

ÁLVARO CARBALLIDO COSTAS

**UN TEOREMA DE HEDLUND
PARA FIBRADOS FOLIADOS
SOBRE SUPERFICIES
HIPERBÓLICAS**

**143a
2020**

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ÁLVARO CARBALLIDO COSTAS

**UN TEOREMA DE HEDLUND PARA
FIBRADOS FOLIADOS SOBRE SUPERFICIES
HIPERBÓLICAS**

143a

2020

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2020



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

**Un teorema de Hedlund para
fibrados foliados sobre superficies
hiperbólicas**

Álvaro Carballido Costas

Xullo 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Agradecimientos	5
Resumen/Abstract	6
Introducción	7
1. Foliaciones y suspensiones	11
1.1. Definiciones generales	11
1.2. Suspensiones	15
1.3. Holonomía de una suspensión	17
1.4. Clase de Euler de una representación	18
2. Geometría hiperbólica	21
2.1. Acciones proyectiva y lineal	22
2.2. Clasificación de las isometrías	24
2.3. Grupos fuchsianos no elementales	27
2.4. Conjunto límite de un subgrupo normal	28
2.5. Grupos de superficie	30
3. Teorema de Hedlund clásico	33
3.1. Fibrado tangente unitario	33
3.2. Flujos geodésico y horocíclico	34
3.3. Principio de dualidad	36
3.4. Teorema de Hedlund	37
4. Teorema de Hedlund foliado	39
4.1. Suspensiones de grupos de superficie	39
4.2. Fibrado tangente unitario	42
4.3. Flujos geodésico y horocíclico foliados	43
4.4. Representaciones no inyectivas	45
4.5. Representaciones inyectivas	46
4.6. Representaciones fieles de $PSL(2, \mathbb{R})$	47
4.7. Componentes conexas del espacio de representaciones	49
4.8. Condición de Matsumoto	50

4.9. Demostración del teorema 4.17	52
Bibliografía	59

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tutor, el profesor Fernando Alcalde Cuesta, por haberme enseñado todo lo necesario para la realización de este trabajo y por su infinita paciencia para resolverme todas las dudas que me fueron surgiendo durante el proceso.

También dar las gracias al profesor Juan Francisco Torres Lopera por sus oportunas correcciones que han contribuido a la mejora de esta memoria.

Resumen

En este trabajo se intenta generalizar el teorema de Hedlund clásico sobre la minimalidad del flujo horocíclico al caso foliado, según han propuesto M. Martínez y A. Verjovsky. Nos centramos en variedades foliadas por superficies hiperbólicas obtenidas mediante la suspensión de una representación

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$$

de un grupo de superficie Γ en el grupo de los difeomorfismos de S^1 de clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$, que conservan la orientación.

En el caso de representaciones no inyectivas, se da una prueba elemental de la minimalidad, mientras que para garantizar la minimalidad en el caso de representaciones fieles se necesita un resultado general debido a S. Matsumoto que asume la minimalidad de la acción del grupo afín B^+ sobre el fibrado tangente a la foliación.

Al restringirnos a las representaciones inyectivas en $PSL(2, \mathbb{R})$, se puede establecer la siguiente dicotomía:

- Si la representación es discreta, el flujo horocíclico no es minimal, pero posee un único conjunto minimal que coincide con el único conjunto minimal de la acción afín.
- Si la representación no es discreta, se prueba de forma elemental que la acción afín es siempre minimal, lo que, combinado con el teorema de Matsumoto, nos garantiza que el flujo horocíclico es minimal.

Abstract

In this work we will attempt to generalize the classical Hedlund's theorem about the minimality of the horocycle flow to the foliated case. This problem has been formulated by M. Martínez and A. Verjovsky. We will focus on foliated manifolds by hyperbolic surfaces obtained by the suspension of a representation

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$$

of a surface group Γ on the group of orientation-preserving C^r diffeomorphisms of S^1 , $0 \leq r \leq \infty$.

For non-faithful representations, we give an elementary proof of the minimality of the horocycle flow. Nevertheless, to prove the minimality of the horocycle flow for faithful representations, we have to use a general result due to S. Matsumoto that assumes the minimality of the B^+ -action on the unit tangent bundle of the foliation.

In the particular case of faithful representations of surface groups on $PSL(2, \mathbb{R})$ we have the following dichotomy:

- If the representation is discrete, then the horocycle flow is not minimal, but there is a unique minimal set that coincides with the unique minimal set of the B^+ -action.
- If the representation is not discrete, we prove the minimality of the B^+ -action which, using Matsumoto's theorem, gives us the minimality of the horocycle flow.

Introducción

La dinámica de los flujos geodésico y horocíclico ha sido ampliamente estudiada desde un punto de vista topológico y medible desde los trabajos fundamentales de E. Hopf y G. A. Hedlund en los años 1930.

En su artículo [14] de 1936, Hedlund demostraba la minimalidad del flujo horocíclico de cualquier superficie compacta S con curvatura negativa constante. Si S se obtiene como cociente del plano hiperbólico \mathbb{H} por la acción de un subgrupo discreto y sin torsión Γ del grupo de isometrías $PSL(2, \mathbb{R})$ que conservan la orientación, entonces el flujo horocíclico sobre el fibrado tangente unitario $T^1S \cong \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ está dado por la acción natural por la derecha del grupo unipotente

$$U^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre $PSL(2, \mathbb{R})$. En este contexto, *minimalidad* significa que las órbitas de la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U^+$ son densas en $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$.

La *ergodicidad estricta* del flujo horocíclico fue probada casi 40 años más tarde por H. Furstenberg en [9]. Esta propiedad, que combina la minimalidad y unicidad ergódica, había sido definida por H. Furstenberg en [8].

El estudio de la dinámica del flujo horocíclico asociado a una foliación \mathcal{F} por superficies hiperbólicas densas de una variedad compacta M ha sido iniciado por M. Martínez, S. Matsumoto y A. Verjovsky en [17]. Como en el caso de las superficies, los flujos geodésico g_t y horocíclico h_s^+ definidos sobre el fibrado tangente unitario a la foliación $T^1\mathcal{F}$ están relacionados por

$$g_t h_s^+ = h_{se^{-t}}^+ g_t$$

y por tanto definen una acción conjunta del grupo afín

$$B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

El problema de la minimalidad del flujo horocíclico ha sido abordado en [1], [2] y [20] donde se han obtenido los siguientes resultados:

- (1) En [1], el problema ha sido resuelto afirmativamente en el caso de G -foliaciones de Lie homogéneas obtenidas a partir del cociente del producto de $PSL(2, \mathbb{R})$ y de un grupo de Lie G por la acción de un grupo discreto cocompacto Γ . Este cociente está foliado por las órbitas de la $PSL(2, \mathbb{R})$ -acción por la derecha y se identifica con el fibrado tangente unitario de la foliación \mathcal{F} inducida sobre

$$M = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) / PSO(2, \mathbb{R}) \times G) \cong \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times G)$$

por la fibración trivial $D : \mathbb{H} \times G \rightarrow G$.

- (2) En [2], se demuestra la minimalidad del flujo horocíclico para foliaciones minimales que poseen una hoja que contiene una geodésica con holonomía trivial.
- (3) En [20], S. Matsumoto demuestra que la minimalidad de h_s^+ es equivalente a la minimalidad de la B^+ -acción bajo una condición más general, que incluye todas las foliaciones de codimensión uno.

Como la minimalidad, la ergodicidad estricta del flujo horocíclico h_s^+ se plantea naturalmente en el contexto foliado, pero se sabe aún menos que en el caso topológico. En principio, como S. Matsumoto ha indicado en [19], el teorema de clasificación de Ratner [24] permite demostrar la ergodicidad estricta de la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright U^+$ con respecto de la medida $PSL(2, \mathbb{R})$ -invariante inducida por la medida de Haar por la izquierda sobre $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$. Más recientemente, F. Alcalde, F. Dal'Bo, M. Martínez y A. Verjovsky han demostrado en [3] la ergodicidad estricta del flujo horocíclico para las foliaciones riemannianas (que generalizan el ejemplo homogéneo precedente) respondiendo afirmativamente a una conjetura formulada por S. Matsumoto en [20]. En una dirección diferente, C. Bonatti, A. Eskin y A. Wilkinson han demostrado una condición suficiente para la unicidad ergódica del flujo horocíclico sobre un fibrado proyectivo asociado a una representación irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$ como grupo de automorfismos de un fibrado vectorial real o complejo, con importantes aplicaciones en teoría de Teichmüller.

Nuestro objetivo es desarrollar una demostración elemental del teorema de Hedlund sobre la minimalidad del flujo horocíclico en un contexto próximo, pero más simple, al estudiado por C. Bonatti, A. Eskin y A. Wilkinson. Se trata de fibrados foliados de dimensión 3 cuyas hojas son superficies hiperbólicas densas. Este tipo de foliaciones se obtienen mediante la *suspensión* de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ de un grupo de superficie Γ en el grupo de los difeomorfismos de S^1 de clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$, que conservan la orientación. Esto significa que:

- (1) la variedad ambiente M es el cociente del producto $\mathbb{H} \times S^1$ por la acción diagonal dada por:

$$\gamma \cdot (z, \zeta) = (\gamma(z), \rho(\gamma)(\zeta))$$

para cada $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$ y $\zeta \in S^1$.

- (2) la foliación \mathcal{F} está inducida por la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\mathbb{H} \times \{\zeta\}\}$ de $\mathbb{H} \times S^1$ y las hojas se obtienen como cociente de \mathbb{H} por el subgrupo $\Gamma_\zeta = \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)(\zeta) = \zeta\}$ de Γ .

Esta construcción será detallada en el capítulo 1 en general y en el capítulo 4 en esta situación particular, siguiendo la presentación de [12].

La ventaja de las suspensiones radica en la facilidad a la hora de describir el fibrado tangente unitario $T^1\mathcal{F}$ como cociente del producto $PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1$ por la acción diagonal de Γ y definir el *flujo geodésico foliado* g_t como la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright D$ dada por:

$$g_t(\Gamma(g, \zeta)) = \left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \zeta \right),$$

el *flujo horocíclico foliado (estable)* h_s^+ como la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U^+$ dada por:

$$h_s^+(\Gamma g, \zeta) = \left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right),$$

y el *flujo horocíclico foliado (inestable)* h_s^- como la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U^-$ dada por:

$$h_s^-(\Gamma, \zeta) = \left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right).$$

En realidad, nuestra idea es aprovechar esta simplicidad para lograr demostraciones elementales de resultados conocidos o nuevos resultados. En este sentido, la no inyectividad o inyectividad de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+(S^1)$ traduce el hecho de su suspensión \mathcal{F} verifique o no la condición de [2]. Así pues, la demostración del siguiente resultado (incluido en el capítulo 4 como teorema 4.9) puede interpretarse como una demostración elemental de [2, Theorem 1]:

Teorema 1. *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ de un grupo de superficie Γ con $0 \leq r \leq \infty$. Supongamos que la foliación \mathcal{F} es minimal y el núcleo $N = \text{Ker } \rho$ no trivial. Entonces el flujo horocíclico h_s^+ sobre el tangente unitario $\hat{M} = T^1\mathcal{F}$ es minimal.*

El caso de las representaciones inyectivas o fieles es mucho más complejo. La minimalidad del flujo horocíclico solo se sabe para las representaciones fieles de grupos de superficie como subgrupos densos de grupos de Lie como consecuencia de [1] (y su ergodicidad estricta como consecuencia de [3]). El único resultado aplicable es un teorema de Matsumoto [20, Theorem 1.3] que establece que el flujo horocíclico h_s^+ sobre el fibrado tangente unitario $T^1\mathcal{F}$ es minimal si lo es la acción afín $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$ y \mathcal{F} verifica una condición adicional más general que la condición de [2] (explícita como condición 4.16 en el caso particular de codimensión 1). Este resultado se enuncia como teorema 4.17, pero, como se verá, la restricción a las suspensiones no simplifica sustancialmente la prueba, que se basa en la hiperbolicidad del flujo geodésico foliado. De hecho, para las representaciones fieles ni siquiera se sabe si la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$ es minimal.

No obstante, en el capítulo 4, demostramos que las representaciones fieles de los grupos de superficie en $PSL(2, \mathbb{R})$ muestran una cierta dicotomía respecto de la minimalidad de la acción afín según sean discretas o no discretas y damos una demostración elemental de este hecho (formulado como teorema 4.14.) Combinándolo con el teorema 4.17, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada transversalmente homográfica, es decir, obtenida como suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces hay dos casos posibles:*

- (i) *Si la representación ρ es fiel y discreta, entonces el flujo horocíclico h_s^+ posee un único conjunto minimal $\mathcal{M} \neq T^1\mathcal{F}$, que coincide con el único conjunto minimal de la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$.*
- (ii) *Si la representación ρ no es fiel o es fiel y no discreta, entonces el flujo horocíclico h_s^+ es minimal.*

En este contexto, esperamos lograr una demostración elemental de la minimalidad del flujo horocíclico h_s^+ para las representaciones fieles y no discretas $\rho : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. De hecho, esperamos que las ideas empleadas en este caso particular permitan abordar la demostración del teorema de Hedlund para foliaciones transversalmente homogéneas arbitrarias en las que la estructura transversa está modelada por una variedad homogénea obtenida como cociente de un grupo de Lie por un subgrupo cerrado.

Capítulo 1

Foliaciones y suspensiones

1.1. Definiciones generales

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^r con $0 \leq r \leq \infty$. Una *foliación* de dimensión $p \leq n$ y de clase C^r sobre M es una descomposición de M en subvariedades inmersas, llamadas *hojas*, de dimensión p y dispuestas de modo que localmente se parece a la descomposición canónica de \mathbb{R}^n por subespacios \mathbb{R}^p .

De esta forma, el primer ejemplo de foliación se obtiene al considerar \mathbb{R}^n y definir la hoja que pasa por $(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ como el plano afín

$$L_y = \{ (x', y) \in \mathbb{R}^n \mid x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in \mathbb{R}^p \} = \mathbb{R}^p \times \{y\}$$

de dimensión p . Se dice que la familia $\mathcal{F} = \{L_y \mid y \in \mathbb{R}^q\}$ es una *foliación de dimensión p y codimensión q* de \mathbb{R}^n y el par $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$ es una *variedad foliada*.

Definición 1.1. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n y clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$, se llama *atlas foliado* de dimensión p y clase C^r sobre M a un C^r atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ formado por C^r difeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^p \times B^q$$

definidos sobre abiertos U_α que recubren M , siendo B^p y B^q las bolas abiertas de radio unidad centradas en el origen en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^q con $n = p + q$, que verifica la siguiente condición: si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces el cambio de cartas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

está dado por:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (g_{\alpha\beta}(x, y), h_{\alpha\beta}(y)).$$

A los elementos $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ del atlas foliado se les llama *cartas foliadas* y a los abiertos U_α *abiertos foliados* o *distinguidos*. Las subvariedades embebidas $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B^p \times \{y\})$ de dimensión p y $T_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\{x\} \times B^q)$ de dimensión q se llaman *placa* y a *transversal*

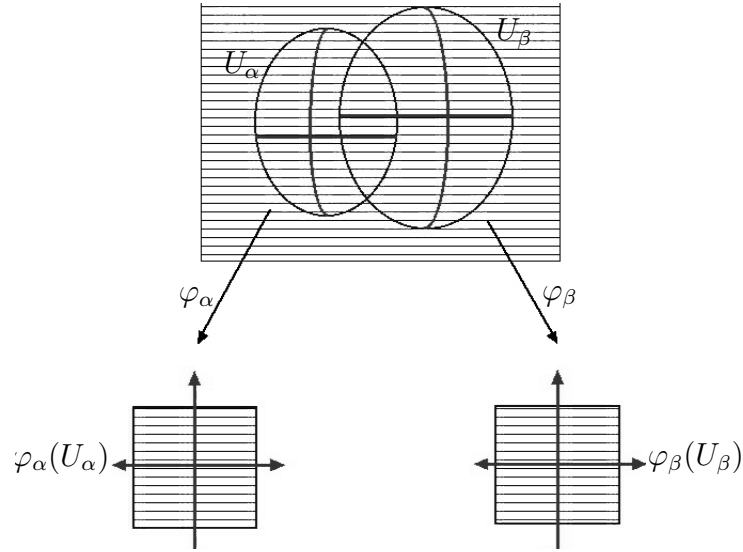


Figura 1.1: Cambio de cartas foliadas

(local) respectivamente. La unión disjunta $T = \bigsqcup_{\alpha \in A} T_\alpha$ se llama *transversal completa*. Por definición, si dos abiertos foliados U_α y U_β se cortan, la unión de dos placas P_α y P_β que pasan por un punto de la intersección sigue siendo una subvariedad embebida y conexa de dimensión p .

Definición 1.2. Se llama *hoja* a una unión conexa y maximal de placas. Por construcción, cada hoja es una subvariedad débilmente embebida de dimensión p de M . Por cada punto $x \in M$ (resp. $y \in T$) pasa exactamente una hoja que denotaremos por L_x (resp. L_y).

Definición 1.3. La descomposición $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M} = \{L_y\}_{y \in T}$ de M se llama *foliación* (de dimensión p , codimensión q y clase C^r) de M definida por el atlas foliado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Al igual que en el caso de las variedades, dos atlas foliados definen la misma foliación \mathcal{F} , en cuyo caso se dicen *equivalentes*, si la unión sigue siendo un atlas foliado. Suele ser habitual representar las variedades foliadas por atlas con buenas propiedades:

Definición 1.4. Un atlas foliado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ sobre M es un *buen atlas foliado* si A es numerable y

- (1) el recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finito (resp. finito si la variedad M es compacta),
- (2) cada abierto foliado U_α es relativamente compacto,
- (3) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces existe un abierto foliado $U_{\alpha\beta}$ (que no pertenece necesariamente al atlas) tal que $U_\alpha \cup U_\beta \subset U_{\alpha\beta}$.

La condición (3) garantiza que una placa de U_α corta a lo sumo a una placa de U_β , evitando situaciones como la que se muestra en la figura 1.2.

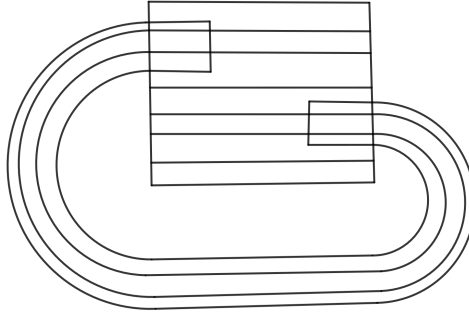


Figura 1.2: Abiertos foliados de un atlas que no es bueno

Ejemplos 1.5. (1) Si $M = B \times F$ es el producto de una variedad B de dimensión p y una variedad F de dimensión q , entonces $\mathcal{H} = \{B \times \{y\} \mid y \in F\}$ es una foliación de dimensión p y $\mathcal{V} = \{\{x\} \times F \mid x \in B\}$ es una foliación de dimensión q . Se llaman foliación *horizontal* y *vertical* de M .

(2) Si $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} B$ es un fibrado localmente trivial, entonces la partición $\mathcal{V} = \{\pi^{-1}(x) \mid x \in B\}$ es una foliación de M . En efecto, si $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas de trivialidad local del fibrado, entonces $\{V_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de B y el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(V_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & F \times V_\alpha \\
 \searrow \pi & & \swarrow p_2 \\
 & & V_\alpha
 \end{array}$$

es conmutativo para cada $\alpha \in A$. Esto muestra que los cambios de trivialización son de la forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (x, y) \in F \times (V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow (g_{\alpha\beta}(x), y) \in F \times (V_\alpha \cap V_\beta).$$

Sustituyendo el recubrimiento abierto $\{V_\alpha\}$ de B por un refinamiento por abiertos difeomorfos a bolas de \mathbb{R}^q con $q = \dim B$, que seguiremos denotando $\{V_\alpha\}$, y restringiendo el rango de las cartas de trivialidad local al producto por los abiertos V_α de entornos abiertos U_y de puntos $y \in F$ difeomorfos a bolas en \mathbb{R}^p con $p = \dim F$, entonces los abiertos $\varphi_\alpha^{-1}(U_y \times V_\alpha)$ y las restricciones de las cartas de trivialidad φ_α a dichos abiertos forman un atlas foliado sobre M . La clase de diferenciabilidad es obviamente la de la fibración.

(3) Dado un número irracional $\theta \notin \mathbb{Q}$, la acción $\mathbb{R} \curvearrowright T^2$ definida por el flujo

$$\Phi_t(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(x+t)}, e^{2\pi i(y+t\theta)})$$

determina una foliación de dimensión 1 con hojas densas (descrita en la figura 1.3). En efecto, el flujo levantado a \mathbb{R}^2 determina una foliación del plano por rectas de pendiente irracional θ y basta restringirse a bolas de radio estrictamente menor que 1 para obtener por paso al cociente una atlas foliado sobre el toro. En realidad, las hojas de la foliación son las órbitas de la acción de un subgrupo de Lie denso (a saber, la órbita por Φ del elemento neutro) el grupo de Lie T^2 .

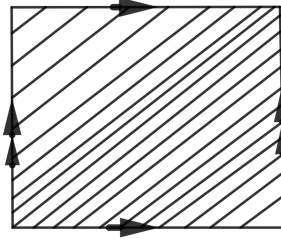


Figura 1.3: Folioación lineal del toro

Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada de dimensión p , codimensión q y clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$. Para cada hoja $L \in \mathcal{F}$, denotamos por TL al fibrado tangente a L , es decir, $TL = \bigsqcup_{x \in L} T_x L$ dotado de la estructura de C^{r-1} fibrado vectorial usual. Por construcción, como la inclusión de L en M es una C^r inmersión, TL es un subfibrado vectorial de TM . De hecho, dada una carta foliada $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^p \times B^q$, si consideramos la *aplicación distinguida*

$$\pi_\alpha = p_2 \circ \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^q,$$

entonces las placas de U_α coinciden con las fibras de π_α . Por consiguiente, si denotamos $T\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ a la unión de los fibrados tangentes a las placas de U_α , entonces $T\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ coincide con el núcleo de la aplicación tangente

$$(\pi_\alpha)_* : TU_\alpha \rightarrow TB^q = B^q \times \mathbb{R}^q,$$

es decir, un vector $v \in TU_\alpha \subset TM$ es *tangente a \mathcal{F}* si $(\pi_\alpha)_*(v) = 0$ en TB^q . Las aplicaciones tangentes

$$(\varphi_\alpha)_* : TU_\alpha \rightarrow TB^p \oplus TB^q = B^p \times B^q \times \mathbb{R}^n$$

definen por restricción C^{r-1} difeomorfismos

$$\tau_\alpha : T\mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow TB^p = B^p \times \mathbb{R}^p.$$

Definición 1.6. Se llama *fibrado tangente a la foliación \mathcal{F}* a la unión

$$T\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} TL$$

dotada de la estructura de C^{r-1} fibrado vectorial que definen las cartas de trivialidad $\tau_\alpha : T\mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow TB^p = B^p \times \mathbb{R}^p$.

Fijada una métrica riemanniana g sobre la variedad M se define el *fibrado tangente unitario a la foliación \mathcal{F}* como la unión

$$T^1\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} T^1L$$

con la estructura de fibrado localmente trivial correspondiente. De hecho para definir este espacio es suficiente con tener una métrica riemanniana sobre cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} .

Notemos que $T\mathcal{F} \subset TM$ es un subfibrado vectorial de rango p del fibrado tangente a M y en particular una variedad de dimensión $n + p$. De igual modo, $T^1\mathcal{F}$ es una variedad de dimensión $n + p - 1$ dotada de una estructura de subfibrado del fibrado T^1M . Además el fibrado $T\mathcal{F}$ es *involutivo*, es decir, el corchete de Lie de dos campos de vectores sobre $T\mathcal{F}$ sigue estando en $T\mathcal{F}$ en restricción a un entorno abierto de cada punto de M . De hecho, el teorema de Frobenius [12, Ch. II, Theorem 2.3.5] nos asegura que si $E \subset TM$ es un C^r subfibrado vectorial integrable de rango p , entonces M admite una foliación \mathcal{F} de dimensión p y clase C^r tal que $E = T\mathcal{F}$.

1.2. Suspensiones

Según lo indicado en la introducción, nos vamos a interesar por un tipo particular de foliaciones, llamadas *suspensiones*, que se construyen de modo especialmente simple. Como puede verse en [12, Ch. II, §1] el concepto de *suspensión* es equivalente al aparentemente más general de *fibrado foliado*.

Sea F una variedad de dimensión p y clase C^r con $0 \leq r \leq \infty$ y $h : F \rightarrow F$ un C^r difeomorfismo. Se llama *acción diagonal* de \mathbb{Z} sobre el producto $\mathbb{R} \times F$ a la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times F$ generada por

$$H(t, x) = (t + 1, h(x)).$$

Como la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ es libre y propiamente discontinua, la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times F$ lo es también. Luego la proyección canónica $q : \mathbb{R} \times F \rightarrow M = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times F)$ es una cubierta regular de grupo \mathbb{Z} . Como la proyección canónica $p_1 : \mathbb{R} \times F \rightarrow \mathbb{R}$ es equivariante respecto de ambas acciones, induce por paso al cociente una fibración localmente trivial $\pi : M \rightarrow S^1$ de fibra F . Por su parte, la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\mathbb{R} \times \{y\}\}$ (definida por la proyección canónica $p_2 : \mathbb{R} \times F \rightarrow F$) también es invariante por H y pasa al cociente en una foliación \mathcal{F} sobre M . La hoja $\mathbb{R} \times \{y\}$ de \mathcal{H} se proyecta sobre una hoja L_y de \mathcal{F} obtenida como cociente de \mathbb{R} por la acción del subgrupo $\{n \in \mathbb{Z} \mid h^n(y) = y\}$.

Definición 1.7. Se dice que la variedad foliada (M, \mathcal{F}) es *suspensión* del difeomorfismo h .

Ejemplo 1.8. La foliación del toro T^2 por rectas de pendiente irracional presentada en el ejemplo 1.5.(3) es un ejemplo de suspensión de un difeomorfismo. Basta considerar $F = S^1$ y tomar como difeomorfismo $R_\theta : \zeta \in S^1 \rightarrow e^{2\pi i\theta}\zeta \in S^1$ la rotación de ángulo irracional θ .

Para generalizar la construcción anterior, consideremos una variedad diferenciable Σ de dimensión p y clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$, y denotemos por $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ su grupo fundamental. Fijemos una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ en el grupo de los C^r difeomorfismos de la variedad F . Recordemos que Γ es isomorfo al grupo de automorfismos de la cubierta universal $q : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ y define por consiguiente una acción libre y propiamente discontinua $\Gamma \curvearrowright \tilde{\Sigma}$.

En la nueva situación, se llama *acción diagonal* a la acción $\Gamma \curvearrowright \tilde{\Sigma} \times F$ definida por

$$\gamma \cdot (\tilde{x}, y) = (\gamma \cdot \tilde{x}, \rho(\gamma)(y))$$

para cada $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$ e $y \in F$. Como antes, la acción diagonal es libre y propiamente discontinua (ya que Γ actúa de ese modo sobre $\tilde{\Sigma}$) y define una cubierta regular $\pi : \tilde{\Sigma} \times F \rightarrow M = \Gamma \backslash (\tilde{\Sigma} \times F)$ de grupo Γ . La proyección canónica $p_1 : \tilde{\Sigma} \times F \rightarrow \tilde{\Sigma}$ es equivariante respecto de las acciones $\Gamma \curvearrowright \tilde{\Sigma} \times F$ y $\Gamma \curvearrowright \tilde{\Sigma}$ y por consiguiente induce por paso al cociente una fibrición localmente trivial $\pi : M \rightarrow \Sigma$ de fibra F que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Sigma} \times F & \xrightarrow{p_1} & \tilde{\Sigma} \\
 \downarrow \tilde{q} & & \downarrow q \\
 M = \Gamma \backslash (\tilde{\Sigma} \times F) & \xrightarrow{\pi} & \Sigma.
 \end{array} \tag{1.1}$$

En efecto, si V es un abierto contráctil de Σ y \tilde{V} es una componente conexa de $q^{-1}(V)$, entonces la restricción $\tilde{q}|_{\tilde{V} \times S^1} : \tilde{V} \times S^1 \rightarrow \pi^{-1}(V)$ es un C^r difeomorfismo y define una trivialización local de π al componer su inversa con la proyección $q|_{\tilde{V}} \times id : \tilde{V} \times S^1 \rightarrow V \times S^1$.

Por otra parte, la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\tilde{\Sigma} \times \{y\}\}$ es invariante por la Γ -acción y pasa al cociente en una foliación \mathcal{F} de M . El argumento es similar al empleado con la fibrición π . Si definimos

$$\Gamma_y = \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)(y) = y\}$$

entonces la hoja $\tilde{\Sigma} \times \{y\}$ de \mathcal{H} se proyecta en la hoja L_y de \mathcal{F} obtenida al cocientar por la acción libre y propiamente discontinua de Γ_y y tenemos el siguiente diagrama de cubiertas:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Sigma} \times \{y\} & \xrightarrow{\tilde{q}|_{\tilde{\Sigma} \times \{y\}}} & \\
 \downarrow q & & L_y = \Gamma_y \backslash (\tilde{\Sigma} \times \{y\}). \\
 \Sigma & \xleftarrow{\pi|_{L_y}} &
 \end{array} \tag{1.2}$$

Como la foliación horizontal \mathcal{H} es transversa a la fibrición trivial $p_1 : \tilde{\Sigma} \times F \rightarrow \tilde{\Sigma}$, la foliación \mathcal{F} es transversa a la fibrición inducida $\pi : M \rightarrow \Sigma$. Luego $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} \Sigma$ es un fibrado foliado en el sentido de [12, Chapter II, §1].

Definición 1.9. Se dice que el fibrado foliado (M, \mathcal{F}) es la *suspensión de la representación* ρ .

Observemos que la suspensión de un difeomorfismo es la suspensión de una representación donde $\Sigma = S^1$.

Ejemplo 1.10. Sea $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ una matriz no singular con entradas enteras. Esta condición garantiza que la matriz A induce un automorfismo lineal del toro $T^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$, que seguiremos denotando del mismo modo y actúa sobre T^2 de modo natural.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T^2 \\ \downarrow A & & \downarrow A & & \downarrow A \\ \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T^2. \end{array} \quad (1.3)$$

De esta forma, obtenemos una acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times T^2$ generada por el automorfismo

$$f(t, [x, y]) = (t + 1, [A(x, y)]),$$

donde $[x, y]$ denota el punto de T^2 de coordenadas angulares (x, y) . La variedad

$$T_A^3 = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times T^2)$$

es una variedad compacta de dimensión 3 dotada de una estructura natural de fibrado sobre S^1 con fibra T^2 :

$$\begin{array}{ccccc} T^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \times T^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \parallel & & \downarrow \mathbb{Z} & & \downarrow \mathbb{Z} \\ T^2 & \longrightarrow & T_A^3 & \longrightarrow & S^1. \end{array} \quad (1.4)$$

y de una foliación \mathcal{F} transversa de dimensión 1. Si la matriz A es hiperbólica (es decir, si $|\text{tr} A| > 2$), la foliación \mathcal{F} se denomina *flujo de Anosov*, véase [4, Ch. 1].

1.3. Holonomía de una suspensión

Consideremos la suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ descrita mediante el diagrama (1.1). Hemos visto en la sección anterior que la aplicación

$$\pi_y = \pi|_{L_y} : L_y = \Gamma_y \backslash \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

es una cubierta. Por tanto, fijados puntos $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$ y $x = q(\tilde{x}) \in \Sigma$, dicha aplicación induce un monomorfismo de grupos

$$i = (\pi_y)_* : \Gamma_y = \pi_1(L_y, z) \longrightarrow \Gamma = \pi_1(\Sigma, x)$$

donde el punto $z = \tilde{q}(\tilde{x}, y) \in L_y$ se identificará en lo sucesivo con el punto $y \in F$. Con este abuso de lenguaje, la aplicación $\text{hol}_y : \Gamma_y \rightarrow \text{Difeo}^r(F, y)$ definida mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_y & \xrightarrow{\text{hol}_y} & \text{Difeo}^r(F, y) \\ \downarrow i & & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{\rho} & \text{Difeo}^r(F), \end{array} \quad (1.5)$$

se llama *representación de holonomía de L_y* . En el diagrama anterior, denotamos por $\text{Difeo}_+(F, y)$ al grupo de los C^r difeomorfismos de F que dejan fijo el punto y . El grupo de gérmenes

$$\text{hol}(L_y) = \{ \langle h \rangle_y \mid h \in \text{Im } \text{hol}_y \}$$

se llama *grupo de holonomía de la hoja L_y* .

En el caso de suspensiones, la imagen de la representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ se denomina *grupo de holonomía de \mathcal{F}* y se denota por $\text{hol}(\mathcal{F})$, de modo que la imagen del homomorfismo hol_y es la isotropía de $\text{hol}(\mathcal{F})$ en y . En general, la dinámica de una variedad foliada (M, \mathcal{F}) es descrita mediante un pseudogrupo de transformaciones de la transversal T , llamado *pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F}* , descrito en [12, Ch. III]. El grupo de holonomía de la hoja L que pasa por un punto de $T \subset M$ está formado por los gérmenes de los elementos del pseudogrupo que fijan ese punto.

1.4. Clase de Euler de una representación

Los fibrados principales de fibra S^1 sobre una variedad Σ están clasificados (salvo isomorfismo) por la llamada *clase de Euler* $e \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$, que es la obstrucción a la existencia una sección del fibrado. Como un fibrado principal es trivial si y solo si existe una sección, la clase de Euler nos informa sobre si un fibrado es trivial o no. Más concretamente, un fibrado principal de fibra S^1 es trivial si y solo si $e = 0$.

Sea $\pi : M = \Gamma \backslash (\tilde{\Sigma} \times S^1) \rightarrow \Sigma = \Gamma \backslash \Sigma$ el fibrado localmente trivial de fibra S^1 sobre la variedad Σ obtenido mediante una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ del grupo fundamental $\Gamma = \pi_1(\Sigma, x)$ con $0 \leq r \leq \infty$. Como la representación toma valores en el grupo de C^r difeomorfismos que conservan la orientación de S^1 , se trata de un fibrado principal de grupo S^1 [22, Proposition 6.15]. Denotamos por $e(\rho) \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ la clase de Euler asociada a este fibrado.

Si Σ es una superficie orientable compacta de género g , entonces el grupo de homología $H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ es isomorfo a \mathbb{Z} y a la imagen de $e(\rho)$ en \mathbb{Z} se le llama *número de Euler* $e(\rho)$.

Teorema 1.11 (Desigualdad de Milnor-Wood). *En las condiciones anteriores,*

$$|e(\rho)| \leq |\chi(\Sigma)|,$$

siendo $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$ la característica de Euler de la superficie Σ .

Si se tiene la igualdad $|e(\rho)| = |\chi(\Sigma)|$, se dice que la clase de Euler $e(\rho)$ es *máxima*.

En [21], J. Milnor da un algoritmo explícito para el cálculo de la clase de Euler de una representación que reproducimos a continuación en nuestro caso concreto en el que Σ es una superficie hiperbólica compacta. Observemos en primer lugar que Σ es un CW-complejo con una única 0-celda, $2g$ 1-celdas y una única 2-celda. En particular, el grupo de cadenas singulares $C_2(\Sigma, \mathbb{Z})$ es el grupo cíclico infinito generado por la única 2-celda de Σ . El objetivo es encontrar un cociclo entero definido sobre $C_2(\Sigma, \mathbb{Z})$ que represente a la clase de Euler $e(\rho)$.

Consideremos la presentación usual de Γ

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$$

donde α_i y β_i están representados por las curvas cerradas de Σ obtenidas a partir de las curvas del disco de Poincaré denotadas del mismo modo y descritas en la figura 1.4 en el caso $g = 2$.

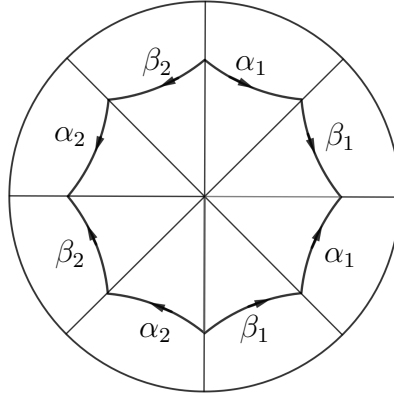


Figura 1.4: Representación del grupo Γ en el caso $g = 2$

Llamemos

$$\text{Difeo}_+^r(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) = \{ f \in \text{Difeo}_+^r(\mathbb{R}) \mid f(x+1) = f(x) + 1 \}$$

al grupo de los C^r difeomorfismos de \mathbb{R} que conservan la orientación y son \mathbb{Z} -invariantes. Tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{T} \text{Difeo}_+^r(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p} \text{Difeo}_+^r(S^1) \rightarrow 1,$$

donde el homomorfismo T lleva cada entero $m \in \mathbb{Z}$ en la traslación $T(m) \in \text{Difeo}_+^r(\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ por m .

Para cada $i = 1, \dots, g$, llamemos $\bar{A}_i = \rho(\alpha_i)$ y $\bar{B}_i = \rho(\beta_i)$ y tomemos representantes A_i y B_i en $\text{Difeo}_+^r(\mathbb{R}; \mathbb{Z})$ de \bar{A}_i y \bar{B}_i respectivamente. El difeomorfismo \mathbb{Z} -invariante $[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$ no depende de los representantes escogidos y verifica que

$$p([A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]) = \rho([\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g]) = 1.$$

Es decir, el inverso de $[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$ es la traslación por un entero $m \in \mathbb{Z}$.

La prueba del siguiente teorema puede verse en [13, Ch. IV, Theorem 3.2.3]:

Teorema 1.12 ([21]). *La clase de Euler $e(\rho)$ está representada por la cocadena que envía la única 2-celda de Σ en el entero $m = -T^{-1}([A_1, B_1] \dots [A_g, B_g])$ y por consiguiente el número de Euler es exactamente m .*

Capítulo 2

Geometría hiperbólica

Sea $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ el *plano hiperbólico*, es decir, semiplano complejo superior dotado de la métrica de Riemann $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$, cuyas geodésicas son las rectas verticales y los semicírculos con centro en el eje real.

Recordemos que el grupo $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$ coincide con el grupo de isometrías de \mathbb{H} que conservan la orientación al identificar la clase representada por una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

con la transformación lineal fraccional

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (2.1)$$

Aunque la notación

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es habitual a la hora de representar los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$, pese al abuso de lenguaje, habitualmente prescindiremos del signo \pm . Los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$ se denominan *grupos fuchsianos*.

Si denotamos por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el disco abierto unidad, la transformación conforme

$$\Psi : z \in \mathbb{H} \longrightarrow \Psi(z) = i \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D} \quad (2.2)$$

nos proporciona un modelo de geometría equivalente al del plano hiperbólico, cuyo espacio subyacente es el disco abierto unidad, dotado de la métrica de Riemann

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

inducida por la de \mathbb{H} , que se sigue denotando por \mathbb{D} y cuyas geodésicas son los diámetros y los arcos de círculo que cortan ortogonalmente a la frontera del disco. Usaremos la notación abusiva $\partial\mathbb{H}$ para referirnos a la unión del borde de \mathbb{H} con el punto ∞ , identificada con el borde usual $\partial\mathbb{D}$.

2.1. Acciones proyectiva y lineal

La acción transitiva $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ se extiende de modo natural en una acción transitiva $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ ya que la expresión (2.1) es válida para cualquier elemento de $\partial\mathbb{H}$. De hecho, para cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$, hay un elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $g(i) = z$ y $g_{*i}(\vec{e}_2) = \vec{u}$. Como precisaremos más adelante en el capítulo 3, eso significa que la acción natural $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ también es transitiva.

Definición 2.1. Para cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$, existe una única geodésica $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\alpha(0) = z$ y $\dot{\alpha}(0) = \vec{u}$. Definimos

$$u(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \in \partial\mathbb{H}$$

y tenemos así una aplicación

$$\Phi : T^1\mathbb{H} \longrightarrow \partial\mathbb{H}$$

dada por $\Phi(u) = u(+\infty)$.

Proposición 2.2. La aplicación Φ es equivariante respecto de las acciones $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ y $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$.

Demostración. Para cada $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, se tiene que:

$$g(\Phi(u)) = g(u(+\infty)) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(\alpha(t)) = \Phi(g(u)),$$

ya que $g \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ es la geodésica asociada por $g(u) = (g(z), g_{*z}(\vec{u})) \in T^1\mathbb{H}$. \square

Como la acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es transitiva, el borde

$$\partial\mathbb{H} \cong PSL(2, \mathbb{R})/PSL(2, \mathbb{R})_\infty,$$

siendo $PSL(2, \mathbb{R})_\infty$ el subgrupo de isotropía del punto ∞ . Para cualquier punto $\xi \in \partial\mathbb{H}$, los subgrupos de isotropía están relacionados por:

$$PSL(2, \mathbb{R})_\xi = gPSL(2, \mathbb{R})_\infty g^{-1}$$

para algún elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Notemos que el grupo de isotropía $PSL(2, \mathbb{R})_\infty$ coincide con el grupo de transformaciones afines

$$B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

Definición 2.3. Al grupo B^+ anterior se le denomina *grupo afín* o *grupo de Borel*.

Observemos que la órbita $B^+i = \mathbb{H}$ ya que las traslaciones $t_s(z) = z + s$ con $s \in \mathbb{R}$ y las homotecias $h_y(z) = yz$ con $y > 0$ pertenecen a B^+ . Con la terminología que acabamos de introducir, tenemos que:

$$\partial\mathbb{H} \cong PSL(2, \mathbb{R})/B^+.$$

Teorema 2.4 ([6], Theorem 1.18). *Sea $(r(t))_{t \geq 0}$ un arco geodésico parametrizado por longitud de arco que tenga como punto límite $\xi \in \partial\mathbb{H}$. Para cada par de puntos $z, z' \in \mathbb{H}$, existe el límite*

$$B_\xi(z, z') = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(z, r(t)) - d(z', r(t))$$

que no depende del punto inicial $r(0)$ del rayo geodésico r .

Definición 2.5. En las condiciones del teorema anterior, se dice que $B_\xi(z, z')$ es el valor del cociclo de Busemann centrado en ξ para z y z' .

Definamos ahora $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \{\pm Id\}$ y consideremos la aplicación

$$v : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$$

dada por:

$$v(u) = v(z, \vec{u}) = \begin{cases} \pm \frac{e^{B_{u(+\infty)}(i, z)/2}}{\sqrt{1+u^2(+\infty)}} \begin{pmatrix} u(+\infty) \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } u(+\infty) \neq \infty \\ \pm e^{B_{u(+\infty)}(i, z)/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } u(+\infty) = \infty. \end{cases}$$

Como puede verse en la figura 2.1, el vector $v(u)$ es paralelo al vector $(1, 0)$ si $u(+\infty) = \infty$ y ambos son iguales cuando $z = i$. Observemos además que la aplicación $v : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$ es sobreyectiva.

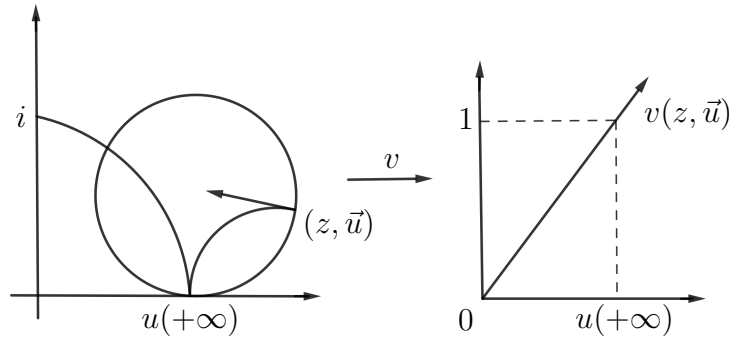


Figura 2.1: La aplicación v

Definición 2.6. La acción natural $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ induce una acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright E$ llamada *acción lineal*.

En [6, Ch. V, Proposition 1.7], se demuestra es siguiente resultado que permite relacionar la acción transitiva $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ con la acción lineal $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

Proposición 2.7. *La aplicación $v : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$ es $PSL(2, \mathbb{R})$ -equivariante respecto de las acciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre $T^1\mathbb{H}$ y E . \square*

Como la acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright E$ sigue siendo transitiva, tenemos que

$$E \cong PSL(2, \mathbb{R}) / PSL(2, \mathbb{R})_{(1,0)}.$$

Definición 2.8. El grupo de isotropía $PSL(2, \mathbb{R})_{(1,0)}$ coincide con el grupo de traslaciones

$$U^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

y se denomina *grupo unipotente*.

Observación 2.9. Si llamamos *grupo diagonal* al grupo de homotecias

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}.$$

entonces $B^+ = DU^+$.

2.2. Clasificación de las isometrías

En las siguientes secciones nos vamos a interesar por algunas propiedades de los grupos fuchsianos, es decir, de los subgrupos discretos Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$. Para ello empezaremos por recordar la clasificación de sus posibles elementos $\gamma \in \Gamma$:

Definición 2.10. Un elemento $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ se dice:

- (1) *elíptico* si γ fija un punto en \mathbb{H} ,
- (2) *parabólico* si γ no fija ningún punto en \mathbb{H} , pero fija un único punto en $\partial\mathbb{H}$,
- (3) *hiperbólico* si γ no fija ningún punto en \mathbb{H} , pero fija dos puntos en $\partial\mathbb{H}$.

Definición 2.11. Dada una transformación hiperbólica $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$, se llama *eje* de γ a la única geodésica de \mathbb{H} determinada por los dos puntos fijos $\gamma^\pm \in \partial\mathbb{H}$ de γ . Como γ lleva geodésicas en geodésicas, entonces γ debe dejar invariante su eje.

Si la isometría $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ está dada por:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc = 1$, entonces llamamos *traza* al número

$$tr(\gamma) = a + d.$$

El siguiente resultado, que se sigue de forma inmediata de las definiciones, nos permite caracterizar las isometrías del plano hiperbólico a través del valor de su traza:

Proposición 2.12. Sea $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$, se verifica:

- (1) $|tr(\gamma)| > 2 \iff \gamma$ es hiperbólica.

(2) $|tr(\gamma)| < 2 \iff \gamma$ es elíptica.

(3) $|tr(\gamma)| = 2 \iff \gamma$ es parabólica.

En lo que sigue, dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, denotaremos por (z_1, z_2) a la geodésica que los une, sin tener en cuenta ninguna orientación particular de la geodésica. También denotaremos por $\gamma.z$ la traslación $\gamma(z)$ de un punto $z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ por un elemento γ de Γ y por Γz la órbita correspondiente. Por otra parte, para probar los siguientes resultados, necesitaremos usar las fórmulas de las distancias hiperbólicas, tanto en el modelo del semiplano \mathbb{H} , como en el disco \mathbb{D} . Recordemos que:

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_2y_2}$$

y

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

si $x = x_1 + ix_2$ e $y = y_1 + iy_2$.

Proposición 2.13. Sea $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ una transformación hiperbólica con puntos fijos $\gamma^{\pm} \in \partial\mathbb{H}$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{H}$, la sucesión $\{\gamma^n.z\}$ converge a un punto $\xi = \gamma^{\pm}$.

Demostración. En este caso será más cómodo usar el modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} . Sea $L = (\gamma^-, \gamma^+)$ la geodésica que une γ^- con γ^+ . Como γ fija estos puntos, tenemos que $\gamma(L) = L$. Si $z \in L$, entonces $\gamma^2.z \neq z$, ya que en otro caso γ^2 fijaría tres puntos, luego γ^2 sería la identidad lo que contradice el hecho de que γ sea hiperbólica. Como γ actúa por isometrías, entonces

$$d_{\mathbb{D}}(z, \gamma.z) = d_{\mathbb{D}}(\gamma.z, \gamma^2.z),$$

es decir, al incrementar n estamos avanzando por la geodésica L siempre en la misma dirección. Como los puntos de la sucesión $\{\gamma^n.z\}$ pertenecen a la geodésica L , entonces

$$d_{\mathbb{D}}(z, \gamma^n.z) = n.d_{\mathbb{D}}(z, \gamma.z)$$

y usando la fórmula de la distancia hiperbólica obtenemos que:

$$\cosh n.d_{\mathbb{D}}(z, \gamma.z) = 1 + \frac{|z - \gamma^n.z|^2}{(1 - |\gamma^n.z|^2)(1 - |z|^2)}.$$

El término de la izquierda tiende a infinito cuando $n \rightarrow +\infty$, luego necesariamente la sucesión $\{|\gamma^n.z|\}$ converge a 1 cuando $n \rightarrow +\infty$. Entonces deducimos que $\{\gamma^n.z\} \rightarrow \xi = \gamma^{\pm}$.

Dado un punto cualquiera $z \in \mathbb{D}$, sea $w \in L$ un punto de la geodésica del párrafo anterior. Como γ es una isometría, tenemos que:

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = d_{\mathbb{D}}(\gamma.z, \gamma.w) = \dots = d_{\mathbb{D}}(\gamma^n.z, \gamma^n.w) = \dots$$

Haciendo uso de nuevo de la fórmula de la distancia hiperbólica, deducimos que:

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(z, w) = 1 + \frac{|\gamma^n \cdot z - \gamma^n \cdot w|^2}{(1 - |\gamma^n \cdot z|^2)(1 - |\gamma^n \cdot w|^2)}.$$

En este caso, como el término de la izquierda es constante y la sucesión $\{1 - |\gamma^n \cdot w|^2\}$ converge a 0, entonces la sucesión $\{|\gamma^n \cdot z - \gamma^n \cdot w|\}$ también debe converger a 0. Luego $\{\gamma^n \cdot z\} \rightarrow \xi = \gamma^\pm$ como antes. \square

Proposición 2.14. Sean $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un subgrupo y $K \subset \partial\mathbb{H}$ un conjunto no vacío, cerrado y Γ -invariante. Sea $\gamma \in \Gamma$ una transformación hiperbólica con puntos fijos $\gamma^\pm \in \partial\mathbb{H}$. Entonces $\gamma^\pm \in K$.

Demostración. Sea $\xi \in K$ y $z \in (\gamma^-, \xi)$ un punto en la geodésica que une γ^- con ξ . Por el lema anterior sabemos que $\{\gamma^n \cdot z\} \rightarrow \xi' = \gamma^\pm$. Supongamos que $\xi' = \gamma^+$ (pues en el otro caso basta cambiar γ por la transformación hiperbólica γ^{-1}). Veamos que $\{\gamma^n \cdot \xi\} \rightarrow \gamma^+$. Como K es cerrado y Γ -invariante, esto implicará que $\gamma^+ \in K$, con lo que el lema quedará probado. En efecto, en primer lugar, observemos que, para cada $n \geq 1$, $\gamma^n \cdot z \in (\gamma^-, \gamma^n \cdot \xi)$ puesto que $\gamma^n \cdot \gamma^- = \gamma^-$. Luego

$$|\gamma^n \cdot \xi - \gamma^+| \leq |\gamma^n \cdot \xi - \gamma^n \cdot z| + |\gamma^n \cdot z - \gamma^+|.$$

Los dos términos de la derecha convergen a cero: el primero porque $\{\gamma^n \cdot z\} \rightarrow \gamma^+$ y $\gamma^n \cdot z \in (\gamma^-, \gamma^n \cdot \xi)$; el segundo por hipótesis. Luego deducimos que $\{\gamma^n \cdot \xi\} \rightarrow \gamma^+$ como queríamos. \square

Definición 2.15. Para cada subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$, se llama *conjunto límite* de Γ al conjunto $L(\Gamma)$ formado por los puntos límite $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \cdot z \in \partial\mathbb{H}$ asociados a puntos $z \in \mathbb{H}$ y sucesiones de elementos $\gamma_n \in \Gamma$, es decir,

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma z} \cap \partial\mathbb{H}.$$

Según se prueba en [23, Theorem 12.1.2], este conjunto no depende de la elección del punto $z \in \mathbb{H}$. Por construcción, $L(\Gamma)$ es un subconjunto cerrado y Γ -invariante de $\partial\mathbb{H}$, que contiene los puntos fijos γ^\pm de cualquier elemento hiperbólico $\gamma \in \Gamma$ según la proposición 2.14.

Definición 2.16. Un grupo fuchsiano Γ se dice *elemental* si $L(\Gamma)$ es finito o equivalentemente si la acción de Γ sobre $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ posee una órbita finita.

Como puede verse en [15, Theorem 3.4.6], el conjunto límite de un grupo fuchsiano elemental contiene a lo sumo dos elementos. De esta forma, podemos clasificar los grupos elementales de acuerdo al número de elementos de su conjunto límite:

Definición 2.17. Sea Γ un subgrupo discreto elemental de $PSL(2, \mathbb{R})$. El grupo se dice

(1) *elíptico* si su conjunto límite es vacío,

(2) *parabólico* si su conjunto límite tiene solo un punto y

(3) *hiperbólico* si su conjunto límite tiene dos puntos.

Es inmediato que un subgrupo discreto elemental es elíptico, parabólico o hiperbólico si y solo si todos sus elementos son de tipo elíptico, parabólico o hiperbólico, fijando todos los mismos puntos en la frontera respectivamente.

2.3. Grupos fuchsianos no elementales

El siguiente resultado nos proporciona una primera condición que deben satisfacer los grupos fuchsianos no elementales:

Teorema 2.18 ([15], Theorem 2.4.4). *Si Γ es un grupo fuchsiano no elemental entonces contiene al menos una transformación hiperbólica.*

Demostración. Supongamos que Γ no contiene elementos hiperbólicos y distingamos dos casos:

(1) Supongamos que Γ solo contiene transformaciones elípticas, excepto la identidad. En este caso, salvo conjugación por un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ y usando la transformación de Cayley (2.2), podemos suponer que $\gamma \in \Gamma$ determina una transformación elíptica del disco de Poincaré \mathbb{D} que fija el origen 0. Entonces $\gamma(z) = az/\bar{a}$ con $|a|^2 = 1$. Fijemos otra transformación

$$\eta(z) = \frac{bz + \bar{c}}{cz + \bar{b}}, \quad |b|^2 - |c|^2 = 1,$$

que pertenezca a Γ y sea distinta de γ . Como Γ solo contiene elementos elípticos, tenemos que:

$$|tr(\gamma\eta\gamma^{-1}\eta^{-1})| = 2 + 4|c|^2 Im(a)^2 \leq 2.$$

Luego $c = 0$ ó $Im(a) = 0$. Si $Im(a) = 0$, entonces $a = \bar{a} \in \mathbb{R}$ y $\gamma = Id$ en contra de lo supuesto. Por tanto $c = 0$ y $\eta(z) = bz/\bar{b}$ que también fija el 0 $\in \mathbb{D}$. Por consiguiente la órbita del origen se reduce al propio origen y Γ es elemental.

(2) Supongamos que Γ tiene un elemento parabólico γ . Conjugando como antes, podemos suponer que $\gamma(z) = z + 1$ de modo que fija el punto $\infty \in \partial\mathbb{H}$. Si

$$\eta(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

es otro elemento de Γ distinto de γ , entonces

$$\gamma^n \eta(z) = \frac{(a + nc)z + (b + nd)}{cz + d}$$

y

$$tr(\gamma^n \eta)^2 = (a + b + nc)^2.$$

Como todos los elementos de Γ son elípticos o parabólicos, deducimos que:

$$0 \leq (a + b + nc)^2 \leq 4$$

para todo $n \geq 1$. Luego $c = 0$ y por tanto η también fija el punto del infinito. En este caso, la órbita de ∞ se reduce a ∞ y Γ es otra vez elemental. \square

La siguiente propiedad es fundamental desde un punto de vista dinámico:

Teorema 2.19 ([6], Ch. I, Proposition 3.6). *Si Γ es un grupo fuchsiano no elemental, entonces $L(\Gamma)$ es minimal para la acción de $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$, es decir, $L(\Gamma)$ es el menor subconjunto cerrado no vacío y Γ -invariante de $\partial\mathbb{H}$.*

Demostración. Usaremos por comodidad el modelo del disco \mathbb{D} . Sabemos que el conjunto límite $L(\Gamma)$ es un cerrado no vacío Γ -invariante y debemos comprobar que es minimal. Consideremos un subconjunto no vacío $K \subset L(\Gamma)$ cerrado y Γ -invariante. Puesto que Γ es no elemental, por el teorema 2.18, Γ contiene al menos una transformación hiperbólica γ . Por la proposición 2.14, los puntos fijos γ^+ y γ^- de la transformación γ son elementos de K . Tomemos un punto $z \in (\gamma^-, \gamma^+)$ en el eje de γ . Sea $\xi \in L(\Gamma)$ y sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de elementos de Γ tal que $\{\gamma_n \cdot z\} \rightarrow \xi$. Como $K \subset S^1$ es compacto, tomando una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que

$$\{\gamma_n \cdot \gamma^-\} \rightarrow \xi^- \quad \text{y} \quad \{\gamma_n \cdot \gamma^+\} \rightarrow \xi^+$$

en K . Argumentando como en la demostración de la proposición 2.14, concluimos que $\xi = \xi^\pm$ y por consiguiente $\xi \in K$. Luego $L(\Gamma) = K$. \square

Corolario 2.20. *Si Γ es un grupo fuchsiano no elemental, entonces la acción inducida $\Gamma \curvearrowright L(\Gamma)$ es minimal, es decir, para cada $\xi \in L(\Gamma)$, la órbita $\Gamma\xi$ es densa en $L(\Gamma)$.* \square

Corolario 2.21. *Un grupo fuchsiano Γ no elemental contiene infinitas transformaciones hiperbólicas con puntos fijos distintos dos a dos.* \square

2.4. Conjunto límite de un subgrupo normal

Nos proponemos demostrar que si Γ es un grupo fuchsiano no elemental y N es un subgrupo normal infinito de Γ , entonces $L(N) = L(\Gamma)$. Para ello, necesitaremos algunos resultados previos.

Definición 2.22. Dado un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$, se llama *conjunto de puntos fijos de Γ* al conjunto

$$Fix(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Fix(\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H} \mid \gamma \cdot z = z\},$$

donde recordemos $Fix(\gamma)$ se reduce a un punto de \mathbb{H} si γ es elíptico, a un punto de $\partial\mathbb{H}$ si γ es parabólico o a dos puntos de $\partial\mathbb{H}$ si γ es hiperbólico.

Proposición 2.23. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano. Si todos los elementos de Γ tienen el mismo conjunto de puntos fijos (es decir, $Fix(\gamma) = Fix(\gamma')$ para cada par $\gamma, \gamma' \in \Gamma$), entonces Γ es cíclico.*

Demostración. Como los puntos fijos de un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ determinan su tipo (elíptico, parabólico o hiperbólico), todos los elementos de Γ son del mismo tipo y podemos distinguir tres casos:

(1) Si los elementos de Γ son hiperbólicos, entonces podemos conjugar por un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ para suponer que $Fix(\Gamma) = \{0, \infty\}$. Luego Γ es un subgrupo discreto del grupo de homotecias $\{h_y \mid y > 0\}$, isomorfo al grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^* de los reales positivos (imagen por la aplicación exponencial del grupo aditivo \mathbb{R}). Deducimos que Γ es cíclico infinito.

(2) Si todos los elementos de Γ son parabólicos, al igual que antes, podemos suponer que $Fix(\Gamma) = \{\infty\}$. Luego Γ es subgrupo discreto del grupo de traslaciones $\{t_x \mid x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ y por la misma razón Γ es cíclico infinito.

(3) Si los elementos de Γ son elípticos, conjugando por la transformación de Cayley (2.2), podemos pasar al modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} que $Fix(\Gamma) = \{0\}$. Luego Γ es un subgrupo discreto del grupo de rotaciones $SO(2)$ y deducimos que Γ es cíclico finito. \square

Corolario 2.24. *Si Γ es un grupo fuchsiano con todos sus elementos elípticos, entonces Γ es elemental, cíclico y finito.*

Demostración. Basta combinar el teorema 2.18 y la proposición 2.23 \square

Proposición 2.25. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano y F el conjunto de los elementos de $\partial\mathbb{H}$ fijados por elementos no elípticos de Γ . Entonces $\overline{F} = L(\Gamma)$.*

Demostración. Como $F \subset L(\Gamma)$ y $L(\Gamma)$ es un cerrado de $\partial\mathbb{H}$, entonces $\overline{F} \subset L(\Gamma)$. Dado $\xi \in F$, por definición, existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ no elíptico que fija el punto ξ . Así, para cualquier elemento $\gamma' \in \Gamma$, tenemos que $\gamma'\gamma(\gamma')^{-1}$ sigue siendo elíptico y fija $\gamma'(\xi)$. Luego tanto F como su clausura \overline{F} son Γ -invariantes. Si Γ es no elemental, entonces $L(\Gamma) = \overline{F}$ según el teorema 2.19. En otro caso, el conjunto límite $L(\Gamma)$ contiene a lo sumo dos puntos y según su número de elementos se denomina elíptico, parabólico o hiperbólico (según se ha indicado en la definición 2.17. En cualquier caso, como consecuencia del teorema 2.19 y por finitud, el conjunto $F = L(\Gamma)$. \square

Teorema 2.26. *Sea Γ un grupo fuchsiano no elemental y sea $N \triangleleft \Gamma$ un subgrupo normal infinito. Entonces $L(N) = L(\Gamma)$.*

Demostración. Sea

$$F_N = \{x \in Fix(\gamma) \mid \gamma \in N \text{ no elíptico}\}$$

el conjunto de los puntos fijados por elementos no elípticos de N . Observemos en primer lugar que $F_N \neq \emptyset$ como consecuencia del corolario 2.24. Al igual que en la prueba del resultado anterior, para cada $\gamma \in N$ y cada $\gamma' \in \Gamma$, tenemos que:

$$Fix(\gamma'\gamma(\gamma')^{-1}) = \gamma'.Fix(\gamma).$$

Por tanto, como H es normal, deducimos que F_N y \overline{F}_N son Γ -invariantes. Por la proposición anterior, $L(N) = \overline{F}_N$ y por fin

$$L(\Gamma) \subset L(H) \subset L(\Gamma)$$

como consecuencia de la minimalidad de $L(\Gamma)$. \square

2.5. Grupos de superficie

En esta sección introducimos los grupos fuchsianos que nos interesarán en los dos próximos capítulos:

Definición 2.27. Un subgrupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ se llama *grupo de superficie* si $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie compacta.

El estudio de la *región de Dirichlet* de un grupo fuchsiano (que puede verse en [15, Ch. 3]) permite caracterizar los grupos de superficie como grupos fuchsianos *cocompactos* (es decir, $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es un espacio compacto) y sin torsión. La primera condición garantiza (según [15, Theorem 4.2.1]) que Γ no contiene elementos parabólicos, mientras que la segunda (según [15, ejercicio 2.14]) muestra que tampoco contiene elementos elípticos.

Teorema 2.28 ([15], Theorem 4.5.2). *Si Γ es un grupo de superficie, entonces $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$.*

Demostración. Como $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie compacta, la acción propiamente discontinua de Γ sobre \mathbb{H} admite un dominio fundamental compacto K , cuya frontera no corta a $\partial\mathbb{H}$. Además, ninguno de los trasladados de K por elementos de Γ corta a $\partial\mathbb{H}$. Ahora bien, como la familia de trasladados $\{\gamma.K \mid \gamma \in \Gamma\}$ define un mosaico de \mathbb{H} , para cada punto $\xi \in \partial\mathbb{H}$ y cada entorno abierto U de ξ en $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma.K \subset U$. Esto permite construir un punto $z \in K$ y una sucesión de elementos $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\{\gamma_n.z\} \rightarrow \xi$, lo que prueba que $\xi \in L(\Gamma)$. \square

Como consecuencia del teorema anterior, la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ de un grupo de superficie Γ es minimal, es decir, todas las órbitas son densas. Para completar la sección, demostramos que la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es *transitiva*, es decir, posee una órbita densa. Lo haremos por comodidad en el caso de un grupo de superficie, aunque el resultado sigue siendo válido para cualquier grupo fuchsiano no elemental.

Lema 2.29. *Sea Γ un grupo de superficie. Si B_1 y B_2 son dos bolas abiertas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma.B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $p : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ la proyección canónica. La acción lineal $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ induce una acción proyectiva $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}P^1$ y lo mismo ocurre al sustituir $SL(2, \mathbb{R})$ por su cociente $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$. Según la definición 2.6, la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ proviene de una acción de Γ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ que define por paso al cociente una acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^1$. Esta acción es conjugada a la acción

como grupo fuchsiano $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$. Por comodidad, vamos a pensar en Γ como subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ o como subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$ sin hacer distinción. Por hipótesis, como Γ es un grupo de superficie, todos los puntos de $\partial\mathbb{H}$ son puntos fijos de transformaciones hiperbólicas pertenecientes a Γ . Cuando identificamos el borde $\partial\mathbb{H}$ con la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$, esos puntos fijos determinan direcciones propias de los elementos de Γ pensados como elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ que actúan linealmente sobre \mathbb{R}^2 . Así, como $p(B_1) \subset \partial\mathbb{H}$ es un abierto, existe una transformación hiperbólica $\gamma_1 \in \Gamma$ con uno de sus puntos fijos perteneciente a $p(B_1)$. Esto significa que existe un autovector $u_1^+ \in B_1$ de la transformación lineal γ_1 con autovalor asociado $\lambda_1^+ < 1$. Observemos que u_1^+ pertenece al cono generado por B_1 , pero multiplicando por un escalar siempre podemos suponer que pertenece a B_1 .

Sea $\gamma \in \Gamma$ otra transformación hiperbólica con autovectores u^+ y u^- distintos de los de γ_1 . Como u_1^+ es la dirección estable de la transformación γ_1 , existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\gamma_1^n(u^+)$ y $\gamma_1^n(u^-)$ pertenecen al cono generado por B_1 . Ahora, sustituyendo γ_1 por γ_1^n y modificando las longitudes de u^+ y u^- , podemos suponer que $\gamma_1(u^+), \gamma_1(u^-) \in B_1$.

Repitiendo el argumento, sea $\gamma_2 \in \Gamma$ una transformación hiperbólica cuya dirección estable (correspondiente a un autovalor menor que 1) está generada por un vector u_2^+ que pertenece a B_2 . De nuevo, cambiando γ_2 por γ_2^n , para n suficientemente grande, podemos suponer que $\gamma_2(u^+)$ pertenece al cono generado por B_2 . Ahora bien, cuando $n \rightarrow \infty$, el segmento

$$[\gamma_2\gamma^n(u^-), \gamma_2\gamma^n(u^+)] = \gamma_2\gamma^n\gamma_1^{-1}[\gamma_1(u^-), \gamma_1(u^+)]$$

se aproxima a la semirecta abierta Δ de origen en $(0, 0)$ y generada por la dirección de $\gamma_2(u^+)$, que corta a B_2 . Como $[\gamma_1(u^-), \gamma_1(u^+)] \subset B_1$, tenemos asegurado que existe $x \in B_1$ tal que $\gamma_2\gamma^n\gamma_1^{-1}(x) \in B_2$. \square

Proposición 2.30 ([6], Ch. V, Proposition 2.6). *Si Γ es grupo de superficie, entonces existe $v \in E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \{\pm 1\}$ tal que $\overline{\Gamma v} = E$.*

Demostración. Sea $\{B_n\}$ una base numerable de abiertos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y sea O un abierto arbitrario. Por el lema anterior 2.29, existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $\gamma_1.O \cap B_1 \neq \emptyset$. Sea $V_1 \subset \overline{V_1} \subset O$ un abierto relativamente compacto tal que $\overline{V_1} \subset B_1$. Sustituyendo O por V_1 y B_1 por B_2 , obtenemos una nueva transformación $\gamma_2 \in \Gamma$ y un nuevo abierto relativamente $V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1$ tales que $\gamma_2.\overline{V_2} \subset B_2$. Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión de transformaciones $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$, una sucesión de abiertos encajados $\{V_n\}$ y una sucesión de compactos encajados $\{\overline{V_n}\}$ verificando que $\gamma_n.\overline{V_n} \subset B_n$.

Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$. Por construcción, tenemos que $\gamma_n.x \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como B_n es una base numerable de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la órbita Γx es densa en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ puesto que el abierto O es unión de abiertos básicos B_n y por tanto corta a la órbita Γx . Para concluir, nos basta tomar $v = \pm x$ en $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \{\pm 1\}$. \square

Capítulo 3

Teorema de Hedlund clásico

3.1. Fibrado tangente unitario

El fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}$ es una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión 3, que está dotada de tres flujos importantes: el flujo geodésico g_t , el flujo horocíclico estable h_s^+ y el flujo horocíclico inestable h_s^- . Estos flujos están relacionados por las siguientes *condiciones de hiperbolicidad*:

$$g_t \circ h_s^+ = h_{se^{-t}}^+ \circ g_t \quad \text{y} \quad g_t \circ h_s^- = h_{se^t}^- \circ g_t \quad (3.1)$$

y combinándolos definen sendas acciones de los grupos afines

$$B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

y

$$B^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

El flujo geodésico se define del siguiente modo (descrito en la figura 3.1): a cada vector $u \in T^1\mathbb{H}$, le asocia el vector $g_t(u) \in T^1\mathbb{H}$ definido como el vector tangente a la geodésica determinada por u en el instante t .

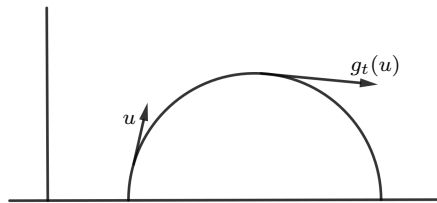


Figura 3.1: Flujo geodésico

Los horociclos en el plano hiperbólico \mathbb{H} son las circunferencias tangentes al borde $\partial\mathbb{H}$ y las líneas horizontales. Un vector $u \in T^1\mathbb{H}$ determina dos horociclos para los que u es un

vector ortogonal a ambos. En uno de ellos, llamado *horociclo estable*, el vector apunta hacia el interior, mientras que en el otro, llamado *horociclo inestable*, apunta hacia el exterior. La figura 3.2 describe exactamente la situación.

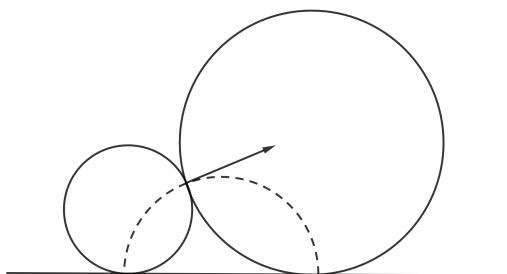


Figura 3.2: Horociclos

La definición del flujo horocíclico estable puede verse en la figura 3.3: a cada vector $u \in T^1\mathbb{H}$, se le asocia el vector $h_s^+(u) \in T^1\mathbb{H}$ obtenido desplazando u una distancia hiperbólica $|s|$ a lo largo del horociclo estable que define. Se desplaza en sentido horario si $s < 0$ y antihorario si $s > 0$.

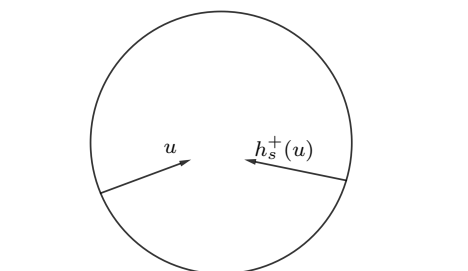


Figura 3.3: Flujo horocíclico

El flujo horocíclico inestable se define de forma análoga al estable desplazando el vector por el horociclo inestable que define.

3.2. Flujos geodésico y horocíclico

La descripción geométrica de los flujos geodésico y horocíclico admite una reformulación algebraica que será de gran utilidad más adelante.

Consideremos la acción natural $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ descrita al inicio de la sección 2.1. Recordemos que viene dada por:

$$g.u = g.(z, \vec{u}) = (g(z), g_{*z}(\vec{u})) \quad (3.2)$$

para cada $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$.

Como ya hemos señalado, esta acción es transitiva, ya que para cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ existe un elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $g.(i, \vec{e}_2) = (z, \vec{u})$. Además, como este elemento es único, la acción es libre y podemos identificar canónicamente el fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}$ con el grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R})$.

A partir de esta caracterización, los flujos geodésico, horocíclico estable y horocíclico inestable sobre $T^1\mathbb{H}$ se corresponden con las acciones por la derecha de los grupos D , U^+ y U^- definidas de la siguiente forma:

$$g_t(u) = g_t(g.(i, \vec{e}_2)) = g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} .(i, \vec{e}_2).$$

$$h_s^+(u) = h_s^+(g.(i, \vec{e}_2)) = g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .(i, \vec{e}_2).$$

$$h_s^-(u) = h_s^-(g.(i, \vec{e}_2)) = g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} .(i, \vec{e}_2).$$

En lo que sigue identificaremos los flujos correspondientes prescindiendo siempre del punto (i, \vec{e}_2) .

Sea S una superficie hiperbólica compacta obtenida como cociente de la acción (por la izquierda) de un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ sin torsión. Recordemos que la proyección canónica $q : \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H} = S$ es la cubierta universal de S y el grupo de superficie Γ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(S)$. De hecho, como la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ es libre y propiamente discontinua, también lo es la acción inducida $\Gamma \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ definida por (3.2). Luego el cociente $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ es una variedad C^∞ diferenciable dotada de una estructura de fibrado localmente trivial sobre S de fibra S^1 isomorfo al fibrado tangente unitario T^1S . En efecto, la relación de equivalencia orbital coincide con la relación de equivalencia definida por el morfismo de fibrados

$$q_* : (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H} \longrightarrow (q(z), q_*(z)(\vec{u})) \in T^1S$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathbb{H} & \xrightarrow{q_*} & T^1S \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{q} & S. \end{array} \quad (3.3)$$

Luego pasa al cociente en un isomorfismo de fibrados entre $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ y T^1S . Si identificamos $T^1\mathbb{H}$ con $PSL(2, \mathbb{R})$ como antes, entonces también podremos identificar el fibrado tangente unitario T^1S con la variedad homogénea $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Esto nos permitirá extender fácilmente las definiciones de g_t y h_s^\pm a cualquier superficie compacta:

Definición 3.1. Dada una superficie hiperbólica compacta $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ y su fibrado tangente unitario $T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, se define:

(1) el *flujo geodésico* g_t como la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright D$ dada por:

$$g_t(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},$$

(2) el *flujo horocíclico (estable)* h_s^+ como la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U^+$ dada por:

$$h_s^+(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(3) el *flujo horocíclico (inestable)* h_s^- como la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U^-$ dada por:

$$h_s^-(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Principio de dualidad

El *principio de dualidad* formulado por H. Furstenberg al demostrar la unicidad ergódica del flujo horocíclico en [8] proporciona un criterio general para comparar las dinámicas topológicas o medibles de dos acciones que conmutan. Lo adaptaremos a nuestro propósito, lo que nos permitirá explicitar un enunciado equivalente al teorema de Hedlund clásico (demostrado por G. A. Hedlund en [14]) y más tarde extender dicho resultado al contexto foliado.

Proposición 3.2 (Principio de dualidad). *La acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U^+$ es minimal si y solo si la acción $\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/U^+$ es minimal.*

Demostración. Dado $gU^+ \in PSL(2, \mathbb{R})/U^+$, veamos que la órbita

$$\Gamma(gU^+) = \{(\gamma g)U^+ | \gamma \in \Gamma\}$$

es densa. Para ello, fijemos otra clase $g'U^+ \in PSL(2, \mathbb{R})/U^+$ arbitraria. Si consideramos las clases $\Gamma g, \Gamma g' \in \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, por hipótesis, existe una sucesión $\{s_n\}$ tal que

$$\left\{ \Gamma \left(g \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\} \rightarrow \Gamma g'$$

Como la aplicación cociente $q_* : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ es abierta, una sucesión $\{\Gamma g_n\} \subset \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ converge a un clase $\Gamma g \in \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ si y solo si existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\gamma_n g_n\} \rightarrow g$. Lo mismo ocurre con la convergencia en $PSL(2, \mathbb{R})/U^+$. Aplicando esto a nuestro caso, tenemos que existe una sucesión $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ tal que

$$\left\{ \gamma_n \cdot \left(g \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\} \rightarrow g'$$

Por asociatividad, deducimos que:

$$\gamma_n \cdot \left(g \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\gamma_n \cdot g) \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y concluimos que:

$$\{(\gamma_n g)U^+\} \rightarrow g'U^+$$

en $PSL(2, \mathbb{R})/U^+$, como queríamos probar. El recíproco es completamente análogo. \square

3.4. Teorema de Hedlund

El enunciado original del teorema de Hedlund publicado en 1936 proporciona una caracterización de las órbitas densas del flujo horocíclico en el caso de un grupo fuchsiano Γ de primera especie, es decir, con conjunto límite $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$. Como corolario, se obtiene el resultado conocido como teorema de Hedlund:

Teorema 3.3 (Teorema de Hedlund, [14]). *Si S es una superficie hiperbólica compacta con curvatura constante negativa, entonces las órbitas del flujo horocíclico son densas en T^1S .*

La superficie S es el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ del plano hiperbólico \mathbb{H} por la acción de un grupo fuchsiano Γ cocompacto y sin torsión. De hecho, según se demuestra en [7], el recíproco también es cierto, es decir, si S es una superficies hiperbólica obtenida como cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ de un grupo fuchsiano no elemental Γ y las órbitas del flujo horocíclico son densas en T^1S , entonces Γ es cocompacto.

En las condiciones del teorema 3.3, como hemos visto, el fibrado tangente unitario es $T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ y el flujo horocíclico h_s^+ está definido por la acción natural por la derecha $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U^+$ del grupo unipotente U^+ . El principio de dualidad (formulado en la proposición 3.2) nos proporciona un nuevo enunciado equivalente del teorema de Hedlund:

Teorema 3.4 (Teorema de Hedlund). *Si Γ es un grupo de superficie, entonces la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal.*

En particular, si la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal, entonces la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ también lo es. Al igual que en el caso de la acción lineal, el principio de dualidad nos garantiza que la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/B^+$ es minimal si y solo si la acción afín $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright B^+$ es minimal. Obviamente, como $U^+ < B^+$, esta condición se deduce directamente del teorema de Hedlund.

Capítulo 4

Teorema de Hedlund foliado

El objetivo de este capítulo es extender el teorema de Hedlund a una 3-variedad foliada por superficies hiperbólicas obtenida como suspensión de una representación de un grupo de superficie Γ en el grupo $\text{Difeo}_+^r(S^1)$ de los C^r difeomorfismos de S^1 que conservan la orientación con $0 \leq r \leq \infty$.

4.1. Suspensiones de grupos de superficie

Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica compacta obtenida como cociente de un grupo de superficie $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ y

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$$

una representación. Esto permite definir una acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times S^1$ dada por:

$$\gamma.(z, \zeta) = (\gamma.z, \rho(\gamma)(\zeta))$$

para cada $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$ y $\zeta \in S^1$. Como ya hemos dicho, puesto que la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ es libre y propiamente discontinua, la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times S^1$ también lo es. Tenemos así una variedad $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$ de dimensión 3 y de clase C^r y una cubierta regular

$$\tilde{q} : \mathbb{H} \times S^1 \longrightarrow M$$

de grupo Γ . La proyección canónica $p_1 : \mathbb{H} \times S^1 \rightarrow \mathbb{H}$ es Γ -equivariante:

$$p_1(\gamma.(z, \zeta)) = \gamma.p_1(z, \zeta), \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

y pasa al cociente en una fibración localmente trivial $\pi : M \rightarrow S$ de fibra S^1 que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times S^1 & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{H} \\ \downarrow \tilde{q} & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{\pi} & S. \end{array} \tag{4.1}$$

Por su parte, la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\mathbb{H} \times \{\zeta\}\}$, que define la proyección canónica $p_2 : \mathbb{H} \times S^1 \rightarrow S^1$, desciende en una foliación \mathcal{F} de codimensión 1 y clase C^r sobre M . Puesto que \mathcal{H} es transversa a la fibración p_1 , la foliación \mathcal{F} es transversa a la fibración π y se dice que $S^1 \rightarrow M \xrightarrow{\pi} S$ es un *fibrado foliado*. Al igual que ocurre en la situación general descrita en la sección 1.2, la hoja $L_\zeta \in \mathcal{F}$ que pasa por un punto ζ de la fibra tipo de π es el cociente de la hoja $\mathbb{H} \times \{y\}$ de \mathcal{H} por la acción y propiamente discontinua del subgrupo $\Gamma_\zeta = \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)(\zeta) = \zeta\}$ de Γ y tenemos el siguiente diagrama de cubiertas:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H} \times \{\zeta\} & \xrightarrow{\tilde{q}|_{\mathbb{H} \times \{\zeta\}}} & L_\zeta = \Gamma_\zeta \backslash (\mathbb{H} \times \{\zeta\}). \\
 \downarrow q & & \uparrow \pi|_{L_\zeta} \\
 S & &
 \end{array} \tag{4.2}$$

similar al diagrama (1.2). Esto justifica que digamos que \mathcal{F} es una *foliación por superficies hiperbólicas* y (M, \mathcal{F}) es un *fibrado foliado por superficies hiperbólicas*, aunque necesitamos aclarar el significado de estos términos.

Observación 4.1. Cuando usamos la notación \mathbb{H} (o la notación \mathbb{D}), estamos considerando el semiplano superior dotado de la métrica de Poincaré

$$g_{\mathbb{H}} = (dx^2 + dy^2)/y^2$$

(o el disco unidad con la métrica conforme

$$g_{\mathbb{D}} = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}).$$

Luego las hojas de la foliación horizontal \mathcal{H} de $\mathbb{H} \times S^1$ están dotadas de la métrica de Poincaré $g_{\mathbb{H}}$, lo que define un tensor métrico $g_{\mathcal{H}}$ sobre el fibrado tangente $T\mathcal{H}$, llamado *métrica riemanniana a lo largo de las hojas de \mathcal{H}* . Como Γ actúa sobre \mathbb{H} por isometrías, la métrica $g_{\mathcal{H}}$ induce una métrica riemanniana $g_{\mathcal{F}}$ a lo largo de las hojas de \mathcal{F} . La restricción a la hoja L_ζ está dotada de la métrica de Riemann de curvatura constante -1 que se obtiene a partir de $g_{\mathbb{H}}$ al cocientar por Γ_ζ .

Para construir una métrica de Riemann sobre M , necesitamos recubrir la variedad por un número finito de abiertos foliados U_α obtenidos como imagen por \tilde{q} de productos locales $P_\alpha \times T_\alpha \subset \mathbb{H} \times S^1$ y fijar una partición de la unidad subordinada φ_α . Si denotamos g_α la métrica de Riemann sobre U_α inducida por la restricción de una métrica producto $g_{\mathbb{H}} \oplus g_{S^1}$ al producto local $P_\alpha \times T_\alpha$, entonces $g = \sum_\alpha \varphi_\alpha g_\alpha$ es una métrica de Riemann sobre M cuya restricción a cada hoja L_ζ coincide con la métrica descrita antes.

La facilidad a la hora de construir métricas riemannianas de curvatura constante -1 a lo largo de las hojas es una de las ventajas de las suspensiones.

La noción de *variedad foliada por superficies hiperbólicas* es más complicada de definir, aunque es posible dar un criterio independiente de la métrica, pero la existencia de métricas de curvatura constante -1 requiere de la extensión del teorema de uniformización de Poincaré en el contexto foliado (probada por A. Verjovsky y A. Candel de modo independiente) que solo proporciona uniformizaciones continuas.

Usando argumentos similares a los empleados en el principio de dualidad, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2. *La foliación \mathcal{F} es minimal (es decir, la hoja L_ζ es densa en M para cada $\zeta \in S^1$) si y solo si la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ es minimal (es decir, la órbita $\rho(\Gamma)\zeta$ es densa en S^1 para cada $\zeta \in S^1$).* \square

Ejemplo 4.3. Sea S la superficie compacta de género 2 con grupo fundamental

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : [\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] \rangle.$$

Consideramos la representación $\rho : \Gamma \rightarrow SO(2)$ definida por

$$\rho(\alpha_1) = R_\theta, \quad \rho(\alpha_2) = \rho(\beta_1) = \rho(\beta_2) = I$$

siendo R_θ una rotación de ángulo irracional $\theta \notin \mathbb{Q}$. La variedad $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times S^1)$ es difeomorfa a $S \times S^1$ ya que la clase de Euler $e(\rho) = 0$ según [25, Theorem 2] y la foliación \mathcal{F} es una foliación minimal ya que la acción inducida por $\rho, \Gamma \curvearrowright S^1$, es minimal. En este caso, para cada $\zeta \in S^1$, la hoja L_ζ es una superficie no compacta de género infinito que se obtiene como cubierta cíclica de S según se muestra en la figura 4.1. De hecho, $\Gamma_\zeta = \langle \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle_N$ y $\Gamma/\Gamma_\zeta = \langle \alpha_1 \rangle$.

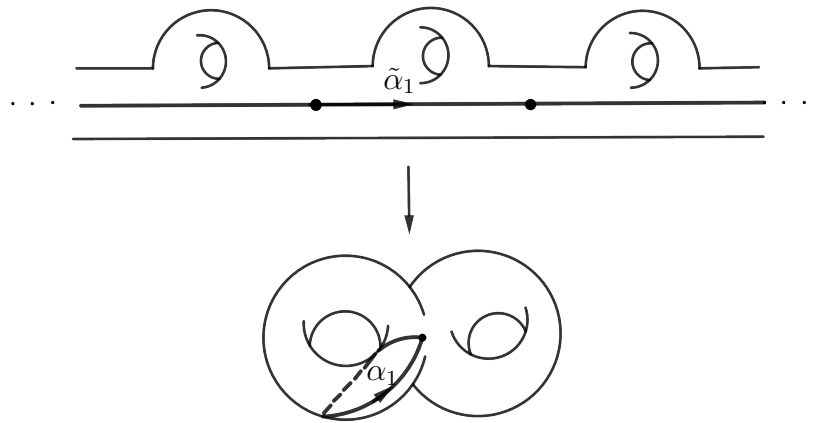


Figura 4.1: Cubierta cíclica de la superficie de género 2

4.2. Fibrado tangente unitario

El fibrado tangente unitario $T^1\mathcal{F}$ es un fibrado foliado definido por la suspensión de la representación

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$$

donde Γ se interpreta como grupo de automorfismos de la cubierta regular $q_* : T^1\mathbb{H} = PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow T^1S$ inducida por $q : \mathbb{H} \curvearrowright S$. En efecto, como hemos visto en la sección 3.2, la acción libre y propiamente discontinua $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ induce una acción libre y propiamente discontinua $\Gamma \curvearrowright T^1\mathbb{H}$. La acción diagonal $\Gamma \curvearrowright T^1\mathbb{H} \times S^1$ (definida por

$$\gamma.(u, \zeta) = (\gamma.u, \rho(\gamma)(\zeta)) = (\gamma(z), \gamma_{*z}(\vec{u}), \rho(\gamma)(\zeta)),$$

para cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$ y $\zeta \in S^1$) sigue siendo libre y propiamente discontinua. En realidad, se trata de la acción inducida sobre el fibrado tangente unitario

$$T^1\mathcal{H} = T^1\mathbb{H} \times S^1 = PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1$$

por la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times S^1$. Luego la variedad cociente

$$\hat{M} = \Gamma \backslash T^1\mathcal{H} = \Gamma \backslash (T^1\mathbb{H} \times S^1) = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)$$

de dimensión 4 y de clase C^r es difeomorfa al fibrado tangente unitario $T^1\mathcal{F}$, ya que la aplicación $\hat{q} = \tilde{q}_* : T^1\mathcal{H} \rightarrow T^1\mathcal{F}$ inducida por la cubierta $\tilde{q} : \mathbb{H} \times S^1 \rightarrow M$ es una C^r submersión sobreyectiva (en realidad, una cubierta diferenciable de clase C^r). El diagrama conmutativo (4.1) induce un nuevo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1 & \xrightarrow{p_1} & PSL(2, \mathbb{R}) \\ \hat{q} \downarrow & & \downarrow q_* \\ \hat{M} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & T^1S \end{array} \quad (4.3)$$

donde las flechas verticales son cubiertas regulares de grupo Γ y las flechas horizontales son fibrationes localmente triviales de fibra S^1 y de clase C^r .

Las hojas de la foliación horizontal $\hat{\mathcal{H}}$ sobre $PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1$ son las órbitas de la acción por la derecha $PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1 \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ dada por $(\gamma, \zeta).g = (\gamma g, \zeta)$ para cada $\gamma \in \Gamma$, $\zeta \in S^1$ y $g \in PSL(2, \mathbb{R})$. Luego define por paso al cociente una foliación $\hat{\mathcal{F}}$ de codimensión 1 y clase C^r sobre $\hat{M} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)$. Al igual que pasaba antes, la hoja \hat{L}_ζ de $\hat{\mathcal{F}}$ que pasa por $\zeta \in S^1$ está definida por:

$$\tilde{L}_\zeta = \Gamma_\zeta \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \{\zeta\}) = \Gamma_\zeta \backslash (T^1\mathbb{H} \times \{\zeta\}) = T^1(\Gamma_\zeta \backslash \mathbb{H}) = T^1L_\zeta$$

donde L_ζ es la hoja de \mathcal{F} que pasa por ζ .

Observación 4.4. Como consecuencia de la proposición 4.2, las tres siguientes propiedades son equivalentes:

- (i) la foliación \mathcal{F} es minimal,
- (ii) la foliación $\hat{\mathcal{F}}$ es minimal,
- (iii) la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ es minimal.

4.3. Flujos geodésico y horocíclico foliados

Definición 4.5. Los subgrupos D , U^+ y U^- de $PSL(2, \mathbb{R})$ actúan por la derecha sobre $T^1\mathcal{H} = PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1$ (de forma natural sobre el primer factor y trivialmente sobre el segundo) y por consiguiente actúan también sobre

$$\hat{M} = T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1).$$

Llamamos

- (1) *flujo geodésico foliado* g_t a la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright D$ dada por:

$$g_t(\Gamma(g, \zeta)) = \left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \zeta \right),$$

- (2) *flujo horocíclico foliado (estable)* h_s^+ a la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U^+$ dada por:

$$h_s^+(\Gamma(g, \zeta)) = \left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right),$$

- (3) *flujo horocíclico foliado (inestable)* h_s^- a la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U^-$ dada por:

$$h_s^-(\Gamma(g, \zeta)) = \left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right).$$

Estos flujos conservan las órbitas de $\hat{\mathcal{F}}$. De hecho, restringidos a las hojas (que recordemos son los fibrados tangentes unitarios a las hojas de \mathcal{F}) son los flujos horocíclicos y geodésico clásicos. Además siguen verificando una propiedad de hiperbolicidad análoga a la formulada en (3.1):

$$g_t \circ h_s^+ = h_{se^{-t}}^+ \circ g_t \quad \text{y} \quad g_t \circ h_s^- = h_{se^t}^- \circ g_t. \quad (4.4)$$

Como en el caso clásico, los flujos geodésico y horocíclico pueden combinarse para definir acciones de los grupos afines B^+ y B^- sobre $\hat{M} = T^1\mathcal{F}$.

El problema que nos planteamos es la extensión del teorema de Hedlund al caso foliado:

Cuestión 4.6. Sea \mathcal{F} la suspensión de una representación de un grupo de superficie Γ en el grupo de difeomorfismos $\text{Difeo}_+^r(F)$. ¿Es minimal el flujo horocíclico h_s^+ ?

Por dualidad, la minimalidad de la acción unipotente

$$\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright U^+$$

es equivalente a la minimalidad de la acción diagonal

$$\Gamma \curvearrowright (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)/U^+ = (PSL(2, \mathbb{R})/U^+) \times S^1 = E \times S^1$$

obtenida a partir de la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ y la representación ρ . El teorema 3.4, que constituye la versión algebraica del teorema clásico de Hedlund, nos garantiza que la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal si y solo si Γ es un grupo de superficie.

Luego, desde una perspectiva algebraica, está claro que una respuesta afirmativa a la cuestión planteada implica necesariamente que la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ debe ser minimal. De hecho, desde una perspectiva geométrica también está claro, ya que la foliación $\hat{\mathcal{F}}$ debe ser minimal si el flujo h_s^+ lo es y la observación 4.4 nos dice que ambas condiciones son equivalentes. Luego necesitamos imponer la siguiente hipótesis si queremos responder afirmativamente a la cuestión:

Hipótesis general 4.7. Las órbitas de la acción sobre S^1 definida por la representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ son densas.

Así pues, desde un punto de vista algebraico, la cuestión 4.6 puede reformularse preguntándose si la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ obtenida a partir de la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ y de una acción minimal $\Gamma \curvearrowright S^1$ sigue siendo minimal.

En realidad, una respuesta afirmativa a la cuestión 4.6 implica una respuesta afirmativa a la siguiente cuestión:

Cuestión 4.8. Sea \mathcal{F} la suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(F)$ que verifique la hipótesis 4.7 y sea

$$\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright B^+$$

la acción afín obtenida combinando el flujo geodésico g_t y el flujo horocíclico h_s^+ . ¿Es minimal esta acción?

Como antes, la minimalidad de la acción afín

$$\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1) \curvearrowright B^+$$

es equivalente a la minimalidad de la acción diagonal

$$\Gamma \curvearrowright (PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1)/B^+ = (PSL(2, \mathbb{R})/B^+) \times S^1 = \partial\mathbb{H} \times S^1$$

obtenida a partir de la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ y la representación ρ . Como consecuencia del teorema 2.28, sabemos que la primera acción es minimal y la cuestión que nos planteamos es similar a la anterior, aunque más simple.

4.4. Representaciones no inyectivas

Como hemos indicado en la introducción, al restringirnos a las suspensiones, podremos dar demostraciones elementales del teorema de Hedlund foliado en ciertos casos. El primero de estos casos corresponde las representaciones no inyectivas $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$. El demostración del siguiente resultado puede interpretarse como una demostración elemental de [2, Theorem 1] ya que en ese caso el núcleo de la representación está contenido en el grupo fundamental de cualquier hoja L_ζ .

Teorema 4.9 (Teorema de Hedlund foliado). *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ de un grupo de superficie Γ con $0 \leq r \leq \infty$. Supongamos que la foliación \mathcal{F} es minimal y el núcleo $N = \text{Ker } \rho$ no trivial. Entonces el flujo horocíclico h_s^+ sobre el tangente unitario $\hat{M} = T^1\mathcal{F}$ es minimal.*

Demostración. Por dualidad, nos basta demostrar que la acción $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ es minimal. Como Γ es un grupo de superficie, entonces $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$ por el teorema 2.28. Si el núcleo $N = \text{Ker } \rho \triangleleft \Gamma$ es no trivial, entonces $L(N) = L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$ por el teorema 2.26. Luego N es también no elemental y por consiguiente existe $v \in E$ tal que $\overline{N.v} = E$ según la proposición 2.30 (cuya prueba sigue siendo válida cuando se sustituye Γ por N).

Ahora procedemos en tres etapas:

(1) Para cada $\zeta \in S^1$, tenemos que $E \times \{\zeta\} \subset \overline{\Gamma(v, \zeta)}$. En efecto, como $E = \overline{N.v}$, para cada $w \in E$, existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de N tal que $\{\gamma_n.v\} \rightarrow w$. Entonces la sucesión de puntos

$$\gamma_n.(v, \zeta) = (\gamma_n.v, \rho(\gamma_n)(\zeta)) = (\gamma_n.v, \zeta) \in \Gamma(v, \zeta)$$

converge a (w, ζ) y por consiguiente $(w, \zeta) \in \overline{\Gamma(v, \zeta)}$, lo que prueba la afirmación (1).

(2) Para cada $\zeta \in S^1$, la Γ -órbita de (v, ζ) es densa, es decir, $\overline{\Gamma(v, \zeta)} = E \times S^1$. En efecto, consideremos un punto arbitraio $(v', \zeta') \in E \times S^1$. Puesto que $\Gamma \curvearrowright S^1$ es minimal, hay una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\rho(\gamma_n)(\zeta)\} \rightarrow \zeta'$. Por otra parte, por la propiedad (1), los puntos

$$(\gamma_n^{-1}.v', \zeta) \in E \times \{\zeta\} \subset \overline{\Gamma(v, \zeta)}$$

Puesto que $\overline{\Gamma(v, \zeta)}$ es Γ -invariante, tenemos una sucesión de puntos

$$\gamma_n.(\gamma_n^{-1}.v', \zeta) = (v', \rho(\gamma_n)(\zeta))$$

pertenecientes a $\overline{\Gamma(v, \zeta)}$ que converge al punto (v', ζ') . Luego $(v', \zeta') \in \overline{\Gamma(v, \zeta)}$, con lo que queda probada la afirmación (2).

(3) Por último, para cada $(v', \zeta') \in E \times S^1$, tenemos que $\overline{\Gamma(v', \zeta')} = E \times S^1$. Por el teorema 3.4, la acción $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal y por tanto existe una sucesión $\{\gamma'_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\gamma'_n.v'\} \rightarrow v$. Por compacidad de S^1 , extrayendo una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que la sucesión $\{\rho(\gamma'_n)(\zeta')\}$ converge a un punto $\zeta \in S^1$. En tal caso, la sucesión de puntos

$$\gamma_n.(v', \zeta') = (\gamma'_n.v', \rho(\gamma'_n)(\zeta')) \in \Gamma(v', \zeta')$$

converge al punto (v, ζ) y por consiguiente $(v, \zeta) \in \overline{\Gamma(v', \zeta')}$. Como consecuencia de la propiedad (2), deducimos que:

$$E \times S^1 = \overline{\Gamma(v, \zeta)} \subset \overline{\Gamma(v', \zeta')}$$

y por tanto $E \times S^1 = \overline{\Gamma(v', \zeta')}$.

Luego hemos probado que la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times S^1$ es minimal. \square

Corolario 4.10. *En las condiciones del teorema 4.9, la acción $\hat{M} = T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$ es minimal.* \square

Observación 4.11. El teorema anterior sigue siendo válido cuando sustituimos S^1 por una variedad compacta F ya que lo único que hemos utilizado es la compacidad de S^1 . De modo explícito, F es una variedad compacta arbitraria y $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(F)$ es una representación que tiene núcleo no trivial, entonces la minimalidad de la suspensión \mathcal{F} garantiza la minimalidad del flujo horocíclico foliado h_s^+ sobre $T^1\mathcal{F}$.

4.5. Representaciones inyectivas

En el caso de las representaciones inyectivas $\rho : \Gamma = \pi_1(S) \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ es necesario aplicar un resultado S. Matsumoto [20, Theorem 1.3] que permite demostrar la minimalidad del flujo horocíclico foliado h_s^+ siempre que la acción afín $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$ sea minimal. Veremos la demostración de este resultado en nuestro contexto en la sección 4.8, pero ahora nos interesa demostrar de modo elemental que hay suspensiones que satisfacen la minimalidad de la acción afín, pero no satisfacen ninguna de las condiciones conocidas que la implican, formuladas en [1], [2], [17], [19] y [20]. Para ello empezaremos por describir dos ejemplos de este tipo:

Ejemplo 4.12. Sea Γ un grupo de superficie y $\rho_0 : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la inclusión natural. La 3-variedad foliada $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H})$ está dotada de una foliación minimal definida por suspensión, que se dice *transversalmente homográfica* ya que Γ actúa sobre $\partial\mathbb{H}$ por homografías. La proposición 2.23 garantiza que las hojas de \mathcal{F} son planos o cilindros hiperbólicos ya que los grupos Γ_ζ son triviales o cíclicos. Sin embargo, la acción afín

$$\hat{M} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}) \curvearrowright B^+$$

no es minimal, ya que la acción dual

$$\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/B^+ \times \partial\mathbb{H} = \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$$

no lo es. En efecto, la diagonal Δ es un subconjunto cerrado Γ -invariante no trivial de $\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$. Por dualidad, el conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{ \Gamma \left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \frac{a}{c} \right) / \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

es un cerrado B^+ -invariante no trivial de \hat{M} . De hecho, según se demuestra en [1, Proposition 4.2], el conjunto \mathcal{M} es el único conjunto minimal del flujo horocíclico h_s^+ sobre \hat{M} .

Ejemplo 4.13. Sea S la superficie compacta de género 2 con grupo fundamental

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : [\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] \rangle.$$

Puesto que $PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo perfecto (es decir, coincide con su grupo de conmutadores), la rotación irracional R_θ es un conmutador, es decir, existen elementos $g_1, h_1 \in PSL(2, \mathbb{R})$ tales que

$$R_\theta = [g_1, h_1].$$

Según se demuestra en [5, Section 7.39], ambos elementos g_1 y h_1 son hiperbólicos. En realidad, considerando cualquier cubierta finita de $PSL(2, \mathbb{R})$ no trivial, obtenemos otra representación de R_θ como conmutador de dos elementos hiperbólicos g_2 y h_2 :

$$R_\theta = [g_2, h_2].$$

Sea $\rho : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la representación definida por

$$\rho(\alpha_1) = g_1, \rho(\beta_1) = h_1, \rho(\alpha_2) = g_2, \rho(\beta_2) = h_2,$$

que envía el conmutador $\gamma = [\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2]$ de Γ en la rotación irracional R_θ . La suspensión \mathcal{F} de ρ es una foliación minimal de una 3-variedad compacta M ya que la acción del subgrupo generado por γ es minimal.

En este ejemplo, ninguno de los resultados conocidos hasta ahora permite afirmar que el flujo horocíclico

$$\hat{M} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}) \curvearrowright U^+$$

o la acción afín

$$\hat{M} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}) \curvearrowright B^+$$

sean minimales

Ambos ejemplos comparten una característica, que están definidos por representaciones fieles de grupos de superficie en $PSL(2, \mathbb{R})$, y sugieren que hay una dicotomía según que la representación sea discreta o no.

4.6. Representaciones fieles de $PSL(2, \mathbb{R})$

Sea Γ_g el grupo de superficies correspondiente a la superficie compacta S_g de género g , es decir, isomorfo al grupo fundamental de S_g dotado de la presentación

$$\Gamma_g = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] = 1 \rangle.$$

Sea $\rho : \Gamma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación fiel de Γ_g en $PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces distinguimos dos casos:

(i) Si la representación ρ es discreta, entonces es conjugada por un homeomorfismo (que no conserva necesariamente la orientación) a la representación fiel descrita en el ejemplo 4.12, es decir, definida por la inclusión natural ρ_0 de Γ_g en $PLS(2, \mathbb{R})$.

En efecto, usando el modelo del semiplano de Poincaré \mathbb{H} o el modelo del disco de Poincaré, los grupos fuchsianos determinados por una u otra representación poseen dominios fundamentales homeomorfos que definen sendos mosaicos de \mathbb{H} o \mathbb{D} . El homeomorfismo entre los dominios fundamentales se extiende de modo equivariante en un homeomorfismo φ de $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ ó $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. La restricción de φ a $\partial\mathbb{H}$ ó $\partial\mathbb{D}$ define la conjugación entre las dos representaciones ρ y ρ_0 .

Luego las suspensiones \mathcal{F} y \mathcal{F}_0 son conjugadas por el homomorfismo entre M y M_0 inducido por el homeomorfismo $\varphi \times \varphi : \mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$. En particular, ambas foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}_0 son simultáneamente minimales. Como consecuencia del ejemplo 4.12, la acción por la derecha de B^+ sobre el fibrado tangente unitario $\hat{M} = T^1\mathcal{F}$ no es minimal, sino que admite un único conjunto minimal $\mathcal{M} \neq \hat{M}$, que es también el único conjunto minimal del fljo horocíclico h_s^+ .

(ii) Si la representación ρ no es discreta, su imagen $\rho(\Gamma_g)$ es un subgrupo no elemental y no discreto. Luego contiene un elemento elíptico de orden infinito (como consecuencia de [15, Theorem 2.4.5]), es decir, existe $\gamma \in \Gamma_g$ tal que

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\operatorname{sen} 2\pi\theta \\ \operatorname{sen} 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} = R_\theta \quad , \quad \theta \notin \mathbb{Q}.$$

Esto implica que la acción $\Gamma \curvearrowright S^1$ es minimal y por consiguiente la suspensión \mathcal{F} sobre $M = \Gamma_g \backslash (\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H})$ también es minimal. En el ejemplo 4.13, γ es precisamente el generador del subgrupo conmutador de Γ_g . La propiedad que acabamos de describir es el punto esencial de la prueba del siguiente teorema:

Teorema 4.14. *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación fiel $\rho : \Gamma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ de un grupo de superficie Γ_g .*

(i) *Si ρ es discreta, entonces la acción afín $\hat{M} = T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$ posee un único conjunto minimal $\mathcal{M} \neq \hat{M}$.*

(ii) *Si ρ no es discreta, entonces la acción afín $\hat{M} = T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$ es minimal.*

Demostración. Las observaciones previas reducen la demostración del teorema al caso (2). Por dualidad, nos basta demostrar que la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times S^1$ es minimal. Al igual que en la demostración del teorema 4.9, procederemos en tres etapas:

(1) Para cada $\zeta \in S^1$, tenemos que $\{\xi\} \times S^1 \subset \overline{\Gamma(\xi, \zeta)}$, donde $\xi \in \partial\mathbb{H}$ es uno de los puntos fijos γ^- ó γ^+ de la transformación hiperbólica $\gamma \in \Gamma_g$ tal que $\rho(\gamma)$ es un elemento elíptico de orden infinito. En efecto, por hipótesis, para cada $\zeta' \in S^1$, existe una sucesión de enteros n_k tal que $\{\rho(\gamma^{n_k})(\zeta)\} \rightarrow \zeta'$. Entonces la sucesión de puntos

$$\gamma^{n_k} \cdot (\xi, \zeta) = (\gamma^{n_k} \cdot \xi, \rho(\gamma^{n_k})(\zeta)) = (\xi, \rho(\gamma^{n_k})(\zeta)) \in \Gamma(\xi, \zeta)$$

converge a (ξ, ζ') y por consiguiente $(\xi, \zeta') \in \overline{\Gamma(\xi, \zeta)}$, con lo que queda probada la afirmación (1).

(2) Para cada $\zeta \in S^1$, la Γ -órbita de (ξ, ζ) es densa, es decir, $\overline{\Gamma(\xi, \zeta)} = \partial\mathbb{H} \times S^1$. En efecto, consideremos un punto arbitrario $(\xi', \zeta') \in \partial\mathbb{H} \times S^1$. Puesto que $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es minimal, hay una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\gamma_n \cdot \xi\} \rightarrow \xi'$. Por otra parte, por la propiedad (1), los puntos

$$(\xi, \rho(\gamma_n^{-1})(\zeta')) \in \{\xi\} \times S^1 \subset \overline{\Gamma(\xi, \zeta)}.$$

Puesto que $\overline{\Gamma(\xi, \zeta)}$ es Γ -invariante, tenemos una sucesión de puntos

$$\gamma_n \cdot (\xi, \rho(\gamma_n^{-1})(\zeta')) = (\gamma_n \cdot \xi, \zeta')$$

pertenecientes a $\overline{\Gamma(\xi, \zeta)}$ que converge al punto (ξ', ζ') . Luego $(\xi', \zeta') \in \overline{\Gamma(\xi, \zeta)}$, lo que prueba la afirmación (2).

(3) Por último, para cada $(\xi', \zeta') \in \partial\mathbb{H} \times S^1$, tenemos que $\overline{\Gamma(\xi', \zeta')} = \partial\mathbb{H} \times S^1$. En efecto, como la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es minimal, existe una sucesión $\{\gamma'_n\}$ de elementos de Γ tal que $\{\gamma'_n \cdot \xi'\} \rightarrow \xi$. Por compacidad de S^1 , extrayendo una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que la sucesión $\{\rho(\gamma'_n)(\zeta')\}$ converge a un punto $\zeta \in S^1$. En tal caso, la sucesión de puntos

$$\gamma'_n \cdot (\xi', \zeta') = (\gamma'_n \cdot \xi', \rho(\gamma'_n)(\zeta')) \in \Gamma(\xi', \zeta')$$

converge al punto (ξ, ζ) y por consiguiente $(\xi, \zeta) \in \overline{\Gamma(\xi', \zeta')}$. Como consecuencia de la propiedad (2), deducimos que:

$$\partial\mathbb{H} \times S^1 = \overline{\Gamma(\xi, \zeta)} \subset \overline{\Gamma(\xi', \zeta')}$$

y por tanto $\partial\mathbb{H} \times S^1 = \overline{\Gamma(\xi', \zeta')}$.

Luego hemos probado que la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times S^1$ es minimal. \square

4.7. Componentes conexas del espacio de representaciones

En [11], W. M. Goldman ha demostrado que las componentes conexas del espacio de las representaciones no elementales $\mathcal{R}_g = \text{Hom}(\Gamma_g, PSL(2, \mathbb{R}))$, dotado de una estructura de variedad adecuada, son clasificadas por la aplicación

$$e : \text{Hom}(\Gamma_g, PSL(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{Z}$$

que asocia a cada representación $\rho : \Gamma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ su *clase de Euler* $e(\rho)$. Como se ha recordado en la sección 1.4, se trata de un número entero que toma valores entre $\chi(S_g) = 2 - 2g$ y $-\chi(S_g) = 2g - g$ de acuerdo con la desigualdad de Milnor-Wood (demostrada por J. Milnor en el caso de las representaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ y por J. W. Wood en el caso de las representaciones en $\text{Homeo}_+(S^1)$).

En particular, según [11, Corollary C], las representaciones fieles y discretas de Γ_g en $PSL(2, \mathbb{R})$ se corresponden con la clase Euler máxima:

$$|e(\rho)| = |\chi(S_g)|.$$

Un importante resultado de S. Matsumoto [18] demuestra que todas las representaciones de Γ_g en $PSL(2, \mathbb{R})$ (en realidad, todas las representaciones de Γ_g en $\text{Homeo}_+(S^1)$ que definen acciones minimales) que verifican la condición

$$|e(\rho)| = |\chi(S_g)|$$

son topológicamente conjugadas. Combinando ambos resultados, recuperamos la observación que todas las representaciones fieles y discretas de Γ_g en $PSL(2, \mathbb{R})$ son topológicamente conjugadas a la representación canónica usada en el ejemplo 4.12. Ahora el teorema de Matsumoto permite extender la primera parte del teorema 4.14.

Teorema 4.15. *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación fiel $\rho : \Gamma_g \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ de un grupo de superficie Γ_g en el grupo $\text{Homeo}_+(S^1)$ de los homeomorfismos de S^1 que conservan la orientación. Supongamos que la acción sobre S^1 definida por ρ es minimal y la clase de Euler*

$$|e(\rho)| = |\chi(S_g)|.$$

Entonces el flujo horocíclico h_s^+ sobre el fibrado tangente unitario $\hat{M} = T^1\mathcal{F}$ posee un único conjunto minimal $\mathcal{M} \neq \hat{M}$, que coincide con el único conjunto minimal de la acción afín $\hat{M} = T^1\mathcal{F} \curvearrowright B^+$. \square

4.8. Condición de Matsumoto

La demostración del teorema de Hedlund para la suspensión de una representación inyectiva $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ de un grupo de superficie Γ requiere aplicar un resultado de S. Matsumoto [20, Theorem 1.3] válido para una foliación minimal \mathcal{F} por superficies hiperbólicas de cualquier codimensión sobre una variedad compacta M si cumple una cierta condición (que extiende la condición de [2]). En nuestro contexto, si (M, \mathcal{F}) es la suspensión de la representación ρ , la condición requerida se formula del siguiente modo:

Condición de Matsumoto 4.16. Existe un punto $\zeta_0 \in S^1$, un elemento no trivial $\gamma \in \Gamma_{\zeta_0}$ y un abierto $U \subset S^1$ tales que $\zeta_0 \in \bar{U}$, $U \subset \gamma(U)$ y

$$d(\gamma(\zeta), \gamma(\zeta_0)) \geq d(\zeta, \zeta_0)$$

para cada $\zeta \in \bar{U}$.

Observemos en primer lugar que estamos pensando en un arco de S^1 como un arco transversal a la foliación \mathcal{F} y cuando escribimos $\zeta_0 \in S^1$ estamos fijando un punto $\zeta_0 \in M$. Además estamos identificando γ con el difeomorfismo de holonomía $\rho(\gamma)$, por lo que seguiremos denotándolo por γ . En particular $\gamma(\zeta_0) = \zeta_0$. La condición de que exista un elemento no trivial $\gamma \in \Gamma_{\zeta_0}$ significa que el grupo fundamental de la hoja L_{ζ_0} contiene un elemento no trivial representado por una geodésica cerrada simple. Llamaremos $c : \mathbb{R} \rightarrow L_{\zeta_0}$ a esta geodésica y $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow T^1 L_{\zeta_0} \subset T^1 \mathcal{F}$ a su levantamiento definido por $\hat{c}(t) = (c(t), \dot{c}(t))$.

Teorema 4.17 ([20]). *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}_+^r(S^1)$ de un grupo de superficie Γ con $0 \leq r \leq \infty$. Supongamos que \mathcal{F} es minimal y satisface la condición 4.16. Entonces si la acción afín $\hat{M} = T^1 \mathcal{F} \curvearrowright B^+$ es minimal, el flujo horocíclico h_s^+ es minimal.*

Observación 4.18. De hecho, en las condiciones del teorema 4.17 (y de modo general si \mathcal{F} es una foliación de codimensión 1), la condición 4.16 se verifica siempre. En efecto, veamos primero que siempre existe una hoja no plana, es decir, con una geodésica cerrada simple. Supongamos que todas las hojas son planas, en tal caso, los grupos fundamentales de todas las hojas son triviales, es decir, $\Gamma_\zeta = \{1\}$ para cada $\zeta \in S^1$. Luego el grupo Γ actúa sobre S^1 sin puntos fijos. Por [16, Theorem 2.3.32], Γ es un subgrupo de $SO(2, \mathbb{R})$ y en particular es abeliano. Pero esto no puede ocurrir porque las únicas superficies orientables con grupo fundamental abeliano son la esfera y el toro y estamos suponiendo que nuestra superficie $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie hiperbólica.

Entonces sea c una geodésica cerrada simple de una de las hojas de la foliación \mathcal{F} y consideremos $h : I \rightarrow I$ una aplicación de holonomía asociada. Recordemos que I es un arco de circunferencia transversal a la hoja considerada. Si $\text{Int}(\text{Fix}(h)) \neq \emptyset$, entonces el abierto $U = \text{Int}(\text{Fix}(h))$ y cualquier punto ζ_0 de U verifican la condición requerida.

Supongamos que $\text{Int}(\text{Fix}(h)) = \emptyset$ y tomemos $U = (\zeta_0, \zeta_1)$ una componente conexa de $I \setminus \text{Int}(\text{Fix}(h))$ y ζ_0 el extremo inferior de este arco de circunferencia. Se tiene que $U = h(U)$. Si pensamos el arco U como un intervalo isométrico de la recta real, salvo los extremos, el grafo de la aplicación h restringida a U queda por encima o por debajo de la diagonal. Si estamos en el primer caso, se verifica la condición requerida en el otro caso, basta cambiar la aplicación h por la aplicación h^{-1} para garantizarlo.

Como consecuencia de la observación, combinando los teoremas 4.14 y 4.17, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.19 (Teorema de Hedlund para las representaciones fieles y no discretas). *Sea (M, \mathcal{F}) una 3-variedad foliada obtenida como suspensión de una representación fiel y no discreta $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de un grupo de superficie Γ . Entonces el flujo horocíclico foliado h_s^+ es minimal. \square*

En particular, el flujo horocíclico h_s^+ sobre el tangente unitario del ejemplo 4.13 es minimal.

4.9. Demostración del teorema 4.17

El propósito de la sección es demostrar el teorema 4.17 y para ello será cómodo denotar por \mathcal{B}^+ y \mathcal{B}^- las subfoliaciones de la foliación $\hat{\mathcal{F}}$ sobre $\hat{M} = T^1\mathcal{F}$ definidas por las acciones $T^1\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{B}^+$ y $T^1\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{B}^-$. Recordemos que $\hat{\mathcal{F}}$ está definida por la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ que extiende ambas acciones.

Lema 4.20. *Supongamos que la foliación \mathcal{B}^+ es minimal y sea $\mathcal{M} \subset T^1\mathcal{F}$ un minimal para el flujo horocíclico $h_s^+ : T^1\mathcal{F} \rightarrow T^1\mathcal{F}$. Entonces*

$$T^1\mathcal{F} = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M})}.$$

Demostración. Como el conjunto de la derecha es un cerrado no vacío y \mathcal{B}^+ es minimal, basta probar que esel conjunto es g_t - invariante y h_s^+ - invariante. Para el flujo geodésico, tenemos:

$$\begin{aligned} g_s(\bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M})}) &= \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} g_s(\overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M})}) = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{g_s(\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M}))} = \\ &= \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_{s+t}(\mathcal{M})} = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0+s} g_t(\mathcal{M})} = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M})}. \end{aligned}$$

Y para el horocíclico, tenemos:

$$h_s^+(\bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M})}) = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} h_s^+ g_t(\mathcal{M})} = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t h_{se^t}(\mathcal{M})} = \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq t_0} g_t(\mathcal{M})}$$

como consecuencia dela condición de hiperbolicidad (4.4) y de la invariancia de \mathcal{M} por el flujo horocíclico. \square

Observación 4.21. En las condiciones anteriores, en particular tenemos que

$$T^1\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{t \geq 0} g_t(\mathcal{M})}.$$

Lema 4.22. *Supongamos que la foliación \mathcal{B}^+ es minimal y sea $\mathcal{M} \subset T^1\mathcal{F}$ un minimal para el flujo h_s^+ . Sea $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow T^1\mathcal{F}$ el levantamiento de la geodésica cerrada que nos proporciona la condición 4.16. Entonces si $\mathcal{M} \cap \hat{c} \neq \emptyset$, el flujo horocíclico h_s^+ es minimal.*

Demostración. Como \mathcal{M} es un conjunto minimal de h_s^+ , la hiperbolicidad (4.4) garantiza que $g_t(\mathcal{M})$ también es un conjunto minimal de h_s^+ . Por tanto, si $\mathcal{M} \cap g_t(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{M} = g_t(\mathcal{M})$. Luego

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid g_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\}$$

es un subgrupo de \mathbb{R} y la condición $\mathcal{M} \cap \hat{c} \neq \emptyset$ implica que T es no trivial. Además, como T es un subgrupo cerrado, entonces $T = \mathbb{R}$ ó T es cíclico.

Si $T = \mathbb{R}$, el conjunto \mathcal{M} es B^+ -invariante y entonces $\mathcal{M} = T^1\mathcal{F}$ ya que la foliación \mathcal{B}^+ es minimal.

Supongamos que T es un subgrupo cíclico de \mathbb{R} generado por un entero positivo $t_0 > 0$. Según la observación anterior, tenemos que:

$$T^1\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} g_t(\mathcal{M})}.$$

Pero como $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} g_t(\mathcal{M})$ es un cerrado, entonces

$$T^1\mathcal{F} = \bigcup_{0 \leq t \leq t_0} g_t(\mathcal{M})$$

homeomorfo al cociente

$$\mathcal{M} \times [0, 1] / (x, 0) \sim (g_{t_0}(x), 1).$$

Luego $T^1\mathcal{F}$ es el espacio total de un fibrado sobre S^1 y la fibración proyecta difeomórficamente la geodésica \hat{c} sobre la base S^1 del fibrado. Entonces existe una 1-forma cerrada $\omega \in \Omega^1(T^1\mathcal{F})$ (levantada de la 1-forma $d\zeta$ sobre S^1) que es positiva sobre el campo de vectores

$$X = \frac{dg_t}{dt} : T^1\mathcal{F} \rightarrow T(T^1\mathcal{F})$$

restringido a la curva \hat{c} . Es decir, $\omega(X(u)) > 0$ para cada $u = \hat{c}(t)$. Como la curva $\hat{c}(t) = (c(t), \dot{c}(t))$ es una curva integral de $X \in \mathfrak{X}(T^1\mathcal{F})$, deducimos que

$$\int_{\hat{c}} \omega > 0.$$

Ahora bien, si invertimos la orientación de c , la curva correspondiente $\hat{c}'(t) = (c(-t), -\dot{c}(-t))$ sigue siendo una curva integral del campo X que verifica

$$\int_{\hat{c}'} \omega > 0,$$

pero esta curva es homótopa a la curva $-\hat{c}(t) = (c(t), -\dot{c}(t))$ de modo que

$$\int_{\hat{c}'} \omega < 0.$$

Llegamos a una contradicción y por consiguiente T tampoco puede ser cíclico. \square

Demostración del teorema 4.17. Sea \mathcal{M} un conjunto minimal del flujo horocíclico h_s^+ . Como consecuencia del lema 4.22, para demostrar que $\mathcal{M} = T^1\mathcal{F}$ y el flujo horocíclico h_s^+ es minimal, nos basta ver que $\mathcal{M} \cap \hat{c} \neq \emptyset$. Lo haremos en varias etapas:

(1) En la primera etapa construimos una transversal a la órbita cerrada \hat{c} del flujo geodésico g_t e identificamos la aplicación de primer retorno de g_t . En efecto, sean $\zeta_0 \in S^1$ y $U =$

$[\zeta_0, \zeta_0 + \epsilon) \subset I = [\zeta_0 - \epsilon, \zeta_0 + \epsilon]$ el punto y el entorno que nos proporciona la condición 4.16 y sea $v_0 \in T^1\mathcal{F}$ el vector tangente a la geodésica c en el punto ζ_0 . Así v_0 pertenece a la imagen de \hat{c} y $\pi(v_0) = \zeta_0$ siendo $\pi : T^1\mathcal{F} \rightarrow M$ la proyección canónica. Sea \hat{E} un 3-disco cerrado de $T^1\mathcal{F}$ transverso al flujo geodésico g_t . Teniendo en cuenta el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1 & \xrightarrow{\pi_0 \times id} & \mathbb{H} \times S^1 \\
 \hat{q} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\
 T^1\mathcal{F} & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array} \tag{4.5}$$

tomamos $\hat{U} = \hat{q}(\{u_0\} \times U) \subset \hat{I} = \hat{q}(\{u_0\} \times I)$. Restringiéndonos a un abierto de trivialidad \hat{I} , tomando ϵ suficientemente pequeño, podemos suponer que $\hat{U} \cong \{u_0\} \times U$ y $\hat{I} \cong \{u_0\} \times I$. Además, así construido, el intervalo \hat{I} es transverso a la foliación por superficies $\hat{\mathcal{F}}|_{\hat{E}}$ inducida por $\hat{\mathcal{F}}$ sobre \hat{E} . En otros términos, estamos suponiendo que \hat{E} es homeomorfo al producto $P \times \hat{I}$ y trivializa la cubierta $\hat{q} : PSL(2, \mathbb{R}) \times S^1 \rightarrow T^1\mathcal{F}$. Las subfoliaciones \mathcal{B}^+ y \mathcal{B}^- de $\hat{\mathcal{F}}$ inducen dos foliaciones transversas de dimensión 1 en cada placa $P \times \{\zeta\}$ de \hat{E} . Llamemos a tales foliaciones β^+ y β^- respectivamente y definamos una parametrización

$$(\xi, \eta, \zeta) \in [-r, r] \times [-r, r] \times \hat{I} \mapsto [\xi, \eta, \zeta] \in \hat{E}$$

de la siguiente manera: en restricción a cada placa $P \times \{\zeta\}$, usamos parametrizaciones isométricas de las hojas de β^+ y β^- por $[-r, r]$ y definimos $[\xi, \eta, \zeta] \in \hat{E}$ como el punto de intersección en la placa $P \times \{\zeta\}$ de la hoja β_+ que pasa por ξ y de la hoja de β_- que pasa por η según se muestra en la figura 4.2.

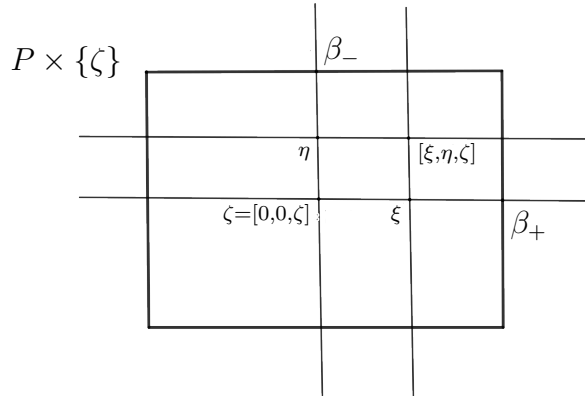


Figura 4.2

Para cada $r > 0$, sea

$$U_r = \{ \zeta \in U \mid d(\zeta, \zeta_0) < r \}$$

tal que $U_r \subset \gamma(U_r)$ y sea

$$\hat{U}_r = \pi^{-1}(U_r) \subset \hat{U}.$$

Para $0 < r' < r$, definimos

$$\hat{V}_{r,r'} = \{ [\xi, \eta, \zeta] \mid |\xi| < r, |\eta| < r, \zeta \in Cl(\hat{U}_{r'}) \},$$

donde $Cl(\hat{U}_{r'})$ denota la clausura de $\hat{U}_{r'}$.

La aplicación de primer retorno $H : \hat{V}_{r,r'} \rightarrow \hat{E}$ asociada al flujo geodésico g_t conserva tanto las placas $P \times \{\zeta\}$ como las foliaciones β_+ y β_- y se escribe como:

$$H[\xi, \eta, \zeta] = [\psi_\zeta(\xi), \phi_\zeta(\eta), h(\zeta)],$$

donde $h : \hat{U}_{r'} \rightarrow \hat{U}$ es la conjugación de la aplicación de holonomía $\gamma : U_{r'} \rightarrow U$ por el difeomorfismo $\pi|_{\hat{U}}$. Esta aplicación h verifica que $h(\zeta_0) = \zeta_0$, $\hat{U}_{r'} \subset h(\hat{U}_{r'})$ y además

$$d(h(\zeta), \zeta_0) \geq d(\zeta, \zeta_0), \quad \forall \zeta \in Cl(\hat{U}_{r'})$$

para la métrica inducida por el difeomorfismo $\pi|_{\hat{U}}$.

(2) En la segunda etapa describimos la acción de H sobre $\hat{V}_{r,r'}$. En primer lugar, por la hiperbolicidad (4.4) del flujo geodésico foliado g_t , existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(\psi_\zeta(\xi), \psi_\zeta(\xi')) \leq \lambda d(\xi, \xi'), \quad \forall \xi, \xi' \in [-r, r], \forall \zeta \in Cl(\hat{U}_{r'}) \quad (4.6)$$

y

$$d(\phi_\zeta(\eta), \phi_\zeta(\eta')) \geq \lambda^{-1} d(\eta, \eta'), \quad \forall \eta, \eta' \in [-r, r], \forall \zeta \in Cl(\hat{U}_{r'}).$$

En efecto, como la geodésica que estamos considerando es cerrada, hay un tiempo $T > 0$ tal que $g_T(\zeta_0) = \zeta_0$. Sea $h_s^+(-\epsilon, \epsilon)$ un arco de horociclo. Al considerar la aplicación de primer retorno a lo largo de la geodésica cerrada, la condición (4.4) nos dice que el arco resultante $g_T(h_s^+(-\epsilon, \epsilon)) = h_{se^{-T}}^+(g_T(-\epsilon, \epsilon))$ se contrae y obtenemos la primera de las desigualdades. La segunda se obtiene de forma análoga considerando un arco de horociclo inestable. Luego, teniendo en cuenta que $H(\zeta_0) = \zeta_0$, podemos tomar $r > 0$ suficientemente pequeño y $0 < r' = r'(r) < r$ tales que si $\zeta \in Cl(\hat{U}_{r'})$, entonces

$$\phi_\zeta(-r) < -r < r < \phi_\zeta(r) \quad \text{y} \quad -r < \psi_\zeta(-r) < \psi_\zeta(r) < r.$$

Aplicando estas desigualdades a $h^{-1}(\zeta) \in Cl(\hat{U}_{r'})$ y teniendo en cuenta que $\hat{U}_{r'} \subset h(\hat{U}_{r'})$, deducimos que:

$$\phi_{h^{-1}(\zeta)}(-r) < -r < r < \phi_{h^{-1}(\zeta)}(r)$$

y

$$-r < \psi_{h^{-1}(\zeta)}(-r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}(r) < r. \quad (4.7)$$

Por consiguiente,

$$H(\hat{V}_{r,r'}) \cap \hat{V}_{r,r'} = \{ [\xi, \eta, \zeta] \mid |\xi| < r, \psi_{h^{-1}(\zeta)}(-r) \leq \eta \leq \psi_{h^{-1}(\zeta)}(r), \zeta \in Cl(\hat{U}_{r'}) \}.$$

Sustituyendo $\zeta \in Cl(\hat{U}_{r'})$ por $h^{-1}(\zeta) \in Cl(\hat{U}_{r'})$ en (4.7), obtenemos que:

$$-r < \psi_{h^{-2}(\zeta)}(-r) < \psi_{h^{-2}(\zeta)}(r) < r.$$

Luego aplicando $\psi_{h^{-1}(\zeta)}$ deducimos que:

$$-r < \psi_{h^{-1}(\zeta)}(-r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}\psi_{h^{-2}(\zeta)}(-r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}\psi_{h^{-2}(\zeta)}(r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}(r) < r.$$

Repitiendo este procedimiento de forma inductiva, obtenemos que:

$$\begin{aligned} -r < \psi_{h^{-1}(\zeta)}(-r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}\psi_{h^{-2}(\zeta)}(-r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}\psi_{h^{-2}(\zeta)}\psi_{h^{-3}(\zeta)}(-r) < \dots \\ \dots < \psi_{h^{-1}(\zeta)}\psi_{h^{-2}(\zeta)}\psi_{h^{-3}(\zeta)}(r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}\psi_{h^{-2}(\zeta)}(r) < \psi_{h^{-1}(\zeta)}(r) < r. \end{aligned}$$

Ambas sucesiones $\psi_{h^{-1}(\zeta)} \dots \psi_{h^{-n}(\zeta)}(-r)$ y $\psi_{h^{-1}(\zeta)} \dots \psi_{h^{-n}(\zeta)}(r)$ tienen límite ya que son sucesiones crecientes contenidas en un intervalo compacto. Además, teniendo en cuenta la desigualdad (4.6), ambos límites coinciden y definimos

$$\Psi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{h^{-1}(\zeta)} \dots \psi_{h^{-n}(\zeta)}(-r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{h^{-1}(\zeta)} \dots \psi_{h^{-n}(\zeta)}(r).$$

Por tanto, para cada $n > 0$, tenemos que la intersección

$$\bigcap_{0 \leq i \leq n} H^i(\hat{V}_{r,r'})$$

está formada por los puntos $[\xi, \eta, \zeta]$ tales que $|\xi| \leq r$,

$$\psi_{h^{-1}(\zeta)} \dots \psi_{h^{-n}(\zeta)}(-r) \leq \eta \leq \psi_{h^{-1}(\zeta)} \dots \psi_{h^{-n}(\zeta)}(r)$$

y $\zeta \in Cl(\hat{U}_{r'})$. Entonces definimos

$$K_{r,r'} = \bigcap_{n \geq 0} H^n(V_{r,r'}) = \{ [\xi, \Psi(\zeta), \zeta] \mid |\xi| \leq r, \zeta \in Cl(\hat{U}_{r'}) \}.$$

Como el conjunto $K_{r,r'}$ es cerrado, deducimos que la función $\Psi : Cl(\hat{U}_{r'}) \rightarrow [-r, r]$ es continua. La propiedad esencial de la construcción es la siguiente: si $x \in K_{r,r'}$ y $n > 0$, entonces $H^{-n}(x) \in \hat{V}_{r,r'}$.

(3) En la tercera y última etapa, probamos que $\mathcal{M} \cap \hat{c} \neq \emptyset$. Para ello, consideramos la aplicación $\tau : \hat{V}_{r,r'} \rightarrow (0, \infty)$ que nos da el tiempo de primer retorno a \hat{E} siguiendo el flujo geodésico g_t . Sean

$$\check{V}_{r,r'} = \{ g_t(x) \mid x \in \hat{V}_{r,r'}, t \in [0, \tau(x)] \}$$

y

$$\check{K}_{r,r'} = \{ g_t(x) \mid x \in K_{r,r'}, t \in [0, \tau(x)] \}.$$

Ambos son conjuntos compactos y se verifica que:

$$\left. \begin{array}{l} x \in \check{K}_{r,r'} \\ t > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g_{-t}(x) \in \check{V}_{r,r'}. \quad (4.8)$$

Ahora bien, el lema 4.20 garantiza que

$$T^1\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{t \geq 0} g_t(\mathcal{M})}.$$

Como $\check{V}_{r,r'}$ tiene interior no vacío, entonces $\bigcup_{t \geq 0} g_t(\mathcal{M}) \cap \check{V}_{r,r'} \neq \emptyset$, es decir, existe un punto $x \in \mathcal{M}$ y un tiempo $t \geq 0$ tales que $y = g_t(x) \in \check{V}_{r,r'}$. Luego hay un segmento de órbita del flujo h_s^+ pasando por el punto y que corta a $\check{K}_{r,r'}$ en un punto $y' = h_s^+(y) \in \check{K}_{r,r'}$. Tomando $x' = g_{-t}(y')$ y usando la hiperbolicidad obtenemos que

$$x' = g_{-t}(y') = g_{-t}h_s^+(y) = g_{-t}h_s^+g_t(x) = h_{se^t}(x)$$

y por tanto $x' \in \mathcal{M}$ puesto que \mathcal{M} es invariante por h_s^+ . Por otra parte, como $y' \in \check{K}_{r,r'}$, usando (4.8), deducimos que $x' = g_{-t}(y') \in \check{V}_{r,r'}$. Luego $\mathcal{M} \cap \check{V}_{r,r'} \neq \emptyset$. Finalmente, como $\hat{c} = \bigcap_{r > 0} \check{V}_{r,r'(r)}$, por la propiedad de intersección finita concluimos que $\mathcal{M} \cap \hat{c} \neq \emptyset$, quedando probado el teorema. \square

Bibliografía

- [1] Fernando Alcalde Cuesta and Françoise Dal’Bo, Remarks on the dynamics of the horocycle flow for homogeneous foliations by hyperbolic surfaces. *Expo. Math.*, **33** (2015), no. 4, 431–451.
- [2] Fernando Alcalde Cuesta, Françoise Dal’Bo, Matilde Martinez and Alberto Verjovsky, Minimality of the horocycle flow on laminations by hyperbolic surfaces with non-trivial topology. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **36** (2016), no. 9, 4619–4635, Corrigendum to ”Minimality of the horocycle flow on laminations by hyperbolic surfaces with non-trivial holonomy”. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **39** (2017), no.8, 4585–4586.
- [3] Fernando Alcalde Cuesta, Françoise Dal’Bo, Matilde Martinez and Alberto Verjovsky, Unique ergodicity of the horocycle flow on riemannian foliations. *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2018).
- [4] Danny Calegari, *Foliations and the geometry of 3-manifolds*. Oxford University Press, Oxford, 2007,
- [5] Alan F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [6] Françoise Dal’Bo, *Geodesic and horocyclic trajectories*. Springer-Verlag, London, 2011,
- [7] Françoise Dal’Bo, Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **50** (2000), no. 3, 981–993.
- [8] Hillel Furstenberg, Strict ergodicity and transformations of the torus. *Amer. J. Math.*, **83** (1961), 573–601.
- [9] Hillel Furstenberg, The unique ergodicity of the horocycle flow, in *Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*. Springer Lecture Notes in Math., Vol. 318. , Berlin, 1973, pp. 95–115.
- [10] Claude Godbillon, *Feuilletages: études géométriques*. Birkhäuser, 1991.
- [11] William M. Goldman, Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, **93** (1988), 557–607.

-
- [12] Gilbert Hector and Ulrich Hirsch, *Introduction to the Geometry of Foliations, Part A*. Vieweg & Sohn, 1981.
- [13] Gilbert Hector and Ulrich Hirsch, *Introduction to the Geometry of Foliations, Part B*. Vieweg & Sohn, 1987.
- [14] Gustav A. Hedlund, Fuchsian groups and transitive horocycles. *Duke Math. J.*, **2** (1936), 530–542.
- [15] S. Katok, *Fuchsian groups*. University of Chicago Press, Chicago, 1992
- [16] Andrés Navas, *Group of circle diffeomorphisms*. University of Chicago Press, Chicago, 2011.
- [17] Matilde Martínez, Shigenori Matsumoto and Alberto Verjovsky, Horocycle flows for laminations by hyperbolic Riemann surfaces and Hedlund’s theorem. *J. Mod. Dyn.*, **10** (2016), 113–134.
- [18] Shigenori Matsumoto. Some remarks on foliated S^1 -bundles. *Invent. Math.*, **90** (1987), 343–358.
- [19] Shigenori Matsumoto, Weak form of equidistribution theorem for harmonic measures of foliations by hyperbolic surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144** (2016), no.3, 1289–1297.
- [20] Shigenori Matsumoto, Remarks on the horocycle flow for foliations by hyperbolic surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **145** (2017), no. 1, 355–362.
- [21] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv.*, **32** (1958), 215–223.
- [22] Shigeyuki Morita, *Geometry of differential forms*. American Mathematical Society, 2001.
- [23] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, volume 149, Springer, New York, 2006.
- [24] Marina Ratner, Invariant measures and orbit closures for unipotent actions on homogeneous spaces. *Geom. Funct. Anal.*, **4** (1994), no.2, 236–257.
- [25] John W. Wood, Foliated S^1 -bundles and diffeomorphisms of S^1 , in *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*. Academic Press, New York, 1973, pp. 671–681.