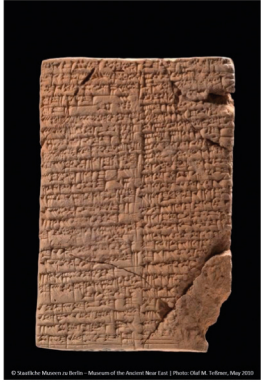


Pilar Mato Eiroa (Dpto. Matemática Aplicada)



A localización das primeiras matemáticas escritas que hoxe en día se interpretan como sistemas de ecuacións lineares, sitúase, alá polo ano 1800 a. C., en Mesopotamia, “terra entre dous ríos”; foron gravadas en taboíñas de arxila mediante a escritura cuneiforme. A **Taboíña VAT 8389** encóntrase actualmente no Museo do Antigo Oriente, Berlín, Alemaña. Á dereita o problema VAT 8389 #1.

A superficie total de dous terreos é de 1800 sar, o primeiro produce 2 sila de grao por cada 3 sar, o segundo produce 1 sila de grao por cada 2 sar, excedendo a produción do primeiro en 500 sila. Se x e y son as variábeis que nomean as superficies destes terreos, o problema pódese formular mediante o **sistema linear**:

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \end{cases}$$

Os babilonios resolvían o problema encontrando canto se desviaba a superficie de cada terreo da metade da superficie total, neste caso 900 sar. Logo, introdúcese unha nova variable s relacionada coas anteriores por: $x = 900 + s$, $y = 900 - s$; a súa substitución na segunda ecuación do sistema linear produce a **ecuación linear**:

$$\frac{2}{3}(900 + s) - \frac{1}{2}(900 - s) = 500,$$

da cal se deduce $s = 300$ sar, e tamén, $x = 1200$ sar e $y = 600$ sar.



O papiro Rhind é un dos papiros máis completos da matemática exipcia. Foi copiado polo escriba Ahmés cara a 1532 a. C. dun papiro máis antigo, escrito durante o reinado do faraón Amenehmet III (cara a 1844–1797 a. C.). Adquirido por Henry Rhind en 1858, distintos fragmentos del están na actualidade no Museo Británico en Londres e no museo de Brooklyn en Nova York. Á dereita o problema 40 do papiro.

Divide 100 pans entre 5 homes de tal modo que a diferenza entre dúas porcións sucesivas sexa constante, e a suma das tres porcións máis grandes sexa sete veces a suma das outras dúas. O problema refírese a unha distribución dos pans totalmente desigual, xa que, nunha distribución igualitaria, o grupo de dous homes recibiría dous terzos dos pans entregados ao grupo de tres. Aínda que no papiro a súa solución se fundamenta no coñecemento das **progresións aritméticas**, un trazo distintivo das matemáticas do antigo Exipto, pódese presentar como un exemplo temperán de **sistema linear**. Se ten en conta que as racións son:

$$\underbrace{a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d}_{2a - 3d} \quad \underbrace{a + d, a + 2d}_{3a + 3d}$$

con suma 100, xunto co feito de que a suma das tres porcións máis grandes sexa sete veces a suma das outras dúas, obtense:

$$\begin{cases} 5a = 100 \\ 3a + 3d = 7(2a - 3d) \end{cases}$$

con solución $a = 20$ e $d = \frac{55}{6}$. Desta maneira $\frac{5}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20 , $29\frac{1}{6}$ e $38\frac{1}{3}$ son as **porcións de pan demandadas**.

De longo, o tratamento máis impresionante das **ecuacións lineares simultáneas**, que se coñece dende tempos antigos é a única presentación longa antes de finais do século XVII, é o **capítulo 8 do Jiu Zhang Suan Shu ou Nove Capítulos sobre Arte Matemática**, un compendio anónimo da matemática chinesa antiga composto entre o ano 206 a. C. e o 221 d. C. Este capítulo, *Fang Cheng*, está dedicado a problemas da vida real tales como o cálculo de cantidades de gran, número de animais domésticos e prezos de diferentes produtos mediante a resolución de sistemas lineares. Á dereita o problema 1 do citado capítulo.

Hai tres calidades de gavelas de gran: alta, media e baixa. 3 gavelas de calidade alta, 2 gavelas de calidade media e 1 gavela de calidade baixa producen 39 dou de gran. 2 gavelas de calidade alta, 3 gavelas de calidade media e 1 gavela de calidade baixa producen 34 dou de gran, 1 gavela de calidade alta, 2 gavelas de calidade media e 3 gavelas de calidade baixa producen 26 dou de gran. **Cantos dou de gran produce 1 gavela de cada calidade?** A técnica dada para resolver estes problemas é a da eliminación, exactamente a **mesma técnica que a eliminación de Gauss** empregada en Occidente. Os datos nel exprésanse mediante o seguinte arranxo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

O algoritmo propón unha primeira etapa da eliminación:

A columna do medio multiplícase polo termo na posición arriba da columna dereita, e elimínase o termo na posición superior da columna do medio restando cantas veces sexa necesario a columna da dereita.

Repítase o modo de proceder coa columna da esquerda.

Os cálculos asociados son:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 \times 3 & \textcircled{3} \\ 2 & 3 \times 3 & 2 \\ 3 & 1 \times 3 & 1 \\ 26 & 34 \times 3 & 39 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 6 - 3 - 3 & 3 \\ 2 & 9 - 2 - 2 & 2 \\ 3 & 3 - 1 - 1 & 1 \\ 26 & 102 - 39 - 39 & 39 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \times 3 & \textcircled{3} & \\ 2 \times 3 & 5 & 2 \\ 3 \times 3 & 1 & 1 \\ 26 \times 3 & 24 & 39 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 3 - 3 & & 3 \\ 6 - 2 & 5 & 2 \\ 9 - 1 & 1 & 1 \\ 78 - 39 & 24 & 39 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Os anteriores son algúns exemplos de problemas antigos que poden interpretarse na actualidade, mediante o uso da **álgebra simbólica**, como **sistemas de ecuacións lineares**.

A irmá Mary Thomas à Kempis Kloyda (1896-1977), nacida Sophia Kloyda, foi unha matemática estadounidense que obtivo o seu doutoramento

en 1936 cunha tese titulada *Ecuacións lineares e cuadráticas, 1550-1660* e dirixida por Louis Charles Karpinski. Nela faise un retrato da álgebra no Renacemento tardío e atópase que só 4 dos 107 textos de álgebra impresos entre 1550 e 1660 contiñan ecuacións lineares simultáneas, o que suxire que o asunto carecía de interese durante ese tempo.

Isaac Newton (1643-1727) ben coñecido como un dos inventores do cálculo e autor de *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, un dos textos máis influentes da historia da ciencia, non podía deixar á parte a álgebra. No ano 1669, escribe a John Collins, un matemático contemporáneo, dicindo que tenta corrixir unha fenda nos textos contemporáneos, **unha explicación da resolución de coleccións de ecuacións:**

Though this bee omitted by all that have writ introductions to this Art, yet I judge it very propper & necessary to make an introduction compleate.

Na súa obra *Universal Arithmetic* establece unha estratexia recursiva para resolver ecuacións simultáneas onde unha ecuación se usa para eliminar unha variable das outras. Así na edición de 1720, pp. 60-61, atópase:

And you are to know, that by each Equation one unknown Quantity may be taken away, and consequently, when there are as many Equations and un-known Quantities, all at length may be reduc'd into one, in which there shall be only one Quantity unknown.

A continuación, un problema, xunto coa súa resolución, incluído na edición en inglés de 1769, que resultará familiar a moitos estudantes e profesores actuais:

PROBLEM V

If two Post-Boys A and B, at 59 Miles Distance from one another, set out in the Morning to meet. And A rides 7 Miles in two Hours, and B 8 Miles in three Hours, and B begins his Journey an Hour later than A; to find what Number of Miles A will ride before he meets B.

Call that Length x , and you will have $59 - x$, the Length of B's Journey. And since A travels 7 Miles in two Hours, he will make the Space x in $\frac{2x}{7}$ Hours, because 7 Miles : 2 Hours :: x Miles : $\frac{2x}{7}$ Hours. And so, since B rides 8 Miles in 3 Hours, he will describe his Space or ride his Journey $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ Hours. Now, since the Difference of these Times is one Hour; to the End they may become equal, add that Difference to the shorter Time $\frac{177 - 3x}{8}$, and you will have $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$, and by Reduction $35 = x$. For, multiplying by 8 you have $185 - 3x = \frac{16x}{7}$. Then multiplying also by 7 you have $1295 - 21x = 16x$, or $1295 = 37x$. And, lastly, dividing by 37, there arifes $35 = x$. Therefore, 35 Miles is the Distance that A must ride before he meets B.

En 1750, Gabriel Cramer (1704-1752) fornece formulas xerais, coñecidas como a regra de Cramer, para resolver un sistema linear co mesmo número de ecuacións que de incógnitas, aínda que sen demostración. Foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quen deu a primeira proba desta regra no ano 1815, establecendo o modo na que se escribe hoxe en día e, sobre todo, dando comezo ao estudo sistemático dos determinantes.

Na notación actual, dado o sistema linear $Au = b$, con A matriz $n \times n$ non singular, e polo tanto con solución única, a **regra de Cramer** establece os valores das incógnitas:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n.$$

O denominador, $\Delta = \det(A)$, é o mesmo para todos os cocientes, obténdose o i -ésimo numerador ao cambiar a columna i -ésima polo termo independente do sistema, b .

A regra de Cramer podería pechar o problema de atopar a solución dun sistema linear. Non obstante, os novos avances en **astronomía**, co coñecemento do movemento dos astros, e en **xeodesia**, coa determinación da forma da Terra, cara a finais do século XVIII requirían a solución de sistemas de ecuacións máis e máis complicados. Unha das complicacións orixinábase ao seren os coeficientes destes sistemas o resultado de medicións, realizadas con máis ou menos precisión, co cal para obter a maior fiabilidade posible, o número de medicións adoitaba ser numeroso o que daba orixe con frecuencia a un **sistema linear sobredeterminado, cun número de ecuacións superior ao número de incógnitas**. Neste caso, o sistema non posúe, en xeral, unha solución que satisfíxese todas as ecuacións, logo a primeira tarefa para os matemáticos da época era

substituír, en cada caso, as ecuacións orixinais por outro sistema que producise a **mellor solución, é dicir, os mellores valores para as incógnitas requiridas**. Entre os numerosos métodos propostos para este propósito, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) inventaron, de xeito independente, o que Legendre denominou **méthode de moindres carrés**. Dez anos despois da publicación da dita memoria, o **método de mínimos cadrados** converteuse nunha ferramenta estándar en Francia, Italia e Prusia. En 1825, sucedeu o mesmo en Inglaterra. Tanto a rápida difusión xeográfica como a súa grande aceptación, case ata a exclusión doutros métodos, é unha historia de éxito que ten poucos paralelos na historia do método científico.

A memoria de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), publicada en 1805, con título *Nouvelles Méthodes por la Détermination des Orbites des Comètes* contén 71 páxinas e un apéndice, coa explicación do método e unha aplicación relacionada coa medida do arco do meridiano entre Montjuic e Dunkerque, de 9 páxinas.

Na páxina final do prefacio:

Il faut ensuite, lorsque toutes les conditions du problème sont exprimées convenablement, déterminer les coefficients de manière à rendre les erreurs les plus petites qu'il est possible.

Pour cet effet, la méthode qui me paroît la plus simple et la plus générale, consiste à rendre *minimum* la somme des quarrés des erreurs.

On obtient ainsi autant d'équations qu'il y a de coefficients inconnus; ce qui achève de déterminer tous les éléments de l'orbite.

Na segunda páxina do apéndice:

Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connoître l'état du système le plus proche de la vérité.

A xustificación do método de mínimos cadrados como un procedemento estatístico débese a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). No se seu tratado *Theoria Motus Corporum Coelestium*, publicado no ano 1809, indica que el xa empregaba esta técnica desde o ano 1795; non obstante están ausentes consideracións computacionais e simplemente indica que as ecuacións normais poden resolverse mediante *eliminatio vulgaris*.

É no ano 1810, na súa obra *Disquisitio de Elementis Ellipticis Palladis*, cando Gauss calcula certos parámetros relacionados coa órbita do asteroide *Pallas* mediante o método de mínimos cadrados. A partir dun sistema linear con $m = 12$ ecuacións e $n = 6$ incógnitas, obtén o sistema de ecuacións normais con matriz 6×6 , ao que lle aplica o **procedemento de eliminación para transformalo noutro equivalente con matriz triangular superior**, xerada fila a fila, e **que resolve por remonte**.

Christian Ludwig Gerling (1788-1864), alumno de Gauss na Universidade de Gottingen, explica no texto *Die Ausgleichungs-Rechnungen*, publicado no ano 1843:

... Elimination is the most difficult and longest part of the work, so much so that one is reluctantly led to wish that science might discover the means for doing it that would be as useful as the invention of logarithms has been for multiplication ...

Na súa notación, dadas as ecuacións:

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.$$

onde $a, b, c, f, \&c.$ son coeficientes que cambian dunha ecuación a outra, **trátase de determinar as incógnitas $x, y, z, \&c.$** coa condición de que o valor do erro E diminúa, para cada ecuación, a unha cantidade nula ou moi pequena. A aplicación do seu principio, conduce á minimización de $E^2 + E'^2 + E''^2 + \&c.$, é dicir, á minimización de:

$$\begin{aligned} &(a + bx + cy + fz + \&c.)^2 + \\ &+(a' + b'x + c'y + f'z + \&c.)^2 + \\ &+(a'' + b''x + c''y + f''z + \&c.)^2 + \\ &+\&c. \end{aligned}$$

Entón, derivando dita suma con respecto a cada unha das variábeis $x, y, z, \&c.$, obtense:

$$\begin{aligned} 0 &= \int ab + x \int b^2 + y \int bc + z \int bf + \&c. \\ 0 &= \int ac + x \int bc + y \int c^2 + z \int cf + \&c. \\ 0 &= \int af + x \int bf + y \int cf + z \int f^2 + \&c. \\ &\dots \end{aligned}$$

onde por $\int ab$ enténdese a suma de produtos similares: $ab + a'b' + a''b'' + \&c.$, e o mesmo para o resto de coeficientes que comezan por \int .

Na notación matricial actual, o problema consiste en obter \tilde{x} solución de:

$$\min_x \|b - Ax\|_2,$$

sendo A unha matriz $m \times n$, $m > n$, e b e x vectores columna compatibles. Esta solución \tilde{x} , única no caso de que a matriz A teña rango máximo, coincide coa solución do sistema con matriz $n \times n$, $A^T A x = A^T b$, denominado **sistema de ecuacións normais**.

Gauss, como a maioría de matemáticos do seu tempo, fixo un uso moderado de subíndices e superíndices, adoitando o uso de "primas" e sucesións de letras para distinguir variábeis. Por exemplo, Gauss escribe o seu modelo linear da forma:

$$\begin{aligned} n &+ ap + bq + cr + ds + \text{etc.} = w \\ n' &+ a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.} = w' \\ n'' &+ a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.} = w'' \\ n''' &+ a'''p + b'''q + c'''r + d'''s + \text{etc.} = w''' \\ &\dots \end{aligned}$$

onde $n, a, b, c, d, \text{etc.}$ son coeficientes que cambian dunha ecuación a outra, $p, q, r, s, \text{etc.}$ son as incógnitas a determinar, e os w son os erros. Logo escribe as ecuacións normais:

$$\begin{aligned} [an] &+ [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} = 0 \\ [bn] &+ [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \text{etc.} = 0 \\ [cn] &+ [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \text{etc.} = 0 \\ [dn] &+ [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \text{etc.} = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

sendo os corchetes $[\cdot]$, un modo de indicar a suma de produtos das columnas respectivas, e as letras x e y coinciden ou ben están ordenadas alfabeticamente, por exemplo:

$$[xy] = xy + x'y' + x''y'' + \text{etc.}$$

Gauss non lles deu nome e coñecíanse como "auxiliares". Tamén estende esta notación para indicar a etapa da eliminación:

$$\begin{aligned} [xy, 1] &= [xy] - \frac{[ax][ay]}{[aa]} \\ [xy, 2] &= [xy, 1] - \frac{[bx, 1][by, 1]}{[bb, 1]} \\ &\dots \end{aligned}$$

O fin último era **transformar o sistema de partida noutro equivalente triangular superior que podería resolverse para atrás**.

Myrick Hascall Doolittle (1830-1911) traballou desde 1873 ata 1911 en dúas organizacións científicas cales foron o xerme da *National Geodetic Survey* (NGS), unha axencia federal dos Estados Unidos de América, fundada en 1970 e que define e administra un sistema de coordenadas nacional, a base fundamental para o transporte e a comunicación.

Encargouse de resolver as ecuacións normais de Gauss, e aínda é recordado, pola súa facilidade no cálculo, como unha **calculadora humana**. A eficacia dos seus métodos foi tal que puido resolver 41 ecuacións normais nunha semana, usando papel e lapis. Para ter unha idea do que isto significaba, sábese que Alan Turing (1912-1954) necesitaba unhas dúas semanas para resolver 18 ecuacións, usando as calculadoras do ano 1946. Doolittle prescindiu dos corchetes de Gauss e identificou os números polas súas posicións nas táboas. Iso permitiulle usar as táboas de produtos de August Leopold Crelle. Ademais substituíu as divisións nas fórmulas por multiplicacións polo recíproco.

Non cabe dúbida do interese que suscitaron a **topografía**, para describir superficie dun terreo, e a **cartografía**, plasmando en **cartas** esta información, desde a antigüidade; non obstante, é no século XIX cando as cartas se consideran indispensables tanto polo seu valor militar como civil. O uso dunha **triangulación**, para posicionar puntos na carta, e da **altimetría**, para medir a elevación dos ditos puntos con respecto a unha horizontal tomada como referencia, produce con frecuencia un **sistema linear subdeterminado, cun número de ecuacións inferior ao número de incógnitas**. Neste caso o sistema posúe, en xeral, infinitas solucións, e o método para resolvelo, ideado por Gauss ao redor de 1826, busca

entre todas, a solución que minimiza a suma de cadrados das incógnitas. Na notación matricial actual, o problema consiste en obter \tilde{x} solución de:

$$\min_{Ax=b} \|x\|_2,$$

sendo A unha matriz $m \times n$, $m < n$, e b e x vectores columna compatibles. Esta solución \tilde{x} , única cando A ten un rango máximo, consiste en obter primeiro a solución do sistema con matriz $m \times m$, $(AA^T)\tilde{x} = y$, chamado **sistema de ecuacións normais**, e despois multiplícala por A^T , é dicir $\tilde{x} = A^T(AA^T)^{-1}y$.

O método de Cholesky foi exposto por primeira vez nunha nota de 1924 polo comandante Benoît, un antigo camarada no exército francés; porén, 6 anos despois da morte a causa das feridas no campo de batalla ao final da Primeira Guerra Mundial do seu autor, o comandante Andre-Louis Cholesky (1875-1918). Aínda que coñecido entre os topógrafos, o seu auxe débese á checoslovaca Olga Taussky e ao seu marido, o irlandés John Todd, quen o recuperaron ao redor de 1946, facéndolle un oco nos manuais dos alxebrista lineares numéricos dos anos 50 do século pasado.

O punto crucial do método foi pensar que dado que moitos sistemas subdeterminados dan lugar ás mesmas ecuacións normais, quizais dadas unhas ecuacións normais pódese atopar un sistema de partida que se podería resolver con máis facilidade e, de feito, detallou como atopar un sistema alternativo con matriz triangular inferior. De considerar un sistema linear $Au = b$, con A matriz $n \times n$ **simétrica e definida positiva**, o **método de Cholesky** resólveo descompoñendo a matriz A no produto $A = BB^T$, sendo B unha matriz real, triangular inferior e non singular obtida, por columnas, mediante:

$$j = 1 : b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{i1} = a_{i1}/b_{11}, i > 1$$

$$j \geq 2 : b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}, \quad b_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}b_{jk})/b_{jj}, i > j$$

Para rematar resolveranse consecutivamente o sistema triangular inferior $By = b$ e mais o sistema triangular superior $B^T x = y$.

Prescott Durand Crout (1907-1984), membro da Facultade de Matemáticas do MIT, interesouse polas matemáticas relacionadas coa enxeñaría eléctrica. Descoñecendo o traballo anterior de Cholesky, Crout reorganizou a eliminación de Gauss empregando sumas de produtos. Mesmo, o método de Crout foi anunciado por un fabricante líder de máquinas de cálculo da época.

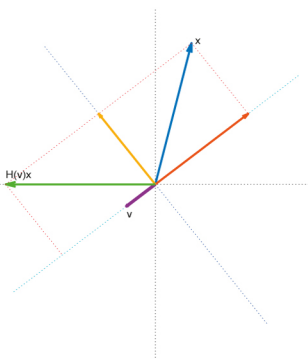
De considerar un sistema linear $Au = b$, con A matriz $n \times n$ posuíndo **submatrices diagonais non singulares**, o **método de Crout** descompón a matriz A , no produto $A = LU$, sendo L unha matriz triangular inferior e U unha matriz triangular superior con diagonal de "uns"; para $k = 1, \dots, n$: primeiro a k -ésima columna de L e despois a k -ésima fila de U según as fórmulas:

$$k = 1 : l_{i1} = a_{i1}, u_{1j} = a_{1j}/l_{11}, j > 1$$

$$k > 1 : l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}, i \geq k$$

$$u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj})/l_{kk}, j > k$$

Para rematar resolveranse consecutivamente o sistema triangular inferior $Ly = b$ e mais o sistema triangular superior $Ux = y$.



Alston Scott Householder (1904-1993) publicou no ano 1958 un artigo remarcable no que emprega matrices elementais, hoxe en día denominadas matrices ou reflexións de Householder, para facer ceros nunha matriz A calquera. Na figura pode verse a interpretación xeométrica no caso $n = 2$.

Dado un vector v non nulo, denomínase matriz de Householder relativa a este vector á matriz:

$$H(v) = I - \frac{2}{v^*v}vv^*$$

sendo I a matriz identidade e $*$ o operador que transpón e conxuga un vector.

De considerar un sistema linear $Au = b$, con A matriz $n \times n$ non singular, o **método de Householder é un proceso de triangulación unitaria** que atopa unha matriz triangular superior R mediante a multiplicación por $n - 1$ matrices unitarias:

$$Au = b \iff H_{n-1} \cdots H_1 Au = H_{n-1} \cdots H_1 b \iff Ru = \hat{b}$$

Para rematar resolverase o sistema triangular superior: $Ru = \hat{b}$. A súa **interpretación matricial é a ben coñecida factorización $A = QR$** , sendo $Q = H_1 \cdots H_{n-1}$.

Na resolución de sistemas lineares $Au = b$, con A matriz $n \times n$, enténdese por **método directo** o que **calcula a solución exacta do sistema, excepto erros de redondeo, cun número finito de operacións**. Os métodos considerados ata o momento son métodos directos cun **custo de $O(n^3)$ operacións**, demasiadas operacións cando o valor de n é elevado.

Na seguinte táboa represéntanse dun xeito aproximado os maiores valores de n tratables nun tempo razoable para un **método directo aplicado a unha matriz densa**, mesmo o progreso da velocidade de cálculo dos ordenadores, fronte aos anos indicados:

1950	1965	1980	1995
$n = 20$	$n = 200$	$n = 2000$	$n = 20000$
FLOPS	GFLOPS (10^9 FLOPS)

Ao longo de corenta e cinco anos, o valor de n aumentou nun factor de 10^3 . Este avance é impresionante, pero palidece xunto ao progreso acadado pola velocidade de cálculo do ordenador no mesmo período: un factor de 10^9 , desde FLOPS ata GFLOPS. O feito de que 10^9 é o cubo de 10^3 explica os límites de n das matrices tratadas cos métodos directos: por exemplo, se

os sistemas lineares puidesen resolverse con $O(n^2)$ operacións, os sistemas resolto con métodos directos no ano 1995 poderían empregar n de 10 a 100 veces maior.

O adianto no século pasado da **modelización de numerosos problemas formulados pola ciencia e a enxeñaría en termos de EDOS ou EDPS**, e a súa correspondente **discretización** mediante diversos métodos, algúns tan coñecidos como **as diferenzas finitas** ou os **elementos finitos**, provocou o avance imparabile dos **métodos iterativos**, que xa comezaron o seu desenvolvemento no século XIX. Un **método iterativo calcula unha sucesión de solucións aproximadas e detense cun algún criterio previamente determinado** o que permite obter unha **solución co grao de precisión requirido**.

De considerar un sistema linear $Au = b$, cos elementos diagonais distintos de cero, descomponse a matriz $A = (a_{ij})$ como segue:

$$D = \text{diag}(a_{ii}), \quad E = (e_{ij}) \quad \text{donde} \quad e_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i \leq j \end{cases},$$

$$F = (f_{ij}) \quad \text{donde} \quad f_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Advirtase $A = D - E - F$. Esta descomposición permite describir dun modo sinxelo os **métodos iterativos clásicos** de Jacobi e de Gauss-Seidel.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) necesitaba tratar con sistemas lineares de ecuacións ao modelar sistemas físicos suxeitos a pequenas oscilacións. Inventou un método iterativo converxente cando a matriz do sistema é estritamente diagonalmente dominante.

O **método de Jacobi**, tamén denominado **método dos desprazamentos simultáneos**, consiste en:

$$\begin{cases} u_0 \text{ dado,} \\ Du_{k+1} = (E + F)u_k + b, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

O **custo** do método é **$2n^2 - n$ operacións por iteración**.

Ludwig von Seidel (1821-1896), alumno de Jacobi, propuxo unha técnica iterativa para atopar a solución a un sistema de ecuacións normais. A súa inspiración veu tanto da idea de Jacobi como do método de Gauss. É converxente cando a matriz do sistema é estritamente diagonalmente dominante.

O **método de Gauss-Seidel**, tamén denominado **método dos desprazamentos sucesivos**, consiste en:

$$\begin{cases} u_0 \text{ dado,} \\ (D - E)u_{k+1} = Fu_k + b, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

O **custo** do método é **$2n^2 - n$ operacións por iteración**.

O **teorema de Cayley-Hamilton** establece que calquera matriz cadrada A satisfai a correspondente **ecuación característica matricial** $p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = (0)$, porén a solución do sistema linear $Au = b$, con A matriz non singular, satisfai:

$$A^{-1}b = (-A^{n-1}b - a_{n-1}A^{n-2}b - \dots - a_2Ab - a_1b)/a_0.$$

Esta igualdade permite xustificar a procura da solución dun sistema linear en sucesivos **subespazos de Krylov**, nomeados así como homenaxe ao ruso Aleksei Nikolaevich Krylov (1863-1945), e xerados polas sucesivas potencias da matriz A aplicadas a un vector inicial. É a base sobre a cal repouzan métodos para a resolución de **sistemas lineares de orde n elevada** tan coñecidos como o **método do gradiente conxugado (CG)**, válido para matrices hermitianas e proposto en 1952 por Magnus R. Hestenes e Eduard Stiefel, ou o **método do residuo mínimo xeneralizado (GMRES)**, válido para calquera matriz e proposto en 1986 por Yousef Saad e Martin H. Schultz.

Hoxe en día, novos algoritmos aplicados sobre novas arquitecturas permiten resolver millóns de ecuacións en segundos. Como exemplo, a táboa atopada no manual do curso **CESGA: Matemática Computacional**, do ano 2008, referente ao uso da computación paralela para resolver 12,5 millóns de ecuacións lineares, usando un clúster de procesadores "baratos":

número de procesadores	tempo para resolver o sistema
2	1:21:59
16	0:10:43
128	0:01:33
256	0:00:51
320	0:00:42

Algúns dos textos utilizados

J. L. Chabert, 1999. A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip. Berlin: Springer.

J. F. Grcar, 2011. How ordinary elimination became Gaussian elimination, Historia Mathematica, 38:163-218. Dispoñible en liña en <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086010000376>

D. Bau, III e L. N. Trefethen, 1997. Numerical Linear Algebra. Philadelphia: SIAM

