MARÍA FERREIRO SUBRIDO

ESTRUCTURA LOCAL DE SUPERFICIES PARA-KÄHLER CON TENSOR DE BOCHNER NULO

143b
2020

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MARÍA FERREIRO SUBRIDO

ESTRUCTURA LOCAL DE SUPERFICIES PARA-KÄHLER CON TENSOR DE BOCHNER NULO

143b

2020

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Estructura local de superficies para-Kähler con tensor de Bochner nulo

María Ferreiro Subrido

Xullo 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Agradecimientos

Para empezar, me gustaría retroceder unos años en el tiempo y agradecerle a Eduardo García Río haberme aceptado como becaria de colaboración y dirigir mi Trabajo Fin de Grado, pues ese fue el principio de mi historia con la Geometría Diferencial. También quiero agradecerle todas las horas dedicadas, dentro y fuera del despacho, a este trabajo y su paciencia conmigo. Gracias también a Ramón Vázquez Lorenzo por sus aportaciones y correcciones, y gracias a los dos por "adoptarme" y darme la oportunidad de seguir por este camino.

También me gustaría agradecerle de corazón haber llegado a donde estoy a la única persona que es posible que haya sufrido mis malos momentos estos años más que yo y que siempre me ha apoyado, a pesar de mis equivocaciones. Gracias, papá.

Solo me queda ahora dar las gracias por todo a la persona que me avisó de que había superficies "locamente isométricas" en este trabajo y no se rió cuando lo vio en la exposición.

Resumen

El objetivo de esta memoria es dar una descripción local de las superficies para-Kähler con tensor de Bochner nulo. Partiendo del hecho de que la estructura subyacente a una variedad para-Kähler es la de una variedad de Walker, se llegará a que las superficies para-Kähler Bochner llanas son localmente isométricas al fibrado cotangente de ciertas superficies afines equipado con una extensión de Riemann modificada determinada por un campo de vectores X, un campo de tensores T de tipo $(1,1)$ y un campo de tensores simétrico Φ de tipo $(0,2)$ sobre la superficie afín.

Resumo

O obxectivo desta memoria é dar unha descrición local das superficies para-Kähler con tensor de Bochner nulo. Partindo do feito de que a estrutura subxacente a una variedade para-Kähler é a dunha variedade de Walker, chegarase a que as superficies para-Kähler Bochner chás son localmente isométricas ó fibrado cotanxente de certas superficies afíns equipado cunha extensión de Riemann modificada determinada por un campo de vectores X, un campo de tensores T de tipo $(1,1)$ e un campo de tensores simétrico Φ de tipo $(0,2)$ sobre a superficie afín.

Abstract

The objective of this work is to give a local description of Bochner-flat para-Kähler surfaces. Taking into account the fact that the underlying structure of para-Kähler manifolds is that of a Walker manifold, we show that a Bochner-flat para-Kähler surface is locally isometric to the cotangent bundle of an affine surface equipped with a modified Riemannian extension given by a vector field X, a $(1,1)-$tensor field T and a symmetric $(0,2)-$tensor field Φ on the affine surface.

Introducción

Las variedades casi paracomplejas fueron introducidas por Libermann en [18, 19] siguiendo un proceso completamente análogo al de las variedades casi complejas, de forma que están determinadas por la existencia de un campo de tensores J de tipo $(1,1)$ tal que $J^2 = \mathrm{Id}$. Además los autoespacios asociados a los autovalores ± 1 de la estructura casi paracompleja J han de tener la misma dimensión, por lo que $\dim\ker(J \mp \mathrm{Id}) = n$ y $\dim M = 2n$.

Una variedad para-Kähler es una variedad simpléctica (M, Ω) localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas, de modo que su fibrado tangente se descompone como suma de Whitney de dos subfibrados Lagrangianos, $TM = L \oplus L'$. Considerando las proyecciones π_L y $\pi_{L'}$ sobre cada subfibrado Lagrangiano, el campo de tensores de tipo $(1,1)$ dado por $J = \pi_L - \pi_{L'}$ es una estructura casi paracompleja sobre M. Además, por ser L y L' subespacios Lagrangianos, se tiene que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y en M. Así pues, $g(X, Y) = \Omega(JX, Y)$ determina una métrica de signatura neutra (n, n) sobre M que satisface

$$g(JX, JY) = -g(X, Y), \quad \text{y} \quad (\nabla_X J)Y = 0,$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en M, donde ∇ denota la conexión de Levi-Civita de (M, g).

Las estructuras para-Kähler, que también aparecen en la bibliografía con el nombre de variedades bi-Lagrangianas, tienen especial relevancia tanto en cuestiones físicas como geométricas. Una buena referencia, aunque no actualizada, es el informe [11]. Más recientemente, la geometría para-Kähler desempeña un papel importante en el estudio de problemas geométricos como por ejemplo la no-unicidad de la métrica para la conexión de Levi-Civita [3], la clasificación de conexiones simplécticas [6], o el espacio de geodésicas orientadas sobre $\mathbb{C}H^n$ [1].

El tensor curvatura de Bochner, que fue introducido en el año 1949 por S. Bochner para variedades Kähler, se define formalmente como un análogo del tensor curvatura de Weyl, de tal forma que el tensor de curvatura de una variedad Bochner llana está completamente determinado por su tensor de Ricci. Una interpretación geométrica del tensor curvatura de Bochner fue obtenida en [21]. La curvatura seccional paraholomorfa de una variedad para-Kähler se define como la restricción de la curvatura seccional a planos paraholomorfos (i.e., $J\pi \subset \pi$) no degenerados. Así

$$H(X) = K(\{X \wedge JX\}) = -R(X, JX, X, JX)$$

para cada campo de vectores unitario X sobre M. Dado que la curvatura seccional no está definida sobre planos degenerados (ver, por ejemplo, [20]) se plantea el problema de la posible extensión continua de la curvatura seccional paraholomorfa a todo el fibrado tangente. Dicha extensión requiere que

$$R(U, JU, U, JU) = 0$$

para todo campo de vectores nulo U definido sobre M, siendo esta condición equivalente a la anulación del tensor de Bochner [21].

Las variedades Kähler y para-Kähler Bochner llanas fueron recientemente estudiadas en [5]. El caso de dimensión 4 es especialmente tratable, ya que una superficie para-Kähler (resp., Kähler) es Bochner llana si y solo si es anti-auto-dual (resp., auto-dual). A pesar de ello, existen numerosas cuestiones abiertas por lo que nuestro objetivo central es proporcionar una descripción local de las superficies para-Kähler cuyo tensor curvatura de Bochner es nulo.

En el Capítulo 1 de esta memoria repasaremos conceptos básicos que serán necesarios para la comprensión del estudio realizado en capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 introduciremos las variedades de Walker como aquellas variedades pseudo-Riemannianas que admiten una distribución nula y paralela, para centrarnos en una clase particular de variedades de Walker conocidas como extensiones de Riemann; que permiten trasladar problemas desde la Geometría Afín a la Geometría de Riemann y viceversa.

Si (M, g, J) es para-Kähler, entonces las distribuciones $\mathfrak{D}_\pm = \ker(J \mp \mathrm{Id})$ son paralelas y degeneradas, por lo que toda variedad para-Kähler tiene una estructura de Walker subyacente. Así pues, toda superficie para-Kähler puede describirse localmente por una métrica de Walker $(g, \mathcal{D})$ donde la estructura paracompleja J es tal que $J\,|_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$. En el Capítulo 3 estudiamos este tipo de estructuras, mostrando que cada variedad de Walker $(M, g, \mathcal{D})$ tiene asociada una familia de estructuras casi paracomplejas que, aun siendo isotrópicas para-Kähler (i.e., $\|\nabla J\|^2 = 0$), no son para-Kähler en general (i.e., $\nabla J \neq 0$).

Es importante señalar que la orientación de Walker es la opuesta a la orientación para-Kähler por lo que, trabajando con la orientación de Walker, la forma de Kähler de la estructura (g, J) es auto-dual. Así, las métricas Bocher llanas se corresponderán con las estructuras auto-duales de Walker que admitan una estructura para-Kähler con $J\,|_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$. El proceso de integración de estas estructuras abarcará los capítulos 4 y 5 de esta memoria.

Toda métrica de Walker auto-dual es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) con métrica

$$g = \iota X(\iota \,\mathrm{Id} \circ \iota \,\mathrm{Id}) + \iota T \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D + \pi^* \Phi$$

para algún campo de vectores X en Σ, un campo de tensores T tipo $(1, 1)$ y un campo de tensores Φ simétrico tipo $(0, 2)$ sobre Σ. En estas condiciones la curvatura escalar está determinada por $\tau = 12\iota(X) + 3\,\mathrm{tr}(T)$. En el Capítulo 4 estudiamos la situación en que la curvatura escalar es constante, probando en el Lema 4.2 que esto ocurre si, y solo si, el campo de vectores X es cero y obteniendo el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 4.1. *Una superficie para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar constante es localmente isométrica a uno de los siguientes espacios*

(1) Una superficie para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante o, equivalentemente el fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una superficie afín llana (Σ, D) con la métrica dada por

$$g = c\iota \operatorname{Id} \circ \iota \operatorname{Id} + g_D, \qquad c \neq 0,$$

o el espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{E}_2^4$ si $c = 0$.

(2) Un producto $M_1(c) \times M_2(-c)$ de dos superficies Lorentzianas de curvatura seccional constante y opuesta $c \neq 0$.

(3) El fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una superficie afín llana (Σ, D) con la métrica dada por

$$g = \iota T \circ \iota \operatorname{Id} + g_D$$

donde g_D es la extensión de Riemann de la conexión D y T es un campo de tensores tipo $(1,1)$ en Σ nilpotente y paralelo (i.e., $T^2 = 0$, $DT = 0$).

(4) El fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una superficie afín llana (Σ, D) con la métrica dada por

$$g = \iota T \circ \iota \operatorname{Id} + g_D,$$

donde g_D es la extensión de Riemann de la conexión D y T es una estructura compleja paralela en Σ (i.e., $T^2 = -k^2 \operatorname{Id}$, $DT = 0$).

La situación en la que la curvatura escalar es no constante se abordará en el Capítulo 5. Asumiendo que el campo de vectores X es no nulo, determinamos en primer lugar una familia de ejemplos considerando las estructuras inducidas por un campo de tensores T paralelo, probando el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Sea (Σ, D) una superficie afín y sean $h \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, X un campo de vectores en Σ, Φ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ en Σ y T un campo de tensores de tipo $(1,1)$ paralelo en (Σ, D). Si (g, J_h) es una estructura casi para-Hermítica en $T^*\Sigma$ determinada por*

$$J_h\,|_{\ker \pi_*} = \operatorname{Id}, \quad y \quad g = \iota X(\iota\operatorname{Id} \circ \iota\operatorname{Id}) + \iota T \circ \iota\operatorname{Id} + g_D + \pi^*\Phi,$$

entonces $(T^*\Sigma, g, J_h)$ es para-Kähler Bochner llana si, y solo si, $h = 0$, $\Phi = 0$, la conexión afín D es llana y $S = \lambda\operatorname{Id}$ para alguna función $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, donde $S(Z) = \nabla_Z X$.

Para terminar, estudiaremos la situación general en la que la curvatura escalar es no constante, obteniendo (localmente) la estructura geométrica de la superficie afín Σ. En la Sección 5.2 mostramos que la estructura local de estas variedades depende, en coordenadas adecuadas, de dos funciones de dos variables y cuatro funciones de una única variable.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos la notación que vamos a utilizar a lo largo de la memoria, así como definiciones y conceptos básicos necesarios para la comprensión del estudio realizado en capítulos posteriores.

1.1. Variedades pseudo-Riemannianas

El objeto principal en nuestro estudio van a ser las variedades pseudo-Riemannianas. Una *variedad pseudo-Riemanniana* (M, g) de dimensión n es una variedad diferenciable M equipada con un tensor métrico g (i.e., un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico y no degenerado) de signatura $(\nu, n - \nu)$, siendo ν el número de autovalores negativos de la matriz asociada al tensor g.

Para fijar la notación relativa a variedades diferenciables, denotaremos el espacio tangente a una variedad M en un punto $p \in M$ como T_pM y los vectores tangentes a la variedad en cada punto se denotarán mediante letras minúsculas $x, y, z, u, v, w, \dots$. El fibrado tangente a la variedad se denotará por TM y el cotangente por T^*M. Consideraremos $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de todos los campos de vectores diferenciables sobre M y sus elementos se designarán mediante letras mayúsculas $X, Y, Z, U, V, W, \dots$.

Además, si $(x^1, \dots, x^n)$ son coordenadas locales en M, denotaremos los campos de vectores coordenados mediante ∂_i ó ∂_{x^i} y las parciales segundas se denotarán por $\partial_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$. El conjunto $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ constituye una base del espacio tangente en cada punto. Su base dual $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es base del espacio cotangente en cada punto.

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión n y $p \in M$. Diremos que un vector $v \in T_pM$ es *temporal* si $g(v, v) < 0$, *espacial* si $g(v, v) > 0$ y *nulo* si $g(v, v) = 0$.

Si (M, g) es de signatura $(\nu, n - \nu)$ diremos que $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una *referencia ortonormal* en un abierto U de M si para todo punto $p \in U$ el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$, siendo $e_i = E_i|_p$, forma una base ortonormal de T_pM; es decir, si $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, $g(e_i, e_i) = -1$ para ν elementos de la base y $g(e_i, e_i) = 1$ para los restantes $n - \nu$. Asumiremos, salvo que se especifique lo contrario, que los primeros ν elementos de la base son temporales y los $n - \nu$ últimos son espaciales.

Para cualquier punto $p \in M$ de una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) existe una referencia ortonormal en un entorno U de p, $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Usaremos la notación $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, de modo que $\varepsilon_i = -1$ si e_i es temporal y $\varepsilon_i = 1$ si e_i es espacial. Podemos suponer, sin más que reordenar convenientemente los elementos de la base, que $g = \mathrm{diag}[-1 \overset{\nu}{\cdots} -1, 1 \overset{n-\nu}{\cdots} 1]$.

1.1.1. Conexiones afines

Una *conexión afín* en una variedad M es un operador $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ cumpliendo

1. $D_X Y$ es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en X,
2. $D_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en Y,
3. $D_X fY = X(f)Y + fD_X Y$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en M y cualquier función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana. Existe una única conexión lineal, que denotaremos por ∇, libre de torsión y que hace paralela la métrica g; esto es, si X e Y son campos de vectores sobre la variedad M, entonces

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \qquad \text{y} \qquad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

donde $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ denota el corchete de Lie. Esta conexión se conoce como *conexión de Levi-Civita* y viene determinada por la Fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned} \tag{1.1}$$

para cualesquiera X, Y, Z campos de vectores sobre M.

Notación 1.1. Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenadas locales en M y $\{\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}\}$ la base de campos de vectores inducida. $\partial_{x^i}, \partial_{x^j}$ son campos de vectores definidos en el correspondiente entorno coordenado y, por tanto, $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}$ es asimismo un campo de vectores definido en dicho entorno. Podemos expresarlo en función de la base de campos de vectores coordenados como

$$\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}\,,$$

donde estamos haciendo uso del convenio de suma sobre índices repetidos de Einstein para denotar una suma en k. Las funciones Γ_{ij}^k se conocen como *símbolos de Christoffel* de la conexión para el sistema de coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ y vienen dadas por

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ijl} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

donde (g^{ij}) denota la matriz inversa de la matriz de la métrica $(g_{ij}(x^1, \ldots, x^n))$.

1.2. Tensor de curvatura

A partir de la conexión de Levi-Civita podemos definir el *operador de curvatura* R (tensor de curvatura de tipo $(1,3)$) según el criterio

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]\, Z,$$

y a partir de él definimos el *tensor de curvatura* de tipo $(0,4)$ como

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V).$$

El tensor de curvatura de tipo $(0,4)$ satisface las siguientes identidades algebraicas:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad R(X,Y,Z,V) = -R(Y,X,Z,V) = -R(X,Y,V,Z),\\
&\text{(ii)} \quad R(X,Y,Z,V) + R(Y,Z,X,V) + R(Z,X,Y,V) = 0,\\
&\text{(iii)} \quad R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

y la identidad diferencial:

$$\text{(iv)} \qquad (\nabla_X R)(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,U,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,U,V) = 0. \tag{1.3}$$

Las identidades (ii) y (iv) se conocen como primera y segunda identidades de Bianchi, respectivamente.

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial. Se denomina *tensor curvatura algebraico* a todo tensor de tipo $(0,4)$ $A : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ que satisface las identidades algebraicas (1.2). Si $(\mathcal{V}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espacio vectorial con un producto interior, entonces el tensor R^0 definido por

$$R^0(X,Y,Z,U) = \langle X,Z\rangle\langle Y,U\rangle - \langle X,U\rangle\langle Y,Z\rangle,$$

cumple las propiedades (1.2) y se denomina *tensor curvatura algebraico estándar*.

Sea $p \in M$ y $\pi \subset T_pM$ un plano (i.e., un subespacio de dimensión dos). Se define la *curvatura seccional* del plano π en el punto $p \in M$ como

$$K(\pi) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{R^0(X,Y,X,Y)},$$

donde $\{X,Y\}$ es una base arbitraria de π. La curvatura seccional está definida para cualquier plano en signatura Riemanniana. Sin embargo, para variedades pseudo-Riemannianas $K(\pi)$ tan solo estará definido para planos *no degenerados*, esto es, para planos $\pi = \operatorname{span}\{X,Y\}$ donde $g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 \neq 0$. Véase [20] para más información.

Si el valor de la curvatura seccional es independiente del plano π y del punto $p \in M$, diremos que la variedad (M,g) tiene curvatura seccional constante. Una variedad tiene curvatura seccional constante c si, y solo si, el tensor de curvatura se expresa como

$$R(X,Y)Z = c\,\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}\,,$$

en cuyo caso la variedad es localmente isométrica a una pseudo-esfera $\mathbb{S}^n_\nu$ (si $c > 0$), al espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{E}^n_\nu$ (si $c = 0$), o al espacio pseudo-hiperbólico $\mathbb{H}^n_\nu$ (si $c < 0$).

Definimos el *tensor de Ricci* de tipo $(0,2)$ como la traza del tensor de curvatura dada por

$$\rho(X,Y) = \operatorname{tr}\{Z \mapsto R(X,Z)Y\}\,.$$

El tensor de Ricci de una variedad pseudo-Riemanniana es simétrico y, por tanto, el operador de Ricci, dado por $g(\operatorname{Ric} X, Y) = \rho(X,Y)$, es un campo de tensores de tipo $(1,1)$ autoadjunto. Se define la *curvatura escalar* como la traza del operador de Ricci. Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una referencia local ortonormal, entonces el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$\rho(X,Y) = \sum_i \varepsilon_i R(X, E_i, Y, E_i), \qquad \tau = \sum_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j R(E_i, E_j, E_i, E_j),$$

donde $\varepsilon_k = g(E_k, E_k) = \pm 1$. Además, si consideramos un sistema de coordenadas locales en M, $(x^1, \ldots, x^n)$, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se escriben en coordenadas como:

$$\rho(X,Y) = g^{ij} R(X, \partial_{x^i}, Y, \partial_{x^j}) \qquad \text{y} \qquad \tau = g^{ij}\rho(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}).$$

Diremos que una variedad pseudo-Riemanniana (M,g) es *Einstein* si el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica. En cal caso $\rho = \dfrac{\tau}{n} g$ y la curvatura escalar τ es necesariamente constante si M es conexa y $\dim M \geq 3$.

Observación 1.2. En general, el tensor de Ricci ρ^D de una variedad afín no es simétrico. Por este motivo definimos las componentes simétrica y antisimétrica del tensor de Ricci como

$$\begin{aligned} \rho^D_{sim}(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\{\rho^D(X,Y) + \rho^D(Y,X)\}\,, \\ \rho^D_{ant}(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\{\rho^D(X,Y) - \rho^D(Y,X)\}\,, \end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en la variedad.

Si (Σ, D) es una variedad afín de dimensión 2, el tensor de Ricci determina de forma completa el tensor de curvatura:

$$R^D(X,Y)Z = \rho^D(X,Z)Y - \rho^D(Y,Z)X.$$

Sean (x^1, x^2) coordenadas locales en Σ de manera que la conexión D se expresa como $D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma^\ell_{ij}(x^1,x^2)\partial_{x^\ell}$, donde $\Gamma^\ell_{ij}(x^1,x^2)$ son los símbolos de Christoffel de D en las coordenadas (x^1,x^2). Entonces el tensor de Ricci se escribe como:

$$\begin{aligned} \rho^D \;=\; & \{\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^2_{12})^2 + \Gamma^2_{11}\,(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) + \partial_2\Gamma^2_{11} - \partial_1\Gamma^2_{12}\}\, dx^1 \otimes dx^1 \\ & + \{\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \partial_2\Gamma^2_{12} - \partial_1\Gamma^2_{22}\}\, dx^1 \otimes dx^2 \\ & + \{\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{11} + \partial_1\Gamma^1_{12}\}\, dx^2 \otimes dx^1 \\ & + \{\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - (\Gamma^1_{12})^2 - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \partial_2\Gamma^1_{12} + \partial_1\Gamma^1_{22}\}\, dx^2 \otimes dx^2. \end{aligned}$$

Además, las complenentes simétrica y antisimétrica del tensor de Ricci vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
\rho^D_{sim} \;=\; & \{\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^2_{12})^2 + \Gamma^2_{11}\,(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) + \partial_2\Gamma^2_{11} - \partial_1\Gamma^2_{12}\}\, dx^1 \otimes dx^1 \\
& + \tfrac{1}{2}\,\{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - 2\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \partial_2(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) + \partial_1\,(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\}\, dx^1 \otimes dx^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\,\{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - 2\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \partial_2\,(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) + \partial_1\,(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\}\, dx^2 \otimes dx^1 \\
& + \{\Gamma^1_{22}\,(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}) - (\Gamma^1_{12})^2 + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \partial_2\Gamma^1_{12} + \partial_1\Gamma^1_{22}\}\, dx^2 \otimes dx^2 \\
\rho^D_{ant} \;=\; & \tfrac{1}{2}\,\{\partial_2\Gamma^1_{11} + \partial_2\Gamma^2_{12} - \partial_1\Gamma^1_{12} - \partial_1\Gamma^2_{22}\}\,(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)
\end{aligned}
$$

1.2.1. Teorema de Cartan

Sean (M, g) y $(\tilde{M}, \tilde{g})$ dos variedades Riemannianas de dimensión n y sean $p \in M$ y $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Fijemos $i : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ una isometría lineal y sea $V \subset M$ un entorno normal de p tal que $\exp_{\tilde{p}}$ está definida en $i \circ \exp_p^{-1}(V)$. Definimos la aplicación $f : V \to \tilde{M}$ como

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q)\,, \quad q \in V.$$

Para todo $q \in V$ existe una única geodésica $\gamma : [0, t] \to M$, parametrizada por arco, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(t) = q$. Denotamos por P_t el transporte paralelo a lo largo de γ desde $\gamma(0)$ hasta $\gamma(t)$ y definimos $\phi_t : T_qM \to T_{f(q)}\tilde{M}$ como

$$\phi_t(v) = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v) \quad v \in T_qM,$$

donde $\tilde{P}_t$ denota el transporte paralelo a lo largo de la geodésica $\tilde{\gamma} : [0, t] \to \tilde{M}$ dada por $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Además, denotamos por R y $\tilde{R}$ las curvaturas de M y $\tilde{M}$, respectivamente.

Teorema 1.3. [12] *Con la notación anterior, si para todo $q \in V$ y todo $x, y, u, v \in T_qM$ se tiene que*

$$R(x, y, u, v) = \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y), \phi_t(u), \phi_t(v)),$$

entonces $f : V \to f(V)$ es una isometría local y $df_p = i$.

El resultado anterior será especialmente relevante a la hora de describir las superficies para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar constante, ya que al ser todas ellas localmente simétricas, será suficiente considerar la expresión de su tensor de curvatura.

1.2.2. Tensor curvatura de Weyl

Se define el *producto de Kulkarni-Nomizu* de dos formas bilineales simétricas D y B como

$$
\begin{aligned}
(D \odot B)(X, Y, Z, V) =& D(X, Z)B(Y, V) + D(Y, V)B(X, Z) \\
& - D(X, V)B(Y, Z) - D(Y, Z)B(X, V),
\end{aligned}
$$

para cualesquiera X, Y, Z, V campos de vectores en M. Un cálculo sencillo muestra que $D \odot B$ es un tensor curvatura algebraico. A modo de ejemplo, el tensor de curvatura estándar se escribe $R^0 = \frac{1}{2} g \odot g$.

Definimos el *tensor de Schouten* de una variedad pseudo-Riemanniana n-dimensional como el tensor simétrico de tipo $(0,2)$ dado por

$$S = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g\right).$$

Así el *tensor curvatura de Weyl* de tipo $(0,4)$ se define como

$$W = R - S \odot g,$$

que explícitamente se expresa como

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z,V) &= R(X,Y,Z,V) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} R^0(X,Y,Z,V) \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)} R^1(X,Y,Z,V), \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde R^1 es el tensor curvatura algebraico definido como $R^1 = \rho \odot g$:

$$\begin{aligned} &R^0(X,Y,Z,V) = g(X,Z)g(Y,V) - g(X,V)g(Y,Z) \\ &R^1(X,Y,Z,V) = \rho(X,Z)g(Y,V) - \rho(X,V)g(Y,Z) + g(X,Z)\rho(Y,V) - g(X,V)\rho(Y,Z). \end{aligned}$$

La anulación del tensor de Weyl caracteriza los espacios localmente conformemente llanos en dimensión $n \geq 4$. En dimensión $n = 3$ el tensor curvatura de Weyl es idénticamente nulo.

El siguiente resultado proporciona una descomposición de los tensores de curvatura algebraicos que, a su vez, motiva los tensores que acabamos de introducir.

Teorema 1.4. *Un tensor de curvatura algebraico A en un espacio vectorial con producto interior $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se descompone como*

$$A = \mathfrak{U}_A + \mathfrak{Z}_A + W_A$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_A &= \frac{\tau_A}{2n(n-1)} \langle\cdot,\cdot\rangle \odot \langle\cdot,\cdot\rangle, \\ \mathfrak{Z}_A &= \frac{1}{n-2}\left(\rho_A - \frac{\tau_A}{n}\langle\cdot,\cdot\rangle\right) \odot \langle\cdot,\cdot\rangle, \\ W_A &= A - \mathfrak{U}_A - \mathfrak{Z}_A = A - S_A \odot \langle\cdot,\cdot\rangle, \end{aligned}$$

donde ρ_A, τ_A y S_A son el tensor de Ricci, la curvatura escalar y el tensor de Schouten asociados al tensor de curvatura algebraico A, respectivamente.

Observación 1.5. Si consideramos el operador de curvatura asociado a cada tensor de curvatura algebraico A en $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, tal operador puede interpretarse como un endomorfismo A en el espacio de 2-formas $\Lambda^2(\mathcal{V})$. Así, las componentes $\mathfrak{U}_A, \mathfrak{Z}_A$ y W_A del Teorema 1.4 se corresponden con las siguientes componentes ortogonales:

- $\mathfrak{U}_A$ es la proyección ortogonal en el espacio de tensores de curvatura algebraicos de curvatura seccional constante.
- La anulación de la componente $\mathfrak{Z}_A$ se corresponde con los tensores de curvatura algebraicos Einstein.
- En dimensión $n \geq 4$, la anulación de la componente W_A representa los tensores de curvatura algebraicos localmente conformemente llanos ($W = 0$), que están determinados por su correspondiente tensor de Ricci.

En algunos contextos será de utilidad emplear subíndices para denotar las componentes de cada uno de los tensores en las correspondientes bases. Así, por ejemplo, escribiremos $\rho_{ij} = \rho(e_i, e_j)$, $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l), \dots$, donde $\{e_i\}$ es la base inducida en cada espacio tangente por una referencia local dada.

1.3. Auto-dualidad y anti-auto-dualidad en dimensión cuatro

La descomposición del tensor de curvatura dada en el Teorema 1.4 se expresa de forma más simple en dimensiones bajas:

- En dimensión 2 todo tensor de curvatura algebraico es de la forma $A = \frac{\tau_A}{2}\langle\cdot,\cdot\rangle \odot \langle\cdot,\cdot\rangle$.
- En dimensión 3 todo tensor de curvatura algebraico está determinado por su tensor de Schouten como $A = S_A \odot \langle\cdot,\cdot\rangle$.

En dimensión $n = 4$ la situación es más complicada, pero las propiedades del operador estrella de Hodge permiten refinar la descomposición anterior de la curvatura.

Vamos a considerar un espacio vectorial de dimensión cuatro dotado de un producto escalar de signatura arbitraria, $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{V}$ y $\{e^1, \dots, e^n\}$ su base dual asociada de forma que orientamos $\mathcal{V}$ por la forma de volumen $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$. En el espacio de 2-formas

$$\Lambda^2(\mathcal{V}) = \{e^i \wedge e^j \,:\, i, j \in \{1,2,3,4\},\, i < j\}$$

se define el *operador estrella de Hodge* $\star$ como

$$e^i \wedge e^j \wedge \star(e^k \wedge e^l) = (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k)\varepsilon_i \varepsilon_j e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4, \tag{1.5}$$

donde $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$ y δ^j_i representa la delta de Kronecker.

Las propiedades del operador de Hodge dependen de la signatura del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Así, en signatura Lorentziana $\star$ define una estructura compleja (i.e., $\star^2 = -\mathrm{Id}_{\Lambda^2(V)}$), mientras que en signatura Riemanniana o neutra $\star$ define una estructura paracompleja (i.e., $\star^2 = \mathrm{Id}_{\Lambda^2(\mathcal{V})}$). En el segundo caso, el operador de Hodge induce una descomposición del espacio de 2-formas $\Lambda^2(\mathcal{V}) = \Lambda^2_+(\mathcal{V}) \oplus \Lambda^2_-(\mathcal{V})$, donde $\Lambda^2_+(\mathcal{V})$ y $\Lambda^2_-(\mathcal{V})$ denotan los espacios de 2-formas auto-duales y anti-auto-duales, respectivamente:

$$\Lambda^2_+(\mathcal{V}) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathcal{V}) \,:\, \star\alpha = \alpha\}, \qquad \Lambda^2_-(\mathcal{V}) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathcal{V}) \,:\, \star\alpha = -\alpha\}.$$

En una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ los subespacios auto-dual y anti-auto-dual están generados por $\{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\}$, donde

$$\begin{aligned} E_1^\pm &= (e^1 \wedge e^2 \pm \varepsilon_3\varepsilon_4 e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ E_2^\pm &= (e^1 \wedge e^3 \mp \varepsilon_2\varepsilon_4 e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ E_3^\pm &= (e^1 \wedge e^4 \pm \varepsilon_2\varepsilon_3 e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La métrica inducida en $\Lambda^2(\mathcal{V})$ a partir del producto escalar en $\mathcal{V}$, dada por

$$\ll x \wedge y, z \wedge w \gg = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle\langle x, w\rangle,$$

es Riemanniana si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es definido positivo y de signatura $(++----)$ si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar de signatura neutra $(2,2)$. En este último caso, la restricción de la métrica a los subespacios $\Lambda_\pm$ es de signatura $(+--)$. En todo caso, $\{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\}$ es una base ortonormal con $E_1^\pm$ espaciales y $E_2^\pm, E_3^\pm$ temporales.

Interpretando un tensor de curvatura algebraico A sobre $\mathcal{V}$ como un endomorfismo en el espacio de 2-formas, en dimensión cuatro la descomposición dada por el Teorema 1.4 resulta

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\tau}{12}\mathrm{Id}_{\Lambda^2} + \rho_0 + W \,:\, \Lambda^2(\mathcal{V}) \to \Lambda^2(\mathcal{V})\,, \tag{1.6}$$

donde W denota el tensor de Weyl y ρ_0 el tensor de Ricci sin traza

$$\rho_0(x, y) = \rho(x, y) - \frac{\tau}{4}\langle x, y\rangle.$$

Podemos refinar la descomposición dada en la Ecuación (1.6) sin más que tener en cuenta que $\Lambda^2(\mathcal{V}) = \Lambda^2_+(\mathcal{V}) \oplus \Lambda^2_-(\mathcal{V})$ y la correspondiente descomposición de $W = W^+ \oplus W^-$, obteniendo

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\tau}{12}\mathrm{Id}_{\Lambda^2} + \rho_0 + W^+ + W^- \,:\, \Lambda^2(\mathcal{V}) \to \Lambda^2(\mathcal{V})\,. \tag{1.7}$$

Denotando $W^\pm$ las restricciones del tensor de Weyl a los subespacios $\Lambda^2_\pm(\mathcal{V})$, se dice que el tensor de curvatura es *auto-dual* si $W^- = 0$ y que es *anti-auto-dual* si $W^+ = 0$.

1.4. Variedades para-Kähler

Sea M una variedad diferenciable $2n$-dimensional. Se dice que M es *paracompleja* si es localmente difeomorfa al producto de dos variedades n-dimensionales. En consecuencia existe un campo de tensores J de tipo $(1,1)$ tal que $J^2 = \mathrm{Id}$ y las dimensiones de los autoespacios asociados a los autovalores ± 1 de J coinciden, $\dim\ker(J - \mathrm{Id}) = \dim\ker(J + \mathrm{Id})$. En este caso J se denomina *estructura casi paracompleja* en M. Sin embargo, la existencia de este campo de tensores no es una condición suficiente para garantizar la existencia de una estructura paracompleja sobre la variedad; sino que debe cumplirse a mayores una condición de integrabilidad equivalente a la anulación del *tensor de Nijenhuis*

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J\,[JX, Y] - J\,[X, JY] + J^2\,[X,Y]\,.$$

En este caso el campo de tensores J recibe el nombre de *estructura paracompleja*.

Una variedad *casi para-Hermítica* (M, g, J) es una variedad diferenciable M con una estructura casi paracompleja J y una métrica pseudo-Riemanniana g compatibles en el siguiente sentido:

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0,$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M, lo que equivale a que J sea una anti-isometría. En el caso en que J es una estructura paracompleja, se dice que (M, g, J) es una variedad *para-Hermítica*. Diremos que (M, g, J) es una *variedad para-Kähler* si la estructura casi paracompleja J es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita de (M, g), esto es, $\nabla J = 0$.

Si M^{2n} es una variedad diferenciable, una 2-forma Ω en M se dice *casi simpléctica* si es no degenerada, es decir, si $\Omega^n \neq 0$. Si la 2-forma Ω es, además, cerrada ($d\Omega = 0$), se dice que Ω es una *forma simpléctica* y el par (M, Ω) es una *variedad simpléctica*. Una *subvariedad Lagrangiana* de una variedad simpléctica $N \hookrightarrow (M^{2n}, \Omega)$ es una subvariedad inmersa, N, sobre la que Ω induce la forma cero.

Sea M una variedad cuyo fibrado tangente TM admite una descomposición de la forma $TM \simeq L \oplus L'$, siendo L y L' subfibrados Lagrangianos respecto de una cierta 2-forma Ω. Si denotamos por π_L y $\pi_{L'}$ las proyecciones de TM sobre L y L', respectivamente, y definimos $J = \pi_L - \pi_{L'}$, entonces J es una estructura casi paracompleja sobre M, cumpliendo $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Recíprocamente, si J es una estructura casi paracompleja sobre M y Ω es una 2-forma sobre M de modo que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces los subfibrados de TM correspondientes a los autovalores ± 1 de la estructura J son Lagrangianos para la 2-forma Ω. Así, TM admite una descomposición de la forma $L \oplus L'$, siendo L y L' subfibrados Lagrangianos respecto de una 2-forma Ω si, y solo si, existe una estructura casi paracompleja J sobre M tal que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. De esta manera, si (M, Ω) es una variedad casi simpléctica, se tiene que la descomposición de TM en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos es equivalente a la existencia de una estructura casi para-Hermítica sobre M, donde la métrica para-Hermítica está relacionada con la 2-forma Ω mediante la expresión $g(JX, Y) = \Omega(X, Y)$.

En consecuencia, una variedad para-Kähler es una variedad simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas. La relación existente entre la 2-forma Ω, el tensor de Nijenhuis, N, de la estructura para-Hermítica y la conexión métrica, ∇, asociada a la métrica g dada por $g(X,Y) = \Omega(JX,Y)$, viene dada por el siguiente resultado (véase [10]).

Proposición 1.6. *Sea (M,g,J) una variedad para-Hermítica y denotemos por ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a g. Se cumple que*

$$2g\left((\nabla_X J)Y,Z\right) + 3d\Omega(X,Y,Z) + 3d\Omega(X,JY,JZ) + g(JX,N(Y,Z)) = 0$$

siendo $g(X,Y) = \Omega(JX,Y)$ para cualesquiera $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.7. Sea (M,g,J) una variedad para-Kähler y denotemos con $\mathcal{D}_\pm = \ker(J \mp \mathrm{Id})$ las distribuciones en M determinadas por los autoespacios correspondientes a los autovalores ± 1 de la estructura paracompleja J. Si $Z \in \mathcal{D}_\pm$, entonces $Z = \pm JZ$, por lo que para cada par de vectores $X,Y \in \mathcal{D}_\pm$ se tiene que

$$g(X,Y) = g(\pm JX, \pm JY) = g(JX,JY) = -g(X,Y)$$

de donde se sigue que las distribuciones $\mathcal{D}_\pm$ son totalmente degeneradas. Además, como la estructura J es paralela, $\nabla_Z X = \nabla_Z(\pm JX) = \pm J(\nabla_Z X)$, lo que muestra que $\nabla_Z X \in \mathcal{D}_\pm$ para cualquier campo de vectores Z sobre M y cualquier $X \in \mathcal{D}_\pm$. En consecuencia, ambas distribuciones son paralelas. Por tanto, la estructura subyacente a cualquier variedad para-Kähler es la de una variedad de Walker (de hecho, doblemente Walker). Las estructuras de Walker serán introducidas en el Capítulo 2 y constituyen el eje central del trabajo.

El tensor de curvatura de toda variedad para-Kähler hereda una identidad adicional debida al carácter paralelo de la estructura paracompleja:

$$R(JX,JY,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW) = -R(X,Y,Z,W)$$

para cualesquiera X,Y,Z,W campos de vectores en M. Una consecuencia de la identidad anterior es que toda variedad para-Kähler con curvatura seccional constante es necesariamente llana. Por lo tanto, el análisis de la curvatura seccional se restringe a distintos tipos de planos. Diremos que un plano $\pi \subset T_pM$ es *paraholomorfo* (resp., *totalmente real*) si es invariante por la estructura paracompleja, i.e., $J\pi \subset \pi$ (resp., $J\pi \subset \pi^\perp$).

Se define la *curvatura seccional para-holomorfa* como la restricción de la curvatura seccional K a planos paraholomorfos no degenerados

$$H(X) = \frac{R(X,JX,X,JX)}{R^0(X,JX,X,JX)} = -\frac{R(X,JX,X,JX)}{g(X,X)^2}$$

donde $\{X,JX\}$ es una base ortonormal de π. Nótese que la signatura de cada plano paraholomorfo es Lorentziana cuando este sea no degenerado o, en otro caso, el plano es totalmente degenerado.

De modo análogo a como sucede con la curvatura seccional, la curvatura seccional paraholomorfa determina por completo la curvatura de una variedad para-Kähler. De hecho, una variedad para-Kähler tiene curvatura seccional paraholomorfa constante c si, y solo si, el tensor de curvatura es de la forma

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4} R_0(X,Y)Z,$$

siendo R_0 es el tensor curvatura algebraico dado por $R_0 = R^0 + R^J$, donde

$$\begin{aligned}R^0(X,Y)Z &= g(X,Z)Y - g(Y,Z)X,\\ R^J(X,Y)Z &= g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ.\end{aligned}$$

En tal caso (M,g,J) es localmente isométrica a un espacio proyectivo paracomplejo si $c \neq 0$ o al espacio Euclídeo si $c = 0$ [16].

Observación 1.8. Toda variedad para-Kähler es de signatura neutra (n,n) por lo que la inversión de la métrica $g \mapsto -g$ conserva la signatura. En consecuencia, el signo de la curvatura seccional no es relevante en geometría paracompleja, puesto que la inversión invierte dicho signo.

A continuación definimos el tensor curvatura de Bochner de una variedad para-Kähler. Dicho tensor surge de forma natural en el estudio de la curvatura de variedades para-Kähler en un proceso análogo a la construcción del tensor curvatura de Weyl.

Definición 1.9. Se define el *tensor curvatura de Bochner* de tipo $(1,3)$ de una variedad para-Kähler (M^{2n},g,J) como

$$B(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{\tau}{(2n+2)(2n+4)} R_0(X,Y)Z - \frac{1}{2(n+2)} R_1(X,Y)Z \qquad (1.8)$$

para cualesquiera X,Y,Z campos de vectores en M, siendo $R_0 = R^0 + R^J$ y

$$\begin{aligned}R_1(X,Y)Z =& g(X,Z)\operatorname{Ric}(Y) - g(Y,Z)\operatorname{Ric}(X) + g(X,JZ)\operatorname{Ric}(JY)\\ &- g(Y,JZ)\operatorname{Ric}(JX) + 2g(X,JY)\operatorname{Ric}(JZ) + \rho(X,Z)Y\\ &- \rho(Y,Z)X + \rho(X,JZ)JY - \rho(Y,JZ)JX + 2\rho(X,JY)JZ\,.\end{aligned}$$

Diremos que una variedad para-Kähler (M,g,J) es *Bochner llana* si su tensor de Bochner es nulo. Esto es, si el tensor de curvatura está dado por

$$R(X,Y)Z = -\frac{\tau}{(2n+2)(2n+4)} R_0(X,Y)Z + \frac{1}{2(n+2)} R_1(X,Y)Z$$

Se sigue de forma inmediata de la expresión del tensor de curvatura de una variedad para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante que toda variedad para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante es Bochner llana. Además la expresión de los tensores curvatura algebraicos R_0 y R_1 así como la Definición 1.9 muestran que

Una variedad para-Kähler Bochner llana es de curvatura seccional paraholomorfa constante si y solo si es Einstein.

Aunque la condición de ser Bochner llana es, en cierto modo, un análogo a la condición de ser localmente conformemente llana, en muchas situaciones es más restrictiva; como muestra el siguiente resultado (véase [21] para una demostración).

Teorema 1.10. *Una variedad para-Kähler (M, g, J) Bochner llana tiene curvatura escalar constante si, y solo si, es localmente simétrica. Si además el operador de Ricci es diagonalizable, entonces la variedad tiene curvatura seccional paraholomorfa constante o es localmente isométrica a un producto de variedades para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa opuesta $M = M_1(c) \times M_2(-c)$.*

Observación 1.11. La curvatura seccional paraholomorfa de una variedad para-Kähler está definida sobre el fibrado tangente pseudo-esférico a la variedad (esto es, los vectores no nulos sobre M). Una cuestión natural es la posibilidad de extender con continuidad dicha definición a todo el fibrado tangente. Un proceso estándard de paso al límite muestra que una condición necesaria para la existencia de tal extensión es que se cumpla la siguiente propiedad de la curvatura:

$$R(U, JU, U, JU) = 0$$

para todo campo de vectores nulo U sobre M. Esta condición fue estudiada en [21], donde se muestra que

Una variedad para-Kähler (M, g, J) satisface la condición $R(U, JU, U, JU) = 0$ para todo campo de vectores nulo si, y solo si, el tensor de Bochner es cero.

Observación 1.12. Sea (g, J) una estructura para-Kähler sobre una variedad de dimensión cuatro y denotemos por $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$ la forma de Kähler asociada. Sea $\{u_1 = v_1, u_2 = Jv_1, u_3 = v_2, u_4 = Jv_2\}$ una base ortonormal de forma que $g(u_1, u_1) = g(u_3, u_3) = 1$. En esta base ortonormal la forma de Kähler se expresa como $\Omega = -(u^1 \wedge u^2 + u^3 \wedge u^4) = -(u^1 \wedge u^2 - \varepsilon_3\varepsilon_4 u^3 \wedge u^4)$, por lo que $\star\Omega = -\Omega$ y por tanto $\Omega \in \Lambda^2_-$ para la orientación determinada por la $2-$forma de Kähler $\Omega \wedge \Omega = 2u^1 \wedge u^2 \wedge u^3 \wedge u^4$, que coincide con la orientación determinada por la estructura paracompleja J.

La componente anti-auto-dual del tensor curvatura de Weyl de una variedad para-Kähler está completamente determinada por su curvatura escalar, ya que $W^- = \frac{\tau}{12}\,\mathrm{diag}[2, -1, -1]$, donde la forma de Kähler es un autovector para el autovalor distinguido. Por el contrario, la componente auto-dual del tensor curvatura de Weyl de una variedad para-Kähler está completamente determinado por el tensor de Bochner, de tal forma que $W^+ = 0$ si, y solo si, la variedad es Bochner llana [5]. Una consecuencia inmediata es que una variedad para-Kähler de dimensión cuatro es localmente conformemente llana si, y solo si, es Bochner llana y tiene curvatura escalar cero.

Capítulo 2

Métricas de Walker

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana y sea $\mathfrak{D}$ una distribución, es decir, un subfibrado regular del espacio tangente. Decimos que $\mathfrak{D}$ es una *distribución paralela* si $\nabla_X Y \in \mathfrak{D}$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y todo Y campo de vectores diferenciable en $\mathfrak{D}$. La distribución $\mathfrak{D}$ se dice *nula* (o *degenerada*) si $g(X, Y) = 0$ para cualesquiera X, Y campos de vectores diferenciables en $\mathfrak{D}$.

Es un hecho conocido que la existencia de una distribución paralela en una variedad Riemanniana da lugar a una descomposición local de de Rham como producto. Esta propiedad se mantiene en el caso pseudo-Riemanniano si la distribución paralela es no degenerada. El caso degenerado fue estudiado por Walker [22], obteniendo una forma canónica para la métrica. En base a esto, se dice que una variedad pseudo-Riemanniana es una *variedad de Walker* si admite una distribución nula y paralela $\mathfrak{D}$.

Las métricas de Walker dan lugar a muchas situaciones estrictamente pseudo-Riemannianas, como estructuras homogéneas pseudo-Riemannianas degeneradas, variedades estrictamente conformemente simétricas, métricas conformemente llanas con operador de Ricci nilpotente en dos pasos, hipersuperficies de Einstein en variedades con curvatura seccional constante y operador de configuración nilpotente, estructuras para-Kähler, etc. Para más información sobre la geometría de las métricas de Walker nos referimos a [4].

2.1. Métricas y coordenadas de Walker

En la situación más general, la existencia de coordenadas adaptadas de Walker viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.1. [22] *Sea (M, g) una variedad de Walker de dimensión n y sea $\mathfrak{D}$ una distribución r-dimensional nula y paralela. Entonces existe un sistema local de coordenadas adaptadas $(x^1, \ldots, x^{n-r}, x^{n-r+1}, \ldots, x^n)$ en M tales que el tensor métrico g es de la forma:*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & H & \mathrm{Id}_r \\ {}^tH & A & 0 \\ \mathrm{Id}_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde Id_r *es la matriz identidad de orden* r *y* A, B *y* H *son matrices cuyos coeficientes son funciones de las coordenadas cumpliendo:*

1. A *y* B *son matrices cuadradas simétricas de orden* $n-2r$ *y* r*, respectivamente,* H *es una matriz de orden* $r \times (n-2r)$ *y* ${}^tH$ *es su traspuesta.*

2. A *y* H *son independientes de las coordenadas* $(x^{n-r+1}, \ldots, x^n)$*.*

Además, la distribución nula y paralela r*-dimensional* $\mathfrak{D}$ *está localmente generada por los campos de vectores coordenados* $(\partial_{x^{n-r+1}}, \ldots, \partial_{x^n})$*.*

La forma canónica del teorema anterior es más sencilla si la distribución paralela tiene dimensión máxima y la variedad es de dimensión par $n = 2m$, pues en este caso existen coordenadas de Walker $(x^1, \ldots, x^m, x_{1'} \ldots, x_{m'})$ en las que la matriz de la métrica es de la forma

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & \mathrm{Id}_{\frac{n}{2}} \\ \mathrm{Id}_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

siendo B una matriz cuyas componentes son funciones de $(x^1, \ldots, x^m, x_{1'} \ldots, x_{m'})$.

Las métricas dadas por (2.1) son especialmente interesantes para el estudio que haremos en dimensión 4. En este caso los símbolos de Christoffel y el operador de curvatura vienen dados por los siguientes lemas:

Lema 2.2. [7] *Sea* $(M, g, \mathfrak{D})$ *una variedad de Walker de dimensión* $n = 2m$*, siendo* $\dim \mathfrak{D} = m$*. Entonces los símbolos de Christoffel no nulos están determinados, salvo simetría, por*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{k} &= -\tfrac{1}{2}\partial_{k'} g_{ij}, \\ \Gamma_{i'j}^{k'} &= \tfrac{1}{2}\partial_{i'} g_{jk}, \\ \Gamma_{ij}^{k'} &= \tfrac{1}{2}\left(-\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} + g_{ks}\partial_{s'} g_{ij}\right), \end{aligned}$$

donde sumamos en $1 \leq s \leq m$*.*

Lema 2.3. [7] *Sea* (M, g) *una variedad de Walker de dimensión par* $n = 2m$ *con distribución* m*-dimensional nula y paralela* $\mathfrak{D}$*. Las componentes no nulas del tensor de curvatura de tipo* $(1,3)$ *vienen dadas, salvo simetría, por:*

$$\begin{aligned} R_{ijk}^{h} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_j\partial_{h'} g_{ik} - \partial_i\partial_{h'} g_{jk}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\partial_{s'} g_{jk}\partial_{h'} g_{is} - \partial_{s'} g_{ik}\partial_{h'} g_{js}\right), \\ R_{ijk}^{h'} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_i\partial_k g_{jh} - \partial_i\partial_h g_{jk} + \partial_j\partial_h g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{ih}\right) \\ &\quad -\tfrac{1}{4}\left\{\partial_{s'} g_{jk}\left(\partial_h g_{is} - \partial_s g_{ih} - \partial_i g_{sh} - g_{ht}\partial_{t'} g_{is}\right)\right. \\ &\qquad - \partial_{s'} g_{ik}\left(\partial_h g_{js} - \partial_s g_{jh} - \partial_j g_{sh} - g_{ht}\partial_{t'} g_{js}\right) \\ &\qquad - \partial_{s'} g_{ih}\left(\partial_s g_{jk} - \partial_k g_{js} - \partial_j g_{ks} - g_{st}\partial_{t'} g_{jk}\right) \\ &\qquad + \partial_{s'} g_{jh}\left(\partial_s g_{ik} - \partial_k g_{is} - \partial_i g_{ks} - g_{st}\partial_{t'} g_{ik}\right) \\ &\qquad \left. +2\partial_i\left(g_{hs}\partial_{s'} g_{jk}\right) - 2\partial_j\left(g_{hs}\partial_{s'} g_{ik}\right)\right\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij'k}^{h} &= -\tfrac{1}{2}\partial_{j'}\partial_{h'}g_{ik}, \\
R_{ij'k}^{h'} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_h\partial_{j'}g_{ik} - \partial_k\partial_{j'}g_{ih}\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left(\partial_{s'}g_{ik}\partial_{j'}g_{sh} + \partial_{s'}g_{ih}\partial_{j'}g_{sk} - 2\partial_{j'}(g_{hs}\partial_{s'}g_{ik})\right), \\
R_{ijk'}^{h'} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_i\partial_{k'}g_{jh} - \partial_j\partial_{k'}g_{ih}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\partial_{k'}g_{js}\partial_{s'}g_{ih} - \partial_{k'}g_{is}\partial_{s'}g_{jh}\right), \\
R_{ij'k'}^{h'} &= \tfrac{1}{2}\partial_{j'}\partial_{k'}g_{ih},
\end{aligned}
$$

donde estamos sumando en $1 \leq s \leq m$ *y en* $1 \leq t \leq m$.

En general, el carácter paralelo de la distribución $\mathfrak{D}$ da lugar a que el tensor de curvatura de toda variedad de Walker satisfaga las siguientes condiciones:

$$R(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^{\perp}, \cdot, \cdot) = 0, \quad R(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \cdot, \cdot) = 0, \quad \text{y} \quad R(\mathfrak{D}^{\perp}, \mathfrak{D}^{\perp}, \mathfrak{D}, \cdot) = 0. \tag{2.2}$$

2.2. Métricas en el fibrado cotangente

Una clase particular de métricas de Walker son las conocidas como extensiones de Riemann. Estas métricas resultan interesantes porque permiten trasladar problemas desde la Geometría Afín a la Geometría pseudo-Riemanniana y viceversa. Al mismo tiempo son la estructura subyacente en un buen número de situaciones geométricas.

Antes de introducir las extensiones de Riemann, vamos a dar unas nociones básicas sobre la geometría del fibrado cotangente a una variedad.

2.2.1. Geometría del fibrado cotangente

Consideremos T^*M el fibrado cotangente a una variedad M de dimensión n y sea $\pi : T^*M \to M$ la proyección natural del fibrado cotangente en la variedad base. Un punto $\tilde{p} \in T^*M$ se expresa de la forma $\tilde{p} = (p, \omega)$, donde $p := \pi(\tilde{p}) \in M$ y $\omega \in T_p^*M$.

Si consideramos $(x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenadas locales en un entorno $\mathcal{U}$ de $p \in M$ podemos escribir

$$\omega = x_{i'}dx^i, \tag{2.3}$$

lo que nos permite definir un sistema local de coordenadas en $\tilde{\mathcal{U}} := \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset T^*M$ de la forma

$$(x^1, \ldots, x^n; x_{1'}, \ldots, x_{n'}). \tag{2.4}$$

Así, la *estructura simpléctica* canónica en el fibrado cotangente está dada en términos de un sistema local de coordenadas por:

$$\Omega := d\omega = dx_{i'} \wedge dx^i. \tag{2.5}$$

Es fácil comprobar que Ω es una forma cerrada ($d\Omega = 0$) y $\Omega^n \neq 0$.

Consideremos ahora un campo de vectores X en M. Se define su *aplicación evaluación* ιX como la función diferenciable en el fibrado cotangente T^*M dada por la igualdad

$$\iota X(p, \omega) = \omega(X_p).$$

Si escribimos $X = X^i \partial_{x^i}$, donde los coeficientes $X^i = dx^i(X)$, entonces tenemos

$$\iota X(x^i, x_{i'}) = x_{i'} X^i .$$

La relevancia de la aplicación evaluación reside en el hecho de que los campos de vectores en T^*M están determinados por cómo actúan sobre las aplicaciones evaluación ιX. Así, dos campos de vectores $\tilde{Y}, \tilde{Z}$ en T^*M son iguales si, y solo si, $\tilde{Y}(\iota X) = \tilde{Z}(\iota X)$ para todo campo de vectores X en M. Teniendo esto en cuenta, se define el *levantamiento completo* X^C de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ como el campo de vectores en T^*M caracterizado por la identidad

$$X^C(\iota Z) = \iota\,[X, Z]\,, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

El espacio tangente a T^*M en cada punto (p, ω) está generado por los levantamientos completos de todos los campos de vectores diferenciables sobre M, que también caracterizan los campos de tensores de tipo $(0, s)$. De hecho, dos campos de tensores de tipo $(0, s)$, $\tilde{S}$ y $\tilde{T}$, son iguales si, y solo si,

$$\tilde{T}(X_1^C, \ldots, X_s^C) = \tilde{S}(X_1^C, \ldots, X_s^C)$$

para cualesquiera campos de vectres $X_1, \ldots, X_s$ en M. Teniendo esto en cuenta, se prueba que la 2-forma $\Omega = dx_{i'} \wedge dx^i$ de la ecuación (2.5) no depende del sistema local de coordenadas considerado y se comprueba fácilmente que Ω está caracterizada por la identidad

$$\Omega(X^C, Y^C) = \iota\,[X, Y]\,. \tag{2.6}$$

Ahora, si T es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ en M, es decir, un endomorfismo del fibrado tangente a la variedad, definimos una 1-forma diferenciable ιT en T^*M caracterizada por la identidad

$$\iota T(X^C) = \iota(TX). \tag{2.7}$$

En las coordenadas inducidas en T^*M se tiene que $\iota T = x_{k'} T_i^k dx^i$.

2.2.2. Extensiones de Riemann

La construcción de este tipo de variedades define una métrica de Walker en el fibrado cotangente T^*M a una variedad afín (M, D). Estas métricas juegan un papel importante en el estudio de ciertos problemas de curvatura.

Consideremos ahora una conexión libre de torsión D en M. El fibrado cotangente T^*M puede dotarse de una métrica pseudo-Riemanniana g_D de signatura neutra (n, n) que viene caracterizada por la identidad

$$g_D(X^C, Y^C) = -\iota(D_X Y + D_Y X),$$

donde X^C, Y^C son los levantamientos completos a T^*M de campos de vectores X, Y en M. Esta métrica recibe el nombre de *extensión de Riemann*. En el sistema de coordenadas inducido $(x^i, x_{i'})$ en T^*M, la extensión de Riemann se expresa de la forma

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k & \mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

con respecto a $\{\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}, \partial_{x_{1'}}, \ldots, \partial_{x_{n'}}\}$. Aquí los índices i y j se mueven en el rango $1, \ldots, n$, $i' = i + n$ y Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la conexión D respecto a las coordenadas (x^i) en M.

La extensión de Riemann es una clase particular de métrica de Walker donde la distribución nula paralela $\mathfrak{D}$ tiene dimensión máxima y viene dada por $\mathfrak{D} = \ker \pi_*$. Como ya hemos mencionado, las extensiones de Riemann proporcionan una conexión entre Geometría Afín y Geometría de Riemann, de modo que algunas propiedades de la conexión afín D se pueden estudiar a través de las correspondientes propiedades de la extensión de Riemann g_D. Por ejemplo, D es proyectivamente llana (i.e., (M, D) tiene las mismas geodésicas que el espacio Euclídeo, salvo parametrizaciones) si, y solo si, g_D es localmente conformemente llana.

Observación 2.4. Si la conexión D en M es la conexión de Levi-Civita de una métrica g en la variedad, entonces los isomorfismos musicales son isometrías entre (T^*M, g_D) y (TM, g^C), donde g^C es el levantamiento completo de la métrica g al fibrado tangente [9].

2.2.3. Extensiones de Riemann deformadas

Vamos a considerar ahora una ligera generalización de las extensiones de Riemann. Sea (M, D) una variedad afín de dimensión n y sea Φ un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ en M. El fibrado cotangente T^*M puede dotarse de una métrica pseudo-Riemanniana $g_{D,\Phi}$ de signatura neutra (n, n), que recibe el nombre de *extensión de Riemann deformada* y está dada por

$$\begin{aligned} g_{D,\Phi}(X^C, Y^C) &= g_D + \pi^*\Phi \\ &= -\iota(D_X Y + D_Y X) + \pi^*\Phi, \end{aligned}$$

donde X^C, Y^C son los levantamientos completos de campos de vectores en M a T^*M.

De forma similar a las extensiones de Riemann, las extensiones de Riemann deformadas pueden expresarse en un sistema de coordenadas inducido $(x^i, x_{i'})$ en T^*M como

$$g_{D,\Phi} = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k + \Phi_{ij} & \mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Interesa disponer de un criterio que permita caracterizar las extensiones de Riemann deformadas entre las variedades de Walker. Si se particulariza el estudio del tensor de curvatura a las extensiones de Riemann, se observa que se anula sobre la distribución nula paralela, $R(\cdot, \mathfrak{D})\mathfrak{D} = 0$, y se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.5. [2] *Sea (M,g) una variedad de Walker y $\mathfrak{D}$ su distribución nula paralela. Entonces g se corresponde con la extensión de Riemann deformada de una variedad afín si, y solo si,*

$$R(\cdot,\mathfrak{D})\mathfrak{D}=0 \tag{2.10}$$

Además, toda extensión de Riemann deformada tiene curvatura escalar nula y operador de Ricci nilpotente, por lo que una extensión de Riemann deformada es Einstein si, y solo si, es Ricci llana.

2.2.4. Extensiones de Riemann modificadas

Para terminar, vamos a introducir una nueva generalización de las extensiones de Riemann, las llamadas extensiones de Riemann modificadas.

Sea Φ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ en M y sean T,S campos de tensores de tipo $(1,1)$ en M. La *extensión de Riemann modificada* es la métrica de signatura neutra definida en T^*M por

$$\begin{aligned} g_{D,\Phi,T,S} &= \iota T\circ\iota S+g_{D,\Phi} \\ &= \iota T\circ\iota S+g_D+\pi^*\Phi \end{aligned}$$

donde $\circ$ denota el producto simétrico, definido por $\xi_1\circ\xi_2:=\frac{1}{2}(\xi_1\otimes\xi_2+\xi_2\otimes\xi_1)$.

En un sistema local de coordenadas la extensión de Riemann modificada se expresa

$$g_{D,\Phi,T,S}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{r'}x_{s'}\left(T_i^r\,S_j^s+T_j^r\,S_i^s\right)-2x_{k'}\Gamma_{ij}^k+\Phi_{ij} & \mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

El caso particular en que $T=c\,\mathrm{Id}$ y $S=\mathrm{Id}$ se denota $g_{D,\Phi,c}$. Estas métricas son de Walker en T^*M donde el tensor $B_{ij}(x^1,\dots,x^n,x_{1'},\dots,x_{n'})$ de la ecuación (2.1) es una función cuadrática en las coordenadas de la fibra $x_{i'}$ (y afín si $c=0$). La distribución nula y paralela viene dada por $\mathfrak{D}=\ker\pi_*$ y la curvatura escalar es un múltiplo (que depende de la dimensión de la variedad) del parámetro c.

Las extensiones de Riemann modificadas se caracterizan entre las variedades de Walker en términos de la derivada covariante de la curvatura mediante $\nabla_{\mathfrak{D}}R(\cdot,\mathfrak{D})\mathfrak{D}=0$ (ver [2]). Como consecuencia, una variedad de Walker de dimensión par que admite una distribución nula y paralela de dimensión máxima es localmente simétrica si, y solo si, es una extensión de Riemann modificada.

Además, las extensiones de Riemann modificadas resultan ser una fuente de ejemplos de variedades Einstein.

Teorema 2.6. *La extensión de Riemann modificada $g_{D,\Phi,c}$ en el fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una variedad afín (Σ,D) de dimensión n es Einstein si, y solo si, $\Phi=\frac{4}{c(n-1)}\rho_D^{sim}$, para $c\neq 0$.*

Un caso especial de la construcción anterior ocurre cuando la variedad afín (M,D) es llana. En tal caso el fibrado cotangente no solo es Einstein, sino que resulta ser una variedad para-Kähler de curvatura paraholomorfa constante:

Teorema 2.7. *Sea (M, g, J) una variedad para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante $H = c \neq 0$. Entonces es localmente isométrica al fibrado cotangente a una variedad afín llana con métrica $g = c\iota \operatorname{Id} \circ \iota \operatorname{Id} + g_D$.*

2.3. Métricas de Walker auto-duales en dimensión 4

Hemos visto que las variedades de Walker que admiten una distribución nula paralela de dimensión máxima $\frac{n}{2}$ son de especial interés. Como la dimensión de una distribución nula es $r \leq \frac{n}{2}$, el caso de menor dimensión posible es aquel de variedades 4-dimensionales de signatura neutra que admiten una distribución 2-dimensional nula y paralela. En esta situación tomaremos coordenadas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ y escribiremos la métrica dada por la ecuación (2.1) como

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

donde $g_{11}, g_{12},$ y g_{22} son funciones de las coordenadas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$.

Observación 2.8. La existencia de una distribución nula 2-dimensional en una variedad de dimensión cuatro induce una orientación natural en ella. Sea $(M, g, \mathcal{D})$ una variedad de signatura $(2, 2)$ equipada con una distribución degenerada (aunque no necesariamente paralela). Sea $p \in M$ y denotemos con $\{u, v\}$ una base arbitraria de $\mathcal{D}_p$. Denotando con $u^*, v^* \in T_p^*M$ los elementos duales de u, v, se tiene que $\star(u^* \wedge v^*) = \pm(u^* \wedge v^*)$. En consecuencia, fijaremos la orientación de $(M, g, \mathcal{D})$ determinada por la condición de que $u^* \wedge v^*$ sea auto-dual.

En la notación de la Ecuación (2.12) considerando coordenadas locales $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$, el elemento de volumen $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx_{1'} \wedge dx_{2'}$ induce la misma orientación que la determinada por la distribución degenerada $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{\partial_{x_{1'}}, \partial_{x_{2'}}\}$, ya que $\star(dx_{1'} \wedge dx_{2'}) = dx_{1'} \wedge dx_{2'}$.

Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la referencia local ortonormal definida por

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_{x^1} + \tfrac{1}{2}(1 - g_{11})\partial_{x^3}, & e_2 &= \partial_{x^2} - g_{12}\partial_{x^3} + \tfrac{1}{2}(1 - g_{22})\partial_{x^4}, \\ e_3 &= \partial_{x^1} - \tfrac{1}{2}(1 + g_{11})\partial_{x^3}, & e_4 &= \partial_{x^2} - g_{12}\partial_{x^3} - \tfrac{1}{2}(1 + g_{22})\partial_{x^4}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Un cálculo sencillo muestra que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ está positivamente orientada para la orientación de Walker y, además, que la signatura es $(++--)$.

Una métrica de Walker en dimensión cuatro es auto-dual si, y solo si, la métrica dada en (2.12) en coordenadas de Walker $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ toma la forma

$$\begin{aligned} g_{11}(x^1,x^2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{1'}^3\mathcal{A}+x_{1'}^2\mathcal{B}+x_{1'}^2x_{2'}\mathcal{C}+x_{1'}x_{2'}\mathcal{D}+x_{1'}P+x_{2'}Q+\xi,\\ g_{22}(x^1,x^2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{2'}^3\mathcal{C}+x_{2'}^2\mathcal{E}+x_{1'}x_{2'}^2\mathcal{A}+x_{1'}x_{2'}\mathcal{F}+x_{1'}S+x_{2'}T+\eta,\\ g_{12}(x^1,x^2,x_{1'},x_{2'}) &= \tfrac{1}{2}x_{1'}^2\mathcal{F}+\tfrac{1}{2}x_{2'}^2\mathcal{D}+x_{1'}^2x_{2'}\mathcal{A}+x_{1'}x_{2'}^2\mathcal{C}+\tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B}+\mathcal{E})\\ &\quad +x_{1'}U+x_{2'}V+\gamma, \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde los coeficientes son funciones diferenciables de las coordenadas (x^1, x^2).

Una descripción local de las métricas de Walker auto-duales se obtuvo en [15] y, más recientemente, en [7] se prueba que las métricas de la ecuación (2.14) son realizables en el fibrado cotangente de una superficie afín Σ mediante una generalización de las extensiones de Riemann deformadas como sigue.

Teorema 2.9. *Una variedad de Walker de dimensión cuatro es auto-dual si, y solo si, es localmente isométrica al fibrado cotangente $T^*\Sigma$ de una superficie afín (Σ, D) con un tensor métrico*

$$g = \iota X(\iota \mathrm{Id} \circ \iota \mathrm{Id}) + \iota \mathrm{Id} \circ \iota T + g_D + \pi^*\Phi$$

donde X, T, D y Φ son un campo de vectores, un campo de tensores de tipo $(1,1)$, una conexión afín libre de torsión y un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ en Σ, respectivamente.

Demostración. Sea $X = \mathcal{A}(x^1,x^2)\partial_{x^1} + \mathcal{C}(x^1,x^2)\partial_{x^2}$ un campo de vectores definido localmente en Σ de modo que define una función ιX en $T^*\Sigma$ de la forma

$$\iota X = x_{1'}\mathcal{A}(x^1,x^2) + x_{2'}\mathcal{C}(x^1,x^2).$$

Así,

$$\begin{aligned} (\iota X \cdot \iota \mathrm{Id} \circ \iota \mathrm{Id})_{11} &= x_{1'}^3\mathcal{A}(x^1,x^2) + x_{1'}^2x_{2'}\mathcal{C}(x^1,x^2),\\ (\iota X \cdot \iota \mathrm{Id} \circ \iota \mathrm{Id})_{12} &= x_{1'}^2x_{2'}\mathcal{A}(x^1,x^2) + x_{1'}x_{2'}^2\mathcal{C}(x^1,x^2),\\ (\iota X \cdot \iota \mathrm{Id} \circ \iota \mathrm{Id})_{22} &= x_{1'}x_{2'}^2\mathcal{A}(x^1,x^2) + x_{2'}^3\mathcal{C}(x^1,x^2). \end{aligned}$$

Si ahora definimos localmente un campo de tensores de tipo $(1,1)$, T, en Σ con componentes,

$$T_1^1 = \mathcal{B}(x^1,x^2), \quad T_1^2 = \mathcal{D}(x^1,x^2), \quad T_2^1 = \mathcal{F}(x^1,x^2), \quad T_2^2 = \mathcal{E}(x^1,x^2);$$

la acción de ι sobre T nos proporciona una 1-forma ιT en $T^*\Sigma$ con componentes

$$\begin{aligned} (\iota T)_1 &= x_{1'}\mathcal{B}(x^1,x^2) + x_{2'}\mathcal{D}(x^1,x^2),\\ (\iota T)_2 &= x_{1'}\mathcal{F}(x^1,x^2) + x_{2'}\mathcal{E}(x^1,x^2), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$
\begin{aligned}
(\iota T \circ \iota \mathrm{Id})_{11} &= x_{1'}^2 \mathcal{B}(x^1, x^2) + x_{1'} x_{2'} \mathcal{D}(x^1, x^2), \\
(\iota T \circ \iota \mathrm{Id})_{12} &= \frac{1}{2} \left(x_{1'}^2 \mathcal{F}(x^1, x^2) + x_{2'}^2 \mathcal{D}(x^1, x^2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} x_{1'} x_{2'} \left(\mathcal{B}(x^1, x^2) + \mathcal{E}(x^1, x^2) \right), \\
(\iota T \circ \iota \mathrm{Id})_{22} &= x_{1'} x_{2'} \mathcal{F}(x^1, x^2) + x_{2'}^2 \mathcal{E}(x^1, x^2).
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora la conexión afín definida localmente por los símbolos de Christoffel

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} P(x^1, x^2), & \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{2} U(x^1, x^2), & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} S(x^1, x^2) \\
\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} Q(x^1, x^2), & \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2} V(x^1, x^2), & \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2} T(x^1, x^2).
\end{array}
$$

y el campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ dado localmente por

$$
\Phi_{11} = \xi(x^1, x^2), \quad \Phi_{12} = \gamma(x^1, x^2), \quad \Phi_{22} = \eta(x^1, x^2).
$$

Ahora el resultado se sigue de la ecuación (2.14). $\square$

Observación 2.10. Sea (M, g) una variedad de Walker auto-dual como en el Teorema 2.9. Entonces un cálculo directo muestra que las curvaturas de Ricci vienen dadas por

$$
\lambda_{\pm} = \frac{1}{4} \left(3\,\mathrm{tr}(T) + 12\iota(X) \pm 2\sqrt{\mathrm{tr}(T)^2 - 4\det(T) + 4\iota(X)^2 + 4\iota(TX) + 4\iota(KX)} \right)
$$

donde K es el campo de tensores de tipo $(1,1)$ en Σ dado por $K = T - \mathrm{tr}(T)\,\mathrm{Id}$. Así, la curvatura escalar cumple que $\tau = 3\,\mathrm{tr}(T) + 12\iota(X)$.

El siguiente resultado caracteriza las estructuras Walker auto-duales de Einstein [7].

Teorema 2.11. *Sea (M, g) una métrica de Walker auto-dual. Entonces es Einstein si, y solo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(1) (M, g) tiene curvatura escalar $\tau \neq 0$ si, y solo si, es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) con métrica

$$
g = \frac{\tau}{6} \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \frac{24}{\tau} \pi^* \Phi,
$$

donde $\Phi = \rho_{sim}^D$, para cualquier conexión D en Σ.

(2) (M, g) tiene curvatura escalar $\tau = 0$ si, y solo si, es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) con métrica

$$
g = g_D + \pi^* \Phi,
$$

donde Φ es un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ arbitrario y D es una conexión en Σ con tensor de Ricci antisimétrico ($\rho^D = \rho_{ant}^D$).

Observación 2.12. Toda métrica de Walker Einstein auto-dual se corresponde con la construcción en el Teorema 2.9, donde el campo de tensores $T = \frac{\tau}{6}\,\mathrm{Id}$ en el Teorema 2.11-(1) y $T = 0$ en Teorema 2.11-(2). La existencia de métricas de Einstein con curvatura escalar $\tau \neq 0$ no impone ninguna restricción en la varidad afín (Σ, D), tan solo en el campo de tensores simétrico Φ. En contraposición, las métricas de Einstein con $\tau = 0$ no imponen ninguna restricción sobre Φ, pero sí sobre la estructura afín (Σ, D).

Una superficie afín tiene tensor de Ricci antisimétrico (y no nulo) si, y solo si, existen coordenadas locales (x^1, x^2) sobre Σ donde los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\Gamma_{11}^1 = -\partial_1\varphi, \qquad \Gamma_{22}^2 = \partial_2\varphi$$

para alguna función φ definida localmente sobre Σ de tal forma que $\partial_{12}\varphi \neq 0$ [14].

Observación 2.13. Sea $\pi : T^*M \to M$ la proyección canónica del fibrado cotangente sobre la variedad base. Considerando la aplicación diferencial $d\pi : T(T^*M) \to TM$, en cada punto $\xi = (p, \eta) \in T^*M$, se tiene que $d\pi_\xi : T_\xi(T^*M) \to T_pM$ y, por tanto, la composición $\eta \circ d\pi_\xi : T_\xi(T^*M) \to \mathbb{R}$ define una 1-forma canónica sobre T^*M. Su diferencial da lugar a una 2-forma cerrada, que es la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente. En coordenadas adaptadas la 1-forma se expresa como $\theta = x_{k'}dx^k$ y así su diferencial resulta $d\theta = dx_{k'} \wedge dx^k$.

Sea Σ una superficie con coordenadas locales (x^1, x^2) y consideremos en $T^*\Sigma$ las coordenadas inducidas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$. La estructura simpléctica canónica de $T^*\Sigma$ da lugar a una orientación determinada por la forma de volumen $d\theta \wedge d\theta = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx_{1'} \wedge dx_{2'}$, que es la opuesta a la orientación determinada por la estructura de Walker determinada por $\mathcal{D} = \ker \pi_*$.

Capítulo 3

Métricas para-Kähler Bochner llanas

3.1. Expresión local de la estructura para-Kähler

Sea M una variedad diferenciable de dimensión cuatro. Como se mencionó en el Capítulo 1, la estructura subyacente a una variedad para-Kähler es la de una variedad de Walker. Partiendo de este hecho, consideremos en M una métrica de Walker

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde $g_{11}, g_{12},$ y g_{22} son funciones de las coordenadas de Walker $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$. Dotaremos a (M, g) de una estructura casi para-Hermítica J con $\mathfrak{D} = \ker(J - Id) = \operatorname{span}\left\{\partial_{x_{1'}}, \partial_{x_{2'}}\right\}$. Por comodidad, en lo que sigue denotaremos $\partial_{x_{1'}}$ y $\partial_{x_{2'}}$ por ∂_3 y ∂_4, respectivamente.

Partiendo de que $J\partial_3 = \partial_3$ y $J\partial_4 = \partial_4$, escribimos

$$J\partial_1 = \alpha\partial_1 + \beta\partial_2 + \gamma\partial_3 + \delta\partial_4,$$
$$J\partial_2 = \alpha'\partial_1 + \beta'\partial_2 + \gamma'\partial_3 + \delta'\partial_4.$$

Teniendo en cuenta que J ha de cumplir que $J^2 = \mathrm{Id}$ y $g(JX, JY) = -g(X, Y)$, obtenemos una serie de ecuaciones que nos permiten determinar los coeficientes de las expresiones anteriores de manera que

$$J\partial_1 = -\partial_1 + g_{11}\partial_3 + f\partial_4,$$
$$J\partial_2 = -\partial_2 + (2g_{12} - f)\partial_3 + g_{22}\partial_4.$$

Obtenemos así una familia J_f de estructuras casi para-Hermíticas dada por

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ g_{11} & 2g_{12} - f & 1 & 0 \\ f & g_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

donde f es una función de las coordenadas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$.

Observación 3.1. Considerando las estructuras casi para-Hermíticas (g, J_f) determinadas por las expresiones (3.1) y (3.2), las formas de Kähler asociadas $\Omega_f(X,Y) = g(J_f X, Y)$ se expresan en coordenadas adaptadas como

$$\Omega_f = (f - g_{12})dx^1 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4.$$

Por tanto, la orientación inducida por tales estructuras, y determinada por la forma de volumen $\Omega_f \wedge \Omega_f = -2dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ coincide con la orientación canónica de $T^*\Sigma$ y es, por tanto, la opuesta a la orientación determinada por la estructura de Walker $\mathcal{D} = \ker \pi_*$, como se señala en la Observación 2.13.

Como la 2-forma de Kähler Ω_f es anti-auto-dual para la orientación determinada por el elemento de volumen $\Omega_f \wedge \Omega_f$ (véase la Observación 1.12), entonces resulta auto-dual para la orientación determinada por la estructura de Walker.

Nuestro objetivo ahora es estudiar bajo qué condiciones la variedad (M, g, J_f) es para-Kähler, es decir, en qué casos la estructura J_f satisface $\nabla J_f = 0$.

Para la familia de estructuras casi para-Hermíticas que acabamos de construir, se tiene que las componentes no nulas de ∇J_f vienen dadas por

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_1} J_f)\,\partial_1 &= \tfrac{1}{2}\{-g_{22}\partial_4 g_{11} - 2g_{12}\partial_3 g_{11} \\
&\quad + f\,(\partial_4 g_{12} + \partial_3 g_{11}) + g_{11}\partial_3 g_{12} + 2\partial_2 g_{11} + 2\partial_1 f - 4\partial_1 g_{12}\}\,\partial_4 \\
(\nabla_{\partial_1} J_f)\,\partial_2 &= \tfrac{1}{2}\{g_{22}\partial_4 g_{11} + 2g_{12}\partial_3 g_{11} \\
&\quad - f\,(\partial_4 g_{12} + \partial_3 g_{11}) - g_{11}\partial_3 g_{12} - 2\partial_2 g_{11} - 2\partial_1 f + 4\partial_1 g_{12}\}\,\partial_3 \\
(\nabla_{\partial_2} J_f)\,\partial_1 &= \tfrac{1}{2}\{-g_{22}\partial_4 g_{12} - 2g_{12}\partial_3 g_{12} + f\,(\partial_4 g_{22} + \partial_3 g_{12}) + g_{11}\partial_3 g_{22} + 2\partial_2 f - 2\partial_1 g_{22}\}\,\partial_4 \\
(\nabla_{\partial_2} J_f)\,\partial_2 &= \tfrac{1}{2}\{g_{22}\partial_4 g_{12} + 2g_{12}\partial_3 g_{12} - f\,(\partial_4 g_{22} + \partial_3 g_{12}) - g_{11}\partial_3 g_{22} - 2\partial_2 f + 2\partial_1 g_{22}\}\,\partial_3 \\
(\nabla_{\partial_3} J_f)\,\partial_1 &= \partial_3\{f - g_{12}\}\,\partial_4 \\
(\nabla_{\partial_3} J_f)\,\partial_2 &= \partial_3\{g_{12} - f\}\,\partial_3 \\
(\nabla_{\partial_4} J_f)\,\partial_1 &= \partial_4\{f - g_{12}\}\,\partial_4 \\
(\nabla_{\partial_4} J_f)\,\partial_2 &= \partial_4\{g_{12} - f\}\,\partial_3.
\end{aligned}$$

Si imponemos las condiciones $\nabla_{\partial_3} J = 0$ y $\nabla_{\partial_4} J = 0$ obtenemos que

$$f(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'}) = g_{12}(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'}) + h(x^1, x^2),$$

por lo que en lo que sigue consideraremos la familia de estructuras casi para-Hermíticas en $T^*\Sigma$ dada por

$$J_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} - h & 1 & 0 \\ g_{12} + h & g_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

donde $h \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. De este modo, las componentes no nulas de ∇J_h se reducen a

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_1} J_h)\,\partial_1 &= \tfrac{1}{2}\{2\partial_1 h - g_{22}\partial_4 g_{11} + (h+g_{12})\,\partial_4 g_{12} \\
&\quad -2g_{12}\partial_3 g_{11} + (h+g_{12})\,\partial_3 g_{11} + g_{11}\partial_3 g_{12} + 2\partial_2 g_{11} - 2\partial_1 g_{12}\}\,\partial_4,\\
(\nabla_{\partial_1} J_h)\,\partial_2 &= \tfrac{1}{2}\{-2\partial_1 h + g_{22}\partial_4 g_{11} - (h+g_{12})\,\partial_4 g_{12} \\
&\quad +2g_{12}\partial_3 g_{11} - (h+g_{12})\,\partial_3 g_{11} - g_{11}\partial_3 g_{12} - 2\partial_2 g_{11} + 2\partial_1 g_{12}\}\,\partial_3,\\
(\nabla_{\partial_2} J_h)\,\partial_1 &= \tfrac{1}{2}\{2\partial_2 h - g_{22}\partial_4 g_{12} + (h+g_{12})\,\partial_4 g_{22} \\
&\quad -2g_{12}\partial_3 g_{12} + (h+g_{12})\,\partial_3 g_{12} + g_{11}\partial_3 g_{22} + 2\partial_2 g_{12} - 2\partial_1 g_{22}\}\,\partial_4,\\
(\nabla_{\partial_2} J_h)\,\partial_2 &= \tfrac{1}{2}\{-2\partial_2 h + g_{22}\partial_4 g_{12} - (h+g_{12})\,\partial_4 g_{22} \\
&\quad +2g_{12}\partial_3 g_{12} - (h+g_{12})\,\partial_3 g_{12} - g_{11}\partial_3 g_{22} - 2\partial_2 g_{12} + 2\partial_1 g_{22}\}\,\partial_3.
\end{aligned}$$

Debido a las simetrías que se aprecian entre ellas, podemos reducir nuestro estudio a comprobar bajo qué condiciones se anulan $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ y $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$, donde estamos escribiendo $(\nabla_{\partial_i} J_h)\partial_j = (\nabla J_h)_{j;i}{}^k\,\partial_k$.

Los argumentos anteriores se resumen en el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea (M, g, J) una superficie para-Kähler. Entonces existen coordenadas locales $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ donde la métrica y la estructura paracompleja se expresan como*

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12}-h & 1 & 0 \\ g_{12}+h & g_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

para alguna función $h(x^1, x^2)$ que cumpla las ecuaciones

$$\begin{aligned}
2\partial_1 h &= g_{22}\partial_4 g_{11} - (h+g_{12})\,\partial_4 g_{12} + 2g_{12}\partial_3 g_{11} - (h+g_{12})\,\partial_3 g_{11} - g_{11}\partial_3 g_{12} - 2\partial_2 g_{11} + 2\partial_1 g_{12},\\
2\partial_2 h &= g_{22}\partial_4 g_{12} - (h+g_{12})\,\partial_4 g_{22} + 2g_{12}\partial_3 g_{12} - (h+g_{12})\,\partial_3 g_{12} - g_{11}\partial_3 g_{22} - 2\partial_2 g_{12} + 2\partial_1 g_{22}.
\end{aligned}$$

Observación 3.3. Sea (g, J_f) una estructura casi para-Hermítica sobre una métrica de Walker determinada por (3.1) y (3.2). Entonces la forma de Kähler $\Omega_f(X,Y) = g(J_f X, Y)$ se expresa como

$$\Omega_f = (f - g_{12})dx^1 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4.$$

Por tanto

$$d\Omega_f = \partial_3\,(f - g_{12})\,dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \partial_4\,(f - g_{12})\,dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2,$$

y así todas las estructuras dadas por (3.4) son simplécticas, i.e., almost para-Kähler.

3.2. Expresión local de métricas para-Kähler Bochner llanas

Una superficie para-Kähler (M, g, J) es Bochner llana si, y solo si, la componente auto-dual del tensor de Weyl, W^+, es nula [5]. Como la orientación de la estructura para-Kähler en el Teorema 3.2 es la opuesta de la orientación de Walker, tal condición es equivalente a que la estructura de Walker sea auto-dual. En el capítulo anterior se mostró la expresión local de las métricas de Walker auto-duales, por lo que utilizando la notación del Teorema 2.9 y la Ecuación (2.14) se tiene que las componentes no nulas de ∇J_h vienen dadas por

$$\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 ={}& x_{1'}^3\,\{T_2^1T_2^2 + T_1^1T_2^1 + 8X^1\Gamma_{12}^1 + 8X^2\Gamma_{22}^1 + 8\partial_2X^1\} + x_{1'}^2x_{2'}\,\{(T_2^2)^2 - (T_1^1)^2 \\
&+ 8X^1\Gamma_{12}^2 - 8X^1\Gamma_{11}^1 + 8X^2\Gamma_{22}^2 - 8X^2\Gamma_{12}^1 - 8\partial_1X^1 + 8\partial_2X^2\} + x_{1'}x_{2'}^2\,\{-T_1^1T_1^2 \\
&- T_1^2T_2^2 - 8X^1\Gamma_{11}^2 - 8X^2\Gamma_{12}^2 - 8\partial_1X^2\} + x_{1'}^2\,\{-4T_2^1\Gamma_{11}^1 - 4T_2^2\Gamma_{12}^1 + 16hX^1 \\
&- 4T_2^1\Gamma_{12}^2 + 8T_1^2\Gamma_{22}^1 - 8X^1\Phi_{12} + 4T_1^1\Gamma_{12}^1 - 4X^2\Phi_{22} + 8\partial_2T_1^1 - 4\partial_1T_2^1\} \\
&+ x_{1'}x_{2'}\,\{-8T_1^2\Gamma_{12}^1 + 8T_1^1\Gamma_{12}^2 - 8T_2^2\Gamma_{12}^2 + 8T_1^2\Gamma_{22}^2 + 16hX^2 + 8X^1\Phi_{11} + 8\partial_2T_1^2 \\
&-4\partial_1T_1^1 - 4\partial_1T_2^2\} + x_{2'}^2\,\{4T_1^2\Gamma_{11}^1 + 4T_2^2\Gamma_{11}^2 - 4T_1^2\Gamma_{12}^2 + 4X^2\Phi_{11} - 4T_1^1\Gamma_{11}^2 - 4\partial_1T_1^2\} \\
&+ x_{1'}\,\{10hT_1^1 + 2hT_2^2 + 16\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - 16\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + 4T_2^1\Phi_{11} + 2T_2^2\Phi_{12} - 6T_1^1\Phi_{12} \\
&-4T_1^2\Phi_{22} - 16\partial_2\Gamma_{11}^1 + 16\partial_1\Gamma_{12}^1\} + x_{2'}\,\{16\Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 + 8hT_1^2 - 16\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + 16(\Gamma_{12}^2)^2 \\
&- 16\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + 2T_2^2\Phi_{11} + 2T_1^1\Phi_{11} - 16\partial_2\Gamma_{11}^2 + 16\partial_1\Gamma_{12}^2\} \\
&+ 8\,\{-h\Gamma_{11}^1 - h\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1\Phi_{11} + \Gamma_{11}^1\Phi_{12} - \Gamma_{12}^2\Phi_{12} + \Gamma_{11}^2\Phi_{22} + \partial_2\Phi_{11} + \partial_1h - \partial_1\Phi_{12}\}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 ={}& x_{2'}^3\,\{-T_1^2T_2^2 - 8X^1\Gamma_{11}^2 - 8X^2\Gamma_{12}^2 - T_1^1T_1^2 - 8\partial_1X^2\} + x_{1'}^2x_{2'}\,\{T_2^1T_2^2 + 8X^1\Gamma_{12}^1 \\
&+ 8X^2\Gamma_{22}^1 + T_1^1T_2^1 + 8\partial_2X^1\} + x_{1'}x_{2'}^2\,\{(T_2^2)^2 - (T_1^1)^2 - 8X^1\Gamma_{11}^1 - 8X^2\Gamma_{12}^1 \\
&+ 8X^1\Gamma_{12}^2 + 8X^2\Gamma_{22}^2 - 8\partial_1X^1 + 8\partial_2X^2\} + x_{1'}^2\,\{4T_2^1\Gamma_{12}^1 + 4T_2^2\Gamma_{22}^1 - 4T_2^1\Gamma_{22}^2 \\
&- 4X^1\Phi_{22} - 4T_1^1\Gamma_{22}^1 + 4\partial_2T_2^1\} + x_{1'}x_{2'}\,\{-8T_2^1\Gamma_{11}^1 - 8T_2^2\Gamma_{12}^1 + 8T_2^1\Gamma_{12}^2 + 16hX^1 \\
&- 8X^2\Phi_{22} + 8T_1^1\Gamma_{12}^1 - 8\partial_1T_2^1 + 4\partial_2T_1^1 + 4\partial_2T_2^2\} + x_{2'}^2\,\{-8T_2^1\Gamma_{11}^2 + 4T_1^2\Gamma_{12}^1 \\
&- 4T_2^2\Gamma_{12}^2 + 16hX^2 + 4T_1^2\Gamma_{22}^2 + 4X^1\Phi_{11} + 8X^2\Phi_{12} + 4T_1^1\Gamma_{12}^2 + 4\partial_2T_1^2 - 8\partial_1T_2^2\} \\
&+ x_{1'}\,\{16\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 - 16(\Gamma_{12}^1)^2 - 16\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + 8hT_2^1 + 16\Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 - 2T_2^2\Phi_{22} - 2T_1^1\Phi_{22} \\
&-16\partial_2\Gamma_{12}^1 + 16\partial_1\Gamma_{22}^1\} + x_{2'}\,\{-16\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 + 16\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + 2hT_1^1 + 10hT_2^2 + 4T_2^1\Phi_{11} \\
&+ 6T_2^2\Phi_{12} - 4T_1^2\Phi_{22} - 2T_1^1\Phi_{12} - 16\partial_2\Gamma_{12}^2 + 16\partial_1\Gamma_{22}^2\} \\
&+ 8\,\{-h\Gamma_{12}^1 - h\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1\Phi_{11} + \Gamma_{12}^1\Phi_{12} - \Gamma_{22}^2\Phi_{12} + \Gamma_{12}^2\Phi_{22} + \partial_2h + \partial_2\Phi_{12} - \partial_1\Phi_{22}\}\,.
\end{aligned}$$

Es importante señalar que las expresiones anteriores son polinomios de grado tres en las coordenadas $x_{1'}$ y $x_{2'}$, donde los coeficientes son funciones de las coordenadas x^1 y x^2.

A fin de obtener una descripción más útil de las componentes $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ y $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$, introducimos la siguiente notación. Fijado un campo de vectores X en Σ, sea S el campo de tensores de tipo $(1,1)$ definido sobre Σ como $S(Z) := D_Z X$. Sean (x^1, x^2) coordenadas locales en Σ donde $X = X^1\partial_{x^1} + X^2\partial_{x^2}$. Entonces las componentes locales de S se expresan como

$$S = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 X^1 + X^1\Gamma_{11}^1 + X^2\Gamma_{12}^1 & \partial_2 X^1 + X^1\Gamma_{12}^1 + X^2\Gamma_{22}^1 \\ \partial_1 X^2 + X^1\Gamma_{11}^2 + X^2\Gamma_{12}^2 & \partial_2 X^2 + X^1\Gamma_{12}^2 + X^2\Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Denotemos con $\hat{\Phi}(X,Y) := \Phi(TX,Y)$ el campo de tensores tipo $(0,2)$ inducido por Φ y T. Aunque Φ sea simétrico, $\hat{\Phi}$ no lo es necesariamente y, de hecho, se tiene que

$$\hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{12} = T_2^1\Phi_{11} + T_2^2\Phi_{21} - T_1^1\Phi_{12} - T_1^2\Phi_{22}.$$

En lo que sigue, denotaremos $D_{\partial_k}\Phi(\partial_i,\partial_j) = D\Phi_{ij;k}$ y $(D_{\partial_i}T)\partial_j = DT_{j;i}{}^k\,\partial_k$. Así las derivadas covariantes $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ y $(\nabla J_h)_{2;1}{}^4$ vienen dadas por el siguiente resultado:

Lema 3.4. *Sea (M,g) una variedad de Walker auto-dual. Sea J_h una estructura casi paracompleja determinada por $J_h\,|_{\ker\pi_*} = \mathrm{Id}$ de tal forma que (g,J_h) es una estructura casi para-Hermítica sobre M. Entonces las componentes no nulas de la derivada covariante ∇J_h están determinadas por*

$$\begin{aligned} 8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 \;=\; & x_{1'}^3\{T_2^1\operatorname{tr}(T) + 8S_2^1\} + x_{1'}^2 x_{2'}\{(T_2^2)^2 - (T_1^1)^2 + 8(S_2^2 - S_1^1)\} \\ & + x_{1'}x_{2'}^2\{-T_1^2\operatorname{tr}(T) - 8S_1^2\} \\ & + x_{1'}^2\{8DT_{1;2}{}^1 - 4DT_{2;1}{}^1 + 2X^1(8h - 4\Phi_{12}) - 4X^2\Phi_{22}\} \\ & + x_{1'}x_{2'}\{8DT_{1;2}{}^2 - 4DT_{2;1}{}^2 - 4DT_{1;1}{}^1 + 16hX^2 + 8X^1\Phi_{11}\} \\ & + x_{2'}^2\{-4DT_{1;1}{}^2 + 4X^2\Phi_{11}\} \\ & + x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D + 10hT_1^1 + 2hT_2^2 - 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{12})\right\} \\ & + x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D + 8hT_1^2 + 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{11}\right\} \\ & + 8\{\partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 \;=\; & x_{2'}^3 \left\{-T_1^2 \operatorname{tr}(T) - 8S_1^2\right\} + x_{1'}^2 x_{2'} \left\{T_2^1 \operatorname{tr}(T) + 8S_2^1\right\} \\
& + x_{1'} x_{2'}^2 \left\{(T_2^2)^2 - (T_1^1)^2 + 8(S_2^2 - S_1^1)\right\} \\
& + x_{1'}^2 \left\{4DT_{2;2}{}^1 - 4X^1\Phi_{22}\right\} \\
& + x_{1'} x_{2'} \left\{-8DT_{2;1}{}^1 + 4DT_{1;2}{}^1 + 4DT_{2;2}{}^2 + 16hX^1 - 8X^2\Phi_{22}\right\} \\
& + x_{2'}^2 \left\{-8DT_{2;1}{}^2 + 4DT_{1;2}{}^2 + 2X^2(8h + 4\Phi_{12}) + 4X^1\Phi_{11}\right\} \\
& + x_{1'} \left\{16\rho_{22}^D + 8hT_2^1 - 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{22}\right\} \\
& + x_{2'} \left\{-16\rho_{12}^D + 2hT_1^1 + 10hT_2^2 + 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{12})\right\} \\
& + 8\left\{\partial_2 h - h(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}\right\},
\end{aligned}$$

donde X, T y Φ son el campo de vectores, el campo de tensores de tipo $(1,1)$ y el campo de tensores de tipo $(0,2)$ simétrico sobre Σ dados en el Teorema 2.9.

Capítulo 4

Superficies para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar constante

Toda variedad para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar constante es localmente simétrica [21]. Además, si el operador de Ricci es diagonalizable, la variedad es de curvatura seccional paraholomorfa constante o se descompone como un producto de variedades para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante y opuesta. La hipótesis de diagonalizabilidad en el operador de Ricci es esencial en el resultado anterior.

El objetivo de este capítulo será completar el resultado anterior obteniendo una descripción completa de las superficies para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar constante. Este resultado se resume en el siguiente

Teorema 4.1. *Una superficie para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar constante es localmente isométrica a uno de los siguientes espacios*

(1) Una superficie para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante o, equivalentemente el fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una superficie afín llana (Σ, D) con la métrica dada por

$$g = c\iota\,\mathrm{Id}\circ\iota\,\mathrm{Id} + g_D, \qquad c \neq 0,$$

o el espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{E}^4_2$ si $c = 0$.

(2) Un producto $M_1(c) \times M_2(-c)$ de dos superficies Lorentzianas de curvatura seccional constante y opuesta $c \neq 0$.

(3) El fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una superficie afín llana (Σ, D) con la métrica dada por

$$g = \iota T \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D$$

donde g_D es la extensión de Riemann de la conexión D y T es un campo de tensores tipo $(1,1)$ en Σ nilpotente y paralelo (i.e., $T^2 = 0$, $DT = 0$).

(4) El fibrado cotangente $T^*\Sigma$ a una superficie afín llana (Σ, D) con la métrica dada por

$$g = \iota T \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D,$$

donde g_D es la extensión de Riemann de la conexión D y T es una estructura compleja paralela en Σ (i.e., $T^2 = -k^2\,\mathrm{Id}$, $DT = 0$).

La demostración se obtendrá estudiando las distintas posibilidades de forma separada a lo largo de este capítulo. En primer lugar, analizaremos los casos diferenciados en los que la curvatura escalar es nula y en los que no. Como ya vimos, la curvatura escalar de una variedad para-Kähler Bochner llana es

$$\tau = 12\,\iota(X) + 3\,\mathrm{tr}(T)\,.$$

El siguiente resultado caracteriza las superficies para-Kähler Bochner llanas de curvatura escalar constante.

Lema 4.2. *Sea (M,g,J) una variedad para-Kähler Bochner llana. Entonces (M,g) tiene curvatura escalar constante si, y solo si, es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín (Σ,D) equipado con una extensión de Riemann modificada*

$$g = \iota T \circ \iota Id + g_D + \pi^*\Phi,$$

donde Φ es un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ sobre Σ y T es un campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre Σ de forma que $T = c\,\mathrm{Id}$ si la curvatura escalar $\tau \neq 0$, o $\mathrm{tr}(T) = 0$ cuando la curvatura escalar $\tau = 0$.

Demostración. Si la curvatura escalar $\tau = 12\iota(X) + 3\,\mathrm{tr}(T)$ es constante, entonces el campo de vectores X ha de ser nulo y la traza del campo de tensores T ha de ser constante, $\mathrm{tr}(T) = \kappa$. En estas condiciones la métrica g se corresponde con la dada en el enunciado.

Recíprocamente, si $g = \iota T \circ \iota Id + g_D + \pi^*\Phi$, el campo de vectores X se anula. En esta situación, las componentes no nulas de la derivada covariante de la estructura casi paracompleja J_h vienen dadas por

$$\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 \;=\;& x_{1'}^3\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)\} + x_{1'}^2 x_{2'}\,\{(T_2^2)^2 - (T_1^1)^2\} + x_{1'} x_{2'}^2\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)\}\\
&+ x_{1'}^2\,\{8DT_{1;2}{}^1 - 4DT_{2;1}{}^1\} + x_{1'}x_{2'}\,\{8DT_{1;2}{}^2 - 4DT_{2;1}{}^2 - 4DT_{1;1}{}^1\}\\
&+ x_{2'}^2\,\{-4DT_{1;1}{}^2\Phi_{11}\} + x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D + 8hT_1^2 + 2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{11}\right\}\\
&+ x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D + 10hT_1^1 + 2hT_2^2 - 2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat\Phi_{21} - \hat\Phi_{12})\right\}\\
&+ 8\,\{\partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 \;=\;& x_{2'}^3\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)\} + x_{1'}^2 x_{2'}\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)\} + x_{1'}x_{2'}^2\,\{(T_2^2)^2 - (T_1^1)^2\}\\
&+ x_{1'}^2\,\{4DT_{2;2}{}^1\} + x_{1'}x_{2'}\,\{-8DT_{2;1}{}^1 + 4DT_{1;2}{}^1 + 4DT_{2;2}{}^2\}\\
&+ x_{2'}^2\,\{-8DT_{2;1}{}^2 + 4DT_{1;2}{}^2\} + x_{1'}\left\{16\rho_{22}^D + 8hT_2^1 - 2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{22}\right\}\\
&+ x_{2'}\left\{-16\rho_{12}^D + 2hT_1^1 + 10hT_2^2 + 2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat\Phi_{21} - \hat\Phi_{12})\right\}\\
&+ 8\,\{\partial_2 h - h(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}\}
\end{aligned}$$

Si $\tau \neq 0$, la traza del campo de tensores T no es nula. Así, de los términos de orden tres en las expresiones anteriores se deduce que las componentes del campo de tensores T son tales que $T_1^2 = 0 = T_2^1$ y $T_1^1 = T_2^2$. Ahora a partir de los coeficientes de $x_{1'}^2$ en $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ y de $x_{2'}^2$ en $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$ se deduce que T_2^2 es constante, y así $\tau = 3\,\mathrm{tr}(T) = 6T_2^2$ es constante.

□

4.1. Superficies para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar constante no nula

El Lema 4.2 muestra que si la curvatura escalar τ es constante, entonces $\tau = 0$ si, y solo si, $\mathrm{tr}(T) = 0$ o bien $\tau \neq 0$ si, y solo si, $T = c\,\mathrm{Id}$, con $c \in \mathbb{R}$. Analizaremos este último caso en primer lugar.

Teorema 4.3. *Sea (M, g, J) una superficie para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar constante $\tau \neq 0$. Entonces (M, g, J) tiene curvatura seccional paraholomorfa constante y, por tanto, (M, g, J) es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín llana (Σ, D) equipado con una extensión de Riemann $g = c\,\iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D$.*

Demostración. El Lema 4.2 muestra que en estas condiciones el campo de tensores T es de la forma $T = c\mathrm{Id}$ y, puesto que $\tau = 3\,\mathrm{tr}(T)$, tenemos que $c = \frac{\tau}{6}$. Así pues, las componentes no nulas de ∇J_h vienen dadas por

$$\begin{aligned} 8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 \;&=\; x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D + 2h\tau - 2\tfrac{\tau}{3}\Phi_{12}\right\} + x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D + 8hT_1^2 + 2\tfrac{\tau}{3}\Phi_{11}\right\} \\ &\quad +8\left\{\partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 \;&=\; x_{1'}\left\{16\rho_{22}^D + 8hT_2^1 - 2\tfrac{\tau}{3}\Phi_{22}\right\} + x_{2'}\left\{-16\rho_{12}^D + 2h\tau + 2\tfrac{\tau}{3}\Phi_{12}\right\} \\ &\quad +8\left\{\partial_2 h - h(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}\right\}. \end{aligned}$$

Considerando los términos lineales de las expresiones anteriores, un cálculo directo nos muestra que

$$\Phi_{11} = \frac{24}{\tau}(\rho_{sim}^D)_{11}, \quad \Phi_{12} = \frac{24}{\tau}(\rho_{sim}^D)_{12}, \quad \Phi_{22} = \frac{24}{\tau}(\rho_{sim}^D)_{22} \quad \text{y} \quad h = \frac{8}{\tau}(\rho_{ant}^D)_{12},$$

de manera que $\Phi = \frac{24}{\tau}\rho_{sim}^D$. Así, la métrica g es de la forma $g = \frac{\tau}{6}\iota\mathrm{Id} \circ \iota\mathrm{Id} + g_D + \frac{24}{\tau}\pi^*\rho_{sim}^D$ y por el Teorema 2.11-(1) la variedad es Einstein.

Toda métrica Bochner llana de Einstein es de curvatura seccional paraholomorfa constante y, por tanto, localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín llana con métrica $g = \frac{\tau}{6}(\iota\mathrm{Id} \circ \iota\mathrm{Id}) + g_D$, según se muestra en [7, Teorema 2.2]. □

4.2. Superficies para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar nula

Sea (g, J_h) una estructura casi para-Hermítica en el fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) determinada por

$$J_h\,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = \iota X(\iota \mathrm{Id} \circ \iota \mathrm{Id}) + \iota T \circ \iota \mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi.$$

Si la curvatura escalar τ es nula, entonces la métrica g es de la forma $g = \iota T \circ \iota \mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi$ con $\mathrm{tr}(T) = 0$, y el siguiente resultado muestra que el campo de tensores T es paralelo.

Además, como la componente anti-auto-dual del tensor de Weyl de una superficie para-Kähler (con la orientación inducida por la estructura para-Kähler) viene dada por

$$W^- = \frac{\tau}{12}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

dicha expresión se corresponde con el operador de Weyl auto-dual de la estructura de Walker. En consecuencia, toda métrica para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar nula es localmente conformemente llana. Este resultado será esencial para abordar el caso de curvatura escalar nula.

Lema 4.4. *Sea (M, g, J) una superficie para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar nula. Entonces (M, g) es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) equipado con una extensión de Riemann modificada*

$$g = \iota T \circ \iota Id + g_D + \pi^*\Phi,$$

donde T es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ en (Σ, D) paralelo y con traza nula.

Demostración. Toda superficie Bochner llana con curvatura escalar nula es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín con métrica

$$g = \iota T \circ \iota \mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi$$

para algún campo de tensores T de tipo $(1, 1)$ en Σ con $\mathrm{tr}(T) = 0$. En estas condiciones las componentes no nulas de ∇J_h son

$$\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 = {} & x_{1'}^2\,\{-8T_2^2\Gamma_{12}^1 + 8T_1^2\Gamma_{22}^1 - 4T_2^1\Gamma_{11}^1 - 4T_2^1\Gamma_{12}^2 - 8\partial_2 T_2^2 - 4\partial_1 T_2^1\} \\
& + x_{1'}x_{2'}\,\{-8T_1^2\Gamma_{12}^1 - 16T_2^2\Gamma_{12}^2 + 8T_1^2\Gamma_{22}^2 + 8\partial_2 T_1^2\} \\
& + x_{2'}^2\,\{4T_1^2\Gamma_{11}^1 + 8T_2^2\Gamma_{11}^2 - 4T_1^2\Gamma_{12}^2 - 4\partial_1 T_1^2\} \\
& + x_{1'}\,\{-8hT_2^2 + 16\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - 16\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + T_2^1\Phi_{11} + 8T_2^2\Phi_{12} - 16\partial_2\Gamma_{11}^1 - 4T_1^2\Phi_{22} \\
& \qquad + 16\partial_1\Gamma_{12}^1\} \\
& + x_{2'}\,\{16\Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 + 8hT_1^2 - 16\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + 16(\Gamma_{12}^2)^2 - 16\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - 16\partial_2\Gamma_{11}^2 + 16\partial_1\Gamma_{12}^2\} \\
& + 8\,\{-h\Gamma_{11}^1 - h\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1\Phi_{11} + \Gamma_{11}^1\Phi_{12} - \Gamma_{12}^2\Phi_{12} + \Gamma_{11}^2\Phi_{22} + \partial_2\Phi_{11} + \partial_1 h - \partial_1\Phi_{12}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
8\left(\nabla J_h\right)_{1;2}{}^4 = {} & x_{2'}^2\left\{4T_1^2\Gamma_{12}^1 - 8T_2^2\Gamma_{12}^2 + 4T_1^2\Gamma_{22}^2 - 8T_2^1\Gamma_{11}^2 + 4\partial_2 T_1^2 - 8\partial_1 T_2^2\right\} \\
& + x_{1'}x_{2'}\left\{-16T_2^2\Gamma_{12}^1 - 8T_2^1\Gamma_{11}^1 + 8T_2^1\Gamma_{12}^2 - 8\partial_1 T_2^1\right\} \\
& + x_{1'}^2\left\{8T_2^2\Gamma_{22}^1 + 4T_2^1\Gamma_{12}^1 - 4T_2^1\Gamma_{22}^2 + 4\partial_2 T_2^1\right\} \\
& + x_{2'}\left\{16\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - 16\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 + 8hT_2^2 + 4T_2^1\Phi_{11} + 8T_2^2\Phi_{12} - 4T_1^2\Phi_{22} - 16\partial_2\Gamma_{12}^2 \right.\\
& \qquad \left. + 16\partial_1\Gamma_{22}^2\right\} \\
& + x_{1'}\left\{16\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 - 16(\Gamma_{12}^2)^2 - 16\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + 8hT_2^1 + 16\Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 16\partial_2\Gamma_{12}^1 + 16\partial_1\Gamma_{22}^1\right\} \\
& + 8\left\{-h\Gamma_{12}^1 - h\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1\Phi_{11} + \Gamma_{12}^1\Phi_{12} - \Gamma_{22}^2\Phi_{12} + \Gamma_{12}^2\Phi_{22} + \partial_2 h + \partial_2\Phi_{12} - \partial_1\Phi_{22}\right\}
\end{aligned}
$$

Considerando los términos cuadráticos en la expresión de $(\nabla J_h)_{j;i}{}^4$ se obtienen las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2T_2^2\Gamma_{12}^1 + T_2^1\left(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\right) - 2T_1^2\Gamma_{22}^1 + 2\partial_2 T_2^2 + \partial_1 T_2^1 &= 0 \\
2T_2^2\Gamma_{12}^2 - T_1^2\left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\right) - \partial_2 T_1^2 &= 0 \\
2T_2^2\Gamma_{11}^2 + T_1^2\left(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2\right) - \partial_1 T_1^2 &= 0 \\
2T_2^2\Gamma_{22}^1 + T_2^1\left(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2\right) + \partial_2 T_2^1 &= 0 \\
2T_2^2\Gamma_{12}^1 - T_2^1\left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right) + \partial_1 T_2^1 &= 0 \\
2T_2^1\Gamma_{11}^2 + 2T_2^2\Gamma_{12}^2 - T_1^2\left(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2\right) - \partial_2 T_1^2 + 2\partial_1 T_2^2 &= 0
\end{aligned}
$$

que son equivalentes al carácter paralelo del campo de tensores T en (Σ, D). □

La existencia de campos de tensores paralelos sobre superficies afines fue estudiada en [8], mostrando la existencia de coordenadas locales (x^1, x^2) en Σ de forma que el campo de tensores T se corresponde con uno de los siguientes:

$T = 0,$	$T = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$	$T = k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$	$T = k\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$
tensor nulo,	para-Kähler afín,	nilpotente Kähler afín,	Kähler afín.

En lo que sigue analizaremos cada una de las cuatro posibilidades anteriores por separado.

4.2.1. Estructuras Bochner llanas inducidas por un campo de tensores nulo

Si el campo de tensores T es nulo, entonces la métrica subyacente se reduce a una extensión de Riemann deformada $g = g_D + \pi^*\Phi$. Toda extensión de Riemann deformada es auto-dual, por lo que cualquier métrica para-Kähler con dicha estructura subyacente es automáticamente Bochner llana. Veremos que, de hecho, esta situación no aporta nuevos ejemplos.

Considerando las expresiones de ∇J_h en el Lema 3.4 en la situación $X = 0$, $T = 0$, se tiene que las componentes no nulas de la derivada covariante ∇J_h están determinadas por

$$\begin{aligned}
(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= 2x_{1'}\rho_{21}^D + 2x_{2'}\rho_{11}^D + \{\partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1}\}\,,\\
(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= 2x_{1'}\rho_{22}^D - 2x_{2'}16\rho_{12}^D + \{\partial_2 h - h(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}\}\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, si $(T^*\Sigma, g = g_D + \pi^*\Phi)$ es para-Kähler, entonces la superficie afín (Σ, D) ha de ser llana. Como el operador de Ricci de una extensión de Riemann deformanda $g_D + \pi^*\Phi$ viene dado por

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2\rho_{sim}^D(\partial_1,\partial_1) & 2\rho_{sim}^D(\partial_1,\partial_2) & 0 & 0\\ 2\rho_{sim}^D(\partial_1,\partial_2) & 2\rho_{sim}^D(\partial_2,\partial_2) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si $(T^*\Sigma, g = g_D + \pi^*\Phi)$ es para-Kähler, ha de ser Ricci llana. Por tanto tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.5. *Una estructura casi para-Hermítica en el fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) determinada por*

$$J_h\,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = g_D + \pi^*\Phi,$$

es para-Kähler si, y solo si, $(T^*\Sigma, g_D + \pi^*\Phi)$ es llana.

De hecho, tomando coordenadas locales donde los símbolos de Christoffel Γ_{km}^ℓ se anulen, las componentes no nulas de ∇J_h se reducen a

$$\begin{aligned}
(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= \partial_2\Phi_{11} - \partial_1\Phi_{12} + \partial_1 h,\\
(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= \partial_2\Phi_{12} - \partial_1\Phi_{22} + \partial_2 h.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Por otra parte, un cálculo sencillo muestra que las únicas componentes no nulas de la curvatura de la extensión deformada de una superficie llana vienen dadas (salvo simetrías) por $2R(\partial_1, \partial_2, \partial_2, \partial_1) = \partial_{22}\Phi_{11} - 2\partial_{12}\Phi_{12} + \partial_{11}\Phi_{22}$.

Si calculamos las condiciones de integrabilidad del sistema (4.1), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_2\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= \partial_{22}\Phi_{11} - \partial_{12}\Phi_{12} + \partial_{12} h,\\
\partial_1\,(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= \partial_{12}\Phi_{12} - \partial_{11}\Phi_{22} + \partial_{12} h,
\end{aligned}$$

por lo que (4.1) es integrable si y solo si

$$\partial_{22}\Phi_{11} - 2\partial_{12}\Phi_{12} + \partial_{11}\Phi_{22} = 0,$$

lo que nos proporciona la anulación de la única componente no nula del tensor de curvatura de $(T^*\Sigma, g_D + \pi^*\Phi)$. En consecuencia todas las estructuras $(J_h, g_D + \pi^*\Phi)$ son localmente isométricas, por lo que podemos suponer que $\Phi = 0$ y h es constante por (4.1).

4.2.2. Estructuras Bochner llanas inducidas por una estructura afín para-Kähler

En esta sección analizaremos las estructuras para-Kähler sobre $T^*\Sigma$ determinadas por

$$J_h \,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = \iota T \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi,$$

donde T es un campo de tensores paralelo con $\mathrm{tr}(T) = 0$ de forma que $T^2 = k^2\,\mathrm{Id}$. Dado que la curvatura escalar de $(T^*\Sigma, \iota T \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi)$ es cero, la estructura subyacente es localmente simétrica y localmente conformemente llana, por lo que el tensor de curvatura de $(T^*\Sigma, \iota T \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi)$ está completamente determinado por su tensor de Ricci.

Dado que T es un campo de tensores paralelo con $\mathrm{tr}(T) = 0$ y $T^2 = k^2\,\mathrm{Id}$, tomamos coordenadas locales (x^1, x^2) en Σ de forma que $T = k(\partial_{x^1} \otimes dx^1 - \partial_{x^2} \otimes dx^2)$ (véase [8]). Considerando las coordenadas inducidas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ sobre $T^*\Sigma$ tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.6. *Sea $(T^*\Sigma, J_h, g)$ una estructura para-Kähler en el fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) determinada por*

$$J_h \,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = \iota T \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi,$$

donde T es un campo de tensores paralelo en (Σ, D) con $\mathrm{tr}(T) = 0$ y $T^2 = k^2\,\mathrm{Id}$. Entonces

1. *El operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ está dado por*

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho^D_{21} & k & 0 \\ 2\rho^D_{12} & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

2. *El campo de tensores Φ en Σ está dado por*

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\{(\Gamma_{11}^1)^2 - 2\partial_1\Gamma_{11}^1\} + \varphi_{11} & \frac{2}{k}(\rho^D_{ant})_{21} \\ \frac{2}{k}(\rho^D_{ant})_{21} & \frac{1}{k}\{(\Gamma_{22}^2)^2 + 2\partial_2\Gamma_{22}^2\} + \varphi_{22} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

donde φ_{11} y φ_{22} son funciones de x^1 y x^2, respectivamente.

Demostración. Sea (Σ, D, T) una estructura afín para-Kähler con campo de tensores $T = k(\partial_{x^1} \otimes dx^1 - \partial_{x^2} \otimes dx^2)$. Entonces se sigue de [8] que los símbolos de Christoffel satisfacen $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$. Además el tensor de Ricci de (Σ, D) está determinado por

$$\rho^D_{sim} = -\tfrac{1}{2}(\partial_2\Gamma_{11}^1 + \partial_1\Gamma_{22}^2)(dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1),$$

$$\rho^D_{ant} = \tfrac{1}{2}(\partial_2\Gamma_{11}^1 - \partial_1\Gamma_{22}^2)(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1).$$

En esta situación las componentes no nulas de la derivada covariante de la estructura casi paracompleja resultan

$$(\nabla J_h)^4_{1;1} = x_{1'}\{kh - k\Phi_{12} - 2\partial_2\Gamma^1_{11}\} - h\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Phi_{12} + \partial_1 h + \partial_2\Phi_{11} - \partial_1\Phi_{12}$$

$$(\nabla J_h)^4_{1;2} = x_{2'}\{2\partial_1\Gamma^2_{22} - kh - k\Phi_{12}\} - h\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{22}\Phi_{12} + \partial_2 h - \partial_1\Phi_{22} + \partial_2\Phi_{12}$$

Imponiendo la anulación de los términos lineales en las las componentes no nulas de la derivada covariante de la estructura paracompleja J_h obtenemos que la función h está dada por $h = -\frac{2}{k}\rho^D_{sim}(\partial_1, \partial_2)$ y la componente Φ_{12} está deteminada por $\Phi_{12} = \frac{2}{k}\rho^D_{ant}(\partial_2, \partial_1)$. Un cálculo directo muestra que en esta situación el operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ está dado por (4.2).

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para h y Φ_{12}, podemos integrar las restantes componentes del campo de tensores Φ a partir de los términos independientes en las componentes no nulas de ∇J_h y se comprueba fácilmente que se corresponden con las dadas en (4.3). □

Nótese que el operador de Ricci dado por (4.2) tiene dos autovalores de multiplicidad dos, $\lambda_\pm = \pm k$. Además, $(\mathrm{Ric} - k\mathrm{Id})(\mathrm{Ric} + k\mathrm{Id}) = 0$, por lo que el operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ es diagonalizable. Como consecuencia de los resultados en [21], se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.7. *Si (M^4, g, J) es una variedad para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar nula definida por una estructura afín para-Kähler, entonces M es localmente isométrica al producto de dos superficies Lorentzianas de curvatura seccional constante y opuesta $M^4 = M^2(c) \times M^2(-c)$.*

4.2.3. Estructuras Bochner llanas inducidas por una estructura afín nilpotente Kähler

En esta sección analizaremos las estructuras para-Kähler sobre $T^*\Sigma$ determinadas por

$$J_h\,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = \iota T \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi,$$

donde T es un campo de tensores paralelo con $\mathrm{tr}(T) = 0$ de forma que $T^2 = 0$. Dado que la curvatura escalar de $(T^*\Sigma, \iota T \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi)$ es cero, la estructura subyacente es localmente simétrica y localmente conformemente llana, por lo que el tensor de curvatura de $(T^*\Sigma, \iota T \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi)$ está completamente determinado por su tensor de Ricci.

Dado que T es un campo de tensores paralelo con $\mathrm{tr}(T) = 0$ y $T^2 = 0$, tomamos coordenadas locales (x^1, x^2) en Σ de forma que $T = k\partial_{x^1} \otimes dx^2$ (véase [8]). Considerando las coordenadas inducidas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ sobre $T^*\Sigma$ tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.8. *Sea $(T^*\Sigma, J_h, g)$ una estructura para-Kähler en el fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) determinada por*

$$J_h\,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = \iota T \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi,$$

donde T es un campo de tensores paralelo en (Σ, D) con $\mathrm{tr}(T) = 0$ y $T^2 = 0$. Entonces la función $h = \frac{1}{k}\left(2\partial_2\Gamma_{12}^1 - 2\partial_1\Gamma_{22}^1\right)$ y además

1. *El operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ está dado por*

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\rho_{ant}^D\right)_{21} & 0 & 0 \\ 2\left(\rho_{ant}^D\right)_{12} & 2\left(\rho_{sim}^D\right)_{22} & k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

2. *El campo de tensores Φ en Σ está dado por*

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= -\tfrac{4}{k}\partial_1\Gamma_{12}^1 \\ \Phi_{12} &= \tfrac{2}{k}\left\{(\Gamma_{12}^1)^2 - \partial_2\Gamma_{12}^1 - \partial_1\Gamma_{22}^1\right\} + \varphi_{12} \\ \Phi_{22} &= \tfrac{4}{k}\left\{\Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{22}^1\right\} + x^1\varphi_{12}' + \varphi_{22}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde φ_{12} y φ_{22} son funciones de la coordenada x^2.

Demostración. Sea (Σ, D, T) una estructura afín nilpotente Kähler con campo de tensores $T = k\partial_{x^1} \otimes dx^2$. Entonces se sigue de [8] que los símbolos de Christoffel satisfacen $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0$ y $\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1$. Además, el tensor de Ricci de (Σ, D) está determinado por

$$\rho_{sim}^D = \left(\partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{12}^1\right) dx^2 \otimes dx^2$$

$$\rho_{ant}^D = -\partial_1\Gamma_{12}^1(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)$$

En esta situación las componentes no nulas de la derivada covariante de la estructura casi paracompleja resultan

$$\begin{aligned} 2(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= x_{1'}\left\{k\Phi_{11} + 4\partial_1\Gamma_{12}^1\right\} - 2\left\{\Gamma_{12}^1\Phi_{11} - \partial_1 h - \partial_2\Phi_{11} + \partial_1\Phi_{12}\right\} \\ 2(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{1'}\left\{2kh - 4\partial_2\Gamma_{12}^1 + 4\partial_1\Gamma_{22}^1\right\} + x_{2'}\left\{k\Phi_{11} + 4\partial_1\Gamma_{12}^1\right\} \\ &\quad -2\left\{h\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1\Phi_{11} - \partial_2 h - \partial_2\Phi_{12} + \partial_1\Phi_{22}\right\} \end{aligned}$$

Imponiendo la anulación del coeficiente de $x_{1'}$ en la expresión de $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ se obtiene la expresión de Φ_{11} dada en (4.5). Ahora un cálculo directo muestra que el operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ está dado por (4.4).

A partir del coeficiente de $x_{1'}$ en $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$ se obtiene la expresión de h, lo que nos permite integrar las restantes componentes del campo de tensores Φ en los términos independientes de las expresiones de las componentes no nulas de ∇J_h. Es inmediato comprobar que se corresponden con las dadas en (4.5). □

A la vista de la expresión del operador de Ricci dada en el Lema anterior, se tiene que Ric es nilpotente en dos pasos, por lo que $\lambda = 0$ es una raíz doble del polinomio mínimo. Dado que la estructura paracompleja es una anti-isometría que conmuta con el operador de Ricci, la forma canónica de Jordan de este se expresa en una base pseudo-ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ como

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Existe por tanto una única posibilidad (salvo inversión de la métrica $g \mapsto -g$) en la quelas únicas componentes no nulas del tensor de Ricci en la base pseudo-ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vienen dadas por

$$\rho_{11} = 1 = -\rho_{33}.$$

Al ser la variedad localmente conformemente llana, el tensor de Ricci determina la curvatura, de forma que las únicas componentes no nulas del tensor de curvatura de tipo $(0, 4)$ en la base pseudo-ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vienen dadas (salvo las correspondientes simetrías) por

$$R_{1413} = R_{3231} = -\frac{1}{2}.$$

Así, el Teorema 1.3 nos garantiza que todas estas estructuras son localmente isométricas.

A fin de construir un modelo local de la situación anterior, sea (Σ, D, T) una superficie afín llana nilpotente Kähler. Sean (x^1, x^2) coordenadas locales en Σ para las que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k son nulos y, consecuentemente, tanto la función h como las expresiones (4.5) en el Lema 4.8 se anulan. Así pues existen dos estructuras para-Kähler en $T^*\Sigma$ determinadas por

$$J\,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}\,, \qquad g = \iota T \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D,$$

lo que se resume en el siguiente resultado:

Teorema 4.9. *Si (M, g, J) es una variedad para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar nula definida por una estructura afín nilpotente Kähler, entonces (M, g) es localmente isiométrica al fibrado cotangente a una superficie afín nilpotente Kähler llana (Σ, D, T) equipado con una extensión de Riemann modificada*

$$g = \iota T \circ \iota \mathrm{Id} + g_D,$$

donde T es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ nilpotente y paralelo en (Σ, D).

4.2.4. Estructuras Bochner llanas inducidas por una estructura afín Kähler

En esta sección analizaremos las estructuras para-Kähler sobre $T^*\Sigma$ determinadas por

$$J_h \,|_{\ker \pi_*} = \operatorname{Id}, \qquad g = \iota T \circ \iota \operatorname{Id} + g_D + \pi^* \Phi,$$

donde T es un campo de tensores paralelo con $\operatorname{tr}(T) = 0$ de forma que $T^2 = -k^2 \operatorname{Id}$. Dado que la curvatura escalar de $(T^*\Sigma, \iota T \circ \iota \operatorname{Id} + g_D + \pi^*\Phi)$ es cero, la estructura subyacente es localmente simétrica y localmente conformemente llana, por lo que el tensor de curvatura de $(T^*\Sigma, \iota T \circ \iota \operatorname{Id} + g_D + \pi^*\Phi)$ está completamente determinado por su tensor de Ricci.

Dado que T es un campo de tensores paralelo con $\operatorname{tr}(T) = 0$ y $T^2 = -k^2 \operatorname{Id}$, tomamos coordenadas locales (x^1, x^2) en Σ de forma que $T = k(-\partial_{x^1} \otimes dx^2 + \partial_{x^2} \otimes dx^1)$ (véase [8]). Considerando las coordenadas inducidas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ sobre $T^*\Sigma$ tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.10. *Sea $(T^*\Sigma, J_h, g)$ una estructura para-Kähler en el fibrado cotangente a una superficie afín (Σ, D) determinada por*

$$J_h \,|_{\ker \pi_*} = \operatorname{Id}, \qquad g = \iota T \circ \iota \operatorname{Id} + g_D + \pi^* \Phi,$$

donde T es un campo de tensores paralelo en (Σ, D) con $\operatorname{tr}(T) = 0$ y $T^2 = -k^2 \operatorname{Id}$. Entonces la función $h = \frac{2}{k}\rho^D_{sim}(\partial_2, \partial_2)$, y además

1. *El operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ está dado por*

$$\operatorname{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 2(\rho^D_{sim})_{11} & -2(\rho^D_{ant})_{12} & 0 & k \\ -2(\rho^D_{ant})_{21} & 2(\rho^D_{sim})_{22} & -k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

2. *El campo de tensores Φ en Σ es tal que*

$$\Phi_{11} = -\Phi_{22} - \frac{4}{k}(\rho^D_{ant})_{12} \tag{4.7}$$

y Φ_{12} es solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 \Phi_{12} = \frac{2}{k}\big(2\Gamma^1_{22}\rho^D_{sim}(\partial_2, \partial_2) + 2\Gamma^2_{22}\rho^D_{ant}(\partial_2, \partial_2) - 2\partial_2\rho^D_{ant}(\partial_2, \partial_2) \\ \qquad\qquad + \partial_1\rho^D_{sim}(\partial_2, \partial_2)\big) \\ \partial_2 \Phi_{12} = \frac{2}{k}\big(2\Gamma^2_{22}\rho^D_{sim}(\partial_2, \partial_2) - 2\Gamma^1_{22}\rho^D_{ant}(\partial_2, \partial_2) - \partial_2\rho^D_{sim}(\partial_2, \partial_2)\big) + \partial_1\Phi_{22}. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Demostración. Sea (Σ, D, T) una estructura afín Kähler con campo de tensores $T = k(-\partial_{x^1} \otimes dx^2 + \partial_{x^2} \otimes dx^1)$. Entonces se sigue de [8] que los símbolos de Christoffel satisfacen $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1$ y $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2$. Además el tensor de Ricci en (Σ, D) está determinado por

$$\rho_{sim}^D = (\partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{22}^2)(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2)$$

$$\rho_{ant}^D = -(\partial_1\Gamma_{22}^2 + \partial_2\Gamma_{22}^2)(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)$$

En estas condiciones, las componentes no nulas de la derivada covariante de la estructura casi paracompleja resultan

$$\begin{aligned} 2(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= x_{1'}\left\{-k\Phi_{11} - k\Phi_{22} + 4\partial_2\Gamma_{22}^1 + 4\partial_1\Gamma_{22}^2\right\} + x_{2'}\left\{2kh + 4\partial_2\Gamma_{22}^2 - 4\partial_1\Gamma_{22}^1\right\} \\ &\quad +2\left\{2h\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^2\Phi_{11} - \Gamma_{22}^2\Phi_{22} + \partial_2\Phi_{11} + \partial_1 h - \partial_1\Phi_{12}\right\} \\ 2(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{1'}\left\{-2kh - 4\partial_2\Gamma_{22}^2 + 4\partial_1\Gamma_{22}^1\right\} + x_{2'}\left\{-\Phi_{11} - k\Phi_{22} + 4\partial_2\Gamma_{22}^1 + 4\partial_1\Gamma_{22}^2\right\} \\ &\quad -2\left\{2h\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^1\Phi_{11} + \Gamma_{22}^1\Phi_{22} - \partial_2 h - \partial_2\Phi_{12} + \partial_1\Phi_{22}\right\} \end{aligned}$$

Del coeficiente de $x_{1'}$ en $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$ obtenemos la expresión de h como

$$h = \frac{2}{k}\left\{\partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{22}^2\right\} = \frac{2}{k}\left(\rho_{sim}^D\right)_{22}$$

y del mismo coeficiente en $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ la relación

$$\Phi_{11} = -\Phi_{22} + \frac{4}{k}\left\{\partial_2\Gamma_{22}^1 + \partial_1\Gamma_{22}^2\right\} = -\Phi_{22} - \frac{4}{k}(\rho_{ant}^D)_{12}.$$

En esta situación, el operador de Ricci de la variedad viene dado por la matriz (4.6).

Las condiciones (4.8) se obtienen ahora directamente de los términos independientes en las expresiones de las componentes no nulas de ∇J_h. □

Se sigue de la expresión (4.6) que el operador de Ricci de $(T^*\Sigma, g)$ tiene autovalores complejos $\lambda_\pm = \pm k\sqrt{-1}$. Como la estructura paracompleja J es una anti-isometría que conmuta con el operador de Ricci, la forma canónica de Jordan de este y la métrica se escriben en una base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de la siguiente manera

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Un cálculo directo muestra que las componentes no nulas del tensor de Ricci en la base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vienen dadas por

$$\rho_{12} = \rho_{21} = k = \rho_{34} = \rho_{43}.$$

Al ser la variedad es localmete conformemente llana el tensor de Ricci determina la curvatura, por lo que las componentes no nulas del tensor de curvatura de tipo $(0,4)$ en la base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vienen dadas (salvo las correspondientes simetrías) por

$$R_{1413} = R_{1442} = R_{3224} = R_{3231} = \frac{k}{2}.$$

El Teorema 1.3 nos garantiza que, fijado un valor de k, todas estas estructuras son localmente isométricas.

A fin de construir un modelo local para estas geometrías, consideremos una superficie afín Kähler llana (Σ, D, T). Podemos encontrar coordenadas (x^1, x^2) en Σ para las que los símbolos de Christoffel de la conexión afín son nulos. En estas condiciones tenemos que $h = 0$ y, a partir de los términos independientes en las expresiones de ∇J_h, obtenemos las siguientes relaciones entre las componentes de tensor Φ:

$$\Phi_{11} = -\Phi_{22}, \quad \partial_1\Phi_{22} = \partial_2\Phi_{12} \quad \text{y} \quad \partial_2\Phi_{22} = -\partial_1\Phi_{12}.$$

Así podemos tomar las componentes del tensor Φ nulas, de modo que la métrica g es de la forma

$$g = \iota T \circ \iota \mathrm{Id} + g_D,$$

siendo $T = k(-\partial_{x^1} \otimes dx^2 + \partial_{x^2} \otimes dx^1)$. Los argumentos anteriores se resumen en el siguiente resultado:

Teorema 4.11. *Si (M, g, J) es una variedad para-Kähler Bochner llana con curvatura escalar nula definida por una estructura afín Kähler, entonces (M, g) es localmente isométrica al fibrado cotangente a una superficie afín Kähler llana (Σ, D, T) equipado con una extensión de Riemann modificada*

$$g = \iota T \circ \iota \mathrm{Id} + g_D,$$

donde T es un campo de tensores de tipo $(1,1)$ en Σ paralelo con $T^2 = -k^2\,\mathrm{Id}$, $\mathrm{tr}(T) = 0$.

Capítulo 5

Estructuras para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar no constante

Como ya se vió en el Capítulo 2, la curvatura escalar de toda métrica de Walker auto-dual viene dada por $\tau = 12\iota(X) + 3\,\mathrm{tr}(T)$, y probamos en el Lema 4.2 que una métrica para-Kähler Bochner llana tiene curvatura escalar constante si, y solo si, el campo de vectores X se anula. Por ello, en lo que resta de capítulo supondremos que el campo de vectores X es distinto de cero.

Estudiaremos en primer lugar el caso en el que el campo de tensores T de tipo $(1,1)$ es paralelo en Σ, como paso previo al estudio de la situación general en la que la curvatura escalar de la variedad no es constante.

5.1. Estructuras para-Kähler Bochner llanas inducidas por un campo de tensores paralelo

A fin de construir ejemplos explícitos de variedades para-Kähler Bochner llanas con curvatura escalar no constante analizaremos en primer lugar el caso en el que T es un campo de tensores paralelo.

Sea (Σ, D) es una superficie afín y consideremos $h \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, X un campo de vectores no nulo en Σ, T un campo de tensores paralelo de tipo $(1,1)$ y Φ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ sobre Σ. Sea (g, J_h) es una estructura casi para-Hermítica en $T^*\Sigma$ determinada por

$$J_h \,|_{\ker \pi_*} = \mathrm{Id}, \quad \text{y} \quad g = \iota X(\iota\mathrm{Id} \circ \iota\mathrm{Id}) + \iota T \circ \iota\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi.$$

En esta situación, las componentes no nulas de la derivada covariante de J_h vienen dadas por las expresiones

$$
\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= x_{1'}^3\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)+8S_2^1\}+x_{1'}^2x_{2'}\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\}\\
&\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)-8S_1^2\}+x_{1'}^2\,\{2X^1(8h-4\Phi_{12})-4X^2\Phi_{22}\}\\
&\quad +x_{1'}x_{2'}\,\{16hX^2+8X^1\Phi_{11}\}+x_{2'}^2\,\{4X^2\Phi_{11}\}\\
&\quad +x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D+10hT_1^1+2hT_2^2-2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{12}+4(\hat\Phi_{21}-\hat\Phi_{12})\right\}\\
&\quad +x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D+8hT_1^2+2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{11}\right\}\\
&\quad +8\,\{\partial_1 h-h(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)+D\Phi_{11;2}-D\Phi_{12;1}\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{2'}^3\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)-8S_1^2\}+x_{1'}^2x_{2'}\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)+8S_2^1\}\\
&\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\}+x_{1'}^2\,\{-4X^1\Phi_{22}\}\\
&\quad +x_{1'}x_{2'}\,\{16hX^1-8X^2\Phi_{22}\}+x_{2'}^2\,\{2X^2(8h+4\Phi_{12})+4X^1\Phi_{11}\}\\
&\quad +x_{1'}\left\{16\rho_{22}^D+8hT_2^1-2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{22}\right\}\\
&\quad +x_{2'}\left\{-16\rho_{12}^D+2hT_1^1+10hT_2^2+2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{12}+4(\hat\Phi_{21}-\hat\Phi_{12})\right\}\\
&\quad +8\,\{\partial_2 h-h(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)+D\Phi_{12;2}-D\Phi_{22;1}\}\,,
\end{aligned}
$$

Puesto que el campo de vectores X es no nulo, distinguimos los siguientes casos:

- Si $X^1\neq 0$, del coeficiente de $x_{1'}^2$ en la expresión de $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$ se deduce directamente que $\Phi_{22}=0$. Teniendo esto en cuenta, a partir del coeficiente de $x_{1'}x_{2'}$ en $(\nabla J_h)_{1;2}^4$ se obtiene que $h=0$. Así, si ahora consideramos el coeficiente de $x_{1'}x_{2'}$ en la expresión de $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ vemos que la componente Φ_{11} también se anula. Finalmente, a partir de lo anterior y el coeficiente de $x_{1'}^2$ en $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ se sigue que $\Phi_{12}=0$.

- Si $X^2\neq 0$, de forma análoga al caso anterior, se obtiene que la función h y el campo de tensores Φ son nulos.

En cualquiera de los dos casos anteriores, las componentes no nulas de ∇J_h se escriben ahora

$$
\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= x_{1'}^3\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)+8S_2^1\}+x_{1'}^2x_{2'}\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\}\\
&\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)-8S_1^2\}+x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D\right\}+x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{2'}^3\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)-8S_1^2\}+x_{1'}^2x_{2'}\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)+8S_2^1\}+x_{1'}\left\{16\rho_{22}^D\right\}\\
&\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\}+x_{2'}\left\{-16\rho_{12}^D\right\}.
\end{aligned}
$$

Así, partir de los términos lineales en las expresiones anteriores se obtiene la anulación de las componentes del tensor de Ricci de la superficie afín, por lo que esta es llana. De este modo, las componentes no nulas de ∇J_h se reducen a

$$\begin{aligned} 8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= x_{1'}^3\,\{T_2^1\operatorname{tr}(T)+8S_2^1\}+x_{1'}^2x_{2'}\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\} \\ &\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{-T_1^2\operatorname{tr}(T)-8S_1^2\}\,, \\ 8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{2'}^3\,\{-T_1^2\operatorname{tr}(T)-8S_1^2\}+x_{1'}^2x_{2'}\,\{T_2^1\operatorname{tr}(T)+8S_2^1\} \\ &\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\}\,. \end{aligned}$$

Para obtener la anulación de los coeficientes de las expresiones anteriores, distinguimos de nuevo dos casos:

- Si $\operatorname{tr}(T)=0$, existen (x^1,x^2) coordenadas locales en Σ en las que el campo de tensores T se corresponde con uno de los siguientes:

  $$T=0, \qquad T=k\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \qquad T=k\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \qquad T=k\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

  tensor nulo, para-Kähler afín, nilpotente Kähler afín, Kähler afín.

  En cualquier caso, se obtiene que el campo de tensores dado por $S(Z)=\nabla_Z X$ es de la forma $S=\lambda\mathrm{Id}$, para alguna función $\lambda\in\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, y la curvatura escalar viene dada por $\tau=12\iota X$.

- Si $\operatorname{tr}(T)\neq 0$, existen (x^1,x^2) coordenadas locales en Σ en las que el campo de tensores T se escribe como $T=c\mathrm{Id}$ para algún $c\in\mathbb{R}$. En esta situación, se deduce de nuevo que el campo de tensores dado por $S(Z)=\nabla_Z X$ es de la forma $S=\lambda\mathrm{Id}$, para alguna función $\lambda\in\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, y la curvatura escalar viene dada por $\tau=12\iota X+6c$.

Mediante este razonamiento, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Sea (Σ,D) una superficie afín y sean $h\in\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, X un campo de vectores en Σ, Φ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ en Σ y T un campo de tensores de tipo $(1,1)$ paralelo en (Σ,D). Si (g,J_h) es una estructura casi para-Hermítica en $T^*\Sigma$ determinada por*

$$J_h\,|_{\ker\pi_*}=\mathrm{Id}, \quad y \quad g=\iota X(\iota\mathrm{Id}\circ\iota\mathrm{Id})+\iota T\circ\iota\mathrm{Id}+g_D+\pi^*\Phi,$$

entonces $(T^*\Sigma,g,J_h)$ es para-Kähler Bochner llana si, y solo si, $h=0$, $\Phi=0$, la conexión afín D es llana y $S=\lambda\mathrm{Id}$ para alguna función $\lambda\in\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, donde $S(Z)=\nabla_Z X$.

5.2. Expresión local de las estructuras genéricas para-Kähler Bochner llanas no simétricas

Puesto que el campo de vectores X es no nulo, existe un sistema de coordenadas locales (x^1,x^2) en Σ en las que $X=\partial_{x^1}$. En esta situación, las componentes no nulas de la derivada covariante de la estructura casi paracompleja J_h vienen dadas por

$$\begin{aligned}
8\,(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= x_{1'}^3\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)+8S_2^1\} \\
&\quad +x_{1'}^2 x_{2'}\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\} \\
&\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)-8S_1^2\} \\
&\quad +x_{1'}^2\,\{8DT_{1;2}{}^1-4DT_{2;1}{}^1+16h-8\Phi_{12}\} \\
&\quad +x_{1'}x_{2'}\left\{8DT_{1;2}{}^2-4DT_{2;1}^2-4DT_{1;1}^1+8\Phi_{11}\right\} \\
&\quad +x_{2'}^2\,\{-4DT_{1;1}{}^2\} \\
&\quad +x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D+10hT_1^1+2hT_2^2-2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{12}+4(\hat{\Phi}_{21}-\hat{\Phi}_{12})\right\} \\
&\quad +x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D+8hT_1^2+2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{11}\right\} \\
&\quad +8\,\{\partial_1 h-h(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)+D\Phi_{11;2}-D\Phi_{12;1}\}\,, \\
8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{1'}^3\,\{-T_1^2\,\mathrm{tr}(T)-8S_1^2\} \\
&\quad +x_{1'}^2 x_{2'}\,\{T_2^1\,\mathrm{tr}(T)+8S_2^1\} \\
&\quad +x_{1'}x_{2'}^2\,\{(T_2^2)^2-(T_1^1)^2+8(S_2^2-S_1^1)\} \\
&\quad +x_{1'}^2\,\{4DT_{2;2}{}^1-4\Phi_{22}\} \\
&\quad +x_{1'}x_{2'}\,\{-8DT_{2;1}{}^1+4DT_{1;2}{}^1+4DT_{2;2}{}^2+16h\} \\
&\quad +x_{2'}^2\,\{-8DT_{2;1}{}^2+4DT_{1;2}{}^2+4\Phi_{11}\} \\
&\quad +x_{1'}\left\{16\rho_{22}^D+8hT_2^1-2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{22}\right\} \\
&\quad +x_{2'}\left\{-16\rho_{12}^D+2hT_1^1+10hT_2^2+2\,\mathrm{tr}(T)\Phi_{12}+4(\hat{\Phi}_{21}-\hat{\Phi}_{12})\right\} \\
&\quad +8\,\{\partial_2 h-h(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)+D\Phi_{12;2}-D\Phi_{22;1}\}\,.
\end{aligned}$$

Consideremos en primer lugar los términos de orden 3 en la expresión de $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$. De estos tres términos se obtiene que

$$S_2^1=-\frac{1}{8}T_2^1\,\mathrm{tr}(T),\quad S_1^2=-\frac{1}{8}T_1^2\,\mathrm{tr}(T)\quad \text{y}\quad S_2^2-S_1^1=-\frac{1}{8}\,\mathrm{tr}(T)(T_2^2-T_1^1),$$

pero, como estamos suponiendo que $X=\partial_{x^1}$, estas condiciones equivalen a que

$$\Gamma_{12}^1=-\frac{1}{8}T_2^1\,\mathrm{tr}(T),\quad \Gamma_{11}^2=-\frac{1}{8}T_1^2\,\mathrm{tr}(T)\quad \text{y}\quad \Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1=-\frac{1}{8}\,\mathrm{tr}(T)(T_2^2-T_1^1). \tag{5.1}$$

Analicemos ahora lo que ocurre con los términos cuadráticos en los polinomios anteriores. De los coeficientes de $x_{1'}^2$ y $x_{1'}x_{2'}$ en la expresión de $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$ se obtiene directamente que

$$\begin{aligned}
\Phi_{22} &= DT_{2;2}{}^1, \\
16\,h &= 8DT_{2;1}{}^1-4DT_{1;2}{}^1-4DT_{2:2}{}^2.
\end{aligned}$$

Ahora, a partir del coeficiente de $x_{1'}^2$ en la expresión de $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ y la expresión obtenida para la función h se tiene que

$$8\Phi_{12} = 4DT_{1;2}{}^1 + 4DT_{2;1}{}^1 - 4DT_{2;2}{}^2.$$

Teniendo ahora en cuenta el coeficiente de $x_{1'}^2$ en $(\nabla J_h)_{1;2}{}^4$ se obtiene la siguiente expresión para Φ_{11}

$$4\Phi_{11} = 8DT_{2;1}{}^2 - 4DT_{1;2}{}^2.$$

Por tanto, el campo de tensores Φ y la función h están determinados por

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{11} & = & 2DT_{2;1}{}^2 - DT_{1;2}{}^2 \\ \Phi_{12} & = & \frac{1}{2}DT_{1;2}{}^1 + \frac{1}{2}DT_{2;1}{}^1 - \frac{1}{2}DT_{2;2}{}^2 \\ \Phi_{22} & = & DT_{2;2}{}^1 \\ h & = & \frac{1}{2}DT_{2;1}{}^1 - \frac{1}{4}DT_{1;2}{}^1 - \frac{1}{4}DT_{2:2}{}^2 \end{array} \tag{5.2}$$

Así, las componentes no nulas de ∇J_h se reducen a

$$\begin{array}{rcl} 8\left(\nabla J_h\right)_{1;1}{}^4 & = & x_{1'}x_{2'}\{-4DT_{1;1}{}^1 + 12DT_{2;1}{}^2\} \\ & & +x_{2'}^2\{-4DT_{1;1}{}^2\} \\ & & +x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D + 10hT_1^1 + 2hT_2^2 - 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{12})\right\} \\ & & +x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D + 8hT_1^2 + 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{11}\right\} \\ & & +8\left\{\partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1}\right\}, \\ 8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 & = & x_{1'}\left\{16\rho_{22}^D + 8hT_2^1 - 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{22}\right\} \\ & & +x_{2'}\left\{-16\rho_{12}^D + 2hT_1^1 + 10hT_2^2 + 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{12})\right\} \\ & & +8\left\{\partial_2 h - h(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}\right\}. \end{array}$$

Considerando ahora los coeficientes de $x_{1'}x_{2'}$ y $x_{2'}^2$ en $(\nabla J_h)_{1;1}{}^4$ se tiene

$$DT_{1;1}{}^1 = 3DT_{2;1}{}^2, \quad \text{y} \quad DT_{1;1}{}^2 = 0.$$

Integrando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos que

$$T_1^2(x^1, x^2) = T_1^2(x^2), \quad \text{y} \quad T_1^1(x^1, x^2) = 3T_2^2(x^1, x^2) + t_{11}(x^2) \tag{5.3}$$

para alguna función $t_{11}(x^2)$ arbitraria.

Por tanto, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 8\left(\nabla J_h\right)_{1;1}{}^4 & = & x_{1'}\left\{16\rho_{21}^D + 10hT_1^1 + 2hT_2^2 - 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat{\Phi}_{21} - \hat{\Phi}_{12})\right\} \\ & & +x_{2'}\left\{-16\rho_{11}^D + 8hT_1^2 + 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{11}\right\} \\ & & +8\left\{\partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1}\right\}, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
8(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= x_{1'}\left\{16\rho^D_{22} + 8hT^1_2 - 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{22}\right\} \\
&\quad + x_{2'}\left\{-16\rho^D_{12} + 2hT^1_1 + 10hT^2_2 + 2\operatorname{tr}(T)\Phi_{12} + 4(\hat\Phi_{21} - \hat\Phi_{12})\right\} \\
&\quad + 8\left\{\partial_2 h - h(\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12}) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}\right\}.
\end{aligned}
$$

A partir de los términos lineales en las expresiones de las componentes de la derivada covariante de la estructura paracompleja, teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para las componentes del campo de tensores Φ y la función h, se obtienen las expresiones de las componentes del tensor de Ricci de la conexión afín en función del campo de tensores T y su derivada covariante como sigue

$$
\begin{aligned}
8\rho^D_{11} &= (2DT_{2;1}{}^1 - DT_{1;2}{}^1 - DT_{2;2}{}^2)\, T^2_1 + (2DT_{2;1}{}^2 - DT_{1;2}{}^2)\operatorname{tr}(T) \\
16\rho^D_{12} &= \tfrac{1}{2}\,(DT_{2;2}{}^2 - 3DT_{1;2}{}^1)\, T^1_1 + \tfrac{1}{2}\,(16DT_{2;1}{}^1 + DT_{1;2}{}^1 - 11DT_{2;2}{}^2)\, T^2_2 \\
&\quad + (8DT_{2;1}{}^2 - 4DT_{1;2}{}^2)\, T^1_2 - 4DT_{2;2}{}^1 T^2_1 \\
16\rho^D_{21} &= -\tfrac{1}{2}\,(16DT_{2;1}{}^1 - DT_{1;2}{}^1 - 11DT_{2;2}{}^2)\, T^1_1 + \tfrac{1}{2}\,(3DT_{1;2}{}^1 - DT_{2;2}{}^2)\, T^2_2 \\
&\quad + (8DT_{2;1}{}^2 - 4DT_{1;2}{}^2)\, T^1_2 - 4DT_{2;2}{}^1 T^2_1 \\
8\rho^D_{22} &= DT_{2;2}{}^1\operatorname{tr}(T) - (2DT_{2;1}{}^1 - DT_{1;2}{}^1 - DT_{2;2}{}^2)\, T^1_2
\end{aligned}
$$

Considerando la expresión de ρ^D_{22} anterior, de las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) se sigue que

$$2\partial_1\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{4}\partial_1(T^1_2)^2$$

y por tanto

$$\Gamma^1_{22}(x^1,x^2) = -\frac{1}{8}(T^1_2(x^1,x^2))^2 + \gamma_{221}(x^2) \tag{5.4}$$

para alguna función $\gamma_{221}(x^2)$. De modo análogo de la expresión de ρ^D_{21}, utilizando las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3), se sigue que

$$\partial_1\Gamma^1_{11} + \frac{3}{2}\partial_1(T^2_2)^2 + t_{11}\partial_1 T^2_2 + \frac{1}{4}T^2_1\partial_1 T^1_2 = 0$$

y por tanto

$$\Gamma^1_{11}(x^1,x^2) = -\frac{1}{4}T^1_2(x^1,x^2)T^2_1(x^2) - t_{11}(x^2)T^2_2(x^1,x^2) - \frac{3}{2}T^2_2(x^1,x^2)^2 + \gamma_{111}(x^2). \tag{5.5}$$

para alguna función $\gamma_{111}(x^2)$.

Considerando ahora la expresión de ρ^D_{12}, esta se reduce a

$$\partial_1\Gamma^2_{22} + \frac{1}{2}\partial_1(T^1_2T^2_2) - \gamma'_{111} - \frac{11}{32}t_{11}t'_{11} = 0,$$

y por tanto

$$\Gamma^2_{22}(x^1,x^2) = -\frac{1}{2}T^1_2(x^1,x^2)T^2_2(x^1,x^2) + x^1(\gamma'_{111}(x^2) + \frac{11}{32}t_{11}(x^2)t'_{11}(x^2)) + \gamma_{222}(x^2). \tag{5.6}$$

Considerando ahora la expresión de ρ_{11}^D y, teniendo en cuenta las expresiones anteriores, esta se reduce a

$$\gamma'_{111} + \frac{11}{32} t_{11} t'_{11} = 0$$

y por tanto

$$\gamma_{111}(x^2) = -\frac{11}{64} t_{11}(x^2)^2 + \kappa, \tag{5.7}$$

para alguna consante $\kappa \in \mathbb{R}$.

Recopilando la información anterior, la estructura geométrica de la superficie afín Σ en las coordenadas (x^1, x^2) donde $X = \partial_{x^1}$ viene dada por

$$\Gamma_{ij}^k : \begin{cases} \Gamma_{11}^1(x^1,x^2) = -\frac{1}{4} T_2^1(x^1,x^2) T_1^2(x^2) - t_{11}(x^2) T_2^2(x^1,x^2) - \frac{3}{2} T_2^2(x^1,x^2)^2 - \frac{11}{64} t_{11}(x^2)^2 + \kappa \\ \Gamma_{11}^2(x^1,x^2) = -\frac{1}{8} T_1^2(x^2) \left(4T_2^2(x^1,x^2) + t_{11}(x^2)\right) \\ \Gamma_{12}^1(x^1,x^2) = -\frac{1}{8} T_2^1(x^1,x^2) \left(4T_2^2(x^1,x^2) + t_{11}(x^2)\right) \\ \Gamma_{12}^2(x^1,x^2) = -\frac{1}{4} T_2^1(x^1,x^2) T_1^2(x^2) - \frac{1}{4} T_2^2(x^1,x^2) t_{11}(x^2) - \frac{1}{2} T_2^2(x^1,x^2)^2 - \frac{3}{64} t_{11}(x^2)^2 + \kappa \\ \Gamma_{22}^1(x^1,x^2) = -\frac{1}{8} T_2^1(x^1,x^2)^2 + \gamma_{221}(x^2) \\ \Gamma_{22}^2(x^1,x^2) = -\frac{1}{2} T_2^1(x^1,x^2) T_2^2(x^1,x^2) + \gamma_{222}(x^2) \end{cases}$$

$$T_i^k : \begin{cases} T_1^1(x^1,x^2) = 3T_2^2(x^1,x^2) + t_{11}(x^2) \\ T_1^2(x^1,x^2) = T_1^2(x^2) \\ T_2^1(x^1,x^2) \\ T_2^2(x^1,x^2) \end{cases}$$

$$\Phi_{ij} : \begin{cases} \Phi_{11}(x^1,x^2) = 2\partial_1 T_2^2(x^1,x^2) - (T_1^2)'(x^2) - T_1^2(x^2)\gamma_{222}(x^2) + t_{11}(x^2)\left(\frac{1}{8} T_2^1(x^1,x^2)\right. \\ \qquad \left. + T_2^2(x^1,x^2)^2 - \kappa\right) + T_2^2(x^1,x^2)^3 + T_2^2(x^2)\left(\frac{1}{2} T_2^1(x^1,x^2) T_1^2(x^2) - 2\kappa\right) \\ \qquad + \frac{3}{64} t_{11}(x^2)^3 + \frac{11}{32} t_{11}(x^2)^2 T_2^2(x^1,x^2) \\ \Phi_{12}(x^1,x^2) = \frac{1}{2}\left(t'_{11}(x^2) + 2\partial_2 T_2^2(x^1,x^2) + \partial_1 T_2^1(x^1,x^2)\right) + \frac{1}{64} T_2^1(x^1,x^2)\left(3t_{11}(x^2)^3\right. \\ \qquad \left. + 16 t_{11}(x^2) T_2^2(x^1,x^2) + 8\left(4T_2^2(x^1,x^2) + T_2^1(x^1,x^2) T_1^2(x^2) - 8\kappa\right)\right) \\ \qquad + T_1^2(x^2)\gamma_{221}(x^2) \\ \Phi_{22}(x^1,x^2) = \frac{1}{4} T_2^1(x^1,x^2)^2 T_2^2(x^1,x^2) - \left(t_{11}(x^2) + 2T_2^2(x^1,x^2)\right)\gamma_{221}(x^2) + \partial_2 T_2^1(x^1,x^2) \\ \qquad - T_2^1(x^1,x^2)\gamma_{222}(x^2). \end{cases}$$

Por tanto, la estructura (D, T, Φ) depende de T_2^1 y T_2^2, funciones de las variables (x^1, x^2), de T_1^2, t_{11}, γ_{221} y γ_{222}, funciones de la variable x^2 y de $\kappa \in \mathbb{R}$.

Finalmente, utilizando las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3), las expresiones

$$(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 = \partial_1 h - h(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + D\Phi_{11;2} - D\Phi_{12;1},$$

$$(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 \;=\; \partial_2 h - h(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) + D\Phi_{12;2} - D\Phi_{22;1}.$$

se reducen a

$$\begin{aligned}(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= -(T_1^2)'' - (T_1^2)'\gamma_{222} - T_1^2\gamma_{222}' + \left(\tfrac{3}{128}t_{11}^2 - \tfrac{\kappa}{2}\right)t_{11}',\\ (\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= \tfrac{1}{4}(t_{11}'' - \gamma_{222}t_{11}' + 8\gamma_{221}(T_1^2)' + 4\gamma_{221}'T_1^2).\end{aligned}$$

- Si $T_1^2(x^2) \neq 0$ en un punto, existe un abierto denso en torno a tal punto en el que $T_1^2 \neq 0$ y la primera de las expresiones anteriores nos permite integrar γ_{222} obteniendo

  $$\gamma_{222}(x^2) = \frac{1}{T_1^2(x^2)^2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\kappa t_{11}(x^2) + \frac{t_{11}(x^2)^3}{128} - (T_1^2)'(x^2)\right)$$

  para alguna constante $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraria. Ahora tenemos

  $$\begin{aligned}(\nabla J_h)_{1;2}{}^4 = \tfrac{1}{512T_1^2}\{&(64\kappa t_{11} - t_{11}^3 - 128\,(\alpha - (T_1^2)'))\,t_{11}'\\ &+128\,(8\gamma_{222}(T_1^2)' + 4T_1^2\gamma_{221}' + t_{11}'')\,T_1^2\}\end{aligned}$$

  de donde podemos integrar γ_{221} obteniendo

  $$\gamma_{221}(x^2) = \frac{1}{T_1^2(x^2)^2}\left\{\beta + \frac{1}{4}\alpha t_{11}(x^2) - \frac{\kappa}{16}t_{11}(x^2)^2 + \frac{1}{2048}t_{11}(x^2)^4 - \frac{1}{4}T_1^2(x^2)t_{11}'(x^2)\right\}$$

  para alguna constante $\beta \in \mathbb{R}$.

  Observación 5.2. En esta situación tenemos que las superficies para-Kähler Bochner llanas están determinadas por funciones $T_2^1(x^1,x^2)$, $T_2^2(x^1,x^2)$, $T_1^2(x^2)$ y $t_{11}(x^2)$ y constantes κ, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $T_1^2(x^2) \equiv 0$, entonces las expresiones de las componentes no nulas de la derivada covariante de J_h se reducen a

  $$\begin{aligned}(\nabla J_h)_{1;1}{}^4 &= \left(\tfrac{3}{128}t_{11}^2 - \tfrac{\kappa}{2}\right)t_{11}'\\ (\nabla J_h)_{1;2}{}^4 &= \tfrac{1}{4}(t_{11}'' - \gamma_{222}t_{11}'),\end{aligned}$$

  de donde se deduce que la función t_{11} ha de ser constante $t_{11}(x^2) = t_{11}$.

  Observación 5.3. En esta situación tenemos que las superficies para-Kähler Bochner llanas están determinadas por funciones $T_2^1(x^1,x^2)$, $T_2^2(x^1,x^2)$, $\gamma_{221}(x^2)$ y $\gamma_{222}(x^2)$ y constantes $\kappa, t_{11} \in \mathbb{R}$

Ejemplo 5.4. Sea Σ una superficie y sean X un campo de vectores y T un campo de tensores de tipo $(1,1)$ en Σ tales que en cierto sistema local de coordenadas (x^1,x^2) se escriben

$$X = \partial_{x^1} \quad \text{y} \quad T = c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

A partir de la construcción anterior, vamos a dar estructura de superficie a afín a Σ de modo que $(T^*\Sigma, g, J_h)$, con $g = \iota X(\iota\mathrm{Id}\circ\mathrm{Id}) + \iota T\circ\iota\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi$, sea para-Kähler Bochner llana.

En esta situación, estamos tomando $t_{11}(x^2) = 0$ y los únicos símbolos de Christoffel no nulos de la superficie vendrán dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{c^2}{4}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{c^2}{4} \quad \text{y} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{c^2}{8}; \tag{5.9}$$

considerando $\gamma_{221}(x^2)$ y $\gamma_{222}(x^2)$ constantemente nulas. Así, el campo de tensores Φ está determinado por $\Phi_{12}(x^1, x^2) = -\frac{c^3}{8}$ y la función h es nula.

Sea (Σ, D) una superficie afín con D determinada por (5.9). Consideremos un campo de vectores X y un campo de tensores T de tipo $(1,1)$ en Σ que en ciertas coordenadas (x^1, x^2) en Σ se escriben como en (5.8) y sea Φ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ determinado por $\Phi_{12}(x^1, x^2) = -\frac{c^3}{8}$. Entonces, $(T^*\Sigma, g = \iota X(\iota\mathrm{Id}\circ\mathrm{Id}) + \iota T\circ\iota\mathrm{Id} + g_D + \pi^*\Phi, J_0)$ es para-Kähler Bochner llana, donde la métrica y la estructura casi paracompleja se escriben localmente en coordenadas de Walker $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ como

$$g = \begin{pmatrix} x_{1'}^3 - cx_{1'}x_{2'} - \frac{c^2}{2}x_{1'} & \frac{1}{8}(c+2x_{2'})(4x_{1'}^2 - 2cx_{2'} - c^2) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}(c+2x_{2'})(4x_{1'}^2 - 2cx_{2'} - c^2) & \frac{1}{4}(c+2x_{2'})^2 x_{1'} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_{1'}^3 - cx_{1'}x_{2'} - \frac{c^2}{2}x_{1'} & \frac{1}{8}(c+2x_{2'})(4x_{1'}^2 - 2cx_{2'} - c^2) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}(c+2x_{2'})(4x_{1'}^2 - 2cx_{2'} - c^2) & \frac{1}{4}(c+2x_{2'})^2 x_{1'} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

[1] D. V. Alekseevsky, B. Guilfoyle, W. Klingenberg, On the geometry of spaces of oriented geodesics, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **40** (2011), 389–409.

[2] Z. Afifi, Riemann extensions of affine connected spaces, *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2)* **5** (1954), 312–320.

[3] A. Borowiec, M. Francaviglia, I. Volovich, Anti-Kählerian manifolds, *Differential Geom. Appl.* **12** (2000), 281–289.

[4] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds* Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, **5**. Morgan & Claypool Publishers, Williston, VT, 2009.

[5] R. Bryant, Bochner-Kähler metrics, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 623–715.

[6] M. Cahen, L. J. Schwachhöfer, Special symplectic connections, *J. Diff. Geom.* **83** (2009), 229–271.

[7] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey, R. Vázquez-Lorenzo, The geometry of modified Riemannian extensions, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **465** (2009), 2023–2040.

[8] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey, I. Gutiérrez-Rodríguez, R. Vázquez-Lorenzo, Affine surfaces which are Kähler, para-Kähler, or nilpotent Kähler, *Results Math.* **73** (2018), no. 4, Art. 135, 24 pp.

[9] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, M. Sixto-Neira, M. E. Vázquez-Abal, Biharmonic maps on tangent and cotangent bundles, *J. Geom. Phys.* **101** (2016), 1–10.

[10] V. Cortés, C. Mayer, T. Mohaupt, F. Saueressig, Special geometry of Euclidean supersymmetry 1. Vector multiplets, *J. High Energy Phys.* **3** (2004), 028.

[11] V. Cruceanu, P. Fortuny, P. M. Gadea, A survey on paracomplex geometry, *Rocky Mountain J. Math.* **26** (1) (1996), 83–115.

[12] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, 2nd Ed., Birkhäuser Boston, 1993, 156–158.

[13] J. Davidov, J.C. Díaz-Ramos, E. García-Río, Y. Matsushita, O. Muškarov, R.Vázquez-Lorenzo, *Almost Kähler Walker 4-manifolds*, Journal of Geometry and Physics, 2013, Vol. 57, No. 3, 1075–1088.

[14] A. Derdzinski, Connections with skew-symmetric Ricci tensor on surfaces, *Results Math.* **52** (2008), 223–245.

[15] J.C. Díaz-Ramos, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *J. Geom. Anal.* **16** (2006), 39–52.

[16] P. M. Gadea, A. Montesinos Amilibia, Spaces of constant para-holomorphic sectional curvature, *Pacific J. Math.* **136** (1989), 85–101.

[17] E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo, *Applications of Affine and Weyl Geometry*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, **13**. Morgan & Claypool Publishers, Williston, VT, 2013.

[18] P. Libermann, Sur les structures presque paracomplexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), 2517–2519.

[19] P. Libermann, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **36** (1954), 27–120.

[20] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, **103**. Academic Press, Inc., New York, 1983.

[21] R. Vázquez-Lorenzo, *Curvatura de variedades para-Kählerianas*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología **82**, Univ. Santiago de Compostela, 1994.

[22] A. G. Walker, *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) **1** (1950), 69–79.

[23] K. Yano, M. Kon, *Structures on manifolds*, World Scientific, 1984, Series in Pure Mathematics, Vol. 3.