Esenciais USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

XEOMETRÍA DIFERENCIAL
superficies regulares

María Elena Vázquez Abal (Departamento de Matemáticas)

Neste Esencial imos considerar S unha superficie regular e $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ unha parametrización nun punto $p \in \mathbf{x}(U)$, tal que cada $(u,v) \rightsquigarrow \mathbf{x}(u,v)$. Pola definición de parametrización, $\mathbf{x}$ é un difeomorfismo de U en $\mathbf{x}(U)$, polo que «CALQUERA COUSA (p)» quere dicir «CALQUERA COUSA (u,v)» onde $(u,v) \in U$ é o único par que verifica $\mathbf{x}(u,v) = p$.

Tamén denotaremos con $\alpha : I \to \mathbf{x}(U) \subset S$ unha curva parametrizada por t que pasa por p para $t = 0$, e con $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, o vector tanxente en p, é dicir, $\alpha(0) = p$ e $\overrightarrow{\alpha}'(0) = \overrightarrow{\mathbf{v}}$. Como $\mathbf{x}$ é un difeomorfismo, toda curva na veciñanza $\mathbf{x}(U)$ da superficie ten que ser imaxe dunha curva en U. É dicir, como $\alpha(t) \in \mathbf{x}(U)$, $\forall t \in I$, consideraremos a curva $t \in I \rightsquigarrow (u(t), v(t)) \in U \subset \mathbb{R}^2$ en U, que verifica que $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$.

Base do plano tanxente a S en p:

$$\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u(0), v(0))$$
$$\overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u(0), v(0))$$

Vector normal unitario a S en p:

$$\overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p) \times \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p)}{\|\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p) \times \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p)\|}$$

Notación alternativa

$$\overrightarrow{\mathbf{x}_u}(p) = \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p),\ \overrightarrow{\mathbf{x}_v}(p) = \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p) \text{ e } \overrightarrow{N}(p) = \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)$$

Compoñentes dun vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in T_pS$ con respecto da base $\{\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p)\}$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\alpha}'(0) \underset{\text{regra da cadea}}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u(0), v(0))\frac{du}{dt}(0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u(0), v(0))\frac{dv}{dt}(0)$$
$$= \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p)\frac{du}{dt}(0) + \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p)\frac{dv}{dt}(0)$$

Cando restrinximos o produto escalar $\langle -, - \rangle$ (usual de $\mathbb{R}^3$) a $T_p(S)$, o que estamos a facer, dende un punto de vista alxébrico, é considerar unha forma bilinear aplicada a vectores do espazo vectorial de dimensión 2, $T_p(S)$.

A forma bilinear $\mathbb{I}_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \rangle$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in T_p(S)$ é a **Primeira forma fundamental de S en p.**

Se expresamos o producto escalar $\langle -, - \rangle$ con respecto aos vectores da base, $\{\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p)\}$, obtemos os coeficientes da Primeira forma fundamental de S en p:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p) \rangle &= g_{11}(p) \\
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p) \rangle &= g_{12}(p) \\
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p) \rangle &= g_{21}(p) \\
\langle \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p) \rangle &= g_{22}(p)
\end{aligned}$$

Como $\langle -, - \rangle$ é simétrico, $g_{21}(p) = g_{21}(p)$:

$$\mathbb{I}_p = \begin{pmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{12}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix}$$

Notación alternativa

$$g_{11}(p) = E(p),\ g_{12}(p) = g_{21}(p) = F(p) \text{ e } g_{22}(p) = G(p)$$

A fin de indagar como se curvan as superficies no espazo, usaremos a **aplicación de Gauss**, que é aquela que a cada punto da superficie, $p = \mathbf{x}(u,v) \in \mathbf{x}(U)$, lle fai corresponder o punto na esfera determinado polo vector *unitario* $\overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) \in S^2(1)$.
A **aplicación de Gauss** é diferenciable e ademais a súa diferencial, $(d\mathbf{x}_3)_p$, pensada como aplicación linear do plano tanxente $T_p(S)$ en si mesmo (non é difícil ver que $T_p(S) = T_{\mathbf{x}_3(p)}S^2(1)$), resulta ser *autoadxunta* con respecto ao producto escalar de $\mathbb{R}^3$. Isto quere dicir que se $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ son vectores de $T_p(S)$, podémolos intercambiar coa diferencial no produto escalar ou, de forma máis precisa,

$$\langle (d\mathbf{x}_3)_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}), \overrightarrow{\mathbf{w}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, (d\mathbf{x}_3)_p(\overrightarrow{\mathbf{w}}) \rangle$$

Á aplicación linear $-(d\mathbf{x}_3)_p$, dáselle o nome de **operador forma** (nome bastante apropiado... agás o signo!) ou **endomorfismo de Weingarten** e, polo feito de ser autoadxunto, a súa matriz asociada con respecto dunha base ortogonal é *simétrica*, co que podemos garantir que se pode diagonalizar.

A base de $T_p(S)$ formada polos autovectores desta matriz, $\{\overrightarrow{\mathbf{v}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{v}_2}(p)\}$, resulta ser ortogonal se os autovalores son distintos (polo que podemos escollela ortonormal), e aos autovalores asociados, $\chi_1(p)$ e $\chi_2(p)$, ímolos chamar *curvaturas principais* en p. Dende un punto de vista alxébrico, $\chi_1(p)$ e $\chi_2(p)$ son o máximo e o mínimo da forma cuadrática $\overrightarrow{\mathbf{v}} \rightsquigarrow \langle -(d\mathbf{x}_3)_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}), \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle$ cando actúan sobre vectores tanxentes unitarios.

Xa podemos dar unha medida de como se curva S en p utilizando dúas cantidades:

1. Curvatura de Gauss $K(p) = \det(-d\mathbf{x}_3)_p = \chi_1(p) \cdot \chi_2(p)$

2. Curvatura media $H(p) = \frac{1}{2}\text{traza}(-d\mathbf{x}_3)_p = \frac{1}{2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))$

Aproveitando que o operador forma é autoadxunto, podemos definir unha forma bilinear simétrica que actúe sobre vectores do plano tanxente

$$\mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = \langle -(d\mathbf{x}_3)_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}), \overrightarrow{\mathbf{w}} \rangle,$$

que se denomina **Segunda forma fundamental de S en** p.
A matriz asociada á Segunda forma fundamental de S en p con respecto da base $\{\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p)\}$ (coeficientes da Segunda forma fundamental de S en p) é:

$$L_{11}(p) = \mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p))$$
$$L_{12}(p) = \mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p))$$
$$L_{21}(p) = \mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p))$$
$$L_{22}(p) = \mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p))$$

Como $\langle -, - \rangle$ é simétrico e o operador forma autoadxunto $L_{21}(p) = L_{21}(p)$:

$$\mathbb{II}_p = \begin{pmatrix} L_{11}(p) & L_{12}(p) \\ L_{12}(p) & L_{22}(p) \end{pmatrix}$$

$$K(p) = \frac{L_{11}(p)L_{22}(p) - L_{12}^2(p)}{g_{11}(p)g_{22}(p) - g_{12}^2(p)}$$

$$H(p) = \frac{1}{2}\frac{L_{11}(p)g_{22}(p) + L_{22}(p)g_{11}(p) - 2L_{12}(p)g_{12}(p)}{g_{11}(p)g_{22}(p) - g_{12}^2(p)}$$

Expresión local da diferencial da aplicación de Gauss

$$\overrightarrow{d\mathbf{x}_3}(p) = -\begin{pmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{12}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L_{11}(p) & L_{12}(p) \\ L_{12}(p) & L_{22}(p) \end{pmatrix}$$

Notación alternativa

$$L_{11}(p) = e(p),\ L_{12}(p) = L_{21}(p) = f(p) \text{ e } L_{22}(p) = g(p)$$

Se consideramos agora unha curva α na superficie, parametrizada polo parámetro lonxitude de arco s, esta forma bilinear permítenos dar unha interpretación do seu vector aceleración nun punto calquera $p = \alpha(0)$, $\overrightarrow{\alpha}''(0)$. Como o vector aceleración é un vector de $\mathbb{R}^3$, podemos expresalo como combinación linear da base $\{\overrightarrow{\mathbf{x}_1}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_2}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)\}$; é máis, podemos descompoñer $\overrightarrow{\alpha}''(0)$ na súa compoñente tanxencial no $T_p(S)$, $(\overrightarrow{\alpha}''(0))^T$, e na compoñente normal, $(\overrightarrow{\alpha}''(0))^N$,

$$\overrightarrow{\alpha}''(0) = (\overrightarrow{\alpha}''(0))^T + (\overrightarrow{\alpha}''(0))^N$$

Notación alternativa

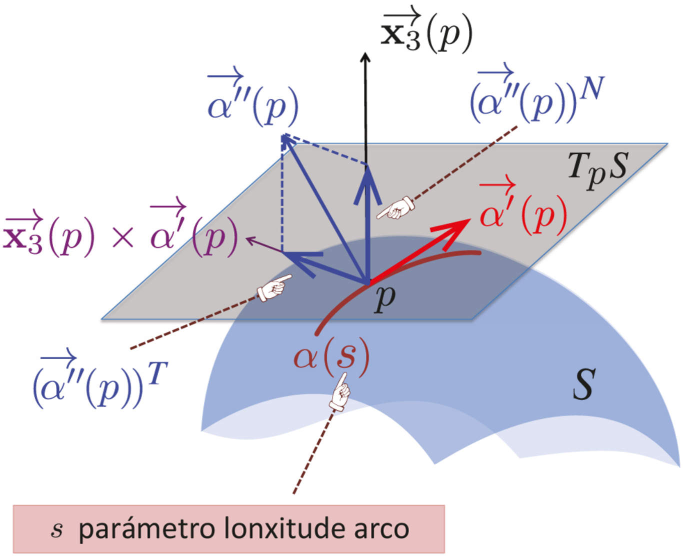
$$\overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) \times \overrightarrow{\alpha}'(0) = J(\overrightarrow{\alpha}'(0))$$

Curvatura xeodésica da curva α no punto p

$$(\overrightarrow{\alpha}''(0))^T = \langle \overrightarrow{\alpha}''(0), \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) \times \overrightarrow{\alpha}'(0) \rangle \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) \times \overrightarrow{\alpha}'(0)$$

Curvatura normal da curva α no punto p

$$(\overrightarrow{\alpha}''(0))^N = \langle \overrightarrow{\alpha}''(0), \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) \rangle \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) = \mathbb{II}_p(\overrightarrow{\alpha}'(0), \overrightarrow{\alpha}'(0)) \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)$$



$$\overrightarrow{\alpha''}(p) = (\overrightarrow{\alpha''}(p))^T + (\overrightarrow{\alpha''}(p))^N$$

$$\underbrace{\| \overrightarrow{\alpha''}(p) \|^2}_{\text{curvatura de } \alpha \text{ en } p} = \underbrace{\| (\overrightarrow{\alpha''}(p))^T \|^2}_{\text{curvatura xeodésica de } \alpha \text{ en } p} + \underbrace{\| (\overrightarrow{\alpha''}(p))^N \|^2}_{\text{curvatura normal de } \alpha \text{ en } p}$$

Lembremos que, como a curva α está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, temos, utilizando o triedro de Frenet-Serret, que $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\alpha}'(0) = \overrightarrow{v_1}(p)$, e $\overrightarrow{\alpha}''(0) = \chi^\alpha(p)\overrightarrow{v_2}(p)$, onde $\chi^\alpha(p)$ é a curvatura de α en p. Así

$$(\overrightarrow{\alpha}''(0))^N = \chi^\alpha(p) \langle \overrightarrow{v_2}(p), \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) \rangle \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)$$

Se ademais a curva α fose *a curva plana obtida ao intersecar a superfie S co plano que pasa por p, xerado por $\overrightarrow{\mathbf{v}}$* e $\overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)$ (é a **sección normal de S en p na dirección de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$**), teriamos que $\overrightarrow{v_2}(p) = \pm \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)$, co que

$$(\overrightarrow{\alpha}''(0))^N = \pm \chi^\alpha(p) \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p) = \mathbb{II}_p(\overrightarrow{\alpha}'(0), \overrightarrow{\alpha}'(0)) \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(p)$$

Curvatura normal de S na dirección de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ no punto p

$$\chi_n(p, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathbb{II}_p\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|}, \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|} \right) = \frac{\mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})}{\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle}$$

Notación alternativa

$$\overrightarrow{\mathbf{t}}(p) = \overrightarrow{v_1}(p), \; \overrightarrow{\mathbf{n}}(p) = \overrightarrow{v_2}(p) \text{ e } \overrightarrow{\mathbf{b}}(p) = \overrightarrow{v_3}(p)$$

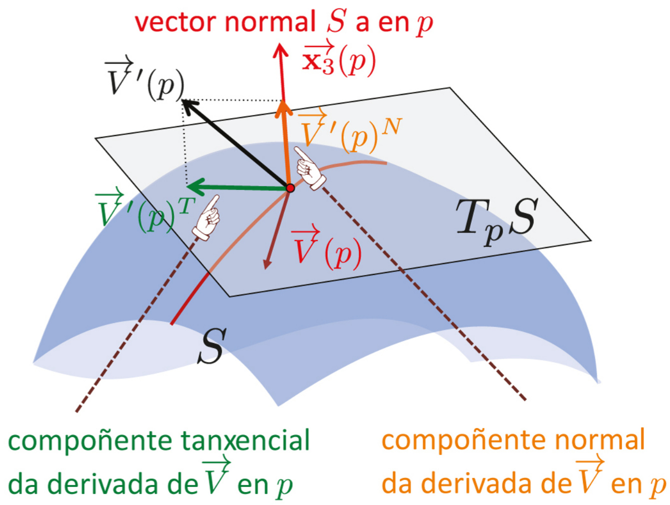
Atención, importante

- Un vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in T_p(S)$ define unha **dirección principal** en p, se $\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|}$ é un autovector do operador forma. É dicir, $-(d\mathbf{x}_3)_p\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|}\right) = \chi_i(p)\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|}$, con $i = 1, 2$.
- As **liñas de curvatura** son aquelas cuxo vector tanxente en cada punto define unha dirección principal.
- *Teorema de Olinde-Rodrígues*: Se $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ define unha dirección principal para todo valor de t, entón $-\dfrac{d\mathbf{x}_3}{dt}(t) = \chi_i(\alpha(t))\,\overrightarrow{\alpha}'(t)$, todo isto sempre con $i = 1$ ou 2.
- Un vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in T_p(S)$ define unha **dirección asintótica** en p, se $\chi_n(p, \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0$.
- As **liñas ou curvas asintóticas** son aquelas cuxo vector tanxente en cada punto define unha dirección asintótica.
- Dous vectores $\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in T_p(S)$ definen **direccións conxugadas** en p se verifican que $\mathbb{II}_p(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}) = 0$.

Un punto $p \in S$ será:

- **Plano** se $K(p) = H(p) = 0$
- **Parabólico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$
- **Elíptico** se $K(p) > 0$
- **Hiperbólico** se $K(p) < 0$

Derivada covariante



Consideramos S unha superficie orientada con campo de vectores normal unitario $\overrightarrow{N}$. Se α: $I \to S$ é unha curva parametrizada, denotaremos por $\mathfrak{X}(\alpha)$ o conxunto de campos de vectores tanxentes e diferenciables ao longo da curva parametrizada $\alpha : I \to S$. Defínese a **derivada covariante** de $\overrightarrow{V} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ como a parte tanxente de $\overrightarrow{V'}$, é dicir,

$$\frac{D\overrightarrow{V}}{dt}(t) := \overrightarrow{V'}(t)^T = \overrightarrow{V'}(t) - \langle \overrightarrow{V'}(t), \overrightarrow{N}(t)\rangle \overrightarrow{N}(t)$$

Expresión **intrínseca** da derivada covariante:

$$\frac{D\overrightarrow{V}}{dt}(t) = \left[\frac{dV^k}{dt}(t) + V^i(t)\Gamma^k_{ij}(t)\frac{du^j}{dt}(t)\right]\overrightarrow{\mathbf{x}_k}(t); i, j, k = 1, 2$$

Un campo de vectores $\overrightarrow{V} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é **paralelo** ao longo de α se $\dfrac{D\overrightarrow{V}}{dt}(t) = \overrightarrow{0}$.

Expresión local dos símbolos de Christoffel

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} & \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} & \partial_2 g_{12} - \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} \\ \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} & \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} & \frac{1}{2}\partial_2 g_{22} \end{pmatrix}$$

Xeodésicas

Sexa $\gamma : I \to S$ unha curva parametrizada nunha superficie regular S. Dise que γ é unha **xeodésica parametrizada** de S se o seu campo de vectores velocidade é paralelo, é dicir, se $\frac{D\overrightarrow{\gamma}'}{dt}(t) = \overrightarrow{0}$, para todo $t \in I$.

Se $\gamma(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$ é xeodésica parametrizada, entón $\frac{D\overrightarrow{\gamma}'}{dt}(t) = \overrightarrow{0}$, e as ecuacións diferenciais escríbense en $\mathbb{R}^2$ como

$$0 = \frac{d^2u^1}{dt^2}(t) + \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\Gamma^1_{ij}(t)$$
$$0 = \frac{d^2u^2}{dt^2}(t) + \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\Gamma^2_{ij}(t)$$

para todo $t \in I$ e $i, j \in \{1, 2\}$.

Se nos referimos á traza dunha curva para definir o concepto de xeodésica, diremos que $C \subset S$ é XEODÉSICA en S se calquera parametrización proporcional ao parámetro lonxitude de arco $t = a + bs$ con traza C, $\gamma : I \to S$, verifica que é unha xeodésica parametrizada de S, é dicir, se $\frac{D\overrightarrow{\gamma}'}{dt}(t) = \overrightarrow{0}$, para todo $t \in I$.

Expresión da curvatura xeodésica no parámetro lonxitude de arco:

$$\chi^{\alpha}_{xeo}(s) = (\overrightarrow{\alpha}'(s), \overrightarrow{\alpha}''(s), \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(s))$$

Expresión da curvatura xeodésica nun parámetro t:

$$\chi^{\alpha}_{xeo}(t) = \frac{(\overrightarrow{\alpha}'(t), \overrightarrow{\alpha}''(t), \overrightarrow{\mathbf{x}_3}(s))}{\|\overrightarrow{\alpha}'(t)\|^3}$$

Denominación alternativa

Xeodésica parametrizada

$\Updownarrow$

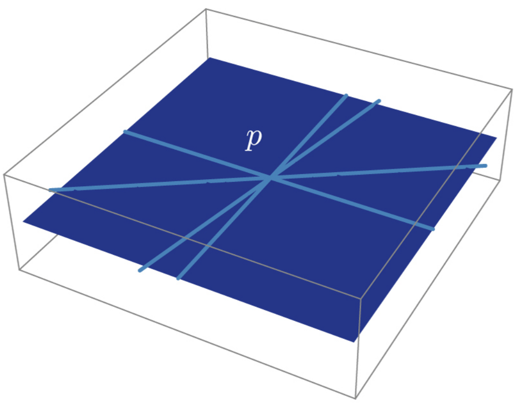
Pre-xeodésica

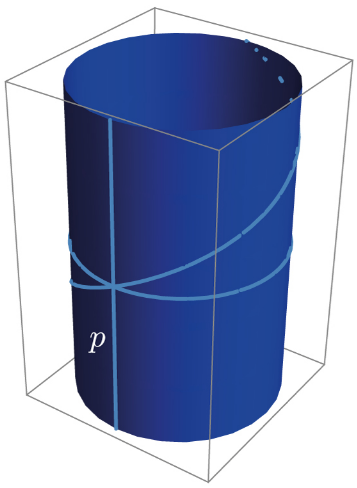
C é xeodésica $\Leftrightarrow \chi^{\alpha}_{xeo}(s) = 0$, para todo $s \in I \Leftrightarrow \chi^{\alpha}_{xeo}(t) = 0$, para todo $t \in I$.

C é xeodésica se e só se $\frac{D\overrightarrow{\gamma}'}{ds}(s) = (\overrightarrow{\gamma}''(s))^T = \overrightarrow{0}$, para todo $s \in I$, é dicir, se e só se $\overrightarrow{\gamma}''(s) = \chi_{\gamma}(s)\overrightarrow{v_2}(s)$ está na dirección do vector $\overrightarrow{\mathbf{x}_3}(\gamma(s))$, o normal á superficie no punto $\gamma(s)$.

Logo, C é xeodésica se e só se $\overrightarrow{v_2}(s) = \pm\overrightarrow{\mathbf{x}_3}(\gamma(s))$.

Xeodésica que pasa por p no plano e no cilindro





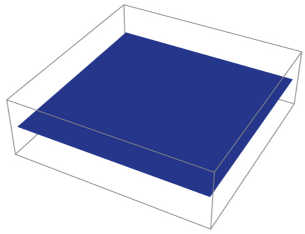
Superficies elementais

Plano: $z = 0$

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, 0)$$

$$g_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d\mathbf{x}_3)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

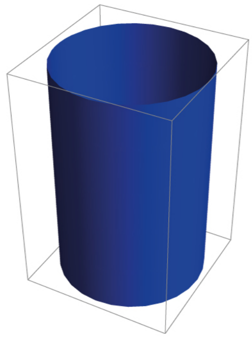


Cilindro: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\mathbf{x}(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$$

$$g_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d\mathbf{x}_3)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

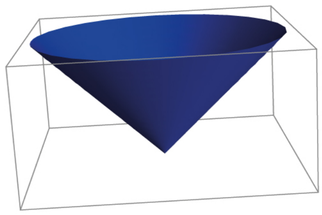


Cono: $x^2 + y^2 = z^2$

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$$

$$g_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d\mathbf{x}_3)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

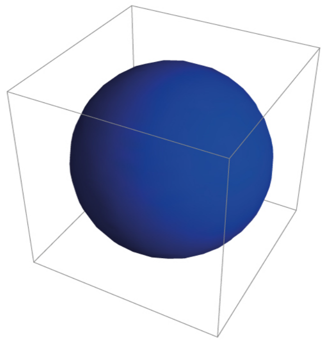


Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\mathbf{x}(u,v) = (R\sin v\cos u, R\sin v\sin u, R\cos v)$$

$$g_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} R^2(\sin v)^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}, L_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} R(\sin v)^2 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$$(d\mathbf{x}_3)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}$$

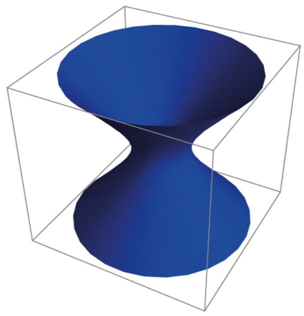


Hiperboloide: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)$$

$$g_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, L_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{-(1+v^2)}{\sqrt{1+2v^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+2v^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+2v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d\mathbf{x}_3)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}} & \frac{2}{(1+2v^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & \frac{-1}{(1+2v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$



USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

XUNTA DE GALICIA

RAGC/ REAL ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS