empresario arriesgado (Carreras y otros, 2001))**.** Dos empresarios de maquinaria agrícola controlan el mercado de la provincia de Lugo, con cuotas del 40 % y 60 %, respectivamente. Cada uno está considerando la posibilidad de efectuar una inversión para mejorar su cuota. El empresario 1 tiene dos opciones:

- Invertir la cantidad prevista. Esto incrementará su cuota de mercado hasta el 50 % o hasta el 60 % según el empresario 2 invierta también o no.

- Invertir previamente en bolsa la cantidad prevista. Existe una probabilidad p estimada de que la inversión le produzca unos rendimientos considerables, y una probabilidad $1 - p$ de que la operación salga mal y resulten muy mermados sus recursos financieros. En el caso de que la inversión en bolsa salga bien, la inversión de los rendimientos proporcionará al empresario 1 una cuota de mercado del 70 % o del 80 % dependiendo de si el empresario 2 invierta también o no. Si la inversión previa resulta un fracaso, la inversión de los pocos recursos restantes conducirá al empresario 1 a una cuota del 35 % o del 45 %, dependiendo como en los casos anteriores de la decisión del empresario 2.

La diferencia hasta el 100 % es la cuota de mercado que controlará la empresa 2. Modelícese esta situación por medio de un juego en forma estratégica suponiendo que la cuota de mercado de cada jugador es una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern para cada jugador.

Ejercicio 2.3. Encuéntrense los equilibrios de Nash del juego bimatricial de la siguiente tabla.

$1, 3$	$2, 4$
$1, 5$	$4, 1$

Ejercicio 2.4 (El modelo de duopolio de Bertrand)**.** En 1883, J. Bertrand propuso una modificación del modelo de duopolio de Cournot. En su propuesta, las empresas no compiten en producción sino en el precio, que entonces debe ser la variable estratégica a tener en cuenta. Considérese un mercado con dos compañías que venden un mismo producto. Supongamos que no hay ningún coste fijo de producción y que los costes unitarios de producción son idénticos para ambas compañías y dados por $c > 0$. Cada compañía decide el precio al que vende el producto. Dado el precio más bajo, p, la cantidad vendida es $q = \text{máx}\{0, d - p\}$, para un cierto $d > 0$ con $0 < c < d$. Si las compañías eligen precios distintos, la que haya elegido el precio más bajo se hace con todo el mercado. Si ambas han elegido el mismo precio, se reparten las ventas a partes iguales. Escríbase la forma estratégica que describe esta situación. Obténgase el conjunto de equilibrios de Nash y los pagos obtenidos por cada uno de los jugadores.

Ejercicio 2.5. Considérese la siguiente variación del modelo de Bertrand descrito en el ejercicio anterior. Ahora las dos compañías venden productos diferenciados. Nuevamente, suponemos que no hay ningún coste fijo de producción y que los costes unitarios de producción son idénticos para ambas compañías y dados por $c > 0$. Una vez que los precios han sido elegidos, p_1 y p_2, la cantidad vendida por cada compañía $i \in \{1, 2\}$ viene dada por $q_i = \text{máx}\{0, d - p_i + rp_{-i}\}$, con $0 < c < d$ y $0 < r < 2$ (r indica el grado de diferenciación de los productos). Escríbase la forma estratégica que describe esta situación. Obténgase el conjunto de equilibrios de Nash y los pagos obtenidos por cada uno de los jugadores.

Ejercicio 2.6. Calcúlense los equilibrios de Nash en la extensión mixta del juego de *pares o nones*.

Ejercicio 2.7 (Piedra, papel, tijera)**.** Dos jugadores participan en un juego en el que tienen que escoger simultánea e independientemente uno de los siguientes objetos: piedra, papel o tijera. La piedra gana a la tijera rompiéndola, la tijera gana al papel cortándolo y el papel gana a la piedra envolviéndola. El jugador que escoge el objeto vencedor obtiene una unidad del otro jugador y cuando ambos jugadores escogen el mismo objeto ninguno gana. Descríbase el juego y encuéntrense las estrategias óptimas de los jugadores.

Ejercicio 2.8. Supóngase que S es el símplex de $\mathbb{R}^n$. Considérese el juego

$$G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$$

tal que, para todo $i \in N$, $X_i = [0, \infty)$, $H_i(x) = x_i$ si $x \in S$ y $H_i(x) = 0$ si $x \notin S$. Obténgase un equilibrio de Nash y de G tal que $H_i(y) = 0$, para todo $i \in N$, y un equilibrio de Nash z de G tal que $H_i(z) > 0$, para todo $i \in N$. Indíquese si alguno de estos equilibrios es estricto.

Ejercicio 2.9. En el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, dibújense B_1 y B_2. Obténganse también los equilibrios de Nash y proporciónese también una estrategia completamente mixta del segundo jugador que domine a $(1/2, 1/2)$.

$2,0$	$0,0$
$0,1$	$1,3$

Ejercicio 2.10. Calcúlese el valor inferior del juego bipersonal de suma nula $([0,2],[0,2],H)$ con $H(x,y) = 3xy - x - 5y + 8$ para cualesquiera $x, y \in [0,2]$.

Ejercicio 2.11. Indíquese razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si $E(G)$ es la extensión mixta de un juego finito, s es un equilibrio de Nash de $E(G)$ y $\bar{s}_i$ domina a s_i, entonces $(s_{-i}, \bar{s}_i)$ es un equilibrio de Nash de $E(G)$".

Ejercicio 2.12. Dígase si el siguiente juego bipersonal de suma nula, $([0,1],[2,3],H)$ con $H(x,y) = 2xy - 5x - y - 2$ para cualesquiera $x, y \in [0,1] \times [2,3]$, está estrictamente determinado.

Ejercicio 2.13. En el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, encuéntrese una estrategia pura de un jugador que esté dominada por una completamente mixta.

$1,1$	$0,3$	$1,0$
$0,1$	$2,0$	$0,3$

Ejercicio 2.14. Calcúlense el valor y las estrategias óptimas de los jugadores en el siguiente juego matricial. Obténganse también todas las soluciones simples de la submatriz resultante de eliminar la segunda columna.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.15. En el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, obténganse los equilibrios estrictos, perfectos y estrictamente perfectos.

$2,0$	$0,0$
$0,1$	$1,3$

Ejercicio 2.16. En el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, obténgase los equilibrios estrictos, perfectos y estrictamente perfectos.

$4,2$	$3,3$
$5,1$	$0,0$

Ejercicio 2.17. Resuélvase el siguiente juego matricial. Escríbanse también los problemas de programación lineal duales a los que da lugar el juego matricial anterior y, después, el juego matricial simétrico al que dan lugar tales problemas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.18. Resuélvase el siguiente juego matricial utilizando el método geométrico y encuéntrese una solución simple de la submatriz resultante de eliminar la tercera columna en la matriz. Escríbanse además los problemas de programación lineal duales a los que da lugar el juego matricial anterior y, después, el juego matricial simétrico al que dan lugar tales problemas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.19. Indíquese razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si en un juego matricial eliminamos una estrategia pura de un jugador que domina a todas las demás, el valor del nuevo juego necesariamente cambia".

Ejercicio 2.20. Indíquese razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un juego bimatricial tiene un único equilibrio perfecto, entonces tal equilibrio es estricto".

Ejercicio 2.21. En el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, obténganse los equilibrios de Nash, estrictos, perfectos y estrictamente perfectos.

$1,0$	$2,-1$
$0,0$	$2,1$

Ejercicio 2.22. En el juego matricial dado por la matriz A, calcúlese el valor y las estrategias óptimas del jugador 1 y del jugador 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.23. En el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, obténganse los equilibrios de Nash. Dígase además, cuáles de esos equilibrios son estrictos, y cuáles son perfectos.

$-900, -900$	$200, 0$
$0, 200$	$100, 100$

Ejercicio 2.24. Considérese la siguiente modificación de la subasta al primer precio. Dos agentes pujan por un artículo al que valoran en 5 y 3 unidades monetarias, respectivamente. Si ambos pujan la misma cantidad se lanza una moneda, de manera que si sale cara se adjudica el artículo al primer agente y si sale cruz se adjudica al segundo. Escríbanse las funciones de pago de los agentes que resultan en esta subasta. Proporciónese además un equilibrio de Nash del correspondiente juego.

Ejercicio 2.25. Obténgase el valor y las estrategias óptimas de los jugadores en el siguiente juego matricial utilizando el procedimiento geométrico. Además, obténganse las soluciones simples del juego matricial resultante de eliminar la tercera columna.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26. En el siguiente juego matricial plantéense los dos problemas de programación lineal duales asociados.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.27. Calcúlese el valor inferior del juego bipersonal de suma nula $([0,2],[1,3],H)$ donde $H(x,y) = 6xy + 3x - 8y + 9$ para todo $(x,y) \in [0,2] \times [1,3]$. Dígase, además, si este juego está estrictamente determinado.

Ejercicio 2.28. Razónese si la siguiente afirmación es cierta o no: “En un juego bimatricial 2×2, si un perfil de estrategias no es equilibrio de Nash, no puede ser no dominado”.

Ejercicio 2.29. Para el juego bimatricial dado por la siguiente tabla, encuéntrense dos estrategias completamente mixtas del jugador 2, s_1 y s_2, tal que s_2 no domina a s_1.

$3, 1$	$1, 4$	$2, 0$
$1, 4$	$2, 1$	$0, 2$

Tema 3

Juegos en Forma Extensiva

Contenidos

3.1. Introducción a los Juegos en Forma Extensiva

Vamos a considerar ahora modelos no estáticos para analizar situaciones de decisión interactivas y multietápicas. Como ya comentamos en el Ejemplo 2.1.5, tales situaciones también se pueden representar por medio de un juego en forma estratégica. De todos modos, al hacerlo así, prescindimos de cierta información sobre su estructura que puede ser relevante en algunas circunstancias. Por esta razón el modelo de juego en forma extensiva, que pretende describir extensivamente la situación multietápica y su estructura, aunque es más complejo puede ser el más adecuado en muchas ocasiones. En este capítulo seguimos, básicamente, la notación de Selten para juegos en forma extensiva (Selten, 1975). Por otro lado, sólo trataremos de manera formal los juegos en forma extensiva finitos, aunque al final del capítulo se incluyen algunos comentarios sobre juegos en forma extensiva infinitos.

Definición 3.1.1. Un **juego en forma extensiva** Γ es una 7-tupla

$$(A, M, P, U, C, p, h)$$

cuyos integrantes se describen a continuación.

El árbol del juego. (A, M) es un *árbol finito*, esto es, A es un conjunto finito de nodos y $M \subset A \times A$ es un conjunto finito de arcos orientados que satisfacen: i) existe un único *nodo distinguido* d (d es distinguido si $(a, d) \notin M$ para todo $a \in A$), y ii) para todo $a \in A \backslash \{d\}$ existe un único *camino* conectando d y a (un camino es una secuencia de *arcos consecutivos*; dos arcos $(a, \hat{a})$ y $(a', \hat{a}')$ se dice que son consecutivos si $\hat{a} = a'$). Un *nodo* $a \in A$ se dice *terminal* si no existen arcos que salen de él, es decir, si no existe $\hat{a} \in A$ con $(a, \hat{a}) \in M$. Se denotará por Z el conjunto de nodos terminales. El árbol finito describe la estructura de la situación multietápica: los nodos que no son terminales representan puntos de decisión de los jugadores; los arcos que salen de cada nodo representan las alternativas disponibles para el correspondiente jugador en ese punto de decisión; los nodos terminales representan los posibles puntos finales del juego.

La partición de los jugadores. $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ es una partición de $A \backslash Z$ (en la que alguna de las clases puede ser vacía), que proporciona una indicación del jugador que toma decisiones en cada nodo que no es terminal. Los mecanismos responsables de los movimientos aleatorios en el juego son denominados "jugador cero". Se denotará por $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de jugadores "personales" en Γ. Nótese que $0 \notin N$.

La partición de información. U denota la colección $\{U_1, \ldots, U_n\}$ donde, para cada $i \in N$, U_i proporciona una partición de P_i. Cada $u \in U_i$ contiene los nodos del jugador i en los que tiene la misma información acerca de lo que ha pasado en el juego hasta ese punto. Por tanto, si un nodo en u es alcanzado durante el juego, su poseedor únicamente conoce que tiene que tomar una decisión en u, pero no es capaz de saber qué nodo de u ha sido alcanzado realmente. De esta forma, cada $u \in U_i$ debe cumplir:

- Cada partida interseca u a lo sumo una vez, siendo una partida un camino desde el nodo distinguido hasta un nodo terminal.
- El número de arcos que empiezan en a y $\bar{a}$ debe ser el mismo si $a, \bar{a} \in u$. De lo contrario, i sería capaz de distinguir entre a y $\bar{a}$.

Los conjuntos $u \in U_i$ se denominan conjuntos de información del jugador i.

La partición de elecciones. Cada jugador tiene que seleccionar una alternativa en cada uno de sus nodos de decisión pero, debido a la partición de información, sólo puede seleccionar una *elección* en cada conjunto de información. Formalmente, una elección para el jugador $i \in N$ en el conjunto de información $u \in U_i$ es un conjunto que contiene, para cada $a \in u$, una alternativa en a (es decir, un arco $(a, \bar{a}) \in M$), de modo que cada alternativa pertenece a una y sólo a una elección. La partición de elecciones C es el conjunto de todas las posibles elecciones de los jugadores en sus conjuntos de información. Nótese que, así definida, C es una partición del conjunto de arcos que salen de nodos que no están en P_0. Para cada $u \in U_i$, C_u denota el conjunto de todas las elecciones en u.

La asignación de probabilidad. Es una aplicación que asigna, a cada $a \in P_0$, una distribución de probabilidad p_a definida sobre el conjunto $\{(a, \bar{a}) : \bar{a} \in A, (a, \bar{a}) \in M\}$. La asignación de probabilidad, pues, proporciona una descripción de los movimientos aleatorios en el juego.

Las funciones de utilidad. $h = (h_1, \ldots, h_n)$ proporciona las funciones de utilidad de los jugadores, definidas sobre Z. Suponemos que cada jugador $i \in N$ tiene preferencias sobre Z (el conjunto de posibles puntos finales del juego) y que sus preferencias se pueden representar por medio de una función de utilidad h_i. En general, suponemos que esas funciones de utilidad son de von Neumann y Morgenstern.

Nótese que el juego del Ejemplo 2.1.5 era un juego en forma extensiva. A continuación vamos a presentar otros dos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1. *Un juego de mercado.* Dos empresas han desarrollado un nuevo producto y planean lanzarlo al mercado. Desconocen si el mercado para tal producto será pequeño (con beneficios estimados de 80 millones de euros al año) o grande (con beneficios estimados de 200 millones de euros al año). Ya que no hay información disponible sobre la naturaleza del mercado, al ser un producto que no se ha vendido con anterioridad, se asumirá que será pequeño (S) con probabilidad 1/2 y grande (L) con probabilidad 1/2. Las empresas tienen que decidir si fabrican un producto de alta calidad (H), que se venderá mejor si el mercado es pequeño, o de calidad media (M), que se venderá mejor si el mercado es grande. La empresa uno es líder en el sector, mientras que la dos es una pequeña compañía que dirige sus productos a un público más especializado y exigente. Los analistas de las empresas han estimado las siguientes cuotas de mercado de ambas empresas; al estar basadas en datos ampliamente conocidos, se pueden considerar como de conocimiento público en el sector.

S	M	H
M	$60, 20$	$20, 60$
H	$70, 10$	$50, 30$

L	M	H
M	$160, 40$	$140, 60$
H	$70, 130$	$130, 70$

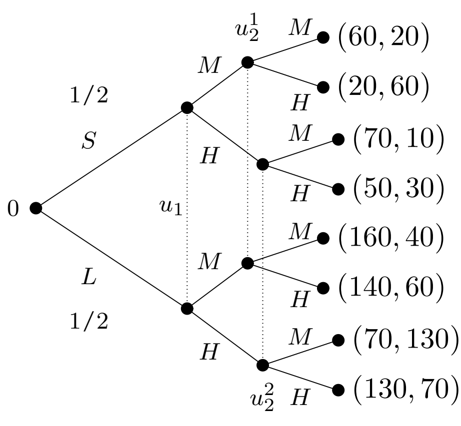


Figura 3.1.1: Juego de mercado en forma extensiva.

Otro hecho relevante es que, como la empresa dos es más pequeña y flexible, necesita menos tiempo para el lanzamiento del producto, por lo que puede observar la decisión de la primera empresa antes de tomar su propia decisión acerca de la calidad del producto. Esta situación interactiva multietápica puede ser representada mediante el juego en forma extensiva Γ de la Figura 3.1.1. $\diamond$

Ejemplo 3.1.2. *Un juego de cartas (Kuhn, 1953).* Tres personas A, B y C juegan el siguiente juego de cartas, en el que A y B forman un equipo y reparten todos sus beneficios y costes:

1) Se reparten aleatoriamente dos cartas a A y a C, una marcada con un 10 y otra marcada con un 5.

2) La persona con la carta más alta recibe un euro de la otra persona y, además, decide si terminar (S) o continuar el juego (M).

3) Si el juego continúa, B, sin saber quién obtuvo la carta más alta en la etapa anterior, decide si A y C intercambian (E) o no (N) sus cartas.

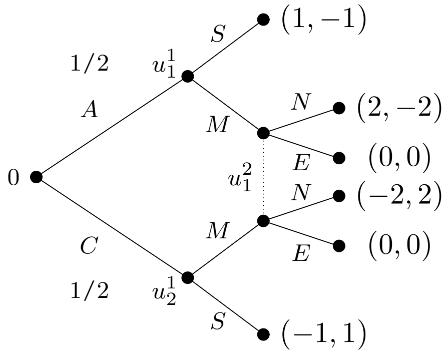
4) De nuevo, la persona con la carta más alta recibe un euro de la otra persona y el juego termina.

Esta situación interactiva se puede representar como un juego en forma extensiva de dos maneras diferentes. Podemos considerar que es un juego bipersonal (siendo A-B el jugador 1 y C el jugador 2). En este caso, el juego en forma extensiva correspondiente a esta situación es Γ_1, mostrado en la Figura 3.1.2(a). Ahora bien, esta situación también se puede analizar como un juego de tres personas (con A como jugador 1, C como jugador 2 y B como jugador 3). En este caso, el correspondiente juego en forma extensiva es Γ_2, en la Figura 3.1.2(b).[1] $\diamond$

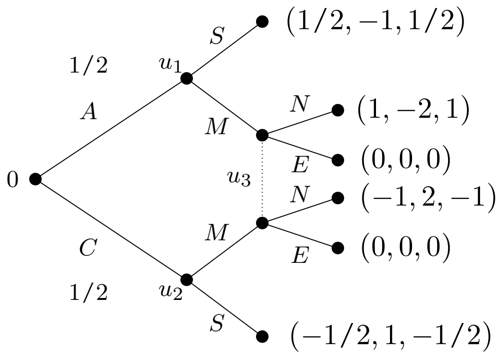
A continuación vamos a definir algunos tipos de juegos en forma extensiva.

Definición 3.1.2. Se dice que un juego en forma extensiva Γ es un **juego de información perfecta** si, para cada $i \in N$ y cada $u \in U_i$, u contiene exactamente un nodo de $A \backslash Z$. Intuitivamente, en un juego de información perfecta cada jugador está perfectamente informado, en cada uno de sus puntos de decisión, acerca de lo que ha ocurrido en el juego hasta ese punto. Si el juego no es de información perfecta, se dice que es de **información imperfecta**.

[1] Ésta es realmente la forma más adecuada de representar esta situación. La discusión en la página 27 de Selten (1975) puede ayudar a entender esta afirmación.



(a) Juego Γ_1.



(b) Juego Γ_2.

Figura 3.1.2: Dos representaciones distintas del juego del Ejemplo 3.1.2.

Definición 3.1.3. Se dice que un juego en forma extensiva Γ es un **juego de memoria perfecta** si, para cada jugador $i \in N$ y cada par de conjuntos de información $u, v \in U_i$, se tiene la siguiente condición: si un nodo $a \in v$ va después de una elección $c \in C_u$,[2] entonces cada nodo $\bar{a} \in v$ va después de c. Intuitivamente, en un juego de memoria perfecta cada jugador recuerda en cada uno de sus conjuntos de información todo lo que supo e hizo en todos sus conjuntos de información anteriores. Cuando un juego no es de memoria perfecta se dice que es un juego de **memoria imperfecta**.

De las definiciones se deduce de modo inmediato que todo juego de información perfecta es también de memoria perfecta. El juego del Ejemplo 2.1.5 es de información perfecta. El juego de mercado (Ejemplo 3.1.1) es un juego de información imperfecta pero de memoria perfecta. En cuanto al juego de cartas (Ejemplo 3.1.2) es de memoria imperfecta cuando lo representamos como un juego de dos jugadores, pero es de memoria perfecta (aunque de información imperfecta) cuando lo representamos como un juego de tres jugadores.

3.2. El Equilibrio de Nash en Juegos en Forma Extensiva

A continuación vamos a proponer y analizar diversos conceptos de estrategias en juegos en forma extensiva. Como hicimos en el capítulo de juegos en forma estratégica, queremos introducir un concepto de equilibrio para el que se pueda probar un resultado de existencia. Obsérvese que estamos tratando con juegos finitos, de modo que para que tal resultado de existencia sea posible, parece claro que los jugadores deben ser capaces de tomar decisiones aleatorizadas. A continuación definiremos las estrategias puras de los jugadores y, después, las llamadas *estrategias de comportamiento* (que involucran loterías).

Definición 3.2.1. Sea Γ un juego en forma extensiva y sea $i \in N$. Una **estrategia pura** del jugador i es una aplicación que asigna, a cada $u \in U_i$, una elección $x_i(u) \in C_u$. Un **perfil de estrategias puras** del juego Γ es un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que x_i es una estrategia pura del jugador i para todo $i \in N$. Se denotará por X_i el conjunto de estrategias puras del jugador i en Γ y por X el conjunto de perfiles de estrategias puras en Γ.

[2]Decimos que un nodo $a \in v$ va después de una elección c si uno de los arcos de c está en el camino que conecta d, el nodo distinguido, y a.

Definición 3.2.2. Sea Γ un juego en forma extensiva y sea $i \in N$. Una **estrategia de comportamiento** del jugador i es una aplicación que asigna, a cada $u \in U_i$, una lotería sobre C_u. Para cada $u \in U_i$ y cada $c \in C_u$, $b_i(c)$ es la probabilidad que el jugador i asigna a c cuando está en el conjunto de información u. Las loterías para los distintos conjuntos de información de un jugador son independientes. Un **perfil de estrategias de comportamiento** de Γ es un vector $b = (b_1, \ldots, b_n)$ tal que b_i es una estrategia de comportamiento del jugador i para todo $i \in N$. Denotamos por B_i el conjunto de estrategias de comportamiento del jugador i en Γ y por B el conjunto de perfiles de estrategias de comportamiento en Γ. Observemos que cada estrategia pura de un jugador se puede ver como una estrategia de comportamiento. En este sentido se puede escribir que $X_i \subset B_i$, para todo $i \in N$, y que $X \subset B$.

Consideremos un juego en forma extensiva Γ y notemos que, para cada $b \in B$ y cada $a \in A$, se puede calcular $\rho(a, b)$, la probabilidad de que el nodo a sea alcanzado si los jugadores juegan b. Obsérvese que $\{\rho(z, b) : z \in Z\}$ es una distribución de probabilidad sobre Z. Por lo tanto, si los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern, la **función de pago** de cada jugador $i \in N$ es la función $H_i : B \to \mathbb{R}$ dada, para cada $b \in B$, por

$$H_i(b) = \sum_{z \in Z} \rho(z, b) h_i(z),$$

En consecuencia, podemos asociar con Γ el juego en forma estratégica $G(\Gamma)$ dado por

$$G(\Gamma) = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n).$$

Este hecho se ilustró de manera informal al considerar el Ejemplo 2.1.5 de la situación interactiva multietápica al principio del Capítulo 2. En esta sección veremos otros ejemplos del paso de la forma extensiva a la forma estratégica de un juego. Ahora vamos a introducir el concepto de equilibrio de Nash en juegos en forma extensiva.

Definición 3.2.3. Sea Γ un juego en forma extensiva. Un **equilibrio de Nash** de Γ es un perfil de estrategias de comportamiento $b \in B$ que satisface que $H_i(b) \geq H_i(b_{-i}, b_i')$ para todo $b_i' \in B_i$ y para todo $i \in N$.

Proposición 3.2.1. *Sea Γ un juego en forma extensiva y sea x un perfil de estrategias puras de Γ. Entonces, x es un equilibrio de Nash de Γ si y sólo si*

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x_i') \tag{3.2.1}$$

para todo $x_i' \in X_i$ y para todo $i \in N$.

Demostración. Tengamos en cuenta que $X \subset B$ y, entonces, si x es un equilibrio de Nash de Γ la condición (3.2.1) debe cumplirse. Recíprocamente, sea $x \in X$ cumpliendo (3.2.1). Notemos que cada estrategia de comportamiento b_i del jugador i define una lotería s_i^b sobre su conjunto de estrategias puras X_i (es decir, una estrategia del jugador i en la extensión mixta de $G(\Gamma)$). Por tanto, para cada $i \in N$ y cada $b_i \in B_i$,

$$H_i(x_{-i}, b_i) = \sum_{x'_i \in X_i} H_i(x_{-i}, x'_i) s_i^b(x'_i) \leq H_i(x).$$

□

Corolario 3.2.2. *Sea Γ un juego en forma extensiva y sea $x \in X$, un perfil de estrategias puras de Γ. Entonces x es un equilibrio de Nash de Γ si y sólo si x es un equilibrio de Nash de $G(\Gamma)$.*

A continuación examinamos la cuestión de la existencia de equilibrios de Nash en juegos en forma extensiva. En virtud del teorema de Nash, para cada juego en forma extensiva Γ, la extensión mixta de $G(\Gamma)$ (que denotamos por $E(G(\Gamma))$) tiene al menos un equilibrio de Nash. Hay que tener en cuenta que cada estrategia de comportamiento de un jugador en Γ da lugar a una lotería sobre su conjunto de estrategias puras. Por lo tanto, cada $b_i \in B_i$ se puede ver como un elemento de S_i, el conjunto de estrategias del jugador i en $E(G(\Gamma))$. Sin embargo, el recíproco de esto no es cierto en general, ya que si un jugador usa estrategias mixtas puede hacer elecciones correladas en sus diferentes conjuntos de información. Por tanto, la cuestión de la existencia de equilibrios de Nash tal como se introdujeron en la Definición 3.2.3 (en términos de perfiles de estrategias de comportamiento) permanece abierta con lo que hemos comentado hasta ahora. Para dar una respuesta a esta cuestión, vamos a utilizar el teorema de Kuhn, cuya demostración se puede encontrar, por ejemplo, en González-Díaz y otros (2010).

Antes de enunciar el teorema debemos resaltar que, para cada nodo $a \in A$ y cada $s \in S$ (S es el conjunto de perfiles de estrategias en $E(G(\Gamma))$), se puede calcular la probabilidad $\rho(a, s)$ de que el nodo a sea alcanzado si los jugadores juegan s.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Kuhn)**.** *Sea Γ un juego en forma extensiva con memoria perfecta y sea $s_i \in S_i$ una estrategia mixta del jugador i (o sea, una estrategia del jugador i en $E(G(\Gamma))$). Entonces existe una estrategia de comportamiento $b_i \in B_i$ tal que, para todo nodo $a \in A$ y todo perfil de estrategias mixtas del resto de los jugadores $\bar{s}_{-i}$,*

$$\rho(a, (\bar{s}_{-i}, s_i)) = \rho(a, (\bar{s}_{-i}, b_i)). \tag{3.2.2}$$

Como consecuencia del teorema de Kuhn, en juegos en forma extensiva con memoria perfecta, para cada estrategia mixta $s_i \in S_i$ del jugador i existe una estrategia de comportamiento $b_i \in B_i$ de ese jugador que es *equivalente* en términos de las probabilidades consideradas en (3.2.2). Esto implica que, para cada perfil de estrategias mixtas $\bar{s} \in S$, $H_i(\bar{s}_{-i}, s_i) = H_i(\bar{s}_{-i}, b_i)$. Este hecho nos permite obtener el siguiente resultado de existencia para juegos con memoria perfecta.

Teorema 3.2.4. *Todo juego en forma extensiva con memoria perfecta Γ tiene al menos un equilibrio de Nash.*

Demostración. Por el teorema de Nash, $E(G(\Gamma))$ tiene al menos un equilibrio de Nash. Sea $s \in S$ uno de tales equilibrios. Por el teorema de Kuhn, existe un perfil de estrategias de comportamiento $b \in B$ tal que

$$\rho(a, (\bar{s}_{-i}, s_i)) = \rho(a, (\bar{s}_{-i}, b_i)), \tag{3.2.3}$$

para todo nodo $a \in A$, para todo perfil $\bar{s}_{-i}$ y para todo $i \in N$. Veamos que ese perfil de estrategias de comportamiento b es un equilibrio de Nash de Γ. Si no fuese así, existirían $i \in N$ y $b'_i \in B_i$ tales que

$$H_i(b) < H_i(b_{-i}, b'_i).$$

Pero entonces, es fácil comprobar que (3.2.3) implica que

$$H_i(s) < H_i(s_{-i}, b'_i).$$

Esto conlleva que s no es un equilibrio de Nash de $E(G(\Gamma))$ porque, como se ha dicho, B_i puede ser visto como un subconjunto de S_i. $\square$

Una consecuencia del teorema de Kuhn es que, para cada juego en forma extensiva con memoria perfecta Γ, si s es un perfil de estrategias mixtas y, además, un equilibrio de Nash de $E(G(\Gamma))$, se puede encontrar un perfil de estrategias de comportamiento b esencialmente idéntico a s que es un equilibrio de Nash del juego Γ. El siguiente resultado recíproco es también una consecuencia del teorema de Kuhn.

Teorema 3.2.5. *Sea Γ un juego en forma extensiva con memoria perfecta. Si b es un equilibrio de Nash de Γ, entonces induce un equilibrio de Nash de $E(G(\Gamma))$.*

Demostración. Notemos una vez más que B se puede ver como un subconjunto de S. Si b no es equilibrio de Nash de $E(G(\Gamma))$, entonces existen $i \in N$ y $s'_i \in S_i$ tales que

$$H_i(b) < H_i(b_{-i}, s'_i). \tag{3.2.4}$$

Ahora, en virtud del teorema de Kuhn, existe b'_i que es equivalente a s'_i en el sentido de tal teorema y, por lo tanto,

$$H_i(b) < H_i(b_{-i}, b'_i).$$

Pero esto quiere decir que b no es un equilibrio de Nash de Γ. □

No es cierto que todo juego en forma extensiva tenga equilibrios de Nash (o sea, que no podemos eliminar la hipótesis de memoria perfecta en el Teorema 3.2.4), como el siguiente ejemplo nos muestra.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos otra vez la situación interactiva descrita en el Ejemplo 3.1.2 y el correspondiente juego en forma extensiva Γ_1. El juego en forma estratégica asociado es el juego bipersonal de suma nula $G(\Gamma_1)$ que describe la siguiente tabla.

	S	M
SN	0	$-1/2$
SE	0	$1/2$
MN	$1/2$	0
ME	$-1/2$	0

Es fácil ver que $((0, 1/2, 1/2, 0), (1/2, 1/2))$ es el único equilibrio de Nash del juego matricial correspondiente. Notemos que la estrategia mixta del primer jugador $(0, 1/2, 1/2, 0)$ no es una estrategia de comportamiento. El juego en forma estratégica jugado por los jugadores de Γ_1 cuando utilizan estrategias de comportamiento es el juego bipersonal de suma nula (B_1, B_2, H) dado por:

1) $B_1 = \{b_1 = (\alpha\beta, \alpha(1-\beta), (1-\alpha)\beta, (1-\alpha)(1-\beta)) \,:\, \alpha, \beta \in [0, 1]\}$.

2) $B_2 = \{b_2 = (\delta, 1-\delta) \,:\, \delta \in [0, 1]\}$.

3) Para todo $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$,

$$H(b_1, b_2) = b_1 \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} b_2^t = (\delta - \alpha)(\beta - 1/2).$$

Notemos que, en este juego,

$$\Lambda(b_1) = \inf_{b_2 \in B_2} H(b_1, b_2) = inf_{\delta \in [0,1]} (\delta - \alpha)(\beta - 1/2) \leq 0,$$

para todo $b_1 \in B_1$. Entonces, $\lambda = \Lambda(\hat{b}_1) = 0$, si $\hat{b}_1$ es, por ejemplo, $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Vamos ahora a calcular el valor superior del juego γ. Se tiene que $\Gamma(b_2) = \sup_{b_1 \in B_1} H(b_1, b_2)$ y, por tanto,

$$\Gamma(b_2) = \sup_{(\alpha,\beta)\in[0,1]\times[0,1]} (\delta - \alpha)(\beta - 1/2) = \begin{cases} (1-\delta)/2 & \text{si } \delta \in [0, 1/2] \\ \\ \delta/2 & \text{si } \delta \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

En consecuencia $\gamma = \Gamma((1/2, 1/2)) = 1/4$. Por tanto (B_1, B_2, H) no es estrictamente determinado y, por lo tanto, Γ_1 no tiene equilibrios de Nash. $\diamond$

Vamos a ver a continuación tres ejemplos más que tratan con equilibrios de Nash en juegos en forma extensiva.

Ejemplo 3.2.2. Consideremos de nuevo el Ejemplo 3.1.2 pero esta vez modelizado como un juego de tres personas. El correspondiente juego en forma extensiva es Γ_2 y su juego en forma estratégica es $G(\Gamma_2)$ representado en la siguiente tabla.

	S	M
S	$0, 0, 0$	$-1/4, 1/2, -1/4$
M	$1/4, -1/2, 1/4$	$0, 0, 0$

N

	S	M
S	$0, 0, 0$	$1/4, -1/2, 1/4$
M	$-1/4, 1/2, -1/4$	$0, 0, 0$

E

Es fácil ver que este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (M, M, N) y (S, S, E). $\diamond$

Ejemplo 3.2.3. Vamos a considerar el juego en forma extensiva Γ del Ejemplo 3.1.1. Su correspondiente juego en forma estratégica $G(\Gamma)$ está dado en la siguiente tabla.

	MM	MH	HM	HH
M	$110, 30$	$110, 30$	$80, 60$	$80, 60$
H	$70, 70$	$90, 50$	$70, 70$	$90, 50$

Las estrategias del jugador 2 en este juego se interpretan del siguiente modo.

1) MM: el jugador 2 jugará M haga lo que haga el jugador 1.

2) MH: el jugador 2 jugará siempre lo mismo que el jugador 1.

3) HM: el jugador 2 nunca jugará lo mismo que el jugador 1.

4) HH: el jugador 2 jugará H haga lo que haga el jugador 1.

Notemos que éste es un juego bipersonal de suma constante y, en consecuencia, su análisis es similar al del juego de suma nula correspondiente a la función de pago del jugador 1. Es un ejercicio sencillo comprobar que en juegos de suma constante, de manera similar al caso de los juegos de suma nula, el pago a un jugador es el mismo en todos los equilibrios de Nash del juego. Por tanto, podemos llamar valor del juego al pago al jugador 1 en cualquier equilibrio de Nash. Se tiene que (M, HM) es un equilibrio de Nash en estrategias puras de $G(\Gamma)$ y, entonces, un equilibrio de Nash de Γ (ver Corolario 3.2.2). Por tanto, el valor del juego es 80.

En este mismo ejemplo, si el jugador 2 no puede observar la estrategia del jugador 1 antes de realizar su elección, entonces el juego en forma extensiva que realmente juegan es $\bar{\Gamma}$, recogido en la Figura 3.2.1.

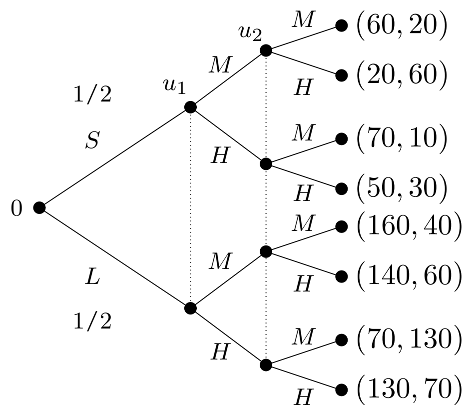


Figura 3.2.1: Primera modificación del juego de mercado.

El juego en forma estratégica asociado $G(\bar{\Gamma})$ se recoge en la siguiente tabla.

	M	H
M	$110, 30$	$80, 60$
H	$70, 70$	$90, 50$

Notemos que $G(\bar{\Gamma})$ no tiene equilibrios de Nash y que $E(G(\bar{\Gamma}))$ tiene un único equilibrio de Nash ((2/5,3/5),(1/5,4/5)). Notemos también que las estrategias de comportamiento de $\bar{\Gamma}$ son lo mismo que las estrategias de la extensión mixta de $G(\bar{\Gamma})$, ya que los dos jugadores tienen un único conjunto de información. Por tanto, $((2/5, 3/5), (1/5, 4/5))$ es el único equilibrio de Nash de $\bar{\Gamma}$. El valor de este juego es 86. Eso quiere decir que, si el jugador 2 puede observar la estrategia del jugador 1 antes de escoger la suya, obtiene un beneficio extra de 6 millones de euros. $\diamond$

Ejemplo 3.2.4. Vamos a considerar de nuevo el Ejemplo 3.1.1 pero suponiendo ahora que el jugador 1 ha realizado un estudio de mercado que le permite conocer de antemano si dicho mercado será grande o pequeño. El jugador 2 sabe que el 1 ha realizado el estudio, pero no conoce el resultado de tal estudio. En este caso, el juego en forma extensiva que se juega es $\hat{\Gamma}$, recogido en la Figura 3.2.2.

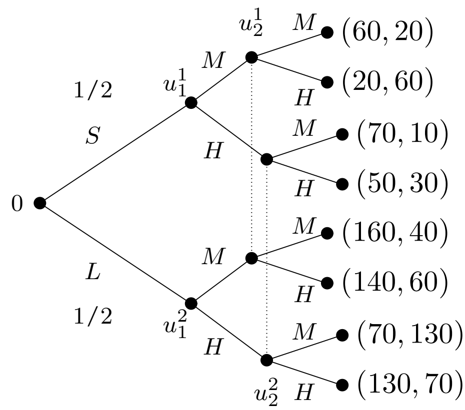


Figura 3.2.2: Segunda modificación del juego de mercado.

La siguiente tabla muestra el juego en forma estratégica asociado $G(\hat{\Gamma})$.

	MM	MH	HM	HH
MM	110, 30	110, 30	80, 60	80, 60
MH	65, 75	95, 45	45, 95	75, 65
HM	115, 25	105, 35	105, 35	95, 45
HH	70, 70	90, 50	70, 70	90, 50

Las estrategias del jugador 2 se interpretan como en el ejemplo anterior. Las estrategias del jugador 1 se interpretan del siguiente modo.

1) MM: el jugador 1 jugará M en cualquier caso.

2) MH: el jugador 1 jugará M si el mercado es pequeño y H si el mercado es grande.

3) HM: el jugador 1 jugará H si el mercado es pequeño y M si el mercado es grande.

4) HH: el jugador 1 jugará H en cualquier caso.

El perfil de estrategias (HM, HH) es un equilibrio de Nash de $G(\hat{\Gamma})$ y, por tanto, de $\hat{\Gamma}$. El valor de este juego es 95 en lugar de 80 (que era el valor de Γ). En consecuencia, el jugador 1 deberá realizar el estudio de mercado sólo si su coste es menor de 15 millones de euros. Nótese que, si el jugador 1 es capaz de mantener en secreto la realización del estudio, entonces el jugador 2 creerá que el juego realmente jugado es Γ; en tal caso, el jugador 2 elegirá HM y el jugador 1 tendrá un beneficio extra de 10 millones de euros. ◇

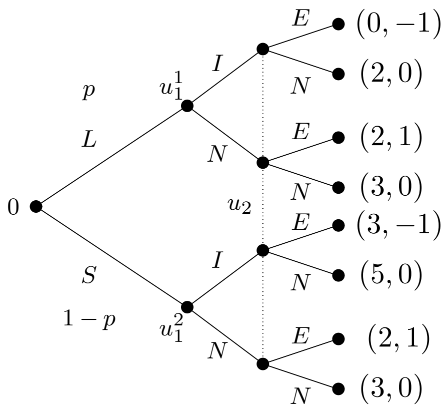
Para terminar esta sección presentaremos un ejemplo más, que ilustra cómo los juegos en forma extensiva son una herramienta adecuada para analizar los llamados *juegos de información incompleta*. En general, se dice que un juego es de información incompleta cuando algunos jugadores no conocen *con precisión* algunos de los elementos del juego. La teoría de juegos de información incompleta se inicia en los artículos de Harsanyi (1967-68). Desde entonces, ha generado una amplia literatura y ha demostrado su relevancia como herramienta para el análisis económico. En González-Díaz y otros (2010) se dedica un capítulo a introducir formalmente y estudiar dicha teoría.

Ejemplo 3.2.5. Consideremos que la empresa uno es el único vendedor de un cierto producto en una cierta ciudad. La empresa dos está considerando la posibilidad de vender también ese producto en esa ciudad. La empresa dos sabe que si entra en ese mercado, la empresa uno puede reaccionar mejorando sus canales de distribución. Ahora bien, la empresa dos no sabe si la inversión que la empresa uno debe realizar para ejecutar esa mejora es grande o pequeña. La empresa dos cree que la probabilidad de que la empresa uno deba hacer una inversión grande es $p \in (0,1)$. Esta creencia está basada en hechos objetivos que son conocidos públicamente y, por tanto, p es conocida también por la empresa uno. También son de conocimiento público los beneficios en millones de euros en todos los posibles escenarios, que están recogidos en las dos tablas siguientes.

Grande (L)	Entra (E)	No (N)
Invierte (I)	$0,-1$	$2,0$
No (N)	$2,1$	$3,0$

Pequeña (S)	Entra (E)	No (N)
Invierte (I)	$3,-1$	$5,0$
No (N)	$2,1$	$3,0$

Esta situación es un juego de información incompleta porque la empresa dos no conoce con precisión la función de pago de la empresa uno. Supongamos que los beneficios de las empresas son funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern. En tal caso, este juego es en realidad muy sencillo y se podría analizar directamente, sin hacer uso de la teoría de juegos. Está claro que la empresa uno debe escoger N si la inversión necesaria es L, y debe escoger I si la inversión necesaria es S. De esta forma, la empresa dos va a obtener $p-(1-p)=2p-1$ cuando escoja E, y 0 cuando escoja N. Por tanto, la empresa dos puede escoger cualquier opción si $p=1/2$, y debe escoger E si $p>1/2$ o N si $p<1/2$. Veamos ahora cómo podemos analizar esta situación utilizando los juegos en forma extensiva. Si representamos las creencias de la empresa dos a través de un movimiento aleatorio, el juego en forma extensiva Γ de la Figura 3.2.3(a) modeliza esta situación, y su forma estratégica asociada $G(\Gamma)$ es la dada en la Figura 3.2.3(b).



(a) La forma extensiva Γ.

	E	N
II	$3-3p$,-1	$5-3p, 0$
IN	$2-2p$,$1-2p$	$3-p, 0$
NI	$3-p$,$2p-1$	$5-2p$,0
NN	2,1	3,0

(b) Forma estratégica asociada $G(\Gamma)$.

Figura 3.2.3: Juego con información incompleta.

En $E(G(\Gamma))$, NI es una estrategia estrictamente dominante de la empresa uno, en el sentido de que $H_1(NI, s_2) > H_1(s_1, s_2)$ para todo $s_1 \in S_1$ y todo $s_2 \in S_2$ (recuérdese que $p \in (0,1)$). Por lo tanto, si s es un equilibrio de $E(G(\Gamma))$, entonces $s_1 = NI$. En consecuencia, el conjunto de los equilibrios de Nash de $E(G(\Gamma))$ está formado por todos los $s \in S$ tales que $s_1 = NI$ y, además,

$$s_2 = \begin{cases} N & \text{si } p < 1/2 \\ s_2 \in S_2 & \text{si } p = 1/2 \\ E & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que, en este caso, los conjuntos de equilibrios de Nash de Γ y $E(G(\Gamma))$ son idénticos. Obsérvese, por otro lado, que tales conjuntos coinciden con el resultado del estudio directo de esta situación realizado en la primera parte de este ejemplo. $\diamond$

Este ejemplo ilustra cómo puede analizarse un juego de información incompleta haciendo uso de un juego en forma extensiva de información imperfecta. Aunque la situación tratada aquí es muy sencilla, los juegos en forma extensiva pueden usarse para analizar situaciones de información incompleta más complejas.

3.3. El Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Cuando tratamos los juegos en forma estratégica vimos que, si queremos seleccionar perfiles de estrategias que realmente se autoimpongan, es necesario refinar el concepto de equilibrio de Nash. Esto es cierto también en el contexto de los juegos en forma extensiva, tal como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos el juego en forma extensiva Γ de la Figura 3.3.1. Nótese que (L, l) es un equilibrio de Nash de Γ. Sin embargo (L, l) realmente no se autoimpone, en el sentido de que, aunque ambos jugadores hubieran acordado informalmente jugar según tal perfil, ambos deberían desviarse. Veamos por qué. El jugador 2 no gana si planea r en lugar de l ya que su conjunto de información no se alcanza si el jugador 1 juega L; sin embargo, si su conjunto de información se alcanzara, el jugador 2 jugaría r. Como el jugador 1 se da cuenta de este hecho, se desviará y jugará R. El único equilibrio de Nash razonable en este juego es (R, r).

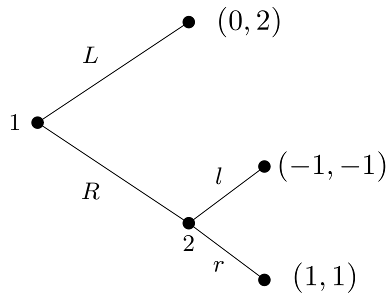


Figura 3.3.1: El equibrio de Nash (L, l) no se autoimpone.

$\diamond$

El ejemplo anterior ilustra el principal problema del concepto de equilibrio de Nash en juegos en forma extensiva: un equilibrio de Nash puede estar basado en planes irracionales en algunos conjuntos de información de algunos jugadores que no son alcanzados si se juega dicho equilibrio. Para evitar este problema, se han definido algunos refinamientos del equilibrio de Nash en juegos en forma extensiva. El más importante es, quizá, el equilibrio perfecto en subjuegos, introducido en Selten (1965) y estudiado en Selten (1975). También son especialmente destacables los conceptos de equilibrio perfecto (Selten, 1975) y equilibrio secuencial (Kreps y Wilson, 1982); van Damme (1991) es una buena referencia para profundizar en el estudio de los refinamientos en juegos en forma extensiva. En esta sección trataremos el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos.

Definición 3.3.1. Sea Γ un juego en forma extensiva y sea un nodo $a \in A \backslash Z$. Se dirá que Γ **puede ser descompuesto en** a si no hay conjuntos de información conteniendo simultáneamente nodos del conjunto $F(a)$, consistente en todos los nodos que van después de a,[3] y nodos del conjunto $A \backslash F(a)$.

Definición 3.3.2. Sea Γ un juego en forma extensiva que puede ser descompuesto en $a \in A \backslash Z$. Se denotará por Γ_a el juego que Γ induce en el árbol cuyo nodo distinguido es a, y se dirá que Γ_a es un **subjuego** de Γ. Si b es un perfil de estrategias de comportamiento en Γ, se denotará por b_a el perfil de estrategias de comportamiento inducido por b en Γ_a.

Definición 3.3.3. Sea Γ un juego en forma extensiva. Se dirá que $b \in B$ es un **equilibrio perfecto en subjuegos** de Γ si b_a es un equilibrio de Nash de Γ_a para cada subjuego Γ_a de Γ.

A continuación ilustraremos estas definiciones en el juego del Ejemplo 3.3.1. Este ejemplo, como veremos, también demuestra que pueden existir equilibrios de Nash que no son perfectos en subjuegos. Por otra parte, es evidente que todo equilibrio perfecto en subjuegos es también un equilibrio de Nash, ya que todo juego en forma extensiva es un subjuego de sí mismo.

Ejemplo 3.3.2. Considérese el juego Γ del Ejemplo 3.3.1. Aparte de sí mismo, el único subjuego de Γ es el juego dado en la Figura 3.3.2.[4] El único equilibrio de Nash de este juego es r, por lo que el único equilibrio perfecto en subjuegos de Γ es (R, r). $\diamond$

A continuación enunciamos un resultado de gran utilidad cuya demostración es sencilla (y se deja al lector).

Proposición 3.3.1. *Sea Γ un juego en forma extensiva y supongamos que Γ se puede descomponer en los nodos $a_1, \ldots, a_m$, que son tales que a_j no va después de a_k para todo $j, k \in \{1, \ldots, m\}$. Consideremos un perfil de estrategias de comportamiento $b \in B$ y denotemos por $\Gamma_{-(a_1,\ldots,a_m)}^{b_{a_1,\ldots,a_m}}$ el juego en*

[3] Se dirá que el nodo a' va después del nodo a si a pertenece a uno de los arcos en el camino que conecta d, el nodo distinguido, y a'. Nótese que el nodo a va después de sí mismo.

[4] Nótese que, en este juego, $P_1 = \emptyset$.

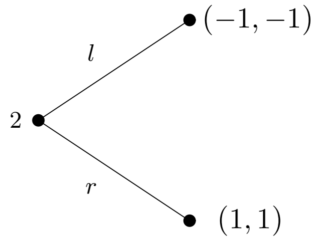


Figura 3.3.2: El subjuego del Ejemplo 3.3.1.

forma extensiva resultante de Γ *después de borrar los subjuegos* $\Gamma_{a_1},\dots,\Gamma_{a_m}$ *y de definir, para cada* $i \in N$ *y cada* $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$h_i^{\Gamma^{b_{a_1,\dots,a_m}}_{-(a_1,\dots,a_m)}}(a_j) = H_i^{\Gamma_{a_j}}(b_{a_j}).$$

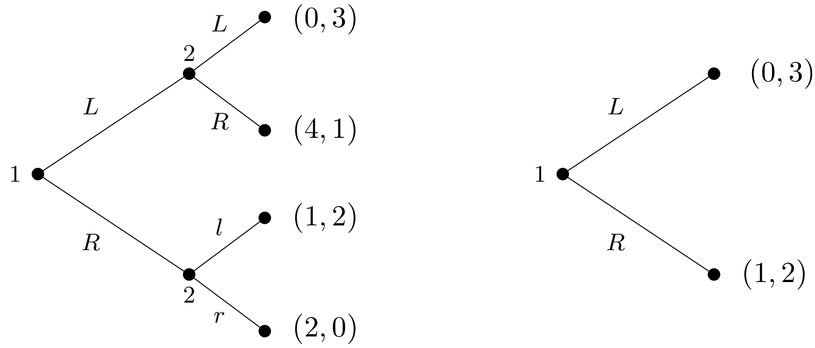
Si b_{a_j} *es un equilibrio de Nash de* Γ_{a_j} *para todo* $j \in \{1,\dots,m\}$, *y* $b_{-(a_1,\dots,a_m)}$ *es un equilibrio de Nash de* $\Gamma^{b_{a_1,\dots,a_m}}_{-(a_1,\dots,a_m)}$,[5] *entonces* b *es un equilibrio de Nash de* Γ.

Para ilustrar la proposición anterior veamos sus implicaciones en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.3.3. Sea Γ el juego en forma extensiva de la Figura 3.3.3 (a). Si, procediendo de arriba a abajo, llamamos a_1 y a_2 a los dos nodos de Γ que no son terminales ni distinguidos, es claro que L y l son los únicos equilibrios de Nash de Γ_{a_1} y Γ_{a_2}, respectivamente. El juego $\Gamma^{(L,l)}_{-(a_1,a_2)}$ es el dado en la Figura 3.3.3 (b). Obsérvese que R es el único equilibrio de Nash de $\Gamma^{(L,l)}_{-(a_1,a_2)}$. Por tanto, por la proposición anterior, (R, Ll) es un equilibrio de Nash de Γ. Nótese además que, por construcción, (R, Ll) también es perfecto en subjuegos. Este ejemplo ilustra el llamado procedimiento de **inducción hacia atrás** para identificar equilibrios perfectos en subjuegos en un juego en forma extensiva. Tal procedimiento consiste en descomponer el juego original en otros menos complejos y, empezando por los más simples (al final del juego), proceder hacia atrás identificando los equilibrios de Nash de los subjuegos y sustituyendo tales subjuegos por los vectores de pago de sus equilibrios de Nash. $\diamond$

La inducción hacia atrás es también la idea principal de la demostración de los dos resultados siguientes.

[5] $b_{-(a_1,\dots,a_m)}$ denota la restricción de b al juego $\Gamma^{b_{a_1,\dots,a_m}}_{-(a_1,\dots,a_m)}$.



(a) Un juego en forma extensiva. (b) El juego $\Gamma^{(L,l)}_{-(a_1,a_2)}$.

Figura 3.3.3: Ilustrando el proceso de inducción hacia atrás.

Teorema 3.3.2. *Todo juego en forma extensiva de memoria perfecta* Γ *tiene al menos un equilibrio perfecto en subjuegos.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en t, la longitud del juego Γ (siendo la longitud de un juego el número de arcos del camino más largo contenido en su árbol). Si la longitud de Γ es uno, el resultado es obviamente cierto. Supongamos que el resultado es cierto para todo juego de longitud menor o igual que $t-1$ y probémoslo para un juego Γ de longitud t. Si Γ es su único subjuego, entonces todos sus equilibrios de Nash son perfectos en subjuegos y el resultado es cierto. En otro caso, se descompone Γ en un conjunto de nodos $a_1, \ldots, a_m$ tales que a_j no va después de a_k para todo $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ y de tal forma que $\Gamma^{b_{a_1,\ldots,a_m}}_{-(a_1,\ldots,a_m)}$ no tiene subjuegos diferentes de él mismo (para un b cualquiera; el b elegido es irrelevante). Por la hipótesis de inducción, podemos encontrar un equilibrio perfecto en subjuegos $\bar{b}_{a_j}$ de Γ_{a_j} para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ahora, tomemos un equilibrio de Nash de $\Gamma^{\bar{b}_{a_1,\ldots,a_m}}_{-(a_1,\ldots,a_m)}$: $\bar{b}_{-(a_1,\ldots,a_m)}$. Claramente, $\bar{b} = (\bar{b}_{-(a_1,\ldots,a_m)}, \bar{b}_{a_1}, \ldots, \bar{b}_{a_m})$ es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ. $\square$

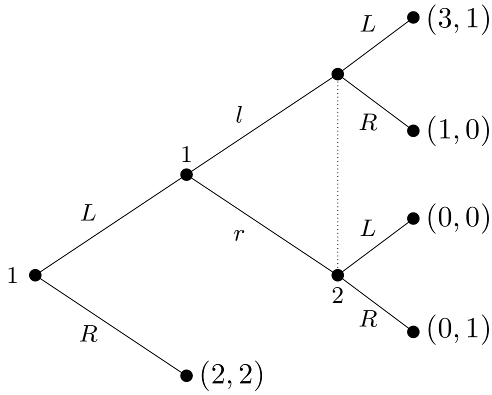
Teorema 3.3.3. *Todo juego en forma extensiva de información perfecta* Γ *tiene al menos un perfil de estrategias puras que es un equilibrio perfecto en subjuegos.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en t, la longitud del juego Γ. Si la longitud de Γ es uno, el resultado es obviamente cierto. Supongamos que el resultado es cierto para todo juego de longitud menor o igual que $t-1$ y probémoslo para un juego Γ de longitud t. Descompongamos Γ en un conjunto de nodos $a_1, \ldots, a_m$ tales que a_j no va después de a_k

para todo $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ y de tal forma que $\Gamma_{-(a_1,\ldots,a_m)}^{b_{a_1,\ldots,a_m}}$ tiene longitud uno (para un b cualquiera; el b elegido es irrelevante). Por la hipótesis de inducción, podemos encontrar un perfil de estrategias puras $\bar{x}_{a_j}$ que es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ_{a_j}, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ahora, tómese un perfil de estrategias puras que sea un equilibrio de Nash de $\Gamma_{-(a_1,\ldots,a_m)}^{\bar{x}_{a_1,\ldots,a_m}}$: $\bar{x}_{-(a_1,\ldots,a_m)}$. Claramente, $\bar{x} = (\bar{x}_{-(a_1,\ldots,a_m)}, \bar{x}_{a_1}, \ldots, \bar{x}_{a_m}) \in X$ es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ. $\square$

Los dos ejemplos siguientes muestran que no hay relación entre los equilibrios perfectos en subjuegos de un juego en forma extensiva Γ y los equilibrios perfectos de la extensión mixta del correspondiente juego en forma estratégica $G(\Gamma)$.

Ejemplo 3.3.4. Consideremos el juego en forma extensiva Γ de la Figura 3.3.4 (a). En la Figura 3.3.4 (b) podemos ver la forma estratégica asociada.



(a) Juego en forma extensiva.

	L	R
Ll	3, 1	1, 0
Lr	0, 0	0, 1
Rl	2, 2	2, 2
Rr	2, 2	2, 2

(b) Forma estratégica asociada.

Figura 3.3.4: Un juego en forma extensiva y su forma estratégica asociada.

El único subjuego de Γ diferente de él mismo está dado en la Figura 3.3.5. Claramente, (l, L) es el único equilibrio de Nash de este subjuego. Por tanto, (Ll, L) es el único equilibrio perfecto en subjuegos de Γ. Nótese que la extensión mixta de $G(\Gamma)$ tiene tres equilibrios perfectos en estrategias puras: (Ll, L), (Rl, R) y (Rr, R). En consecuencia, (Rl, R) y (Rr, R) son equilibrios perfectos de $E(G(\Gamma))$ que no son equilibrios perfectos en subjuegos de Γ. $\diamond$

Ejemplo 3.3.5. Considérese el juego en forma extensiva Γ de la Figura 3.3.6 (a). Este juego tiene dos perfiles de estrategias puras que son equi-

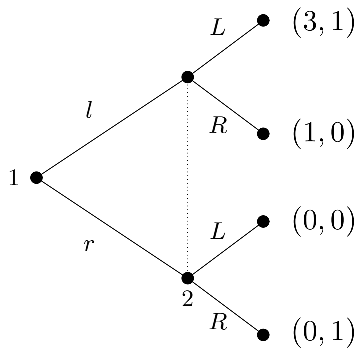
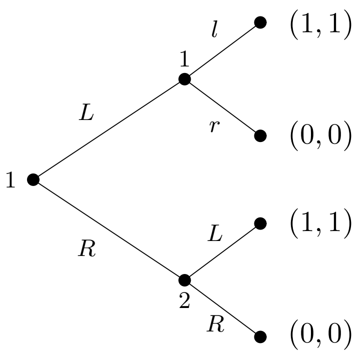


Figura 3.3.5: Subjuego asociado con el juego de la Figura 3.3.4 (a).

librios perfectos en subjuegos: (Ll, L) y (Rl, L). La Figura 3.3.6 (b) muestra el juego en forma estratégica asociado $G(\Gamma)$.



(a) Juego en forma extensiva.

	L	R
Ll	$1,1$	$1,1$
Lr	$0,0$	$0,0$
Rl	$1,1$	$0,0$
Rr	$1,1$	$0,0$

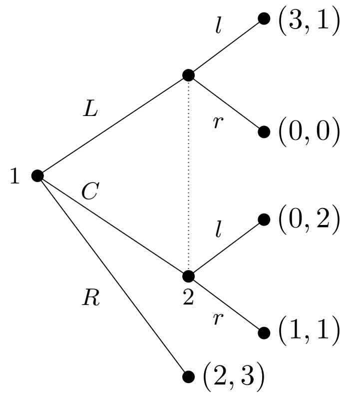
(b) Forma estratégica asociada.

Figura 3.3.6: Un juego en forma extensiva y su forma estratégica asociada.

Es fácil comprobar que el único equilibrio perfecto de la extensión mixta de $G(\Gamma)$ es (Ll, L). Por tanto, (Rl, L) es un equilibrio perfecto en subjuegos del juego en forma extensiva que no es equilibrio perfecto de la extensión mixta del juego en forma estratégica asociado. $\diamond$

Los siguientes ejemplos muestran que también hay equilibrios perfectos en subjuegos que no se autoimponen. Por ello, también se han introducido y estudiado refinamientos del equilibrio perfecto en subjuegos. En este texto no trataremos ninguno de tales refinamientos. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, van Damme (1991).

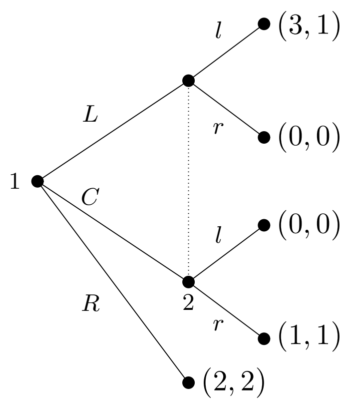
Ejemplo 3.3.6. Considérese el siguiente juego en forma extensiva Γ.



Como Γ no tiene subjuegos diferentes de sí mismo, todos sus equilibrios de Nash son perfectos en subjuegos. Por lo tanto, (R, r) es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ. Sin embargo, (R, r) no se autoimpone porque, si el conjunto de información del jugador 2 es alcanzado, el jugador 2 jugará l; como el jugador 1 es capaz de darse cuenta de esto, jugará L. ◇

A continuación presentamos un nuevo ejemplo que, aun siendo similar al que acabamos de ver, requiere un tipo de razonamiento distinto para identificar aquellos equilibrios que no se autoimponen. Por contraposición con la inducción hacia atrás, esta línea de razonamiento se conoce como inducción hacia delante.

Ejemplo 3.3.7. Considérese el juego en forma extensiva Γ de la siguiente figura.



Como Γ no tiene subjuegos diferentes de sí mismo, todos sus equilibrios de Nash son perfectos en subjuegos. Por lo tanto, (R, r) es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ. Sin embargo, (R, r) no se autoimpone porque, si el conjunto de información del jugador 2 es alcanzado, él sabe que el jugador 1 sólo puede haber jugado L (en otro caso obtendría un pago peor que el que obtiene jugando R); por lo tanto, el jugador 2 jugará l y, como el jugador 1 es capaz de darse cuenta de esto, jugará L. $\diamond$

Para acabar esta sección presentamos el modelo de duopolio de Stackelberg. Tal modelo proporciona una aplicación interesante del equilibrio perfecto en subjuegos y, a la vez, muestra que los modelos y algunos conceptos de juegos en forma extensiva que se han presentado en el caso finito se pueden extender de modo natural al caso infinito.

Ejemplo 3.3.8. *Duopolio de Stackelberg.* Un duopolio de Stackelberg sólo difiere de un duopolio de Cournot en el hecho de que las dos empresas no eligen simultáneamente la cantidad que producen. Por el contrario, una de las empresas (la líder) hace su elección en primer lugar. La segunda empresa (la seguidora), después de observar la elección de la primera, hace su elección. Esta situación puede ser modelizada como un juego en forma extensiva infinito de información perfecta. Emplearemos la misma notación que en los Ejemplos 2.1.2 y 2.2.2 en los que presentamos el oligopolio de Cournot y determinamos sus equilibrios de Nash.

Un equilibrio perfecto en subjuegos de este juego es un par $(\bar{x}_1, g)$, con $\bar{x}_1 \in X_1$ y $g \in X_2^{X_1}$, que satisface:

1) $g(x_1) \in B_2(x_1)$, para todo $x_1 \in X_1$, y

2) $H_1(\bar{x}_1, g(\bar{x}_1)) \geq H_1(x_1, g(x_1))$, para todo $x_1 \in X_1$.

Un **equilibrio de Stackelberg** es un par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ tal que $\bar{x}_2 = g(\bar{x}_1)$ para un equilibrio perfecto en subjuegos $(\bar{x}_1, g)$. En el Ejemplo 2.2.2 se obtuvo que, para todo $x_1 \in X_1$,

$$B_2(x_1) = \begin{cases} \dfrac{a - x_1 - c}{2} & \text{si } x_1 < a - c, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En consecuencia, para obtener un equilibrio de Stackelberg es suficiente encontrar un máximo de la siguiente función:

$$f(x_1) = x_1(a - x_1 - \frac{a - x_1 - c}{2} - c) = x_1 \frac{a - x_1 - c}{2}.$$

Nótese que

$$f'(x_1) = \frac{a - x_1 - c}{2} - \frac{x_1}{2}$$

y, por lo tanto, el máximo de f es $\frac{a-c}{2}$. Consecuentemente, el único equilibrio de Stackelberg es $((a - c)/2, (a - c)/4)$ y los pagos correspondientes a los jugadores son, respectivamente, $(a-c)^2/8$ y $(a-c)^2/16$. La Tabla 3.3.1 resume los resultados para las empresas en un monopolio, un duopolio de Cournot y un duopolio de Stackelberg.

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2$	$H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$H_1 + H_2$
Monopolio			$\frac{a-c}{2}$			$\frac{(a-c)^2}{4}$
Cournot	$\frac{a-c}{3}$	$\frac{a-c}{3}$	$\frac{2(a-c)}{3}$	$\frac{(a-c)^2}{9}$	$\frac{(a-c)^2}{9}$	$\frac{2(a-c)^2}{9}$
Stackelberg	$\frac{a-c}{2}$	$\frac{a-c}{4}$	$\frac{3(a-c)}{4}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{16}$	$\frac{3(a-c)^2}{16}$

Tabla 3.3.1: Resultados para el caso de monopolio y duopolio (Cournot y Stackelberg).

Nótese que, en este ejemplo, es mejor para una empresa ser líder y revelar su estrategia al otro jugador. Esto es lo contrario de lo que ocurría en el juego de mercado (Ejemplo 3.1.1). Podemos, por tanto, concluir que tener información sobre el comportamiento del otro en un juego bipersonal no siempre es bueno. Desde el punto de vista de los consumidores, observemos que los precios descienden al pasar de un monopolio a un duopolio de Cournot y también descienden al pasar de un duopolio de Cournot a un duopolio de Stackelberg. $\diamond$

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.1 (El viaje de Sherlock Holmes (Carreras y otros, 2001))**.** El conocido detective Sherlock Holmes se ve obligado a abandonar temporalmente Londres y refugiarse en Suiza como consecuencia de las amenazas de su eterno enemigo, el profesor Moriarty. Holmes debe elegir entre efectuar el viaje en tren o hacerlo en coche y Moriarty, que conocerá la decisión de Holmes gracias a sus espías, debe decidir en cada caso si le persigue en el mismo medio de transporte que ha empleado Holmes o toma un avión para llegar antes a Suiza. Las probabilidades de supervivencia de Holmes son las siguientes: el 60 % si ambos viajan en tren, el 70 % si viajan en coche, el 40 % si Holmes va en tren y Moriarty en avión y el 10 % si Holmes va en coche y Moriarty en avión. Represéntese este problema por medio de un juego en forma extensiva.

Ejercicio 3.2. Considérese el siguiente juego en forma extensiva de suma nula en tres etapas:

- A elige $x \in \{-1, 1\}$.
- B, sin conocer x, elige $y \in \{-1, 1\}$.

- C, sin conocer x e y, elige $z \in \{0, 2\}$.

El pago a A es xyz y B y C se reparten equitativamente $-xyz$. Escríbase la forma extensiva y estratégica de este juego considerando que A, B y C son tres jugadores diferentes. Búsquense todos los perfiles de estrategias puras que sean equilibrios de Nash del juego en forma extensiva.

Ejercicio 3.3. Escríbanse las formas extensiva y estratégica del juego anterior considerando que A es el jugador 1 y $\{B, C\}$ es el jugador 2. Hállese un equilibrio de Nash del juego en forma extensiva. Además, indíquese razonadamente si es un juego de memoria perfecta.

Ejercicio 3.4. Considérese el siguiente juego en forma extensiva en tres etapas y de memoria imperfecta:

- El jugador 1 elige $x \in \{-1, 2\}$.
- El jugador 2, conociendo x, elige $y \in \{0, 1\}$.
- El jugador 1, desconociendo x e y, elige $z \in \{-1, 1\}$.

El pago al jugador 1 es xy y el pago al jugador 2 es xz. Escríbanse las formas extensiva y estratégica de este juego. Búsquense todos los perfiles de estrategias puras que sean equilibrio de Nash de este juego en forma extensiva (si existe alguno).

Ejercicio 3.5. Considérese ahora el mismo juego que en el ejercicio anterior salvo que en la primera etapa se selecciona $x \in \{-1, 2\}$ mediante un mecanismo aleatorio que da la misma probabilidad a -1 y 2. Escríbanse las formas extensiva y estratégica de este juego y calcúlense todos sus equilibrios de Nash.

Ejercicio 3.6. Póngase un ejemplo de un juego de información perfecta de tres jugadores con un equilibrio de Nash que no sea perfecto en subjuegos.

Ejercicio 3.7. Considérese el siguiente juego bipersonal infinito. El jugador 1 elige $x \in [0, 1]$. Si $x \leq 1/2$ el juego termina y el pago a ambos jugadores es x. Si $x > 1/2$ el jugador 2 elige $y \in \{-1, 1\}$, el pago al jugador 1 es xy y el pago al jugador 2 es $xy/10$. Proporciónese un equilibrio perfecto en subjuegos de este juego y un equilibrio de Nash que no sea perfecto en subjuegos.

Ejercicio 3.8. Considérese el siguiente juego en forma extensiva en tres etapas:

- Se selecciona aleatoria y equiprobablemente $x \in \{-1, 2\}$.
- El jugador 1, desconociendo x elige $y \in \{0, 1\}$.
- El jugador 2, desconociendo y pero conociendo x, elige $z \in \{-1, 1\}$.

El pago al jugador 1 es xz y el pago al jugador 2 es $y - xz$. Escríbanse las formas extensiva y estratégica de este juego. Búsquense todos los perfiles de estrategias puras que sean equilibrios de Nash. Indíquese razonadamente si existe un equilibrio de Nash de este juego que no sea perfecto en subjuegos.

Ejercicio 3.9. Considérese el siguiente juego de suma nula con información perfecta en cinco etapas. Si i es una etapa impar, el jugador 1 elige entre C_i y T_i. Si i es una etapa par, el jugador 2 elige entre C_i y T_i. El juego termina si algún jugador elige T_i o en la etapa 5. Si el juego termina en la etapa i e i es impar el pago al jugador 1 es i. Si el juego termina en la etapa i e i es par el pago al jugador 1 es $-i$. Escríbase la forma extensiva de este juego y hállese un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejercicio 3.10. Dos empresas competidoras, 1 y 2, que fabrican coches de lujo, controlan cierto mercado, con cuotas del 40 % y del 60 %, respectivamente. La empresa 1 se plantea dos alternativas: llevar a cabo una promoción revolucionaria y muy rápida o hacer una promoción más clásica y de mayor duración. En el primer caso, la empresa 1 conseguirá una cuota de mercado del 70 % con probabilidad p y una cuota del 20 % con probabilidad $1 - p$, dependiendo de la respuesta positiva de los consumidores a su promoción. En el segundo caso, la empresa 2 puede reaccionar de tres formas posibles: con una contrapromoción agresiva, con una promoción clásica o sin hacer nada especial. La cuota de mercado que conseguirá la empresa 2 en cada caso será, respectivamente, del 70 %, el 60 % o el 50 %. Se supone que el 100 % del mercado se reparte únicamente entre estas dos empresas. Se pide:

a) Descríbase el conflicto como un juego en forma extensiva y dígase si es de información perfecta.

b) Obténgase la forma estratégica asociada.

c) Para cada valor de $p \in [0, 1]$, obténgase un equilibrio perfecto en subjuegos.

d) Tómese $p = 1/2$ y obténgase un equilibrio de Nash que no sea perfecto en subjuegos.

Ejercicio 3.11. Demuéstrese que el juego de memoria imperfecta de la Figura 3.4.1 no tiene equilibrios de Nash.[6]

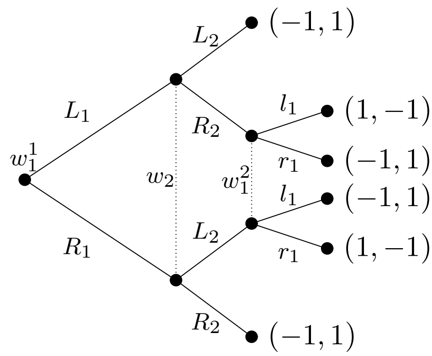


Figura 3.4.1: El juego del Ejercicio 3.11.

Ejercicio 3.12 (El problema de los stocks (Carreras y otros, 2001))**.** Dos empresas competidoras deben suministrar a un mercado un determinado producto cuya demanda puede ser, con igual probabilidad, de 1, 2 o 3 unidades. Sin conocer el valor concreto de la demanda, cada empresa debe decidir qué cantidad de unidades, entre 1 y 3, ofrece a la venta. El beneficio por cada unidad vendida es de 18. La pérdida por cada unidad no vendida es de 3. Haremos las siguientes suposiciones relativas a las preferencias del mercado sobre los artículos ofrecidos por ambas empresas:

- Si la demanda es de un artículo, lo vende la empresa cuya oferta es mayor. En caso de empate, lo vende la empresa 1, que tiene un mayor prestigio.
- Si la demanda es de dos artículos, cada empresa vende uno.
- Si la demanda es de tres artículos, cada empresa vende al menos uno. El tercer artículo lo vende la empresa cuya oferta es mayor o, en caso de empate, la empresa 1. Si la oferta no cubre la demanda, cada empresa vende un artículo y queda un consumidor sin satisfacer.

La Tabla 3.4.1 describe las ventas realizadas por cada empresa según la demanda del mercado y las ofertas de ambas.

a) Complétese la Tabla 3.4.2 que describe el problema como un juego en forma estratégica.

[6] Este juego ha sido tomado de Myerson (1991).

Demandas	1	2	3
Ofertas	**Ventas**	**Ventas**	**Ventas**
1-1	1-0	1-1	1-1
1-2	0-1	1-1	1-2
1-3	0-1	1-1	1-2
2-1	1-0	1-1	2-1
2-2	1-0	1-1	2-1
2-3	0-1	1-1	1-2
3-1	1-0	1-1	2-1
3-2	1-0	1-1	2-1
3-3	1-0	1-1	2-1

Tabla 3.4.1: Ventas en el problema de los stocks.

b) Elimínese, para cada una de las empresas, las estrategias dominadas.

c) Dígase si existe algún equilibrio de Nash del juego.

d) En la extensión mixta del juego bipersonal 2×2 obtenido en el apartado b), calcúlense todos los equilibrios de Nash.

E1/E2	1	2	3
1	$18, 11$	$-, -$	$11, 19$
2	$-, -$	$22, 8$	$8, 19$
3	$19, 11$	$-, -$	$19, 5$

Tabla 3.4.2: Juego en forma estratégica para el problema de los stocks.

Ejercicio 3.13. Considérese el siguiente juego en forma extensiva en tres etapas.

- El primer jugador elige L o R.
- Se selecciona aleatoriamente L con probabilidad $1/3$ o R con probabilidad $2/3$.
- El segundo jugador, conociendo la elección del primer jugador y desconociendo el resultado de la segunda etapa, elige L o R.

Si en las tres etapas la alternativa elegida es la misma, ambos jugadores ganan uno. En otro caso: si algún jugador selecciona lo mismo que el mecanismo aleatorio gana tres; el jugador o los jugadores que eligen algo distinto que el azar ganan cero. Escríbanse las formas extensiva y estratégica de este juego. Hállense sus equilibrios de Nash y sus equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras.

Ejercicio 3.14. Considérese el siguiente juego en forma extensiva de suma nula en tres etapas.

- Se selecciona aleatoriamente A con probabilidad $1/2$ o B con probabilidad $1/2$.
- El primer jugador, desconociendo el resultado de la primera etapa, elige $x \in \{1, 2\}$.
- El segundo jugador, conociendo x y desconociendo el resultado de la primera etapa, elige $y \in \{-1, 1\}$.

El pago al primer jugador es x^y si se eligió A en la primera etapa y x^{-y} si se eligió B. Escríbanse las formas extensiva y estratégica de este juego. Obténgase un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejercicio 3.15. Considérese el siguiente juego en forma extensiva en tres etapas:

- El primer jugador elige L_1 o R_1.
- Si el jugador 1 elige R_1, el segundo jugador elige L_2 o R_2.
- Si el jugador 1 elige L_1 o el jugador 2 elige L_2, el tercer jugador, sin conocer lo que ha ocurrido con anterioridad, elige L_3 o R_3.

Si el jugador 1 escoge L_1, los pagos son $(0, 0, 0)$ o $(3, 2, 2)$ según el jugador 3 escoja L_3 o R_3, respectivamente. Si el jugador 1 escoge R_1 y el jugador 2 escoge L_2, los pagos son $(0, 0, 1)$ o $(4, 4, 0)$ según el jugador 3 escoja L_3 o R_3, respectivamente. Si el jugador 1 escoge R_1 y el jugador 2 escoge R_2, el pago es $(1, 1, 1)$. Descríbase el problema como un juego en forma extensiva y dígase si es de información perfecta y si es de memoria perfecta. Además, escríbase la forma estratégica asociada y obténganse los perfiles de estrategias puras que son equilibrios de Nash y los que son equilibrios perfectos en subjuegos.

Ejercicio 3.16. Considérese el juego en forma extensiva de la Figura 3.4.2 y el perfil de estrategias $b = (R_1, L_2, R_3)$. Dígase si b es un equilibrio de Nash y, en caso afirmativo, si se trata de un equilibrio perfecto en subjuegos.

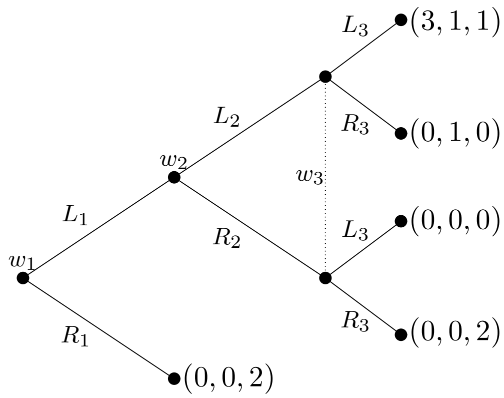


Figura 3.4.2: El juego del Ejercicio 3.16.

Ejercicio 3.17. Considérese el juego en forma extensiva representado en la Figura 3.4.3. Dígase si los perfiles de estrategias puras (L_1l_1, L_2) y (R_1l_1, l_2) son equilibrios perfectos en subjuegos. Considérese también el juego en forma estratégica asociado y estúdiese si (L_1l_1, L_2) y (R_1l_1, L_2) son equilibrios perfectos de la extensión mixta de ese juego en forma estratégica.

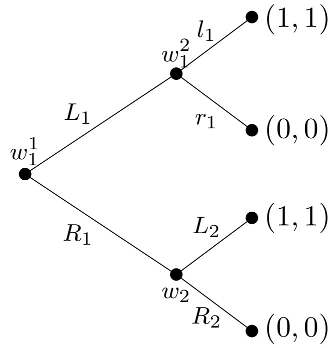


Figura 3.4.3: El juego del Ejercicio 3.17.

Tema 4

Juegos de Negociación

Contenidos

4.1. Introducción a los Juegos de Negociación

En este capítulo estudiamos un modelo cooperativo para analizar problemas de negociación simple. En un problema de negociación simple un grupo de jugadores trata de repartirse los beneficios de su cooperación de modo que, para que un reparto sea finalmente adoptado, es necesario el acuerdo unánime de todos los jugadores. En el capítulo siguiente, estudiaremos un modelo para analizar los problemas de negociación coalicionales, en los que la unanimidad no es necesaria. A partir de ahora, cuando hablemos de *negociación*, entenderemos que nos referimos a *negociación simple*. Nótese que este capítulo y el siguiente se enmarcan dentro de la teoría de juegos cooperativa. Como ya comentamos en la introducción el enfoque es muy distinto al de la teoría de juegos no cooperativa.

A continuación presentamos el modelo principal de este capítulo, que fue introducido y analizado en Nash (1950a).

Definición 4.1.1. Un **juego de negociación** con conjunto (finito) de jugadores N es un par (S, d) tal que:

1) $S \subset \mathbb{R}^N$ es no vacío, cerrado, convexo y comprehensivo.[1]

2) $d \in S$ y existe $x \in S$ tal que $x > d$.

3) $S_d = \{x \in S : x \geq d\}$ es un conjunto compacto.

Denotaremos por B^N la clase de los juegos de negociación con conjunto de jugadores N.

A continuación vamos a hacer algunos comentarios sobre la interpretación de esta definición. El conjunto S, al que a veces se llama **conjunto factible**, contiene las utilidades de los jugadores asociadas a los acuerdos posibles. El **punto de desacuerdo** d nos da las utilidades de los jugadores asociadas al resultado de la falta de acuerdo. Las suposiciones sobre S y d son convenientes para el tratamiento matemático del modelo y, al mismo tiempo, naturales y no demasiado restrictivas. En particular, la suposición de convexidad es adecuada si las funciones de utilidad de los jugadores son de von Neumann y Morgenstern y, además, éstos tienen la capacidad de elegir loterías sobre los posibles acuerdos (aunque también puede ser adecuada en otras condiciones; véase el Ejemplo 4.1.1). La comprehensividad de S es perfectamente aceptable siempre que los jugadores puedan rebajar

[1] $S \subset \mathbb{R}^N$ es comprehensivo si, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^N$, se cumple: si $x \in S$ e $y \leq x$, entonces $y \in S$.

voluntariamente sus niveles de utilidad (por ejemplo, haciendo donaciones económicas). La segunda condición implica que el punto de desacuerdo es factible y que los jugadores tienen incentivos para cooperar. La tercera condición está relacionada con el carácter cerrado de S, que pedimos por conveniencia matemática, y con el hecho de que las aspiraciones de los jugadores deben estar acotadas.

Ejemplo 4.1.1. *Un problema de bancarrota.* Consideremos una situación en la que una empresa quiebra y su capital es insuficiente para pagar las deudas contraídas. La regulación del país establece que el capital se reparta entre los acreedores, sin que ninguno de ellos reciba más de lo que se le adeuda, y de un modo que sea aceptado por todos. Supongamos que N es el conjunto de acreedores, $E > 0$ es el capital de la empresa en quiebra, y $a = (a_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ es el vector de adeudamientos de la empresa con los acreedores (debe ocurrir que $E < \sum_{i \in N} a_i$). En tal caso, esta situación se puede representar como el juego de negociación (S, d) dado por:

- $S = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, x \leq a,\, \sum_{i \in N} x_i \leq E\}$,
- $d = (d_i)_{i \in N}$, con $d_i = 0$ para todo $i \in N$.

Nótese que S y d están en las condiciones de la Definición 4.1.1. $\diamond$

El planteamiento adoptado inicialmente por Nash para tratar los problemas de negociación es axiomático. Su objetivo principal es encontrar una **solución para juegos de negociación**, es decir, una aplicación f que asigne a cada $(S, d) \in B^N$ un vector $f(S, d) \in S_d$ que suponga un reparto aceptable para todos los jugadores. Como hay muchas posibles soluciones, Nash da una colección de propiedades deseables (axiomas) para una solución y demuestra que tal colección caracteriza una única solución, a la que actualmente llamamos solución de Nash para juegos de negociación. Otro modo de interpretar este planteamiento es considerar que las propiedades caracterizan un esquema formal de arbitraje; nótese que, en la práctica, muchos problemas de negociación se resuelven acudiendo a un árbitro. En las dos secciones siguientes estudiaremos las dos soluciones más utilizadas para juegos de negociación.

4.2. La Solución de Nash

En esta sección vamos a presentar la solución de Nash y las propiedades que la caracterizan. Para ello, comenzamos por introducir algunas notaciones y definiciones.

Si $T \subset \mathbb{R}^N$, $P(T) = \{x \in T\ :\ \text{no existe } y \in T \text{ con } y \geq x,\ y \neq x\}$ es la **frontera de Pareto** de T.

Sea π una permutación de N. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, definimos $x^\pi \in \mathbb{R}^N$ por $x_i^\pi = x_{\pi(i)}$, para todo $i \in N$. Se dice que el juego de negociación $(S, d) \in B^N$ es **simétrico** si, para toda permutación π de N, se tiene que (a) $d^\pi = d$, y (b) para todo $x \in S$, $x^\pi \in S$.

Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^N$ y un conjunto $T \subset \mathbb{R}^N$, entonces definimos $xy = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$, $xT = Tx = \{z \in \mathbb{R}^N\ :\ z = xy \text{ donde } y \in T\}$ y $x + T = T + x = \{z \in \mathbb{R}^N\ :\ z = x + y \text{ donde } y \in T\}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$ y $\alpha T = T\alpha = \{\alpha x\ :\ x \in T\}$.

Presentamos a continuación las propiedades que caracterizan la solución de Nash. A partir de ahora f representa una solución para juegos de negociación, es decir, una aplicación que asigna a cada $(S, d) \in B^N$ un vector $f(S, d) \in S_d$.

Simetría. Para todo $(S, d) \in B^N$, si el juego de negociación (S, d) es simétrico entonces $f_1(S, d) = \ldots = f_n(S, d)$.

Una motivación para esta propiedad es que si la descripción del juego de negociación no contiene información que establezca diferencias entre los jugadores, entonces la propuesta de la solución tampoco debe establecer diferencias entre ellos.

Eficiencia de Pareto. Para todo $(S, d) \in B^N$, $f(S, d) \in P(S)$.

Los jugadores no deben de ser capaces de mejorar colectivamente la propuesta de la solución.

Covariancia ante transformaciones afines positivas. Para todo juego de negociación $(S, d) \in B^N$ y todo $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $a > 0^N$, $f(aS + b, ad + b) = af(S, d) + b$.

Las funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern son únicas salvo transformaciones afines positivas. Por ello, parece razonable pedir esta propiedad.

Independencia de alternativas irrelevantes. Para todo par de juegos de negociación $(S, d), (T, d) \in B^N$ con $S \subset T$, si $f(T, d) \in S$ entonces $f(S, d) = f(T, d)$.

Esta propiedad es la que más controversias ha suscitado. Su interpretación es clara y parece razonable en muchas situaciones: si el conjunto factible se reduce pero la propuesta de la solución en el juego original sigue siendo factible en el nuevo, la propuesta de la solución para el nuevo juego no cambia. La principal crítica a esta propiedad radica en que hace a la solución insensible ante posibles cambios importantes del conjunto factible.

Veamos ahora la definición de la solución de Nash. Para ello, necesitamos probar el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1. *Sea $(S,d) \in B^N$. Entonces existe un único $z \in S$ que maximiza la función $g(x) = \prod_{i\in N}(x_i - d_i)$ sobre el conjunto S_d.*

Demostración. Como g es continua y S_d es compacto, g tiene un máximo sobre S_d. Supongamos que existen $z, z' \in S_d$, con $z \neq z'$, tales que

$$\max_{x\in S_d} g(x) = g(z) = g(z').$$

Claramente, $z > d$ y $z' > d$. Como S_d es convexo, entonces $\bar{z} = z/2 + z'/2 \in S_d$. A continuación probaremos que $g(\bar{z}) > g(z)$, lo cual es una contradicción. Nótese que

$$\ln(g(\bar{z})) = \sum_{i\in N} \ln(\bar{z}_i - d_i) = \sum_{i\in N} \ln(\frac{1}{2}(z_i - d_i) + \frac{1}{2}(z'_i - d_i)).$$

Entonces, como la función logaritmo neperiano es estrictamente cóncava, se tiene que

$$\begin{aligned}\ln(g(\bar{z})) &> \sum_{i\in N} \frac{1}{2}\ln(z_i - d_i) + \sum_{i\in N} \frac{1}{2}\ln(z'_i - d_i) \\ &= \frac{1}{2}\ln(g(z)) + \frac{1}{2}\ln(g(z')) = \ln(g(z)).\end{aligned}$$

En consecuencia, $g(\bar{z}) > g(z)$. □

Definición 4.2.1. La **solución de Nash** es la aplicación que asigna a cada $(S,d) \in B^N$ el único punto $NA(S,d) \in S_d$ que maximiza la función $g(x) = \prod_{i\in N}(x_i - d_i)$ sobre el conjunto S_d.

La solución de Nash asigna a cada juego de negociación el punto del conjunto factible que maximiza el producto de las diferencias entre lo obtenido por cada jugador y su utilidad en el punto de desacuerdo. Geométricamente, la solución de Nash asigna a cada juego de negociación el punto de intersección de S_d con la única hipérbola de la familia $\{\prod_{i\in N}(x_i - d_i) = c : c \in \mathbb{R}\}$ que es tangente a S_d. En el Ejercicio 4.2.1 ilustraremos esta interpretación geométrica. A continuación veremos que la solución de Nash se caracteriza con las cuatro propiedades anteriormente descritas. Antes de ello, necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 4.2.2. *Sea $(S, d) \in B^N$ y denotemos $z = NA(S, d)$. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ sea*

$$h(x) = \sum_{i \in N} \prod_{j \neq i} (z_j - d_j) x_i.$$

Entonces, para todo $x \in S$, $h(x) \leq h(z)$.

Demostración. Supongamos que existe $x \in S$ con $h(x) > h(z)$. Para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ definamos $x^\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon) z$. Puesto que S es convexo, entonces $x^\varepsilon \in S$. Como $z \in S_d$ y $z > d$ entonces, para ε suficientemente pequeño, $x^\varepsilon \in S_d$. Además,

$$\begin{aligned} g(x^\varepsilon) &= \prod_{i \in N} (z_i - d_i + \varepsilon(x_i - z_i)) \\ &= \prod_{i \in N} (z_i - d_i) + \varepsilon \sum_{i \in N} \prod_{j \neq i} (z_j - d_j)(x_i - z_i) + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon^i \beta_i(x, z, d) \\ &= g(z) + \varepsilon(h(x) - h(z)) + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon^i \beta_i(x, z, d), \end{aligned}$$

donde cada $\beta_i(x, z, d)$ es una función que depende únicamente de x, z y d. Entonces, como $h(x) > h(z)$, se tiene que $g(x^\varepsilon) > g(z)$ si ε es suficientemente pequeño. Esto contradice que $z = \max_{x \in S_d} g(x)$. □

Teorema 4.2.3. *La solución de Nash es la única solución para juegos de negociación que cumple las propiedades de simetría, eficiencia de Pareto, covarianza ante transformaciones afines positivas e independencia de alternativas irrelevantes.*

Demostración. Es fácil comprobar que la solución de Nash satisface las cuatro propiedades del enunciado. Para probar la unicidad, consideremos otra solución para juegos de negociación f que satisface esas mismas propiedades y sea $(S, d) \in B^N$. De nuevo usaremos la notación $z = NA(S, d)$. Tenemos que demostrar que $z = f(S, d)$. Consideremos el conjunto U dado por:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, h(x) \leq h(z)\}.$$

Por el lema anterior, tenemos que $S \subset U$. Teniendo en cuenta que $z > d$, consideremos la transformación afín positiva A que asocia a cada $x \in \mathbb{R}^N$ el vector $(A_i(x))_{i \in N}$ tal que, para cada $i \in N$,

$$A_i(x) = \frac{x_i}{z_i - d_i} - \frac{d_i}{z_i - d_i}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}A(U) =& \{x \in \mathbb{R}^N \;:\; A^{-1}(x) \in U\}\\ =& \{x \in \mathbb{R}^N \;:\; h(A^{-1}(x)) \leq h(z)\}\\ =& \{x \in \mathbb{R}^N : h((z_1 - d_1)x_1 + d_1, \ldots, (z_n - d_n)x_n + d_n) \leq h(z)\}\\ =& \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N}\prod_{j\neq i}(z_j - d_j)((z_i - d_i)x_i + d_i) \leq \sum_{i\in N}\prod_{j\neq i}(z_j - d_j)z_i\}.\end{aligned}$$

Después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}A(U) &= \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N}\prod_{j\in N}(z_j - d_j)x_i \leq \sum_{i\in N}\prod_{j\in N}(z_j - d_j)\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : \prod_{j\in N}(z_j - d_j)\sum_{i\in N} x_i \leq \prod_{j\in N}(z_j - d_j)\sum_{i\in N} 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i \leq n\}.\end{aligned}$$

Nótese que $A(d) = (0, \ldots, 0)$. Como f cumple simetría y eficiencia de Pareto, tenemos $f(A(U), A(d)) = (1, \ldots, 1)$. Como f también cumple covarianza ante transformaciones afines positivas, $f(U, d) = A^{-1}((1, \ldots, 1)) = z$. Finalmente, teniendo en cuenta que $z \in S$, $S \subset U$ y f satisface independencia de alternativas irrelevantes, $f(S, d) = z$. $\square$

Para terminar esta sección vamos a ver un ejemplo del cálculo de la propuesta de la solución de Nash para un juego de negociación.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el problema de bancarrota descrito en el Ejemplo 4.1.1, tomando $N = \{1, 2\}$, $E = 2$ y $a_1 = a_2 = 2$. El juego de negociación asociado es (S, d), siendo $d = (0, 0)$ y

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1 \leq 2, x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

Como la solución de Nash cumple simetría y eficiencia de Pareto es claro que $NA(S, d) = (1, 1)$. De todos modos, para ilustrar cómo se podría calcular en juegos más complejos, vamos a obtenerla de otro modo. La frontera de Pareto de S_d puede describirse en este caso como:

$$P(S_d) = \{x = (x_1, x_2) \in S_d \;:\; x_2 = 2 - x_1\}.$$

Teniendo en cuenta que $NA(S, d) = \text{máx}_{x\in S_d}(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$, podemos hallar α_1, el máximo de la función $\alpha(x_1) = x_1(2 - x_1)$, y luego comprobar si $(\alpha_1, 2 - \alpha_1)$ está en S_d. En este caso $\alpha_1 = 1$ y $(\alpha_1, 2 - \alpha_1) = (1, 1) \in S_d$, luego $NA(S, d) = (1, 1)$ (como ya sabíamos). La Figura 4.2.1 ilustra la interpretación geométrica de la solución de Nash en este ejemplo.

$\diamond$

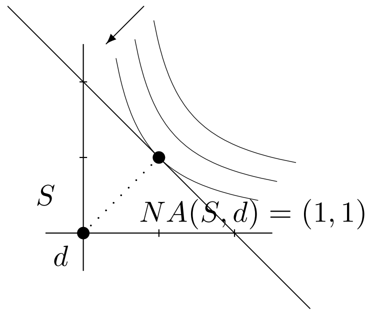


Figura 4.2.1: Interpretación geométrica de la solución de Nash.

4.3. La Solución de Kalai-Smorodinsky

Como ya hemos comentado, la más controvertida de las propiedades de Nash es la independencia de alternativas irrelevantes. Aunque es una propiedad muy razonable, provoca que la solución de Nash no tenga muy en cuenta en algunos casos las *aspiraciones máximas* de los jugadores. Vamos a ilustrar esto analizando una variante del juego de negociación tratado en el Ejemplo 4.2.1.

Ejemplo 4.3.1. Consideremos de nuevo el problema de bancarrota descrito en el Ejemplo 4.1.1, tomando ahora $E = 2$, $a_1 = 2$ y $a_2 = 1$. El juego de negociación asociado es $(\bar{S}, d)$, siendo $d = (0, 0)$ y

$$\bar{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \leq 2, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

Este problema únicamente se distingue del tratado en el Ejemplo 4.2.1 en que la máxima aspiración del segundo jugador ha disminuido de 2 a 1. En este ejemplo habíamos obtenido que $NA(S, d) = (1, 1)$. Además, $\bar{S} \subset S$ y $(1, 1) \in \bar{S}$. Entonces, como NA cumple independencia de alternativas irrelevantes, se obtiene que $NA(\bar{S}, d) = (1, 1)$. Se podría considerar que, como la máxima aspiración del segundo jugador ha disminuido, debería disminuir también la asignación de la solución a tal jugador. Sin embargo, como NA cumple independencia de alternativas irrelevantes no tiene en cuenta tal consideración. La Figura 4.3.1 ilustra la obtención de la propuesta de la solución de Nash en este ejemplo. $\diamond$

Kalai y Smorodinsky (1975) proponen una solución alternativa para juegos de negociación que tiene más en cuenta las aspiraciones máximas de los jugadores. Tales aspiraciones dan lugar al llamado punto de utopía de

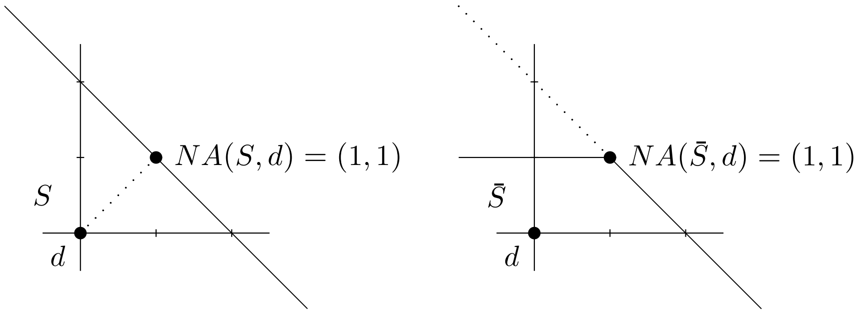


Figura 4.3.1: Obtención de $NA(\bar{S}, d)$.

un juego de negociación. A continuación damos las definiciones formales de punto de utopía y de la solución de Kalai-Smorodinski.

Definición 4.3.1. Sea el juego de negociación $(S, d) \in B^N$. El **punto de utopía** de este juego es $u(S, d) = (u_i(S, d))_{i \in N}$ definido, para todo $i \in N$, por:

$$u_i(S, d) = \max\{a \in \mathbb{R} \ : \ \text{ existe } x \in S_d \text{ con } x_i = a\}.$$

Definición 4.3.2. La **solución de Kalai-Smorodinsky**[2] es la aplicación que asigna a cada $(S, d) \in B^N$ el punto

$$KS(S, d) = d + t_0(u(S, d) - d),$$

donde $t_0 = \max\{t \in \mathbb{R} : d + t(u(S, d) - d) \in S_d\}$.

La solución de Kalai-Smorodinsky asigna, pues, a cada juego de negociación (S, d) el punto de corte de la frontera de Pareto de S_d con la recta que une d con $u(S, d)$. En el ejemplo siguiente obtenemos la propuesta de la solución de Kalai-Smorodinsky para los problemas de bancarrota tratados en el Ejemplo 4.3.1.

Ejemplo 4.3.2. Consideremos de nuevo los juegos de negociación asociados a los problemas de bancarrota tratados en el Ejemplo 4.3.1. Es fácil comprobar que $u(S, d) = (2, 2)$, $KS(S, d) = (1, 1)$, $u(\bar{S}, d) = (2, 1)$ y $KS(\bar{S}, d) = (4/3, 2/3)$. Por lo tanto, la solución de Kalai-Smorodinski tiene en cuenta la situación menos favorable del segundo jugador en $(\bar{S}, d)$. El cálculo de la propuesta de la solución de Kalai-Smorodinski en estos problemas se ilustra en la Figura 4.3.2. $\diamond$

[2] Esta solución ya había sido discutida en Raiffa (1953). Por ello, algunos autores se refieren a ella como la solución de Raiffa-Kalai-Smorodinsky.

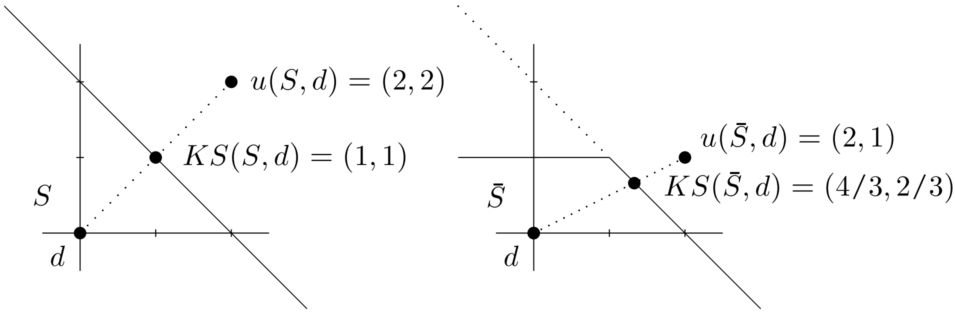


Figura 4.3.2: Obtención de $KS(S,d)$ y de $KS(\bar{S},d)$.

En Kalai y Smorodinsky (1975) también se introduce la siguiente propiedad para una solución f para juegos de negociación.

Monotonía individual. Para todo par de juegos de negociación (S,d) y $(T,d) \in B^N$ y para $j \in N$, si se cumple $S_d \subset T_d$ y $u_i(S,d) = u_i(T,d)$, para todo $i \in N \backslash \{j\}$, entonces $f_j(S,d) \leq f_j(T,d)$.

Si en un juego de negociación aparecen nuevas alternativas, de manera que los niveles máximos de aspiración de los jugadores distintos de j continúen siendo los mismos, entonces la propuesta de f para j en el nuevo juego no debe empeorar.

En Roth (1979) se prueba que no existen soluciones para juegos de negociación que cumplan eficiencia de Pareto, simetría y monotonía individual. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que la solución de Kalai-Smorodinski se puede caracterizar usando la propiedad de monotonía individual si nos restringimos a la clase de juegos de negociación bipersonales.

Teorema 4.3.1. *Si N es un conjunto de dos elementos, existe una única aplicación f que asigna a cada $(S,d) \in B^N$ un punto $f(S,d) \in S_d$ y que satisface eficiencia de Pareto, covarianza ante transformaciones afines positivas, simetría y monotonía individual para N. Además, $f(S,d) = KS(S,d)$ para todo $(S,d) \in B^N$.*

Demostración. Es sencillo comprobar que KS cumple las propiedades del enunciado para N. Veamos ahora la unicidad. Sea $(S,d) \in B^N$ y denotemos $k = KS(S,d)$. Consideremos la transformación afín positiva L tal que $L(d) = (0,0)$ y $L(u(S,d)) = (1,1)$. Como KS cumple covarianza ante transformaciones afines positivas para N, $L(k) = KS(L(S), L(d))$ y entonces, por la definición de KS, $L_1(k) = L_2(k)$. Sea ahora

$$T = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \text{existe } y \in \text{conv}\{(0,0), (0,1), (1,0), L(k)\} \text{ con } x \leq y\}.$$

Como f cumple eficiencia de Pareto y simetría para N, $f(T, L(d)) = L(k)$. Por otro lado, como $T \subset L(S)$, $u(T, L(d)) = u(L(S), L(d))$ y f cumple monotonía individual para N, se tiene que $f(T, L(d)) \leq f(L(S), L(d))$. Teniendo en cuenta que $f(T, L(d)) = L(k) = KS(L(S), L(d))$ y que KS cumple eficiencia de Pareto para N, $f(T, L(d)) = L(k) = f(L(S), L(d))$. Aplicando ahora que f cumple covarianza ante transformaciones afines positivas, $f(S, d) = KS(S, d)$. □

Las dos soluciones que hemos presentado en este capítulo son las que han sido más ampliamente estudiadas en la literatura. Aquellos lectores que deseen conocer otras soluciones para juegos de negociación pueden consultar Peters (1992).

4.4. Introducción a la Implementación

En este apartado presentamos una breve introducción a la teoría de la implementación en el contexto de los juegos de negociación. En general, implementar una solución cooperativa consiste en presentar un juego no cooperativo cuyos pagos en equilibrio se correspondan con la propuesta de la solución a implementar. En cierto modo, este juego no cooperativo pretende describir el proceso de negociación que conduce a la solución escogida. Esta línea de investigación fue iniciada por John Nash. Según van Damme (1991), la necesidad de este enfoque como complemento al enfoque axiomático surge de la falta de consenso acerca de cuáles son los axiomas apropiados a imponer en los distintos contextos cooperativos. En esta sección simplemente pretendemos presentar un par de sencillas implementaciones a modo de contacto con este campo.

Para empezar, presentamos esquemáticamente la implementación de la solución de Nash (descrita en Nash (1953)). Tomemos (S, d) un juego de negociación bipersonal y consideremos el siguiente juego no cooperativo de demandas.

1) Cada jugador i realiza una demanda $x_i \in [d_i, \infty)$. Los jugadores realizan sus demandas simultánea e independientemente.

2) Si $x = (x_1, x_2)$ pertenece a S, esto es, es factible, entonces x es aceptado y los jugadores reciben sus demandas. En otro caso, los jugadores reciben sus utilidades en el punto de desacuerdo.

El juego en forma estratégica que describe este problema de demandas viene dado por $G_{NA} = ([d_1,\infty),[d_2,\infty),H_1,H_2)$ donde, para cualquier $x=(x_1,x_2)\in[d_1,\infty)\times[d_2,\infty)$ y todo $i\in\{1,2\}$,

$$H_i(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } x\in S \\ \\ d_i & \text{si } x\notin S. \end{cases}$$

Proposición 4.4.1. *Los vectores de pagos correspondientes a los equilibrios de Nash de G_{NA} son los elementos del conjunto $P(S_d)\cup\{d\}$, donde $P(S_d)$ denota la frontera de Pareto de S_d.*

Demostración. Si $x > u(S,d)$, entonces claramente x es un equilibrio de Nash de G_{NA} y además $H(x)=d$. Si $x\in P(S_d)$, x es también un equilibrio de Nash de G_{NA} y $H(x)=x$. Si $x\in S\backslash P(S_d)$, entonces x no es equilibrio de Nash de G_{NA}. □

Este resultado proporciona una implementación en equilibrios de Nash del conjunto $P(S_d)\cup\{d\}$. Sin embargo, la solución de negociación de Nash es el único vector de pagos asociado a un cierto refinamiento del equilibrio de Nash del juego G_{NA}. No reproduciremos aquí ese resultado, que se puede encontrar en van Damme (1991) y González-Díaz y otros (2010). A continuación presentamos una implementación de la solución de Kalai-Smorodinsky. Asociamos un juego de demandas no cooperativo G_{KS} a cada juego de negociación bipersonal (S,d).

1) Cada jugador i realizan una demanda $x_i\in[d_i,u_i(S,d)]$. Los jugadores realizan estas demandas de manera simultánea e independiente.

2) Las funciones de pago de los jugadores están dadas por:

$$H(x) = \begin{cases} (x_1,f_2(x_1)) & \text{si } \dfrac{x_1-d_1}{u_1(S,d)-d_1} < \dfrac{x_2-d_2}{u_2(S,d)-d_2} \\ \\ (f_1(x_2),x_2) & \text{si } \dfrac{x_1-d_1}{u_1(S,d)-d_1} > \dfrac{x_2-d_2}{u_2(S,d)-d_2} \\ \\ \dfrac{(x_1,f_2(x_1))}{2}+\dfrac{(f_1(x_2),x_2)}{2} & \text{si } \dfrac{x_1-d_1}{u_1(S,d)-d_1} = \dfrac{x_2-d_2}{u_2(S,d)-d_2} \end{cases}$$

donde $f_i(x_j) = \text{máx}\{x_i\in[d_i,u_i(S,d)] : x\in S\}$, para todo $i,j\in\{1,2\}$, $i\neq j$.

Proposición 4.4.2. *El juego de demandas G_{KS} tiene un único equilibrio de Nash. Además, el vector de pago que corresponde a este equilibrio es $KS(S,d)$.*

Demostración. Consideremos un juego de negociación bipersonal (S,d). Por simplicidad, vamos a denotar $u = u(S,d)$ y $k = KS(S,d)$. Consideremos $i,j \in \{1,2\}$ con $i \neq j$. Supongamos que x es un equilibrio de Nash de G_{KS}, vamos a probar que $x = k$. La cantidad que el jugador i puede demandar y obtener si el jugador j ha elegido x_j es, como mucho,

$$a_i = \frac{x_j - d_j}{u_j - d_j}(u_i - d_i) + d_i.$$

Notemos que $a_i \in [d_i, u_i]$. Si $a_i < f_i(x_j)$, entonces $x_i > a_i$. En tal caso, el jugador j gana demandando más que x_j y x no es un equilibrio de Nash. Si $a_i > f_i(x_j)$, entonces x no es un equilibrio de Nash ya que, tanto si $x_i < a_i$, $x_i = a_i$, o $x_i > a_i$, el jugador i gana demandando algo diferente de x_i. Por tanto, $a_i = f_i(x_j)$ y $x_i = a_i$, ya que si $x_i < a_i$, el jugador i gana demandando más y si $x_i > a_i$, el jugador j gana demandando más.

Por tanto, si x es un equilibrio de Nash de G_{KS}, entonces:

$$\frac{x_1 - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2 - d_2}, \; x_1 = f_1(x_2), \; \text{y } x_2 = f_2(x_1),$$

lo que implica que $x = k$, con $H(x) = k$. Finalmente, está claro que k es un equilibrio de Nash de G_{KS} con lo que concluye la demostración. □

A pesar del resultado que acabamos de ver, la implementación de la solución de Kalai-Smorodinsky a través del juego G_{KS} no es enteramente satisfactoria. La razón es la siguiente. Idealmente, ambos jugadores deberían jugar el juego G_{KS} bajo la supervisión del implementador y éste, a la vista de las estrategias de los jugadores, debería asegurarse que el reparto final se hace de acuerdo a las reglas del juego. Sin embargo, las reglas del juego G_{KS} dependen crucialmente de parámetros que podrían ser desconocidos para el implementador, como los puntos de utopía de los jugadores. Sin ir más lejos, el implementador podría no saber siquiera cuáles son los conjuntos de estrategias de los jugadores.[3]

Un estudio más detallado del enfoque mediante implementación de los juegos de negociación se puede hacer consultando, por ejemplo, van Damme (1991) o González-Díaz y otros (2010).

[3]Una crítica parecida se podría hacer de la implementación de la solución de Nash mediante G_{NA}, ya que ésta requiere que el implementador conozca el punto de desacuerdo.

4.5. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea (S, d) un juego de negociación tal que

$$S_d = \text{conv}\{(4,0), (1,2), (-1,0), (-1,2)\}$$

y $d = (-1, 0)$. Calcúlese $NA(S, d)$ y $KS(S, d)$.

Ejercicio 4.2. Haciendo uso de las propiedades que caracterizan la solución de Nash, obténgase $NA(S, d)$ para $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x + 2y \leq 2\}$ y $d = (0, 0)$.

Ejercicio 4.3. Sea (S, d) tal que $d = (1, 0)$ y

$$S_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq -x^2 + 4,\ 0 \leq y \leq 3, 1 \leq x\}.$$

Calcúlese $NA(S, d)$ y $KS(S, d)$.

Ejercicio 4.4. Una empresa quiebra. En ese momento cuenta con un capital de $E = 10$ y tiene dos acreedores con demandas $a = (9, 8)$. Repártase el capital entre los acreedores utilizando la solución de Nash y la solución de Kalai-Smorodinsky del juego de negociación asociado (S, d), donde $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y \leq 10,\, x \leq 9,\ y \leq 8\}$ y $d = (0, 0)$. (Obsérvese que la solución de Nash proporciona una solución de tipo igualitario y la de Kalai-Smorodinsky una solución de tipo proporcional). Hágase lo mismo considerando $E = 10$ y $a = (2, 12)$ (nuevamente el reparto de Kalai-Smorodinsky es de tipo proporcional y el de Nash es igualitario aunque pagando en su totalidad la deuda menor).

Ejercicio 4.5. Considérese el juego de negociación con tres jugadores (S, d) con $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x + 2y + 4z \leq 6,\, x \leq 1,\ y \leq 2,\ z \leq 1\}$ y $d = (0, 0, 0)$. Calcúlense las propuestas de la solución de Nash utilizando las propiedades que la caracterizan y de la solución de Kalai-Smorodinsky utilizando la definición.

Ejercicio 4.6. En 1994, la Unión Europea estableció para España e Inglaterra una cuota pesquera de 12 miles de toneladas sobre una cierta especie de pescado. Sin embargo, estos países demandaban poder pescar, respectivamente, hasta 10 y 8 miles de toneladas. El problema de racionamiento de recursos se puede modelar como el juego de negociación (S, d) donde:

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sum_{i=1}^{2} x_i \leq 12,\, x_1 \leq 10,\, x_2 \leq 8\}, \quad d = (0, 0).$$

a) Propóngase un reparto de la cuota usando la solución de Nash del juego de negociación.

b) Contéstese razonadamente, sin hacer cálculos, cómo se modificaría la propuesta de la solución de Nash si la demanda de Inglaterra fuese sólo de 5 miles de toneladas.

c) Calcúlese la propuesta de la solución de Kalai-Smorodinsky del juego de negociación.

Ejercicio 4.7. Dos individuos negocian sobre el reparto de 2 unidades de un producto perfectamente divisible.[4] En caso de no llegar a un acuerdo ambos individuos obtienen 0 unidades. Supongamos que la función de utilidad del jugador 1 está dada por $u_1(x) = x$ para $0 \leq x \leq 2$ y la función de utilidad del jugador 2 está definida por $u_2(y) = 8 - (2-y)^3$ para $0 \leq y \leq 2$.

a) Represéntese esta situación como un juego de negociación.

b) Obténgase el reparto que propone la solución de Nash, tanto en términos de utilidad como en términos de la distribución física del producto.

c) Obténgase el reparto que propone la solución de Kalai-Smorodinsky, tanto en términos de utilidad como en términos de la distribución física del producto.

d) Si la utilidad del jugador 2 cambia a $u_2(y) = \text{mín}\{8 - (2-y)^3, 7\}$, resuélvanse de nuevo los apartados b) y c).

e) Si la utilidad del jugador 2 cambia a $u_2(y) = \text{mín}\{8 - (2-y)^3, 4\}$, resuélvanse de nuevo los apartados b) y c).

Ejercicio 4.8. Pruébese que las propiedades usadas en la caracterización de la solución de Nash de un problema de negociación (Teorema 4.2.3) son independientes, es decir, que para cada una de tales propiedades existe una solución distinta de la de Nash que cumple las restantes propiedades.

Ejercicio 4.9. Pruébese que las propiedades usadas en la caracterización de la solución de Kalai-Smorodinsky de un problema de negociación (Teorema 4.3.1) son independientes, es decir, que para cada una de tales propiedades existe una solución distinta de la de Kalai-Smorodinsky que cumple las restantes propiedades.

[4] Un producto es perfectamente divisible si puede ser fraccionado indefinidamente.

Tema 5

Juegos Cooperativos con Utilidad Transferible

Contenidos

5.1. Introducción a los Juegos Cooperativos con Utilidad Transferible

En este capítulo estudiamos problemas de negociación coalicional. En uno de tales problemas, un conjunto de jugadores, que dispone de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes, debe decidir cómo repartirse los beneficios de su cooperación. A diferencia de lo que ocurría en los problemas de negociación simple, ahora no es necesaria la unanimidad para que un reparto sea adoptado, sino que puede haber algunos grupos de jugadores capaces de forzar determinados repartos.

También supondremos que los beneficios generados por los grupos de jugadores (a los que denominaremos *coaliciones*) pueden repartirse libremente entre ellos. Por eso, en realidad, trataremos con problemas de negociación coalicional *con utilidad transferible*. Para caracterizar uno de tales problemas usaremos los llamados juegos cooperativos con utilidad transferible (abreviadamente *juegos TU*) que definimos formalmente a continuación.

Definición 5.1.1. Un **juego TU** es un par (N, v) donde N es el conjunto finito de jugadores y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que cumple que $v(\emptyset) = 0$.[1]

La función v se denomina **función característica** del juego. Dada una coalición $S \subset N$, $v(S)$ representa los beneficios que se pueden asegurar los jugadores de S, independientemente de cómo actúe el resto de los jugadores. Denotaremos por $G(N)$ el conjunto de todos los juegos TU con conjunto de jugadores N. Por simplicidad, en general identificaremos (N, v) con su función característica v.

Ejemplo 5.1.1. (*Reparto de un millón*). Una persona deja una herencia de un millón de euros a tres herederos, con la condición de que al menos dos de ellos lleguen a un acuerdo sobre cómo efectuar el reparto; si tal acuerdo no es alcanzado, el millón se donará a una institución benéfica. Esta situación se puede representar como el juego (N, v) tal que $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$ y $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(N) = 1$.[2] $\diamond$

Ejemplo 5.1.2. (*El juego del guante*). Tres jugadores están dispuestos a repartirse los beneficios derivados de la venta de un par de guantes. El jugador uno tiene un guante izquierdo y los jugadores dos y tres tienen un guante derecho cada uno. Un par de guantes se puede vender por una centena de euros. Esta situación se puede representar como el juego (N, v)

[1] 2^N denota al conjunto de todos los subconjuntos del conjunto N.

[2] Para evitar una notación demasiado prolija escribiremos $v(1)$ en lugar de $v(\{1\})$, $v(12)$ en lugar de $v(\{1, 2\})$, etc.

con $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$ y $v(12) = v(13) = v(N) = 1$. $\diamond$

Ejemplo 5.1.3. (*El Parlamento de Aragón, 1991*). Este ejemplo muestra que los juegos TU pueden ser utilizados para describir problemas de negociación coalicional en los que los jugadores negocian con algo más abstracto que el dinero. Consideramos el Parlamento de Aragón surgido de las elecciones de mayo de 1991, cuya composición era: PSOE (Partido Socialista Obrero Español) 30 diputados, PP (Partido Popular) 17 diputados, PAR (Partido Aragonés Regionalista) 17 diputados, e IU (Izquierda Unida) 3 diputados. Medir el poder de los diferentes partidos en un Parlamento es una cuestión de gran interés. Obsérvese que, en cierto sentido, medir el poder es lo mismo que asignar de modo razonable una fracción del poder total. Así pues, un Parlamento puede representarse como un juego TU en el que un grupo de jugadores (los partidos) tratan de repartirse el poder. Como las decisiones más relevantes en un Parlamento se toman usando la regla de la mayoría simple, diremos que una coalición tiene todo el poder si dispone de más de la mitad de los votos, 34 en este ejemplo. Por tanto, este Parlamento se puede representar como el juego (N, v) tal que $N = \{1, 2, 3, 4\}$ (1=PSOE, 2=PP, 3=PAR, 4=IU), $v(S) = 1$ si existe $T \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ con $T \subset S$ y $v(S) = 0$ en otro caso. Nótese que para indicar que S tiene todo el poder hacemos $v(S) = 1$. $\diamond$

Ejemplo 5.1.4. (*La profesora visitante*). Tres grupos de investigación pertenecientes a las universidades de Amsterdam (grupo uno), Tilburg (grupo dos) y Santiago de Compostela (grupo tres) planean invitar a una profesora de la Universidad de Oregon a impartir un curso de teoría de juegos. Para minimizar el coste, coordinan los cursos de forma que la profesora visitará Amsterdam, Tilburg y Santiago de Compostela en el mismo viaje. Los grupos quieren repartir el coste de tal viaje. Con ese propósito, se ha estimado el coste en euros de los viajes correspondientes a las visitas a las posibles coaliciones de grupos: $c(1) = 1500$, $c(2) = 1600$, $c(3) = 1900$, $c(12) = 1600$, $c(13) = 2900$, $c(23) = 3000$ y $c(N) = 3000$ (para cada S, $c(S)$ indica el coste del viaje para visitar a los grupos de S). Tomando $N = \{1, 2, 3\}$, obtenemos el juego (N, c). Obsérvese que (N, c) es un juego TU de los denominados *juegos de coste*, en el sentido de que, para cada S, $c(S)$ representa los costes asociados a esa coalición y no los beneficios que genera. El *juego de ahorro* asociado a esta situación, que nos da los beneficios que genera cada coalición, es (N, v) donde, para cada $S \subset N$,

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Por lo tanto, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 1500$, $v(13) = 500$, $v(23) = 500$ y $v(N) = 2000$. $\diamond$

Los ejemplos anteriores muestran que un amplio espectro de situaciones se pueden describir usando juegos TU. Veamos ahora una clase de juegos TU especialmente importante.

Definición 5.1.2. Sea un juego $v \in G(N)$. Diremos que v es **superaditivo** si, para cualquier par de coaliciones $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$, se tiene que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. Se denotará por $SG(N)$ el conjunto de los juegos TU de $G(N)$ que son superaditivos.

Obsérvese que en un juego superaditivo los jugadores tienen auténticos incentivos para la cooperación, en el sentido de que la unión de dos grupos disjuntos cualesquiera no provoca una disminución de los beneficios. De hecho, la teoría de los juegos TU se ha desarrollado principalmente para los juegos superaditivos, aunque por simplicidad se presente para la clase completa $G(N)$. Notemos que los juegos de los ejemplos anteriores son todos superaditivos con excepción del juego c del Ejemplo 5.1.4.[3]

El objetivo principal de la teoría de los juegos TU es proponer, para cada juego TU, una asignación o un conjunto de asignaciones que pueda ser aceptado por todos los jugadores involucrados en el problema. Un primer enfoque para alcanzar este objetivo está basado en la idea de **estabilidad**: se trata de encontrar un conjunto de asignaciones que sea estable, en el sentido de que cabe esperar que el acuerdo finalmente adoptado por los jugadores sea un elemento de dicho conjunto. Éste es el enfoque subyacente, por ejemplo, en el *núcleo* (Gillies, 1953), los *conjuntos estables* (von Neumann y Morgenstern, 1944) y el *conjunto de negociación* (Aumann y Maschler, 1964). El segundo enfoque está basado en la idea de *ecuanimidad*: trata de proponer para cada juego TU un reparto ecuánime que sea aceptable para los jugadores. Éste es el enfoque subyacente, por ejemplo, en el *valor de Shapley* (Shapley, 1953), *el nucleolo* (Schmeidler, 1969) y el *τ-value* (Tijs, 1981). En este capítulo sólo trataremos los más importantes de los conceptos mencionados: el núcleo y el valor de Shapley.

5.2. El Núcleo y Conceptos Relacionados

En esta sección estudiamos el más importante de los conceptos relacionados con la idea de estabilidad: el núcleo. Para un juego $v \in G(N)$, el

[3]Téngase en cuenta que c es un juego de coste y cumple que $-c$ es superaditivo; esta propiedad es análoga a la superaditividad en el contexto de los juegos de coste.

núcleo es un subconjunto del conjunto de imputaciones, donde una imputación es una división de $v(N)$ entre todos los jugadores de forma que ningún jugador i reciba menos que $v(i)$, la cantidad que puede garantizarse por sí mismo.

Definición 5.2.1. Sea $v \in G(N)$. Una **imputación** de v es un vector $x \in \mathbb{R}^N$ que satisface las dos condiciones siguientes:

1) $x_i \geq v(i)$, para todo $i \in N$.

2) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Dado un juego $v \in G(N)$, se denotará por $I(v)$ el conjunto de imputaciones de dicho juego.

Nótese que, para cada $v \in SG(N)$, $I(v) \neq \emptyset$. Las imputaciones de un juego (N, v) son asignaciones de $v(N)$ entre los jugadores que satisfacen una condición de *racionalidad individual*. El núcleo es el conjunto de las imputaciones que satisfacen, además, una condición de *racionalidad coalicional*.

Definición 5.2.2. Sea $v \in G(N)$. El **núcleo** de v, que denotaremos por $C(v)$,[4] es el siguiente subconjunto de $I(v)$

$$C(v) = \{x \in I(v) \, : \, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \; \forall S \in 2^N\}.$$

Obsérvese que los elementos de $C(v)$ asignan a cada coalición unos beneficios mayores o iguales que los que tal coalición puede garantizarse por sí misma. En ese sentido, los elementos de $C(v)$ son estables, porque no dejan insatisfecha a ninguna coalición. A continuación presentamos una definición y un resultado que nos ofrecen otro modo de ver la conexión entre el núcleo y la estabilidad.

Definición 5.2.3. Sea $v \in G(N)$ un juego TU y sean $S \in 2^N \backslash \emptyset$ y $x, y \in I(v)$. Se dice que x **domina a** y a través de S si se cumple:

1) $x_i > y_i$, para todo $i \in S$.

2) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Se dice que x **domina a** y si existe una coalición $T \in 2^N \backslash \emptyset$ tal que x domina a y a través de T. Se dice que x **es no dominada** si no existe $z \in I(v)$ tal que z domina a x.

[4] La palabra inglesa para núcleo en este contexto es *core*. De ahí la notación $C(v)$.

Obsérvese que x domina a y a través de S cuando todos los jugadores de S prefieren x a y y, además, x es alcanzable para S, en el sentido de que la cantidad total propuesta por x para los jugadores de S no es superior a la cantidad que los jugadores de S pueden garantizarse por sí mismos. Por tanto, si x domina a y, existe alguna coalición con interés y capacidad de vetar y. En definitiva, para que una imputación sea realmente estable debe ser no dominada. Esto es lo que le ocurre a las imputaciones del núcleo, tal como se muestra en el resultado siguiente.

Proposición 5.2.1. *Sea $v \in G(N)$ un juego TU.*

1) Si $x \in C(v)$, entonces x es no dominada.

2) Si, además, $v \in SG(N)$, entonces se tiene que $C(v) = \{x \in I(v) : x \text{ es no dominada}\}$.

Demostración. Probemos la primera afirmación. Supongamos que $x \in C(v)$ y que existen $y \in I(v)$ y una coalición no vacía $S \subset N$ tales que y domina a x a través de S. Entonces

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),$$

lo cual es una contradicción. Veamos ahora 2). Sea x una imputación no dominada de v y supongamos que no pertenece a $C(v)$. En tal caso existe $S \subset N$ tal que $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Definamos $y \in \mathbb{R}^N$ del siguiente modo:

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{v(S) - \sum_{j \in S} x_j}{| S |} & \text{si } i \in S, \\ \\ v(i) + \dfrac{v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \setminus S} v(j)}{| N \setminus S |} & \text{si } i \in N \setminus S. \end{cases}$$

Como v es superaditivo, $y \in I(v)$. Además, y domina a x a través de S, lo cual es una contradicción. □

A continuación veremos varios ejemplos para ilustrar el concepto de núcleo. El primero muestra un juego TU que no es superaditivo y que tiene una imputación no dominada que, sin embargo, no pertenece a su núcleo. Los demás estudian los núcleos de los ejemplos tratados en la sección anterior.

Ejemplo 5.2.1. Sea el juego (N, v) tal que $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = 1$, $v(12) = 2$, $v(13) = v(23) = 1$, $v(N) = 2$. Obsérvese que $v(N) < v(12) + v(3)$ y que, por tanto, v no es superaditivo. Por otro lado, $C(v) = \emptyset$ y $(1, 0, 1)$ es una imputación no dominada. ◇

Ejemplo 5.2.2. Es fácil ver que el núcleo del juego del reparto de un millón es vacío, a pesar de que es un juego superaditivo. Esto quiere decir que la situación de negociación descrita por este juego es fuertemente inestable. $\diamond$

Ejemplo 5.2.3. El núcleo del juego del guante es el conjunto unitario $\{(1,0,0)\}$. Puede parecer extraño que el único elemento del núcleo de este juego asigne todos los beneficios al poseedor del guante singular. Sin embargo, $(1,0,0)$ es la única imputación del juego no dominada, es decir, estable. La interpretación que se puede hacer de este resultado es que el precio de los guantes derechos en el mercado se hace cero ya que hay un exceso de oferta de tales guantes. $\diamond$

Ejemplo 5.2.4. Está claro que el núcleo del juego de ahorro v asociado al problema de la profesora visitante está dado por

$$C(v) = \{x \in I(v) \, : \, x_1 + x_2 \geq 1500, \; x_1 + x_3 \geq 500, \; x_2 + x_3 \geq 500\},$$

que es un conjunto no vacío. En la Figura 5.2.1 (a) representamos los hiperplanos que delimitan $I(v)$ y $C(v)$. A la vista de esto es fácil comprobar que

$$C(v) = \text{conv}\{(1500,0,500),(1500,500,0),(500,1500,0),(0,1500,500)\}.$$

En la Figura 5.2.1 (b) representamos $C(v)$ y sus puntos extremos. De hecho, lo que está representado en los dos dibujos de la Figura 5.2.1 son $I(v)$ y $C(v)$ como subconjuntos del hiperplano eficiente, que está dado por $\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$. $\diamond$

Antes de analizar el juego asociado al Parlamento de Aragón vamos a introducir algunos conceptos y resultados.

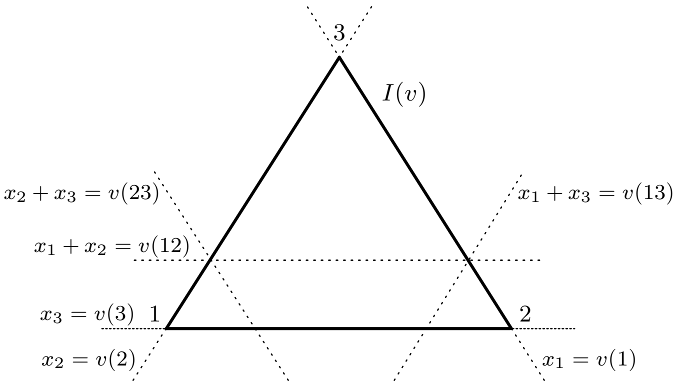
Definición 5.2.4. Un juego $v \in G(N)$ se denomina **simple** si:

1) Para toda $S \subset N$, $v(S) = 0$ o $v(S) = 1$.

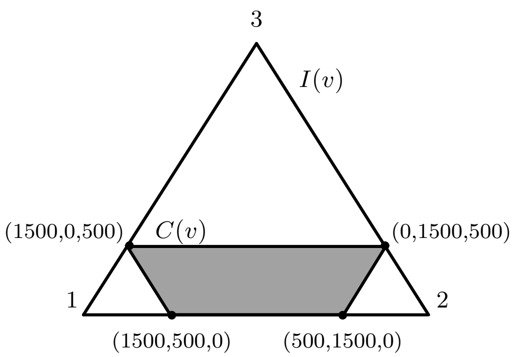
2) $v(N) = 1$.

3) v es un juego monótono, esto es, $v(S) \leq v(T)$ para cualesquiera $S, T \subset N$ con $S \subset T$.

Se denotará por $S(N)$ el conjunto de los juegos simples con conjunto de jugadores N. Para un juego simple (N, v) y una coalición $S \subset N$, se dice que S es **ganadora** si $v(S) = 1$; en caso contrario, se dice que S



(a) Hiperplanos asociados a $I(v)$ y $C(v)$.



(b) El conjunto $C(v)$ y sus puntos extremos.

Figura 5.2.1: El núcleo del juego del profesor visitante.

es **perdedora**. Se denotará por W el conjunto de todas las coaliciones ganadoras, es decir, $W = \{S \subset N \ : \ v(S) = 1\}$. Es evidente que N es un elemento de W y que si $S \in W$ y $S \subset T$, entonces $T \in W$. Una coalición ganadora es **minimal** si no contiene a ninguna otra coalición ganadora. Se denotará por W^m el conjunto de todas las coaliciones ganadoras minimales, es decir,

$$W^m = \{S \in W \ : \ v(T) = 0, \ \forall T \subset S \text{ con } T \neq S\}.$$

Nótese que un juego simple puede caracterizarse dando el conjunto de coaliciones ganadoras, o también, dando el conjunto de coaliciones ganadoras minimales.

Definición 5.2.5. Sea $v \in S(N)$ un juego simple. Se dice que $i \in N$ es un jugador **veto** de v si $v(N \backslash \{i\}) = 0$.

Proposición 5.2.2. *Sea $v \in S(N)$ un juego simple. Entonces $C(v) \neq \emptyset$ si y sólo si el conjunto V de jugadores veto de v es no vacío. Además, si $C(v) \neq \emptyset$ entonces*

$$C(v) = \{x \in I(v) \, : \, x_i = 0 \ \forall i \in N \backslash V\}.$$

Demostración. Supongamos que $C(v) \neq \emptyset$ y que $V = \emptyset$. Tomemos $x \in C(v)$. Entonces, para todo $i \in N$, $x_i = 0$ puesto que

$$0 = v(N) - v(N \backslash \{i\}) \geq \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \backslash \{i\}} x_j = x_i \geq 0.$$

Esto es obviamente imposible. Recíprocamente, supongamos que V es un conjunto no vacío y consideremos el conjunto no vacío

$$\{x \in I(v) \, : \, x_i = 0 \ \forall i \in N \backslash V\}.$$

Es inmediato comprobar que este conjunto es $C(v)$. $\square$

Ejemplo 5.2.5. En virtud de los resultados anteriores y teniendo en cuenta que el juego asociado al Parlamento de Aragón es un juego simple con un conjunto vacío de jugadores veto, está claro que su núcleo es vacío. $\diamond$

Hemos visto que hay situaciones de negociación coalicional que son altamente inestables y, por ello, tienen un núcleo vacío. A continuación proporcionamos una condición necesaria y suficiente para el carácter no vacío del núcleo de un juego. El correspondiente resultado fue probado independientemente (aunque no de forma simultánea) por Bondareva (1963) y Shapley (1967), por lo que es conocido como teorema de Bondareva-Shapley.

Definición 5.2.6. Una familia de coaliciones $F \subset 2^N \backslash \{\emptyset\}$ se denomina **equilibrada** si existe una familia asociada de números reales positivos (denominados **coeficientes equilibrantes**) $\{y_S : S \in F\}$ tal que, para todo $i \in N$,

$$\sum_{S \in F,\, i \in S} y_S = 1.$$

Definición 5.2.7. Un juego $v \in G(N)$ se denomina **equilibrado** si, para cualquier familia de coaliciones equilibrada F con coeficientes equilibrantes $\{y_S : S \in F\}$, se tiene que

$$\sum_{S \in F} y_S v(S) \leq v(N).$$

El hecho de que (N, v) sea equilibrado viene a significar que las coaliciones "intermedias" no tienen demasiado poder. Por ello, el carácter equilibrado de un juego parece estar relacionado con la estabilidad de la situación de negociación coalicional descrita por dicho juego. Esto es precisamente lo que afirma el teorema de Bondareva-Shapley.

Teorema 5.2.3 (Teorema de Bondareva-Shapley)**.** *Sea $v \in G(N)$ un juego TU. Entonces $C(v) \neq \emptyset$ si y sólo si v es equilibrado.*

Demostración. La demostración del resultado hace uso de nociones básicas de dualidad en programación lineal. Supongamos que $C(v) \neq \emptyset$. Sean $x \in C(v)$ y F una familia de coaliciones equilibrada con coeficientes equilibrantes $\{y_S : S \in F\}$. Entonces,

$$\sum_{S \in F} y_S v(S) \leq \sum_{S \in F} \sum_{i \in S} y_S x_i = \sum_{i \in N} (x_i \sum_{S \in F,\, i \in S} y_S) = \sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Recíprocamente, supongamos que v es equilibrado y consideremos el siguiente problema de programación lineal (P):

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i \in N} x_i \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \forall S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Nótese que $C(v) \neq \emptyset$ si y sólo si existe $\bar{x}$ una solución óptima de (P) con $\sum_{i \in N} \bar{x}_i = v(N)$. El dual de (P) es el siguiente problema de programación lineal (D):

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & \displaystyle\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} y_S v(S) & \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\},\, i\in S} y_S = 1 & \forall i\in N, \\ & y_S \geq 0 & \forall S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}. \end{array}$$

Claramente, (D) tiene, al menos, una solución óptima $\bar{y}$, ya que el conjunto de soluciones factibles es no vacío y compacto, y su función objetivo es continua. Definamos ahora

$$\bar{F} = \{S \subset N : \bar{y}_S > 0\}.$$

Obviamente $\bar{F}$ es una familia equilibrada con coeficientes equilibrantes $\{\bar{y}_S : S \in \bar{F}\}$. Como (D) tiene una solución óptima entonces, por el teorema de dualidad, (P) tiene también una solución óptima $\bar{x}$ y, además,

$$\sum_{i\in N} \bar{x}_i = \sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \bar{y}_S v(S).$$

Como v es equilibrado y $\bar{x}$ es una solución óptima de (P)

$$v(N) \leq \sum_{i\in N} \bar{x}_i = \sum_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \bar{y}_S v(S) \leq v(N)$$

por lo que $v(N) = \sum_{i\in N} \bar{x}_i$. □

Como sugerencia práctica podemos indicar que para probar que el núcleo de un juego es no vacío lo más sencillo suele ser encontrar un elemento de su núcleo; sin embargo, para probar que un juego tiene núcleo vacío, lo más sencillo suele ser demostrar que no es equilibrado.

5.3. El Valor de Shapley

En esta sección estudiamos el más importante de los conceptos relacionados con la idea de ecuanimidad: el valor de Shapley (Shapley, 1953). La aproximación de Shapley es axiomática; su intención es proponer, para cada juego TU, una asignación que sea un compromiso aceptable para los jugadores. Para ello llamó **valor** a cualquier aplicación $f : G(N) \to \mathbb{R}^N$ y enunció algunas propiedades que un valor debería cumplir. Finalmente, probó que estas propiedades caracterizaban un único valor y encontró una expresión explícita para el mismo. Este valor se conoce hoy en día como el valor de Shapley. A continuación presentamos una colección de propiedades que caracterizan el valor de Shapley; para ello, debemos dar una definición previa.

Definición 5.3.1. Sea $v \in G(N)$ un juego TU.

1) Decimos que $i \in N$ es un **jugador nulo** de v si, para cada $S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.

2) Dos jugadores $i, j \in N$ se denominan **simétricos** en v si, para cada coalición $S \subset N \backslash \{i, j\}$, se tiene que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Sea f un valor y considérense las siguientes propiedades.

Eficiencia: f satisface eficiencia si, para todo $v \in G(N)$,

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N).$$

Propiedad de Jugador Nulo: f satisface la propiedad de jugador nulo si, para todo $v \in G(N)$ y para todo $i \in N$ jugador nulo de v, se tiene que $f_i(v) = 0$.

Simetría: f satisface simetría si, para todo $v \in G(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$ simétricos en v, se tiene que $f_i(v) = f_j(v)$.

Aditividad: f satisface aditividad si, para todo par de juegos $v, w \in G(N)$, $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

La eficiencia indica que f debe repartir $v(N)$ entre los jugadores. La propiedad de jugador nulo quiere decir que los jugadores que no generan beneficios no deben recibir nada. La simetría requiere tratar idénticamente a jugadores idénticos. La aditividad es básicamente un requerimiento técnico que, aunque no está conectado con la idea de ecuanimidad, tampoco parece ir en contra de tal idea. A continuación probamos que estas cuatro propiedades caracterizan el valor de Shapley.

Teorema 5.3.1. *Existe un único valor* $\Phi : G(N) \to \mathbb{R}^N$ *que satisface eficiencia, propiedad de jugador nulo, simetría y aditividad. Este valor, denominado valor de Shapley, está dado por*

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

para todo $v \in G(N)$ *y todo* $i \in N$*, donde* s *y* n *denotan los cardinales de* S *y* N*, respectivamente.*

Demostración. Es inmediato probar que Φ satisface las propiedades de jugador nulo y aditividad. Para comprobar que satisface eficiencia consideremos $v \in G(N)$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\Phi_i(v) &= \sum_{i\in N}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))\\
&= \sum_{i\in N}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S\cup\{i\})-\sum_{i\in N}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S)\\
&= \sum_{S\subset N}s\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S)-\sum_{S\subset N,\,S\neq N}(n-s)\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S)\\
&= v(N).
\end{aligned}$$

Para comprobar que Φ satisface simetría consideremos $v \in G(N)$ e $i, j \in N$ simétricos en v y notemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_i(v)-\Phi_j(v) &= \sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))\\
&\quad -\sum_{S\subset N\setminus\{j\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S))\\
&= \sum_{S\subset N\setminus\{i\},\,j\in S}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))\\
&\quad -\sum_{S\subset N\setminus\{j\},\,i\in S}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S))\\
&= \sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{(s+1)!(n-s-2)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S\cup\{j\}))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, Φ satisface las propiedades requeridas. Veamos ahora que es el único valor que las satisface. Para cada coalición no vacía $S \subset N$, definimos el juego $u^S \in G(N)$ por[5]

$$u^S(T)=\begin{cases}1 & \text{si } S\subset T,\\[2ex] 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Tengamos ahora en cuenta que cada $v \in G(N)$ se puede ver como un vector

$$(v(S))_{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n-1},$$

[5]Un juego definido de esta forma se denomina usualmente **juego de unanimidad de la coalición** S.

con lo que $G(N)$ se puede ver como un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. Veamos que $U(N) = \{u^S : S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}\}$ es una base de dicho espacio vectorial. Para demostrarlo, es suficiente probar que $U(N)$ es un conjunto de vectores linealmente independientes. En efecto, sea $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \alpha_S u^S = 0$ ($\alpha_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$) y supongamos que existe $T \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ con $\alpha_T \neq 0$. Asumamos sin pérdida de generalidad que no existe $\bar{T} \subset T$, con $\bar{T} \neq T$, tal que $\alpha_{\bar{T}} \neq 0$. Pero entonces $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \alpha_S u^S(T) = \alpha_T$, lo cual no es posible. Esto prueba que $U(N)$ es una base. Tomemos ahora un valor f que cumpla eficiencia, la propiedad de jugador nulo y simetría. Claramente, para cada $i \in N$, cada coalición no vacía $S \subset N$ y cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f_i(\alpha_S u^S) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_S}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para acabar, basta tener en cuenta que, como f también cumple aditividad, f está unívocamente determinado ya que $U(N)$ es una base de $G(N)$. □

Observación 5.3.1. El valor de Shapley tiene una conocida interpretación heurística, según la cual se puede ver como el vector de ganancias esperadas correspondiente a la siguiente situación: a) los jugadores acuerdan acudir a cierto lugar, b) todos los posibles órdenes de llegadas son igualmente probables, y c) a su llegada, cada jugador recibe su contribución a la coalición formada por los jugadores que llegaron antes que él. En otras palabras, la propuesta del valor de Shapley para el juego $v \in G(N)$ puede también escribirse como

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} (v(B^\pi(i) \cup \{i\}) - v(B^\pi(i))),$$

para todo $i \in N$, donde $\Pi(N)$ es el conjunto de permutaciones de N y $B^\pi(i)$ es el conjunto $\{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$, es decir, el conjunto de jugadores que llegan antes que i cuando el orden de llegada viene especificado por la permutación π. Esta expresión coincide con la que hemos proporcionado anteriormente ya que cada sumando es de la forma $v(S \cup \{i\}) - v(S)$, donde S es un subconjunto de N que no contiene a i, con lo que basta tener en cuenta que $s!(n-s-1)!$ es el número de órdenes para los que S es igual a $B^\pi(i)$.

Observación 5.3.2. Para todo $v \in SG(N)$, $\Phi(v) \in I(v)$. En efecto, tengamos en cuenta que, para todo $i \in N$,

$$\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = 1.$$

Entonces, como v es superaditivo,

$$\begin{aligned} \Phi_i(v) &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &\geq \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(i) = v(i), \end{aligned}$$

para todo $i \in N$. Finalmente, teniendo en cuenta que Φ es eficiente, $\Phi(v) \in I(v)$.

A continuación calcularemos la propuesta del valor de Shapley en los ejemplos tratados en este capítulo.[6]

Ejemplo 5.3.1. En el juego del reparto de un millón no hay jugadores nulos y, además, todos los jugadores son simétricos. Por lo tanto, su valor de Shapley es (1/3,1/3,1/3). El núcleo de este juego es vacío, con lo que su valor de Shapley no pertenece al núcleo. $\diamond$

Ejemplo 5.3.2. La tabla siguiente recoge los cálculos para la obtención del valor de Shapley del juego del guante.

π	1	2	3
123	0	1	0
132	0	0	1
213	1	0	0
231	1	0	0
312	1	0	0
321	1	0	0
Φ	2/3	1/6	1/6

En la tabla se calculan los vectores de contribuciones marginales para los distintos órdenes de llegada de los jugadores y, al promediar, se obtiene el valor de Shapley del juego (véase la Observación 5.3.1), que resulta ser (2/3,1/6,1/6). Nótese que el único punto del núcleo de este juego era $(1, 0, 0)$. $\diamond$

[6] Aunque es más apropiado referirse a $\Phi(v)$ como la propuesta del valor de Shapley para v, es común llamarle simplemente *valor de Shapley de v*. Así lo haremos a partir de ahora.

Este ejemplo muestra que el valor de Shapley de un juego puede estar fuera del núcleo, aún cuando éste sea no vacío. Shapley (1971) presenta una clase de juegos para los cuales el valor de Shapley siempre pertenece al núcleo. Es la clase de juegos convexos, que definimos a continuación.

Definición 5.3.2. Sea $v \in G(N)$ un juego TU. Se dice que v es **convexo** si, para cualesquiera $i \in N$, $S, T \subset N \backslash \{i\}$ con $S \subset T$,

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Se puede comprobar que todo juego convexo es superaditivo. Además, Shapley demostró el siguiente resultado.

Teorema 5.3.2. *Sea $v \in G(N)$ un juego convexo. Entonces $\Phi(v) \in C(v)$.*

Ejemplo 5.3.3. En el juego asociado al Parlamento de Aragón, IU es un jugador nulo y los demás partidos son jugadores simétricos. Por tanto, su valor de Shapley es $(1/3, 1/3, 1/3, 0)$. ◇

Ejemplo 5.3.4. Las dos tablas siguientes recogen los cálculos para la obtención del valor de Shapley del juego de ahorro y del juego de coste asociados al problema de la profesora visitante.

π	1	2	3
123	0	1500	500
132	0	1500	500
213	1500	0	500
231	1500	0	500
312	500	1500	0
321	1500	500	0
Φ	5000/6	5000/6	2000/6

π	1	2	3
123	1500	100	1400
132	1500	100	1400
213	0	1600	1400
231	0	1600	1400
312	1000	100	1900
321	0	1100	1900
Φ	4000/6	4600/6	9400/6

El valor de Shapley del primero de estos juegos, el de ahorro, viene dado por $\Phi(v) = (5000/6, 5000/6, 2000/6)$. De acuerdo con esta asignación de ahorros, los jugadores deben pagar (4000/6,4600/6,9400/6). Este último vector es precisamente $\Phi(c)$. Para explicar este resultado, notemos que

$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(c(S) - c(S \cup \{i\}) + c(i)) = c(i) - \Phi_i(c).\end{aligned}$$

Finalmente, es claro que $\Phi(v) \in C(v)$. De hecho, v es un juego convexo. ◇

5.4. Algunas Aplicaciones de los Juegos Cooperativos con Utilidad Transferible

En esta sección presentamos dos aplicaciones de los juegos TU, una en el contexto de los problemas de asignación de costes y la otra en el de los modelos de la investigación operativa. Tales aplicaciones dan lugar a dos clases relevantes de juegos TU: los juegos del aeropuerto y los juegos de producción lineal.

5.4.1. Juegos del aeropuerto

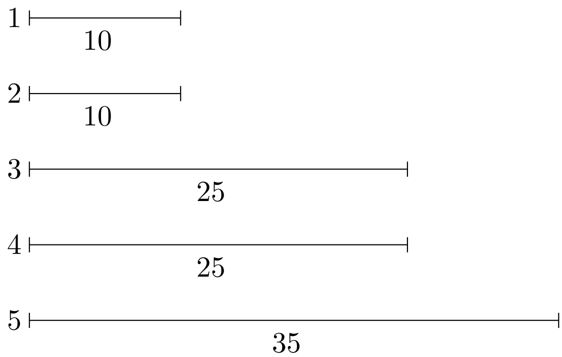
Littlechild y Owen (1973) propusieron este modelo como un ejemplo donde el valor de Shapley es fácil de calcular y tiene una interpretación sencilla. Su idea surgió de los trabajos de Baker (1965) y Thompson (1971) sobre el precio que tienen que pagar las operaciones de distintos tipos de aviones, donde por operación se entiende un despegue o un aterrizaje. A continuación formalizamos el modelo.

Supongamos que hay m tipos diferentes de aviones. Para cada tipo l, conocemos el número de operaciones, n_l, y los costes totales de construcción de una pista, c_l, asociados a ese tipo de aviones. Dado que queremos conocer lo que tiene que pagar cada operación, consideramos que cada una de ellas es un jugador; por lo tanto, N_l es el conjunto de jugadores asociados con operaciones de aviones de tipo l. Supongamos que los tipos de aviones están ordenados con respecto a los costes, es decir, $0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_m$. Sea $N = \cup_{l=1}^{m} N_l$ el conjunto de todas las operaciones. El juego del aeropuerto asociado a este problema de reparto de costes está definido por el conjunto de jugadores N y la función característica v dada por

$$v(S) = -\max\{c_l : S \cap N_l \neq \emptyset\},$$

para cada $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Esta definición se basa en la consideración de que los aviones más grandes necesitan pistas más largas. El coste imputable a una coalición S es el coste de una pista adecuada para que puedan realizarse todas las operaciones de S. Dicho coste es claramente $\max\{c_l : S \cap N_l \neq \emptyset\}$, es decir, el coste de una pista adecuada para que puedan operar en ella los aviones más grandes asociados a operaciones de S. Finalmente, cambiamos el signo para mantener la interpretación de la función característica en términos de beneficios y no de costes.

En los trabajos de Baker (1965) y Thompson (1971) aparece una asignación de costes que se define secuencialmente del siguiente modo. En primer lugar, el coste de construcción de una pista para operaciones de los aviones más pequeños (tipo 1) se divide igualitariamente entre el número total



$$x_1 = -\tfrac{10}{5} = -2$$
$$x_2 = -\tfrac{10}{5} = -2$$
$$x_3 = -\tfrac{10}{5} - \tfrac{15}{3} = -7$$
$$x_4 = -\tfrac{10}{5} - \tfrac{15}{3} = -7$$
$$x_5 = -\tfrac{10}{5} - \tfrac{15}{3} - 10 = -17$$

Figura 5.4.1: Esquema de asignación secuencial.

de operaciones correspondientes a todos los tipos de aviones. La idea que subyace en esta asignación es que todas las operaciones utilizan esta parte de la pista. A continuación, se divide igualitariamente el incremento que supone construir la pista para las operaciones del segundo tipo de aviones más pequeños entre el número total de operaciones correspondientes a aviones de tipo mayor o igual que 2. El procedimiento continúa de este modo hasta que alcanzamos el incremento que supone construir una pista adecuada para las operaciones del tipo de avión más grande. En este caso, este incremento se divide igualitariamente entre este número de operaciones. Obsérvese que este procedimiento utiliza la información del problema del aeropuerto y no del juego del aeropuerto definido. En el ejemplo 5.4.1 ilustramos este procedimiento.

Ejemplo 5.4.1. Consideremos que $m = 3$, $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$, $N_3 = \{5\}$ y los costes están dados por $c_1 = 10$, $c_2 = 25$, y $c_3 = 35$, para las operaciones de aviones de tipo 1, para las operaciones de aviones de tipo 2, y para las operaciones de aviones de tipo 3, respectivamente. Entonces, la función característica del juego del aeropuerto asociado está dada por

$$v(S) = \begin{cases} -10 & \text{si } S \subset \{1,2\},\ S \neq \emptyset \\ -25 & \text{si } S \cap N_2 \neq \emptyset,\ 5 \notin S \\ -35 & \text{si } 5 \in S \end{cases}$$

En la Figura 5.4.1, aparece representado el esquema secuencial de asignación. $\diamond$

Littlechild y Owen (1973) prueban que el esquema secuencial de asignación descrito anteriormente coincide con el valor de Shapley del juego del aeropuerto asociado.

Teorema 5.4.1. *Sea (N, v) un juego del aeropuerto. Si denotamos por $c_0 = 0$ y para cada $i \in N$, el tipo de avión de la operación i es l_i, entonces el valor de Shapley del juego (N, v) puede obtenerse como*

$$\Phi_i(v) = \sum_{l=1}^{l_i} \frac{-(c_l - c_{l-1})}{r_l},$$

siendo r_l el número total de operaciones correspondientes a tipos de avión con tamaño igual o superior a l, es decir, $r_l = \sum_{j=l}^{m} |N_j|$.

5.4.2. Juegos de producción lineal

Los juegos de producción lineal fueron introducidos en Owen (1975). Denotemos por N un conjunto de fabricantes. Cada fabricante $i \in N$ dispone de cierta cantidad de l materias primas, representada por el vector con componentes no negativas $c^i = (c^i_1, \ldots, c^i_l) \in \mathbb{R}^l$. A partir de estas materias primas, se pueden obtener m productos diferentes mediante un proceso de producción lineal dado por una matriz A de dimensión $l \times m$, con elementos no negativos y al menos un elemento no nulo en cada fila; el elemento a_{jk} indica el número de unidades de la materia prima j-ésima que son necesarias para producir una unidad del producto k-ésimo. Cada materia prima carece de valor por sí misma. El beneficio de cada fabricante se consigue mediante la venta de los productos finales. El precio de mercado de cada producto está dado por el vector con componentes no negativas $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. El objetivo de cada fabricante es maximizar su beneficio. Así pues, cada fabricante $i \in N$ se enfrenta a un problema de optimización que puede formularse mediante el problema de programación lineal

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & by^t \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq (c^i)^t, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

El proceso conjunto de producción puede caracterizarse por la cuaterna (N, A, b, c). Supongamos que un grupo de fabricantes deciden cooperar uniendo sus materias primas y fabricando los productos en un único centro de producción. En ese caso la cantidad total de materias primas disponibles para los fabricantes de $S \subset N$ está dado por $c^S \in \mathbb{R}^l$, donde para cada materia prima j, $c^S_j = \sum_{i \in S} c^i_j$. En consecuencia, el beneficio que la coalición S puede conseguir está dado por el valor óptimo del problema de programación lineal P^S definido como

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & by^t \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq (c^S)^t, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Esta aproximación sugiere un modo natural de asociar un juego TU a cada proceso de producción (N, A, b, c). En este juego el conjunto de jugadores es N y la función característica asigna, a cada coalición $S \subset N$, la ganancia $v(S)$ dada por el valor óptimo del problema de programación lineal P^S.[7] Nos referiremos a este juego con el nombre de **juego de producción lineal**. Claramente, los juegos de producción lineal son superaditivos. Además, tienen núcleo no vacío tal como se prueba a continuación.

Teorema 5.4.2. *Para cualquier proceso de producción lineal* (N, A, b, c)*, el juego de producción lineal asociado tiene núcleo no vacío.*

Demostración. Sea (N, A, b, c) un proceso de producción lineal y sea (N, v) el juego de producción lineal asociado. Vamos a encontrar un elemento de $C(v)$. Para ello utilizaremos las soluciones óptimas del problema de programación lineal dual de P^N, denotado por D^N, que está dado por

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & c^N z^t \\ \text{sujeto a} & zA \geq b, \\ & z \geq 0. \end{array}$$

Por el teorema de dualidad, el conjunto de soluciones óptimas es no vacío y el valor óptimo es $v(N)$. Sea $\bar{z}$ una solución óptima de D^N. Para cada $i \in N$, sea $\bar{x}_i = c^i \bar{z}^t$. Vamos a probar que $\bar{x} \in C(v)$. Sea $S \subset N$ y sea D^S el problema de programación lineal dual de P^S. Utilizando de nuevo el teorema de dualidad, tenemos que el valor óptimo de D^S es $v(S)$. Como $\bar{z}$ es factible en el problema D^S, se cumple que $\sum_{i \in S} \bar{x}_i = \sum_{i \in S} c^i \bar{z}^t \geq v(S)$, y $\sum_{i \in N} \bar{x}_i = \sum_{i \in N} c^i \bar{z}^t = v(N)$. Por tanto, $\bar{x} \in C(v)$. $\square$

El conjunto de asignaciones del núcleo obtenidas del modo descrito anteriormente se denomina **conjunto de Owen** del juego de producción lineal. Este conjunto ha sido caracterizado en van Gellekom y otros (2000). En general, es un subconjunto propio del núcleo tal como vemos en el siguiente ejemplo.

[7] Nótese que, para toda coalición no vacía $S \subset N$, P^S tiene soluciones óptimas porque su conjunto de soluciones factibles es no vacío y compacto.

Ejemplo 5.4.2. Consideremos el proceso de producción lineal (N, A, b, c) donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = (3, 1, 8),\ c^1 = (1, 0),\ c^2 = (2, 2) \text{ y } c^3 = (0, 2).$$

El problema de programación lineal D^N está dado por

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 3z_1 + 4z_2 \\ \text{sujeto a} & z_1 + z_2 \geq 3, \\ & z_2 \geq 1, \\ & 2z_1 + 3z_2 \geq 8, \\ & z_1,\ z_2 \geq 0. \end{array}$$

El valor óptimo de este problema es 11 y el conjunto de soluciones óptimas está dado por $\{(1, 2)\}$. Por tanto, $v(N) = 11$. La función característica completa de este proceso de producción lineal está dada por

$$\begin{array}{lll} v(1) = 0, & v(2) = 6, & v(3) = 2, \\ v(12) = 6, & v(13) = 9/2, & v(23) = 9, \text{ y} \\ v(N) = 11. & & \end{array}$$

El conjunto de Owen tiene $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ como único elemento, donde $\bar{x}_1 = (1, 0)(1, 2)^t = 1$, $\bar{x}_2 = (2, 2)(1, 2)^t = 6$, y $\bar{x}_3 = (0, 2)(1, 2)^t = 4$. Sin embargo, el núcleo del juego de producción lineal está dado por

$$C(v) = \text{conv}\{(2, 6, 3), (0, 6, 5), (0, 13/2, 9/2), (2, 13/2, 5/2)\}.$$

Este juego no es convexo. Por ejemplo, considerando $S = \{3\}$, $T = \{2, 3\}$ e $i = 1$ tenemos que $v(T \cup \{1\}) - v(T) = 2 < v(S \cup \{1\}) - v(S) = 9/2$. El valor de Shapley está dado por $\Phi(v) = (13/12, 19/3, 43/12)$ y está en el núcleo. $\diamond$

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Considérese el juego (N, v) definido por $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 4$, $v(13) = 8$, $v(23) = 10$ y $v(N) = 10$.

a) Hállese su valor de Shapley.

b) Obténgase una imputación de v que domine a $(2, 4, 4)$.

c) Utilícese el teorema de Bondareva-Shapley para probar que $C(v) = \emptyset$.

d) Si $w(13) = w(23) = 4$ y $w(S) = v(S)$ para las demás coaliciones S, dibújese $C(w)$ y hállense sus puntos extremos.

Ejercicio 5.2. Considérese el juego (N, v) definido por $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(13) = 4$, $v(23) = 2$ y $v(N) = 8$.

a) Hállese su valor de Shapley.

b) Obténgase una imputación de v que domine a $(1, 2, 5)$.

c) Dibújese $C(v)$ y hállense sus puntos extremos.

d) Razónese si el conjunto $\{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ es una colección equilibrada de $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 5.3. Hállese el valor de Shapley del juego (N, v) definido por $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(23) = 1$, $v(13) = 2$, $v(N) = 4$. Dibújese el núcleo de v y hállense sus puntos extremos. Indíquese razonadamente si el valor de Shapley de v pertenece al núcleo.

Ejercicio 5.4. Tres empresas de un polígono industrial quieren conectarse a una línea de alta tensión. Se plantean cooperar al conectarse para poder ahorrar costes. La tabla recoge el juego de coste y el juego de ahorro asociados:

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$c(S)$	0	10	14	13	15	13	15	15
$v(S)$	0	0	0	0	9	10	12	22

a) Calcúlese el valor de Shapley del juego de coste e indíquese el ahorro que consigue cada empresa según ese reparto.

b) Dibújese el núcleo del juego de ahorro indicando sus puntos extremos.

c) Proporciónese una familia equilibrada formada por cuatro coaliciones, especificando los coeficientes equilibrantes.

Ejercicio 5.5. Considérese un juego (N, v) tal que $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$. Para cada jugador $i \in N$, definimos el vector $x^i \in \mathbb{R}^N$ como

$$x_j^i = \begin{cases} v(j) & \text{si } j \neq i \\ v(N) - \sum_{k \in N \setminus \{i\}} v(k) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Pruébese que el conjunto de imputaciones del juego (N, v) coincide con la envoltura convexa de los vectores x^i con $i \in N$.

Ejercicio 5.6. Pruébese que las propiedades que caracterizan el valor de Shapley son independientes (Teorema 5.3.1), es decir, que para cada propiedad de la caracterización existe otro valor distinto del de Shapley que verifica las restantes.

Ejercicio 5.7. Dado un conjunto finito N y teniendo en cuenta que la familia de juegos de unanimidad $\{u^S \ : \ S \subset N, \ S \neq \emptyset\}$ es una base de $G(N)$, pruébese que para cualquier juego TU (N, v) se verifica que

$$v = \sum_{\substack{S \subset N \\ S \neq \emptyset}} \alpha_S u^S, \text{ con } \alpha_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} v(T), \text{ para cada } S \subset N, S \neq \emptyset.$$

Ejercicio 5.8. Pruébese que cualquier juego del aeropuerto es un juego convexo.

Ejercicio 5.9 (Problema de bancarrota)**.** Una empresa quiebra y sus bienes se valoran en 400 unidades monetarias. Hay tres acreedores que demandan 100, 200 y 300 unidades, respectivamente.

a) Asumiendo un planteamiento pesimista según el cual cada coalición de acreedores obtiene el valor máximo entre cero y lo que queda tras asignar al resto de los acreedores sus demandas, represéntese esta situación mediante un juego TU.

b) Calcúlese el valor de Shapley y los puntos extremos del núcleo para el juego obtenido en el apartado a).

c) Asúmase ahora un planteamiento optimista según el cual cada coalición de acreedores obtiene el mínimo entre el valor total de sus demandas y 400. Represéntese esta situación mediante un juego TU.

d) Calcúlese el valor de Shapley y los puntos extremos del núcleo del juego TU definido en el apartado c).

e) Compárense los resultados de los apartados b) y d). Estúdiese en cada caso si el valor de Shapley pertenece al núcleo.

f) ¿Son convexos ambos juegos?

Ejercicio 5.10. Plantéense las formulaciones pesimista y optimista de las situaciones recogidas en los ejercicios 4.4 y 4.6. Calcúlese el valor de Shapley en las distintas situaciones. Compárense los resultados con los obtenidos mediante la utilización de un modelo de negociación y las soluciones de Nash y de Kalai-Smorodinsky.

Ejercicio 5.11. La Figura 5.5.1 representa una red de distribución. El objetivo es determinar la máxima cantidad de flujo que puede circular por la red saliendo del nodo fuente (f) y llegando al nodo sumidero (s). Asociados a cada arco aparecen dos números: el primero indica el nombre del jugador que controla el arco y el segundo indica la capacidad máxima del arco. Suponemos que la ganancia por unidad de flujo es la misma y constante en cada arco. Podemos asociar a esta situación un juego TU donde la ganancia de una coalición S está dada por el flujo máximo que puede circular entre la fuente y el sumidero utilizando solamente los arcos controlados por los jugadores de la coalición S.

a) Obténgase la función característica.

b) Obténganse los puntos extremos del núcleo.

c) Calcúlese el valor de Shapley. ¿Es una asignación del núcleo?

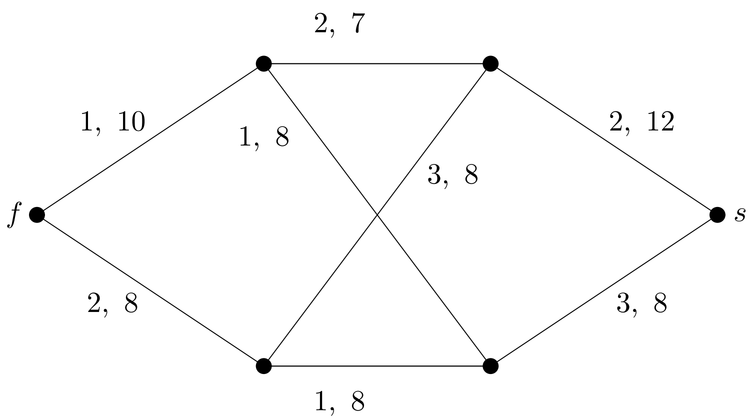


Figura 5.5.1: Red de distribución.

Ejercicio 5.12. Considérese un sistema de producción lineal (N, A, b, c) cuyos parámetros están dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; b = (3,4,1), \; c^1 = (1,1), \; c^2 = (1,2) \text{ y } c^3 = (0,2).$$

a) Obténgase el conjunto de Owen del juego de producción lineal asociado.

b) ¿Es un juego convexo?

c) Calcúlese el valor de Shapley.

Ejercicio 5.13 (Problema de asignación)**.** Supongamos que los jugadores 1, 2 y 3 poseen una vivienda cada uno y que las ponen a la venta. Los valores de su respectivas viviendas son 1, 1.4 y 2. Supongamos que hay dos posibles compradores, los jugadores 4 y 5, y que cada uno adquiere a lo sumo una vivienda. Cada entrada de la siguiente tabla representa el valor que el jugador i asigna a la vivienda del jugador j, con $i = 4, 5$, $j = 1, 2, 3$.

C\V	1	2	3
4	0.9	1.6	2.3
5	1.2	1.2	2.0

Una coalición S obtiene el beneficio asociado a la operación de compraventa más ventajosa dentro de la propia coalición; en otro caso obtiene cero. Obténgase la función característica y calcúlese el valor de Shapley.

Ejercicio 5.14. Un juego simple (N, v) es un juego de mayoría ponderada si existen $q > 0$ y una familia de ponderaciones $\{w^i \ : \ i \in N, \ w^i \geq 0\}$ de modo que

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i \in S} w^i \geq q \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Represéntese mediante un juego de mayoría ponderada el juego del reparto de un millón (Ejemplo 5.1.1) y el juego del guante (Ejemplo 5.1.2).

Bibliografía

Allais, M.: 1953, Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine, *Econometrica* **21**, 503–546. (Citado en la(s) página(s) 12)

Aumann, R. J. y Maschler, M.: 1964, The bargaining set for cooperative games, *en* M. Dresher, L. S. Shapley y A. Tucker (eds), *Advances in Game Theory*, Vol. 52 of *Annals of Mathematical Studies*, Princeton University Press, pp. 443–476. (Citado en la(s) página(s) 124)

Baker, M. J.: 1965, Runway cost impact study, Report presented to the Association of Local Transport Airlines, Jackson, Missouri. (Citado en la(s) página(s) 137)

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. y Sherali, H. D.: 1990, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley and Sons. (Citado en la(s) página(s) 54)

Bondareva, O.: 1963, Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games, *Problemy Kibernet* **10**, 119–139. (En Ruso). (Citado en la(s) página(s) 129)

Carreras, F., Magaña, A. y Amer, R.: 2001, *Teoría de Juegos*, Ediciones Universitat Politécnica de Catalunya. (Citado en la(s) página(s) 67, 68, 97, 100)

Cournot, A. A.: 1838, *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Théorie des Richesses*, París, Francia. (Traducción al inglés por N. T. Bacon en Economic Classics: Macmillan, 1897; reimpreso por Augustus M. Kelly, 1960). (Citado en la(s) página(s) 20)

Davenport, W. C.: 1960, Jamaican fishing: a game theory analysis, *en* I. Rouse (ed.), *Papers in Caribbean Anthropology*, Yale University Press. (Citado en la(s) página(s) 53)

Deutsch, M.: 1958, Trust and suspicion, *Journal of Conflict Resolution* **2**, 265–279. (Citado en la(s) página(s) 42)

Deutsch, M.: 1960, Trust, trustworthiness and the F-scale, *Journal of Abnormal and Social Psychology* **61**, 138–140. (Citado en la(s) página(s) 42)

Fishburn, P.: 1970, *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley and Sons. Reimpreso por Krieger Press 1979. (Citado en la(s) página(s) 12)

French, S.: 1986, *Decision Theory. An Introduction to the Mathematics of Rationality*, Ellis Horwood. (Citado en la(s) página(s) 12)

Gillies, D. B.: 1953, *Some Theorems on n-Person Games*, PhD thesis, Princeton University. (Citado en la(s) página(s) 124)

González-Díaz, J., García-Jurado, I. y Fiestras-Janeiro, G.: 2010, *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, Vol. 115 of *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society. (Citado en la(s) página(s) IX, 26, 45, 50, 64, 81, 87, 116, 117)

Harsanyi, J.: 1967-68, Games with incomplete information played by Bayesian players, *Management Science* **14**, 159–182, 320–334, 486–502. (Citado en la(s) página(s) 87)

Ichiishi, T.: 1983, *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press. (Citado en la(s) página(s) 26)

Kalai, E. y Smorodinsky, M.: 1975, Other solutions to Nash's bargaining problem, *Econometrica* **43**, 513–518. (Citado en la(s) página(s) 112, 114)

Kohlberg, E.: 1990, Refinement of the Nash equilibrium: The main ideas, *en* T. Ichiishi, A. Neyman y Y. Tauman (eds), *Game theory and applications*, Academic Press. (Citado en la(s) página(s) 22)

Kreps, D. M.: 1988, *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press. (Citado en la(s) página(s) 12)

Kreps, D. M. y Wilson, R.: 1982, Sequential equilibria, *Econometrica* **50**, 863–894. (Citado en la(s) página(s) 90)

Kuhn, H. W.: 1953, Extensive games and the problem of information, *en* H. Kuhn y A. Tucker (eds), *Contributions to the theory of games II*, Vol. 28 of *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press. (Citado en la(s) página(s) 77)

Lemke, C. E. y Howson, J. T.: 1964, Equilibrium points in bimatrix games, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **12**, 413–423. (Citado en la(s) página(s) 37)

Littlechild, S. C. y Owen, G.: 1973, A simple expression for the Shapley value in a special case, *Management Science* **20**, 370–372. (Citado en la(s) página(s) 137, 138)

Mas-Colell, A., Whinston, M. D. y Green, J. R.: 1995, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press. (Citado en la(s) página(s) 12)

Myerson, R. B.: 1991, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press. (Citado en la(s) página(s) 100)

Nash, J.: 1950a, The bargaining problem, *Econometrica* **18**, 155–162. (Citado en la(s) página(s) 106)

Nash, J.: 1950b, Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **36**, 48–49. (Citado en la(s) página(s) 22)

Nash, J.: 1951, Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* **54**, 286–295. (Citado en la(s) página(s) 22)

Nash, J.: 1953, Two-person cooperative games, *Econometrica* **21**, 128–140. (Citado en la(s) página(s) 115)

Osborne, M. y Rubinstein, A.: 1994, *A Course in Game Theory*, The MIT Press. (Citado en la(s) página(s) 34)

Owen, G.: 1975, On the core of linear production games, *Mathematical Programming* **9**, 358–370. (Citado en la(s) página(s) 139)

Owen, G.: 1995, *Game Theory*, Academic Press. (Citado en la(s) página(s) 45, 54)

Parthasarathy, T. y Raghavan, T. E. S.: 1971, *Some Topics in Two-Person Games*, Elsevier. (Citado en la(s) página(s) 37, 50)

Peters, H.: 1992, *Axiomatic Bargaining Theory*, Kluwer Academic Publishers. (Citado en la(s) página(s) 115)

Raiffa, H.: 1953, Arbitration schemes for generalized two-person games, *en* H. Kuhn y A. Tucker (eds), *Contributions to the theory of games II*, Vol. 28 of *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press. (Citado en la(s) página(s) 113)

Roth, A.: 1979, An impossibility result concerning n-person bargaining games, *International Journal of Game Theory* **8**, 129–132. (Citado en la(s) página(s) 114)

Schmeidler, D.: 1969, The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **17**, 1163–1170. (Citado en la(s) página(s) 124)

Selten, R.: 1965, Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfrageträgheit, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* **12**, 301–324. (Citado en la(s) página(s) 89)

Selten, R.: 1975, Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory* **4**, 25–55. (Citado en la(s) página(s) 61, 74, 77, 90)

Shapley, L. S.: 1953, A value for n-person games, *en* H. Kuhn y A. Tucker (eds), *Contributions to the theory of games II*, Vol. 28 of *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press. (Citado en la(s) página(s) 124, 131)

Shapley, L. S.: 1967, On balanced sets and cores, *Naval Research Logistics Quarterly* **14**, 453–460. (Citado en la(s) página(s) 129)

Shapley, L. S.: 1971, Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* **1**, 11–26. (Citado en la(s) página(s) 136)

Shapley, L. S. y Snow, R.: 1950, Basic solutions of discrete games, *Annals of Mathematical Studies* **24**, 27–35. (Citado en la(s) página(s) 50)

Straffin, P. D.: 1993, *Game Theory and Strategy*, Mathematical Association of America. (Citado en la(s) página(s) 42, 53)

Thompson, G. F.: 1971, *Airport costs and pricing*, PhD thesis, University of Birmingham. (Citado en la(s) página(s) 137)

Tijs, S.: 1981, Bounds for the core and the τ-value, *en* O. Moeschlin y D. Pallaschke (eds), *Game theory and mathematical economics*, North Holland, pp. 123–132. (Citado en la(s) página(s) 124)

van Damme, E.: 1991, *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer-Verlag. (Citado en la(s) página(s) 61, 64, 65, 90, 94, 115, 116, 117)

van Gellekom, J. R. G., Potters, J. A. M., Reijnierse, J. H., Engel, M. C. y Tijs, S.: 2000, Characterization of the Owen set of linear production processes, *Games and Economic Behavior* **32**, 139–156. (Citado en la(s) página(s) 140)

von Neumann, J. y Morgenstern, O.: 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press. (Citado en la(s) página(s) 124)

Notación

No pretendemos dar una lista exhaustiva de las notaciones usadas en este manual. Simplemente aportamos una pequeña lista de referencia conteniendo aquellas notaciones que podrían no ser claras para algún lector y aquellas convenciones que no son completamente estándar.

$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales $\{1, 2, \ldots\}$
$B \subset A$	El conjunto B es un subconjunto de A (posiblemente igual)
$\lvert A\rvert$	Número de elementos del conjunto A, salvo que A sea una matriz, en cuyo caso $\lvert A\rvert$ es el determinante de la matriz A
$\operatorname{conv}(A)$	La envoltura convexa del conjunto A, es decir, $\operatorname{conv}(A) := \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N},\, x_i \in A,\, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0,$ y $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$
2^A	El conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A
B^A	Aplicaciones del conjunto A en el conjunto B
ΔA	$\{x \in [0,1]^A : \lvert\{a \in A : x(a) > 0\}\rvert < \infty$ y $\sum_{a \in A} x(a) = 1\}$
A^t	La traspuesta de la matriz A
$\{x^k\}$	Abreviación de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$
$\{x^k\} \to x$	Abreviación de $\lim_{k \to \infty} \{x^k\} = x$
Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$:	
$a \geq b$	Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i \geq b_i$
$a > b$	Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i > b_i$
a_{-i}	El vector $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$
(a_{-i}, b_i)	El vector $(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

La teoría de juegos es un campo de las matemáticas cuyo nacimiento suele situarse en 1944, año de la publicación de *Theory of Games and Economic Behavior* del matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern. Su objeto de estudio son los problemas de decisión en los que interaccionan varios agentes, que compiten o cooperan para conseguir sus objetivos. Desde su aparición en el panorama científico, la teoría de juegos se ha convertido en un importante instrumento en las ciencias sociales, especialmente en la economía, y se ha aplicado con éxito en disciplinas que tratan de la interacción entre individuos. Este libro está pensado para ser utilizado como texto principal de un curso de introducción a la teoría de juegos de seis créditos ECTS. Abarca tanto los contenidos básicos de la teoría no cooperativa como los de la teoría cooperativa. Cuenta con numerosos ejemplos y con ejercicios, algunos resueltos. Está escrito con un estilo riguroso, no informal, aunque pretende introducir los contenidos matemáticos de un modo asequible a todo tipo de estudiantes universitarios siempre que tengan conocimientos elementales de matemáticas.

MANUAIS

UNIVERSITARIOS

USC editora
manuais

publica obras didácticas para público universitario ou especialista nas máis diversas áreas do coñecemento, que buscan, como complemento da teoría, solucións asequibles e desenvolvementos de índole práctica. Todos os orixinais da colección son sometidos a un proceso previo de avaliación por revisores e publicados baixo o selo de calidade USC editora.