ALBERTO RODRÍGUEZ VÁZQUEZ

HIPERSUPERFICIES CON CURVATURAS PRINCIPAIS CONSTANTES EN VARIEDADES KÄHLER CON CURVATURA SECCIONAL HOLOMORFA CONSTANTE

140
2019

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ALBERTO RODRÍGUEZ VÁZQUEZ

HIPERSUPERFICIES CON CURVATURAS PRINCIPAIS CONSTANTES EN VARIEDADES KÄHLER CON CURVATURA SECCIONAL HOLOMORFA CONSTANTE

140

2019

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Hipersuperficies con curvaturas principais constantes en variedades Kähler con curvatura seccional holomorfa constante

Alberto Rodríguez Vázquez

Xullo 2018

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice xeral

Resumo **5**

Introdución **7**

1. Preliminares **11**
- 1.1. Álxebras e grupos de Lie . . . 11
  - 1.1.1. Álxebras de Lie . . . 11
  - 1.1.2. Grupos de Lie . . . 12
  - 1.1.3. Descomposición de Iwasawa . . . 14
- 1.2. Xeometría de Riemann . . . 15
  - 1.2.1. Xeometría de subvariedades . . . 20
  - 1.2.2. Submersións semi-riemannianas . . . 23
- 1.3. Espazos simétricos . . . 25
  - 1.3.1. Espazos simétricos dende un punto de vista riemanniano . . . 25
  - 1.3.2. Espazos simétricos dende un punto de vista alxébrico . . . 29

2. Variedades de Kähler **33**
- 2.1. A complexificación dun espazo vectorial real . . . 33
- 2.2. Variedades complexas . . . 36
- 2.3. Variedades case complexas . . . 40
- 2.4. Variedades de Kähler . . . 43
- 2.5. Espazos de curvatura holomorfa constante . . . 45
  - 2.5.1. O espazo proxectivo complexo . . . 46
  - 2.5.2. O espazo hiperbólico complexo . . . 47
  - 2.5.3. As estrutura kählerianas de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ . . . 48
  - 2.5.4. $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ como espazos simétricos . . . 51

3. Xeometría de hipersuperficies **57**
- 3.1. Algúns criterios xeométricos . . . 57
  - 3.1.1. Hipersuperficies isoparamétricas . . . 57
  - 3.1.2. Hipersuperficies con curvaturas principais constantes . . . 59
  - 3.1.3. Hipersuperficies homoxéneas . . . 60
- 3.2. Hipersuperficies en espazos forma reais . . . 62

3.3. Hipersuperficies en espazos forma complexos 70

4. Hipersuperficies non Hopf en espazos forma complexos 77
4.1. As subvariedades W^{2n-k} e W_{φ}^{2n-k} 78
4.2. Ecuacións dunha hipersuperficie nun espazo forma complexo 79
4.3. Lema alxébrico 80
4.4. A constancia das proxeccións do campo de Hopf 82
4.4.1. Caso $s = \pm 1$ 83
4.4.2. Caso $s = 0$ 86
4.4.3. Caso $s \neq 0, \pm 1$ 94
4.5. Conclusión do Teorema Principal 97

Apéndices 98

A. Campos de Jacobi 99
A.1. Campos de Jacobi e xeometría intrínseca 99
A.2. Campos de Jacobi e xeometría extrínseca 101
A.2.1. M-campos de Jacobi 101
A.2.2. Desprazamento normal dunha hipersuperficie 102

B. Sistemas de ecuacións polinómicas 105

Bibliografía 109

Resumo

Unha hipersuperficie nunha variedade de Riemann ten curvaturas principais constantes se os autovalores do seu operador forma non dependen do punto. O problema de clasificar as hipersuperficies con curvaturas principais constantes no espazo proxectivo e hiperbólico complexo é un problema aberto. O campo de Hopf dunha hipersuperficie nunha variedade case complexa é o resultado de aplicar a estrutura case complexa da variedade sobre o campo normal da hipersuperficie. Neste traballo clasificamos as hipersuperficies con catro curvaturas principais no espazo proxectivo e hiperbólico complexo cuxo campo de Hopf proxecta de xeito non trivial sobre tres espazos de curvatura con dimensión un.

Abstract

A hypersurface in a Riemannian manifold has constant principal curvatures if the eigenvalues of its shape operator do not depend on the point. The problem of classifying hypersurfaces with constant principal curvatures in the complex projective and hyperbolic spaces remains open. The Hopf vector field of a hypersurface in an almost complex manifold is obtained by applying the almost complex structure of the manifold to the normal vector field of the hypersurface. In this work we classify hypersurfaces with four principal curvatures in the complex projective and hyperbolic spaces whose Hopf vector field has non-trivial projection onto three curvature spaces of dimension one.

Introdución

> “Todo o que é bo é belo, e a beleza non se dá sen unhas relacións ou proporcións regulares.”
>
> Platón, *Timeo, 87c.*

Na Grecia antiga a idea de beleza estaba vinculada á medida ($\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\nu$) e á proporción ($\sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$). De feito, a arte clásica pretende imitar a orde e a harmonía da natureza. Os obxectos xeométricos que as persoas podemos percibir cos nosos sentidos son as curvas e as superficies, cuxo estudo ten fascinado a moreas de matemáticos ó longo da historia. Daquela, as superficies máis fermosas quizais sexan as que posúen un exquisito grao de medida e proporción.

As transformacións dunha superficie que conservan a medida, as isometrías, teñen estrutura de grupo, e cando a acción deste grupo sobre a superficie é transitiva, a superficie dise homoxénea. Por outro lado, as curvaturas principais nun punto miden canto se separa o plano tanxente á superficie nunha determinada dirección. Certamente, no espazo euclidiano o feito de que as curvaturas principais non dependan de cada punto, é dicir, que as curvaturas principais sexan constantes, equivale a que a superficie sexa homoxénea. Entón, ten sentido considerar o problema de atopar as superficies máis “fermosas” de $\mathbb{R}^3$.

A resposta a este problema non chegaría ata o ano 1937 da man de Tullio Levi-Civita, que acadou unha clasificación completa das superficies con curvaturas principais constantes en [41]. Por outra banda, grazas á xeometría de Riemann, podemos considerar novos hábitats máis complexos para as nosas superficies. O primeiro paso neste sentido foi intentar acadar a clasificación das hipersuperficies con curvaturas principais constantes en variedades con curvatura seccional constante, é dicir, no espazo euclidiano, na esfera ou no espazo hiperbólico. Neste caso as hipersuperficies con curvaturas principais constantes chámanse isoparamétricas. En 1938, Beniamino Segre logrou clasificar todas as hipersuperficies con curvaturas principais constantes en $\mathbb{R}^n$ en [51], e no mesmo ano Élie Cartan fixo o propio no espazo hiperbólico en [15]. Porén, como veremos en §3.2 o problema é moito máis complicado nas esferas e aínda permanece aberto.

A principios da década de 1970, comezan a aparecer os primeiros resultados no análogo complexo das variedades de curvatura seccional constante, as variedades de Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, que agás isometría, son o espazo euclidiano de

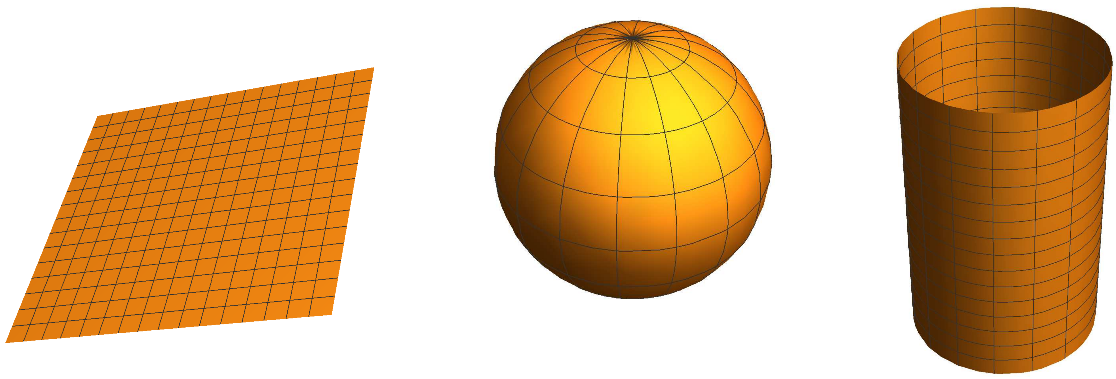

Figura 1: As hipersuperficies homoxéneas en $\mathbb{R}^3$ son o plano, a esfera e o cilindro.

dimensión par, o espazo proxectivo complexo e o espazo hiperbólico complexo. Nestas variedades a situación é, como veremos en §3.3, moito máis complicada, xa que a relación entre os conceptos de isoparametricidade, homoxeneidade e constancia das curvaturas principais é moi diferente ó caso real.

En 1973, Ryoichi Takagi conseguiu a clasificación completa das hipersuperficies homoxéneas no espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$ en [53]. Non obstante, a clasificación das hipersuperficies homoxéneas no espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$ non chegaría ata o ano 2007 da man de Jürgen Berndt e Hiroshi Tamaru en [8]. Porén, aínda non se logrou solucionar o problema de atopar todas as hipersuperficies con curvaturas principais constantes neses ambientes. Neste traballo preténdese botar algo de luz sobre este problema.

Como veremos en §3.3, os resultados conseguidos ata agora consisten en engadir a hipótese de que o campo de Hopf teña proxección non trivial sobre un número determinado de espazos de curvatura principal. No ano 1986, Makoto Kimura logrou atopar todas as hipersuperficies do espazo proxectivo complexo cuxo campo de Hopf proxecta sobre un único espazo de curvatura en [34]. Tres anos máis tarde, Jürgen Berndt resolveu o mesmo problema no espazo hiperbólico complexo en [3]. Por último, en 2011 José Carlos Díaz Ramos e Miguel Domínguez Vázquez conseguiron clasificar as hipersuperficies cuxo campo de Hopf proxecta exactamente sobre dous espazos de curvatura tanto no espazo proxectivo complexo coma no espazo hiperbólico complexo en [20]. A aportación orixinal deste traballo consistirá en probar o seguinte resultado.

Teorema Principal. *Sexa M unha hipersuperficie real conexa de $\mathbb{C}H^n$ ou de $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 3$, con catro curvaturas principais constantes distintas e multiplicidades de Hopf simples. Entón:*

- *Se $M \subset \mathbb{C}P^n$, o campo de Hopf non pode ter proxección non trivial sobre exactamente tres espazos de curvatura.*
- *Se $M \subset \mathbb{C}H^n$ e o campo de Hopf ten proxección non trivial sobre exactamente tres*

espazos de curvatura, M é holomorficamente congruente a unha parte aberta dun tubo ó redor da subvariedade minimal regrada W_φ^{2n-2} para algún $\varphi \in (0, \pi/2)$.

O obxectivo deste traballo é dar unha introdución ás ferramentas que serán necesarias para levar a cabo a proba, e introducir o contexto no que se desenvolve o noso problema. Imos estruturar este traballo do seguinte xeito.

No Capítulo 1, introduciremos as nocións básicas e necesarias para entender o noso problema. En concreto, ofreceremos unha breve introdución á xeometría de Riemann, á teoría de álxebras de Lie e á teoría de espazos simétricos.

No Capítulo 2, imos introducir as propiedades e describir as variedades ambiente nas que discorre o noso problema, isto é, os espazos proxectivo e hiperbólico complexos.

No Capítulo 3, presentaremos as relacións entre os criterios xeométricos expostos na introdución: ser isoparamétrica, ter curvaturas principais constantes e ser homoxénea. Ademais, faremos un pequeno resumo dos avances máis destacados para así entender mellor a situación do noso problema.

No Capítulo 4, demostraremos o resultado orixinal que anunciabamos anteriormente. Para iso empregaremos as ecuacións de Gauss e Codazzi como en [20], mais haberá un elemento novidoso que consistirá no uso dun resultado de sistemas de ecuacións polinómicas que aparece en [19, páx. 234].

Ademais, este traballo conta con dous apéndices. Por unha banda, o Apéndice A trata sobre campos de Jacobi, que como veremos en §3.2, constitúen unha das técnicas clásicas que se teñen empregado para acadar resultados de clasificación.

Por outra banda, no Apéndice B expoñemos de xeito moi breve un resultado da teoría de bases de Gröbner que foi imprescindible para poder levar a cabo a demostración do Teorema Principal.

Capítulo 1

Preliminares

O obxectivo deste capítulo é doble. Por unha parte, preténdense resumir algúns aspectos básicos dalgúns temas que son esenciais neste traballo e por outra, fixar a notación que empregaremos ó longo do mesmo.

Dividiremos este capítulo en catro seccións. Na primeira sección introduciremos algúns conceptos sobre álxebras e grupos de Lie. A continuación, ofreceremos un resumo sobre algúns conceptos e resultados básicos da xeometría de Riemann. Por último, introduciremos a noción de espazo simétrico combinando unha perspectiva xeométrica e outra máis alxébrica.

1.1. Álxebras e grupos de Lie

A teoría de álxebras e grupos de Lie foi introducida polo matemático noruego Sophus Lie a finais do século XIX. A motivación orixinal desta era o estudo do grupo de permutacións 'continuas' dun espazo como un análogo á teoría dos grupos de permutacións dos conxuntos finitos. Dacordo co propio Lie, a súa teoría nace no inverno de 1873-1874, mais non sería ata a publicación dos tres volumes do seu tratado *Theorie der Transformationsgruppen*, entre os anos 1888 e 1893, cando o seu traballo espertou o interese da comunidade científica. A teoría de Lie creou lazos entre diversas ramas da matemática como a teoría de grupos, a topoloxía, a álxebra linear ou a xeometría diferencial.

1.1.1. Álxebras de Lie

Comecemos introducindo algúns aspectos básicos da teoría de álxebras de Lie. Para unha introdución máis detallada, pódese consultar [35, Capítulo 1].

Unha *álxebra de Lie sobre un corpo* $\mathbb{K}$, é un $\mathbb{K}$-espazo vectorial $\mathfrak{g}$ xunto cunha operación interna $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$, que recibe o nome de *corchete de Lie* e satisfai

- $[\lambda X+\mu Y, Z]=\lambda[X,Y]+\mu[Y,Z]$ (Bilinearidade)
- $[X,Y]=-[Y,X]$ (Antisimetría)

- $[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0$ (Identidade de Jacobi)

para cada $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ dise *abeliana* se $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$. Unha *subálxebra de Lie* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é unha álxebra de Lie contida en $\mathfrak{g}$, tal que $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$.

Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie. Dado $\mathfrak{s}$ un subconxunto calquera de $\mathfrak{g}$, defínese o *centralizador de* $\mathfrak{s}$ como a subálxebra de Lie de $\mathfrak{g}$ definida por $\{X\in\mathfrak{g}:[X,Y]=0 \text{ para cada } Y\in\mathfrak{s}\}$. Un *ideal* $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ é un subespazo linear de $\mathfrak{g}$ que satisfai $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{a}$. Chamamos *centro de* $\mathfrak{g}$ ó ideal de $\mathfrak{g}$ definido como $Z(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}:[X,Y]=0 \text{ para cada } Y\in\mathfrak{g}\}$. Dados $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, ideais de $\mathfrak{g}$, tense que: $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ son ideais de $\mathfrak{g}$.

Sexan $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ dúas álxebras de Lie. Un *homomorfismo de álxebras de Lie* é unha aplicación linear $f\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$, tal que $f([X,Y])=[f(X),f(Y)]$, para cada $X,Y\in\mathfrak{g}$. Neste caso, é doado comprobar que $\operatorname{Im} f$ é unha subálxebra de $\mathfrak{g}$ e que $\operatorname{Ker} f$ é un ideal de $\mathfrak{g}$. Diremos que $D\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$, un homomorfismo de álxebras de Lie, é unha *derivación* se satisfai a *regra de Leibniz*, isto é, $D([X,Y])=[D(X),Y]+[X,D(Y)]$, para cada $X,Y\in\mathfrak{g}$. Denotaremos por $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ o conxunto de derivacións sobre $\mathfrak{g}$, que ten estrutura de álxebra de Lie. Definimos a *representación adxunta de* $\mathfrak{g}$ como a aplicación $\operatorname{ad}\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ tal que, $X\in\mathfrak{g}\mapsto\operatorname{ad}_X=[X,\cdot]\in\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, onde $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ denota o conxunto de homomorfismos de álxebras de Lie de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$. Para cada $X\in\mathfrak{g}$, tense que pola identidade de Jacobi $\operatorname{ad}_X\in\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie de dimensión finita. Para cada $j\geq 0$, definimos a *serie central inferior de* $\mathfrak{g}$ como a sucesión de ideais de $\mathfrak{g}$, $\{\mathfrak{g}_j\}_{j=0}^{\infty}$, onde $\mathfrak{g}_{j+1}=[\mathfrak{g}_j,\mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$. Para cada $j\geq 0$, definimos a *serie conmutadora de* $\mathfrak{g}$ como a sucesión de ideais de $\mathfrak{g}$, $\{\mathfrak{g}^j\}_{j=0}^{\infty}$, onde $\mathfrak{g}^{j+1}=[\mathfrak{g}^j,\mathfrak{g}^j]$ e $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}$. Unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ dise *nilpotente* se $\mathfrak{g}_j=0$, para certo $j\geq 0$ e é *resoluble* se $\mathfrak{g}^j=0$, para certo $j\geq 0$. Tense que $\mathfrak{g}^j\subset\mathfrak{g}_j$, para cada $j\geq 0$. Polo tanto, nilpotente implica resoluble. Usando o segundo teorema de isomorfía, tense que o ideal xerado pola suma de todos os ideais resolubles de $\mathfrak{g}$ é resoluble. Deste xeito, podemos definir o *radical de* $\mathfrak{g}$, que denotaremos por $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$, como o único ideal resoluble de $\mathfrak{g}$ que contén a todos os ideais resolubles de $\mathfrak{g}$. Diremos que $\mathfrak{g}$ é *simple* se é non abeliana e o seu único ideal propio é trivial, e diremos que é *semisimple* se $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})=0$. Definimos a *forma de Killing de* $\mathfrak{g}$ como a seguinte forma bilinear simétrica

$$\begin{array}{rccl}\mathcal{B}\colon & \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & (X,Y) & \longmapsto & \mathcal{B}(X,Y)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X\circ\operatorname{ad}_Y),\end{array}$$

onde tr denota a traza dun endomorfismo linear.

1.1.2. Grupos de Lie

A continuación expoñemos algunhas definicións de grupos de Lie e a relación destes coas álxebras de Lie. Para unha introdución máis detallada, pódese consultar [56, §15], [35, Capítulo 1.10] ou [40, Capítulo 15]. Un *grupo de Lie* é unha variedade diferenciable que tamén ten estrutura de grupo de xeito que a aplicación $G\times G\longrightarrow G$, $(g,h)\mapsto gh^{-1}$ é diferenciable. Denotaremos o elemento neutro de G por e. Sexa $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ o conxunto das matrices cadradas de tamaño n con coeficientes en $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un *homomorfismo de grupos de Lie* é unha aplicación diferenciable entre grupos de Lie que tamén é homomorfismo de grupos. Algúns exemplos de grupos de Lie son os seguintes:

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{K}) &:= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}, \\ SL(n,\mathbb{K}) &:= \{A \in GL(n,\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}, \\ O(n) &:= \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^\top = I_n\}, \\ SO(n) &:= \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}, \\ U(n) &:= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}, \\ SU(n) &:= \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}, \end{aligned}$$

onde $\det(A)$ denota o determinante de A, $A^\top$ a matriz trasposta de A, A^* é a matriz adxunta de A e I_n é a matriz identidade de orde n.

Sexan G e H grupos de Lie e consideremos un homomorfismo $\Phi\colon G \longrightarrow \operatorname{Aut} H$, onde $\operatorname{Aut} H$ denota o grupo de automorfismos de Lie de H. Chamaremos *produto semidirecto*, e denotarémolo por $G \ltimes_\Phi H$, á variedade produto $G \times H$ dotada da operación $((g_1,h_1),(g_2,h_2)) \mapsto (g_1g_2, h_1\Phi(g_1)h_2)$. Sexa G un grupo de Lie, un *subgrupo de Lie* H é un subgrupo de G que está dotado dunha topoloxía e dunha estrutura diferenciable que o convirten nunha subvariedade inmersa de G. O teorema do subgrupo pechado, [40, Teorema 15.29], establece que se H é un subgrupo de G que é un conxunto pechado de G, entón H é un subgrupo de Lie de G mergullado en G. Se $g \in G$, definimos *a traslación pola dereita por* g como a aplicación $R_g\colon G \longrightarrow G$, $x \mapsto xg$. Analogamente, definimos a *traslación pola esquerda por* g como a aplicación $L_g\colon G \longrightarrow G$, $x \mapsto gx$.

Sexa G un grupo de Lie. Dicimos que $X \in \Gamma(TG)$ é un *campo de vectores invariante pola esquerda* se $L_{g_{*h}}X_h = X_{gh}$, onde $L_{g_{*h}}$ é a diferencial de L_g en h. Denotaremos os campos de vectores invariantes pola esquerda de G mediante $\mathfrak{g}$. O conxunto $\mathfrak{g}$ ten estrutura de álxebra de Lie co corchete de campos de vectores, $[X,Y] = XY - YX$, onde $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ademais, existe un isomorfismo de espazos vectoriais entre $\mathfrak{g}$ e T_eG. Polo tanto, dado un grupo de Lie G existe unha álxebra de Lie asociada a G que denotaremos pola letra minúscula gótica correspondente. Diremos que un grupo de Lie é *resoluble*, *nilpotente*, *simple*, *semisimple* se a álxebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ é resoluble, nilpotente, simple, semisimple, respectivamente.

Definimos a aplicación exponencial de G como $\operatorname{Exp}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$, $X \mapsto \gamma(1)$, onde γ é a curva integral de X que comeza en $e \in G$. Sexa $f\colon G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entón, a exponencial de grupos de Lie satisfai o seguinte diagrama de naturalidade

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\mathrm{Exp}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\mathrm{Exp}"] \\ G \arrow[r, "F"] & H \end{tikzcd}$$

Sexa $g \in G$, defínese a *adxunción por* g *en* G como a aplicación $I_g\colon G \longrightarrow G$, $x \mapsto gxg^{-1}$. Defínese a *representación adxunta de* G como a aplicación $\operatorname{Ad}\colon G \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, tal que $\operatorname{Ad}(g)(X) = I_{g*}X$, para cada $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$. As representacións adxuntas dun grupo de Lie e da súa álxebra de Lie están relacionadas pola identidade $\operatorname{Ad}_{*e} = \operatorname{ad}$.

Por último, introducimos algunhas definicións básicas de teoría de representacións que serán necesarias posteriormente. Sexa G un grupo e V un espazo vectorial sobre un corpo $\mathbb{K}$. Dicimos que unha *representación de* G é un par (V,ρ) tal que $\rho\colon G \longrightarrow GL(V)$ é un homomorfismo de grupos, onde $GL(V)$ denota os automorfismos lineais de V. En particular, se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é un produto interno en V e ρ toma valores en $O(V)$, o conxunto das transformacións ortogonais de V, dicimos que (V,ρ) é unha *representación ortogonal*. Un subespazo linear $W \subset V$ dise G-invariante se $\rho(g)w \in W$ para cada $w \in W$ e para cada $g \in G$. Diremos que unha *subrepresentación de* (V,ρ) é un par $(W,\rho_{|W})$, onde W é un subespazo linear G-invariante de V e $\rho_{|W}(g) := \rho(g)_{|W}$, para cada $g \in G$. Se (V,ρ) ten só dúas subrepresentacións, o espazo trivial $\{0\}$ e o total V, dicimos que (V,ρ) é *irreducible*. Noutro caso, diremos que é *reducible*.

1.1.3. Descomposición de Iwasawa

A descomposición de Iwasawa é un método que foi desenvolvido por Kenkichi Iwasawa en [32], que consiste na xeneralización da factorización QR a grupos de Lie semisimples. Para unha exposición máis detallada, pódese consultar [35, Capítulo 6]. Sexa G un grupo de Lie semisimple e conexo e $\mathfrak{g}$ a súa álxebra de Lie asociada. Dicimos que un homomorfismo de álxebras de Lie $\theta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é unha *involución de Cartan* se satisfai:

- A forma bilinear dada por $\mathcal{B}_\theta(X,Y) := -\mathcal{B}(X,\theta Y)$, onde $X, Y \in \mathfrak{g}$, é definida positiva.
- $\theta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é unha *involución*. Isto é, $\theta^2 = \mathrm{Id}$.

Por [35, Proposición 6.18], toda álxebra de Lie semisimple ten unha involución de Cartan. Se $\mathfrak{g}$ é a álxebra de Lie de certo grupo de Lie G, unha involución de Cartan en $\mathfrak{g}$ é única agás conxugación de elementos da forma $\mathrm{Ad}(g)$ con $g \in G$. A proba disto último pode consultarse en [35, Corolario 6.19]. A involución de Cartan ten dous autovalores ± 1. Denotemos por $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ os autoespazos asociados ós autovalores 1 e -1, respectivamente. Entón, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{k}$ é a álxebra de Lie dun subgrupo compacto maximal de G e $\mathfrak{p}$ é o seu complemento ortogonal con respecto de $\mathcal{B}$. Satisfanse dúas propiedades:

- $\mathcal{B}$ é definida negativa en $\mathfrak{k}$ e definida positiva en $\mathfrak{p}$.
- Os subespazos $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{k}$ satisfán: $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ e $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$.

Unha descomposición de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ que satisfai as dúas anteriores condicións recibe o nome de *descomposición de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *inducida por* θ. Reciprocamente, unha descomposición de Cartan determina unha involución de Cartan.

Sexa $\mathfrak{a}$ un subespazo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ e denotemos por $\mathfrak{a}^*$ o seu dual. O subespazo $\mathfrak{a}$ existe por ser $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. É fácil ver que a familia $\{\mathrm{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$ é un conxunto de operadores autoadxuntos que conmutan. Para cada elemento $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, consideramos o espazo

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \text{para cada } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Dicimos que λ é unha *raíz (restrinxida)* e que $\mathfrak{g}_\lambda$ é un *subespazo raíz (restrinxida) de* $\mathfrak{g}$ se $\lambda \neq 0$ e $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$. Ademais, por [35, Proposición 6.40] tense o seguinte:

(I) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$, onde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}$, sendo $\mathfrak{k}_0$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{k}$.

(II) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$.

(III) $\theta\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda}$. Polo tanto, se $\lambda \in \Sigma$, tense que $-\lambda \in \Sigma$, onde Σ denota o conxunto de raíces.

A descomposición dada en (I) chámase *descomposición en espazos de raíces (restrinxidas) de* $\mathfrak{g}$. Se seleccionamos un hiperplano que non conteña ningunha raíz, chamaremos *raíces positivas* a aquelas que estean dun lado do hiperplano. Denotaremos por Σ^+ o conxunto das raíces positivas. Consideremos o subespazo de $\mathfrak{g}$ definido mediante $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda\in\Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$. Por (II), $\mathfrak{n}$ é unha subálxebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{g}$. Coa notación anterior, temos o seguinte teorema cuxa demostración se pode encontrar en [35, Proposición 6.43].

Teorema 1.1.1 (Descomposición de Iwasawa dunha álxebra de Lie)**.** *Sexa* $\mathfrak{g}$ *unha álxebra de Lie semisimple. Entón, hai unha descomposición de* $\mathfrak{g}$ *como suma directa de espazos vectoriais*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

onde $\mathfrak{a}$ *é abeliana,* $\mathfrak{n}$ *nilpotente,* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ *é resoluble e* $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$.

A descomposición anterior chamarémola *descomposición de Iwasawa de* $\mathfrak{g}$. A descomposición de Iwasawa dunha álxebra de Lie ten o seu reflexo nos grupos de Lie correspondentes. O seguinte teorema ilustra tal descomposición. A súa proba pode ser atopada en [35, Teorema 6.46].

Teorema 1.1.2 (Descomposición de Iwasawa dun grupo de Lie)**.** *Sexa G un grupo de Lie semisimple, sexa* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ *a descomposición de Iwasawa da álxebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de G e sexan A e N os subgrupos de Lie conexos de G con álxebras de Lie* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{n}$*. Entón, a aplicación $K \times A \times N \longrightarrow G$, dada por $(k, a, n) \mapsto kan$ é un difeomorfismo. Ademais, os grupos A e N son simplemente conexos.*

1.2. Xeometría de Riemann

A xeometría de Riemann é unha das ramas máis importantes da xeometría diferencial. É común sinalar como feito fundacional da mesma a lección inaugural dada por Bernhard Riemann en 1854, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, que pode ser lida en inglés en [52, páx. 135-153]. A xeometría riemanniana consiste, a grandes rasgos, na xeneralización da xeometría de superficies en $\mathbb{R}^3$ a dimensións superiores. Esta contribuíu ó avance de diversas áreas das matemáticas como a teoría de grupos, a ánalise e a topoloxía alxébrica e diferencial. Máis aló das matemáticas, a xeometría de Riemann é coñecida por ser o marco matemático sobre o que se construíu a teoría da relatividade de Einstein.

Para unha visión global sobre os temas tratados e problemas abertos no eido da xeometría de Riemann, pódese consultar [2]. Para unha introdución máis detallada pódense consultar [39], [22], [48] ou [18]. Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m. Denotaremos por $\mathcal{F}(M)$ as funcións diferenciables sobre M e por TM o fibrado tanxente de M. Para cada $p \in M$ expresaremos mediante T_pM o espazo tanxente a M en p, e por $\mathcal{F}_pM$ as funcións diferenciables de M nunha veciñanza de p. Se $\mathcal{D}$ é unha distribución diferenciable ó longo de M, denotamos por $\Gamma(\mathcal{D})$ o $\mathcal{F}(M)$-módulo das seccións de tal distribución.

Unha *variedade semi-riemanniana* é un par $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ou (M, g), onde M é unha variedade diferenciable e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ou g é un campo de tensores non dexenerado, simétrico, de tipo $(0,2)$ e signatura constante. Se o tensor g ten signatura (r,s), diremos que M ten *signatura* (r,s). Ademais, diremos que $s \in \{1,\dots,\dim(M)\}$ é o *índice* de M. As variedades semi-riemannianas con signatura $(n,0)$ chámanse *variedades de Riemann*, mentres que as variedades con signatura $(n-1,1)$ chámanse *variedades de Lorentz*. Se M é unha variedade de Riemann e X un campo de vectores, denotamos por $\|X\|$ a súa norma, é dicir, $\|X\| = \sqrt{|\langle X, X\rangle|}$.

Dada unha métrica de Riemann g, existe unha única conexión afín, coñecida como *conexión de Levi–Civita*, sen torsión e compatible coa métrica, é dicir, que satisfai as relacións $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ e $\nabla g = 0$, respectivamente. Analogamente, se ∇ é unha conexión afín sen torsión, existe unha métrica g tal que $\nabla g = 0$ dada pola fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X), \end{aligned}$$

para cada $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Consideremos (M,g) e (M',g') dúas variedades semi-riemannianas. Diremos que un difeomorfismo global ou local $f\colon M \longrightarrow M'$ é unha *isometría global* ou unha *isometría local*, respectivamente, se $g = f^*g'$, onde f^* denota o pullback por f. Denotaremos o conxunto das isometrías globais dunha variedade M en si mesma mediante $\mathrm{Iso}(M)$. Un feito moi importante deste conxunto é que ten estrutura de grupo de Lie. A proba orixinal deste resultado pódese consultar en [42]. Dicimos que $X \in \Gamma(TM)$ é un *campo de vectores de Killing* se o seu fluxo local vén dado por isometrías locais. Ademais, X é de Killing se e só se ∇X, que é un campo de tensores de tipo $(1,1)$, é antisimétrico.

Dada unha curva diferenciable $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, dicimos que un *campo de vectores ó longo de* γ é unha aplicación diferenciable $V\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow TM$, tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. O conxunto dos campos de vectores ó longo de γ ten estrutura de $\mathcal{F}(M)$-módulo e denotarémolo por $\mathfrak{X}(\gamma)$. Diremos que $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ é *extendible* se existe un campo de vectores $\tilde{V}$ definido nunha veciñanza da imaxe de γ tal que $\tilde{V}(\gamma(t)) = V(t)$ para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Dada unha conexión ∇ en TM, podemos definir D_t, *a derivada covariante* *ó longo de* γ, como o único endomorfismo $\mathbb{R}$-linear en $\mathfrak{X}(\gamma)$ que satisfai

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_t(V), \text{ para } f \in \mathcal{F}(-\varepsilon, \varepsilon);$$
$$D_t(V(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}(\gamma(t)), \text{ para calquera extensión } \tilde{V} \text{ de } V,$$

onde $\dot{\gamma}$ é o vector tanxente a γ en $\gamma(t)$ e $\dot{f}(t)$ é a derivada de f en $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definimos a *aceleración de* γ mediante $D_t\dot{\gamma}$. Diremos que unha curva é *xeodésica* se a súa aceleración é nula en todo punto. Ademais, é ben coñecido que dado un punto $p \in M$ e un vector tanxente $v \in T_pM$, existe unha única xeodésica γ de dominio maximal, tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Un campo de vectores V dise *paralelo ó longo dunha curva* γ se $D_tV = 0$, e dise *paralelo* se o é ó longo de calquera curva. É ben coñecido que dada unha curva γ e un vector $V_0 \in T_{\gamma(0)}M$, existe un único vector $V(t)$ tal que $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e $V(0) = V_0$, que recibe o nome de *transporte paralelo de* V_0 *ó longo de* γ.

Definimos a *aplicación exponencial de* M *en* $p \in M$ mediante $\exp_p\colon U \subset T_pM \longrightarrow M$, tal que

$$\exp_p(v) = \gamma_v^p(1), \text{ se } v \in U,$$

onde γ_v^p denota a xeodésica maximal con condicións iniciais $p \in M$ e $v \in T_pM$ e U é certa veciñanza da orixe de T_pM. Unha propiedade moi remarcable da aplicación exponencial é a súa naturalidade. Consideremos unha isometría $\varphi\colon M \longrightarrow \tilde{M}$. Entón, para cada $p \in M$ o seguinte diagrama é conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{\varphi_{*p}} & T_{\varphi(p)}\tilde{M} \\ {\scriptstyle \exp_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{\varphi(p)}} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{M} \end{array}$$

É ben coñecido que a aplicación exponencial en $p \in M$ é un difeomorfismo local en $0 \in T_pM$. Toda veciñanza aberta de p que sexa difeomorfa a un aberto estrelado de T_pM mediante a aplicación exponencial recibe o nome de *veciñanza normal* en $p \in M$. Deste xeito, se $\mathcal{U}$ é unha veciñanza normal de $p \in M$, podemos obter unha carta centrada en p, $(\mathcal{U}, x^i)$, e estas coordenadas reciben o nome de *coordenadas normais*. Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno para que $\exp_p$ sexa un difeomorfismo da bóla aberta $B_\varepsilon(0)$ na súa imaxe, $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ chámase *bóla xeodésica* e $\exp_p(\partial B_\varepsilon(0))$ chámase *esfera xeodésica*. Ademais, se $\mathcal{U}$ é unha veciñanza normal de p e γ é unha xeodésica que permanece dentro de $\mathcal{U}$, diremos que γ é unha *xeodésica radial*.

Sexa M unha variedade de Riemann. Diremos que M é *xeodesicamente completa* se cada xeodésica maximal está definida en todo $\mathbb{R}$. Pódese probar que M é un espazo métrico definindo como distancia entre dous puntos o ínfimo das lonxitudes das curvas que os unen. O Teorema de Hopf–Rinow afirma que M é xeodesicamente completa se e só se M é un espazo métrico completo coa distancia definida anteriormente.

Por outra banda, definimos o *tensor de curvatura* de tipo $(1,3)$ dunha variedade semi-riemanniana (M, g) mediante

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z, \;\; X,Y,Z \in \Gamma(TM),$$

onde por ∇ denotamos a conexión de Levi–Civita de M. Tamén escribiremos

$$R(X,Y,Z,W) := \langle R(X,Y)Z, W\rangle,$$

para cada $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$. Diremos que unha variedade é *chá* se $R = 0$. O tensor de curvatura satisfai as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) &= -R(Y,X,Z,W),\\
R(X,Y,Z,W) &= -R(X,Y,W,Z),\\
R(X,Y,Z,W) &= R(Z,W,X,Y),\\
R(X,Y,Z,W) &+ R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0,
\end{aligned}$$

para cada $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$. Sexa V un espazo vectorial real; diremos que un *tensor de curvatura alxébrico* é unha aplicación 4-linear $F\colon V \times \overset{4)}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfai as anteriores identidades. Dado σ un 2-plano non dexenerado de T_pM definimos a curvatura seccional de σ como

$$K(\sigma) := K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\{X,Y\}$ é certa base de σ. Consideremos un tensor de curvatura alxébrico F que satisfai a igualdade $K(X,Y) = \frac{\langle F(X,Y)Y,X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$, para cada $X,Y \in T_pM$ que xeren un 2-plano non dexenerado. Entón,

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = F(X,Y,Z,W),$$

para cada $X,Y,Z,W \in T_pM$.

Dicimos que unha variedade semi-riemanniana M ten *curvatura constante* se para cada $p \in M$ a curvatura seccional de todos os 2-planos é a mesma. Nese caso, pódese probar que o tensor de curvatura vén dado por

$$R(X,Y)Z = c(\langle X,Y\rangle Z - \langle X,Z\rangle Y),$$

para cada $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ e certa constante $c \in \mathbb{R}$. A continuación introduciremos algunhas variedades semi-riemannianas con curvatura constante.

O espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$ co produto escalar usual

$$\langle u,v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \ \text{ para } u,v \in \mathbb{R}^n,$$

ten estrutura de variedade de Riemann. Entón, $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes_\Phi \mathbb{R}^n$, onde $\Phi(A)(v) = Av$, para cada $A \in O(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Ademais, $\mathbb{R}^n$ ten curvatura nula, polo tanto, constante.

Definimos a *esfera* de dimensión n e radio $r > 0$ como

$$S^n(r) := \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2\}.$$

Este conxunto é simplemente conexo para $n \geq 2$. A métrica inducida en $S^n(r)$ pola métrica euclidiana en $\mathbb{R}^{n+1}$ chámase *métrica redonda*. Pódese comprobar que $\mathrm{Iso}(S^n) = O(n+1)$. Ademais, $S^n(r)$ ten curvatura constante $\frac{1}{r^2}$. Escribiremos S^n cando $r = 1$.

Se dotamos a $\mathbb{R}^n$ co produto escalar

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n, \quad \text{para } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

obtemos o *espazo de Minkowski* $\mathbb{R}^n_1$, que ten estrutura de variedade lorentziana con curvatura nula.

Definimos o *espazo hiperbólico real* de dimensión n e radio $r > 0$ como

$$\mathbb{R}H^n(r) := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = r^2, x_{n+1} > 0\}.$$

Este conxunto é difeomorfo á bóla aberta unidade de $\mathbb{R}^n$, polo tanto é simplemente conexo. Se dotamos a $\mathbb{R}H^n(r)$ da métrica inducida por $\mathbb{R}^{n+1}_1$, obtemos unha métrica de Riemann sobre $\mathbb{R}H^n(r)$. Sexa $O(1,n)$ o grupo formado polas transformacións ortogonais de $\mathbb{R}^{n+1}_1$. Pódese comprobar que $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}H^n) = O^+(1,n)$, onde $O^+(1,n)$ son as transformacións ortogonais de $\mathbb{R}^{n+1}_1$ que deixan $\mathbb{R}H^n$ invariante. Ademais, $\mathbb{R}H^n(r)$ ten curvatura constante $-\frac{1}{r^2}$. Escribiremos $\mathbb{R}H^n$ cando $r = 1$.

A continuación presentamos os análogos lorentzianos ás esferas e ós espazos hiperbólicos.

Consideremos o conxunto

$$S^n_1(r) := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = r^2\}.$$

Tense que $S^n_1(r)$ é difeomorfo a $\mathbb{R} \times S^{n-1}(r)$. Polo tanto, $S^n_1(r)$ é simplemente conexo para $n \geq 3$. Se dotamos a $S^n_1(r)$ da métrica inducida polo espazo de Minkowski de dimensión $n+1$, $S^n_1(r)$ recibe o nome de *espazo de De Sitter*. Con está métrica $S^n_1(r)$ é unha variedade lorentziana con curvatura constante $\frac{1}{r^2}$. Escribiremos S^n_1 cando $r = 1$.

Consideremos o conxunto

$$H^n_1(r) := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 = -r^2\}.$$

Tense que $H^n_1(r)$ é difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Polo tanto, $H^n_1(r)$ non é simplemente conexo para ningún $n \geq 0$. Se dotamos a $H^n_1(r)$ da métrica inducida pola métrica en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}, \quad \text{para } u, v \in \mathbb{R}^{n+1},$$

este espazo recibe o nome de *espazo de anti De Sitter*. $H^n_1(r)$ ten curvatura constante $-\frac{1}{r^2}$. Escribiremos H^n_1 cando $r = 1$. Por outra banda, o Teorema de Killing–Hopf caracteriza ás variedades riemannianas, completas, simplemente conexas con curvatura seccional constante.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Killing–Hopf)**.** *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión n, completa, simplemente conexa e de curvatura constante $c \in \mathbb{R}$. Entón M é isométrica a unha das seguintes:*

- *A esfera de radio r, $S^n(r)$, se $c = \frac{1}{r^2}$.*
- *O espazo euclidiano, $\mathbb{R}^n$, se $c = 0$.*
- *O espazo hiperbólico de radio r, $\mathbb{R}H^n(r)$, se $c = -\frac{1}{r^2}$.*

1.2.1. Xeometría de subvariedades

Sexa $(\overline{M}, g)$ unha variedade semi-riemanniana e M unha subvariedade mergullada de $\overline{M}$. Isto significa que existe certa $f\colon M \longrightarrow \overline{M}$, aplicación diferenciable, inxectiva, con diferencial inxectiva en cada punto e tal que $f(M)$ é difeomorfa a M. A restricción de g a M induce un tensor de tipo $(0,2)$ simétrico en M que pode ser dexenerado. Se resulta que tal restricción non é dexenerada, entón M é unha variedade semi-riemanniana por dereito propio e M dise subvariedade semi-riemanniana de $\overline{M}$. No caso de que $\overline{M}$ sexa unha variedade de Riemann, entón calquera subvariedade de $\overline{M}$ é unha subvariedade de Riemann. No que segue os conceptos expostos son locais. Polo tanto, satisfanse para variedades inmersas, xa que toda variedade inmersa é localmente mergullada. Falaremos de *inmersións isométricas* cando consideremos na nosa variedade inmersa a métrica dada pola restricción da métrica da variedade ambiente. Dende o punto de vista da xeometría de subvariedades non ten sentido distinguir entre dúas inmersións isométricas (M, g) e (M', g') en $\overline{M}$ que difiran nunha isometría do espazo ambiente $\overline{M}$. Dicimos que dúas inmersións isométricas $f\colon M \longrightarrow \overline{M}$ e $f'\colon M' \longrightarrow \overline{M}$ son *congruentes* se hai unha isometría $\varphi \in \operatorname{Iso}(\overline{M})$, tal que $f' = \varphi \circ f$. Nese caso

$$g' = f'^*\overline{g} = f^*(\varphi^*\overline{g}) = f^*\overline{g} = g.$$

Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Riemann e M unha subvariedade de Riemann de $\overline{M}$. Cada espazo tanxente T_pM está dotado cunha métrica g_p. Polo tanto, podemos considerar o fibrado dos vectores que son ortogonais ó espazo tanxente. Chamaremos a tal conxunto *fibrado normal a M* e denotarémolo por νM. En cada punto $p \in M$, teremos a descomposición $T_p\overline{M} = T_pM \oplus \nu_pM$, onde $\oplus$ denota a suma directa. Dado un campo de vectores $X \in \Gamma(T\overline{M})$ denotaremos por $X^\top$ a proxección ortogonal de X en TM e por $X^\perp$ a proxección ortogonal en νM. Se V é un espazo vectorial cunha forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $W \subset V$ é un espazo vectorial, denotaremos por $V \ominus W := \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida positiva, entón $V \ominus W$ é o complemento ortogonal de W en V. Usaremos esta notación para distribucións en M e subfibrados de $\overline{M}$ restrinxidos a M.

É coñecido que o tensor de curvatura R dunha variedade de Riemann (M, g) depende unicamente da métrica g. Denotemos por $\overline{R}$ e R os tensores de curvatura de $\overline{M}$ e M, respectivamente. Podemos descompoñer $\overline{\nabla}_X Y$ na súa compoñente tanxencial $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$ e normal $(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$, para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$. Entón, a conexión de Levi–Civita de M vén dada por $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$. Ademais, podemos definir a *segunda forma fundamental*, que é bilinear e simétrica, mediante $I\!I(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$. Polo tanto, temos unha descomposición ortogonal coñecida como *fórmula de Gauss* dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + I\!I(X,Y),$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$. Ademais, existe ξ, un campo de vectores unitario e normal a M. Definimos o *operador forma de M* asociado a ξ como o operador autoadxunto $\mathcal{S}_\xi$ que satisfai a relación $\langle \mathcal{S}_\xi X, Y\rangle = \langle I\!I(X,Y), \xi\rangle$, onde $X, Y \in \Gamma(TM)$. Os autovalores e autoespazos de $\mathcal{S}_\xi$ chámanse *curvaturas principais* e *espazos principais de curvatura de M con respecto a ξ*, respectivamente. Ademais, denotamos por $\nabla^\perp$ a *conexión normal de M*, que se define mediante $\nabla^\perp_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp$, para cada $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Entón, temos unha descomposición ortogonal dada por

$$\nabla^\perp_X \xi = -\mathcal{S}_\xi X + \nabla^\perp_X \xi,$$

que chamamos *fórmula de Weingarten*. Estas dúas fórmulas coñécense como *ecuacións fundamentais de primeira orde*.

Tomemos agora $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Empregando a definición de derivada covariante podemos ver que

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + (\nabla^\perp_X I\!I)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y I\!I)(X,Z) + \mathcal{S}_{I\!I(X,Z)}Y - \mathcal{S}_{I\!I(Y,Z)}X.$$

Se consideramos a parte tanxente, teremos a *ecuación de Gauss*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^\top = R(X,Y)Z - \mathcal{S}_{I\!I(Y,Z)}X + \mathcal{S}_{I\!I(X,Z)}Y.$$

No caso de curvatura constante $c \in \mathbb{R}$ teremos

$$c(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y) = R(X,Y)Z - \mathcal{S}_{I\!I(Y,Z)}X + \mathcal{S}_{I\!I(X,Z)}Y.$$

Se consideramos a parte normal, teremos a *ecuación de Codazzi*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X I\!I)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y I\!I)(X,Z).$$

No caso de curvatura constante,

$$(\nabla^\perp_X I\!I)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y I\!I)(X,Z).$$

Empregando as relacións entre a segunda forma fundamental e o operador forma, podemos reescribir a anterior ecuación como

$$\langle(\nabla_X \mathcal{S}_\xi)Y, Z\rangle = \langle(\nabla_Y \mathcal{S}_\xi)X, Z\rangle,$$

para cada $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Consideremos agora $\xi \in \Gamma(\nu M)$ e $X, Y \in \Gamma(TM)$. Entón, empregando a definición de derivada covariante dun campo de tensores podemos ver que

$$\overline{R}(X,Y)\xi = R^\perp(X,Y)\xi + (\nabla_Y \mathcal{S})_\xi X - (\nabla_X \mathcal{S})_\xi Y + I\!I(Y, \mathcal{S}_\xi X) - I\!I(X, \mathcal{S}_\xi Y),$$

onde $R^\perp$ denota o tensor de curvatura asociado á conexión normal. Se agora tomamos a parte tanxente, obtemos de novo a ecuación de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y))\xi^\top = (\nabla_Y \mathcal{S})_\xi X - (\nabla_X \mathcal{S})_\xi Y.$$

Pero se tomamos a parte normal, obtemos a *ecuación de Ricci.*

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi + I\!I(Y,\mathcal{S}_\xi X) - I\!I(X,\mathcal{S}_\xi Y).$$

No caso de curvatura constante,

$$R^\perp(X,Y)\xi = I\!I(X,\mathcal{S}_\xi Y) - I\!I(Y,\mathcal{S}_\xi X).$$

Estas tres ecuacións constitúen as *ecuacións fundamentais de segunda orde.* Elas determinan por completo a xeometría das inmersións isométricas en variedades de curvatura constante, no sentido que recolle o seguinte teorema. A demostración do mesmo pode ser atopada en [9, páx. 6].

Teorema 1.2.2 (Teorema fundamental da xeometría de subvariedades)**.** *Sexa M unha variedade riemanniana m-dimensional, ν un fibrado vectorial de rango r sobre M equipado cunha métrica riemanniana, ∇' unha conexión métrica en ν e α un campo 2-tensorial covariante simétrico en M que toma valores en ν. Definimos*

$$\begin{array}{rccl} A: & \nu & \longrightarrow & End(TM) \\ & \xi & \longmapsto & A_\xi, \end{array}$$

mediante $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y),\xi\rangle$, para cada $X,Y \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(\nu)$. Supoñamos que α, A e ∇' satisfán as ecuacións de Gauss, Codazzi e Ricci, para certo $c \in \mathbb{R}$. Entón, para cada $p \in M$ existe unha veciñanza aberta de p en M e unha inmersión isométrica $f\colon U \longrightarrow \overline{M}^n(c)$ de U nun espazo de curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$ e $n = m + r$, tal que A e α son o operador forma e a segunda forma fundamental de f respectivamente, e ν é isomorfo ó fibrado normal de f. A inmersión f é única agás unha isometría de $\overline{M}^n(c)$. Ademais, se dúas inmersións isométricas teñen a mesma segunda forma fundamental e conexión normal, coinciden localmente agás unha isometría do espazo ambiente.

Diremos que unha subvariedade de Riemann M en $(\overline{M}, g)$ é *totalmente xeodésica* se $I\!I = 0$. Isto é equivalente a que toda xeodésica en M sexa unha xeodésica en $\overline{M}$. Diremos que $\xi \in \Gamma(\nu M)$ é un *campo de vectores normal paralelo* a M se $\nabla^\perp \xi = 0$. Cando para cada $p \in M$ e para cada vector normal $\xi_p \in \nu_p M$ é posible estender ξ a un campo de vectores paralelo nunha veciñanza de p en M, diremos que M ten *fibrado normal chan.* Unha subvariedade ten fibrado normal chan se e só se $R^\perp = 0$. Definimos o vector curvatura media H dunha subvariedade de Riemann M como a traza da segunda forma fundamental. Polo tanto, con respecto a unha referencia local ortonormal $\{E_i\}$ de M, podemos escribir $H = \sum_{i=1}^m I\!I(E_i, E_i)$. Se $\xi \in \Gamma(\nu M)$, entón a curvatura media de M con respecto a ξ é a traza do operador forma $\mathcal{S}_\xi$. Diremos que M ten *curvatura media paralela* se H é paralelo con respecto á conexión normal. A *función curvatura media* h de M é a norma do vector curvatura media, é dicir, $h = \|H\|$. Diremos que unha subvariedade é *minimal* se $h = 0$. Dicimos que unha subvariedade M é *umbílica na dirección* ξ se o operador forma $\mathcal{S}_\xi$ é un múltiplo da identidade. Unha subvariedade M dise *totalmente umbílica* se o é en toda dirección normal. Nese caso existirá un campo de vectores normal ξ de xeito que $II(X,Y) = \langle X, Y\rangle\xi$ para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$ e ademais $H = m\xi$. Claramente, toda subvariedade totalmente xeodésica é totalmente umbílica, mais o recíproco non é certo.

Un caso particular de inmersións isométricas son as hipersuperficies. Diremos que M é unha hipersuperficie en $\overline{M}$ se é unha subvariedade de Riemann de codimensión 1. Polo tanto, agás o signo, existirá localmente un único campo de vectores normal unitario $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Denotaremos por $\mathcal{S}$ o operador forma con respecto a ξ. Podemos escribir as fórmulas de Gauss e Weingarten como

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \langle \mathcal{S}X, Y\rangle\xi,\\ \overline{\nabla}_X \xi &= -\mathcal{S}X.\end{aligned}$$

Neste caso, as ecuacións de Gauss e Codazzi redúcense a

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &= \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle \mathcal{S}Y, Z\rangle\langle \mathcal{S}X, W\rangle + \langle \mathcal{S}X, Z\rangle\langle \mathcal{S}Y, W\rangle,\\ \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle &= \langle (\nabla_X \mathcal{S})Y - (\nabla_Y \mathcal{S})X, Z\rangle.\end{aligned}$$

A ecuación de Ricci non aporta información para subvariedades de codimensión un.

1.2.2. Submersións semi-riemannianas

Nesta parte seguiremos a exposición dada no artigo [49]. Sexan (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$ dúas variedades semi-riemannianas e denotemos as súas conexións de Levi–Civita por ∇ e $\overline{\nabla}$, respectivamente. Sexa $\pi\colon M \longrightarrow \overline{M}$ unha submersión sobrexectiva. Para cada $q \in \overline{M}$ as subvariedades $\pi^{-1}(q)$ chámanse *fibras*. Diremos que un campo de vectores $X \in \Gamma(TM)$ é *vertical* se é tanxente ás fibras, e *horizontal* se é perpendicular a elas. Diremos que unha submersión sobrexectiva $\pi\colon M \longrightarrow \overline{M}$ é unha *submersión semi-riemanniana* se satisfai dúas condicións:

(i) $\pi^{-1}(q)$ é unha subvariedade semi-riemanniana.

(ii) π_* preserva a lonxitude dos campos de vectores horizontais.

Deste xeito, temos unha descomposición ortogonal de T_pM dada por

$$T_pM = \operatorname{Ker}\pi_{*p} \oplus \operatorname{Im}\pi_{*p},$$

onde $\operatorname{Ker} f_{*p}$ é o subespazo tanxente ás fibras, por tanto vertical, e $\operatorname{Im} f_{*p}$ é o espazo horizontal. Referirémonos á distribución vertical inducida por π sobre M como $\mathcal{V}$ e á horizontal como $\mathcal{H}$. Deste xeito, obtemos a descomposición do fibrado tanxente a M

$$TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}.$$

Por ser π unha submersión, temos que π_{*p} é un isomorfismo linear entre $\mathcal{H}_p$ e $T_{\pi(p)}\overline{M}$. Polo tanto, podemos definir o *levantamento horizontal de* $X \in \Gamma(T\overline{M})$, que denotaremos por $X^L \in \Gamma(TM)$, como o único campo de vectores horizontal en M tal que $\pi_{*p}(X_p^L) = X_{\pi(p)}$, para cada $p \in M$. Do mesmo xeito que nunha inmersión definiamos un tensor $(0,2)$ sobre TM chamado segunda forma fundamental, aquí definimos dous: o tensor T e o tensor A. Sexan $X, Y \in \Gamma(TM)$, entón

$$\begin{aligned} T_X Y &:= (\nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}, \\ A_X Y &:= (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

onde $(\cdot)^{\mathcal{H}}$, $(\cdot)^{\mathcal{V}}$ denotan a compoñente horizontal e vertical, respectivamente. Os tensores T e A son tensores de tipo $(1,2)$. En cada punto de M son operadores lineais antisimétricos sobre o espazo tanxente que revirten os espazos horizontais e verticais. Ademais, T cumpre que $T_Z = T_{Z^{\mathcal{V}}}$, mentres que A satisfai que $A_Z = A_{Z^{\mathcal{H}}}$ para cada $Z \in \Gamma(TM)$. Por outra banda, $T_V W = T_W V$, para $V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ e $A_X Y = A_Y X$, para $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$. Pódese probar que $A_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]^{\mathcal{V}}$, para cada $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$. Disto último, concluímos que A mide esencialmente a integrabilidade da distribución $\mathcal{H}$.

Ademais, existen relacións entre T e A coa conexión de Levi–Civita en M, que veñen a desempeñar un papel similar ó das ecuacións fundamenais de primeira orde das inmersións

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= T_V W + \hat{\nabla}_V W, \\ \nabla_V X &= (\nabla_V X)^{\mathcal{H}} + T_V X, \\ \nabla_X V &= A_X V + (\nabla_X V)^{\mathcal{V}}, \\ \nabla_X Y &= (\nabla_X Y)^{\mathcal{H}} + A_X Y, \end{aligned}$$

onde $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ e $V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ e $\hat{\nabla}$ denota a conexión de Levi–Civita das fibras. Do anterior, dedúcese a importante relación entre as conexións de Levi–Civita de M e $\overline{M}$

$$\nabla_{X^L} Y^L = (\overline{\nabla}_X Y)^L + \frac{1}{2}[X^L, Y^L]. \tag{1.1}$$

Sexa R o tensor de curvatura de M, $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\overline{M}$ e $\hat{R}$ o tensor de curvatura dunha fibra. Definimos o *levantamento horizontal do tensor de curvatura de* $\overline{R}$, como o tensor de tipo $(0,4)$ establecido mediante a seguinte relación

$$\langle R^L(X_1, X_2)X_3, X_4 \rangle := \langle \overline{R}(X_1^L, X_2^L)X_3^L, X_4^L \rangle,$$

con $X_i \in \Gamma(\mathcal{H})$ para cada $i = 1, \ldots, 4$. O seguinte corolario relaciona as curvaturas seccionais de M, $\overline{M}$ e as fibras.

Corolario 1.2.3. *Sexa* $\pi\colon M \longrightarrow \overline{M}$ *unha submersión semi-riemanniana. Sexan* $K, \overline{K}$ *e* $\hat{K}$ *as curvaturas seccionais de* M, $\overline{M}$ *e as fibras respectivamente. Se* X, Y *son vectores* *horizontais e V, W verticais tense que*

$$K(V,W) = \hat{K}(V,W) + \frac{\langle T_V V, T_W W\rangle - \|T_V W\|^2}{\langle V,V\rangle\langle W,W\rangle - \langle V,W\rangle^2},$$
$$K(X,V)\|X\|^2\|V\|^2 = \|T_V X\|^2 - \|A_X V\|^2 - \langle (\nabla_X T)_V V, X\rangle,$$
$$\overline{K}(\overline{X},\overline{Y}) = K(X,Y) + \frac{3\|A_X Y\|^2}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\overline{X} = \pi_* X$ e $\overline{Y} = \pi_* Y$.

Da última ecuación deducimos que

$$\overline{K}(\overline{X},\overline{Y}) = K(X,Y) + \frac{3\langle [X^L,Y^L]^{\mathcal{V}}, [X^L,Y^L]^{\mathcal{V}}\rangle}{4(\langle X^L,X^L\rangle\langle Y^L,Y^L\rangle - \langle X^L,Y^L\rangle^2)}, \tag{1.2}$$

onde $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$.

1.3. Espazos simétricos

A noción de espazo simétrico foi introducida no ano 1926, por Élie Cartan en [13]. Os espazos euclidianos, as esferas, os espazos proxectivos reais e complexos ou as grassmannianas son tan só algúns exemplos de espazos simétricos.

En [13, páx. 218], Cartan propón o problema de determinar todas aquelas variedades de Riemann coa propiedade de que o tensor de curvatura sexa conservado polo transporte paralelo ó longo dunha curva calquera. Analiticamente, veremos que esta propiedade se pode escribir como

$$\nabla R = 0.$$

Este problema sería resolto por el mesmo en [14]. Neste artigo, Cartan conseguiu unha clasificación completa dos espazos simétricos.

Dende unha perspectiva alxébrica, podemos afirmar que os espazos simétricos son un certo tipo de variedades semi-riemannianas, cun grupo de isometrías suficientemente grande e que satisfai boas propiedades. Nesta sección intentaremos ofrecer unha introdución básica á teoría de espazos simétricos combinando unha perspectiva xeométrica e alxébrica.

1.3.1. Espazos simétricos dende un punto de vista riemanniano

A continuación falaremos dos espazos simétricos dende o punto de vista da xeometría riemanniana. Seguiremos as referencias [48] e [29]. Comecemos introducindo a definición de espazo simétrico.

Definición 1.3.1. Unha variedade riemanniana M é un espazo simétrico se é conexa e para cada $p \in M$ existe unha isometría $\zeta_p \in \mathrm{Iso}(M)$ tal que a súa diferencial en p é $-\mathrm{Id}$ en T_pM.

A isometría ζ_p chámase *simetría global de M en p*, xa que revirte as xeodésicas que pasan por p. Amosamos a continuación algúns exemplos de espazos simétricos.

Exemplos 1.3.2.

1) Os espazos euclídeos $\mathbb{R}^n$.

Para cada punto p a aplicación

$$\begin{array}{rccc} \zeta_p\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & -x+2p, \end{array}$$

é claramente unha isometría pois é composición dunha rotación cunha traslación e ademais a súa diferencial en p é $-\operatorname{Id}$. Polo tanto, ζ_p é unha simetría global de $\mathbb{R}^n$ en p.

2) As esferas S^n.

Para cada punto $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ consideremos

$$\begin{array}{rccc} \zeta_p\colon & S^n & \longrightarrow & S^n \\ & x & \longmapsto & -x+2\langle x,p\rangle p, \end{array}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Polo tanto, é unha isometría xa que $\zeta_p \in O(n+1)$. Ademais, a diferencial de ζ_p en p é $-\operatorname{Id}$ en T_pS^n. Polo tanto, ζ_p é unha simetría global de S^n en p.

3) Os espazos hiperbólicos $\mathbb{R}H^n$.

Para cada punto $p \in \mathbb{R}H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ consideremos

$$\begin{array}{rccc} \zeta_p\colon & \mathbb{R}H^n & \longrightarrow & \mathbb{R}H^n \\ & x & \longmapsto & -x-2\langle x,p\rangle p, \end{array}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto escalar en $\mathbb{R}^{n+1}_1$. A aplicación ζ_p é unha isometría xa que $\zeta_p \in O(1,n+1)$. Ademais, a diferencial de ζ_p en p é $-\operatorname{Id}$ en $T_p\mathbb{R}H^n$. Polo tanto, ζ_p é unha simetría global de $\mathbb{R}H^n$ en p.

4) Os grupos de Lie compactos.

Sexa G un grupo de Lie compacto. É coñecido que todo grupo de Lie compacto admite unha métrica biinvariante. Equipemos a G cunha *métrica biinvariante*, é dicir, para cada $g \in G$ tense que $L_g, R_g \in \operatorname{Iso}(G)$. Entón a aplicación $\zeta_e(g) = g^{-1}, g \in G$, é unha simetría global no elemento neutro e, pois é un difeomorfismo cuxa diferencial en e é $-\operatorname{Id}$ en T_eG. Dado $g \in G$, consideremos a aplicación

$$\zeta_g := R_g \circ \zeta_e \circ L_{g^{-1}}.$$

Por unha banda, ζ_g é unha isometría pois é composición de isometrías. Por outro lado, $\zeta_g(g) = g$ e a diferencial de ζ_g en g é $-\operatorname{Id}$ en T_gG. Polo tanto, ζ_g é unha simetría global de G en g.

O seguinte teorema amosa unha propiedade moi relevante dos espazos simétricos: a súa completitude.

Teorema 1.3.3. *Todo espazo simétrico M é completo.*

Demostración. Sexa M un espazo simétrico e supoñamos que non é completo. Entón, existen $p \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $\gamma_v^p\colon [0,b) \longrightarrow M$ é unha xeodésica maximal para certo $b \in \mathbb{R}$. Sexa $q = \gamma(\frac{3}{4}b)$, combinando $\tilde{\gamma}(t) = \zeta_q \circ \gamma_v^p(t)$ con $\gamma_v^p(t)$, obtemos unha xeodésica que extende a γ_v^p, contradicindo a súa maximalidade. □

Outra propiedade remarcable dos espazos simétricos é que son espazos homoxéneos.

Teorema 1.3.4. *Todo espazo simétrico M é un espazo homoxéneo.*

Demostración. Sexan $p, q \in M$. Por ser M simétrico é completo, existe un segmento xeodésico que conecta p con q. Sexa $o \in M$ o punto medio do segmento. Tense que $\zeta_o \in \mathrm{Iso}(M)$ e leva p en q. Polo tanto, M é un espazo homoxéneo. □

Introduzamos a continuación a noción de espazo localmente simétrico.

Definición 1.3.5. Sexa M unha variedade semi-riemanniana e R o seu tensor de curvatura. Dicimos que M é un *espazo localmente simétrico* se

$$\nabla R = 0.$$

Unha familia de exemplos de espazos localmente simétricos son os espazos de curvatura constante. Sexa M unha variedade riemanniana con curvatura c e consideremos $X, Y, Z, V \in \Gamma(TM)$. Usando a compatibilidade da conexión de Levi–Civita e a expresión do tensor de curvatura para variedades riemannianas con curvatura constante, tense que

$$\begin{aligned}(\nabla_V R)(X,Y)Z &= \nabla_V R(X,Y)Z - R(\nabla_V X, Y)Z - R(X, \nabla_V Y)Z - R(X,Y)\nabla_V Y \\ &= c(\nabla_V(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y) - \langle Y,Z\rangle \nabla_V X - \langle \nabla_V X, Z\rangle Y) \\ &- c(\langle \nabla_V Y, Z\rangle X - \langle X,Z\rangle \nabla_V Y + \langle Y, \nabla_V Z\rangle X - \langle X, \nabla_V Z\rangle Y) = 0.\end{aligned}$$

Observación 1.3.6. Cabe destacar que existen espazos localmente simétricos que non son simétricos. Por exemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non é simétrico pois non é completo pero é localmente simétrico porque ten curvatura constante.

A seguinte proposición ofrécenos unha caracterización dos espazos localmente simétricos a través do transporte paralelo ó longo dunha curva.

Proposición 1.3.7. *Sexa $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ unha curva regular. Os seguintes enunciados son equivalentes*

(i) *M é localmente simétrico.*

(ii) *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ son paralelos ó longo de α, entón $R(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é un campo paralelo.*

(iii) *A curvatura seccional é invariante baixo transporte paralelo.*

Demostración. Probemos que (I) implica (II). Sexan $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ campos paralelos. Podemos supoñer que os campos de vectores $\dot{\alpha}, X, Y, Z$ son extendibles nunha veciñanza de $p = \alpha(0)$ por ser α regular. É dicir, existen $V, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ tales que

$$V(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t),\ \overline{X}(\alpha(t)) = X(t),\ \overline{Y}(\alpha(t)) = Y(t),\ \overline{Z}(\alpha(t)) = Z(t).$$

Como $\nabla R = 0$, tense que

$$0 = (\nabla_V R)(X,Y)Z = \nabla_V(R(X,Y)Z) - R(\nabla_V X, Y)Z - R(X, \nabla_V Y)Z - R(X,Y)\nabla_V Z.$$

Avaliando en 0, por ser X, Y, Z paralelos ó longo de α tense que

$$\nabla_{\dot{\alpha}(0)} R(X,Y)Z = 0.$$

Probemos agora que (II) implica (III). Sexa $\pi(0)$ un 2-plano tanxente non dexenerado en T_pM e sexan X, Y campos de vectores paralelos ó longo de α tales que $X(0), Y(0)$ son base para $\pi(0)$. Entón, $X(t), Y(t)$ é unha base para o 2-plano $\pi(t)$ transportado paralelamente ó longo de α. O produto escalar de campos de vectores paralelos ó longo dunha mesma curva é constante. Polo tanto, tense que a curvatura seccional de $\pi(t)$ permanece constante para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pois está definida mediante produtos escalares nos que só interveñene campos de vectores paralelos.

Probemos agora que (III) implica (I). Sexan X, Y, Z, W campos de vectores ó longo de α e vexamos que $\langle R(X,Y)Z, W\rangle$ é constante. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definimos a aplicación

$$\begin{array}{rccl} A_t\colon & T_pM \times \overset{4)}{\cdots} \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & \langle R(X,Y)Z, W\rangle(t), \end{array}$$

onde X, Y, Z, W extenden x, y, z, w. Entón,

$$K(X(t), Y(t)) = \frac{A(x,y,y,x)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2} = K(x,y),$$

para cada $x, y \in T_pM$ xeradores dun 2-plano non dexenerado. Pódese comprobar que A_t é un tensor de curvatura alxébrico, logo

$$A(x,y,z,w) = \langle R(x,y)z, w\rangle.$$

Polo tanto, $\langle R(X,Y)Z, W\rangle$ é constante. Entón,

$$\begin{aligned} 0 = D_t\langle R(X,Y)Z, W\rangle &= \langle (\nabla_{\dot{\alpha}(0)} R)(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Y)Z, \nabla_{\dot{\alpha}(0)}\rangle W \\ &= \langle (\nabla_{\dot{\alpha}(0)} R)(X,Y)Z, W\rangle. \end{aligned}$$

Por ser W un campo paralelo ó longo de α calquera, tense que $\nabla R = 0$. □

O seguinte teorema, cuxa proba pode ser atopada en [48, páx. 223] explica o por que do nome dos espazos localmente simétricos.

Teorema 1.3.8. *As seguintes condicións nunha variedade semi-riemanniana son equivalentes:*

- *M é localmente simétrica.*
- *En cada punto $p \in M$ a simetría xeodésica local ζ_p é unha isometría local de M.*

A aplicación ζ_p definida no Teorema 1.3.8 recibe o nome de *simetría xeodésica local de M en p*. En vista do anterior todo espazo simétrico é localmente simétrico.

1.3.2. Espazos simétricos dende un punto de vista alxébrico

Comezaremos esta parte introducindo algunhas definicións básicas da teoría de accións isométricas e das órbitas de ditas accións. Posteriormente, presentaremos os espazos simétricos como unha importante clase de espazos homoxéneos e usaremos a teoría de álxebras e grupos de Lie para dar unha descrición dos mesmos.

Espazos homoxéneos

Os espazos homoxéneos xorden da acción de grupos de Lie sobre unha variedade. A miúdo a acción do grupo preserva certa propiedade da variedade. Deste xeito, o feito de que a acción sexa transitiva significa que a variedade 'semella igual' en todo punto dende o punto de vista de dita propiedade. Por esta razón, os espazos homoxéneos serven como espazos modelo para diversos tipos de estruturas xeométricas. En particular, o noso interese reside naqueles espazos homoxéneos que xorden das accións isométricas, é dicir, que preservan a métrica.

Nesta parte seguiremos a exposición dada en [9, Capítulo 2]. Sexa $\overline{M}$ unha variedade diferenciable e G un grupo de Lie, con elemento neutro $e \in G$. Ademais, supoñamos que G actúa diferenciablemente sobre $\overline{M}$. É dicir, G define unha *acción diferenciable* sobre $\overline{M}$. Isto significa que existe unha aplicación diferenciable

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & G \times \overline{M} & \longrightarrow & \overline{M} \\ & (g,p) & \longmapsto & gp, \end{array}$$

que satisfai as seguintes condicións:

- Para cada $g, h \in G$ e $p \in \overline{M}$, $g(hp) = (gh)p$.
- Para cada $p \in \overline{M}$, $ep = p$.

Para cada $g \in G$, a aplicación $\Phi_g\colon \overline{M} \longrightarrow \overline{M}$, dada por $\Phi_g(p) = gp$, é un difeomorfismo de $\overline{M}$. Deste xeito, temos un homomorfismo de grupos dado por $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}(\overline{M})$, onde $\rho(g) = \Phi_g$. Unha acción é *efectiva* se a a aplicación ρ é inxectiva. Isto implica que G é isomorfo a certo subgrupo de $\mathrm{Diff}(\overline{M})$. Cando para certo $p \in \overline{M}$ e cada $g, h \in G$, a igualdade $gp = hp$ implica que $g = h$, a acción dise *libre*. Para cada $p \in \overline{M}$, definimos a *órbita de p mediante a acción de G* como o conxunto

$$G \cdot p = \{gp : g \in G\}$$

e o *grupo de isotropía* ou *estabilizador de p* como

$$G_p = \{g \in G : gp = p\}.$$

Diremos que a acción é *transitiva* se $G \cdot p = \overline{M}$ para certo $p \in \overline{M}$.

Definición 1.3.9. Sexa $\overline{M}$ unha variedade diferenciable e G un grupo de Lie que actúa transitivamente en $\overline{M}$. Entón, diremos que $\overline{M}$ é un *G-espazo homoxéneo.*

Sexa $\overline{M}/G$ o conxunto das órbitas da acción de G en $\overline{M}$ e dotemos a $\overline{M}/G$ da topoloxía cociente. En xeral, $\overline{M}/G$ non é Hausdorff. Para solucionar isto, debemos pedirlle á nosa acción unha propiedade extra. Diremos que unha acción de G en $\overline{M}$ é *propia* se para cada $p, q \in \overline{M}$, hai veciñanzas abertas U_p e U_q de p e q, respectivamente, tales que o conxunto $\{g \in G : gU_p \cap U_q \neq \emptyset\}$ é relativamente compacto en G. Isto equivale a que a seguinte aplicación sexa propia:

$$\begin{array}{ccc} G \times \overline{M} & \longrightarrow & \overline{M} \times \overline{M} \\ (g, p) & \longmapsto & (p, gp). \end{array}$$

Teorema 1.3.10. [40, Teorema 7.10] *Sexa G un grupo de Lie que actúa propia e libremente sobre $\overline{M}$. Entón, $\overline{M}/G$ é unha variedade topolóxica de dimensión* $\dim(\overline{M}) - \dim(G)$ *que admite unha única estrutura diferenciable que convirte á proxección canónica nunha submersión.*

Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Riemann e G un grupo de Lie, con elemento neutro e. Ademais, supoñamos que G actúa diferenciablemente sobre $\overline{M}$ por isometrías. É dicir, tense que $\Phi_g \in \mathrm{Iso}(\overline{M})$, para cada $g \in G$. Neste caso, diremos que G define unha *acción isométrica* sobre $\overline{M}$.

Dado un grupo que actúe por isometrías, cada vector da subálxebra de Lie asociada induce un campo de vectores de Killing. Sexa $H \leq \mathrm{Iso}(M)$, entón podemos considerar a aplicación que a cada $X \in \mathfrak{h}$ lle asigna tX, para certo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sexa Φ_X tal que a cada $p \in M$ lle asigna unha curva $\alpha_p(t)$ dada por $\alpha_p(t) = \mathrm{Exp}(tX)(p) \in M$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Deste xeito o campo $X^* \in \Gamma(TM)$ que lle asigna a cada $p \in M$ o vector $\alpha_p'(0) \in T_pM$ é un campo de Killing, pois o seu fluxo local vén dado por isometrías locais.

Pódese probar que dado un subgrupo G de $\mathrm{Iso}(\overline{M})$, a acción de G sobre $\overline{M}$ é propia se e só se G é pechado en $\mathrm{Iso}(\overline{M})$. Ademais, se acción de G en $\overline{M}$ é propia, as órbitas son subvariedades mergulladas en $\overline{M}$. Pódense distinguir tres tipos de órbitas dunha acción isométrica propia: as principais, as excepcionais e as singulares.

Unha órbita $G \cdot p$ dise *órbita principal* se para cada $q \in \overline{M}$ o grupo de isotropía en p é conxugado en G a algún subgrupo do grupo de isotropía en q. Cada órbita principal é unha órbita de dimensión maximal. Diremos que a codimensión dunha órbita principal é a *cohomoxeneidade da acción.* Unha órbita de dimensión maximal, que non é principal, dise *órbita excepcional.* Finalmente, unha *órbita singular* é unha órbita cuxa codimensión é maior cá cohomoxeneidade da acción.

Descrición alxébrica dun espazo simétrico

Os espazos simétricos constitúen unha clase importante de espazos homoxéneos. Nesta parte daremos unha breve descrición dos espazos simétricos en termos alxébricos. Seguiremos [24, Apéndice C]. Sexa (M, g) un espazo simétrico e $G = \mathrm{Iso}(M)^0$ a compoñente conexa de $\mathrm{Iso}(M)$ que contén ó elemento neutro. Tense que G é un subgrupo de Lie de $\mathrm{Iso}(M)$. Sexa $p \in M$ e $\zeta_p \in \mathrm{Iso}(M)$, a simetría xeodésica de M en p. Sexa K o grupo de isotropía de G en p, que é compacto. O conxunto G/K é difeomorfo a M mediante a aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & G/K & \longrightarrow & M \\ & gK & \longmapsto & g(p). \end{array}$$

Entón, se consideramos a métrica $h = \Phi^* g$ en G/K, Φ é unha isometría e a métrica h é G*-invariante*, isto é, a aplicación $gK \mapsto hgK$ é unha isometría, para cada $h \in G$. A *representación de isotropía de* $M \cong G/K$ *en* p é a representación ortogonal definida por $K \times T_pM \longrightarrow T_pM$, tal que $(k, v) \mapsto k_{*p}v$. Un espazo simétrico $M = G/K$ é *irreducible* se a súa representación de isotropía restrinxida a K^0, a compoñente conexa de K que contén ó neutro, é unha representación irreducible. Noutro caso, un espazo simétrico dise *reducible*. Tense que M é irreducible se e só se $\tilde{M}$, o revestemento universal de M, o é.

A aplicación $\sigma\colon G \longrightarrow G$, tal que $g \mapsto \zeta_p g \zeta_p$ é un automorfismo involutivo de G. Ademais, $G_\sigma^0 \subset K \subset G_\sigma$, onde $G_\sigma = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ e G_σ^0 é a compoñente conexa que contén ó elemento neutro de G_σ. Se G é un grupo de Lie conexo, K un subgrupo compacto e existe un automorfismo involutivo σ de G tal que $G_\sigma^0 \subset K \subset G_\sigma$, o par (G, K) dise *par simétrico*. Ademais, diremos que o par simétrico (G, K) é un *par simétrico efectivo* se a acción de G en $M \cong G/K$ é efectiva.

Sexa θ a diferencial de σ en $e \in G$. A álxebra de Lie de K vén dada por

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\}$$

e definimos

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\}.$$

Resulta que θ é unha involución de Cartan de $\mathfrak{g}$ e que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ é a descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ con respecto a θ. Dise que o *rango de* M é a máxima dimensión dun subespazo abeliano de $\mathfrak{p}$. Dada unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ e unha subálxebra $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$, diremos que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ é un *par ortogonal simétrico* se $\mathfrak{k}$ é o conxunto de puntos fixos dun automorfismo involutivo θ de $\mathfrak{g}$. O par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ dise *efectivo* se $\mathfrak{k} \cap Z(\mathfrak{g}) = 0$, onde $Z(\mathfrak{g})$ é o centro de $\mathfrak{g}$. Todo par simétrico efectivo (G, K) determina un par simétrico efectivo ortogonal $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Sexa $M = G/K$ un espazo simétrico. A sucesión exacta longa de homotopía aplicada ó fibrado $K \to G \to G/K$ implica que K é conexo se M é simplemente conexo e G é conexo. Reciprocamente, se G é simplemente conexo e K conexo, entón M é simplemente conexo. Sexa M un espazo simétrico e $\tilde{M}$ o seu revestemento universal. Entón, o Teorema de De-Rham, [10, §10.44], garantiza que $\tilde{M}$ pode ser descomposto como

$$\tilde{M} = \tilde{M}_0 \times \tilde{M}_1 \times \cdots \times \tilde{M}_k,$$

onde M_0 dise *factor euclidiano*, por ser M_0 localmente isométrico a un espazo euclidiano, e cada $\tilde{M}_i$ é un espazo simétrico, simplemente conexo e irreducible para $i = 1, \ldots, k$. Ademais, M é irreducible se e só se $\tilde{M}$ é irreducible. Un *espazo simétrico* semisimple é un espazo simétrico tal que o factor euclidiano do seu revestemento universal ten dimensión cero. Neste caso, a álxebra de Lie do grupo de isometrías de $\tilde{M}$ é semisimple. Un espazo simétrico semisimple dise de *tipo compacto* ou de *tipo non compacto* se todos os factores na descomposición do seu revestemento universal son compactos ou non compactos, respectivamente. A álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de isometrías dun espazo simétrico dise *compacta* ou *non compacta* se o espazo simétrico é de tipo compacto ou non compacto, respectivamente. Por definición, un espazo simétrico irreducible pode ser un dos seguintes: de tipo euclidiano, é dicir, chan; de tipo compacto, ou de tipo non compacto. Se $\mathcal{B}$ é a forma de Killing de $\mathfrak{g}$, entón G/K é de tipo compacto se e só se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}}$ é negativa definida, é de tipo non compacto se e só se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}}$ é positiva definida e é de tipo euclidiano se e só se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}} = 0$.

Capítulo 2

Variedades de Kähler

Neste capítulo introduciremos os espazos ambientes nos que se desenvolve o noso problema: as variedades de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante.

As variedades de Kähler, cuxo estudo comeza na década dos anos 30 do século pasado, defínense como variedades diferenciables con tres estruturas que se relacionan mutuamente: a riemanniana, a complexa e a simpléctica.

Así pois, iniciaremos este apartado explicando algunhas nocións de espazos vectoriais complexos, como a complexificación dun espazo vectorial real ou a estrutura complexa.

A continuación, introduciremos algunhas definicións básicas da teoría de varias variables complexas e a noción de variedade complexa. Observaremos que toda variedade complexa ten asociada de xeito canónico unha estrutura complexa en cada espazo tanxente; porén, o recíproco non se ten. Polo cal terá sentido introducir a definición de variedade case complexa.

Por último, presentaremos as variedades de Kähler xunto con algunha das súas propiedades máis básicas e describiremos a xeometría das variedades de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante.

2.1. A complexificación dun espazo vectorial real

Cando traballamos nunha variedade diferenciable real definimos sobre cada punto da mesma un espazo vectorial real de igual dimensión á variedade, chamado espazo tanxente. Agora interesaríanos definir sobre cada punto da nosa variedade un espazo vectorial complexo. Para isto precisaremos introducir un concepto novo no eido da álxebra linear, a complexificación dun espazo vectorial real. Ó longo desta parte seguiremos as referencias [58] e [36].

Definición 2.1.1. Sexa V un $\mathbb{R}$-espazo vectorial de dimensión finita. Definimos a *complexificación de V* como

$$V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

O anterior é un exemplo de extensión de escalares. De feito, a complexificación é un funtor da categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$. Outra propiedade remarcable deste funtor é que é adxunto pola esquerda do funtor que esquece a estrutura de espazo vectorial complexo.

A natureza do produto tensor permite pensar a complexificación de V do seguinte xeito. Sexan $v, w \in V$, entón os elementos de $V^{\mathbb{C}}$ son os símbolos $v + iw$ cocientados pola relación

$$v + iw = v' + iw' \iff v = v' \text{ e } w = w'.$$

A suma en $V^{\mathbb{C}}$ de $v + iw$ e $v' + iw'$ vén dada do seguinte xeito

$$(v + iw) + (v' + iw') = v + v' + i(w + w').$$

O produto dun escalar $z = a + ib \in \mathbb{C}$ por un vector $v + iw \in V^{\mathbb{C}}$ vén dado por

$$(a + ib)(v + iw) = av - bw + i(bv + aw).$$

Estas operacións determinan a estrutura de espazo vectorial complexo de $V^{\mathbb{C}}$. Se agora identificamos os elementos $v + i \cdot 0$ de $V^{\mathbb{C}}$ con V, podemos considerar a inclusión $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$. Por outra banda, podemos considerar a aplicación conxugación complexa, que é unha aplicación $\mathbb{R}$-linear en $V^{\mathbb{C}}$ definida do seguinte xeito

$$\begin{array}{ccl} V^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & V^{\mathbb{C}} \\ v + iw & \longmapsto & \overline{v + iw} = v - iw. \end{array}$$

Supoñamos agora que V é un espazo vectorial real tal que $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ e vexamos que $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = n$. Sexa $\{e_1, \ldots, e_n\}$ unha base de V como $\mathbb{R}$-espazo vectorial. Para cada par de vectores $v, w \in V$ podemos escribir

$$v = \sum_{j=1}^{n} a^j e_j, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} b^j e_j.$$

Entón

$$v + iw = \sum_{j=1}^{n} a^j e_j + ib^j e_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j e_j,$$

onde $\lambda^j := a^j + ib^j$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$. Polo tanto, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é un conxunto de xeradores para $V^{\mathbb{C}}$. Vexamos a continuación que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ son linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$. Supoñamos que $\sum_{j=1}^{n} \lambda^j e_j = 0$, entón $\sum_{j=1}^{n} a^j e_j = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} b^j e_j = 0$. Polo tanto, $a^j = b^j = 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, por ser $\{e_1, \ldots, e_n\}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.2. Un endomorfismo $\mathbb{R}$-linear $J \colon V \longrightarrow V$ que satisfai $J^2 = -\operatorname{Id}$, dise *estrutura complexa de V*.

Observación 2.1.3. Para que V teña unha estrutura complexa é necesario que $\dim_{\mathbb{R}} V$ sexa par, pois se V ten dimensión $n \in \mathbb{N}$,

$$\det(J)^2 = \det(J^2) = \det(-\operatorname{Id}) = (-1)^n.$$

Pero $\det(J)^2 > 0$, logo n é par.

Sexa V un espazo vectorial real de dimensión $2n$ con estrutura complexa J. Podemos dotar a V de estrutura de espazo vectorial complexo, onde o produto por $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ vén dado por

$$\lambda v = (a + ib)v = av + bJv.$$

Deste xeito, V é un espazo vectorial complexo de dimensión complexa n.

Reciprocamente, dado un espazo vectorial complexo V de dimensión complexa n, podemos definir unha estrutura complexa J mediante $Jv = iv$, para cada $v \in V$. Se consideramos V como un espazo vectorial real de dimensión $2n$, tense que J é a estrutura complexa de V.

Sexa agora V un espazo vectorial real con estrutura complexa J. Entón podemos estender J a un endomorfismo $\mathbb{C}$-linear en $V^{\mathbb{C}}$, que denotaremos tamén mediante J e está dado por

$$J(v + iw) := Jv + iJw.$$

Claramente $J^2 = -\operatorname{Id}$.

Consideremos sobre V un produto escalar tal que J é unha transformación ortogonal e $W \subset V$ un subespazo vectorial real. Dicimos que W é *totalmente real* se $W \perp JW$. Por outra banda, W é complexo se e só se $W = JW$. Sexa $w \in W$ non nulo, definimos o *ángulo de Kähler* de W con respecto de w como o ángulo $\varphi(w) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ comprendido entre Jw e a proxección de Jw en W. Dicimos que W ten *ángulo de Kähler constante* c se $\varphi(w) = c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para cada $w \in W$ non nulo. Deste xeito, o ángulo de Kähler mide 'canto lle falta' a un subespazo para ser complexo. Pois se $\varphi(w) = 0$ para cada $w \in W$, tense que W é complexo e se $\varphi(w) = \frac{\pi}{2}$ para cada $w \in W$, tense que W é totalmente real. En [4, Prop. 7], hai unha clasificación dos subespazos con ángulo de Kähler constante.

Nun espazo vectorial real de dimensión $2n$ con estrutura complexa J se tomamos unha base de V como espazo vectorial complexo $\{v_1, \ldots, v_n\}$, é fácil ver que o conxunto $\{v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n\}$ é unha base de V como espazo vectorial real. Definimos, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ en $V^{\mathbb{C}}$, os vectores z_k e $\overline{z}_k$ do seguinte xeito

$$z_k := \frac{1}{2}(v_k - iJv_k), \qquad \overline{z}_k := \frac{1}{2}(v_k + iJv_k).$$

É doado comprobar que o conxunto $\{z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n\}$ é unha base de $V^{\mathbb{C}}$ como espazo vectorial complexo, pois $\{v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n\}$ o é. Ademais, tense que $Jz_k = iz_k$ e $J\overline{z}_k = -i\overline{z}_k$ para cada $k = 1, \ldots, n$. Polo tanto, a base $\{z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n\}$ de $V^{\mathbb{C}}$ diagonaliza J sobre $\mathbb{C}$ e se denotamos

$$V^{1,0} := \{z \in V^{\mathbb{C}} : Jz = iz\} \qquad \text{e} \qquad V^{0,1} := \{z \in V^{\mathbb{C}} : Jz = -iz\},$$

temos unha descomposición de $V^{\mathbb{C}}$ como suma directa

$$V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}.$$

Por outra banda, como $Jz_k = iz_k$ e $J\overline{z}_k = -i\overline{z}_k$, a imaxe de $V^{1,0}$ pola aplicación conxugación complexa é precisamente $V^{0,1}$. Para cada $Z \in V^{\mathbb{C}}$, tense a igualdade

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ).$$

O primeiro sumando pertence a $V^{1,0}$ e o segundo pertence a $V^{0,1}$. Polo tanto, podemos escribir $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ como

$$V^{1,0} = \{v - iJv : v \in V\} \qquad \text{e} \qquad V^{0,1} = \{v + iJv : v \in V\}.$$

Observemos ademais que existe un isomorfismo linear entre V e $V^{1,0}$ dado por

$$v \in V \mapsto \frac{v - iJv}{2} \in V^{1,0}$$

do que se deduce que

$$V^{\mathbb{C}} = V \oplus \overline{V}.$$

2.2. Variedades complexas

Nesta sección intentaremos ofrecer unha introdución sinxela ás variedades complexas. Consideremos a seguinte función diferenciable

$$\begin{array}{rccl} f\colon & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)). \end{array}$$

Baixo a identificación usual de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ esta aplicación será *holomorfa* se e só se satisfai as chamadas ecuacións de Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outra banda, podemos introducir os *operadores de Wirtinger* que se definen do seguinte xeito

$$\frac{\partial}{\partial z}(f) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f - i\frac{\partial}{\partial y} f\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f + i\frac{\partial}{\partial y} f\right),$$

para cada $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable. Deste xeito, é doado ver que f é holomorfa se e só se

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f) = 0.$$

Esta rixidez extra será a que dotará á teoría de variedades complexas dun sabor totalmente distinto á teoría de variedades diferenciables. Comecemos introducindo certa terminoloxía da análise complexa en varias variables.

Ó longo desta sección empregaremos de xeito continuado a identificación usual de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$, é dicir, $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, onde $z_j = x_j + iy_j$ e tamén consideraremos a estrutura complexa definida en $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$J(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \ldots, -y_n, x_n).$$

Diremos que unha aplicación diferenciable

$$\begin{array}{rccl} f\colon & U\subset\mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_1,y_1,\dots,x_m,y_m) & \longmapsto & u(x_1,\dots,y_m)+iv(x_1,\dots,y_m) \end{array}$$

é *holomorfa* se o é en cada variable, isto é

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(p)=\frac{\partial v}{\partial y_j}(p), \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j}(p)=-\frac{\partial v}{\partial x_j}(p)$$

para cada $j=1,\dots,n$ e para cada $p\in U$.

Unha aplicación $F=(F_1,\dots,F_n)\colon V\subset\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^n$ dise *holomorfa* se cada F_j é holomorfa, onde $j=1,\dots,n$.

De xeito análogo á matriz jacobiana para funcións diferenciables entre abertos de $\mathbb{R}^n$, podemos definir a *matriz jacobiana complexa*. Sexa $U\subset\mathbb{C}^m$ un aberto e consideremos $F=(F_1,\dots,F_m)\colon U\subset\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^n$. Definimos a matriz jacobiana complexa de F como

$$J_{\mathbb{C}}F:=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{pmatrix}=\left(\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right)_{j,k\in\{1,\dots,m\}}.$$

Se definimos $F_j=G_j+iH_j$ con $G_j,H_j\colon U\subset\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{R}$, podemos definir a matriz jacobiana real de F mediante

$$J_{\mathbb{R}}F:=\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial G_j}{\partial x_k} & \frac{\partial G_j}{\partial y_k} \\ \hline \frac{\partial H_j}{\partial x_k} & \frac{\partial H_j}{\partial y_k} \end{array}\right)_{j,k\in\{1,\dots,m\}}.$$

Observemos que $F\colon U\subset\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^n$ é holomorfa se e só se

$$\frac{\partial G_j}{\partial x_k}=\frac{\partial H_j}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial G_j}{\partial y_k}=-\frac{\partial H_j}{\partial x_k},$$

para cada $j=1,\dots,n$ e para cada $k=1,\dots,m$. Isto significa que

$$J_{\mathbb{R}}F:=\left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right),$$

onde $A=\left(\frac{\partial G_j}{\partial x_k}\right)$ e $B=\left(\frac{\partial H_j}{\partial x_k}\right)$. Ademais, é sinxelo comprobar que se F é holomorfa, $J_{\mathbb{C}}F=A+iB$, tendo en conta que $\frac{\partial}{\partial z_k}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k}-i\frac{\partial}{\partial y_k})$, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_k}F_j&=\frac{\partial}{\partial z_k}\Big(G_j+iH_j\Big)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}G_j-i\frac{\partial}{\partial y_k}G_j+i\frac{\partial}{\partial x_k}H_j+\frac{\partial}{\partial y_k}H_j\right)\\&=\frac{\partial G_j}{\partial x_k}+i\frac{\partial H_j}{\partial x_k}.\end{aligned}$$

Por outra banda, operando por bloques, é doado comprobar que

$$\det(J_{\mathbb{R}}F) = |\det(J_{\mathbb{C}}F)|^2.$$

Polo tanto, o jacobiano real dunha función holomorfa é non negativo.

Definamos entón o concepto de atlas holomorfo que nos permitirá introducir o concepto de variedade complexa. Seguiremos nesta parte a referencia [1].

Definición 2.2.1. Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión $2m$. Dicimos que un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ de M é un *atlas holomorfo* se para cada dúas cartas coordenadas con intersección non baleira, $z\colon U \longrightarrow z(U) \subset \mathbb{C}^m$ e $w\colon V \longrightarrow w(V) \subset \mathbb{C}^m$, a aplicación de cambio de coordenadas $z \circ w^{-1}$ é holomorfa.

Do mesmo xeito que nas variedades diferenciables, podemos probar que todo atlas holomorfo determina de xeito único un atlas holomorfo maximal. Diremos que unha variedade diferenciable M de dimensión $2m$ é unha *variedade complexa de dimensión complexa* m se M vén equipada cun atlas holomorfo. Por outro lado, chamaremos ás cartas coordenadas pertencentes a tal atlas cartas coordenadas holomorfas de M.

Unha primeira proba da riqueza desta estrutura extra vén dada polo seguinte teorema.

Teorema 2.2.2. *Sexa M unha variedade complexa, entón M é orientable.*

Demostración. Sexan (U_α, z_α) e (U_β, z_β) cartas do atlas holomorfo maximal e comprobemos que o jacobiano da aplicación cambio de cartas é positivo. A aplicación

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1}\colon z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^m \longrightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^m$$

é holomorfa. Polo tanto, a súa jacobiana real como vimos anteriormente terá determinante non negativo. Pero este determinante é non nulo, pois os cambios de cartas son difeomorfismos. Polo tanto, M é orientable. $\square$

A continuación, mencionamos unha serie de conceptos que se definen de xeito análogo ó caso das variedades diferenciables. Diremos que unha aplicación $f\colon M \longrightarrow N$ entre variedades complexas é unha *aplicación holomorfa* se para toda carta coordenada holomorfa $z\colon U \longrightarrow z(U)$ de M e $w\colon V \longrightarrow z(V)$ de N, a aplicación $w \circ f \circ z^{-1}$ é holomorfa no seu dominio de definición.

Diremos que f é *biholomorfa* se f é bixectiva e tanto f como f^{-1} son holomorfas.

Para un aberto U dunha variedade complexa, denotaremos por $\mathcal{O}(U)$ o conxunto das funcións holomorfas $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Pódese comprobar que $\mathcal{O}(U)$ ten estrutura de anel baixo a multiplicación e a suma punto a punto. O teorema da función inversa e da función implícita tamén son certos no caso complexo.

Do mesmo xeito que sucedía coas variedades diferenciables os abertos das variedades complexas son variedades complexas que chamaremos *subvariedades abertas*.

Tamén terá sentido falar de inmersións, submersións e mergullos, nos mesmos termos que ocorría nas variedades diferenciables.

A continuación, amosaremos algúns exemplos de variedades complexas.

Exemplos 2.2.3.

1) Os abertos de $\mathbb{C}^n$.

Sexa $U \subset \mathbb{C}^n$ un aberto. Entón U, co atlas formado pola carta coordenada $\mathrm{Id}\colon U \longrightarrow U$, é unha variedade complexa. En particular, $\mathbb{C}^n$ é unha variedade complexa.

2) A esfera de Riemann, S^2.

Consideremos $S^2 = \{(w,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : w\overline{w} + h^2 = 1\}$. Sexan $N = (0,1)$ e $S = (0,-1)$ o polo norte e o polo sur de S^2, respectivamente. As proxeccións estereográficas veñen dadas polas expresións

$$\pi_N((w,h)) = \frac{w}{1-h}, \text{ para cada } (w,h) \in S^2 \setminus \{N\},$$
$$\pi_S((w,h)) = \frac{w}{1+h}, \text{ para cada } (w,h) \in S^2 \setminus \{S\}.$$

Porén, a aplicación cambio de cartas é $\pi_S \circ \pi_N^{-1}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esta é unha aplicación diferenciable, pero non holomorfa. O truco para conseguir un atlas holomorfo, consiste en cambiar π_S pola súa conxugada $\overline{\pi}_S$. Deste xeito, $\overline{\pi}_S \circ \pi_N^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, é unha aplicación holomorfa.

3) O espazo proxectivo complexo, $\mathbb{C}P^n$.

Definimos $\mathbb{C}P^n$ como o espazo das rectas complexas que pasan pola orixe en $\mathbb{C}^{n+1}$. Doutro xeito, consideremos en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ a relación de equivalencia dada por $z \sim z'$ se $z = \lambda z'$, con $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ ou equivalentemente $z \sim z'$ se $z = \lambda z'$, con $z, z' \in S^{2n+1}(r)$ e $\lambda \in S^1$. Entón, $\mathbb{C}P^n$ é o conxunto cociente de dita relación de equivalencia.

A construción dun atlas holomorfo para $\mathbb{C}P^n$ é análoga á construción dun atlas para $\mathbb{R}P^n$. Para cada $z = (z^0, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, denotamos por $[z]$ a recta complexa xerada por z e chamamos a $(z^0 : \ldots : z^n)$ as *coordenadas homoxéneas* de $[z]$. Para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$, definimos

$$U_j := \{[z] \in \mathbb{C}P^n : z^j \neq 0\}.$$

Cada $[z]$ en U_j interseca o hiperplano afín $\{(w^0, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^{n+1} : w^j = 1\}$ exactamente nun punto. Polo tanto, podemos asignar a cada $[z]$ un punto nese hiperplano afín que identificamos con $\mathbb{C}^n$. Así, construímos a carta holomorfa

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & U_j \in \mathbb{C}P^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ & [z] & \longmapsto & \varphi(z) = \frac{1}{z_j}(z^0, \ldots, \widehat{z^j}, \ldots, z^m), \end{array}$$

onde $\widehat{z^j}$ indica que eliminamos tal compoñente. Por construción, φ_j é bixectiva e a súa inversa vén dada por insertar un 1 no lugar j, polo tanto será holomorfa. Agora, se $j < k$, a aplicación cambio de cartas $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$, definida nos $\omega \in \mathbb{C}^m$ tales que $\omega^j \neq 0$, vén dada por $(z_1, \ldots, z_m) \mapsto (\omega^j)^{-1}(z_1, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, 1, z_k, \ldots, z_m)$. Esta aplicación é holomorfa, polo que o atlas holomorfo descrito convirte a $\mathbb{C}P^n$ nunha variedade complexa.

Un feito a destacar é que S^2 é biholomorfa a $\mathbb{C}P^1$ mediante a aplicación

$$\begin{array}{rccl} f\colon & S^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\ & p & \longmapsto & f(p) = \begin{cases} [\pi_N(p), 1], & \text{se } p \neq N \\ [1, \overline{\pi}_S(p)], & \text{se } p \neq S. \end{cases} \end{array}$$

4) Variedades de Hopf, $S^{2n-1} \times S^1$.

Consideremos a acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ definida mediante a seguinte aplicación $(k, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mapsto e^k v$. É doado comprobar que $\mathbb{Z}$ actúa libre e de xeito propiamente discontinuo sobre $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Entón, podemos considerar o conxunto cociente da relación de equivalencia anterior, é dicir, $M = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$. Como a multiplicación por e^k é un biholomorfismo, M herda de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ a estrutura de variedade complexa. Consideremos o conxunto $S^{2n-1} := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$. Por outra banda, a aplicación $(z_1, \dots, z_n, t) \mapsto (e^t z_1, \dots, e^t z_n)$ define un difeomorfismo entre $S^{2n-1} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ con inversa dada por $(v_1, \dots, v_n) \mapsto (\frac{v_1}{|v|}, \dots, \frac{v_n}{|v|}, \log |v|)$. Polo tanto, a acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ induce a través do difeomorfismo anterior unha acción de $\mathbb{Z}$ sobre $S^{2n-1} \times \mathbb{R}$, $(z_1, \dots, z_n, t) \mapsto (z_1, \dots, z_n, t + k)$. Polo que o conxunto cociente de dita relación é $S^{2n-1} \times S^1$.

5) Grupos de Lie complexos.

Un *grupo de Lie complexo* é unha variedade complexa G que tamén é un grupo no sentido alxébrico e tal que a multiplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ e a inversión $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ son aplicacións holomorfas.

Tense que $GL(n, \mathbb{C})$ é unha subvariedade aberta de $\mathbb{C}^{n \times n}$ de dimensión complexa n^2, onde a multiplicación e a inversión son aplicacións holomorfas. O grupo linear especial, $SL(n, \mathbb{C})$, é un subgrupo pechado de $GL(n, \mathbb{C})$ de codimensión complexa 1. O grupo unitario $U(n)$ non é un grupo de Lie complexo, pois na súa definición intervén a conxugación.

A álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ dun grupo de Lie complexo G é un espazo vectorial complexo e a *representación adxunta* Ad de G é unha aplicación holomorfa que toma valores no espazo dos endomorfismos $\mathbb{C}$-lineais de $\mathfrak{g}$, que é un espazo vectorial complexo.

Para un grupo de Lie G, a *complexificación de G* consiste nun grupo de Lie complexo $G_{\mathbb{C}}$ xunto cunha inclusión $i\colon G \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}$ satisfacendo a seguinte propiedade universal: para cada homomorfismo diferenciable $f\colon G \to H$, onde H é un grupo de Lie complexo, existe unha única extensión de f a un homomorfismo holomorfo $\tilde{f}\colon G_{\mathbb{C}} \to H$, tal que o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & G_{\mathbb{C}} \arrow[dl, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Por estar definida mediante unha propiedade universal, de existir a complexificación, será única agás isomorfismo. Hai un teorema cuxa proba pode ser atopada en [12, páx. 207], que nos di que todo grupo de Lie compacto ten unha complexifiación. Por exemplo, as complexificacións de $SL(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}), SU(n)$ e $U(n)$ son $SL(n, \mathbb{C}), SO(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C})$ e $GL(n, \mathbb{C})$, respectivamente.

2.3. Variedades case complexas

Comecemos esta sección definindo o concepto de variedade case complexa, que foi introducido por Ehresmann nos anos 40. Aquí seguiremos a referencia [58].

Definición 2.3.1. Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión real $2m$. Diremos que un $(1,1)$-campo tensorial diferenciable J, tal que $J_p \in T_pM$ é unha estrutura complexa en T_pM para cada $p \in M$, é unha *estrutura case complexa de* M. Diremos que M é unha *variedade case complexa* se está dotada dunha estrutura case complexa J.

A continuación veremos que unha variedade complexa admite de xeito canónico unha estrutura case complexa.

Teorema 2.3.2. *Sexa M unha variedade complexa de dimensión complexa m. Entón M admite unha estrutura case complexa J.*

Demostración. Sexa $(U,(z^1,\dots,z^m))$ unha carta coordenada holomorfa de M en $p \in M$. Escribamos $z^j = x^j + iy^j$ para cada $j = 1,\dots,m$. Definimos un endomorfismo J en T_pM mediante

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{para cada } j = 1,\dots,m.$$

Se conseguimos probar que esta definición é independente da elección da carta xa teriamos acabado, porque evidentemente $J^2 = -\operatorname{Id}$ e claramente J é diferenciable restrinxido a cada aberto por ser as funcións coeficientes constantes. Sexa $T_pM^{\mathbb{C}}$ a complexificación de T_pM. Estendamos J a $T_pM^{\mathbb{C}}$. Deste xeito, temos

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z^j} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}, \quad \text{para cada } j = 1,\dots,m,$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^j} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right], \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]. \end{aligned}$$

Polo tanto, se un elemento $v \in T_pM^{\mathbb{C}}$ é unha combinación linear de $\frac{\partial}{\partial z^j}$ exclusivamente, terase que $Jv = iv$. Noutras palabras, $\{\frac{\partial}{\partial z^j} : j = 1,\dots,m\}$ é unha base de $T_pM^{1,0}$. Se $v \in T_pM^{\mathbb{C}}$ é combinación linear de $\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$ exclusivamente, terase que $Jv = -iv$, é dicir, $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j} : j = 1,\dots,m\}$ forman unha base de $T_pM^{0,1}$.

Consideremos agora $(V,(w^1,\dots,w^m))$ outra carta de coordenadas holomorfa tal que $p \in V \cap U$, e escribamos $w^k = u^k + iv^k$ con $k = 1,\dots,m$. Entón definimos un endomorfismo J' de T_pM mediante

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial v^j} \quad \text{e} \quad J'\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial v^j}, \quad \text{para cada } j = 1,\dots,m.$$

Estendendo J' a $T_pM^{\mathbb{C}}$ obtemos

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial w^j}\right) = i\frac{\partial}{\partial w^j} \quad \text{e} \quad J'\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}^j}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{w}^j}, \quad \text{para cada } j = 1,\dots,m.$$

Por outro lado, en $p \in M$ tense que as distintas bases de $T_pM^{1,0}$ e $T_pM^{0,1}$ están relacionadas mediante

$$\frac{\partial}{\partial w^k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(z^j \circ w^{j^{-1}})}{\partial w^k}(p)\frac{\partial}{\partial z^j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}^k} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\frac{\partial(z^j \circ w^{j^{-1}})}{\partial w^k}}(p)\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j},$$

para cada $k = 1, \dots, m$. Polo tanto, $\frac{\partial}{\partial w^k}$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{w}^k}$ son combinacións lineais de $\frac{\partial}{\partial z^j}$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$, de forma exclusiva, respectivamente. Entón temos que

$$J\left(\frac{\partial}{\partial w^j}\right) = i\frac{\partial}{\partial w^j} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}^j}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{w}^j}, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, m.$$

Polo tanto, a definición de J non depende da carta escollida, e queda rematada a proba. $\square$

Observación 2.3.3. Cabe destacar que toda variedade real de dimensión par admite localmente unha estrutura case complexa definida a través da carta coordenada correspondente. O que sucede é que esta estrutura case complexa 'local' quizais non poida ser definida globalmente.

Cando nos refiramos á estrutura case complexa canónica dunha variedade complexa M, chamarémola *estrutura complexa.*

Por outra banda, é posible caracterizar as aplicacións holomorfas entre variedades complexas cunha fórmula que involucra a estrutura complexa e substitúe ás ecuacións de Cauchy–Riemann.

Proposición 2.3.4. *Sexa $f\colon U \subset \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ unha aplicación diferenciable. Entón f é holomorfa se e só se $f_* \circ J = J \circ f_*$.*

Demostración. Sexa $(w^1, \dots, w^n)$ con $w^k = u^k + iv^k$ e $k = 1, \dots, n$. Se expresamos f en termos dos sistemas coordenados de $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$, temos que para cada $k = 1, \dots n$

$$u^k = u^k(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$$
$$v^k = v^k(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n).$$

Entón, f é holomorfa se e só se satisfai as ecuacións de Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial u^k}{\partial x_j} = \frac{\partial v^k}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial u^k}{\partial y_i} = -\frac{\partial v^k}{\partial x_j},$$

para cada $j = 1, \dots m$ e cada $k = 1, \dots, n$.

Por outro lado, temos para cada $j = 1, \dots, m$, independentemente de que f sexa ou non holomorfa,

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial v^k}$$
$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v^k}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial v^k}.$$

Desta fórmula e da definición de J en $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$ vemos que $f_* \circ J = J \circ f_*$ se e só se f satisfai as ecuacións de Cauchy–Riemann. $\square$

Corolario 2.3.5. *Sexan M e M' dúas variedades complexas. Entón, unha aplicación $f\colon M \longrightarrow M'$ é holomorfa se e só se $f_* \circ J = J' \circ f_*$, onde J e J' son as estruturas complexas de M e M' respectivamente.*

Á vista do teorema anterior cabe preguntarse se dada unha variedade M, toda estrutura case complexa procede da estrutura de variedade complexa de M. De ser así, toda variedade case complexa sería automaticamente complexa. A resposta a esta pregunta, tal e como suxiren as definicións introducidas, é negativa.

Para responder a nosa pregunta, introduciremos un $(1,2)$-tensor diferenciable coñecido como *tensor de Nijenhuis* asociado a unha estrutura case complexa J que se define do seguinte xeito

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[X,Y] - J[JX,Y],$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Observación 2.3.6. É fácil ver que se consideramos unha conexión sen torsión ∇

$$N_J(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX,$$

$X, Y \in \Gamma(TM)$. Desta igualdade concluímos que se $\nabla J = 0$ entón $N_J = 0$.

O seguinte teorema, cuxa demostración omitiremos, pode ser atopada en [46] e responde a nosa pregunta.

Teorema 2.3.7 (Teorema de Newlander–Niremberg)**.** *Sexa M unha variedade case complexa cunha estrutura case complexa J. Entón J é unha estrutura complexa se e só se*

$$N_J = 0.$$

Podemos ver en [1, Exemplo 2.7] que S^6 ten unha estrutura case complexa cuxo tensor de Nijenhuis asociado non é identicamente nulo. O problema de determinar que esferas posúen estruturas complexas ou case complexas tivo gran relevancia no eido da xeometría diferencial durante o século pasado e continúa sendo así. No ano 1947, Ehresmann introduciu en [26, páx. 3] a noción de estrutura case complexa. O ano seguinte, Hopf probou en [30, páx. 170] que S^4 e S^8 non admiten estruturas case complexas e Kirchoff construíu en [33] a estrutura case complexa en S^6. Por outra banda, Borel e Serre probaron no ano 1953 en [11] que S^{2n} admite unha estrutura case complexa se e só se $n = 1, 3$. Como xa vimos, S^2 ten unha estrutura complexa pois é unha variedade complexa, pero continúa a ser un problema aberto se S^6 admite ou non unha estrutura complexa.

2.4. Variedades de Kähler

Nesta sección seguiremos as referencias [45] e [58]. Comecemos definindo o concepto de variedade hermitiana.

Definición 2.4.1. Dicimos que h é unha *métrica hermitiana* nunha variedade case complexa (M, J) se h é unha métrica de Riemann e ademais satisfai a seguinte ecuación de compatibilidade con J

$$h(X, Y) = h(JX, JY) \text{ para todo } X, Y \in \Gamma(TM).$$

Diremos que unha variedade complexa M é unha *variedade hermitiana* se está equipada cunha métrica hermitiana h. Ademais, diremos que unha métrica é *pseudo-hermitiana* se é unha métrica semi-riemanniana e satisfai a igualdade anterior.

Nunha variedade case complexa cunha métrica hermitiana (M, J, h), podemos definir sempre a *forma de Kähler* ω, que é unha 2-forma, tal que

$$\omega(X, Y) = h(X, JY),$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$. Reciprocamente, podemos recuperar a métrica hermitiana a partir da forma de Kähler mediante $h(X, Y) = -\omega(X, JY)$.

Observación 2.4.2. Reparemos en que toda variedade case complexa (M, J) admite unha métrica hermitiana. Pois por ser M paracompacta admite unha métrica de Riemann g, e entón podemos definir

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY).$$

Introducimos agora a definición de variedade de Kähler.

Definición 2.4.3. Sexa M unha variedade complexa cunha estrutura complexa J e unha métrica pseudo-hermitiana g. Diremos, que g é unha *métrica de Kähler* se a forma de Kähler asociada ω é pechada, isto é, $d\omega = 0$. Nese caso diremos que (M, g) é unha *variedade pseudo-Kähler*. No caso en que g sexa riemanniana diremos que (M, g) é unha *variedade de Kähler*.

Observación 2.4.4. Deste xeito, as variedades de Kähler son un caso particular de variedades simplécticas, pois a forma de Kähler é pechada e non dexenerada.

Consideremos en $\mathbb{C}^n$ as coordenadas globais $(z^1, \ldots, z^n)$ e a métrica hermitiana definida como

$$g = \sum_{j=1}^{n} dz^j \otimes d\bar{z}^j.$$

Entón, a forma de Kähler vén dada por

$$\omega = -i \sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j.$$

Claramente, ω é pechada pois

$$d\omega = -i \sum_{j=1}^{n} d(dz^j \wedge d\bar{z}^j) = -i \sum_{j=1}^{n} d^2 z^j \wedge d\bar{z}^j - dz^j \wedge d^2 \bar{z}^j = 0.$$

Polo tanto, a métrica g define unha métrica de Kähler. O seguinte teorema amosa que nunha variedade de Kähler as derivadas da estrutura complexa J e da forma de Kähler ω gardan unha estreita relación. A súa proba pode ser lida en [58, páx. 128]

Teorema 2.4.5. *Sexa M unha variedade case complexa con estrutura case complexa J e métrica hermitiana g. As seguintes igualdades son equivalentes:*

(I) $\nabla\omega = 0$.

(II) $\nabla J = 0$.

(III) $N_J = d\omega = 0$.

Polo tanto, (M, J, g), unha variedade case complexa cunha métrica hermitiana, será de Kähler en calquera das tres situacións anteriores.

Observación 2.4.6. Toda variedade complexa cunha métrica hermitiana de dimensión real 2 é de Kähler, pois toda 2-forma nunha variedade de dimensión 2 é pechada.

2.5. Espazos de curvatura holomorfa constante

Nesta sección seguiremos as referencias [23] e [58]. É coñecido que as variedades de Riemann completas e simplemente conexas con curvatura seccional constante son os espazos euclidianos $\mathbb{R}^n$, as esferas S^n e os espazos hiperbólicos $\mathbb{R}H^n$. Cabe preguntarse se existe unha clasificación das variedades de Kähler con curvatura seccional constante. A reposta a este interrogante está no seguinte resultado, cuxa proba pode ser atopada en [58, páx. 131].

Teorema 2.5.1. *Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Kähler de dimensión real $2n$. Se $\overline{M}$ ten curvatura seccional constante e $n > 1$, entón $\overline{M}$ é chá.*

Por mor deste teorema terá interese considerar unha 'nova definición' de curvatura seccional.

Definición 2.5.2. Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Kähler con estrutura complexa J e tensor de curvatura $\overline{R}$. Diremos que a *curvatura seccional holomorfa* de $\overline{M}$, que denotaremos por K_{hol}, é a restricción da curvatura seccional K ós 2-planos J-invariantes.

Posto que os espazos J-invariantes veñen xerados por pares $\{v, Jv\}$, pódese pensar K_{hol} como unha función que asigna un número real $K_{\text{hol}}(v)$ a cada vector tanxente $v \in T\overline{M}$

$$K_{\text{hol}}(v) = K(v, Jv) = \overline{R}(v, Jv, Jv, v).$$

Diremos que unha variedade de Kähler $\overline{M}$ ten *curvatura seccional holomorfa constante* se K_{hol} é constante para todo v unitario tanxente a $\overline{M}$. Isto equivale a que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $K_{\text{hol}}(v) = c\|v\|^4$, para todo $v \in T\overline{M}$. O seguinte resultado dános unha expresión para o tensor de curvatura $\overline{R}$ dunha variedade de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante. A súa demostración pódese atopar en [58, páx. 135].

Proposición 2.5.3. *Unha variedade de Kähler $\overline{M}$ é de curvatura seccional holomorfa constante c se e só se*

$$\overline{R}(X,Y)Z = \frac{c}{4}(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle JY,Z\rangle JX - \langle JX,Z\rangle JY - 2\langle JX,Y\rangle JZ).$$

Ademais, nos espazos de curvatura seccional holomorfa constante hai unha clasificación análoga á que había nos espazos de curvatura seccional constante. A demostración deste resultado pódese atopar en [58, páx. 144].

Teorema 2.5.4. *Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Kähler completa e simplemente conexa de curvatura seccional holomorfa constante. Entón, $\overline{M}$ é isométrica a un dos seguintes espazos:*

- $\mathbb{C}^n$ *se* $c = 0$.
- $\mathbb{C}P^n$, *o espazo proxectivo complexo, se* $c > 0$.
- $\mathbb{C}H^n$, *o espazo hiperbólico complexo, se* $c < 0$.

Ademais, toda variedade con curvatura seccional holomorfa constante é localmente isométrica a un destes espazos.

Por outra banda, é fácil comprobar que unha variedade de Kähler de curvatura seccional holomorfa constante é localmente simétrica. De feito, veremos en §2.5.4 que $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ son espazos simétricos.

Denotaremos por $\mathbb{C}P^n(c)$ o espazo proxectivo complexo de curvatura seccional holomorfa $c > 0$ e por $\mathbb{C}H^n(c)$ o espazo hiperbólico complexo con $c < 0$. Denotaremos por $\overline{M}^n(c)$ o único espazo forma complexo de curvatura seccional holomorfa c. É dicir, referirémonos a $\mathbb{C}^n$ se $c = 0$, $\mathbb{C}P^n(c)$ se $c > 0$ e $\mathbb{C}H^n(c)$ se $c < 0$.

2.5.1. O espazo proxectivo complexo

Consideremos $S^{2n+1}(r) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ unha esfera de dimensión impar de radio $r > 0$. A continuación imos describir a métrica e a conexión que induce a métrica habitual de $\mathbb{C}^{n+1}$ en $S^{2n+1}(r)$. Dotemos primeiro da métrica de Riemann usual a $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\langle z,w\rangle := \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} z_k\overline{w}_k, \text{ onde } z,w \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Entón $S^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z,z\rangle = r^2\}$. Identifiquemos $\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{2n+2}$ do xeito habitual. Deste xeito, poderemos considerar $u, v \in \mathbb{R}^{2n+2}$ tales que

$$z_k = u_{2k} + iu_{2k+1} \text{ e } w_k = v_{2k} + iv_{2k+1}.$$

É dicir, denotaremos por $(u_0,\ldots,u_{2n+1})$ as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Deste xeito, é doado comprobar que $\langle z,w\rangle = \langle u,v\rangle = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_k$. Denotaremos por $\tilde{J}$ a estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$, isto é, a aplicación $\mathbb{C}$-linear que consiste en multiplicar cada compoñente por i. Para cada $z \in S^{2n+1}(r)$ o espazo tanxente á esfera é

$$T_z S^{2n+1}(r) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w \rangle = 0\}.$$

Consideraremos sobre $S^{2n+1}(r)$ a métrica de Riemann inducida pola restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e o campo normal unitario dado por $\xi_z = \frac{1}{r} z$.

Denotemos por D a conexión de Levi–Civita de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Se $\mathcal{S}$ é o operador forma respecto de ξ e X un vector tanxente a $S^{2n+1}(r)$ entón

$$\begin{aligned} \mathcal{S}X = -D_X \xi = -\frac{1}{r} D_X \left(\sum_{i=0}^{2n+1} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) &= -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{2n+1} X(u_i) \frac{\partial}{\partial u_i} \\ = -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{2n+1} \sum_{j=0}^{2n+1} x_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_i} &= -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{2n+1} x_i \frac{\partial}{\partial u_i} = -\frac{X}{r}. \end{aligned}$$

Agora pola fórmula de Gauss temos que a conexión de Levi–Civita $\tilde{\nabla}$ de $S^{2n+1}(r)$ vén dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y + \frac{\langle X, Y \rangle}{r} \xi, \tag{2.1}$$

para X, Y campos tanxentes a $S^{2n+1}(r)$.

Mediante a ecuación de Gauss, obtense o tensor de curvatura $\tilde{R}$ de $S^{2n+1}(r)$

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Como variedade diferenciable, o espazo proxectivo complexo de dimensión n defínese como o espazo das rectas complexas que pasan pola orixe en $\mathbb{C}^{n+1}$ e denótase por $\mathbb{C}P^n$. Consideremos en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ a relación de equivalencia dada por $z \sim z'$ se $z = \lambda z'$, onde $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ ou equivalentemente $z \sim z'$ se $z = \lambda z'$, con $z, z' \in S^{2n+1}(r)$ e $\lambda \in S^1$. Denotaremos por π a proxección canónica de S^{2n+1} sobre o espazo proxectivo complexo, que é o conxunto cociente por dita relación,

$$\pi \colon S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n.$$

A anterior aplicación recibe o nome de *aplicación de Hopf* e é máis ou menos doado comprobar que é unha submersión sobrexectiva.

2.5.2. O espazo hiperbólico complexo

A construción do espazo hiperbólico complexo é análoga á de $\mathbb{C}P^n$, aínda que con diferenzas significativas. Nesta ocasión dotaremos a $\mathbb{C}^{n+1}$ dunha métrica semi-riemanniana de signatura $(2, 2n)$ definida do seguinte xeito

$$\langle z, w \rangle = \mathrm{Re}(-z_0 \overline{w}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k).$$

Denotaremos a $\mathbb{C}^{n+1}$ con esta métrica mediante $\mathbb{C}_1^{n+1}$. Usando a mesma identificación ca antes temos que

$$\langle z, w\rangle = \langle u, v\rangle = -u_0v_0 - u_1v_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} u_kv_k.$$

Consideremos agora o espazo de anti De Sitter de radio r en $\mathbb{C}^{n+1}$, que se define como

$$H_1^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, z\rangle = -r^2\}.$$

O espazo tanxente a $H_1^{2n+1}(r)$ en z vén dado por

$$T_zH_1^{2n+1}(r) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w\rangle = 0\}.$$

Se agora restrinximos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $H_1^{2n+1}(r)$, obtemos unha métrica de Lorentz cuxa conexión de Levi–Civita $\tilde{\nabla}$ vén dada por

$$\tilde{\nabla}_XY = D_XY - \frac{\langle X, Y\rangle}{r}\xi$$

A xustificación disto é idéntica ó caso proxectivo coa única diferenza de que neste caso $\langle\xi, \xi\rangle = -1$. Coa ecuación de Gauss podemos obter o tensor de curvatura $\tilde{R}$ de H_1^{2n+1}

$$\tilde{R}(X, Y)Z = -\frac{1}{r^2}(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

Definimos a variedade diferenciable $\mathbb{C}H^n$ como a imaxe de H_1^{2n+1} mediante a proxección canónica $\pi\colon \mathbb{C}^{2n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ do espazo proxectivo complexo. Equivalentemente, $\mathbb{C}H^n$ é o espazo das rectas complexas negativas de $\mathbb{C}^{n+1}$, respecto da métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de signatura $(2, 2n)$. O hiperplano complexo de $\mathbb{C}^{n+1}$ definido por $z_0 = 0$ non corta a $H_1^{2n+1}(r)$. Polo tanto, o hiperplano proxectivo complexo de $\mathbb{C}P^n$ de ecuación $z_0 = 0$ non corta a $\mathbb{C}H^n$, co cal $\mathbb{C}H^n$ está contido na carta $z_0 \neq 0$ de $\mathbb{C}P^n$. Por tanto,

$$\mathbb{C}H^n = \{\pi(1, z_1, \ldots, z_n) : -1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 0\}.$$

Noutras palabras $\mathbb{C}H^n = \pi(\{1\} \times B(0, 1))$. Por ser π unha submersión é aberta, polo tanto $\mathbb{C}H^n$ é unha subvariedade aberta de $\mathbb{C}P^n$. Entón, $\mathbb{C}H^n$ é unha variedade complexa de dimensión complexa n. Non obstante, non dotaremos a $\mathbb{C}H^n$ da métrica inducida por $\mathbb{C}P^n$ senón doutra distinta.

2.5.3. As estrutura kählerianas de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$

Nesta sección probaremos que tanto $\mathbb{C}P^n$ como $\mathbb{C}H^n$ son variedades de Kähler e describiremos os elementos que caracterizan a súa xeometría de Riemann. Explotaremos as semellanzas de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ traballando simultaneamente coas dúas variedades. Así, introduciremos o símbolo ϵ que valerá 1 no caso proxectivo e -1 no caso hiperbólico. Deste xeito, o tensor de curvatura virá dado por

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \frac{\epsilon}{r^2}(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

Escribiremos $\overline{M}$ por $\mathbb{C}P^n$ ou $\mathbb{C}H^n$ e $\tilde{M}$ en vez de $S^{2n+1}(r)$ ou $H_1^{2n+1}(r)$. Denotaremos por π a proxección $\pi\colon \tilde{M} \longrightarrow \overline{M}$. É coñecido que $\mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathbb{C}_1^{n+1}$ son pseudo-Kähler; polo tanto $D\tilde{J} = 0$. Sexa V o campo definido como $V = \tilde{J}\xi$. Evidentemente é unitario pois $\langle V, V\rangle = \langle \xi, \xi\rangle = \epsilon$. Ademais é tanxente xa que $\langle V, \xi\rangle = 0$. Introducimos a aplicación

$$\begin{array}{rccl} \varphi_t\colon & \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ & z & \longmapsto & \varphi_t(z) = e^{it}z. \end{array}$$

Observemos en primeiro lugar que φ_t preserva fibras, isto é, $\pi \circ \varphi_t = \pi$. Evidentemente é unha isometría linear de $\mathbb{C}^{n+1}$ e de $\mathbb{C}_1^{n+1}$. Ademais, é fácil comprobar que $\varphi_t(\tilde{M}) = \tilde{M}$ e que φ_t é unha isometría de $\tilde{M}$. Polo tanto, $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é un grupo uniparamétrico de isometrías de $\tilde{M}$. Cabe mencionar que $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$ é a estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$. Podemos descompoñer ortogonalmente o espazo tanxente a $\tilde{M}$ nas chamadas compoñentes horizontal e vertical

$$T_z\tilde{M} = \mathbb{R}V_z \oplus V_z^{\perp}.$$

Vexamos que $\mathbb{R}V_z$ é xusto o núcleo de π_{*z}. Para isto, tomemos a curva $\varphi_z(t) = e^{i\frac{t}{r}}z$. Esta curva sae de z e ten velocidade inicial $\dot{\varphi}_z(0) = i\frac{z}{r} = \tilde{J}\frac{z}{r} = V_z$. Ademais, como $\pi(e^{it}) = \pi(z)$, todos os puntos de dita curva proxéctanse sobre un único punto en $\overline{M}$. Noutras palabras, $\pi \circ \varphi_z$ é constante. Polo tanto, derivando con respecto a t, tense que

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(\pi \circ \varphi_z) = \pi_{*z}V_z = 0.$$

Por outro lado, π é unha submersión e argumentando coa dimensión podemos comprobar que $\operatorname{Ker}\pi_{*z} = \mathbb{R}V_z$ e que $V_z^{\perp}$ é levado isomorficamente en $T_{\pi(z)}\overline{M}$. Isto último permite, como vimos en §1.2.2, definir para cada vector $X \in T_{\pi(z)}\overline{M}$ o levantamento horizontal X_z^L de X a z, como o único vector en $V_z^{\perp}$ que proxecta a X, isto é, X_z^L é tal que $\pi_{*z}X_z^L = X$. Analogamente, podemos definir o levantamento dun campo de vectores. Como φ_t é isometría tense que $\varphi_{*t}X_z^L \in V_{\varphi_t(z)}^{\perp}$, e por preservar fibras tense que

$$\pi_{*\varphi_{t(z)}}(\varphi_{t_{*z}}X_z^L) = \pi_{*\varphi_t(z)}X_z^L = X.$$

Logo $\varphi_{t_{*z}}X_z^L = X_{\varphi_{t(z)}}^L$, pola unicidade do levantado.

Neste intre podemos xa definir unha estrutura case complexa J de $\overline{M}$ mediante

$$JX = \pi_*(\tilde{J}X^L).$$

Esta aplicación está ben definida pois non depende do punto da fibra que escollamos para facer o levantamento, pois

$$\pi_{*\varphi_t(z)}\tilde{J}X_{\varphi_t(z)}^L = \pi_{*\varphi_t(z)}\tilde{J}(\varphi_{t_{*z}}X_z^L) = \pi_{*\varphi_t(z)}(\varphi_{t_{*z}}\tilde{J}X_z^L) = \pi_{*\varphi_t(z)}\tilde{J}X_z^L,$$

onde na segunda igualdade temos usado que φ_t e $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$ conmutan e φ_t preserva fibras. Evidentemente, J é linear e ademais $J^2 = -\operatorname{Id}$.

A continuación dotaremos a $\overline{M}$ dunha métrica hermitiana. O método que seguiremos consistirá en dotar a $\overline{M}$ dunha métrica que convirte a $\pi\colon \tilde{M} \longrightarrow \overline{M}$ nunha submersión semi-riemanniana. Dados X, Y dous vectores en $T_{\pi(z)}\overline{M}$ definimos o produto interior de X e Y como

$$\langle X, Y\rangle = \langle X_z^L, Y_z^L\rangle.$$

Esta métrica é independente do punto ó que levantemos o vector, pois

$$\langle X_z^L, Y_z^L\rangle = \langle \varphi_{t*z} X_z^L, \varphi_{t*z} Y_z^L\rangle = \langle X_{\varphi_t z}^L, Y_{\varphi_t z}^L\rangle.$$

Polo tanto, xa temos unha métrica semi-riemanniana sobre $\overline{M}$, pero ademais esta é hermitiana, pois

$$\langle JX, JY\rangle = \langle \pi_*(\tilde{J}X^L), \pi_*(\tilde{J}Y^L)\rangle = \langle \tilde{J}X_z^L, \tilde{J}Y_z^L\rangle = \langle X_z^L, Y_z^L\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

Agora vexamos como construír a conexión de Levi–Civita en $\overline{M}$. As fórmulas vistas en §1.2.2 permítennos obter a conexión de Levi–Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ que vén dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \pi_*(\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L).$$

A continuación vexamos que a métrica definida en $\overline{M}$ é de Kähler. Consideremos $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$. Denotemos por $(\cdot)^\top$ e $(\cdot)^\perp$ a proxección sobre o tanxente a $\tilde{M}$ e o normal a $\tilde{M}$, respectivamente. Tense que

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X J)Y &= \overline{\nabla}_X JY - J\overline{\nabla}_X Y = \pi_*(\tilde{\nabla}_{X^L}(JY^L)) - J(\pi_*\tilde{\nabla}_{X^L}Y^L)\\ &= \pi_*(\tilde{\nabla}_{X^L}\tilde{J}Y^L - \tilde{J}(\tilde{\nabla}_{X^L}Y^L)_{V^\perp})\\ &= \pi_*((D_{X^L}\tilde{J}Y^L)_{V^\perp} + (D_{X^L}\tilde{J}Y^L)_{\mathbb{R}V} - (\tilde{J}D_{X^L}Y^L)_{V^\perp}) = 0,\end{aligned}$$

onde se tivo en conta que $V^\perp$ é unha distribución invariante por $\tilde{J}$, que $\operatorname{Ker}\pi_* = \mathbb{R}V$ e que $\nabla\tilde{J} = 0$. Polo tanto, $\overline{M}$ é unha variedade de Kähler, xa que $\overline{\nabla}J = 0$. A métrica que se definiu no espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$ denomínase *métrica de Fubini–Study*, mentres que a definida no espazo hiperbólico é a *métrica de Bergman*. Xustifiquemos por último o carácter simplemente conexo e completo de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$.

O espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$ é simplemente conexo por ser homeomorfo a unha bóla aberta de $\mathbb{C}^n$. Para deducir que $\mathbb{C}P^n$ é simplemente conexo debemos botar man da sucesión exacta longa de homotopía aplicada ó fibrado $\pi\colon S^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ con fibra S^1. Entón

$$\cdots \to \pi_1(S^{2n+1}(r)) \to \pi_1(\mathbb{C}P^n) \to \pi_0(S^1) \to \pi_0(S^{2n+1}(r)).$$

Como $\pi_1(S^{2n+1}(r))$ e $\pi_0(S^{2n+1}(r))$ son triviais tense que $\pi_1(\mathbb{C}P^n) \simeq \pi_0(S^1)$, que é trivial.

A completitude de $\mathbb{C}P^n$ dedúcese da súa compacidade pois é imaxe dun compacto por unha aplicación continua. A completitude de $\mathbb{C}H^n$ séguese da completitude do espazo de anti De Sitter e de ser $\pi\colon H_1^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}H^n$ unha submersión semi-riemanniana. De todos xeitos, como veremos máis adiante, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ son espazos simétricos, logo son completos.

Probemos tamén que $\overline{M}$ ten curvatura seccional holomorfa constante. Para isto, botemos man dun par de ecuacións da teoría de submersións semi-riemannianas vistas en §1.2.2

$$\tilde{\nabla}_{X^L}Y^L = (\overline{\nabla}_X Y)^L + \frac{1}{2}[X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}, \tag{2.2}$$

$$\overline{K}(X,Y) = \tilde{K}(X^L, Y^L) + \frac{3}{4}\frac{\langle [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}, [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}\rangle}{\langle X^L, X^L\rangle\langle Y^L, Y^L\rangle - \langle X^L, Y^L\rangle^2}, \tag{2.3}$$

onde $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$, e $\overline{K}$ e $\tilde{K}$ denotan as curvaturas seccionais de $\overline{M}$ e $\tilde{M}$ respectivamente. Entón

$$\begin{aligned}
\langle [X^L, Y^L], V\rangle &= 2\langle \tilde{\nabla}_{X^L}Y^L - (\overline{\nabla}_X Y)^L, V\rangle = 2\langle \tilde{\nabla}_{X^L}Y^L, V\rangle = 2\langle (D_{X^L}Y^L)^\top, \tilde{J}\xi\rangle \\
&= -2\langle \tilde{J}(D_{X^L}Y^L)^\top, \xi\rangle = -2\langle D_{X^L}\tilde{J}Y^L, \xi\rangle = 2\langle \tilde{J}Y^L, D_{X^L}\xi\rangle \\
&= -2\langle \tilde{J}Y^L, \mathcal{S}X^L\rangle = \frac{2}{r}\langle \tilde{J}Y^L, X^L\rangle = \frac{2}{r}\langle JY, X\rangle,
\end{aligned}$$

onde temos aplicado a ecuación (2.2), o carácter hermitiano da métrica, que $\nabla\tilde{J} = 0$, a compatibilidade da conexión de Levi-Civita coa métrica e a ecuación de Weingarten. Polo tanto, a curvatura seccional de $\overline{M}$ asociada á distribución xerada polo sistema ortonormal $\{X, JX\}$ é

$$\overline{K}(X, JX) = \frac{\varepsilon}{r^2} + \frac{3\varepsilon}{r^2}\langle J(JX), X\rangle^2 = \frac{\varepsilon}{r^2}(1 + 3\langle X, X\rangle^2) = \frac{4\varepsilon}{r^2}.$$

Así pois, concluímos que $\overline{M}$ é un espazo de curvatura seccional holomorfa constante $c = \frac{4\varepsilon}{r^2}$.

2.5.4. $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ como espazos simétricos

$\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ son unha clase especial de espazos simétricos: son espazos simétricos hermitianos. Un espazo simétrico M dise *hermitiano* se M é unha variedade hermitiana e a reflexión global en p é unha aplicación holomorfa para cada $p \in M$. Ademais, pódese ver en [29, páx. 372] que os espazos simétricos hermitianos son variedades Kähler. Nesta sección presentaremos a estrutura de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ como espazos simétricos e posteriormente centrarémonos na de $\mathbb{C}H^n$, pois será de vital importancia para describir o exemplo que aparece no Teorema Principal. Nesta parte seguiremos a notación presentada en §1.1.3.

O grupo de matrices $U(n+1)$ preserva o produto escalar de $\mathbb{C}^{n+1}$ definido como

$$\langle z, w\rangle := \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} z_k \overline{w}_k, \text{ onde } z, w \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Ademais, este grupo preserva as rectas complexas que pasan pola orixe e actúa transitivamente nelas. Polo tanto, $U(n+1)$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{C}P^n$ mediante a acción isométrica de $U(n+1)$ dada por

$$\begin{array}{ccc}
U(n+1) \times \mathbb{C}P^n & \longrightarrow & \mathbb{C}P^n \\
(A, p) & \longmapsto & A(p) = \pi(Az),
\end{array}$$

onde $\pi(z) = p$, para certo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$. Porén, as matrices do tipo λI_{n+1}, con $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$, actúan trivialmente sobre $\mathbb{C}P^n$. Deste xeito, podemos restrinxir a acción anterior ó subgrupo $SU(n+1)$ que segue actuando transitivamente, pero esta vez as matrices que actúan trivialmente son as do tipo λI_{n+1}, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda^{n+1} = 1$. O grupo de Lie que actúa transitiva e efectivamente por isometrías sobre $\mathbb{C}P^n$ é $PSU(n+1)$ que consiste en cocientar $SU(n+1)$ por todas aquelas matrices do tipo λI_{n+1}, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Polo tanto, $\mathbb{C}P^n$ é un espazo homoxéneo.

No estudo dos espazos simétricos é habitual considerar como grupo que actúa transitivamente a un subgrupo do grupo de isometrías, que pese a non actuar efectivamente, ten tan só un número finito de elementos que actúan trivialmente. Deste xeito, será suficiente traballar con $SU(n+1)$.

Calculemos o subgrupo de isotropía nun punto. Sexa $p \in \mathbb{C}P^n$, tal que $\pi(z) = p$, para certo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$. As matrices $A \in SU(n+1)$ tales que $A(p) = p$ son as que verifican que $Az = \lambda z$, para certo $\lambda \in S^1$. Polo tanto, o subgrupo de isotropía de p é

$$S(U(1)U(n)),$$

onde $S(U(1)U(n))$ denota as matrices de $U(1) \times U(n)$ con determinante 1. Polo tanto, $\mathbb{C}P^n$ ten a seguinte descrición como espazo homoxéneo:

$$\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n)).$$

Para cada $p \in \mathbb{C}P^n$, sexa $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\pi(z) = p$. Entón, podemos considerar a reflexión $\sigma\colon \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\sigma_{|L} = \mathrm{Id}$ e $\sigma_{L^\perp} = -\mathrm{Id}$, onde L é a recta complexa que pasa pola orixe con vector director $z \in \mathbb{C}^{n+1}$. Polo tanto, σ induce unha isometría ζ_p de $\mathbb{C}P^n$ tal que $\zeta_{p*p} = -\mathrm{Id}\colon T_p\mathbb{C}P^n \longrightarrow T_p\mathbb{C}P^n$.

Por último, $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n))$ é un espazo simétrico hermitiano. En efecto, para cada $\varphi \in SU(n+1)$ tense que

$$\tilde{J} \circ \varphi_* = \varphi_* \circ \tilde{J}.$$

Pero entón pola Proposición 2.3.4, φ é holomorfa. Polo tanto, $\mathbb{C}P^n$ é un espazo simétrico hermitiano.

O caso hiperbólico é análogo. Sexa $U(1,n) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : AI_{1,n}A^* = I_{1,n}\}$, onde

$$I_{1,n} := \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right).$$

O grupo $U(1,n)$ preserva o produto escalar

$$\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}(-z_0\overline{w}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w}_k)\,, \text{onde } z, w \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Ademais, podemos definir unha acción isométrica e transitiva sobre $\mathbb{C}H^n$ do mesmo xeito que no caso proxectivo.

De novo restrinxiremos a acción de $U(1,n)$ a $SU(1,n)$, o subgrupo das matrices de $U(1,n)$ con determinante un, pois os elementos que actúan trivialmente sobre $\mathbb{C}H^n$ son un número finito. Polo tanto, $\mathbb{C}H^n$ é un espazo homoxéneo. O subgrupo de isotropía de $p \in \mathbb{C}H^n$ é $S(U(1)U(n))$, polo que de $\mathbb{C}H^n$ admite a seguinte descrición como espazo homoxéneo

$$\mathbb{C}H^n = SU(1,n)/S(U(1)U(n)).$$

De xeito análogo que no caso de $\mathbb{C}P^n$ podemos ver que $\mathbb{C}H^n$ é un espazo simétrico hermitiano.

Concluímos que $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n))$ é un espazo simétrico hermitiano de tipo compacto sendo $(SU(n+1), S(U(1)U(n))$ un par simétrico de $\mathbb{C}P^n$. Por outro lado, $\mathbb{C}H^n = SU(1,n)/S(U(1)U(n))$ é un espazo simétrico de tipo non compacto, sendo $(SU(n+1), S(U(1)U(n)))$ un par simétrico.

A álxebra de Lie $\mathfrak{su}(1,n)$

Nesta parte imos profundizar no estudo de $\mathbb{C}H^n$ como espazo simétrico hermitiano. Para iso analizaremos a álxebra de Lie de $SU(1,n)$, é dicir, $\mathfrak{su}(1,n)$. Consideremos (G,K) un par simétrico de $\mathbb{C}H^n$ con $G = SU(1,n)$ e $K = S(U(1)U(n))$. No que segue estableceremos a seguinte notación

$$\lceil \lambda, v, X \rceil := \left(\begin{array}{c|c} i\lambda & v^* \\ \hline v & X \end{array}\right),$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}^n$ e $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. A continuación imos analizar as álxebras de Lie que interveñen na descrición de $\mathbb{C}H^n$ como espazo simétrico. A álxebra de Lie de $U(n)$ é a das matrices anti-hermitianas.

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : X + X^* = 0\}.$$

En particular, $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$. Deste xeito, a álxebra de Lie de K é

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(\mathfrak{n})) = \{\lceil \lambda, 0, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}.$$

Por outra banda, a álxebra de Lie de G é

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,n) = \{Y \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}) : Y I_{1,n} + I_{1,n} Y^* = 0, \operatorname{tr} Y = 0\}.$$

Sexan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{C}^n$ e $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$. Entón, temos que

$$\lceil \lambda, v, X \rceil \lceil \mu, w, Y \rceil = \left(\begin{array}{c|c} -\lambda\mu + v^* w & i\lambda w^* + v^* Y \\ \hline i\mu v + Xw & vw^* + XY \end{array}\right).$$

Polo tanto, o corchete de $\mathfrak{su}(1,n)$ é

$$[\lceil \lambda, v, X \rceil, \lceil \mu, w, Y \rceil] = \lceil 2 \operatorname{Im} v^* w, i(\mu v - \lambda w) + Xw - Yv, [X,Y] + vw^* - wv^* \rceil.$$

A continuación calculemos a forma de Killing de $\mathfrak{su}(1,n)$. É coñecido que a forma de Killing de $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$ vén dada por $\mathcal{B}(M,N) = 2(n+1)\operatorname{tr} MN - 2\operatorname{tr} M \operatorname{tr} N$. Posto que a álxebra de Lie das matrices de traza cero $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ forma un ideal de $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$, a forma de Killing de $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ é $\mathcal{B}(M,N) = 2(n+1)\operatorname{tr} MN$. Pero $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ é a complexificación de $\mathfrak{su}(1,n)$. Polo tanto, a forma de Killing $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{su}(1,n)$ vén dada por

$$\mathcal{B}(M,N) = 2(n+1)\operatorname{tr} MN,$$

para cada $M,N \in \mathfrak{su}(1,n)$. Consideremos agora o homomorfismo de álxebras de Lie dado por

$$\begin{array}{rccc} \theta\colon & \mathfrak{su}(1,n) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(1,n) \\ & \lceil \lambda, v, X \rceil & \longmapsto & \lceil \lambda, -v, X^* \rceil. \end{array}$$

É claro que $\theta^2 = \mathrm{Id}$. Ademais, pode ser comprobado que a forma bilinear $\mathcal{B}_\theta$, tal que $\mathcal{B}_\theta(X,Y) = -\mathcal{B}(X,\theta Y)$ é definida positiva. Polo tanto, $\mathcal{B}_\theta$ é un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{su}(1,n)$, e θ é unha involución de Cartan para a álxebra semisimple $\mathfrak{su}(1,n)$. Podemos considerar a descomposición de Cartan de $\mathfrak{su}(1,n)$ asociada a θ dada por

$$\mathfrak{su}(1,n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{\lceil \lambda, v, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}, \\ \mathfrak{p} &= \{\lceil 0, v, 0 \rceil : v \in \mathbb{C}^n\} \simeq \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

A descomposición de $\mathfrak{su}(1,n)$ en espazos de raíces

Consideremos o subespazo abeliano de $\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}\lceil 0, e_1, 0 \rceil = \{\lceil 0, x e_1, 0 \rceil : x \in \mathbb{R}\},$$

onde e_1 é o primeiro vector da base canónica de $\mathbb{C}^n$. É fácil ver que todos os subespazos abelianos non triviais de $\mathfrak{p}$ teñen dimensión un. Polo tanto, $\mathfrak{a}$ é maximal e $\mathbb{C}H^n$ é un espazo simétrico de rango un. Denotemos o espazo dual de $\mathfrak{a}$ mediante $\mathfrak{a}^*$. Definamos $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ tal que $\alpha(\lceil 0, x e_1, 0 \rceil) = x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Sexa $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que $\mathcal{B}_\theta(H, H_\alpha) = \alpha(H)$, para cada $H \in \mathfrak{a}$. Neste caso,

$$H_\alpha = \lceil 0, \frac{1}{4(n+1)} e_1, 0 \rceil.$$

Deste xeito, para cada $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, temos os espazos de raíces

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{su}(1,n) : \operatorname{ad}(H)X = \lambda(H)X \ \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Neste caso temos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\alpha &= \{\lceil 0, (0, v), \left(\begin{array}{c|c} 0 & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array}\right) \rceil : v \in \mathbb{C}^{n-1}\}, \\
\mathfrak{g}_{-\alpha} &= \{\lceil 0, (0, -v), \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \\ \hline -v^* & 0 \end{array}\right) \rceil : v \in \mathbb{C}^{n-1}\}, \\
\mathfrak{g}_{2\alpha} &= \{\lceil \mu, (i\mu, 0), \left(\begin{array}{c|c} -i\mu & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \rceil : \mu \in \mathbb{R}\}, \\
\mathfrak{g}_{-2\alpha} &= \{\lceil \mu, (-i\mu, 0), \left(\begin{array}{c|c} -i\mu & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \rceil : \mu \in \mathbb{R}\}, \\
\mathfrak{g}_0 &= \{\lceil \mu, xe_1, \left(\begin{array}{c|c} i\mu & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \rceil : \mu, x \in \mathbb{R}, Y \in \mathfrak{u}(n-1) 2i\mu + \operatorname{tr} Y = 0\}.
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} &\simeq \mathbb{C}^{n-1}, \\
\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha} &\simeq \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, a descomposición de $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$ en espazos de raíces é

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}.$$

A descomposición de Iwasawa de $\mathfrak{su}(1, n)$ e $SU(1, n)$

Comecemos coa descomposición de Iwasawa de $\mathfrak{su}(1, n)$. Escollamos unha orde en Σ tal que α e 2α son raíces positivas e definamos

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} = \{\lceil \mu, (i\mu, v), \left(\begin{array}{c|c} -i\mu & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array}\right) \rceil : \mu \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1}\}$$

que é unha subálxebra nilpotente, pois $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ para cada par de raíces α, β.

A subálxebra $\mathfrak{a}$ é abeliana e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{g}$ resoluble. Ademais, $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Deste xeito, a descomposición de Iwasawa da álxebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$ vén dada por $\mathfrak{su}(1, n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, onde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k} &= \{\lceil \lambda, v, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}, \\
\mathfrak{a} &= \{\lceil 0, xe_1, 0 \rceil : x \in \mathbb{R}\}, \\
\mathfrak{n} &= \{\lceil \mu, (i\mu, v), \left(\begin{array}{c|c} -i\mu & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array}\right) \rceil : \mu \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

A descomposición anterior é unha descomposición en suma directa de subespazos vectoriais. Non é ortogonal, pois $\mathfrak{k} \not\perp \mathfrak{n}$, nin é suma semidirecta de álxebras de Lie pois $[\mathfrak{k}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \not\subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

Consideremos agora A e N, os subgrupos conexos de $G = SU(1,n)$ con álxebras de Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$, respectivamente. Entón, é doado ver que $AN = \{an \in G : a \in A, n \in N\}$ é un subgrupo de G. O subgrupo AN é un subgrupo conexo de G. Ademais, podemos comprobar que a álxebra de Lie de AN é $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Polo tanto, o Teorema 1.1.2 indícanos que

$$\begin{array}{ccc} K \times A \times N & \longrightarrow & G \\ (k, a, n) & \longmapsto & kan \end{array}$$

é un difeomorfismo e que A e N son nilpotentes e simplemente conexos. Ademais, por [35, Teorema 1.127] como A e N son nilpotentes e simplemente conexos as aplicacións exponenciais $\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{a}} \colon \mathfrak{a} \longrightarrow A$ e $\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{n}} \colon \mathfrak{n} \longrightarrow N$ son difeomorfismos. Pero por [50, Teorema 6.4] a aplicación exponencial do subgrupo AN, $\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}} \colon \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n} \longrightarrow AN$, é un difeomorfismo.

Por outra banda, sexa $h \in AN$ e $h(o) = o$, onde $o \in \mathbb{C}H^n$ é un punto con grupo de isotropía K. Entón, $h \in K$, polo que é o neutro xa que está en $K \cap AN$. Polo tanto, AN actúa de xeito simple e transitivo sobre $\mathbb{C}H^n$. Definamos

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & G & \longrightarrow & \mathbb{C}H^n \\ & h & \longmapsto & \phi(h) = h(o). \end{array}$$

A restricción de ϕ a AN é un difeomorfismo entre AN e $\mathbb{C}H^n$. O pullback da métrica de Bergmann en $\mathbb{C}H^n$ a través de ϕ resulta ser unha métrica invariante pola esquerda en AN que convirte a AN nunha variedade de Riemann isométrica a $\mathbb{C}H^n$.

Capítulo 3

Xeometría de hipersuperficies

Unha hipersuperficie é unha subvariedade M de codimensión un en certa variedade ambiente $\overline{M}$. Dada unha variedade de Riemann $(\overline{M}, \overline{g})$, a restricción da métrica de $\overline{M}$ a M é unha métrica de Riemann para M. Neste caso diremos que M está inmersa isométricamente en $\overline{M}$. Fundamentalmente hai tres criterios xeométricos que capturan a boa simetría dunha hipersuperficie nunha variedade de Riemann: ser isoparamétrica, ter curvaturas principais constantes e ser homoxénea. Neste capítulo introduciremos algunhas propiedades destes tipos de hipersuperficies así como a relación que existe entre elas.

3.1. Algúns criterios xeométricos

Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Riemann e M unha hipersuperficie de $\overline{M}$. Neste traballo falaremos de *espazos forma reais* para referirnos a variedades de Riemann simplemente conexas, completas e con curvatura seccional constante. Polo Teorema 1.2.1, os únicos espazos forma reais salvo isometrías son: $\mathbb{R}^n, S^n(r)$ e $\mathbb{R}H^n(r)$, para $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Por outra banda, diremos que os *espazos forma complexos* son as variedades de Kähler simplemente conexas, completas e con curvatura seccional holomorfa constante. Polo Teorema 2.5.4, os únicos espazos forma complexos salvo isometrías son: $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}P^n(c)$ e $\mathbb{C}H^n(c)$, para $c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

3.1.1. Hipersuperficies isoparamétricas

Comezaremos esta sección coa noción de aplicación isoparamétrica que foi probablemente introducida por Levi–Civita no ano 1937 en [41].

Definición 3.1.1. Unha función diferenciable real $f\colon \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ nunha variedade riemanniana $\overline{M}$ é unha *aplicación isoparamétrica* se existen funcións reais dunha variable real $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e Ψ continua tales que

$$\|\nabla f\|^2 = \Phi \circ f \ \text{ e } \ \Delta f = \Psi \circ f,$$

onde ∇f é o gradiente de f e Δf é o laplaciano de f. Ademais, diremos que unha *familia isoparamétrica de hipersuperficies* é a colección $\{f^{-1}(c) : c \in \mathbb{R}\}$ de conxuntos de nivel de f.

Noutras palabras, tanto a norma do gradiente como o laplaciano de f son función de f.

Consideremos unha hipersuperficie inmersa M en $\overline{M}$ e $p \in M$. Entón, hai unha veciñanza U de p en M tal que U é unha hipersuperficie mergullada cun campo de vectores normal unitario ξ e para $r > 0$ suficientemente pequeno as hipersuperficies equidistantes $U^r = \{\exp_q(r\xi_q) : q \in U\}$ están mergulladas en $\overline{M}$.

Definición 3.1.2. Unha hipersuperficie M inmersa nunha variedade de Riemann $\overline{M}$ dise *isoparamétrica* se para cada $p \in M$ hai unha veciñanza aberta U de $p \in M$ tal que U e as hipersuperficies equidistantes próximas a U teñen curvatura media constante.

A *hessiana de* $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ *en* $\overline{M}$ vén dada pola expresión

$$\mathrm{Hess}_f(X,Y) := X(Yf) - (\overline{\nabla}_X Y)(f) = \langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y\rangle,$$

onde $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$.

O seguinte teorema establece a relación existente entre as hipersuperficies isoparamétricas e as aplicacións isoparamétricas.

Teorema 3.1.3. *Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Riemann. Tense que:*

(I) *Se $f\colon \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha aplicación isoparamétrica e $c \in \mathbb{R}$ é un valor regular de f, entón $M = f^{-1}(c)$ é unha hipersuperficie isoparamétrica.*

(II) *Reciprocamente, se M é unha hipersuperficie isoparamétrica de $\overline{M}$, entón para cada $p \in M$ hai unha veciñanza aberta U de p en M tal que localmente é o conxunto de nivel de certa aplicación isoparamétrica $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ de certo aberto V de $\overline{M}$.*

Demostración. Sexa c un valor regular de f arbitrariamente escollido. Entón, o conxunto $M = f^{-1}(c)$ é unha hipersuperficie mergullada pechada e $\xi = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é un campo de vectores unitario normal a M. O operador forma $\mathcal{S}$ de M con respecto a ξ vén dado por

$$\langle \mathcal{S}X, Y\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle = -\frac{\langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y\rangle}{\|\nabla f\|} = -\frac{\mathrm{Hess}_f(X,Y)}{\|\nabla f\|}, \tag{3.1}$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$. A continuación, probemos que para cada $p \in M$ existe unha veciñanza U que ten curvatura media constante. Sexa $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ unha referencia ortonormal de certa veciñanza U de p en M. Entón, a curvatura media de U vén dada por

$$H = \operatorname{tr} \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathcal{S}E_i, E_i\rangle = \frac{-1}{\|\nabla f\|} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Hess}_f(E_i, E_i) = \frac{-1}{\|\nabla f\|}\Big(\Delta f - \mathrm{Hess}_f(\xi,\xi)\Big)$$

$$= \frac{-1}{\|\nabla f\|}\Big(\Delta f - \frac{\langle \overline{\nabla}_{\nabla f} \nabla f, \nabla f\rangle}{\|\nabla f\|^2}\Big) = \frac{-1}{\|\nabla f\|}\Big(\Delta f - \frac{1}{2\|\nabla f\|^2}\nabla f(\|\nabla f\|^2)\Big). \tag{3.2}$$

Por ser f isoparamétrica tense que $\|\nabla f\|$ e Δf son constantes ó longo dos conxuntos de nivel de f, polo que H é constante ó longo de $M = f^{-1}(c)$. Entón, os conxuntos de nivel regulares de f teñen curvatura media constante. Se conseguimos ver que os conxuntos de nivel asociados a valores regulares próximos a c son hipersuperficies equidistantes, teremos probada a primeira parte. Para probar isto abonda con ver que as curvas integrais ó longo do vector unitario ξ definido sobre os puntos regulares de f son xeodésicas en $\overline{M}$. Sexa $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{M}$ a curva integral de ξ comezando en p. Polo tanto $\dot{\alpha}(t) = \xi_{\alpha(t)}$. Vexamos que $D_t\dot{\alpha}(t) = 0$. Primeiro, como ξ é unitario, temos que $\langle \overline{\nabla}_\xi \xi, \xi\rangle = 0$. Sexa X un campo de vectores nun aberto de $\overline{M}$ tanxente ós conxuntos de nivel regulares de f. Sabemos que $\xi(f)$ é constante ó longo dos conxuntos regulares de nivel de f, pois se $q \in f^{-1}(c)$ e $q' \in f^{-1}(c')$, temos que

$$\xi(f)(q) = df_q(\xi_q) = \langle \nabla f(q), \xi_q\rangle = \langle \nabla f(q'), \xi_{q'}\rangle = df_{q'}(\xi_{q'}) = \xi(f)(q').$$

Polo tanto, $X(\xi(f)) = 0$. Ademais, por ser X tanxente ós conxuntos de nivel regulares de f, temos que $X(f) = 0$ e polo tanto $\xi(X(f)) = 0$. Entón,

$$0 = \frac{1}{\|\nabla f\|}[X, \xi](f) = \langle \xi, [X, \xi]\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, \xi\rangle - \langle \overline{\nabla}_\xi X, \xi\rangle = -\langle \overline{\nabla}_\xi X, \xi\rangle = \langle \overline{\nabla}_\xi \xi, X\rangle.$$

Conclúese que α é unha xeodésica e así temos probado (I).

Reciprocamente, sexa M unha hipersuperficie isoparamétrica en $\overline{M}$. Consideremos $p \in M$ e U unha veciñanza de p en M tal que U está mergullada con campo de vectores normal ξ. Entón, hai un $\varepsilon > 0$ e $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ de xeito que as hipersuperficies equidistantes $U^r = \{\exp_q(r\xi_q) : q \in U\}$ están mergulladas e teñen curvatura media constante. Consideremos o conxunto aberto $V = \bigcup_{r\in(-\varepsilon,\varepsilon)} U^r$ de $\overline{M}$. Obviamente, os conxuntos U^r son disxuntos. Polo tanto, podemos definir unha aplicación $f\colon V \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ que envía $q \in U^r$ a $r \in \mathbb{R}$. Vexamos que f é isoparamétrica. Por unha banda, para cada $q \in V$, $\|\nabla f\|(q) = 1$. Por outro lado, como $U^r = f^{-1}(r)$ ten curvatura constante media, pola ecuación (3.2), temos que Δf é constante ó longo de cada conxunto de nivel $f^{-1}(r)$. Isto proba que f é unha aplicación isoparamétrica e conclúe a proba. □

3.1.2. Hipersuperficies con curvaturas principais constantes

Sexa ξ un campo de vectores normal unitario definido nun aberto U da hipersuperficie M. Diremos que $\lambda\colon U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha *curvatura principal de M asociada a ξ* se hai un campo de vectores $X \in \Gamma(TU)$ tal que $\mathcal{S}X = \lambda X$. Se λ é unha curvatura principal, denotamos por $T_\lambda(p)$ o autoespazo de $\lambda(p)$ e chamámoslle *espazo de curvatura principal asociado a $\lambda(p)$*. Se $X \in T_\lambda(p), X \neq 0$, diremos que X é unha *dirección principal de λ en $p \in M$*. Definimos a *multiplicidade de λ en p* como $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{S}_p - \lambda(p)\operatorname{Id})$. En xeral, a dimensión dos espazos de curvatura principais asociados cunha curvatura principal λ non coinciden en puntos distintos.

Definición 3.1.4. Unha hipersuperficie M ten *curvaturas principais constantes* se para cada aberto U de M con campo de vectores normal unitario ξ en U os autovalores do operador forma de U con respecto a ξ son constantes en U.

Exemplo 3.1.5 (Horoesferas). Consideremos o modelo da bóla aberta de Poincaré de $\mathbb{R}H^n$. Neste modelo as xeodésicas son os círculos que intersecan $\partial\mathbb{R}H^n$ ortogonalmente ou os segmentos que pasan a través da orixe.

Sexa $o \in \partial\mathbb{R}H^n$, entón definimos a *función de Busemann respecto de* o mediante

$$b_o(p) = \lim_{t\to\infty} d(p, \gamma(t)) - t,$$

onde d denota a distancia inducida pola métrica de $\mathbb{R}H^n$ e γ é unha xeodésica tal que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = o \in \partial\mathbb{R}H^n$. Entón, definimos $\mathcal{H}_{p,o}$, a *horoesfera que pasa por* p *centrada en* o, como o conxunto de nivel da función b_o, é dicir,

$$\mathcal{H}_{p,o} = \{q \in \mathbb{R}H^n : b_o(q) = b_o(p)\}.$$

No modelo da bóla de Poincaré as horoesferas en $\mathbb{R}H^n$ centradas en o son as esferas tanxentes a $o \in \partial\mathbb{R}H^n$. Mais as esferas na bóla equipada coa métrica euclidiana son totalmente umbílicas e non totalmente xeodésicas. Como a bóla equipada coa métrica euclidiana é conforme á bóla equipada coa métrica de Poincaré, as horoesferas de $\mathbb{R}H^n$ tamén son umbílicas e non totalmente xeodésicas. Entón, polo Teorema 3.2.7, tense que as horoesferas en $\mathbb{R}H^n$ teñen curvaturas principais constantes.

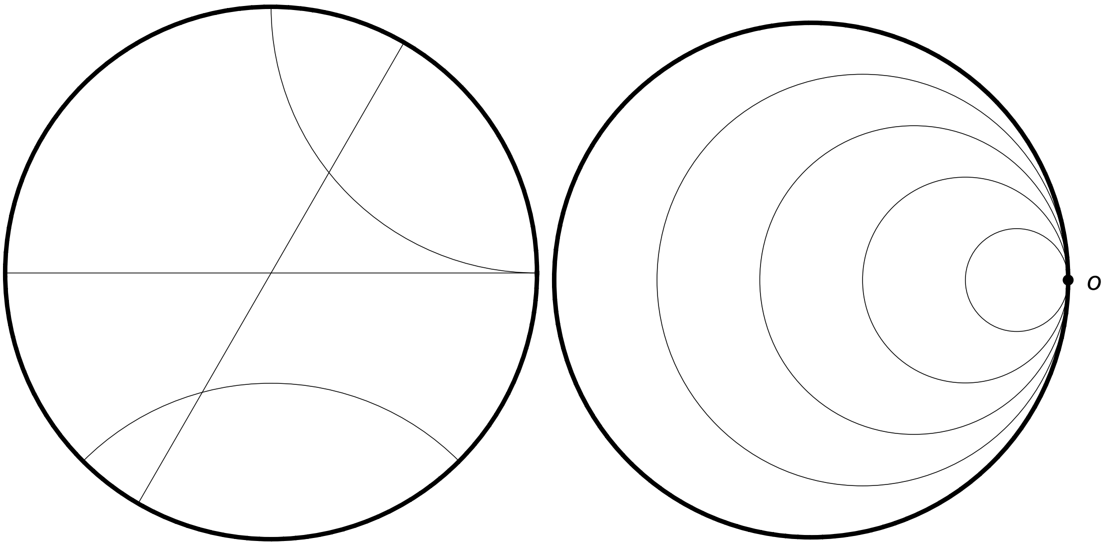

Figura 3.1: Na esquerda están representadas algunhas xeodésicas en $\mathbb{R}H^2$ e na dereita están representadas algunhas horoesferas centradas en $o \in \partial\mathbb{R}H^2$.

Observación 3.1.6. A construción das horoesferas en $\mathbb{C}H^n$ é análoga á do Exemplo 3.1.5.

3.1.3. Hipersuperficies homoxéneas

Definición 3.1.7. Unha *hipersuperficie extrinsecamente homoxénea* dunha variedade de Riemann $\overline{M}$ é unha órbita de codimensión un da acción dun subgrupo pechado de Lie H do grupo $\mathrm{Iso}(\overline{M})$.

De aquí en diante diremos simplemente *hipersuperficie homoxéna* en vez de hipersuperficie extrinsecamente homoxénea. As accións isométricas $H \times \overline{M} \longrightarrow \overline{M}$ que admiten unha hipersuperficie como órbita son chamadas *accións de cohomoxeneidade un*. Polo tanto, as hipersuperficies homoxéneas son precisamente as órbitas de dimensión máxima das accións de cohomoxeneidade un.

Exemplo 3.1.8. Consideremos a acción natural do grupo $SO(n)$ sobre a esfera unitaria S^n. Existen dous tipos de órbitas para esta acción: as órbitas singulares, que son os polos norte e sur e as órbitas principais que son os paralelos. Deste xeito, os paralelos son hipersuperficies homoxéneas na esfera S^n.

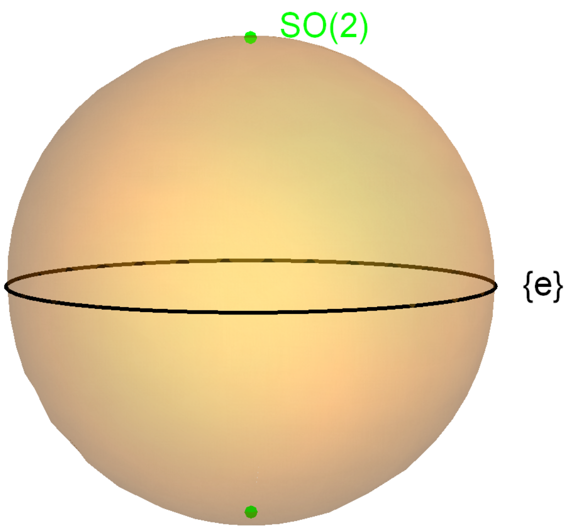

Figura 3.2: As órbitas e os grupos de isotropía da acción de $SO(2)$ sobre S^2.

Teorema 3.1.9. *Unha hipersuperficie homoxénea ten curvaturas principais constantes.*

Demostración. Sexa M unha hipersuperficie homoxénea e U un aberto de M onde está definido un campo normal unitario ξ. Sexan $p, q \in U$. Por ser M homoxénea existe $\varphi \in \operatorname{Iso}(\overline{M})$, tal que $\varphi(p) = q$ e $\varphi(M) = M$. Entón, para cada $X_p \in T_pM$, tense que

$$\varphi_{*p}(\mathcal{S}_p X_p) = -\varphi_{*p}(\overline{\nabla}_{X_p}\xi_p) = -\overline{\nabla}_{\varphi_{*p}X_p}\varphi_{*p}X_p = \mathcal{S}_q\varphi_{*p}X_p.$$

Polo tanto,

$$\mathcal{S}_p = (\varphi_{*p})^{-1} \circ \mathcal{S}_q \circ \varphi_{*p}.$$

Deste xeito $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_q$ teñen os mesmos autovalores e consecuentemente M é unha hipersuperficie con curvaturas principais constantes. $\square$

Teorema 3.1.10. *Unha hipersuperficie homoxénea é isoparamétrica.*

Demostración. Sexa M unha hipersuperficie homoxénea. Polo teorema anterior, tense que M ten curvaturas principais constantes e entón ten curvatura media constante. Se agora probamos que as órbitas próximas a M son equidistantes teremos que polo Teorema 3.1.9 teñen curvatura media constante e polo tanto M é isoparamétrica.

Sexa γ a xeodésica que sae dun punto $p \in M$ en dirección normal a M. Consideremos $\underline{H} \leq \operatorname{Iso}(M)$ un subgrupo pechado e un campo de Killing X xerado pola acción de H en $\overline{M}$. Polo tanto, $\overline{\nabla} X$ é antisimétrico e entón $\langle \overline{\nabla}_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma} \rangle = 0$, polo que $\langle X, \dot{\gamma} \rangle$ é constante ó longo de γ. Como $\langle X, \dot{\gamma} \rangle$ se anula en $p \in M$ e X arbitrario, temos que γ é perpendicular ás órbitas que interseca. Polo tanto, as órbitas próximas a M son equidistantes. $\square$

Deste xeito, cabe preguntarse se se ten o recíproco. É dicir, será toda hipersuperficie isoparamétrica ou con curvaturas principais constantes unha hipersuperficie homoxénea? No resto deste capítulo trataremos de respostar a anterior pregunta e de explicar as relacións que existen entre estes tres conceptos en dous tipos distintos de variedades ambiente: os espazos forma reais e os espazos forma complexos.

3.2. Hipersuperficies en espazos forma reais

Sexa $\overline{M}(\kappa)$ un espazo forma real de curvatura constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Comecemos calculando a xeometría extrínseca da hipersuperficie equidistante a unha dada en $\overline{M}(\kappa)$. Nesta parte é importante ter presente o exposto en §A.2. Sexa M unha hipersuperficie mergullada en $\overline{M}(\kappa)$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tense que $M^r := \{\exp_p r\xi_p : p \in M\}$ define localmente unha hipersuperficie para $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Denotemos por $\mathcal{S}$ o operador forma de M con respecto a ξ e por $\mathcal{S}^r$ o operador forma de M^r con respecto a η^r, onde $\eta^r_{\exp_p(r\xi_p)} = (\exp_p)_{*r\xi_p}(r\xi_p)$, con $p \in M$. Lembremos que podemos calcular o endomorfismo $D \in \operatorname{End}(\gamma^\perp)$ tal que $\mathcal{S}^r = -D'(r)D(r)^{-1}$, resolvendo a ecuación diferencial

$$D'' + \overline{R}_\gamma^\perp \circ D = 0, \quad D(0) = \operatorname{Id}_{T_pM}, \quad D'(0) = -\mathcal{S}_{\xi_p}.$$

Por ser $\overline{M}(\kappa)$ un espazo forma real o endomorfismo de curvatura virá dado por

$$\overline{R}(X,Y)Z = \kappa(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

Polo tanto, calculemos $\overline{R}_\gamma^\perp = \overline{R}(\cdot, \dot{\gamma})\dot{\gamma}^\perp$. Dado un campo de vectores en $\overline{M}$

$$\overline{R}_\gamma^\perp(X) = \overline{R}(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}^\perp = \kappa(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle X - \langle X, \dot{\gamma}\rangle \dot{\gamma})_{\gamma^\perp} = \kappa X.$$

É dicir, $\overline{R}_\gamma^\perp = \kappa I$. Entón a ecuación anterior redúcese a $D'' + \kappa D = 0$. Observemos que $D''(0) = -\kappa D(0) = -\kappa I$, onde I denota a matriz identidade, e $D'''(0) = -\kappa D'(0) = \kappa \mathcal{S}_{\xi_p}$. Recursivamente temos que

$$D^{(2n)}(0) = (-1)^n \kappa^n I,$$
$$D^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \kappa^n S_{\xi_p}.$$

Polo tanto, desenvolvendo en series de potencias nunha veciñanza de 0 suficientemente pequena temos que

$$\begin{aligned}D(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(n)}(0)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(2n)}(0)t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(2n+1)}(0)t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^n t^{2n}}{(2n)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \kappa^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{\xi_p}.\end{aligned}$$

Distingamos agora tres casos:

- Se $\kappa = 0$,

$$D(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^n t^{2n}}{(2n)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \kappa^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{\xi_p} = I - tS_{\xi_p}.$$

- Se $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned}D(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^n t^{2n}}{(2n)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \kappa^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{\xi_p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{\kappa}t)^{2n}}{(2n)!} I + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\sqrt{\kappa}t)^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{\xi_p} \\ &= \cos(\sqrt{\kappa}t) I - \frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}} S_{\xi_p}.\end{aligned}$$

- Se $\kappa < 0$,

$$\begin{aligned}D(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^n t^{2n}}{(2n)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \kappa^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{\xi_p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-\kappa}t)^{2n}}{(2n)!} I + \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-\kappa}t)^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{\xi_p} \\ &= \cosh(\sqrt{-\kappa}t) I - \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}t)}{\sqrt{-\kappa}} \mathcal{S}_{\xi_p}.\end{aligned}$$

Polo tanto, podemos resumir a información escribindo $D(r)$ do seguinte xeito:

$$D(r) = c_\kappa(r) I - s_\kappa(r) \mathcal{S}_{\xi_p},$$

onde

$$c_\kappa(r) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ \cos(r\sqrt{\kappa}) & \kappa > 0 \\ \cosh(t\sqrt{\kappa}) & \kappa < 0 \end{cases} \qquad s_k(r) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ \frac{\sin(r\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}} & \kappa > 0 \\ \frac{\sinh(r\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}} & \kappa < 0. \end{cases}$$

Sexa λ un autovalor de $\mathcal{S}$. Escollendo unha base respecto a cal $\mathcal{S}_{\xi_p}$ sexa diagonal, deducimos que os autovalores de $\mathcal{S}^r$ son os seguintes

- Se $\kappa = 0$,

$$\lambda(r) = \frac{\lambda}{1 - \lambda r}.$$

- Se $\kappa > 0$,

$$\lambda(r) = \frac{\kappa \sin(r\sqrt{\kappa}) + \sqrt{\kappa}\cos(r\sqrt{\kappa})\lambda}{\sqrt{\kappa}\cos(r\sqrt{\kappa}) - \sin(r\sqrt{\kappa})\lambda} = \frac{\kappa \tan(r\sqrt{\kappa}) + \sqrt{\kappa}\lambda}{\sqrt{\kappa} - \tan(r\sqrt{\kappa})\lambda}$$

- Se $\kappa < 0$,

$$\lambda(r) = \frac{-\kappa \sinh(r\sqrt{-\kappa}) + \sqrt{-\kappa}\cosh(r\sqrt{-\kappa})\lambda}{\sqrt{-\kappa}\cosh(r\sqrt{-\kappa}) - \sinh(r\sqrt{-\kappa})\lambda} = \frac{-\kappa \tanh(r\sqrt{-\kappa}) + \sqrt{-\kappa}\lambda}{\sqrt{-\kappa} - \tanh(r\sqrt{-\kappa})\lambda}.$$

Polo tanto, se λ é unha curvatura principal de M e escribimos $\tan_k := \frac{s_\kappa}{c_\kappa}$, tense que as curvaturas principais de M^r en $\exp_p(r\xi_p)$ veñen dadas por

$$\lambda(r) = \frac{\operatorname{sign}(\kappa)\kappa \tan_\kappa(r) + \lambda}{1 - \tan_\kappa(r)\lambda}.$$

O seguinte obxectivo será probar a seguinte caracterización de hipersuperficies isoparamétricas en espazos forma reais.

Teorema 3.2.1. *Sexa $\overline{M}(\kappa)$ un espazo forma real e M unha hipersuperficie mergullada en $\overline{M}(\kappa)$. Entón, son equivalentes:*

- *M é isoparamétrica.*
- *M ten curvaturas principais constantes.*

Demostración. Supoñamos que M ten g curvaturas principais constantes distintas. Entón, pola discusión anterior as curvaturas principais dunha hipersuperficie equidistante M^r a distancia r de M son

$$\lambda_i(r) = \frac{\operatorname{sign}(\kappa)\kappa \tan_\kappa(r) + \lambda_i}{1 - \tan_\kappa(r)\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, g,$$

que son funcións constantes en M^r. Polo tanto, para r pequeno, M^r ten curvaturas principais constantes e polo tanto curvatura media constante. En conclusión, M é unha hipersuperficie isoparamétrica.

Reciprocamente, supoñamos que M é unha hipersuperficie isoparamétrica de $\overline{M}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ son as curvaturas principais de M. Por simplicidade probemos unicamente o caso en que $\kappa = 0$. Se $\kappa = 0$, as curvaturas principais de M^r en $\exp_p(r\xi_p)$ con $p \in M$ son

$$\lambda_i(r) = \frac{\lambda_i(p)}{1 - r\lambda_i(p)},$$

onde $i = 1, \ldots, m-1$. Para un p dado isto define unha función

$$H(r) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i(p)}{1 - r\lambda_i(p)},$$

que por ser M isoparamétrica non depende de p. Derivando, tense que

$$H(0) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(p), H'(0) = -\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2(p), \ldots, H^{m-2}(0) = (-1)^m (m-2)! \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{m-1}(p),$$

non dependen de p. Pero sabemos que os coeficientes do polinomio característico dunha matriz están determinados polas sumas das potencias dos autovalores segundo as fórmulas de Newton. Polo tanto, os autovalores de M, $\lambda_i(p)$, non dependen de $p \in M$ para cada $i = 1, \ldots, m-1$, polo que M ten curvaturas principais constantes. □

Observación 3.2.2. En [37], afírmase que o teorema anterior tamén é certo se $\overline{M}$ é unha variedade semi-riemanniana de curvatura constante.

A fórmula fundamental de Cartan

A continuación probaremos a fórmula fundamental de Cartan, que será útil para obter resultados de clasificación nos espazos forma reais.

Proposición 3.2.3. *Sexa M unha hipersuperficie con curvaturas principais constantes nun espazo forma real $\overline{M}(\kappa)$. Se λ é curvatura principal de M, entón T_λ, a distribución correspondente á curvatura principal λ, é autoparalela, é dicir:*

$$\nabla_{T_\lambda} T_\lambda \subset T_\lambda.$$

En particular, cada distribución asociada a unha curvatura principal é integrable, e cada folla de tal distribución é totalmente xeodésica en M.

Demostración. Sexan μ e λ dúas curvaturas principais distintas de M. Entón, a ecuación de Codazzi, xunto co feito de que os campos de vectores propios asociados a curvaturas principais distintas son ortogonais, implican que se $X, Y \in \Gamma(T_\lambda)$ e $Z \in \Gamma(T_\mu)$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\nabla_X S)Z, Y\rangle - \langle (\nabla_Z S)X, Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X SZ, Y\rangle - \langle \nabla_X Z, SY\rangle - \langle \nabla_Z SX, Y\rangle + \langle \nabla_Z X, SY\rangle \\ &= \mu\langle \nabla_X Z, Y\rangle - \lambda\langle \nabla_X Z, Y\rangle - \lambda\langle \nabla_Z X, Y\rangle + \lambda\langle \nabla_Z X, Y\rangle = (\mu - \lambda)\langle \nabla_X Z, Y\rangle. \end{aligned}$$

Do teorema de Frobenius e a compatibilidade da conexión de Levi–Civita séguese que T_λ é integrable. As follas de T_λ son totalmente xeodésicas, pois por ser T_λ autoparalela para cada $X, Y \in \Gamma(T_\lambda)$, tense que $\nabla_X Y \in \Gamma(T_\lambda)$, polo que a segunda forma fundamental de cada folla é nula pola ecuación de Gauss. □

Teorema 3.2.4 (Fórmula de Cartan)**.** *Sexa M unha hipersuperficie isoparamétrica nun espazo forma real $\overline{M}(\kappa)$. Sexan $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ curvaturas principais constantes distintas de M con multiplicidades $m_1, \ldots, m_g$. Entón, para cada $i \in \{1, \ldots, g\}$, temos*

$$\sum_{j=1, i\neq j}^{g} m_j \frac{\kappa + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

Demostración. Sexan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ as curvaturas principais de M e consideremos unha referencia ortonormal local de M, $\{E_1, \ldots, E_{m-1}\}$, tal que $\mathcal{S}E_i = \lambda_i E_i$, con $i = 1, \ldots, m-1$. A ecuación de Gauss aplicada a E_i e a E_j con $\lambda_i \neq \lambda_j$, implica o seguinte

$$\begin{aligned} R(E_i, E_j, E_j, E_i) =& \overline{R}(E_i, E_j, E_j, E_i) - \langle \mathcal{S}E_i, E_j \rangle \langle \mathcal{S}E_i, E_j \rangle \\ &+ \langle \mathcal{S}E_i, E_i \rangle \langle \mathcal{S}E_j, E_j \rangle = \kappa + \lambda_i \lambda_j. \end{aligned}$$

Por unha banda,

$$\begin{aligned} R(X,Y,Y,X) =& \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle \\ =& \langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle \\ =& X \langle \nabla_Y Y, X \rangle - \langle \nabla_Y Y, \nabla_X X \rangle - Y \langle \nabla_X Y, X \rangle \\ &+ \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]Y}, X \rangle \\ =& -Y(X\langle Y, X \rangle - \langle Y, \nabla_X X \rangle) + \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle \\ =& \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{[E_i,E_j]} S) E_j, E_i \rangle &= \langle \nabla_{[E_i,E_j]} S E_j, E_i \rangle - \langle S \nabla_{[E_i,E_j]} E_j, E_i \rangle \\ &= \lambda_j \langle (\nabla_{[E_i,E_j]} E_j, E_i \rangle - \lambda_i \langle \nabla_{[E_i,E_j]} E_j, E_i \rangle \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) \langle \nabla_{[E_i,E_j]} E_j, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Pero empregando a ecuación de Codazzi tense que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{[E_i,E_j]} S) E_j, E_i \rangle &= \langle (\nabla_{E_j}) S [E_i, E_j], E_i \rangle = \langle (\nabla_{E_j} S) E_i, [E_i, E_j] \rangle \\ &= \langle (\nabla_{E_j} S) E_i, \nabla_{E_i} E_j \rangle - \langle (\nabla_{E_j} S) E_i, \nabla_{E_j} E_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_j} S E_i - S \nabla_{E_j} E_i, \nabla_{E_i} E_j \rangle - \langle \nabla_{E_j} S E_i - S \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle \\ &= \lambda_i \langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle + \langle S \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle = (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado tense que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{E_k} S) E_i, E_j \rangle^2 &= \langle (\nabla_{E_i} S) E_k, E_j \rangle^2 = \langle (\nabla_{E_i} S) E_j, E_k \rangle^2 \\ &= \langle (\nabla_{E_i} S) E_j, E_k \rangle \langle (\nabla_{E_j} S) E_i, E_k \rangle \\ &= \langle (\nabla_{E_i} S E_j - S \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle \langle (\nabla_{E_j} S E_i - S \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle \\ &= (\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle. \end{aligned}$$

Baixo estas consideracións e tendo en conta que T_{λ_i} é unha distribución autoparalela para cada λ_i concluímos que

$$\kappa + \lambda_i\lambda_j = 2\langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_j} E_i\rangle = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ E_k \notin \Gamma(T_{\lambda_i} \oplus T_{\lambda_j})}}^{m-1} \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k\rangle \langle E_k, \nabla_{E_j} E_i\rangle$$

$$= 2 \sum_{\substack{k=1 \\ E_k \notin \Gamma(T_{\lambda_i} \oplus T_{\lambda_j})}}^{m-1} \frac{\langle (\nabla_{E_k} S)E_i, E_j\rangle^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)}.$$

Se agora dividimos por $\lambda_i - \lambda_j$ e sumamos en $j \neq i$, obtemos que:

$$\sum_{j \neq i}^{m-1} \frac{\kappa + \lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 2 \sum_{j \neq i}^{m-1} \sum_{\substack{k=1 \\ E_k \notin \Gamma(T_{\lambda_i} \oplus T_{\lambda_j})}}^{m-1} \frac{\langle (\nabla_{E_k} S)E_i, E_j\rangle^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)} = 0,$$

onde a última igualdade é certa por ser o sumando (k, j)-ésimo igual ó oposto do sumando (j, k)-ésimo. $\square$

Hipersuperficies en espazos forma reais de curvatura non positiva

Nos espazos de curvatura constante non positiva, acadouse a clasificación completa das hipersuperficies con curvaturas principais constantes. En 1937, T. Levi-Civita clasificou as superficies con curvaturas principais constantes en $\mathbb{R}^3$ en [41]. Posteriormente, no ano 1938, B. Segre xeneralizou a anterior clasificación a $\mathbb{R}^n$ en [51], e nese mesmo ano, É. Cartan logrou a clasificación no caso hiperbólico en [15]. Comezaremos expoñendo algúns resultados de clasificación de subvariedades totalmente xeodésicas e totalmente umbílicas en espazos forma reais que serán útiles para caracterizar os nosos exemplos.

Lema 3.2.5. *Unha subvariedade completa, conexa e totalmente xeodésica M dunha variedade de Riemann $\overline{M}$ está completamente determinada por T_pM para cada $p \in M$.*

Demostración. Polo teorema de Hopf–Rinow, M é xeodesicamente completa. Por ser M totalmente xeodésica, toda xeodésica de M é xeodésica de $\overline{M}$. Polo tanto, para cada $p \in M$

$$\overline{\exp}_p(T_pM) = M,$$

onde $\overline{\exp}_p$ denota a aplicación exponencial de $\overline{M}$ en p. $\square$

Como consecuencia, temos o seguinte resultado de clasificación.

Teorema 3.2.6 (Clasificación das subvariedades totalmente xeodésicas en espazos forma reais)**.** *Sexa $\overline{M}(\kappa)$ un espazo forma real de curvatura constante $\kappa \in \mathbb{R}$. As subvariedades conexas, completas e totalmente xeodésicas de $\overline{M}(\kappa)$ son:*

- *Se $\kappa = 0$, os subespazos afíns de $\mathbb{R}^n$.*

- *Se $\kappa > 0$, as interseccións de S^n con subespazos lineais de $\mathbb{R}^{n+1}$.*
- *Se $\kappa < 0$, as intersección de $\mathbb{R}H^n$ con subespazos lineais de $\mathbb{R}^{n+1}_1$.*

Por outra banda, as subvariedades umbílicas que non son totalmente xeodésicas nos espazos forma reais están clasificadas no seguinte teorema cuxa proba pode ser atopada en [28, páx. 144].

Teorema 3.2.7 (Clasificación das subvariedades totalmente umbílicas en espazos forma reais)**.** *Sexa $\overline{M}(\kappa)$ un espazo forma real de curvatura constante $\kappa \in \mathbb{R}$. As subvariedades conexas, completas, non totalmente xeodésicas e totalmente umbílicas de $\overline{M}(\kappa)$ son*

- *Se $\kappa = 0$, as esferas de $\mathbb{R}^n$.*
- *Se $\kappa > 0$, as interseccións de S^n con subespazos afíns de $\mathbb{R}^{n+1}$ que non pasan pola orixe.*
- *Se $\kappa < 0$, as intersección de $\mathbb{R}H^n$ con subespazos afíns de $\mathbb{R}^{n+1}_1$ que non pasan pola orixe.*

Teorema 3.2.8 (Clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{R}^n$)**.** *Unha hipersuperficie isoparamétrica nun espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$ ten $g \in \{1, 2\}$ curvaturas principais e é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

(I) *un hiperplano afín $\mathbb{R}^{n-1}$,*

(II) *unha esfera S^{n-1},*

(III) *un cilindro xeneralizado $S^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, para $k = 1, \dots, n-2$.*

Demostración. Sexa M unha hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$. Supoñamos que $g \geq 2$. Poñendo $c = 0$ na fórmula de Cartan, temos que

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{g} m_j \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0,$$

para cada curvatura principal λ_i de M. Invertindo a orientación de M se fose necesario, podemos tomar λ_i como a menor curvatura principal positiva. Entón, se $\lambda_j > 0$, tense que $\frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} < 0$ e se $\lambda_j < 0$, tamén. Polo tanto, $g \leq 2$ e se $g = 2$, $\lambda_j = 0$.

Se $g = 1$ e $\lambda_1 = 0$, temos que M é unha hipersuperficie totalmente xeodésica. Polo Teorema 3.2.6, M é unha parte aberta dun hiperplano afín.

Se $g = 1$ e $\lambda_1 \neq 0$, temos que M é unha hipersuperficie totalmente umbílica que non é totalmente xeodésica. Polo Teorema 3.2.7, M é unha parte aberta dunha esfera.

Se $g = 1$, usando teoría de campos de Jacobi podemos concluír que temos unha parte aberta dun tubo ó redor dunha subvariedade totalmente xeodésica de codimensión polo menos 2. Tomemos unha xeodésica γ que sae de $p \in M$ e é perpendicular a M. Sexa λ unha curvatura principal de M e sexa v unha dirección principal calquera asociada a

λ. Consideremos ζ, o campo de Jacobi ó longo de γ con condicións iniciais $\zeta(0) = v$ e $\zeta'(0) = -\lambda v$. Entón, ζ é un M-campo de Jacobi. Ensaiemos unha solución da ecuación de Jacobi da forma $J(t) = a(t)P_v(t)$, para certa función diferenciable a e onde $P_v(t)$ denota o transporte paralelo de v ó longo de γ. Entón, como $\overline{R} = 0$, tense que $\ddot{a}(t) = 0$, polo que $a(t) = -\lambda t + 1$, logo $\zeta(t) = (1 - \lambda t)P_v(t)$. Consecuentemente, se $\lambda \neq 0$, tense que $\zeta(\frac{1}{\lambda}) = 0$ e se $\lambda = 0$, $\zeta(t) = P_v(t)$. Entón, a distancia $r = \frac{1}{\lambda}$, $T_{\dot{\gamma}}M^r = \{\mu P_v(r) : \mu \in \mathbb{R}\}$. Ademais, como γ é unha xeodésica, $\zeta'(r) = 0$, polo que $\mathcal{S}^r = 0$. Entón, M^r é totalmente xeodésica, polo que é un subespazo afín. Deste xeito, M é un tubo ó redor dun subespazo afín, polo que é unha parte aberta dun cilindro xeneralizado $S^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, para $k = 1, \ldots, n-2$. $\square$

Usando ideas similares, podemos obter a clasificación das hipersuperficies isoparamétricas no espazo hiperbólico real.

Teorema 3.2.9 (Clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{R}H^n$)**.** *Unha hipersuperficie isoparamétrica nun espazo hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$ ten $g \in \{1, 2\}$ curvaturas principais e é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

(i) *un $\mathbb{R}H^{n-1}$ totalmente xeodésico,*

(ii) *un tubo ó redor dun $\mathbb{R}H^k$ totalmente xeodésico, para certo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$,*

(iii) *unha esfera xeodésica en $\mathbb{R}H^n$,*

(iv) *unha horoesfera en $\mathbb{R}H^n$.*

Unha consecuencia importante desta clasificación é o feito de que todas as hipersuperficies isoparamétricas en $\overline{M}(c)$ con $c \leq 0$ son homoxéneas. Polo tanto, os anteriores teoremas aportan a clasificación das hipersuperficies homoxéneas nestes espazos.

Deste xeito a relación entre os tres criterios xeométricos presentados é a seguinte:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Homoxénea} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
\text{Isoparamétrica} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \text{Curvaturas ppais. ctes.}
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3: Hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}H^n$.

Hipersuperficies en espazos forma reais de curvatura positiva

O problema nas esferas resulta moito máis complicado. Para empezar, a fórmula de Cartan non aporta información que nos permita establecer unha cota para o número de curvaturas principais. Cartan clasificou as hipersuperficies con $g \in \{1, 2, 3\}$ curvaturas principais constantes e con $g = 4$ no caso de que as multiplicidades son todas simples, pero non foi capaz de resolver o caso xeral. As hipersuperficies homoxéneas en S^n están clasificadas por W. Y. Hsiang e B. Lawson Jr. en [38]. Deste resultado séguese que toda hipersuperficie homoxénea en S^n ten $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Posteriormente, Münzner desenvolveu a teoría de Cartan e probou en [47] que o número de curvaturas principais distintas dunha hipersuperficie isoparamétrica debe ser $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Porén, hai unha dificultade fundamental na clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en S^n: non toda hipersuperficie isoparamétrica e homoxénea. Sorprendentemente, en [27] atopáronse exemplos de hipersuperficies con $g = 4$ que non son homoxéneos. Na década pasada, Cecil, Chi e Jensen [17] e Immervoll [31] probaron que, cunhas poucas excepcións, as hipersuperficies con $g = 4$ curvaturas principais constantes se atopan entre os exemplos coñecidos. Nos últimos anos tamén se ten progresado no caso $g = 6$, pero o problema de clasificar as hipersuperficies isoparamétricas nas esferas continúa aberto.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Homoxénea} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Isoparamétrica} \arrow[ur, bend left, "/" marking] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \text{Curvaturas ppais. ctes.} \arrow[ul, bend right, "/" marking']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.4: Hipersuperficies en S^n.

3.3. Hipersuperficies en espazos forma complexos

Sexa $\overline{M}^n(c)$ o espazo forma complexo de dimensión complexa n con curvatura seccional holomorfa constante $c \in \mathbb{R}$, e M unha hipersuperficie real de $\overline{M}^n(c)$, é dicir, con codimensión real un. Dado que $\mathbb{C}^n$ é isométrico a $\mathbb{R}^{2n}$ e este xa foi estudado na sección anterior, restrinxirémonos ó caso non chan, isto é $c \neq 0$. Ademais, para $n = 1$ e $c \neq 0$, $\overline{M}(c)$ é isométrico a $S^2\Big(\frac{1}{\sqrt{c}}\Big)$ se $c > 0$ $\mathbb{R}H^2\Big(\frac{1}{\sqrt{-c}}\Big)$ se $c < 0$. Deste xeito, quedámonos co caso $c \neq 0$ e $n \geq 2$. Denotaremos por J a estrutura complexa de $\overline{M}^n(c)$. Entón, o campo $J\xi$ é un campo tanxente a M pois

$$\langle J\xi, \xi\rangle = \langle J^2\xi, J\xi\rangle = -\langle \xi, J\xi\rangle = -\langle J\xi, \xi\rangle,$$

por ser $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitiana. O campo $J\xi \in \Gamma(TM)$ recibe o nome de *campo de Hopf*. A partir do campo de Hopf é posible introducir as seguintes definicións:

Definición 3.3.1. Sexa M unha hipersuperficie real de $\overline{M}^n(c)$, dicimos que M é *Hopf* se $J\xi_p$ é uha dirección principal de M para cada $p \in M$.

Definición 3.3.2. Sexa M unha hipersuperficie real de $\overline{M}^n(c)$, dicimos que M é *regrada* se a distribución complexa maximal $(J\xi)^\perp$ de M é integrable e as súas subvariedades integrais son hipersuperficies totalmente xeodésicas de $\overline{M}^n(c)$.

O problema en $\mathbb{C}P^n$

En 1973, R. Takagi clasificou as hipersuperficies reais homoxéneas no espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$ en [53] apoiándose no resultado de clasificación de hipersuperficies homoxéneas feito por Hsiang e Lawson.

Teorema 3.3.3. *Unha hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, é homoxénea se e só se é holomorficamente congruente a unha das seguintes hipersuperficies:*

(I) *un tubo ó redor dun $\mathbb{C}P^k$ totalmente xeodésico en $\mathbb{C}P^n$, para algún $k \in \{0, \dots, n-1\}$,*

(II) *un tubo ó redor da cuádrica complexa $Q^{n-1} := \{[z] \in \mathbb{C}P^n : z_0^2 + \ldots + z_n^2 = 0\}$,*

(III) *un tubo ó redor do mergullo de Segre de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^k$ en $\mathbb{C}P^{2k+1}$ para certo $k \geq 2$,*

(IV) *un tubo ó redor do mergullo de Plücker en $\mathbb{C}P^n$ da Grassmanniana $G_2(\mathbb{C}^5)$ formada polos 2-planos complexos en $\mathbb{C}^5$.*

(V) *un tubo ó redor do mergulo "half spin" en $\mathbb{C}P^{15}$ do espazo simétrico hermitiano $SO(10)/U(5)$.*

O mergullo de Segre de $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ en $\mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$ vén dado por

$$([z_0, \dots, z_n], [w_0, \dots, w_n]) \mapsto [z_0 w_0, z_0 w_1, \dots, z_0 w_m, z_1, w_0, \dots, z_i w_j, \dots, z_n w_n],$$

onde se teñen tomado todos os produtos da forma $z_i w_j$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, en orde lexicográfica. O mergullo de Plücker da Grasmanniana $G_k(\mathbb{C}^m)$ en $\mathbb{C}P^r$, con $r = \binom{m}{k-1}$, vén dado por

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle \mapsto [\det A_0, \dots, \det A_r],$$

onde $A_0, A_1, \dots, A_r$ son todos os menores de orde k da matriz de orde $k \times m$ cuxas filas son as compoñentes dos vectores $v_1, \dots, v_k$. Finalmente, para consultar a definición do mergullo "half spin" en $\mathbb{C}P^{15}$ de $SO(10)/U(5)$, pódese consultar [16, §7.5]. Unha consecuencia relevante do resultado de Takagi é que toda hipersuperficie homoxénea en $\mathbb{C}P^n$ é Hopf. Outra consecuencia remarcable é que $g \in \{2, 3, 5\}$ para toda hipersuperficie homoxénea de $\mathbb{C}P^n$. Dous anos máis tarde Takagi clasificou as hipersuperficies reais con 2 e 3 curvaturas principais en [54] ($g = 2$) e [55] ($g = 3$, $n \geq 3$). Posteriormente, o caso $g = 3$, $n = 2$ foi resolto por Q. M. Wang en [57].

Teorema 3.3.4. *Sexa M unha hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, con dúas curvaturas principais constantes distintas. Entón, M é unha parte aberta dunha esfera xeodésica en $\mathbb{C}P^n$.*

Teorema 3.3.5. *Sexa M unha hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, con tres curvaturas principais constantes distintas. Entón, M é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

(I) *un tubo ó redor dun $\mathbb{C}P^k$ totalmente xeodésico en $\mathbb{C}P^n$, para certo $k \in \{1, \dots, n-2\}$,*

(II) *un tubo ó redor da cuádrica complexa* $Q^{n-1} := \{[z] \in \mathbb{C}P^n : z_0^2 + \ldots + z_n^2 = 0\}$.

Do Teorema 3.3.4 e do Teorema 3.3.5 séguese que as hipersuperficies reais con $g \leq 3$ en $\mathbb{C}P^n$ son partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. No ano 1986, Kimura clasificou en [34] as hipersuperficies reais Hopf con curvaturas principais constantes en $\mathbb{C}P^n$, sendo todas elas partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. Como vimos anteriormente, nun espazo forma real, ter curvaturas principais constantes equivale a ser isoparamétrico. En espazos forma complexos isto non é así. En 1983, Wang [57] construíu unha hipersuperficie isoparamétrica que non ten curvaturas principais constantes. Deste xeito, Wang probou o seguinte resultado

Teorema 3.3.6. *Sexa M unha hipersuperficie real isoparamétrica en $\mathbb{C}P^n$. Entón as seguintes afirmacións equivalen:*

- *M ten unha subvariedade focal complexa.*
- *M é Hopf.*
- *M ten curvaturas principais constantes.*

Combinando o resultado anterior coa clasificación das hipersuperficies Hopf con curvaturas principais constantes obtemos o seguinte.

Corolario 3.3.7. *Sexa M unha hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^n$. Entón, calquera dúas das seguintes condicións implican a terceira:*

- *M é Hopf.*
- *M é isoparamétrica.*
- *M ten curvaturas principais constantes.*

Por último, no ano 2016 M. Domínguez Vázquez clasificou as hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{C}P^n$ para $n \neq 15$ en [25]. Ata o día de hoxe non hai exemplos coñecidos de hipersuperficies reais con curvaturas principais constantes en $\mathbb{C}P^n$ que non sexan Hopf ou homoxéneas. Ademais, coñecer unha cota para g nesas hipersuperficies continúa sendo un problema aberto.

O problema en $\mathbb{C}H^n$

En 1985, S. Montiel probou en [44] o seguinte teorema que non fai uso da hipótese de ter curvaturas principais constantes.

Teorema 3.3.8. *Sexa M unha hipersuperficie real no espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 3$, con ó sumo dúas curvaturas principais en cada punto. Entón M é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

(I) *unha horoesfera en $\mathbb{C}H^n$,*

(ii) *unha esfera xeodésica en* $\mathbb{C}H^n$,

(iii) *un tubo ó redor dun* $\mathbb{C}H^{n-1}$ *totalmente xeodésico en* $\mathbb{C}H^n$,

(iv) *un tubo de radio* $r = \log(2+\sqrt{3})$ *ó redor dun espazo hiperbólico* $\mathbb{R}H^n$ *totalmente xeodésico en* $\mathbb{C}H^n$.

Deste resultado, séguese que non existen hipersuperficies totalmente umbílicas en $\mathbb{C}H^n$. Ademais, todos os exemplos anteriores teñen curvaturas principais constantes.

As hipersuperficies Hopf con curvaturas principais constantes en $\mathbb{C}H^n$ foron clasificadas en 1989 por J. Berndt en [3]:

Teorema 3.3.9. *Sexa* M *unha hipersuperficie real Hopf en* $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$, *con curvaturas principais constantes. Entón,* M *é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

(i) *unha horoesfera en* $\mathbb{C}H^n$,

(ii) *un tubo ó redor dun* $\mathbb{C}H^k$ *totalmente xeodésico en* $\mathbb{C}H^n$, *para algún* $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

(iii) *un tubo ó redor dun espazo hiperbólico real* $\mathbb{R}H^n$ *totalmente xeodésico en* $\mathbb{C}H^n$.

Porén, a clasificación das hipersuperficies homoxéneas tardaría tres décadas en chegar pois aínda non eran coñecidos todos os exemplos. En 1998, M. Lohnherr atopou en [43] unha hipersuperficie real homoxénea regrada non Hopf en $\mathbb{C}H^n$: a hipersuperficie W^{2n-1}. Máis tarde, Berndt e Brück xeneralizaron esta construcción en [4] ás subvariedades W^{2n-k}_{φ}. Debido a estes descubrimentos, Berndt e Tamaru acadaron no ano 2007 en [8] a clasificación das hipersuperficies reais homoxéneas en $\mathbb{C}H^n$.

Teorema 3.3.10. *Sexa* M *unha hipersuperficie real homoxénea en* $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$. *Entón,* M *é holomorficamente congruente a unha parte aberta das seguintes hipersuperficies:*

(i) *un tubo ó redor dun* $\mathbb{C}H^k$ *totalmente xeodésico, para algún* $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

(ii) *un tubo ó redor dun* $\mathbb{R}H^n$ *totalmente xeodésico,*

(iii) *unha horoesfera en* $\mathbb{C}H^n$,

(iv) *a hipersuperficie real regrada* W^{2n-1} *ou unha das súas hipersuperficies equidistantes,*

(v) *un tubo ó redor da subvariedade minimal regrada* W^{2n-k}_{φ} *para certo* $\varphi \in (0, \pi/2]$ *e* $k \in \{2, \dots, n-1\}$, *onde* k *é para se* $\varphi \neq \pi/2$.

O número de curvaturas principais dos exemplos homoxéneos é $g \in \{2,3,4,5\}$. Mais, non todos son Hopf. A hipersuperficie W^{2n-1} e a subvariedade W^{2n-k}_{φ} serán presentadas en §4.1. O campo de Hopf das hipersuperficies W^{2n-1} e os tubos ó redor da subvariedade minimal regrada $W^{2n-k}_{\pi/2}$ teñen proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura distintos. Por outra banda, os tubos ó redor da subvariedade minimal regrada W_φ^{2n-k}, con $\varphi \neq \pi/2$ teñen proxección non trivial sobre exactamente tres espazos de curvatura distintos.

No ano 2017, J. C. Díaz Ramos, M. Domínguez Vázquez e V. Sanmartín López conseguiron clasificar as hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{C}H^n$ en [21].

Teorema 3.3.11. *Sexa M unha hipersuperficie real isoparamétrica en $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$. Entón, M é holomorficamente congruente a unha parte aberta das seguintes hipersuperficies:*

(I) *un tubo ó redor dun $\mathbb{C}H^k$ totalmente xeodésico, para algún $k \in \{0, \dots, n-1\}$,*

(II) *un tubo ó redor dun $\mathbb{R}H^n$ totalmente xeodésico,*

(III) *unha horoesfera en $\mathbb{C}H^n$,*

(IV) *a hipersuperficie real regrada W^{2n-1} ou unha das súas hipersuperficies equidistantes,*

(V) *un tubo ó redor da subvariedade minimal regrada W_φ^{2n-k} para certo $\varphi \in (0, \pi/2]$ e $k \in \{2, \dots, n-1\}$, onde k é par se $\varphi \neq \pi/2$,*

(VI) *un tubo ó redor dunha subvariedade homoxénea, minimal e regrada $W_\mathfrak{w}$, para certo subespazo totalmente real $\mathfrak{w}$ de $\mathfrak{g}_\alpha \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ tal que $\mathfrak{w}^\perp$, o complemento ortogonal de $\mathfrak{w}$ en $\mathfrak{g}_\alpha$ ten ángulo de Kähler non constante.*

Deste xeito, non toda hipersuperficie isoparamétrica en $\mathbb{C}H^n$ é homoxénea, pois os tubos ó redor de $W_\mathfrak{m}$ non teñen curvaturas principais constantes. Para máis información sobre a subvariedade $W_\mathfrak{m}$, consúltese [21, §2.4.2].

Polo tanto, a relación entre os tres criterios xeométricos presentados é a seguinte:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Homoxénea} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Isoparamétrica} \arrow[ur, bend left, "/" marking] \arrow[rr, "/" marking] & & \text{Curvaturas ppais. ctes.} \arrow[ul, bend right, "?"'] \arrow[ll, bend left, "?"]
\end{tikzcd}$$

Figura 3.5: Hipersuperficies en $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$.

As hipersuperficies non Hopf

A clasificación das hipersuperficies non Hopf con curvaturas principais constantes tanto en $\mathbb{C}P^n$ como en $\mathbb{C}H^n$ continúa a ser un problema aberto. En $\mathbb{C}P^n$ toda hipersuperficie homoxénea é Hopf. Por outra banda, en $\mathbb{C}H^n$ existen exemplos de hipersuperficies homoxéneas que non son Hopf. No caso hiperbólico, se $g \leq 2$ e $n \geq 3$ non hai exemplos, dacordo co resultado de Montiel [44]. En [6] clasificáronse as hipersuperficies con curvaturas principais constantes no caso $g = 3$ atopando exemplos non Hopf. Posteriormente, probouse en [7] que toda hipersuperficie con curvaturas principais constantes con $g = 2$ en $\mathbb{C}H^2$ é Hopf.

Teorema 3.3.12. *Sexa M unha hipersuperficie real conexa en $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 2$, con exactamente tres curvaturas principais distintas. Entón, M é holomorficamente congruente a unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

(I) *un tubo de radio $r > 0$ ó redor dun $\mathbb{C}H^k$ totalmente xeodésico en $\mathbb{C}H^n$ para certo $k \in \{1, \ldots, n-2\}$,*

(II) *un tubo de radio $r \neq \log(2+\sqrt{3})$ ó redor dun $\mathbb{R}H^n$ totalmente xeodésico en $\mathbb{C}H^n$,*

(III) *a hipersuperficie minimal regrada $W^{2n-1} \subset \mathbb{C}H^n$ ou unha equidistante á mesma,*

(IV) *un tubo de radio $r = \log(2+\sqrt{3})$ ó redor dunha subvariedade minimal regrada $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$ para certo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Nos últimos anos houbo certos avances na clasificación das hipersuperficies non Hopf con curvaturas principais constantes. Díaz Ramos e Domínguez Vázquez clasificaron en [20] aquelas hipersuperficies con curvaturas principais que proxectan de xeito non trivial sobre exactamente sobre dous espazos de curvatura.

Teorema 3.3.13. *Sexa M unha hipersuperficie real conexa de $\mathbb{C}H^n$ ou de $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, con curvaturas principais constantes. Entón:*

- *Se $M \subset \mathbb{C}P^n$, entón $J\xi$ non pode ter proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura.*
- *Se $M \subset \mathbb{C}H^n$ e $J\xi$ ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura, entón $g \in \{3, 4\}$ e M é holomorficamente congruente a unha parte aberta de:*
  - *(se $g = 3$) a hipersuperficie regrada minimal $W^{2n-1} \subset \mathbb{C}H^n$, ou a unha das súas hipersuperficies equidistantes, ou a un tubo de radio $r = \log(2+\sqrt{3})$ ó redor dunha subvariedade minimal regrada $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$ para certo $k \in \{2, \ldots, n-1\}$.*
  - *(se $g = 4$) un tubo de radio $r \neq \log(2+\sqrt{3})$ ó redor da subvariedade minimal regrada $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$ para algún $k \in \{2, \ldots, n-1\}$.*

No caso proxectivo, a clasificación das hipersuperficies con curvaturas principais constantes e con $g \geq 4$ continúa a ser un problema aberto. O seguinte paso natural no estudo das hipersuperficies non Hopf con curvaturas principais constantes semella ser o estudo do caso no que as hipersuperficies proxectan exactamente sobre tres espazos de curvatura. A nosa aportación orixinal neste traballo pretende contribuír a avanzar nesta dirección, así como axudar a probar que unha hipersuperficie con curvaturas principais constantes nun espazo forma complexo é isoparamétrica.

Capítulo 4

Hipersuperficies non Hopf en espazos forma complexos

Neste capítulo desenvolvemos a demostración do resultado orixinal deste traballo. Denotaremos por $\overline{M}^n(c)$ o espazo forma complexo de curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$ e de dimensión real $2n$, con $n \geq 2$. É dicir, se $c > 0$ entón, $\overline{M}^n(c) = \mathbb{C}P^n(c)$ é o espazo proxectivo complexo con curvatura seccional holomorfa constante c, e se $c < 0$ entón $\overline{M}^n(c) = \mathbb{C}H^n(c)$ é o espazo hiperbólico complexo con curvatura seccional holomorfa constante c. A estrutura complexa de $\overline{M}^n(c)$ será denotada por J.

Sexa M unha hipersuperficie real conexa de $\overline{M}^n(c)$ con campo normal unitario ξ, definido en principio tan só localmente. Supoñamos que M ten g curvaturas principais constantes distintas, que denotaremos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$. Estudaremos o caso no que o vector $J\xi_p$ ten proxección non trivial sobre exactamente tres espazos de curvatura principais $T_{\lambda_1(p)}$, $T_{\lambda_2(p)}$ e $T_{\lambda_3(p)}$ para todo punto $p \in M$. Adicionalmente, supoñeremos que $\dim(T_{\lambda_i(p)}) = 1$ para $i = 1, 2, 3$. Diremos nese caso que M ten *multiplicidades de Hopf simples*. Posto que M é conexa e ten curvaturas principais constantes, e as funcións $\lambda_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas, séguese que λ_i é constante, para cada $i = 1, 2, 3$. Supoñamos que $J\xi = b_1U_1 + b_2U_2 + b_3U_3$, onde $U_i \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ son campos unitarios para cada $i = 1, 2, 3$ e b_i son funcións diferenciables sobre M estrictamente positivas, tales que $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$. O noso obxectivo será probar o seguinte:

Teorema Principal. *Sexa M unha hipersuperficie real conexa de $\mathbb{C}H^n$ ou de $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 3$, con $g = 4$ curvaturas principais constantes distintas e multiplicidades de Hopf simples. Entón:*

- *Se $M \subset \mathbb{C}P^n$, $J\xi$ non pode ter proxección non trivial sobre exactamente tres espazos de curvatura.*
- *Se $M \subset \mathbb{C}H^n$ e $J\xi$ ten proxección non trivial sobre exactamente tres espazos de curvatura, M é holomorficamente congruente a unha parte aberta dun tubo ó redor da subvariedade minimal regrada W_φ^{2n-2} para algún $\varphi \in (0, \pi/2)$.*

Nótese que o caso $n = 2$ xa fora estudiado en [7], polo tanto restrinxirémonos ó caso xeral, é dicir, $n \geq 3$.

Imos estruturar este capítulo do seguinte modo. En §4.1 ofreceremos unha breve descrición do exemplo que aparece no Teorema Principal. Máis tarde, en §4.2 deduciremos certas ecuacións que son válidas para calquera hipersuperficie con curvaturas principais constantes nun espazo forma complexo. A continuación, en §4.3 recolleremos certa información do espazo tanxente á nosa hipersuperficie traballando exclusivamente a nivel alxébrico. Posteriormente, en §4.4 probaremos que as proxeccións de Hopf son constantes. Por último, en §4.5 concluiremos a demostración do Teorema Principal empregando o Teorema 3.3.11 e o Corolario 3.3.7.

4.1. As subvariedades W^{2n-k} e W_{φ}^{2n-k}

En 1998, M. Lohnherr e Reckziegel [43] construíron un exemplo de hipersuperficie homoxénea en $\mathbb{C}H^n$ que non era Hopf: a hipersuperficie minimal regrada W^{2n-1} en $\mathbb{C}H^n$. Máis tarde, en 2001 J. Berndt e M. Brück xeneralizaron dita construción ás subvariedades minimais regradas W^{2n-k} e W_{φ}^{2n-k} en [4]. Posteriormente, J. Berndt e H. Tamaru probaron en [8] que os tubos e hipersuperficies equidistantes en torno ás subvariedades W^{2n-k} e W_{φ}^{2n-k} son os únicos exemplos non clásicos de hipersuperficie homoxéneas no espazo hiperbólico complexo. Nesta sección imos construír as subvariedades minimais regradas W^{2n-k} e W_{φ}^{2n-k} de $\mathbb{C}H^n$.

Para unha descrición máis detallada, pódese consultar [5] ou [23]. Seguiremos a notación empregada en §2.5.4. Sexa $\mathfrak{m}$ un subespazo vectorial de $\mathfrak{g}_{\alpha}$ tal que $\mathfrak{m}^{\perp} = \mathfrak{g}_{\alpha} \ominus \mathfrak{m}$ ten ángulo de Kähler constante $\varphi \in [0, \pi/2]$. Entón, $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ é unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Sexa S o subgrupo conexo de AN con álxebra de Lie $\mathfrak{s}$. Como $\mathrm{Exp}_{|\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}} \colon \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \longrightarrow AN$ é un difeomorfismo, tense que S é simplemente conexo e pechado en AN.

Definimos $W_{\varphi}^{2n-k} = S \cdot o$, que é unha subvariedade $(2n-k)$-dimensional de $\mathbb{C}H^n$, onde $k = \dim \mathfrak{m}^{\perp}$ e $o \in \mathbb{C}H^n$ ten grupo de isotropía $S(U(1)U(n))$ baixo a acción de $SU(1, n)$.

Se $\varphi = 0$, isto é, $\mathfrak{m}^{\perp}$ é un subespazo complexo de $\mathfrak{g}_{\alpha}$, entón W_0^{2n-k} é un subespazo hiperbólico complexo totalmente xeodésico $\mathbb{C}H^{n-k'}$, onde $k = 2k'$. Neste caso estamos ante un exemplo clásico.

Se $\varphi = \pi/2$, entón $\mathfrak{m}^{\perp}$ é un subespazo k-dimensional real de $\mathfrak{g}_{\alpha}$. Se $k = 1$, a hipersuperficie correspondente $W_{\pi/2}^{2n-1}$ denotarémola por W^{2n-1} e coincide coa atopada por Lohnherr en [43]. Se $k > 1$, entón $W_{\pi/2}^{2n-k}$ é unha subvariedade de dimensión $2n-k$ con fibrado normal totalmente real e de rango k. Escribiremos nese caso W^{2n-k}.

Se $0 < \varphi < \pi/2$, tense que k é par (ver [4]) e W_{φ}^{2n-k} é unha subvariedade de dimensión $2n-k$ de $\mathbb{C}H^n$ tal que o seu fibrado normal ten rango k e ángulo de Kähler constante φ. Pódese comprobar que a construción destas subvariedades non depende da escolla da descomposición de Iwasawa de G, é dicir, todas as posibles escollas producen subvariedades holomorficamente congruentes entre si.

En [4] probouse que as subvariedades W^{2n-k} e W_{φ}^{2n-k} son órbitas de accións de cohomoxeneidade un en $\mathbb{C}H^n$, polo cal estas accións dan lugar a hipersuperficies homoxéneas en $\mathbb{C}H^n$. A idea da demostración é a seguinte. Sexa $N^0_K(S)$ a compoñente conexa da identidade do normalizador de S en K, $N_K(S) = \{k \in K : kSk^{-1} \subset S\}$, que está formada por elementos de K que fixan $S \cdot o$. Polo tanto, $S \cdot o$ é unha órbita da acción de $N^0_K(S)S$ sobre $\mathbb{C}H^n$. Ademais, $N^0_K(S)$ deixa invariante á esfera unidade de cada espazo normal a $S \cdot o$.

Por último, resulta que a acción de $N^0_K(S)S$ sobre $\mathbb{C}H^n$ é de cohomoxeneidade un, pois $N^0_K(S)$ actúa transitivamente na esfera unidade de $\nu_o(S \cdot o)$. Isto último pódese consultar en [4].

Ademais, W^{2n-k}_φ é unha subvariedade regrada e minimal de $\mathbb{C}H^n$. Unha proba deste feito pode ser atopada en [5].

4.2. Ecuacións dunha hipersuperficie nun espazo forma complexo

Nesta sección incluíremos unha serie de resultados que xa foran probados en [20] e que se basean en observacións de casos particulares da ecuación de Gauss e de Codazzi para hipersuperficies con curvaturas principais constantes en espazos forma complexos.

Lema 4.2.1. *Para todo* $X \in \Gamma(T_{\lambda_i}M), Y \in \Gamma(T_{\lambda_j}M)$ *e* $Z \in \Gamma(T_{\lambda_k}M)$ *temos que*

$$\overline{R}_{XYZ\xi} = (\lambda_j - \lambda_k)\langle \nabla_X Y, Z\rangle - (\lambda_i - \lambda_k)\langle \nabla_Y X, Z\rangle.$$

Demostración. Lembremos que pola ecuación de Codazzi, temos que

$$\overline{R}_{XYZ\xi} = \langle (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X, Z\rangle = \langle \nabla_X SY - S\nabla_X Y - \nabla_Y SX + S\nabla_Y X, Z\rangle.$$

Pero por ser $X \in \Gamma(T_{\lambda_i}), Y \in \Gamma(T_{\lambda_j})$ e $Z \in \Gamma(T_{\lambda_k})$ e ter M curvaturas principais constantes,

$$\overline{R}_{XYZ\xi} = (\lambda_j - \lambda_k)\langle \nabla_X Y, Z\rangle - (\lambda_i - \lambda_k)\langle \nabla_Y X, Z\rangle. \qquad \square$$

Corolario 4.2.2. *Se* $X, Y \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ *e* $Z \in \Gamma(T_{\lambda_j})$ *con* $\lambda_i \neq \lambda_j$*, tense que*

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{c}{4(\lambda_i - \lambda_j)}(\langle JY, Z\rangle\langle X, J\xi\rangle + \langle JX, Y\rangle\langle Z, J\xi\rangle + 2\langle JX, Z\rangle\langle Y, J\xi\rangle).$$

Demostración. Usando o Lema 4.2.1, tense que

$$\overline{R}_{XYZ\xi} = (\lambda_i - \lambda_j)\langle \nabla_X Y, Z\rangle.$$

Empregando a Proposición 2.5.3, tense que

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{c}{4(\lambda_i - \lambda_j)}(\langle JY, Z\rangle\langle X, J\xi\rangle + \langle JX, Y\rangle\langle Z, J\xi\rangle + 2\langle JX, Z\rangle\langle Y, J\xi\rangle). \qquad \square$$

Lema 4.2.3. *Sexan* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *e* $X \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ *e* $Y \in \Gamma(T_{\lambda_j})$ *unitarios. Entón,*

$$\begin{aligned}
0 = {} & (\lambda_j - \lambda_i)(-c - 4\lambda_i\lambda_j - 2c\langle JX, Y\rangle^2 + 8\langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle - 4\langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle) \\
& - 4c\langle JX, Y\rangle(X\langle Y, J\xi\rangle + Y\langle X, J\xi\rangle) \\
& - c\langle X, J\xi\rangle(3Y\langle JX, Y\rangle + \langle \nabla_Y X, JY\rangle - 2\langle \nabla_X Y, JY\rangle) \\
& - c\langle Y, J\xi\rangle(3X\langle JX, Y\rangle + \langle \nabla_X Y, JX\rangle + 2\langle \nabla_Y X, JX\rangle).
\end{aligned}$$

Demostración. Da ecuación de Gauss obtemos que:

$$R(X,Y,Y,X) = \lambda_i\lambda_j + \frac{c}{4} + \frac{3c}{4}\langle JX, Y\rangle^2.$$

Pero pola propia definición do tensor de curvatura de M temos que

$$\begin{aligned} R(X,Y,Y,X) =& X\langle \nabla_Y Y, X\rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle - Y\langle \nabla_X Y, X\rangle \\ &+ \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Y, X\rangle. \end{aligned}$$

Agora polo Lema 4.2.2

$$\begin{aligned} X\langle \nabla_Y Y, X\rangle &= \frac{3c}{4(\lambda_i - \lambda_j)}(\langle Y, J\xi\rangle X\langle JX, Y\rangle + \langle JX, Y\rangle X\langle Y, J\xi\rangle), \\ Y\langle \nabla_X Y, X\rangle &= \frac{3c}{4(\lambda_j - \lambda_i)}(\langle X, J\xi\rangle Y\langle JX, Y\rangle + \langle JX, Y\rangle Y\langle X, J\xi\rangle). \end{aligned}$$

A ecuación de Codazzi, o carácter autoadxunto do operador forma e a identidade alxébrica de Bianchi, permítennos escribir:

$$(\lambda_j - \lambda_i)\langle \nabla_{[X,Y]} Y, X\rangle = (\lambda_i - \lambda_j)\langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle + \overline{R}(\nabla_X Y, Y, X, \xi) + \overline{R}(X, \nabla_Y X, Y, \xi).$$

Agora a Proposición 2.5.3 xunto coa ecuación de Weingarten implican:

$$\begin{aligned} \overline{R}(\nabla_X Y, Y, X, \xi) + \overline{R}(X, \nabla_Y X, Y, \xi) = \frac{c}{4}(&(\lambda_i - \lambda_j)\langle JX, Y\rangle^2 \\ &+ \langle JX, Y\rangle(X\langle Y, J\xi\rangle + Y\langle X, J\xi\rangle) \\ &+ \langle X, J\xi\rangle(\langle \nabla_Y X, JY\rangle - 2\langle \nabla_X Y, JY\rangle) \\ &- \langle Y, J\xi\rangle(\langle \nabla_X Y, JX\rangle - 2\langle \nabla_Y X, JX\rangle)). \end{aligned}$$

Poñendo todo xunto concluímos a demostración do lema. □

4.3. Lema alxébrico

O feito de que para cada $p \in M$ o vector $J\xi_p$ teña proxeccións non triviais sobre exactamente tres espazos de curvatura principais permite deducir certa información sobre o noso problema traballando exclusivamente a nivel alxébrico en $T_p\overline{M}^n(c)$. Imos supoñer que M ten $g = 4$ curvaturas principais e multiplicidades de Hopf simples.

Lema 4.3.1. *Sexa $p \in M$ tal que $J\xi_p = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$ para certos vectores unitarios $u_i \in T_{\lambda_i(p)}$ e certos números reais $b_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Entón, existen $a_1, a_2, a_3 \in T_{\lambda_4(p)}$ unitarios e $r_i \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$ tales que*

$$Ju_i = sb_{i+2}u_{i+1} - sb_{i+1}u_{i+2} + r_ia_i - b_i\xi,$$

onde temos tomado índices módulo tres. Ademais, se $s \neq \pm 1$, entón

$$r_i^2 = (1 - s^2)(1 - b_i^2),$$

$$Ja_i = -r_i u_i + \frac{(1-s^2)b_i b_{i+1}}{r_i} u_{i+1} + \frac{(1-s^2)b_i b_{i+2}}{r_i} u_{i+2} - \frac{s b_{i+2} r_{i+1}}{r_i} a_{i+1} + \frac{s b_{i+1} r_{i+2}}{r_i} a_{i+2},$$

onde temos tomado índices módulo tres. Ademais, se $i \neq j$

$$\langle a_i, a_j \rangle = (s^2 - 1)\frac{b_i b_j}{r_i r_j},$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. En particular, o subespazo de $T_p\overline{M}^n(c)$

$$\mathbb{R}\xi_p \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}u_3 \oplus V$$

é complexo, onde V denota o subespazo de dimensión dous de $T_{\lambda_4(p)}$ que está $\mathbb{R}$-xerado por a_1, a_2 e a_3.

Por outra banda, se $s = \pm 1$, tense que

$$Ju_i = s b_{i+2} u_{i+1} - s b_{i+1} u_{i+2} - b_i \xi,$$

para cada $i = 1, 2, 3$. En particular, o subespazo de $T_p\overline{M}^n(c)$

$$\mathbb{R}\xi_p \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}u_3$$

é complexo.

Demostración. Dacordo coas nosas hipóteses podemos asumir sen perda de xeneralidade que existen $a_i \in T_{\lambda_4(p)}$ unitarios tales que

$$Ju_i = \langle Ju_i, u_{i+1}\rangle u_{i+1} + \langle Ju_i, u_{i+2}\rangle u_{i+2} + r_i a_i - b_i \xi_p,$$

onde $r_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$.

Usando que J é a estrutura complexa de $\overline{M}^n(c)$, tense que

$$\begin{aligned} -\xi_p = J\left(\sum_{i=1}^{3} b_i u_i\right) &= b_1\langle Ju_1, u_2\rangle u_2 + b_1\langle Ju_1, u_3\rangle u_3 + b_1 r_1 a_1 - b_1^2 \xi_p \\ &+ b_2\langle Ju_2, u_1\rangle u_1 + b_2\langle Ju_2, u_3\rangle u_3 + b_2 r_2 a_2 - b_2^2 \xi_p \\ &+ b_3\langle Ju_3, u_1\rangle u_1 + b_3\langle Ju_3, u_2\rangle u_2 + b_3 r_3 a_3 - b_3^2 \xi_p. \end{aligned}$$

Deste xeito, temos o seguinte sistema de ecuacións lineais nas variables $\langle Ju_i, u_j\rangle$ con $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} -b_2\langle Ju_1, u_2\rangle + b_3\langle Ju_3, u_1\rangle = 0 \\ -b_3\langle Ju_2, u_3\rangle + b_1\langle Ju_1, u_2\rangle = 0 \\ -b_1\langle Ju_3, u_1\rangle + b_2\langle Ju_2, u_3\rangle = 0. \end{cases}$$

Definindo $s = \frac{\langle Ju_3, u_1\rangle}{b_2}$, tense que $\langle Ju_1, u_2\rangle = s b_3$ e $\langle Ju_2, u_3\rangle = s b_1$. Agora aproveitando as relacións de ortonormalidade entre Ju_i e Ju_j con $i, j = 1, 2, 3$, temos que

$$1 = \langle Ju_i, Ju_i\rangle = s^2 b_{i+1}^2 + s^2 b_{i+2}^2 + r_i^2 + b_i^2,$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Polo tanto, $r_i^2 = (1 - b_i^2)(1 - s^2)$. Notemos que $r_i = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$, se e só se $s = \pm 1$. Polo tanto, no caso de que $s = \pm 1$,

$$Ju_i = \langle Ju_i, u_{i+1}\rangle u_{i+1} + \langle Ju_i, u_{i+2}\rangle u_{i+2} - b_i\xi_p,$$

Supoñamos que $s \neq \pm 1$. Se $i \neq j$, tense que

$$0 = \langle Ju_i, Ju_j\rangle = -s^2 b_i b_j + r_i r_j \langle a_i, a_j\rangle + b_i b_j.$$

Deste xeito,

$$\langle a_i, a_j\rangle = -\frac{b_i b_j(1 - s^2)}{r_i r_j}.$$

Por último, tense que

$$-u_i = J(Ju_i) = sb_{i+2}Ju_{i+1} - sb_{i+1}Ju_{i+2} + r_i Ja_i - b_i J\xi,$$

Polo tanto, empregando que $J(\xi) = \sum_{i=1}^{3} b_i u_i$ e as expresións obtidas para $J(u_i)$, temos que para $i = 1, 2, 3$

$$Ja_i = -r_i u_i - \frac{(s^2 - 1)b_i b_{i+1}}{r_i} u_{i+1} - \frac{(s^2 - 1)b_i b_{i+2}}{r_i} u_{i+2} - \frac{sb_{i+2} r_{i+1}}{r_i} a_{i+1} + \frac{sb_{i+1} r_{i+2}}{r_i} a_{i+2},$$

onde temos tomado índices módulo tres. Ademais, grazas as relacións obtidas podemos ver que a_i pode ser expresado como combinación lineal de a_{i+1} e a_{i+2} pero non é un múltiplo escalar de ningún deles. Polo tanto, o espazo $\mathbb{R}$-xerado por a_1, a_2, a_3 ten dimensión real 2. Deste xeito, tense que o subespazo

$$\mathbb{R}\xi_p \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}u_3 \oplus (\mathbb{R}a_1 + \mathbb{R}a_2 + \mathbb{R}a_3)$$

é complexo. □

A partir de aquí grazas ó Lema 4.3.1 deixaremos de traballar de xeito puntual para traballar localmente. No que segue denotaremos con maiúsculas os campo de vectores asociados ós vectores tanxentes involucrados no Lema 4.3.1. Ademais, denotaremos por V a distribución xerada por A_1, A_2 e A_3.

4.4. A constancia das proxeccións do campo de Hopf

O seguinte paso na demostración será probar que as funcións $b_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes para cada $i = 1, 2, 3$. Para isto, comecemos probando dous lemas que nos serán útiles en cálculos posteriores.

Lema 4.4.1. *Para $i \in \{1, 2, 3\}$ satisfanse as seguintes relacións*

$$U_i(b_i) = \frac{3cs(\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2})b_i b_{i+1} b_{i+2}}{4(\lambda_i - \lambda_{i+1})(\lambda_i - \lambda_{i+2})},$$

onde temos tomado índices módulo tres.

Demostración. Usando que $\overline{\nabla} J = 0$, xa que $\overline{M}^n(c)$ é unha variedade de Kähler, e que $\langle \nabla_{U_i} U_i, U_i \rangle = 0$, por ser U_i unitario, tense que

$$\begin{aligned}U_i(b_i) &= U_i\langle J\xi, U_i\rangle = \langle \overline{\nabla}_{U_i} J\xi, U_i\rangle + \langle J\xi, \nabla_{U_i} U_i\rangle \\ &= \langle J\overline{\nabla}_{U_i}\xi, U_i\rangle + b_i\langle U_i, \nabla_{U_i} U_i\rangle + b_{i+1}\langle U_{i+1}, \nabla_{U_i} U_i\rangle + b_{i+2}\langle U_{i+2}, \nabla_{U_i} U_{i+2}\rangle \\ &= \langle SU_i, JU_i\rangle + b_i\langle U_i, \nabla_{U_i} U_i\rangle + b_{i+1}\langle U_{i+1}, \nabla_{U_i} U_i\rangle + b_{i+2}\langle U_{i+2}, \nabla_{U_i} U_{i+2}\rangle.\end{aligned}$$

Calculando as expresións do tipo $\langle U_{i+1}, \nabla_{U_i} U_i\rangle$ mediante o Lema 4.2.2 e tendo en conta que U_i é unitario e polo tanto $\langle U_i, \nabla_{U_i} U_i\rangle = 0$, obtemos

$$U_i(b_i) = \frac{3cs(\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}) b_i b_{i+1} b_{i+2}}{4(\lambda_i - \lambda_{i+1})(\lambda_i - \lambda_{i+2})}. \qquad \square$$

Lema 4.4.2. *Para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ satisfanse as seguintes relacións*

$$U_i(b_j) = b_k\left(\phi_{i,j} s\lambda_i + \langle U_k, \nabla_{U_i} U_j\rangle + \phi_{i,j}\frac{3csb_i^2}{4(\lambda_i - \lambda_j)}\right),$$

onde i, j, k son distintos e

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i - j \equiv 1 \mod 3 \\ -1, & \text{se } i - j \equiv 2 \mod 3. \end{cases}$$

Demostración. Fagamos a demostración para o caso $i = 1$ e $j = 2$, pois o resto dos cálculos son análogos.

$$\begin{aligned}U_1(b_2) &= U_1\langle J\xi, U_2\rangle = \langle J\overline{\nabla}_{U_1}\xi, U_2\rangle + \langle J\xi, \overline{\nabla}_{U_1} U_2\rangle = \langle \mathcal{S}U_1, JU_2\rangle + \langle J\xi, \nabla_{U_1} U_2\rangle \\ &= \lambda_1\langle U_1, JU_2\rangle + b_1\langle U_1, \nabla_{U_1} U_2\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{U_1} U_2\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{U_1} U_2\rangle.\end{aligned}$$

Agora usando o Lema 4.3.1 para calcular $\langle U_1, JU_2\rangle$ e o Lema 4.2.2 para calcular $\langle U_1, \nabla_{U_1} U_2\rangle$ e tendo en conta que $\langle U_2, \nabla_{U_1} U_2\rangle$ é nulo por ser U_2 unitario, obtemos que

$$U_1(b_2) = b_3\left(-s\lambda_1 + \langle U_3, \nabla_{U_1} U_2\rangle - \frac{3csb_1^2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)}\right). \qquad \square$$

Imos dividir a proba da constancia das funcións $b_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ en tres casos distintos: $s = \pm 1$, $s = 0$ e $s \neq \pm 1, 0$. Comecemos polo caso $s = \pm 1$.

4.4.1. Caso $s = \pm 1$

Observemos que se $n \geq 3$, a dimensión real de M é polo menos 5. Polo Lema 4.3.1, se $s = \pm 1$, JU_i non ten proxección en $T_{\lambda_4(p)}$. Polo tanto, para cada $n \geq 3$ podemos escoller un espazo complexo de dimensión real dous xerado por certo vector unitario $z \in T_{\lambda_4(p)}$.

Lema 4.4.3. *As funcións $b_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, 3$, satisfán a seguinte ecuación*

$$\frac{b_1^2}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_4 - \lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_4 - \lambda_3} = 4\frac{\lambda_4}{c}.$$

Demostración. Sexa $Z \in T_{\lambda_4}$, tal que $JZ \in T_{\lambda_4}$. Tense que $\langle J\xi, Z\rangle = 0$. Usando que $\overline{M}^n(c)$ é unha variedade de Kähler, e polo tanto $\overline{\nabla} J = 0$, e que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é hermitiana, temos que

$$\begin{aligned}0 = JZ\langle J\xi, Z\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{JZ} J\xi, Z\rangle + \langle J\xi, \nabla_{JZ} Z\rangle = -\langle\overline{\nabla}_{JZ}\xi, JZ\rangle + \langle J\xi, \nabla_{JZ} Z\rangle\\ &= \langle \mathcal{S} JZ, JZ\rangle + b_1\langle U_1, \nabla_{JZ} Z\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{JZ} Z\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{JZ} Z\rangle\\ &= \lambda_4 + b_1\langle U_1, \nabla_{JZ} Z\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{JZ} Z\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{JZ} Z\rangle.\end{aligned}$$

O Lema 4.2.2 permítenos calcular as expresións do tipo $\langle U_i, \nabla_{JZ} Z\rangle$, con $i = 1, 2, 3$, pois $Z, JZ \in T_{\lambda_4}$. Deste xeito chegamos á ecuación

$$\frac{b_1^2 c}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{b_2^2 c}{\lambda_4 - \lambda_2} + \frac{b_3^2 c}{\lambda_4 - \lambda_3} - 4\lambda_4 = 0. \qquad \square$$

Lema 4.4.4. *Se $s = \pm 1$ e $i \in \{1, 2, 3\}$ tense que*

$$\langle\nabla_{U_i} U_{i+1}, U_{i+2}\rangle = s\lambda_i + \frac{3csb_i^2}{4(\lambda_i - \lambda_4)},$$

onde temos tomado índices módulo tres.

Demostración. Polo Lema 4.4.3, tense que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ a seguinte expresión é nula

$$U_i\left(\frac{b_i^2}{\lambda_i - \lambda_4} + \frac{b_{i+1}^2}{\lambda_{i+1} - \lambda_4} + \frac{b_{i+2}^2}{\lambda_{i+2} - \lambda_4}\right) = \frac{2b_i c U_i(b_i)}{\lambda_i - \lambda_4} + \frac{2b_{i+1} c U_i\,(b_{i+1})}{\lambda_{i+1} - \lambda_4} + \frac{2b_{i+2} c U_i\,(b_{i+2})}{\lambda_{i+2} - \lambda_4}.$$

Agora polo Lema 4.4.1 e polo Lema 4.4.2 chegamos á ecuación

$$4(\lambda_i - \lambda_4)(\lambda_{i+2} - \lambda_{i+1})\,\langle U_{i+2}, \nabla_{U_i} U_{i+1}\rangle + s(\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2})\left(4\lambda_i(\lambda_i - \lambda_4) + 3b_i^2 c\right) = 0.$$

Polo tanto,

$$\langle\nabla_{U_i} U_{i+1}, U_{i+2}\rangle = s\lambda_i + \frac{3csb_i^2}{4(\lambda_i - \lambda_4)}. \qquad \square$$

Proposición 4.4.5. *Se $s = \pm 1$, tense que $b_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante para cada $i = 1, 2, 3$.*

Demostración. En primeiro lugar dado que $U_i \perp U_j$, para cada $i \neq j$, pola Proposición 2.5.3

$$\overline{R}(U_1, U_2, U_3, \xi) = \frac{c}{4}\Big(\langle JU_1, U_3\rangle\langle JU_1, \xi\rangle - \langle JU_1, U_3\rangle\langle JU_2, \xi\rangle - 2\langle JU_1, U_2\rangle\langle JU_3, \xi\rangle\Big).$$

Agora, polo Lema 4.3.1, temos que

$$\overline{R}(U_1, U_2, U_3, \xi) = \frac{cs(b_1^2 + b_2^2 - 2b_3^2)}{4}.$$

Empregando o Lema 4.2.1 e o Lema 4.4.4, chegamos á ecuación

$$\frac{-\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4} b_1^2 + \frac{-3\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} b_2^2 + 2b_3^2 = s\frac{8\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_3 - 4\lambda_2\lambda_3}{c}.$$

Polo tanto, usando a ecuación obtida no Lema 4.4.3 e a relación $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = 1$, obtemos un sistema de 3 ecuacións lineais nas variables b_i^2, con $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ \frac{1}{\lambda_4-\lambda_1} b_1^2 + \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} b_2^2 + \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} b_3^2 = 4\frac{\lambda_4}{c} \\ \frac{-\lambda_1-3\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_4} b_1^2 + \frac{-3\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4} b_2^2 + 2b_3^2 = s\frac{8\lambda_1\lambda_2-4\lambda_1\lambda_3-4\lambda_2\lambda_3}{c}. \end{cases}$$

O sistema anterior ten por matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_4-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \\ \frac{3\lambda_3+\lambda_4-\lambda_1-3\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_4} & \frac{3\lambda_3+\lambda_4-3\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_4} & 2 \end{pmatrix}.$$

Se o determinante desta matriz é distinto de 0, o sistema sería compatible determinado polo que teriamos probado que b_i é constante para cada $i = 1, 2, 3$, por ser a solución dun sistema de ecuacións lineais con coeficientes constantes. Se o determinante fose 0 teriamos o seguinte

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_4-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \\ \frac{3\lambda_3+\lambda_4-\lambda_1-3\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_4} & \frac{3\lambda_3+\lambda_4-3\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_4} & 2 \end{vmatrix} = \frac{3(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}.$$

Polo tanto, $\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \overline{R}(U_2, U_3, U_1, \xi) &= \frac{cs}{4}\Big(\langle JU_3, U_1\rangle\langle JU_2, \xi\rangle - \langle JU_2, U_1\rangle\langle JU_3, \xi\rangle - 2\langle JU_2, U_3\rangle\langle JU_1, \xi\rangle\Big) \\ &= \frac{cs(b_2^2 + b_3^2 - 2b_1^2)}{4}. \end{aligned}$$

Entón, usando o Lema 4.2.1 e o Lema 4.4.4 chegamos á ecuación

$$2b_1^2 + \frac{3\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} b_2^2 + \frac{3\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} b_3^2 = 4s\frac{4\lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 - 8\lambda_2\lambda_3}{c}.$$

De novo usando a ecuación obtida no Lema 4.4.20 e a relación $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = 1$, obtemos un sistema de 3 ecuacións lineais nas variables b_i^2, con $i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ \frac{b_1^2}{\lambda_4-\lambda_1} b_1^2 + \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} b_2^2 + \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} b_3^2 = 4\frac{\lambda_4}{c} \\ 2b_1^2 + \frac{3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4} b_2^2 + \frac{3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_3-\lambda_4} b_3^2 = 4s\frac{4\lambda_1\lambda_3-\lambda_1\lambda_2-8\lambda_2\lambda_3}{c}. \end{cases}$$

O sistema anterior ten por matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_4-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \\ 2 & \frac{3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4} & \frac{3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_3-\lambda_4} \end{pmatrix}$$

Pero se este determinante fose 0 teríamos que

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_4-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \\ 2 & \frac{3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4} & \frac{3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4}{\lambda_3-\lambda_4} \end{vmatrix} = \frac{3(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}.$$

Polo tanto, necesariamente $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, pero isto entra en contradición con que $\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Pois nese caso, $\lambda_1 = \lambda_3$. Entón, un dos dous determinantes ha de ser non nulo e polo tanto as aplicacións $b_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes para $i = 1, 2, 3$. □

4.4.2. Caso $s = 0$

A continuación estudamos o caso $s = 0$. Resulta que se $n \geq 4$ hai un argumento relativamente sinxelo usando as ecuacións de Gauss e Codazzi pero para atacar o caso $n = 3$ será preciso empregar un argumento que fai uso do Teorema B.0.5.

Caso $s = 0$ e $n \geq 4$

Se $n \geq 4$, a dimensión real de M é polo menos 7. Polo tanto, podemos escoller un subespazo complexo W de dimensión real 2 en $T_{\lambda_4(p)}$ ortogonal a V_p xerado por certo vector unitario $Z_p \in T_{\lambda_4(p)}$ tal que $JZ_p \in W$.

Lema 4.4.6. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$,*

$$\langle \nabla_Z A_i, Z \rangle = \frac{cb_i}{4}\left(\frac{r_i}{\lambda_4 - \lambda_i} + \frac{b_{i+1}^2}{r_i(\lambda_{i+1} - \lambda_4)} + \frac{b_{i+2}^2}{r_i(\lambda_{i+2} - \lambda_4)} \right),$$

para cada $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Sexa $Z \in T_{\lambda_4}$ tal que $\langle Z, A_i \rangle = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$. Polo tanto, $JZ \in T_{\lambda_4}$. Como $\overline{M}^n(c)$ é unha variedade de Kähler, tense que $\overline{\nabla} J = 0$ e que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é hermitiana. Polo tanto,

$$0 = Z\langle Z, A_i \rangle = \langle \overline{\nabla}_Z Z, A_i \rangle + \langle Z, \overline{\nabla}_Z A_i \rangle = \langle \nabla_Z JZ, JA_i \rangle + \langle Z, \nabla_Z A_i \rangle.$$

Como $Z, JZ \in T_{\lambda_4}$, podemos usar o Lema 4.2.2 para calcular $\langle \nabla_Z JZ, JA_i \rangle$. Polo tanto, obtemos

$$\langle \nabla_Z A_i, Z \rangle = \frac{cb_i}{4}\left(\frac{r_i}{\lambda_4 - \lambda_i} + \frac{b_{i+1}^2}{r_i(\lambda_{i+1} - \lambda_4)} + \frac{b_{i+2}^2}{r_i(\lambda_{i+2} - \lambda_4)} \right),$$

para cada $i = 1, 2, 3$. □

Lema 4.4.7. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$,*

$$\frac{b_1^2}{\lambda_1 - \lambda_4} + \frac{b_2^2}{\lambda_2 - \lambda_4} + \frac{b_3^2}{\lambda_3 - \lambda_4} = -\frac{4\lambda_4}{c}.$$

Demostración. Do feito de que $J\xi \perp Z$ e de que $\overline{M}^n(c)$ sexa unha variedade de Kähler, tense que

$$
\begin{aligned}
0 &= JZ\langle J\xi, Z\rangle = \langle \overline{\nabla}_{JZ} J\xi, Z\rangle + \langle J\xi, \nabla_{JZ} Z\rangle = -\langle \overline{\nabla}_{JZ}\xi, JZ\rangle + \langle J\xi, \nabla_{JZ} Z\rangle \\
&= \langle \mathcal{S}JZ, JZ\rangle + \langle J\xi, \nabla_{JZ} Z\rangle = \lambda_4 + b_1\langle U_1, \nabla_{JZ} Z\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{JZ} Z\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{JZ} Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Mediante o Lema 4.2.2, podemos calcular as expresións do tipo $\langle U_i, \nabla_{JZ} Z\rangle$, onde $i = 1, 2, 3$, xa que $Z, JZ \in T_{\lambda_4}$. Deste xeito chegamos á ecuación

$$
0 = \lambda_4 + \frac{cb_1^2}{4(\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{cb_2^2}{4(\lambda_2 - \lambda_4)} + \frac{cb_3^2}{4(\lambda_3 - \lambda_4)}. \qquad \square
$$

Lema 4.4.8. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$, temos que*

$$
\langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle = \frac{cb_i}{4(\lambda_i - \lambda_4)}.
$$

Demostración. Reparemos no feito de que $JZ \perp U_i$. Polo tanto, usando que $\overline{\nabla} J = 0$ e que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é hermitiana, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= Z\langle JZ, U_i\rangle = \langle \nabla_Z JZ, U_i\rangle + \langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle = -\langle \overline{\nabla}_Z Z, JU_i\rangle + \langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle \\
&= -\langle \nabla_Z Z, JU_i\rangle - \langle II(Z,Z), JU_i\rangle + \langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle = -r_i\langle \nabla_Z Z, A_i\rangle - \lambda_4\lambda_i + \langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle.
\end{aligned}
$$

Agora usando o Lema 4.4.6 podemos calcular $\langle \nabla_Z Z, A_i\rangle$. Deste xeito, obtemos

$$
\langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle = -\frac{1}{4} b_i \left(\frac{b_1^2 c}{\lambda_i - \lambda_4} + \frac{b_2^2 c}{\lambda_2 - \lambda_4} + \frac{b_3^2 c}{\lambda_3 - \lambda_4} + 4\lambda_4 - \frac{c}{\lambda_1 - \lambda_4} \right).
$$

Pero polo Lema 4.4.7, tense que $\frac{b_1^2 c}{\lambda_i - \lambda_4} + \frac{b_2^2 c}{\lambda_2 - \lambda_4} + \frac{b_3^2 c}{\lambda_3 - \lambda_4} + 4\lambda_4 = 0$, logo

$$
\langle JZ, \nabla_Z U_i\rangle = \frac{cb_i}{4(\lambda_i - \lambda_4)}. \qquad \square
$$

Lema 4.4.9. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$, tense que*

$$
\nabla_{U_i} U_i = \frac{3cb_i r_i}{4(\lambda_i - \lambda_4)} A_i.
$$

Demostración. Sexa $i \in \{1, 2, 3\}$. Usando o Lema 4.2.2, podemos ver que

$$
\langle \nabla_{U_i} U_i, U_j\rangle = 0,
$$

para cada $j = 1, 2, 3$. Consideremos $V = \mathbb{R}A_1 + \mathbb{R}A_2 + \mathbb{R}A_3$. Sexa $Z \in T_{\lambda_4} \ominus V$, entón usando o Lema 4.2.2, podemos ver que

$$
\langle \nabla_{U_i} U_i, Z\rangle = 0.
$$

De novo polo Lema 4.2.2, se $i \neq j$, temos

$$\langle \nabla_{U_i} U_i, A_i \rangle = \frac{3cb_i r_i}{4(\lambda_i - \lambda_4)}, \tag{4.1}$$

$$\langle \nabla_{U_i} U_i, A_j \rangle = -\frac{3cb_j b_i^2}{4(\lambda_i - \lambda_4) r_j}. \tag{4.2}$$

Por outra banda, se consideramos o vector $A_i' := A_j - \langle A_i, A_j \rangle A_i$ que é ortogonal a A_i, temos polo Lema 4.2.2

$$\langle \nabla_{U_i} U_i, A_i' \rangle = \langle \nabla_{U_i} U_i, A_j \rangle - \langle \nabla_{U_i} U_i, A_i \rangle \langle A_i, A_j \rangle = 0.$$

Onde temos usado as expresións (4.1), (4.2) e o Lema 4.3.1. Mais, polo Lema 4.3.1, tense que V é un subespazo vectorial real de dimensión 2 de T_{λ_4}. Polo tanto, temos que

$$\nabla_{U_i} U_i = \frac{3cb_i r_i}{4(\lambda_i - \lambda_4)} A_i. \qquad \square$$

Lema 4.4.10. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$, dado $Z \in T_{\lambda_4} \ominus V$, tense que*

$$\langle U_i, \nabla_{U_j} Z \rangle = 0,$$

para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. En primeiro lugar observemos que polo Lema 4.2.2, se $Z \in T_{\lambda_4} \ominus V$, se ten que $\langle \nabla_{U_i} U_i, Z \rangle = 0$. Polo tanto, $\langle U_i, \nabla_{U_i} Z \rangle = 0$. Agora usando que $J\xi \perp Z$ e que $\overline{\nabla} J = 0$,

$$\begin{aligned} 0 = U_i \langle J\xi, Z \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{U_i} J\xi, Z \rangle + \langle J\xi, \nabla_{U_i} Z \rangle = \langle SU_i, JZ \rangle + \langle J\xi, \nabla_{U_i} Z \rangle \\ &= \lambda_i \langle U_i, JZ \rangle + b_i \langle U_i, \nabla_{U_i} Z \rangle + b_{i+1} \langle U_{i+1}, \nabla_{U_i} Z \rangle + b_{i+2} \langle U_{i+2}, \nabla_{U_i} Z \rangle, \end{aligned}$$

onde temos tomado subíndices módulo tres. Polo Lema 4.3.1 e polo Lema 4.2.2,

$$\lambda_i \langle U_i, JZ \rangle = b_i \langle \nabla_{U_i} U_i, Z \rangle = 0.$$

Deste xeito temos para cada $i = 1, 2, 3$ a seguinte ecuación

$$b_{i+1} \langle U_{i+1}, \nabla_{U_i} Z \rangle + b_{i+2} \langle U_{i+2}, \nabla_{U_i} Z \rangle = 0,$$

onde temos tomado índices módulo tres. Por outra banda, usando a Proposición 2.5.3, como $Z \in T_{\lambda_4} \ominus V$, temos que

$$\overline{R}(U_i, U_j, Z, \xi) = 0,$$

para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Deste xeito, o Lema 4.2.1 aporta as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_4) \langle \nabla_{U_2} U_1, Z \rangle + (\lambda_4 - \lambda_2) \langle \nabla_{U_1} U_2, Z \rangle &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_4) \langle \nabla_{U_3} U_1, Z \rangle + (\lambda_4 - \lambda_3) \langle \nabla_{U_1} U_3, Z \rangle &= 0 \\ (\lambda_4 - \lambda_2) \langle \nabla_{U_3} U_2, Z \rangle + (\lambda_3 - \lambda_4) \langle \nabla_{U_2} U_3, Z \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Polo tanto, temos un sistema linear homoxéneo de 6 ecuacións nas variables $\langle U_i, \nabla_{U_j} Z\rangle$ con $i \neq j$

$$\begin{cases} b_2\langle U_2, \nabla_{U_1} Z\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{U_1} Z\rangle = 0 \\ b_3\langle U_3, \nabla_{U_2} Z\rangle + b_1\langle U_1, \nabla_{U_2} Z\rangle = 0 \\ b_1\langle U_1, \nabla_{U_3} Z\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{U_3} Z\rangle = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_4)\,\langle \nabla_{U_2} U_1, Z\rangle + (\lambda_4 - \lambda_2)\,\langle \nabla_{U_1} U_2, Z\rangle = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_4)\,\langle \nabla_{U_3} U_1, Z\rangle + (\lambda_4 - \lambda_3)\,\langle \nabla_{U_1} U_3, Z\rangle = 0 \\ (\lambda_4 - \lambda_2)\,\langle \nabla_{U_3} U_2, Z\rangle + (\lambda_3 - \lambda_4)\,\langle \nabla_{U_2} U_3, Z\rangle = 0. \end{cases}$$

A matriz de coeficientes do sistema é

$$\begin{pmatrix} b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ \lambda_2 - \lambda_4 & 0 & \lambda_4 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_4 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_4 & 0 & \lambda_4 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

O determinante de dita matriz é $2b_1b_2b_3(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_4 - \lambda_3) \neq 0$. Polo tanto, como o sistema é homoxéneo a única solución é $\langle U_i, \nabla_{U_j} Z\rangle = 0$. □

Lema 4.4.11. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$, tense que*

$$\langle A_i, \nabla_{U_j} Z\rangle = 0.$$

Demostración. Sexa $Z \in T_{\lambda_4} \ominus V$. Entón, $JZ \in T_{\lambda_4} \ominus V$. Ademais, polo Lema 4.4.10 $\langle U_i, \nabla_{U_j} Z\rangle = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$. Entón,

$$\begin{aligned} 0 = U_j\langle JZ, A_i\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{U_j} JZ, A_i\rangle + \langle JZ, \overline{\nabla}_{U_j} A_i\rangle \\ &= -\langle \nabla_{U_j} Z, JA_i\rangle - \langle II(U_j, Z), JA_i\rangle + \langle JZ, \nabla_{U_j} A_i\rangle = \langle JZ, \nabla_{U_j} A_i\rangle, \end{aligned}$$

onde temos empregado o Lema 4.3.1 para descompoñer JA_i e o Lema 4.4.10 para ver que $\langle \nabla_{U_j} Z, JA_i\rangle = 0$. □

Como consecuencia do Lema 4.4.10 e do Lema 4.4.11 temos o seguinte corolario.

Corolario 4.4.12. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$,*

$$\nabla_{U_i}(T_{\lambda_4} \ominus V) \subset T_{\lambda_4} \ominus V,$$

para cada $i = 1, 2, 3$.

Proposición 4.4.13. *Se $s = 0$ e $n \geq 4$, as funcións $b_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ son constantes.*

Demostración. Empregando o Lema 4.2.3 con U_1 e Z chegamos á ecuación

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_4 + \frac{3b_1^2c\lambda_4}{4(\lambda_1-\lambda_4)} + \frac{c}{4} = {}& \frac{3b_1cr_1}{4(\lambda_1-\lambda_4)}\langle A_1, \nabla_Z Z\rangle - \langle \nabla_{U_1}U_1, \nabla_Z Z\rangle \\ &+ 2\langle \nabla_{U_1}Z, \nabla_Z U_1\rangle - \frac{b_1c}{2(\lambda_1-\lambda_4)}(\langle JZ, \nabla_{U_1}Z\rangle \\ &+ \langle JZ, \nabla_Z U_1\rangle).\end{aligned}$$

Polo Lema 4.4.9, podemos simplificar a anterior ecuación para obter

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_{U_1}Z, \nabla_Z U_1\rangle = {}& \frac{b_1c}{2(\lambda_1-\lambda_4)}(\langle JZ, \nabla_{U_1}Z\rangle + \langle JZ, \nabla_Z U_1\rangle) \\ &+ \frac{4\lambda_1\lambda_4(\lambda_1-\lambda_4) + 3b_1^2c\lambda_4 + c(\lambda_1-\lambda_4)}{4(\lambda_1-\lambda_4)}.\end{aligned}$$

Usando o Lema 4.4.8 e o Corolario 4.4.12, podemos simplificar a ecuación anterior para obter

$$\frac{c(6\lambda_4(\lambda_1-\lambda_4)+c)}{(\lambda_1-\lambda_4)^2}b_1^2 + 2(4\lambda_1\lambda_4 + c) = 0.$$

Analogamente, repetindo o mesmo razoamento con Z e U_3 chegamos á ecuación

$$\frac{c(6\lambda_4(\lambda_3-\lambda_4)+c)}{(\lambda_3-\lambda_4)^2}b_3^2 + 2(4\lambda_3\lambda_4 + c) = 0.$$

Por outra banda, se repetimos o mesmo razoamento con U_2 e Z obtemos

$$\frac{c(6\lambda_4(\lambda_2-\lambda_4)+c)}{(\lambda_2-\lambda_4)^2}b_2^2 + 2(4\lambda_2\lambda_4 + c) = 0.$$

Deste xeito, se un dos coeficientes que acompaña a b_i fose cero teríamos que os outros dous serían non nulos. Pois se $\frac{c(6\lambda_4(\lambda_1-\lambda_4)+c)}{(\lambda_1-\lambda_4)^2} = \frac{c(6\lambda_4(\lambda_3-\lambda_4)+c)}{(\lambda_3-\lambda_4)^2} = 0$, teríamos que $\lambda_1 = \lambda_3$ e se $\frac{c(6\lambda_4(\lambda_1-\lambda_4)+c)}{(\lambda_1-\lambda_4)^2} = \frac{c(6\lambda_4(\lambda_2-\lambda_4)+c)}{(\lambda_2-\lambda_4)^2} = 0$, teríamos que $\lambda_1 = \lambda_2$. Polo tanto, concluímos que as funcións $b_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes para cada $i = 1, 2, 3$. $\square$

Caso $s = 0$ e $n \geq 3$

A continuación vexamos que ocorre cando $s = 0$ e $n \geq 3$.

Lema 4.4.14. *Se $i \neq j$ e $s = 0$,*

$$\langle A_i, \nabla_{U_i}U_j\rangle = -\frac{b_j}{r_i}\left(\lambda_i + \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_i-\lambda_4)}\right),$$

onde $i, j = 1, 2, 3$.

Demostración. En primeiro lugar notemos que se $s = 0$, $U_i \perp JU_j$, para cada $i, j = 1, 2, 3$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} 0 = U_i\langle U_i, JU_j\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{U_i}U_i, JU_j\rangle + \langle U_i, \overline{\nabla}_{U_i}JU_j\rangle = \langle \nabla_{U_i}U_i, JU_j\rangle + \langle I\!I(U_i, U_i), JU_j\rangle \\ &- \langle JU_i, \nabla_{U_i}U_j\rangle = \langle \nabla_{U_i}U_i, JU_j\rangle - \lambda_i b_j - r_i\langle A_i, \nabla_{U_i}U_j\rangle. \end{aligned}$$

Pero usando o Lema 4.2.2, podemos calcular $\langle \nabla_{U_i}U_i, JU_j\rangle$. Deste xeito,

$$\langle A_i, \nabla_{U_i}U_j\rangle = -\frac{b_j}{r_i}\left(\lambda_i + \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_i - \lambda_4)}\right),$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. □

Lema 4.4.15. *Se $s = 0$ e $i \neq j$, tense que*

$$\langle A_i, \nabla_{U_j}U_i\rangle = -\frac{b_j}{4(\lambda_i - \lambda_4)^2 r_i}\Big(3cb_i^2(\lambda_j - \lambda_4) + (\lambda_i - \lambda_4)(4\lambda_i(\lambda_j - \lambda_4) + c)\Big),$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. En primeiro lugar usando a Proposición 2.5.3, temos que

$$\overline{R}(U_i, U_j, A_i, \xi) = \frac{cb_j}{4r_i}.$$

Por outra banda, usando o Lema 4.2.1,

$$\frac{cb_j}{4r_i} = (\lambda_j - \lambda_4)\langle A_i, \nabla_{U_i}U_j\rangle - (\lambda_i - \lambda_4)\langle A_i, \nabla_{U_j}U_i\rangle.$$

Pero polo Lema 4.4.14, as expresións do tipo $\langle A_i, \nabla_{U_i}U_j\rangle$ son coñecidas. Deste xeito, podemos despexar $\langle A_i, \nabla_{U_i}U_i\rangle$ da ecuación anterior obtendo a fórmula do enunciado. □

Lema 4.4.16. *Se $s = 0$ e i, j, k son todos distintos, temos que*

$$\langle A_i, \nabla_{U_j}U_k\rangle = \frac{b_i b_j}{4b_k r_i}\left(\frac{3b_i^2 c(\lambda_j - \lambda_4) + (\lambda_i - \lambda_4)(4\lambda_i(\lambda_j - \lambda_4) + c)}{(\lambda_i - \lambda_4)^2} + \frac{3b_j^2 c}{\lambda_j - \lambda_4} + 4\lambda_j\right),$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$.

Demostración. Como consecuencia do Lema 4.3.1, temos que $\langle A_i, J\xi\rangle = 0$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} 0 = U_j\langle A_i, J\xi\rangle &= \langle \nabla_{U_j}A_i, J\xi\rangle + \langle A_i, \overline{\nabla}_{U_j}J\xi\rangle = \langle \nabla_{U_j}A_i, J\xi\rangle - \langle JA_i, \overline{\nabla}_{U_j}\xi\rangle \\ &= b_i\langle \nabla_{U_j}A_i, U_i\rangle + b_j\langle \nabla_{U_j}A_i, U_j\rangle + b_k\langle \nabla_{U_j}A_i, U_k\rangle - \lambda_j\langle U_j, JA_i\rangle. \end{aligned}$$

Pero agora polo Lema 4.2.2, tense que $\langle \nabla_{U_i}U_i, A_j\rangle = -\frac{3cb_j b_i^2}{4(\lambda_i - \lambda_4)r_j}$. Polo tanto, usando o Lema 4.3.1 e o Lema 4.4.15, chegamos á fórmula do enunciado. □

Lema 4.4.17. *Se $s=0$ e $i\neq j$, tense que*

$$\langle U_j,\nabla_{A_i}U_i\rangle=\frac{b_j}{4r_i}\left(\frac{3b_i^2c}{\lambda_i-\lambda_4}-\frac{2(2\lambda_i(\lambda_j-\lambda_4)+c)}{\lambda_i-\lambda_j}\right),$$

onde $i,j=1,2,3$.

Demostración. En primeiro lugar, usando a Proposición 2.5.3

$$\overline{R}(A_i,U_i,U_j,\xi)=\frac{cb_j}{4r_i}\left(3b_i^2-2\right).$$

Agora polo Lema 4.2.1 temos que

$$(\lambda_i-\lambda_j)\langle U_j,\nabla_{A_i}U_i\rangle-(\lambda_j-\lambda_4)\langle A_i,\nabla_{U_i}U_j\rangle=\frac{cb_j}{4r_i}\left(3b_i^2-2\right).$$

Polo tanto, usando a expresión para $\langle U_j,\nabla_{A_i}U_i\rangle$ calculada no Lema 4.4.15, obtemos a fórmula do enunciado. ☐

Lema 4.4.18. *Se $s=0$ e $i\in\{1,2,3\}$, tense que*

$$\begin{aligned}0=&\frac{3b_i^4c}{(\lambda_i-\lambda_4)^2}-\frac{3b_{i+1}^4c}{(\lambda_{i+1}-\lambda_4)^2}+\frac{3c}{(\lambda_{i+2}-\lambda_4)^2}(b_i^2b_{i+2}^2-b_{i+1}^2b_{i+2}^2)\\&+\frac{8\lambda_i\lambda_{i+2}-4\lambda_i\lambda_4-4\lambda_{i+2}\lambda_4+c}{(\lambda_i-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4)}b_i^2-\frac{8\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}-4\lambda_{i+1}\lambda_4-4\lambda_{i+2}\lambda_4+c}{(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_{i+2})}b_{i+1}^2,\end{aligned}$$

onde temos tomado subíndices módulo tres.

Demostración. Por unha banda, notemos que se $s=0$, tense que

$$\overline{R}(U_i,U_{i+1},A_{i+2},\xi)=0.$$

Polo Lema 4.2.1, tense que

$$0=(\lambda_{i+1}-\lambda_4)\langle A_{i+2},\nabla_{U_i}U_{i+1}\rangle-(\lambda_i-\lambda_4)\langle A_{i+2},\nabla_{U_{i+1}}U_i\rangle.$$

Pero usando o Lema 4.4.16, podemos calcular $\langle A_{i+2},\nabla_{U_i}U_{i+1}\rangle$ e $\langle A_{i+2},\nabla_{U_{i+1}}U_i\rangle$ polo que tras unhas poucas simplificacións acadamos as igualdades requeridas. ☐

Proposición 4.4.19. *Se $s=0$ e $n\geq 3$ a función $b_i\colon M\longrightarrow\mathbb{R}$ é constante para cada $i=1,2,3$.*

Demostración. Para cada $i\in\{1,2,3\}$, consideremos o polinomio

$$\begin{aligned}f_i(b_1,b_2,b_3)=&\frac{3c}{(\lambda_i-\lambda_4)^2}b_i^4-\frac{3c}{(\lambda_{i+1}-\lambda_4)^2}b_{i+1}^4+\frac{3c}{(\lambda_{i+2}-\lambda_4)^2}(b_i^2b_{i+2}^2-b_{i+1}^2b_{i+2}^2)\\&+\frac{8\lambda_i\lambda_{i+2}-4\lambda_i\lambda_4-4\lambda_{i+2}\lambda_4+c}{(\lambda_i-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4)}b_i^2\\&-\frac{8\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}-4\lambda_{i+1}\lambda_4-4\lambda_{i+2}\lambda_4+c}{(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_{i+2})}b_{i+1}^2.\end{aligned}$$

A nosa intención neste punto é aplicar o Teorema B.0.5 para concluír que hai un número finito de solucións do sistema $\{f_i = 0 : i = 1, 2, 3\}$ e polo tanto, a aplicación $b_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante para cada $i = 1, 2, 3$.

Por unha banda, podemos empregar a identidade $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = 1$ de xeito que podemos substituír b_2^2 por $1 - b_1^2 - b_3^2$. Por outra banda, tamén imos considerar os cambios de variable $x_1 \mapsto b_1^2$ e $x_2 \mapsto b_3^2$. Deste xeito para cada f_i obtemos un polinomio nas variables x_1 e x_2 que chamaremos p_i. Resulta que os polinomios p_i teñen un monomio $x_1 x_2$, polo tanto se queremos aplicar o Teorema B.0.5 coa orde lexicográfica graduada, debemos desfacernos deste termo. Para iso, consideramos os polinomios

$$\begin{aligned} q_1(x, y) &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_1(x, y) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)^2(\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_2(x, y) \\ &\quad - \frac{((\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_4))}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_3(x, y), \\ q_2(x, y) &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)^2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_1(x, y) + \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)^2(\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_2(x, y) \\ &\quad + \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_3(x, y). \end{aligned}$$

Polo tanto, podemos ver que para cada $i = 1, 2$, q_i é un polinomio da forma

$$q_j(x_1, x_2) = -\frac{6c(\lambda_j + \lambda_{j+1} - 2\lambda_4)(\lambda_j + \lambda_{j+2} - 2\lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_4)^2(\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2})} x_j^2 + r(x_1, x_2),$$

para cada $j = 1, 2$, onde r é un polinomio que ten multigrado menor ou igual que un. Polo tanto, se $\lambda_i + \lambda_j - 2\lambda_4 \neq 0$, aplicando o Teorema B.0.5, teriamos rematado. Entón, se conseguimos ver que hai un número finito de solucións no caso en que $\lambda_i + \lambda_j - 2\lambda_4 = 0$, para cada $i, j = 1, 2, 3$, finalizaríamos. Pola simetría das nosas ecuacións basta estudar un único caso.

Supoñamos que $\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0$. Entón, $\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \neq 0$, pois en caso contrario tense que $\lambda_3 = \lambda_4$. Entón, se consideramos

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_2(x_1, x_2) &= \frac{12c(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)^2} x_2^2 - 2\left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + c\right) x_1 \\ &\quad - \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)\left(2\lambda_1^2 + \lambda_1(\lambda_2 - 5\lambda_3) - \lambda_2(\lambda_2 - 3\lambda_3)\right)}{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3} x_2 \\ &\quad + \frac{c(2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3} x_2 + 2\left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + c\right), \\ p_2(x_1, x_2) - p_3(x_1, x_2) &= \frac{24c(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)^2} x_2^2 \\ &\quad + \left(-\frac{4(\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3} - \frac{8c}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\right) x_2 + 2 + \frac{2c}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \end{aligned}$$

Polo tanto, se $c + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \neq 0$, temos como moito dúas solucións. Pero se $c = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2$, temos que

$$p_3(x_1, x_2) = \frac{12(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)^2} x_2^2 - \frac{4\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)} x_2.$$

Polo tanto, $x_2 = b_3^2 = \frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3)}{3(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}$. Entón, temos que

$$p_1(x_1, b_3^2) = \frac{4x_1\left(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3)\right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)}.$$

Polo tanto, $\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$. Deste xeito, podemos despexar λ_3. Entón,

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Como b_3 é constante, temos que

$$\begin{aligned} 0 = A_3(b_3) &= A_3\langle U_3, J\xi\rangle = \langle \nabla_{A_3} U_3, J\xi\rangle + \langle U_3, \overline{\nabla}_{A_3} J\xi\rangle \\ &= b_1\langle \nabla_{A_3} U_3, U_1\rangle + b_2\langle \nabla_{A_3} U_3, U_2\rangle + b_3\langle \nabla_{A_3} U_3, U_3\rangle - \lambda_4\langle JU_3, A_3\rangle. \end{aligned}$$

Entón, podemos usar o Lema 4.4.17 para calcular as expresións do tipo $\langle \nabla_{A_i} U_i, U_j\rangle$ con $i \neq j$ e por ser U_3 unitario, $\langle \nabla_{A_3} U_3, U_3\rangle = 0$. Polo tanto, chegamos á seguinte igualdade

$$\frac{2\lambda_1 - 3b_1^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{3r_3} = 0.$$

Deste xeito, b_1 é constante. Como b_1 e b_3 son constantes necesariamente b_2 tamén o é. □

4.4.3. Caso $s \neq 0, \pm 1$

A continuación probaremos que as funcións $b_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes para cada $i = 1, 2, 3$ cando $s \neq 0, \pm 1$.

Lema 4.4.20. *Se $s \neq 0, \pm 1$ temos que:*

$$\sum_{i=1}^{3} b_i^2(\lambda_{i+1} - \lambda_4)(\lambda_{i+2} - \lambda_4) = -\frac{4\lambda_4}{c}(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4).$$

Demostración. Por ser $\overline{\nabla} J = 0$ e $J\xi \perp A_2$, tense que

$$\begin{aligned} 0 = A_1\langle J\xi, A_2\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{A_1} J\xi, A_2\rangle + \langle J\xi, \nabla_{A_1} A_2\rangle = \langle J\overline{\nabla}_{A_1}\xi, A_2\rangle + \langle J\xi, \nabla_{A_1} A_2\rangle \\ &= \langle \mathcal{S}A_1, JA_2\rangle + b_1\langle U_1, \nabla_{A_1} A_2\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{A_1} A_2\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{A_1} A_2\rangle \\ &= \lambda_4\langle A_1, JA_2\rangle + b_1\langle U_1, \nabla_{A_1} A_2\rangle + b_2\langle U_2, \nabla_{A_1} A_2\rangle + b_3\langle U_3, \nabla_{A_1} A_2\rangle. \end{aligned}$$

Polo Lema 4.3.1, podemos calcular $\langle A_1, JA_2\rangle$ e usando o Lema 4.2.2 calculamos as expresións do tipo $\langle U_i, \nabla_{A_1} A_2\rangle$, con $i = 1, 2, 3$. Deste xeito, despois dalgunha simplificación chegamos á ecuación que procurabamos. □

Lema 4.4.21. *Se $s \neq 0, \pm 1$ temos que*

$$\langle \nabla_{U_i} U_{i+1}, U_{i+2}\rangle = \frac{s(4\lambda_i(\lambda_i - \lambda_4) + 3cb_i^2)}{4(\lambda_i - \lambda_4)},$$

para cada $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Polo Lema 4.4.20,

$$U_i\bigg(\sum_{i=1}^{3} b_i^2(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4)+\frac{4\lambda_4}{c}(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)\bigg)=0.$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned}0=(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4)b_iU_i(b_i)+(\lambda_i-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4)b_{i+1}U_i(b_{i+1})\\ +(\lambda_i-\lambda_4)(\lambda_{i+1}-\lambda_4)b_{i+2}U_i(b_{i+2}).\end{aligned}$$

Empregando as expresións obtidas no Lema 4.4.1 e no Lema 4.4.2, tense que

$$4(\lambda_i-\lambda_4)(\lambda_{i+1}-\lambda_{i+2})\langle\nabla_{U_i}U_{i+1},U_{i+2}\rangle+s(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(4\lambda_i(\lambda_i-\lambda_4)+3cb_i^2)=0.$$

Polo tanto,

$$\langle\nabla_{U_i}U_{i+1},U_{i+2}\rangle=\frac{s\left(4\lambda_i(\lambda_i-\lambda_4)+3b_i^2c\right)}{4(\lambda_i-\lambda_4)}.$$ □

Proposición 4.4.22. *Se $s \neq 0, \pm 1$, as funcións $b_i\colon M \longrightarrow M, i=1,2,3$ son constantes.*

Demostración. En primeiro lugar dado que por $U_i \perp U_j$, para cada $i \neq j$, tense que pola Proposición 2.5.3

$$\overline{R}(U_1,U_2,U_3,\xi)=\frac{cs}{4}\Big(\langle JU_1,U_3\rangle\langle JU_1,\xi\rangle-\langle JU_1,U_3\rangle\langle JU_2,\xi\rangle-2\langle JU_1,U_2\rangle\langle JU_3,\xi\rangle\Big).$$

Agora, polo Lema 4.3.1, temos que

$$\overline{R}(U_1,U_2,U_3,\xi)=\frac{cs(b_1^2+b_2^2-2b_3^2)}{4}.$$

Empregando o Lema 4.2.1 e o Lema 4.4.21, chegamos á ecuación

$$\frac{(\lambda_1+3\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_1-\lambda_4)}b_1^2+\frac{(3\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)}b_2^2-\frac{1}{2}b_3^2=-\frac{(2\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)}{c}.$$

Polo tanto, usando a ecuación obtida no Lema 4.4.20 e a relación $\sum_{i=1}^{3} b_i^2=1$, obtemos un sistema de 3 ecuacións lineais nas variables b_i^2

$$\begin{cases} b_1^2+b_2^2+b_3^2=1\\ \sum_{i=1}^{3} b_i^2(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4)=-\frac{4\lambda_4}{c}(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)\\ \frac{(\lambda_1+3\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_1-\lambda_4)}b_1^2+\frac{(3\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)}b_2^2-\frac{1}{2}b_3^2=-\frac{(2\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)}{c}.\end{cases}$$

Este sistema ten por matriz de coefientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)\\ \frac{(\lambda_1+3\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_1-\lambda_4)} & \frac{(3\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Se o determinante desta matriz é distinto de 0, o sistema sería compatible determinado polo que teríamos probado que b_i é constante para cada $i = 1, 2, 3$, por ser a solución dun sistema de ecuacións lineais con coeficientes constantes. Se o determinante fose nulo teríamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4) \\ \frac{(\lambda_1+3\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_1-\lambda_4)} & \frac{(3\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-3}{4}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4). \end{aligned}$$

Polo tanto, necesariamente $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$. Analogamente, temos que

$$\overline{R}(U_2, U_3, U_1, \xi) = \frac{cs(b_2^2 + b_3^2 - 2b_1^2)}{4}.$$

Entón, usando o Lema 4.2.1 e o Lema 4.4.21 chegamos á ecuación

$$\frac{1}{2}b_1^2 + \frac{(3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)}b_2^2 + \frac{(3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_3-\lambda_4)}b_3^2 = \frac{2\lambda_2\lambda_3-\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{c}.$$

De novo usando a ecuación obtida no Lema 4.4.20 e a relación $\sum_{i=1}^{3} b_i^2 = 1$, obtemos un sistema de 3 ecuacións lineais nas variables b_i^2

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ \sum_{i=1}^{3} b_i^2(\lambda_{i+1}-\lambda_4)(\lambda_{i+2}-\lambda_4) = -\frac{4\lambda_4}{c}(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) \\ \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{(3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)}b_2^2 + \frac{(3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_3-\lambda_4)}b_3^2 = \frac{2\lambda_2\lambda_3-\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{c}. \end{cases}$$

Este sistema ten por matriz de coefientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4) \\ \frac{1}{2} & \frac{(3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)} & \frac{(3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_3-\lambda_4)} \end{pmatrix}$$

Pero se este determinante fose nulo teríamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4) \\ \frac{1}{2} & \frac{(3\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_2-\lambda_4)} & \frac{(3\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)}{4(\lambda_3-\lambda_4)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{3}{4}(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4). \end{aligned}$$

Polo tanto, necesariamente $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, pero isto entra en contradición con que $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$, pois nese caso, $\lambda_2 = \lambda_4$. Entón, un dos dous determinantes ha de ser non nulo e polo tanto as aplicacións $b_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes para $i = 1, 2, 3$. □

Deste xeito, temos probado que para todo $s \in \mathbb{R}$, as funcións $b_i \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes para cada $i = 1, 2, 3$. Polo tanto, temos rematado o obxectivo desta sección.

4.5. Conclusión do Teorema Principal

Sexa M unha hipersuperficie en $\overline{M} = \overline{M}^n(c)$ e consideremos $\tilde{M} = \pi^{-1}(M)$ a imaxe recíproca de M pola aplicación de Hopf (ver §2.5). Lembremos que $c = \frac{4\epsilon}{r^2}$, onde $\epsilon = 1$ no caso proxectivo e $\epsilon = -1$ no caso hiperbólico. Ademais, a aplicación de Hopf restrinxida a $\tilde{M}$ é unha submersión semi-riemanniana. Sexa V o campo vertical definido en §2.5.3. Sexa ξ un campo unitario normal definido localmente en M. Entón, ξ^L é un campo unitario normal definido localmente en $\tilde{M}$. Na sección §2.5.3, vimos que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L &= (\overline{\nabla}_X Y)^L + \frac{1}{2}[X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V},\\ \langle [X^L, Y^L], V\rangle &= \frac{2}{r}\langle JY, X\rangle,\end{aligned}$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$. Polo tanto, para cada $X \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}X^L &= (\mathcal{S}X)^L - \frac{\epsilon}{r}\langle J\xi^L, X^L\rangle V,\\ \tilde{\mathcal{S}}V &= \frac{1}{r}J\xi^L.\end{aligned}$$

Sexan $X_1, \dots X_{2n-1}$ as direccións principais unitarias asociadas ás curvaturas principais $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}$ de M. Os campos de vectores $X_1, \dots, X_{2n-1}$ forman unha referencia local ortonormal de M. Polo tanto, podemos expresar o campo de Hopf como $J\xi = \sum_{i=1}^{2n-1} b_i X_i$, para certos $b_i > 0$ tales que $\sum_{i=1}^{2n-1} b_i^2 = 1$. Por outra banda, $X_1^L, \dots, X_{2n-1}^L, V$ é unha referencia local en $\tilde{M}$. Empregando as ecuación anteriores, tense que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}X_i^L &= \lambda_i X_i^L + \frac{b_i}{r}V,\\ \tilde{\mathcal{S}}V &= \frac{\epsilon}{r}\sum_{i=1}^{2n-1} b_i X_i^L,\end{aligned}$$

para cada X_i^L, con $i = 1, \dots, 2n-1$. Deste xeito, a matriz do operador forma de $\tilde{M}$ con respecto á referencia local $X_1^L, \dots, X_{2n-1}^L, V$ vén dada por

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \frac{\epsilon b_1}{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{2n-1} & \frac{\epsilon b_{2n-1}}{r} \\ \frac{b_1}{r} & \dots & \frac{b_{2n-1}}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.5.1. *Sexa M unha hipersuperficie con curvaturas principais constantes en $\overline{M}^n(c)$ con $g = 4$, $n \geq 3$, tal que o seu campo de Hopf proxecta sobre exactamente tres espazos de curvatura distintos e que estes teñen multiplicidade un. Entón, M é unha hipersuperficie isoparamétrica en $\overline{M}^n(c)$.*

Demostración. A función $b_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante para cada $i = 1, 2, 3$, por §4.4. Ademais, $b_i = 0$ para cada $i = 4, \ldots, 2n-1$. Nese caso $\tilde{M}$ ten curvaturas principais constantes xa que todas as entradas da matriz do seu operador forma son constantes. Pola Observación 3.2.2, tense que $\tilde{M}$ é isoparamétrica. Como π envía xeodésicas horizontais de H_1^{2n-1} en xeodésicas en $\mathbb{C}H^n$, tense que π envía hipersuperficies equidistantes a $\tilde{M}$ en hipersuperficies equidistantes a M. Polo tanto, M é isoparamétrica se e só se $\tilde{M}$ é isoparamétrica. Polo tanto, M é isoparamétrica. $\square$

No caso proxectivo se existise M nas hipóteses do Teorema Principal, sería isoparamétrica. Ademais, M ten curvaturas principais pero non é Hopf. Polo tanto, temos unha contradición polo Corolario 3.3.7. No caso hiperbólico o resultado séguese do Teorema 3.3.11, pois por [5] se $g = 4$, o único exemplo que está nas hipóteses do Teorema Principal é W_{φ}^{2n-2} para algún $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Deste xeito, temos concluído a demostración do Teorema Principal.

Apéndice A

Campos de Jacobi

Os campos de Jacobi son unha ferramenta moi poderosa no estudo da xeometría de Riemann. Por un lado permiten o estudo da xeometría intrínseca, pois proporcionan un xeito de determinar como a curvatura nun punto inflúe sobre as xeodésicas radiais que saen del. Por outro lado, son útiles no estudo da xeometría de subvariedades, pois permiten estudar o desprazamento normal dunha subvariedade. Definamos a continuación o concepto de campo de Jacobi.

Definición A.0.1. Sexa γ unha xeodésica nunha variedade de Riemann M. Un campo de vectores J ó longo de γ dise *un campo de Jacobi* se satisfai a ecuación

$$D_t^2 J = R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}.$$

A.1. Campos de Jacobi e xeometría intrínseca

Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión m e $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ unha curva. Dicimos que a aplicación diferenciable $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \longrightarrow M$ é unha *variación de* γ se $\gamma(t) = \Gamma(0,t)$ para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Se γ e $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ son xeodésicas, dicimos que Γ é unha *variación por xeodésicas da xeodésica* γ. As curvas $\Gamma_t(s)$ dinse *curvas transversais* e as curvas $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ dinse *curvas principais*.

Unha aplicación diferenciable $V\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \longrightarrow TM$ é un *campo de vectores ó longo de* Γ se $V(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}M$, para cada $(s,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]$. Denotaremos os campos ó longo de Γ mediante $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Sexan $S, T \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ definidos como

$$S(s,t) := \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial s} \text{ e } T(s,t) := \frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t},$$

onde $\frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial s} := \dot{\Gamma}_t(s)$ e $\frac{\partial\Gamma(s,t)}{\partial t} := \dot{\Gamma}_s(t)$. Diremos que $S(0,t)$ é o *campo variacional* da variación por xeodésicas Γ da xeodésica γ.

Denotemos por D_t a derivada covariante con respecto a $\Gamma(0,t)$ e por D_s a derivada covariante con respecto a $\Gamma(s,0)$. Temos tres relacións importantes. Por ser γ unha xeodésica tense que

$$D_t T = 0.$$

O lema de simetría, [39, páx. 97], afirma que $D_s\partial_t\Gamma = D_t\partial_s\Gamma$. Polo tanto,

$$D_sT = D_tS.$$

Por outra banda, traballando en coordenadas podemos comprobar que para cada $V \in \mathfrak{X}(\Gamma)$,

$$D_sD_tV - D_tD_sV = R(S,T)V$$

Deste xeito é fácil ver que

$$R(T,S)T = D_t^2S.$$

Polo tanto, o campo variacional dunha variación por xeodésicas dunha xeodésica é un campo de Jacobi.

O seguinte teorema asegúranos a existencia e unicidade dos campos de Jacobi, unha vez fixadas dúas condicións iniciais.

Teorema A.1.1. [39, páx. 176] *Sexa $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ unha xeodésica, satisfacendo que $\gamma(a) = p$, para certo $a \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Para cada par de vectores $X, Y \in T_pM$ existe un único J, campo de vectores de Jacobi ó longo de γ, que satisfai as condicións iniciais*

$$J(a) = X, \ \ D_tJ(a) = Y.$$

A demostración deste resultado consiste en transformar o sistema de ecuacións diferenciais de segundo orde nun sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde. Deste xeito, duplicamos o número de ecuacións. Posteriormente, aplicamos o resultado de existencia e unicidade de ecuacións diferenciais de primeira orde.

Observación A.1.2. Dada unha xeodésica γ, o conxunto dos campos de Jacobi ó longo de γ forma un subespazo linear $2m$-dimensional do espazo vectorial de $\mathfrak{X}(\gamma)$. En efecto, dado $p = \gamma(a)$ un punto calquera de γ, consideremos a aplicación que a cada J, campo de Jacobi ó longo de γ, lle fai corresponder o vector $(J(a), D_tJ(a)) \in T_pM \oplus T_pM$. Polo teorema anterior esta aplicación é un isomorfismo linear.

Analogamente, podemos comprobar que todo campo de Jacobi é o campo variacional dunha variación por xeodésicas. Sexa J un campo de Jacobi ó longo de γ con condicións iniciais $J(0)$ e $J'(0)$, onde $'$ denota a derivada covariante ó longo da curva γ. Entón, sexa $\Gamma(s,t) = \exp_{\sigma(s)} stJ'(s)$, onde σ é a curva integral de J tal que $\sigma(0) = \gamma(0)$. Sexa Y o campo variacional asociado a Γ e vexamos que ten condicións iniciais $J(0)$ e $J'(0)$, polo que o Teorema A.1.1 implicará que $Y = J$.

$$\begin{aligned} Y(0) &= \frac{d}{ds}_{|s=0}\Gamma(s,0) = \frac{d}{ds}_{|s=0}(\exp_{\sigma(s)} 0) = \frac{d}{ds}_{|s=0}\sigma(s) = \dot\sigma(0) = J(0). \\ Y'(0) &= D_{t|t=0}\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\Gamma(s,t) = D_{s|s=0}\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\Gamma(s,t) = D_{s|s=0}\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\exp_{\sigma(s)} stJ'(s) \\ &= D_{s|s=0}\exp_{\sigma(s)*0}(sJ'(s)) = D_{s|s=0}sJ'(s) = J'(0). \end{aligned}$$

Entón, concluímos que un campo de vectores ó longo dunha xeodésica γ é de Jacobi se e só se é o campo variacional dunha variación por xeodésicas de γ.

O seguinte lema indica un criterio para saber se un campo de Jacobi é normal á xeodésica sobre a que está definido.

Lema A.1.3. *Sexa* $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$ *unha xeodésica e* $a\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

(I) *Se* J *é un campo de Jacobi ó longo de* γ*, é normal se e só se* $J(a)\perp\dot\gamma(a)$ *e* $D_tJ(a)\perp\dot\gamma(a)$.

(II) *Todo campo de Jacobi ortogonal a* $\dot\gamma$ *en dous puntos é normal a* γ.

Demostración. Comecemos probando (I). Usando a compatibilidade coa métrica e o feito de que γ é xeodésica, calculamos

$$\frac{d^2}{dt}\langle J,\dot\gamma\rangle=\langle D_t^2J,\dot\gamma\rangle=-\langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma\rangle=0.$$

Polo tanto, $f(t)=\langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle$ é unha función afín de t. Agora, usando a hipótese

$$f(a)=\langle J(a),\dot\gamma(a)\rangle=\dot f(a)=\langle D_tJ(a),\dot\gamma(a)\rangle=0.$$

Polo tanto, f é unha función afín con pendente e ordenada na orixe nulas. Logo $f\equiv 0$.

Probemos agora (II). Coa mesma notación que antes, se $f(t)$ é unha función afín non inxectiva é a función nula. Polo que se f é nula en dous puntos, $f\equiv 0$. □

Como consecuencia disto tense que os campos de Jacobi de γ normais forman un subespazo de dimensión $2m-2$ de γ, mentres que os campos de Jacobi tanxentes forman un subespazo 2-dimensional de γ. Deste xeito, os campos de Jacobi tanxentes son triviais.

A.2. Campos de Jacobi e xeometría extrínseca

Sexa $\overline{M}$ unha variedade de Riemann de dimensión n e $M\subset\overline{M}$ unha subvariedade de Riemann de $\overline{M}$ de dimensión m.

A.2.1. M-campos de Jacobi

Consideremos unha xeodésica $\gamma\colon[0,1]\longrightarrow\overline{M}$, tal que $\gamma(0)=p$. Un campo de Jacobi Y ó longo de γ, que satisfai $Y(0)\in T_pM$ e $Y'(0)+\mathcal{S}_{\dot\gamma(0)}Y(0)\in\nu_pM$, é chamado M-*campo de Jacobi*. Os M-campos de Jacobi proceden de variacións por xeodésicas de xeodésicas que intersecan a M perpendicularmente.

Sexa γ unha xeodésica parametrizada polo parámetro lonxitude de arco e $\dot\gamma(0)\in\ \nu_pM$. Sexa $\Gamma(s,t)$ unha variación por xeodésicas de γ e denotemos por $c(s)=\gamma_s(0)\in M$ e $\dot\gamma_s(0)=\xi(s)\in\nu_{c(s)}M$. O campo de Jacobi Y inducido por Γ é $Y(t)=\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\Gamma(s,t)$. Por outra banda, ten condicións iniciais $Y(0)$ e $Y'(0)$, xa que

$$\begin{aligned}Y(0)&=\frac{d}{ds}_{|s=0}\Gamma(s,0)=\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\gamma_s(0)=\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}c(s)=\dot c(0),\\ Y'(0)&=D_{t|t=0}\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\Gamma(s,t)=D_{s|s=0}\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\Gamma(s,t)=D_{s|s=0}\dot\gamma_s(0)=D_{s|s=0}\xi(s)\\ &=\overline{\nabla}_{Y(0)}\xi=-\mathcal{S}_{\xi(0)}Y(0)+\nabla^{\perp}_{Y(0)}\xi.\end{aligned}$$

Os M-campos de vectores de Jacobi forman un subespazo linear do espazo vectorial de campos de Jacobi ó longo de γ de dimensión $n = m + (n - m)$. Obviamente, o campo de Jacobi trivial $J(t) = t\dot{\gamma}(t)$ é un M-campo de Jacobi. Denotaremos por $\mathcal{J}(M, \gamma)$ ó subespazo vectorial dos M-campos de Jacobi ó longo de γ perpendiculares a $J(t) = \dot{\gamma}(t)$.

A.2.2. Desprazamento normal dunha hipersuperficie

Sexa M unha hipersuperficie en $\overline{M}$ e ξ un campo de vectores normal e unitario en M. O noso seguinte obxectivo será estudar o desprazamento M^r de M na dirección de ξ a distancia $r > 0$. En xeral, M^r non é unha subvariedade de M. Veremos que se pode determinar mediante o uso de M-campos de Jacobi se M^r é subvariedade ou non, e calcular as súas curvaturas principais e as correspondentes direccións principais. Como todos estes obxectos son locais, non perdemos xeneralidade asumindo que ξ está globalmente definido. Para $r > 0$ definimos

$$\begin{array}{rccl} \Phi^r\colon & M & \longrightarrow & \overline{M} \\ & p & \longmapsto & \Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p). \end{array}$$

A aplicación diferenciable Φ^r parametriza o desprazamento paralelo M^r de M na dirección de ξ a distancia r. Claramente M^r será unha subvariedade inmersa de $\overline{M}$ se e só se Φ^r é unha inmersión.

Calculemos a diferencial de Φ^r. Sexa $p \in M$ e $\gamma = \gamma^p_{\xi_p}\colon t \mapsto \exp_p(t\xi_p)$. Xa que ξ ten lonxitude constante e νM é un fibrado de rango un, $\mathcal{J}(M, \gamma)$ consiste no conxunto dos campos de Jacobi ó longo de γ con condicións iniciais $Y(0) \in T_pM$ e $Y'(0) = -\mathcal{S}_{\xi_p}Y(0)$. Sexa $Y \in \mathcal{J}(M, \gamma)$ e c unha curva en M con condicións iniciais $c(0) = p$ e $\dot{c}(0) = Y(0)$. Entón, a variación por xeodésicas de γ correspondente ó campo de Jacobi Y, vén dada por $\Gamma(s, t) = \exp_{c(s)}(t\xi_{c(s)})$. Polo tanto,

$$\Phi^r_{*p}(Y(0)) = \frac{d}{ds}_{|s=0}(\Phi^r \circ c)(s) = \frac{d}{ds}_{|s=0}\exp_{c(s)}(r\xi_{c(s)}) = Y(r).$$

En definitiva, Φ^r non é inmersión en p se e só se existe un campo de Jacobi non nulo $Y \in \mathcal{J}(M, \gamma)$ con $Y(r) = 0$. En tal caso $\Phi^r(p)$ dise *punto focal de M ó longo de γ*, e a dimensión do núcleo de Φ^r_{*p} é chamada a *multiplicidade do punto focal.* Se $\Phi^r(p)$ é un punto focal de M ó longo de γ, a súa multiplicidade é a dimensión do subespazo linear formado polos $Y \in \mathcal{J}(M, \gamma)$ tales que $Y(r) = 0$. Ademais,

$$T_{\gamma(r)}M^r = \{Y(r) : Y \in \mathcal{J}(M, \gamma)\}.$$

A interpretación xeométrica dos campos de Jacobi en termos da variación xeodésica implica que $\Phi^r(p)$ é un punto focal de M ó longo de γ se e só se existe unha variación xeodésica non trivial de γ, cuxas xeodésicas intersecan M ortogonalmente e se atopan infinitesimalmente preto en $\Phi^r(p)$. Se o rango de Φ^r_* é constante, existen dúas posibilidades:

(I) Se existe un enteiro positivo k tal que $\Phi^r(q)$ é un punto focal ó longo de γ_{ξ_q} con multiplicidade k para cada q nunha veciñanza pequena U de p, entón $\Phi^r_{|U}$ parametriza a unha subvariedade $(n-1-k)$-dimensional de $\overline{M}$ chamada *variedade focal* de M en $\overline{M}$.

(II) Se $\Phi^r(p)$ non é un punto focal de M ó longo de γ, entón Φ^r_{*q} é inxectiva para cada q nunha veciñanza U de p. Tomando U suficientemente pequeno, podemos concluír que $\Phi^r_{|U}$ parametriza unha hipersuperficie de $\overline{M}$, chamada *hipersuperficie equidistante a M en $\overline{M}$*.

Ademais, en ambos casos o vector $\dot{\gamma}(r)$ é un vector normal á variedade focal ou respectivamente á hipersuperficie equidistante en $\Phi^r(p)$. Notemos que para r suficientemente pequeno, sempre estamos no segundo caso.

Todo o proceso anterior pode ser xeneralizado para unha subvariedade M de $\overline{M}$ con codimensión maior que un. Nese caso, para $r>0$ definiríamos

$$M^r = \{\exp(r\xi) : \xi \in \nu M, ||\xi|| = 1\}.$$

Se M^r fose unha hipersuperficie chamaríamola *tubo de radio r ó redor de M* e se M^r fose unha subvariedade de codimensión maior que un, seguiríamos chamándoa variedade focal de M en $\overline{M}$.

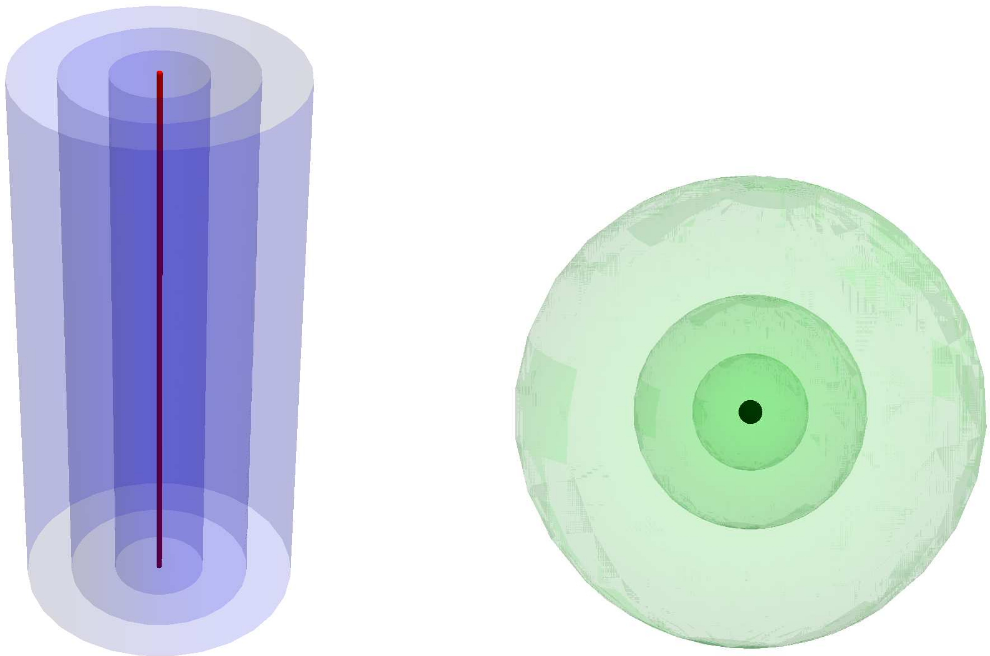

Figura A.1: O cilindro focaliza nunha recta e a esfera focaliza nun punto.

O seguinte obxectivo é calcular o operador forma da variedade focal ou hipersuperficie equidistante con respecto a $\dot{\gamma}(r)$. De aquí en diante denotaremos por M^r a variedade focal ou hipersuperficie equidistante. En xeral, $\Phi^r_{|U}$ parametrizará tan só a unha parte aberta desta. Para iso, construímos $c_r := \Phi^r \circ c$, que é unha curva en M^r. Tense que $\dot{c}_r(0) = \Phi^r_{*p}(\dot{c}(0)) = Y(r)$. Definimos un campo de vectores unitario e normal η^r en M^r ó longo de c_r mediante $\eta^r(s) := \dot{\gamma}(r)$ e denotaremos por $\mathcal{S}^r$ o operador forma en M^r. Pola ecuación de Weingarten, temos que

$$\begin{aligned}
Y'(r) &= D_{t|t=r}\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\Gamma(s,t) = D_{s|s=0}\frac{\partial}{\partial t}_{|t=r}\Gamma(s,t) = D_{s|s=0}\frac{\partial}{\partial t}_{|t=r}\exp_{c(s)}(t\xi_{c(s)}) \\
&= D_{s|s=0}\frac{d}{dt}_{|t=r}\gamma_{\xi_{c(s)}}(t) = D_{s|s=0}\eta^r(s) = \overline{\nabla}_{\dot{c}_r(0)}\eta^r = \overline{\nabla}_{Y(r)}\eta^r \\
&= -\mathcal{S}^r_{\eta^r(0)}Y(r) + \nabla^\perp_{Y(r)}\eta^r(0).
\end{aligned}$$

En consecuencia, se Y é un M-campo de Jacobi ó longo de γ en $\mathcal{J}(M,\gamma)$ o operador forma $\mathcal{S}^r$ de M^r satisfai

$$\mathcal{S}^r_{\dot{\gamma}(r)}Y(r) = -(Y'(r))^\top,$$

onde $\top$ denota a proxección ortogonal en $T_{\gamma(r)}M^r$.

No caso de que M^r sexa unha hipersuperficie podemos dicir aínda máis. O vector $Y'(r)$ é tanxente a M^r, pois Y é perpendicular a γ polo Lema A.1.3 xa que o é para $t = r$ e $t = 0$. Ademais, o espazo normal a M^r en $\gamma(r)$ está xerado precisamente por $\dot{\gamma}(r)$. Polo tanto, se M^r é hipersuperficie tense que

$$\mathcal{S}^r_{\dot{\gamma}(r)}Y(r) = -Y'(r).$$

Se M^r é unha hipersuperficie, hai unha forma máis eficiente de calcular $\mathcal{S}^r$. Denotemos por $\gamma^\perp$ a distribución ó longo de γ que está definida polo complemento ortogonal de $\mathbb{R}\dot{\gamma}(t)$ en $T_{\gamma(t)}\overline{M}$. Sexa

$$\overline{R}^\perp_\gamma := \overline{R}(\cdot,\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{|\gamma^\perp}.$$

Consideremos $D \in \operatorname{End}(\gamma^\perp)$, un campo tensorial ó longo de γ, dado por

$$D'' + \overline{R}^\perp_\gamma \circ D = 0, \;\; D(0) = \operatorname{Id}_{T_pM}, \;\; D'(0) = -\mathcal{S}_{\xi_p}.$$

Se $X \in T_pM$ e E_X é o campo de vectores paralelo ó longo de γ tal que $E_X(0) = X$, entón $Y = DE_X$ é o campo de Jacobi ó longo de γ con valores iniciais $Y(0) = X$ e $Y'(0) = -\mathcal{S}_{\xi_p}X$. En definitiva, $\gamma(r)$ é un punto focal de M ó longo de γ se e só se $D(r)$ é singular. Se M^r ten codimensión un, entón $D(r)$ é invertible e obtemos

$$\mathcal{S}^r_{\dot{\gamma}(r)}D(r)E_X(r) = \mathcal{S}^r_{\dot{\gamma}(r)}Y(r) = -Y'(r) = -(DE_X)'(r) = -D'(r)E_X(r).$$

Polo tanto, o operador forma $\mathcal{S}^r$ de M^r con respecto a $\dot{\gamma}(r)$ satisfai a ecuación

$$\mathcal{S}^r_{\dot{\gamma}(r)} = -D'(r) \circ D^{-1}(r).$$

Apéndice B

Sistemas de ecuacións polinómicas

O obxectivo desta sección é introducir un criterio para decidir a finitude do número de solucións dun sistema de ecuacións polinómicas. Dito criterio apóiase na teoría de bases de Gröbner. Para unha introdución máis detallada, pódese consultar [19].

Sexa K un corpo e $K[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinomios con coeficientes en K nas variables $x_1, \ldots, x_n$. Sexa $\mathbb{A}^n := \{(y_1, \ldots, y_n) : y_i \in K\}$ o espazo afín. Se $T \subset K[x_1, \ldots, x_n]$, denotaremos o conxunto de ceros de $T \subset \mathbb{A}^n$ como $V(T)$. Claramente os ceros de T e de $\langle T \rangle$, o ideal xerado por T, son os mesmos. Reciprocamente, dado un subconxunto $S \subset \mathbb{A}^n$ podemos construír $I(S) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ como o conxunto de polinomios que se anulan en S, é dicir,

$$I(S) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f(y) = 0 \text{ para cada } y \in S\}.$$

As bases de Gröbner introdúcense para resolver o seguinte problema proposto por Wolfgang Gröbner ó seu alumno de tese Bruno Buchberger.

Problema. *Sexa I un ideal en $K[x_1, \ldots, x_n]$. Atópese unha base para o espazo vectorial*

$$R = \frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{I}$$

e as constantes de estrutura para a multiplicación na álxebra asociativa R.

Buchberger resolveu dito problema e ademais aportou un algoritmo que xeneraliza algúns algoritmos coñecidos como o algoritmo de eliminación de Gauss ou o algoritmo da división de Euclides. Se examinamos con detalle o algoritmo da división de Euclides, veremos que é preciso escribir os termos asociados a cada monomio dos polinomios en orde decrecente polo seu grado. Se queremos xeneralizar este algoritmo deberemos fixar unha orde en $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Primeiro, notemos que hai unha correspondencia biunívoca entre os monomios de $K[x_1, \ldots, x_n]$ e $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ dada por

$$x = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mapsto \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}.$$

Polo tanto, definir unha orde en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ é equivalente a definir unha orde no conxunto de monomios de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Deste xeito, introducimos o concepto de orde monomial.

Definición B.0.1. Unha *orde monomial* é unha relación $>$ en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, ou equivalentemente no conxunto de monomios x^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, que satisfai:

(I) $>$ é unha orde total en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

(II) Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entón $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

(III) $>$ é unha boa orde en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

A continuación presentamos dúas ordes monomiais.

Definición B.0.2 (Orde lexicográfica)**.** Sexa $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Diremos que

$$\alpha >_{\text{lex}} \beta$$

se en $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ a primeira variable non nula pola esquerda é positiva.

Nótese que en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ hai $n!$ ordes lexicográficas distintas, mais nós imos considerar sempre a que fai que

$$x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1.$$

Definición B.0.3 (Orde lexicográfica graduada)**.** Sexa $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Diremos que

$$\alpha >_{\text{gradlex}} \beta$$

se $|\alpha| > |\beta|$ ou $|\alpha| = |\beta|$ e $\alpha >_{\text{lex}} \beta$, onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Dado un polinomio $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e fixado $>$ unha orde monomial, definimos os seguintes conceptos:

- O *multigrado de* f como $\operatorname{multideg}(f) = \text{máx}\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : a_\alpha \neq 0\}$.
- O *coeficiente principal de* f é $\operatorname{LC}(f) = a_{\operatorname{multideg}(f)} \in K$.
- O *monomio principal de* f é $\operatorname{LM}(f) = x^{\operatorname{multideg}(f)}$.
- O *termo principal de* f é $\operatorname{LT}(f) = \operatorname{LC}(f)\operatorname{LM}(f)$.

Por exemplo, consideremos o polinomio

$$f(x_1, x_2, x_3) = 14x_2^2 + 5x_1^2x_2^2x_3 + 19x_3^3 + 5x_1^2x_2 + x_1^2x_2x_3^3.$$

Considerando a orde lexicográfica temos que:

$$\operatorname{multideg}(f) = (2, 2, 1), \quad \operatorname{LC}(f) = 5, \quad \operatorname{LM}(f) = x_1^2x_2^2x_3, \quad \operatorname{LT}(f) = 5x_1^2x_2^2x_3.$$

Mentres que se consideramos a orde lexicográfica graduada temos que:

$$\operatorname{multideg}(f) = (2, 1, 3), \quad \operatorname{LC}(f) = 1, \quad \operatorname{LM}(f) = x_1^2x_2x_3^3, \quad \operatorname{LT}(f) = x_1^2x_2x_3^3.$$

Sexa $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal non trivial. Denotamos por $\operatorname{LT}(I)$ o *conxunto de termos principais de* I, isto é,

$$\operatorname{LT}(I) = \{cx^\alpha : \text{ se hai } f \in I \text{ tal que } \operatorname{LT}(f) = cx^\alpha\}.$$

Por outra banda, denotamos por $\langle \operatorname{LT}(I) \rangle$ o ideal xerado polos elementos de $\operatorname{LT}(I)$.

Definición B.0.4 (Base de Gröbner)**.** Fixada unha orde monomial dicimos que un subconxunto finito $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ dun ideal $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ é unha *base de Gröbner* se

$$\langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle = \langle \mathrm{LT}(I) \rangle.$$

Entón, agora estamos en disposición de enunciar o criterio que anunciabamos ó principio desta sección cuxa proba pode ser atopada en [19, páx. 234].

Teorema B.0.5. *Sexa $V = V(I)$ unha variedade afín en $\mathbb{C}^n$ e fixemos unha orde monomial en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Entón, os seguintes enunciados son equivalentes:*

- *V é un conxunto finito.*
- *Para cada i, $1 \leq i \leq n$, hai un certo $m_i \geq 0$ tal que $x_i^{m_i} \in \langle \mathrm{LT}(I) \rangle$.*

Exemplo B.0.6. Consideremos o sistema dado por

$$\begin{cases} 13x_1^2x_2^2 + 16x_1^4 + 9x_3^3 + 21x_2^2x_3 + 16x_3^3 = 0 \\ 19x_1^2x_3 + 22x_1^2x_2 + 15x_2^4 + 27x_1x_3^2 + 22 = 0 \\ 7x_1^2 + 10x_2x_3 + 3x_3^3 + 15x_2^2 + 11x_1x_3 = 0. \end{cases}$$

Sexa V a variedade afín en $\mathbb{C}^3$ que constitúe o conxunto de solucións do sistema anterior. Consideremos a orde lexicográfica graduada. Entón, $\mathrm{LT}(I) = \{\alpha x_1^4, \beta x_2^4, \gamma x_3^3 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$. Ademais, $x_1^4, x_2^4, x_3^3 \in \langle \mathrm{LT}(I) \rangle$. Polo tanto, polo Teorema B.0.5 V ten tan só un número finito de elementos.

Bibliografía

[1] W. Ballman, *Lectures on Kähler Manifolds*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006.

[2] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[3] J. Berndt, Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space. *J. Reine Angew. Math.* **395** (1989), 132–141.

[4] J. Berndt, M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209-235.

[5] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos, Homogeneous hypersurfaces in complex hyperbolic spaces. *Geom. Dedicata* **138** (2009), 129–150.

[6] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos, Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic spaces. *J. London Math. Soc. (2)* **74** (2006), no. 3, 778–798.

[7] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos, Real hypersurfaces with constant principal curvatures in the complex hyperbolic plane. *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), no. 10, 3349–3357.

[8] J. Berndt, H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 3425–3438.

[9] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Second edition. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[10] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[11] A. Borel, J. P. Serre, Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. *Amer. J. Math.* **75**, (1953), 409-448.

[12] D. Bump, *Lie groups*, Second edition. Graduate texts in Mathematics, **225**. Springer, New York, 2013.

[13] É. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. *Bull. Soc. Math. France*, **54** (1926), 214-264.

[14] É. Cartan, Les espaces riemanniens symétriques. *Verh. Int. Math. Kong. Zurich*, **1** (1932), 152-161.

[15] É. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. *Ann. Mat. Pura Appl.* **17** (1938), no. 1, 177–191.

[16] T. E. Cecil, P. J. Ryan, *Geometry of Hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2015.

[17] T. E. Cecil, Q. S. Chi, G. Jensen, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures. *Ann. of Math. (2)* **166** (2007), no. 1, 1-76.

[18] I. Chavel, *Riemannian geometry. A modern introduction*, Second Edition. Cambridge Tracts in Mathematics, **98**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[19] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Fourth edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2015.

[20] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, Non-Hopf real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex space forms. *Indiana Univ. Math. J.* **60** (2011) no. 3, 859-882.

[21] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, Isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces. *Adv. Math.* **314** (2017), 756-805.

[22] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, **10**. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[23] M. Domínguez-Vázquez, *Hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos proxectivo e hiperbólico complexos*, Publicacións do Departmento de Xeometría e Topoloxía **118**, Universidade de Santiago de Compostela, 2010.

[24] M. Domínguez-Vázquez, *An introduction to isoparametric foliations* `http://verso.mat.uam.es/ miguel.dominguezv/teaching/download /Notas_isoparametricas.pdf`. Consultado por última vez: xullo 2018.

[25] M. Domínguez-Vázquez, Isoparametric foliations on complex projective spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016) no. 2, 1211-1249.

[26] C. Ehresmann, *Sur la théorie des espaces fibrés*, Colloques de Topologie Algebrique, C.N.R.S., Paris, 1947.

[27] D. Ferus, H. Karcher, H. F. Münzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. *Math. Z.* **177** (1981), 479–502.

[28] C. Gorodski, *Notas de Geometria Riemanniana*, Departamento de Matemática, IME-USP, 2016.

[29] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[30] H. Hopf, *Zur Topologie der Komplexen Mannigfaltigkeiten*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, 167–185.

[31] S. Immervoll, On the classification of isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures in spheres. *Ann. of Math. (2)* **168** (2008), 1011-1024.

[32] K. Iwasawa, On Some Types of Topological Groups. *Ann. of Math.* (2) **50** (1949), 507–558.

[33] A. Kirchhoff, Sur l'existence des certains champs tensoriels sur les sphères à n dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris* **225** (1947), 1258-1260.

[34] M. Kimura, Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 137–149.

[35] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Second edition. Progress in Mathematics, **140**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[36] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vol. II. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1969.

[37] J. Hahn, Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms. *Math. Z.* **187** (1984) no. 2, 195–208.

[38] W. Y. Hsiang, H. B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity. *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1–38.

[39] J. M. Lee, *Riemannian geometry. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, **176**. Springer-Verlag, New York, 1997.

[40] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **218**. Springer, New York, 2013.

[41] T. Levi-Civita, Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo. *Att. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **26** (1937), 355–362.

[42] S. B. Myers, N. E. Steenrod, The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. *Ann. of Math. (2)* **40** (1939) no. 2, 400-416.

[43] M. Lohnherr, *On ruled real hypersurfaces of complex space forms*, PhD Thesis, University of Cologne, 1998.

[44] S. Montiel, Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), no. 3, 515–535.

[45] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, **69**. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[46] A. Newlander, L. Niremberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2)* **65** (1957), 391-404.

[47] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. *Math. Ann.* **251** (1980), 57–71.

[48] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry. With applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, **103**. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[49] B. O'Neill, The fundamental equations of a submersion. *Michigan Math. J.* **13** (1966), 459–469.

[50] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie Groups and Lie Algebras* III, Springer, 1994.

[51] B. Segre, Famiglie di hipersuperficie isoparametriche negli spazieuclidei ad un qualunque numero di dimensioni. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **27** (1938), 203–207.

[52] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, **2**, Publish or Perish, 1999.

[53] R. Takagi, On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space. *Osaka J. Math.* **10** (1973), 495–506.

[54] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures. *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 43–53.

[55] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures II. *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 507–516.

[56] L. W. Tu, *An introduction to smooth manifolds*, Second Edition. Springer, New York, 2008.

[57] Q. M. Wang, Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex projective spaces (I). *Sci. Sinica Ser. A* **26** (1983), 1017–1024.

[58] K. Yano, M. Kon, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, **3**. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.