Esenciais USC

ANÁLISE MATEMÁTICA
o concepto de límite

Alberto Cabada Fernández, Lucía López Somoza e Jorge Rodríguez López (Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización)

Pódese dicir, de xeito informal, que a noción de límite dunha función f en $\bar{x}$ indícanos o valor ao que se achega esta cando nos aproximamos ao valor de $\bar{x}$ (ben sexa este un número real ou máis ou menos infinito).

1. Límites de sucesións de números reais

Unha sucesión de números reais é unha función definida en $\mathbb{N}$ con valores en $\mathbb{R}$, é dicir, unha función que a cada número natural n lle asocia un número real x_n. Vexamos un par de exemplos.

Sucesión $\{(-1)^n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{R} & -1 & 1/2 & -1/3 & 1/4 & \cdots \end{array}$$

Sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{R} & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \end{array}$$

Resulta interesante estudar se existe algún valor $\bar{x}$ no que se acumulan os valores da sucesión, x_n, para n *arbitrariamente grande*. Se existe tal $\bar{x}$ dise que é o límite da sucesión.

Formalmente dicimos que $\bar{x}$ é o límite da sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,|\, n \geq N_\varepsilon \implies |x_n - \bar{x}| < \varepsilon,$$

é dicir, se dado un número positivo ε somos capaces de atopar un número natural N_ε (que depende de ε) tal que todos os termos da sucesión con $n \geq N_\varepsilon$ cumpren que $x_n \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$.

Vexamos graficamente o que significa isto para as sucesións anteriores. No caso da sucesión $\{(-1)^n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o seu límite é o valor 0. Na figura 1 podemos ver como para $\varepsilon = 1/4$ temos que todos os termos da sucesión a partir do que está na quinta posición, se atopan dentro da franxa sombreada en azul e, polo tanto, están entre $-1/4$ e $1/4$. Así que, para $\varepsilon = 1/4$ podemos escoller $N = 5$.

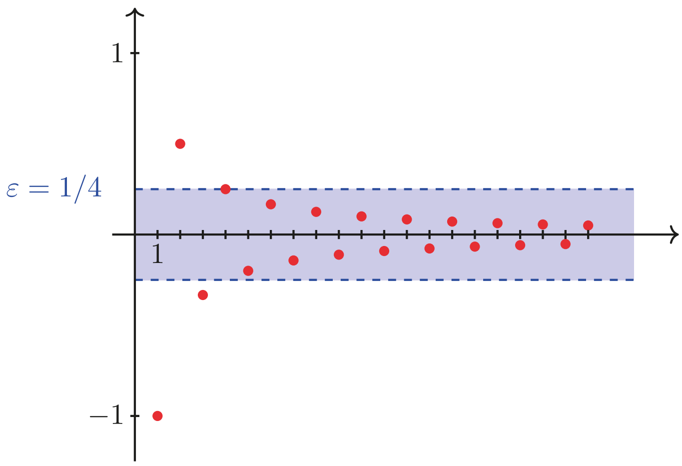

Figura 1: Converxencia da sucesión $\{(-1)^n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Un razoamento similar é válido para calquera ε positivo e N_ε adecuado, o que nos permite asegurar que cero é o límite da sucesión $\{(-1)^n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pola contra, temos que a sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ten límite ou, o que é o mesmo, non é converxente xa que, por grande que sexa n, os valores de x_n sempre oscilan entre -1 e 1. Como se pode ver na figura 2, se collemos $\varepsilon = 1/2$ os termos impares da sucesión, x_{2n+1}, quedan fóra do intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, o que implica que 1 non pode ser o límite da sucesión. Dun xeito similar pódese comprobar que −1 tampouco é o límite da sucesión.

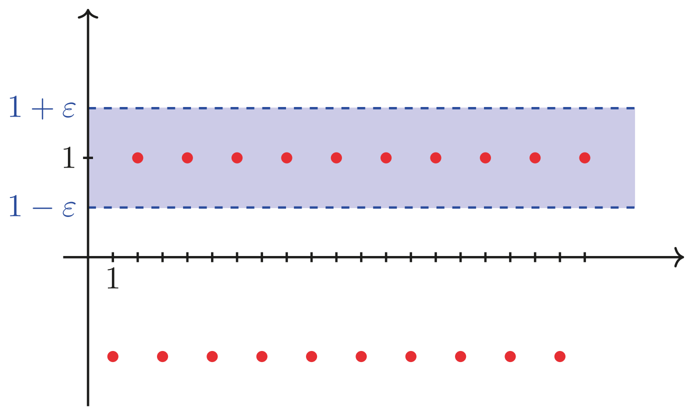

Figura 2: Diverxencia da sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Neste caso a sucesión ten dúas subsucesións converxentes a límites distintos: $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión constante igual a −1 e $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión constante igual a 1. Deste feito tamén se deduce que a sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é converxente.

É importante recalcar que unha sucesión de números reais non ten porque ter límite e, se este existe, será único (unicidade de límite). Neste último caso, calquera subsucesión é converxente e o seu límite coincide co da sucesión de partida.

Un concepto equivalente á converxencia dunha sucesión en $\mathbb{R}$ vén dado polo que denominamos unha sucesión de Cauchy, na que se ten que a distancia entre dous elementos calquera da sucesión é todo o pequena que se queira a partir dun índice suficientemente elevado. A definición de sucesión de Cauchy é a seguinte

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N_\varepsilon\in\mathbb{N}\,|\,p,\,q\geq N_\varepsilon\implies|x_p-x_q|<\varepsilon.$$

É importante salientar que unha sucesión de Cauchy garántenos a existencia dun límite real da sucesión estudada, se ben non nos di cal é o seu valor.

O seguinte resultado é unha consecuencia relevante da converxencia dunha sucesión.

Teorema 1. *Calquera sucesión converxente de números reais, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, está limitada, é dicir, existe unha constante positiva $M>0$ tal que $|x_n|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$.*

Obviamente, non todas as sucesións limitadas son converxentes! (pensemos de novo na sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$). Porén, se engadimos unha hipótese adicional: que a sucesión sexa monótona (isto é, crecente ou decrecente), entón o resultado é certo, entendendo que unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crecente se $x_{n+1}\geq x_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (analogamente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrecente se $x_{n+1}\leq x_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$). O resultado é o seguinte:

Teorema 2. *Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais monótona e limitada, entón $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é converxente.*

En resumo, para unha sucesión monótona a converxencia equivale ao carácter limitado desta. É importante subliñar que hai sucesións que non son monótonas e tamén son converxentes, como por exemplo a sucesión $\{(-1)^n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estudada anteriormente.

2. Límites de funcións reais dunha variable real

O seguinte paso, tras o estudo da noción de límite para sucesións, é considerar funcións reais de variable real, é dicir, funcións definidas nun intervalo aberto $(a,b)\subset\mathbb{R}$ que a cada elemento $x\in(a,b)$ lle asignan un certo valor real $f(x)$.

Veremos a estreita relación existente entre o concepto de límite para estas funcións e a definición dada para o límite de sucesións.

Dicimos que $L\in\mathbb{R}$ é o límite da función $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cando x tende a $\bar{x}$ se

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\,|\,0<|x-\bar{x}|<\delta\implies|f(x)-L|<\varepsilon,$$

é dicir, se dado un número positivo ε somos capaces de atopar outro número positivo δ (que depende de ε e $\bar{x}$) tal que $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ para todo $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$, $x\neq\bar{x}$.

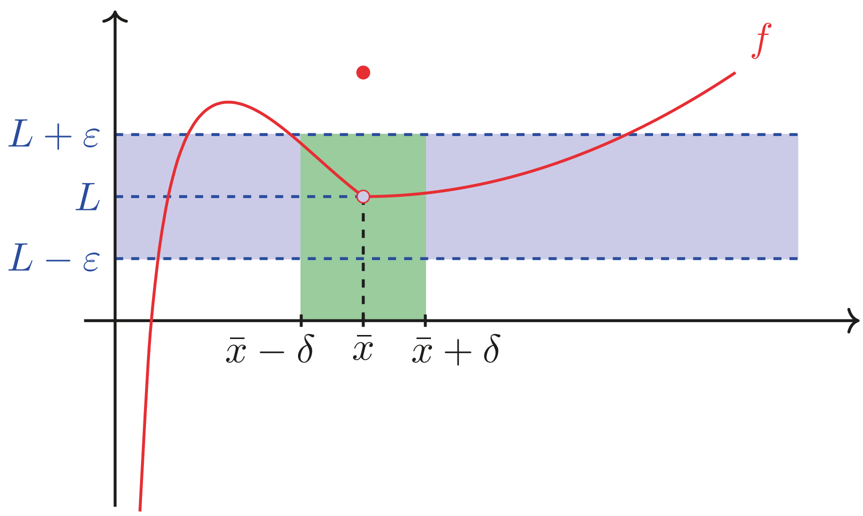

Figura 3: Límite dunha función dunha variable real.

Obsérvese que o valor de f en $\bar{x}$ non é relevante á hora de calcular o límite nese punto, de feito non é necesario que estea definida en $\bar{x}$. No caso de que $f(\bar{x})=L$ diremos que f é continua en $\bar{x}$.

O seguinte resultado é o nexo de unión entre os conceptos de límite para sucesións e para funcións. Como consecuencia del, podemos trasladar as propiedades deducidas para sucesións ao marco das funcións reais dunha variable real.

Teorema 3. *Sexan $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\bar{x}\in(a,b)$ e $L\in\mathbb{R}$. Equivalen:*

1. *L é o límite da función f cando x tende a $\bar{x}$;*
2. *para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(a,b)\setminus\{\bar{x}\}$ converxente a $\bar{x}$, a sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L.*

Se consideramos o límite en $\overline{x}$ igual a máis (ou menos) infinito, en lugar de estudar o comportamento de f en puntos próximos a $\overline{x}$ debemos considerar puntos arbitrariamente grandes (ou pequenos), é dicir, a definición é a seguinte

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists M > 0 \, | \, x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

3. Límites de funcións reais de varias variables reais

O concepto de límite pode formularse tamén para funcións reais de varias variables reais, é dicir, funcións definidas nun conxunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que a cada elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ lle asignan un valor real $f(x)$. Por simplicidade, enunciaremos os resultados desta sección para funcións de dúas variables reais, é dicir, consideraremos $n = 2$.

Deste xeito, dise que $L \in \mathbb{R}$ é o límite da función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cando (x, y) tende a $(\bar{x}, \bar{y})$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, | \, 0 < \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \\ \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon,$$

onde $\|(x, y)\|$ denota a distancia euclidiana do punto (x, y) a $(0, 0)$, isto é, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Noutras palabras dise que L é o límite de f en $(\bar{x}, \bar{y})$ se dado un número positivo ε somos capaces de atopar outro número positivo δ (que depende de ε e do punto $(\bar{x}, \bar{y})$) tal que $f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para todo $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$ que diste de (x, y) menos que δ (véxase a figura 4).

Analogamente ao que acontecía no caso de funcións dunha variable real, o concepto de límite de funcións equivale ao de límite de sucesións.

Teorema 4. *Sexan* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ *e* $L \in \mathbb{R}$. *Equivalen*:

1. *L é o límite da función f cando (x, y) tende a $(\bar{x}, \bar{y})$;*
2. *para toda sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega \backslash \{(\bar{x}, \bar{y})\}$ converxente a $(\bar{x}, \bar{y})$, a sucesión $\{f(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L.*

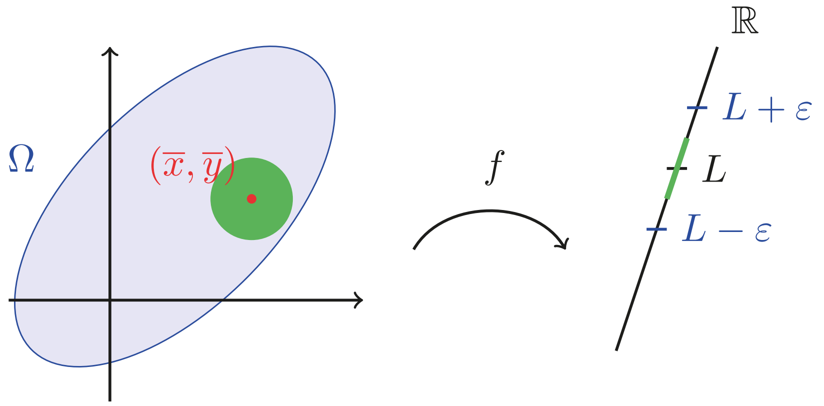

Figura 4: Límite para unha función real de dúas variables reais.

Observación 1. Como consecuencia dos teoremas 3 e 4, vemos que non é preciso que a función f estea definida en $(\bar{x}, \bar{y})$ para poder falar do límite cando (x, y) tende a $(\bar{x}, \bar{y})$ sempre e cando nos poidamos aproximar por puntos do dominio de f a $(\bar{x}, \bar{y})$, é dicir, se existe unha sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos do dominio de f que converxe a $(\bar{x}, \bar{y})$.

Veremos a continuación algunhas definicións e resultados que serán de utilidade para levar a cabo o estudo da existencia de límite dunha función nun punto.

3.1. Límites direccionais

Dise que unha función f ten límite direccional L no punto $(\bar{x}, \bar{y})$ na dirección da recta $y - \bar{y} = p\,(x - \bar{x})$, $p \in \mathbb{R}$, se existe o seguinte límite dunha variable real

$$\lim_{x \to \bar{x}} f_p(x) = L,$$

onde $f_p(x) := f(x, \bar{y} + p\,(x - \bar{x}))$, é dicir, se a restrición de f á recta ten límite no punto (véxase a figura 5).

Resulta evidente que existen infinitos límites direccionais (un por cada recta que poidamos tomar pasando polo punto).

Ademais, a existencia de límite está relacionada coa dos límites direccionais, tal e como se pode ver no seguinte resultado.

Teorema 5. *Se unha función ten límite L nun punto $(\bar{x}, \bar{y})$, entón existe o límite direccional no punto en calquera dirección e este límite direccional é igual a L.*

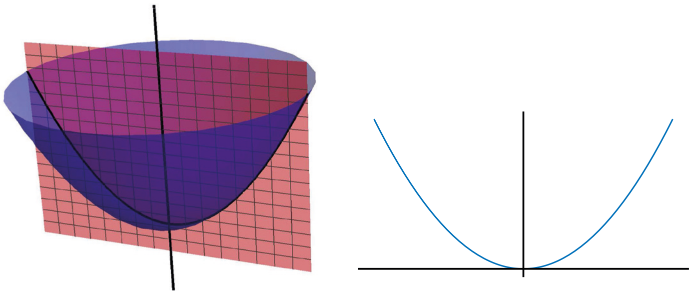

Figura 5: Á esquerda, a superficie $z = f(x, y)$ xunto co plano ortogonal a $z = 0$ na dirección da recta $y - \bar{y} = p\,(x - \bar{x})$. Á dereita, a súa intersección, é dicir, a gráfica de f_p.

É dicir, unha condición necesaria para que unha función teña límite nun punto é que existan todos os límites direccionais no punto e sexan todos iguais.

Ilustremos este concepto con tres exemplos.

En primeiro lugar, se consideramos $f(x,y) = \dfrac{y}{x+1}$ vemos que todos os límites direccionais da función no punto $(0,0)$ existen e son iguais a 0. En efecto, se tomamos unha recta xenérica pasando por $(0,0)$, a cal ten por ecuación $y = p\,x$, vemos que a restrición de f a esta recta

$$f_p(x) := f(x, p\,x) = \frac{p\,x}{x+1}$$

ten límite 0 cando x tende a 0. Como consecuencia deducimos que o límite de f en $(0,0)$ (en caso de que exista!) ten que valer 0.

Por outra banda, se consideramos a función $g(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ e o punto $(0,0)$, vemos que a restrición de g á recta $y = p\,x$

$$g_p(x) := g(x, p\,x) = \frac{p\,x^2}{(1+p^2)x^2}$$

ten límite $p/(1+p^2)$ cando x tende a 0. Como consecuencia dedúcese que a función g non ten límite en $(0,0)$ (xa que os límites direccionais dependen de p e, polo tanto, son distintos).

Finalmente, para a función $h(x,y) = \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2}$ pódese comprobar facilmente que todos os límites direccionais no $(0,0)$ son 0, xa que

$$h_p(x) := \frac{p\,x^3}{x^2(x^2+p^2)} = \frac{p\,x}{x^2+p^2}.$$

Non obstante, o límite da función h no $(0,0)$ non pode ser igual a 0, pois a sucesión $\{(1/n, 1/n^2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a $(0,0)$ e $\{h(1/n, 1/n^2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a 1/2. Isto implica que non existe o límite.

3.2. Límites ao longo de curvas

Este concepto é análogo ao de límite direccional agás polo feito de que realizamos a aproximación ao punto a través dunha curva que pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$ (en lugar de aproximarnos ao longo dunha recta).

A existencia de límites ao longo de curvas relaciónase coa existencia de límite de forma análoga ao que acontecía cos límites direccionais.

Teorema 6. *Se unha función ten límite L nun punto $(\bar{x}, \bar{y})$, entón existe o límite no punto ao longo de calquera curva e este límite é igual a L.*

É dicir, unha condición necesaria para que unha función teña límite nun punto é que existan os límites ao longo de calquera curva que pase polo punto e sexan todos iguais.

Se consideramos por exemplo unha parábola xenérica pasando polo punto $(0,0)$, a cal ten por ecuación $y = k\,x^2, k \in \mathbb{R}$, podemos tomar a restrición das funcións f e g a esta curva, obtendo dúas funcións dunha variable real

$$f_{|y=k\,x^2} := f(x, k\,x^2) = \frac{k\,x^2}{x+1}$$

$$\text{e}\quad g_{|y=k\,x^2} := g(x, k\,x^2) = \frac{k\,x}{1+k^2x^2}.$$

O límite de cada unha delas cando x tende a 0 sería o límite ao longo da curva considerada. Nos exemplos anteriores os límites ao longo de calquera parábola son 0. Pola contra, se tomamos a restrición de h a unha parábola da forma $y = k\,x^2$ temos que

$$h_{|y=k\,x^2} := h(x, k\,x^2) = \frac{k\,x^4}{x^4(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

O límite cando x tende a 0 depende de k o que tamén implica que h non ten límite no $(0,0)$, como xa sabiamos.

T.M. APOSTOL. Análisis Matemático. Reverté, 1996.

R. G. BARTLE - D. R. SHERBERT. Introducción al Análisis Matemático de una Variable (2ª Ed.). Limusa, 2000.