

XABIER VALLE REGUEIRO

**SOLITÓNS ASOCIADOS
A ECUACIONES
DE EVOLUCIÓN GEOMÉTRICA
E ESTRUCTURAS
QUASI-EINSTEIN**

**145
2021**

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

XABIER VALLE REGUEIRO

**SOLITÓNS ASOCIADOS A ECUACIONES
DE EVOLUCIÓN GEOMÉTRICA
E ESTRUCTURAS QUASI-EINSTEIN**

145
2021

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2021



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>



CENTRO INTERNACIONAL DE ESTUDOS
DE DOUTORAMENTO E AVANZADOS
DA USC (CIEDUS)

TESE DE DOUTORAMENTO

**Solitóns asociados a ecuacións de evolución
xeométrica e estruturas quasi-Einstein**

Xabier Valle Regueiro

ESCOLA DE DOUTORAMENTO INTERNACIONAL
PROGRAMA DE DOUTORAMENTO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

ANO 2019

A presente tese foi dirixida por Miguel Brozos Vázquez e Eduardo García Río. Defendida na Universidade de Santiago de Compostela o 9 de xullo de 2019.

Índice xeral

Summary and conclusions	1
Resumo	13
1 Preliminares	25
1.1 Variedades semi-riemannianas e variedades afíns	25
1.1.1 Xeometría semi-riemanniana	26
1.1.2 Xeometría afín	27
1.2 Operadores diferenciais	27
1.3 A curvatura	28
1.3.1 Operadores diferenciais e curvatura	30
1.3.2 Tensor de Weyl	32
1.4 Autodualidade e anti-autodualidade	35
1.4.1 Autodualidade e tensor de Cotton	37
1.5 Métricas conformes	38
1.6 Produtos deformados	39
1.7 Métricas de Walker	42
1.7.1 Coordenadas de Walker	42
1.7.2 Extensións de Riemann	43
I A ecuación quasi-Einstein en xeometría semi-riemanniana	47
2 Solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans	51
2.1 Introducción	51
2.1.1 Casos particulares da ecuación do case solitón	52
2.2 Principais elementos xeométricos dos case solitóns	53
2.3 Xeometría local de solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans	54
2.3.1 O caso non-isotrópico	55
2.3.2 O caso isotrópico	57
3 Métricas quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás	63
3.1 Introducción	63
3.1.1 Linearización da ecuación	64

3.1.2	Casos particulares da ecuación quasi-Einstein xeneralizada	65
3.2	Principais elementos xeométricos nas variedades quasi-Einstein xeneralizadas . . .	66
3.3	Xeometría local de variedades quasi-Einstein hemi conformemente chás	69
3.3.1	O caso non-isotrópico	70
3.3.2	O caso isotrópico	72
3.4	Exemplos	78
3.4.1	Exemplos obtidos a partir do teorema 3.19	78
3.4.2	Superficies afíns con tensor $(1, 1)$ nilpotente e paralelo	78
II	A ecuación quasi-Einstein en xeometría afín	81
4	A ecuación quasi-Einstein afín	85
4.1	Introdución	85
4.2	Propiedades elementais da ecuación	86
4.3	Equivalencia proxectiva	89
4.3.1	Equivalencia proxectiva en superficies afíns quasi-Einstein	97
4.3.2	Ecuación quasi-Einstein afín e equivalencia afín	99
4.4	Exemplos	100
4.4.1	Exemplos homoxéneos	100
4.4.2	Exemplos non homoxéneos	102
5	Xeometría localmente homoxénea	105
5.1	Introdución	105
5.1.1	Equivalencia linear dos modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B}	107
5.2	Superficies de tipo \mathcal{A}	110
5.3	Superficies tipo \mathcal{B}	115
5.4	Superficies tipo \mathcal{C}	118
6	A ecuación quasi-Einstein afín para os modelos tipo \mathcal{A}	121
6.1	Introdución	121
6.2	A ecuación quasi-Einstein afín na clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A}	125
6.3	Modelos tipo \mathcal{A} chans	127
6.3.1	A clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A} chans	128
6.3.2	Consecuencias da clasificación linear de modelos chans	131
6.4	Modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$	132
6.4.1	A clasificación linear dos modelos con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$	133
6.4.2	O espazo de solucións para as $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$	135
6.5	Modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$	137
7	A ecuación quasi-Einstein afín para os modelos tipo \mathcal{B}	149
7.1	Introdución	149
7.2	Modelos tipo \mathcal{B} chans	151

7.2.1	A clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{B} chans	151
7.3	Modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$	154
7.4	Modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$	156
7.5	Modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$	157
7.5.1	Solitóns de Yamabe en modelos tipo \mathcal{B}	161
7.5.2	Modelos tipo \mathcal{B} fortemente proxectivamente chans	162
7.5.3	Caso xeral	165
8	Aplicacións da ecuación quasi-Einstein afín	167
8.1	Introdución	167
8.2	Completude afín Killing	168
8.2.1	Completude afín Killing para modelos tipo \mathcal{A}	168
8.2.2	Completude afín Killing para modelos tipo \mathcal{B}	171
8.3	A completude xeodésica	173
8.4	Estruturas quasi-Einstein Kähler irreducibles	178
	Bibliografía	180

Summary and conclusions

The study of differential equations on manifolds is a natural problem widely investigated in differential geometry. The Obata's equation and the conformally Einstein equation are two classical examples. This thesis is devoted to the quasi-Einstein equation. This is an overdetermined PDE system defined on a pseudo-Riemannian manifold. Our analysis deals with the local structure of those metrics satisfying the equation under certain geometric conditions. This problem leads to a new equation in the affine setting: the affine quasi-Einstein equation. For this reason, we structure this work into two parts. In the first one we consider the quasi-Einstein equation in the pseudo-Riemannian setting, while in the second one we investigate the associated affine problem. In order to introduce the preliminary notions we need for our analysis, we devote Chapter 1 to establishing some notation and recall basic results. Among other concepts, we describe some basic facts about warped products, Walker manifolds and Riemannian extensions.

A pseudo-Riemannian manifold (M, g) is said to be *generalized quasi-Einstein* if there exist a function f and a constant μ satisfying the equation

$$\text{Hes}_f + \rho - \mu df \otimes df = \lambda g \text{ for some } \lambda \in C^\infty(M), \quad (1)$$

where Hes_f and ρ denote the Hessian of f and the Ricci tensor, respectively. The function λ is determined by taking traces in the equation and f is called the *potential function*. Manifolds satisfying the generalized quasi-Einstein equation with constant λ are called *quasi-Einstein*.

In what follows, we present some special cases of the generalized quasi-Einstein equation. These show that the present equation brings together many important geometric conditions. For instance, if f is constant, then the equation reduces to the Einstein equation. For $\mu = 0$, we get the gradient Ricci almost soliton equation [95]

$$\text{Hes}_f + \rho = \lambda g \text{ for some } \lambda \in C^\infty(M). \quad (2)$$

For convenience, we denote the gradient Ricci almost soliton structure by (M, g, f) . If λ is constant, we obtain the gradient Ricci soliton equation. Metrics satisfying this equation are self-similar solutions to the Ricci flow defined by $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\rho(t)$ [65]. This is, they are the fixed points of this flow modulo scalings and diffeomorphisms. The Ricci flow has received special attention in recent years due to its importance in the proof of the Poincaré's conjecture given by Perelman. As a result, gradient Ricci solitons have been broadly investigated, both in the Riemannian [30, 95] and pseudo-Riemannian setting [105]. If λ is non-constant, the metrics we obtain are not just a formal generalization of the previous ones. They also correspond to self-similar solutions for some geometric flows. This is the case of the Ricci-Bourguignon flow

defined by the evolution equation

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2(\rho(t) - \kappa \tau(t) g(t)), \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

where τ denotes the scalar curvature. The self-similar solutions of this flow are called κ -Einstein solitons and are characterized by the equation $\text{Hes}_f + \rho = (\kappa\tau + c)g$ for some $c \in \mathbb{R}$. Therefore, they constitute a class of gradient Ricci almost solitons [38, 43].

On the other hand, when we consider the quasi-Einstein equation (1) for $\mu \neq 0$, we also obtain interesting geometric conditions. In order to introduce some of them, and since the $df \otimes df$ term is non-linear, we make the change of variable $h = e^{-\mu f}$. This transforms the quasi-Einstein equation (1) into the linear equation

$$\text{Hes}_h - \mu h \rho = -\mu h \lambda g. \quad (3)$$

This is called the *linearized quasi-Einstein equation*. For convenience, we denote by (M, g, h, μ) the quasi-Einstein structure determined by Equation (3).

If (M, g) is Einstein, then the linearized quasi-Einstein equation (3) reduces to the Möbius equation $\text{Hes}_h = \mu h \left(\frac{\tau}{n} - \lambda\right) g$ for $\Delta h = \mu h(\tau - n\lambda)$ [101] and if, additionally, λ is constant, then it reduces to Obata's equation $\text{Hes}_h + \kappa h g = 0$, where $\kappa = \mu \left(\frac{\tau}{n} - \lambda\right)$ is constant [87].

Let $\mathcal{M}_1(M)$ denote the space of equivalence classes of smooth Riemannian metrics of volume one on M and let $\mathcal{S} : g \in \mathcal{M}_1 \mapsto \mathcal{S}(g) = \int_M \tau^2 \text{dvol}_g$ be the functional given by the squared L^2 -norm of the scalar curvature restricted to metrics of volume one. A metric g is critical for \mathcal{S} if $\text{Hes}_\tau - \tau \rho = \left\{\frac{1}{n}\Delta\tau - \frac{1}{n}\tau^2\right\}g$ [5, 37]. Hence any critical metric is quasi-Einstein with $\mu = 1$ and potential function given by the scalar curvature. Furthermore quasi-Einstein structures $(M, g, h, 1)$ with $\lambda = -\frac{\Delta h}{h}$ correspond to *static manifolds*. They constitute the Riemannian base manifold of a Lorentzian static spacetime $(\mathbb{R} \times M, -h^2 dt^2 + g)$ obeying the Einstein equation for a perfect fluid [68, 70].

Another important situation occurs when $\mu = -\frac{1}{\dim M - 2}$. Manifolds satisfying the quasi-Einstein equation (1) for this value of μ are conformally Einstein. This is, they are Riemannian structures with an Einstein representative in their conformal class [8]. This case is distinguished in our analysis and exhibits some interesting phenomena.

Finally, we consider quasi-Einstein manifolds with $\mu = \frac{1}{n}$ for some integer $n \geq 2$. These metrics appear naturally when we study Einstein warped products. On the one hand, one has that the base of an Einstein warped product is quasi-Einstein. Conversely, let $(B, g_B, f, \frac{1}{n})$ be a quasi-Einstein structure for some integer $n \geq 2$. Then, there exists an appropriate Einstein fiber F of dimension n such that $B \times_f F$ is an Einstein warped product [67, 80].

The study of the local structure of gradient Ricci (almost) solitons and quasi-Einstein metrics is a difficult problem in general. For that reason, considering the local structure of these metrics under some geometric conditions is a natural question that has received special attention during the last years. Since the curvature tensor is reflected in Equations (2) and (3) through the Ricci tensor, a first step is to consider those situations where the Ricci tensor determines the curvature tensor. This is the case for locally conformally flat gradient Ricci (almost) solitons and quasi-Einstein manifolds. The local structure of these metrics has been broadly investigated [12, 21, 39, 55].

In dimension four, the Weyl tensor decomposes into its self-dual and anti-self-dual parts. Thus, we may weaken the locally conformally flat condition and consider half conformally flat (i.e., self-dual or anti-self-dual) manifolds. Therefore, the starting point of our work is to give the local structure of gradient Ricci almost solitons and quasi-Einstein manifolds under this weaker condition.

The gradient Ricci almost soliton equation (2) and the quasi-Einstein equation (3) reflect the geometry of the level sets of the potential function f by means of their second fundamental form Hes_f . Thereby, it is natural to consider separately the cases when those level sets are degenerate and non-degenerate hypersurfaces. We say that a gradient Ricci (almost) soliton or quasi-Einstein manifold is *non-isotropic* if $\|\nabla f\| \neq 0$ and it is *isotropic* when $\|\nabla f\| = 0$ and $\nabla f \neq 0$. For non-isotropic half conformally flat structures, the underlying geometry is quite rigid. In fact, all of them are locally isometric to a warped product with 1-dimensional base and locally conformally flat in the three possible signatures in dimension four (cf. Theorems 2.6 and 3.10). Furthermore, in the Lorentzian setting half conformal flatness is equivalent to local conformal flatness and in Riemannian signature the structures under consideration are always non-isotropic. This means there are no half conformally flat quasi-Einstein manifolds which are not locally conformally flat in these signatures.

The above considerations turn our interest to the case of neutral signature $(2, 2)$. Isotropic half conformally flat gradient Ricci (almost) solitons or quasi-Einstein manifolds are shown to be locally Walker and $\tau = 4\lambda$ (cf. Theorems 2.9 and 3.13). As a consequence, we may consider the orientation given by the Walker structure. In principle, self-duality and anti-self-duality are interchangeable concepts, but once we fix the orientation, this is not true anymore. For this reason, self-dual and anti-self-dual isotropic structures have very different behaviors. In fact, all anti-self-dual isotropic gradient Ricci (almost) solitons or quasi-Einstein manifolds with the orientation given by the Walker structure have $\tau = 0$ and, thus, $\lambda = 0$. Consequently, there are no anti-self-dual examples of these structures with non-constant λ .

Our aim in the first part of the thesis (chapters 2 and 3) is to give a local characterization of self-dual generalized quasi-Einstein manifolds. To do so, we distinguish two possibilities: λ is constant and λ is non-constant. For constant λ , we obtain that the underlying structure is a deformed Riemannian extension $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ of an affine surface (Σ, D) , where Φ is a symmetric $(0, 2)$ -tensor field on Σ . Moreover, the potential function is the pullback of a function on Σ satisfying certain affine equation. If, on the contrary, λ is non-constant, then the underlying structure is a modified Riemannian extension $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ of an affine surface (Σ, D) , where Φ is a symmetric $(0, 2)$ -tensor field and T is a $(1, 1)$ -tensor field on Σ . Furthermore, the potential function is again the pullback of a function on Σ , but in this case it does not have additional restrictions.

In Chapter 2, we consider half conformally flat gradient Ricci almost solitons. The following theorem is the main result of this chapter and it summarizes the local structure of these metrics.

Theorem 2.11. *Let (M, g, f) be a self-dual gradient Ricci almost soliton of signature $(2, 2)$ which is not Ricci flat. Then:*

- (1) *If (M, g) is non-isotropic, then (M, g) is locally conformally flat and is locally isometric to a warped product of the form $I \times_{\varphi} N$, where $I \subset \mathbb{R}$ and N is of constant curvature.*

- (2) If (M, g) is isotropic and λ is constant, then $\lambda = 0$ and (M, g) is locally isometric to a deformed Riemannian extension $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ of an affine surface (Σ, D) and $f = \pi^*\hat{f}$ with $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ satisfying the affine soliton equation $\text{Hes}_{\hat{f}}^D + \rho_s^D = 0$.
- (3) If (M, g) is isotropic and λ is non-constant, then (M, g) is locally isometric to a modified Riemannian extension $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ of an affine surface (Σ, D) and $f = \pi^*\hat{f}$ for some $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. Moreover, there exists $C \in \mathbb{R}$ such that $\lambda = \frac{3}{2}Ce^{-f}$, $T = Ce^{-f}\text{Id}$ and $\Phi = \frac{2}{C}e^f(\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D)$.

The previous theorem not only gives the local structure of these metrics. It also provides a construction method for examples, showing that there exist non-trivial self-dual gradient Ricci almost solitons that are not locally conformally flat. Assertion (2) was originally established in [11]. Metrics described in Assertion (2) are obtained from affine surfaces (Σ, D) for which there exists a solution for the affine gradient Ricci soliton equation $\text{Hes}_{\hat{f}}^D + \rho_s^D = 0$. This transforms the original pseudo-Riemannian problem into an affine problem which is much less rigid. This was already studied in [14]. Finally, metrics described in Assertion (3) are obtained from any affine surface (Σ, D) and any $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. This concludes the analysis of Chapter 2.

In Chapter 3, we consider the case $\mu \neq 0$. This allows us to consider the linearized quasi-Einstein equation (3). The following theorem is the main result of this chapter. It describes the local structure of the self-dual quasi-Einstein manifolds.

Theorem 3.18. *Let (M, g, h, μ) be a self-dual generalized quasi-Einstein structure of signature $(2, 2)$ with $\mu \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$ which is not Ricci flat. Then:*

- (1) If (M, g) is non-isotropic, then (M, g) is locally conformally flat and it is locally isometric to a warped product of the form $I \times_\varphi N$, where $I \subset \mathbb{R}$ and N is of constant curvature.
- (2) If (M, g) is isotropic and λ is constant, then $\lambda = 0$ and (M, g) is locally isometric to a deformed Riemann extension $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ of an affine surface (Σ, D) with $h = \pi^*\hat{h}$ for some $\hat{h} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ satisfying the affine quasi-Einstein equation

$$\text{Hes}_{\hat{h}}^D - 2\mu\hat{h}\rho_s^D = 0. \quad (4)$$

- (3) If (M, g) is isotropic and λ is non-constant, then (M, g) is locally isometric to a modified Riemannian extension $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ of an affine surface (Σ, D) and $h = \pi^*\hat{h}$ for some $\hat{h} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. Moreover, there exists $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ such that $\lambda = \frac{3}{2}Ch^{\frac{1}{\mu}}$, $T = C\hat{h}^{\frac{1}{\mu}}\text{Id}$ and $\Phi = -\frac{2}{\mu C}\hat{h}^{-\frac{\mu+1}{\mu}}(\text{Hes}_{\hat{h}}^D - 2\mu\hat{h}\rho_s^D)$.

As in Theorem 2.11, the previous result not only gives the local structure of the generalized quasi-Einstein manifolds. It also provides a construction method of non-trivial examples for these metrics. This shows there exist self-dual quasi-Einstein manifolds that are not locally conformally flat (Section 3.4). Metrics described in Assertion (3) are obtained from any affine surface (Σ, D) and any $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. However, metrics described in Assertion (2) are obtained

from affine surfaces (Σ, D) for which there exists a solution \hat{f} to the equation (4). This transforms again the original pseudo-Riemannian problem into an affine problem. Therefore, our analysis moves naturally towards the problem of finding an affine surface admitting solutions for equation (4). For convenience, we redefine this equation as

$$\text{Hes}_{\hat{f}}^D - \mu \hat{f} \rho_s^D = 0 \text{ for some } \mu \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

This is called the *affine quasi-Einstein equation*. Although this is defined for surfaces, we may also consider the previous equation for arbitrary dimension. Motivated by these ideas, the second part of this work is devoted to the study of the affine quasi-Einstein equation (5). This is carried out in Chapters 4 to 8.

In Chapter 4 we examine the affine quasi-Einstein equation and provide some general properties, especially those concerning its space of solutions. The following theorem exhibits the good behavior of the affine quasi-Einstein equation in terms of differentiability. Let $E_p(\mu, D)$ denote the linear space of germs of solutions to the affine quasi-Einstein equation based at p and let $E(\mu, D)$ denote the space of global solutions.

Theorem 4.2. *Let $\mathcal{M} = (M, D)$ be an m -dimensional affine manifold and let $f \in E_p(\mu, D)$. Then, the following assertions hold:*

- (1) $f \in C^\infty(M)$ and if \mathcal{M} is real analytic, then f is real analytic.
- (2) If X is a germ of an affine Killing vector field based at p , then $X(f) \in E_p(\mu, D)$.
- (3) If $f(p) = 0$ and $df(p) = 0$, then $f \equiv 0$ in a neighborhood of p .
- (4) $\dim\{E_p(\mu, D)\} \leq m + 1$.
- (5) If M is simply connected and $\dim\{E_p(\mu, D)\}$ is constant for all $p \in M$, then f extends uniquely to an element of $E(\mu, D)$.

After setting these foundational results, we move forward to analyze the behavior of the affine quasi-Einstein equation under two different equivalence relations in the affine context. We first study *strong projective equivalence*, this is, we consider manifolds whose unparametrized geodesics and anti-symmetric Ricci tensors coincide. The following theorem shows that for an m -dimensional affine quasi-Einstein manifold the eigenvalue $\mu = \mu_m := -\frac{1}{m-1}$ plays a distinguished role.

Theorem 4.16. *Let $\mathcal{M} = (M, D)$ be an m -dimensional affine manifold.*

- (1) \mathcal{M} is strongly projectively flat if and only if $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m + 1$.
- (2) If $\dim\{E_p(\mu, D)\} = m + 1$ for some $\mu \neq \mu_m$, then \mathcal{M} is strongly projectively flat and Ricci flat.
- (3) If $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m + 1$ there exists a basis $\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$ for $E_p(\mu_m, D)$ such that $\phi_0(p) \neq 0$ and $\phi_i(p) = 0$ for $i > 0$. Then $\vec{z} = (z^1, \dots, z^m)$ with $z^i := \phi_i/\phi_0$ is a coordinate system in a neighborhood of p such that the unparametrized geodesics of \mathcal{M} are straight lines.

Theorem 4.16 exhibits the close relation between the affine quasi-Einstein equation and the strongly projectively flat character of the connection. This result can be improved for affine surfaces as follows.

Theorem 4.18. *Let \mathcal{M} be an affine surface. Then $\dim\{E_p(-1, D)\} \neq 2$. Moreover,*

- (1) \mathcal{M} is strongly projectively flat if and only if $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$.
- (2) If \mathcal{M} is strongly projectively flat and $\text{rank } \rho^D = 2$, then
 - (a) $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 0$ for $\mu \notin \{-1, 0\}$.
 - (b) $\dim\{E_p(0, D)\} = 1$.
- (3) If $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 3$ for $\mu \neq -1$, then \mathcal{M} is flat.

Another fundamental result in this second part of the thesis concerns a different equivalence relation in the affine setting. Two affine structures are said to be *affine equivalent* if there exists a diffeomorphism from one to another that preserves the connection. It turns out that the affine quasi-Einstein equation with $\mu = \mu_m$ in strongly projectively flat manifolds behaves very nicely under this type of transformations.

Theorem 4.20. *Let $\mathcal{M}_i := (M, D_i)$ for $i = 1, 2$ be two strongly projectively flat affine structures on the same underlying simply connected m -dimensional manifold M and let Ξ be a local diffeomorphism of M .*

- (1) If $E(\mu_m, D_1) = E(\mu_m, D_2)$, then $D_1 = D_2$.
- (2) If $\Xi^*E(\mu_m, D_1) = E(\mu_m, D_2)$, then $\Xi^*D_1 = D_2$.

Theorems 4.18 and 4.20 are essential for our analysis in Chapter 5, where we study the affine quasi-Einstein equation in the setting of locally homogeneous surfaces. An affine surface is said to be *locally homogeneous* if for any given two points p and q there exists a local diffeomorphism $\varphi : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{U}_q$ mapping a neighborhood \mathcal{U}_p of p into a neighborhood \mathcal{U}_q of q so that $\varphi(p) = q$ and the connection is preserved $\varphi^*D = D$. From the work of Opozda in [90] one obtains that these structures can be modeled locally in at least one of the following spaces:

- (A) $\mathcal{M} = (M, D)$ is a Type \mathcal{A} model if $M = \mathbb{R}^2$ and the Christoffel symbols are constants in the usual coordinates of \mathbb{R}^2 .
- (B) $\mathcal{M} = (M, D)$ is a Type \mathcal{B} model if $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ and the Christoffel symbols take the form $\Gamma_{ij}{}^k = (x^1)^{-1}C_{ij}{}^k$ for $C_{ij}{}^k$ constant in the usual coordinates (x^1, x^2) of $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
- (C) $\mathcal{M} = (M, D)$ is a Type \mathcal{C} model if M is the 2-sphere with the usual metric and D is its Levi-Civita connection.

Brozos-Vázquez, García-Río and Gilkey gave in [14, Theorem 4.12] a complete description of 2-dimensional homogeneous affine Ricci solitons up to affine equivalence. The situation for the affine quasi-Einstein setting is even richer, giving rise to a large number of examples which

are quasi-Einstein but not affine Ricci solitons. Also, there exist homogeneous affine surfaces admitting non-trivial solutions for both the affine gradient Ricci soliton equation and affine quasi-Einstein equation. These are essentially the Type \mathcal{A} surfaces with Ricci tensor of rank one (Remark 7.13).

In Chapter 5 we provide the form of a general solution to the affine quasi-Einstein equation for models of type \mathcal{A} , \mathcal{B} and \mathcal{C} . Using this information, we study the dimension of the space of solutions up to linear equivalence for different values of μ . We obtain that the Type \mathcal{C} model is very rigid and its space of solutions consists of constant functions for $\mu = 0$, it is spanned by the restrictions to the sphere of homogeneous polynomials of degree one for $\mu = -1$, and it is trivial otherwise (Theorem 5.22).

The situation for Type \mathcal{A} and Type \mathcal{B} surfaces is much richer. We study separately each of these two cases that present quite different properties. We consider first Type \mathcal{A} surface models. These homogeneous affine surfaces are strongly projectively flat and have symmetric Ricci tensor. Furthermore, their Ricci tensor is of rank one if and only if the structure is recurrent. The general form of solutions and basic information about the dimension of the space of solutions for these models are given by the following result.

Theorem 5.11. *Let $\mathcal{M} = (M, D)$ be a Type \mathcal{A} surface model. Then, the general solution for the affine quasi-Einstein equation can be expressed in the form $\mathfrak{R}(f)$ or $\mathfrak{S}(f)$ for $f = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} p$, where p is a polynomial with real coefficients and $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Furthermore, if \mathcal{M} is flat, then $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$ for all μ , and if \mathcal{M} is non-flat, then we have the following possibilities:*

- (1) *If $\mu = 0$, then $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ or, up to linear equivalence, one of the following possibilities pertains:*
 - (a) $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0$ with $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1\}$.
 - (b) $\Gamma_{11}^1 = 1, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{22}^1 = 0$ with $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, e^{x^1}\}$.
- (2) *If $\mu = -1$, then $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$.*
- (3) *If $\mu \neq 0, -1$, then $\dim\{E(\mu, D)\} = \begin{cases} 2 & \text{if } \text{rank } \rho = 1 \\ 0 & \text{if } \text{rank } \rho = 2 \end{cases}$.*

Since Type \mathcal{A} surface models are strongly projectively flat, we may obtain all possible parametrizations up to linear equivalence for the Type \mathcal{A} models using Theorem 4.20 and the general form of the solutions given in Theorem 5.11. This fact is crucial in our analysis in Chapter 6 and distinguishes the Type \mathcal{A} models from the Type \mathcal{B} , since these are not in general strongly projectively flat. Although the ideas we use to obtain this linear classification are different, we refer to the affine and linear classification established in [14]. In this work, the authors showed that linear and affine equivalence coincide when the Ricci tensor is of rank two. In contrast, they obtained three families of parametrizations that are affine inequivalent and five families for linear equivalence when the Ricci tensor is of rank one. However, the linear equivalence among some elements of these five families was not clear and it did not include flat Type \mathcal{A} models. Our analysis solves these two problems using the affine quasi-Einstein equation.

Let $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$ denote the space of affine Killing vector fields of \mathcal{M} . For a Type \mathcal{A} surface model, results of [14] show that $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) \in \{2, 4, 6\}$. The following definition subsumes all possible Type \mathcal{A} surface models, up to linear equivalence (cf. Theorem 6.3).

Definition 6.1. Let $c, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

\mathcal{M}_i^6 models:

$$\mathcal{M}_0^6 := \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\mathcal{M}_1^6 := \mathcal{M}(1, 0, 0, 1, 0, 0);$$

$$\mathcal{M}_2^6 := \mathcal{M}(-1, 0, 0, 0, 0, 1);$$

$$\mathcal{M}_3^6 := \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 0, 1);$$

$$\mathcal{M}_4^6 := \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 1, 0);$$

$$\mathcal{M}_5^6 := \mathcal{M}(1, 0, 0, 1, -1, 0);$$

$\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ models:

$$\mathcal{M}_1^4 := \mathcal{M}(-1, 0, 1, 0, 0, 2);$$

$$\mathcal{M}_2^4(c) := \mathcal{M}(-1, 0, c, 0, 0, 1 + 2c) \text{ with } c \notin \{0, -1\};$$

$$\mathcal{M}_3^4(c) := \mathcal{M}(0, 0, c, 0, 0, 1 + 2c) \text{ with } c \notin \{0, -1\};$$

$$\mathcal{M}_4^4(c) := \mathcal{M}(0, 0, 1, 0, c, 2);$$

$$\mathcal{M}_5^4(c) := \mathcal{M}(1, 0, 0, 0, 1 + c^2, 2c);$$

$\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ models:

$$\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2) := \mathcal{M}\left(\frac{a_1^2 + a_2 - 1, a_1^2 - a_1, a_1 a_2, a_1 a_2, a_2^2 - a_2, a_1 + a_2^2 - 1}{a_1 + a_2 - 1}\right) \text{ with } a_1 a_2 \neq 0;$$

$$\mathcal{M}_2^2(b_1, b_2) := \mathcal{M}\left(1 + b_1, 0, b_2, 1, \frac{1 + b_2^2}{b_1 - 1}, 0\right) \text{ with } b_1 \neq 1;$$

$$\mathcal{M}_3^2(c) := \mathcal{M}(2, 0, 0, 1, c, 1) \text{ with } c \neq 0;$$

$$\mathcal{M}_4^2(\pm) := \mathcal{M}(2, 0, 0, 1, \pm 1, 0).$$

The following table displays a basis of the space of solutions to the affine quasi-Einstein equation for $\mu = -1$ associated to each of the $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ given above. It also includes the Ricci tensor and the dimension of the space of affine Killing vector fields.

dim \mathfrak{K}	\mathcal{M}	$\rho = \rho_s$	Generators of $E(-1, \mathcal{M})$
6	\mathcal{M}_0^6	0	$\mathbb{1}, x^1, x^2$
	\mathcal{M}_1^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^1}, x^2 e^{x^1}$
	\mathcal{M}_2^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^2}, e^{-x^1}$
	\mathcal{M}_3^6	0	$\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}$
	\mathcal{M}_4^6	0	$\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 + 2x^1$
	\mathcal{M}_5^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2)$
4	\mathcal{M}_1^4	$dx^2 \otimes dx^2$	$e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, e^{-x^1+x^2}$
	$\mathcal{M}_2^4(c)$	$(c^2 + c)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, e^{cx^2-x^1}$
	$\mathcal{M}_3^4(c)$	$(c^2 + c)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, x^1 e^{cx^2}$
	$\mathcal{M}_4^4(c)$	$dx^2 \otimes dx^2$	$e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, (c(x^2)^2 + 2x^1)e^{x^2}$
	$\mathcal{M}_5^4(c)$	$(1 + c^2)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2} \cos(x^2), e^{cx^2} \sin(x^2), e^{x^1}$
2	$\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1^2 - a_1}{a_1 + a_2 - 1} & \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - 1} \\ \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - 1} & \frac{a_2^2 - a_2}{a_1 + a_2 - 1} \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, e^{x^2}, e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}$
	$\mathcal{M}_2^2(b_1, b_2)$	$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & \frac{b_1 + b_2^2}{b_1 - 1} \end{pmatrix}$	$e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2), e^{b_1 x^1 + b_2 x^2}$
	$\mathcal{M}_3^2(c)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, (x^1 - cx^2)e^{x^1}, e^{x^1+x^2}$
	$\mathcal{M}_4^2(\pm)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, x^2 e^{x^1}, (2x^1 \pm (x^2)^2)e^{x^1}$

Since all Type \mathcal{A} models are strongly projectively flat, the dimension of the space of solutions is maximal, i.e., $\dim E(-1, D) = 3$. We then may use Theorem 4.20 to obtain explicitly the Christoffel symbols that define each of these models using the bases of the space of solutions. This process is detailed in Remark 5.6 and it provides a useful tool in our analysis.

Recently, the work of [46] has used this linear classification to study Type \mathcal{A} models with torsion. Although flat models were not studied in previous linear classifications, they are relevant for this study since these give rise to non-trivial Type \mathcal{A} models with torsion.

In Chapter 6 we also provide bases for the space of solutions to the affine quasi-Einstein equation for $\mu \neq -1$ associated to each model displayed on the table.

We conclude our analysis of Type \mathcal{A} surface models in Chapter 8, where we study the completeness of affine Killing vector fields and geodesics for these models. The following result establishes which Type \mathcal{A} models are affine Killing complete. This is a relevant question, since in such a case the Lie algebra of infinitesimal affine transformations and the space of affine Killing vector fields are isomorphic.

Theorem 8.2. *Let $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ be a Type \mathcal{A} surface model. Then \mathcal{M} is affine Killing complete if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to \mathcal{M}_0^6 , \mathcal{M}_4^6 , $\mathcal{M}_3^4(c)$, $\mathcal{M}_4^4(c)$ or $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ for some i .*

As it happens in the pseudo-Riemannian setting, where geodesic completeness implies Killing completeness, it is also true that affine geodesic completeness implies affine Killing completeness. The converse is not true in general. In what follows, we establish which Type \mathcal{A} models are geodesically complete.

Theorem 8.7. *Let $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ be a Type \mathcal{A} surface model. Then \mathcal{M} is geodesically complete if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to \mathcal{M}_0^6 , to \mathcal{M}_4^6 , to $\mathcal{M}_3^4(-\frac{1}{2})$ or to $\mathcal{M}_2^2(-1, a)$ for some a .*

This concludes the analysis for the Type \mathcal{A} setting.

The situation for Type \mathcal{B} models is more intricate. For instance, the Ricci tensor in these models need not be symmetric. Thus, they are not in general strongly projectively flat, so the quasi-Einstein equation with $\mu = -1$ cannot be used as for the Type \mathcal{A} models. The following theorem gives the general form of the solutions and summarizes the basic information about the dimension of the space of solutions for these models.

Theorem 5.19. *Let $\mathcal{M} = (M, D)$ be a Type \mathcal{B} surface model. Then, the general solution for the affine quasi-Einstein equation can be expressed in the form $\mathfrak{R}(f)$ or $\mathfrak{S}(f)$ for $f = \sum_{\alpha, i, j} c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^i (\log(x^1))^j$, where in this finite form $c_{\alpha, i, j} \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, and i and j are non-negative integers. Furthermore, if $\rho_s \neq 0$, then one of the following possibilities pertains:*

(1) *If $\mu = 0$, then $\dim E(\mu, D) \in \{1, 2\}$. Moreover, $\dim\{E(0, D)\} = 2$ if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to one of the following surfaces:*

- (a) $C_{11}^1 = -1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^1 = 0$.
- (b) $C_{11}^2 = c C_{11}^1, C_{12}^2 = c C_{12}^1, C_{22}^2 = c C_{22}^1$ for some $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $C_{11}^1 = \alpha - 1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^1 = 0$.

(2) *If $\mu = -1$, then $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{0, 1, 3\}$. Moreover, if \mathcal{M} is not strongly projectively flat, then $\dim\{E(-1, D)\} \leq 1$ and, $\dim\{E(-1, D)\} = 1$ if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to some of the following surfaces:*

- (a) $C_{22}^1 = 0, C_{22}^2 = C_{12}^1 \neq 0$.
- (b) $C_{22}^1 = \pm 1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2 \neq 0, C_{11}^1 = 1 + 2C_{12}^2 \pm (C_{11}^2)^2$.

(3) *If $\mu \neq 0, -1$, then $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{0, 1, 2\}$. Moreover $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 1$ if and only if, up to linear equivalence, \mathcal{M} is of the form*

$$C_{22}^1 = \pm 1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2, \Delta := -C_{11}^1 + C_{12}^2 + 1 \neq 0, \\ \mu = \Delta^{-2} \{1 + 2(C_{11}^2)^2 - (C_{11}^1 - C_{12}^2)^2 + 2C_{12}^2\}.$$

Furthermore, $\dim\{E(\mu, D)\} = 2$ if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to some of the following surfaces:

- (a) $C_{11}^1 = \mp 8c^2 - \frac{5}{2}, C_{11}^2 = c, C_{12}^1 = 0, C_{12}^2 = \frac{1}{2}(\mp 8c^2 - 3), C_{22}^1 = \pm 1, \\ C_{22}^2 = 2c, c \neq 0$.

- (b) $C_{11}^1 = c, C_{11}^2 = 0, C_{12}^1 = 0, C_{12}^2 = c + 1, C_{22}^1 = \pm 1, C_{22}^2 = 0$
with $c \notin \{-3, -1\}$.

In Chapter 7 we provide the linear classification of Type \mathcal{B} flat models using again Theorem 4.20. However, as mentioned above, this is not possible for all Type \mathcal{B} models since they are not strongly projectively flat in general. This is why we use the linear classification established in [14] to provide bases of the space of solutions to the affine quasi-Einstein equation for distinct values of μ .

We conclude our analysis of Type \mathcal{B} surface models in Chapter 8, where we study affine Killing completeness. The following result establishes which models are affine Killing complete.

Theorem 8.5. *Let \mathcal{M} be a Type \mathcal{B} surface model.*

- (1) *If $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$, then \mathcal{M} is affine Killing complete.*
- (2) *If $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$, then \mathcal{M} is affine Killing complete if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to the hyperbolic plane.*
- (3) *If $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$, then \mathcal{M} is affine Killing complete.*
- (4) *If $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 6$, then \mathcal{M} is affine Killing complete if and only if \mathcal{M} is linearly equivalent to the Euclidean plane or to $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, D)$, where the only non-zero Christoffel symbol determining D in the usual coordinates (x^1, x^2) of $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ is $\Gamma_{11}^1 = -(x^1)^{-1}$.*

This completes our analysis for the Type \mathcal{B} surface models.

Finally, we devote the last part of Chapter 8 to construct examples of Kähler quasi-Einstein manifolds in indefinite signature. The existence of solutions for the quasi-Einstein equation turns out to be a very restrictive condition for a Kähler manifold in the Riemannian setting. In fact, results of [34] show that these metrics are locally isometric to a product manifold. This is not true in the indefinite setting. In section 8.4 we use the affine quasi-Einstein equation on a Type \mathcal{B} surface model to construct irreducible Kähler quasi-Einstein manifolds of neutral signature $(2, 2)$ which are not isometric to a product manifold.

Resumo

O estudo de ecuacións diferenciais en variedades é un problema amplamente estudado en Xeometría Diferencial. A ecuación de Obata ou a ecuación conforme Einstein son dous exemplos clásicos. Esta tese está dedicada ao estudo da ecuación quasi-Einstein afín, que, en particular, é un sistema de ecuacións en derivadas parciais sobredeterminado definido sobre unha variedade semi-riemanniana. A nosa análise ten como obxectivo estudar a estrutura local das métricas satisfacendo esta ecuación baixo certas condicións xeométricas. Este problema lévanos a unha nova ecuación no contexto afín: a ecuación quasi-Einstein afín. Por este motivo, estruturamos o presente traballo en dúas partes. Na primeira estudamos a ecuación quasi-Einstein en xeometría semi-riemanniana e na segunda ocupámonos do problema afín asociado. De cara a introducir resultados previos necesarios, abrimos esta memoria co capítulo de preliminares (capítulo 1). Neste establecemos as notacións e nocións básicas para a nosa análise. Entre estas, destacamos os resultados sobre produtos warped, variedades de Walker e extensións de Riemann.

Unha variedade semi-riemanniana (M, g) dise *quasi-Einstein xeneralizada* se existe unha función f e unha constante μ satisfacendo a ecuación

$$\text{Hes}_f + \rho - \mu df \otimes df = \lambda g \text{ para certa } \lambda \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad (1)$$

onde Hes_f e ρ denotan o hessiano de f e o tensor de Ricci, respectivamente. A función λ queda determinada pola traza da ecuación e f dise a *función potencial*. As variedades satisfacendo a ecuación anterior con λ constante reciben o nome de *variedades quasi-Einstein*.

No que segue, incluímos algúns casos especiais da ecuación quasi-Einstein xeneralizada que mostran que a presente ecuación aglutina moitas condicións xeométricas coñecidas. Por exemplo, se f é constante, entón a ecuación redúcese á ecuación Einstein. Se $\mu = 0$, obtemos a ecuación dos case solitóns de Ricci gradientes [95]

$$\text{Hes}_f + \rho = \lambda g \text{ para certa } \lambda \in \mathcal{C}^\infty(M). \quad (2)$$

Por simplicidade, denotamos a estrutura dun case solitón de Ricci gradiente definido pola ecuación anterior por (M, g, f) . Se λ é constante, obtemos a ecuación dos solitóns de Ricci gradientes. As métricas que satisfán esta ecuación son solucións autosimilares do fluxo de Ricci definido por $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\rho(t)$ [65]. Isto é, son os puntos fixos deste fluxo módulo dilatacións e difeomorfismos. O fluxo de Ricci recibiu moita atención nos últimos anos debido á súa relevancia na proba de Perelman para a conxectura de Poincaré. A consecuencia disto, os solitóns de Ricci gradientes están a ser moi estudados tanto en sinatura riemanniana [30,95] como en semi-riemanniana [105]. Se λ non é constante, as métricas que obtemos non son só unha xeneralización formal das anteriores métricas, senón que tamén corresponden a solucións autosimilares para algúns fluxos

xeométricos. Este é o caso do fluxo de Ricci-Bourguignon definido pola ecuación de evolución xeométrica

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2(\rho(t) - \kappa\tau(t)g(t)), \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

onde τ denota a curvatura escalar. As solucións autosimilares deste fluxo están caracterizadas pola ecuación $\text{Hes}_f + \rho = (\kappa\tau + c)g$ con $c \in \mathbb{R}$ e reciben o nome de solitóns κ -Einstein. Polo tanto, constitúen un exemplo de case solitóns de Ricci gradientes [38, 43].

Por outra banda, cando consideramos a ecuación quasi-Einstein (1) con $\mu \neq 0$, tamén aparecen casos particulares con gran significado xeométrico. Co obxectivo de presentar algúns deles, e posto que o termo $df \otimes df$ é non-linear, facemos un cambio de variable de xeito que $h = e^{-\mu f}$. Isto transforma a ecuación quasi-Einstein (1) en

$$\text{Hes}_h - \mu h \rho = -\mu h \lambda g. \quad (3)$$

Esta ecuación recibe o nome de *quasi-Einstein linearizada*. Denotamos a estrutura quasi-Einstein determinada a partir desta ecuación por (M, g, h, μ) .

Se (M, g) é Einstein, a ecuación quasi-Einstein linearizada (3) redúcese á ecuación de Möbius $\text{Hes}_h = \mu h \left(\frac{\tau}{n} - \lambda\right) g$ para $\Delta h = \mu h(\tau - n\lambda)$ [101] e se, adicionalmente, λ é constante, obtemos a ecuación de Obata $\text{Hes}_h + \kappa h g = 0$, onde $\kappa = \mu \left(\frac{\tau}{n} - \lambda\right)$ é constante [87].

Sexa $\mathcal{M}_1(M)$ o espazo de clases de equivalencia das métricas riemannianas de volume un en M e sexa $\mathcal{S} : g \in \mathcal{M}_1 \mapsto \mathcal{S}(g) = \int_M \tau^2 d\text{vol}_g$ o funcional dado polo cadrado da norma L^2 da curvatura escalar restrinxida ás métricas de volume un. Unha métrica g é crítica para \mathcal{S} se $\text{Hes}_\tau - \tau\rho = \left\{\frac{1}{n}\Delta\tau - \frac{1}{n}\tau^2\right\}g$ [5, 37]. Daquela, calquera métrica crítica é quasi-Einstein con $\mu = 1$ e función potencial dada pola curvatura escalar. Ademais, as estruturas quasi-Einstein $(M, g, h, 1)$ con $\lambda = -\frac{\Delta h}{h}$ correspóndense coas *variedades estáticas*. Estas constitúen unha variedade riemanniana base dun espazo-tempo estático lorentziano $(\mathbb{R} \times M, -h^2 dt^2 + g)$ satisfacendo a ecuación Einstein para un fluído perfecto [68, 70].

Outra situación importante acontece cando $\mu = -\frac{1}{\dim M - 2}$. As variedades satisfacendo a ecuación quasi-Einstein (1) para este valor de μ son conformemente Einstein. Isto é, son estruturas riemannianas cun representante Einstein na súa clase conforme [8]. Este caso é distinguido na nosa análise e mostra un comportamento diferenciado.

Finalmente, consideramos as variedades quasi-Einstein con $\mu = \frac{1}{n}$ para algún enteiro $n \geq 2$. Estas métricas aparecen de forma natural cando estudamos produtos warped Einstein. A condición Einstein $\rho = \lambda g$ obriga a base do produto warped a ser quasi-Einstein. Reciprocamente, se $(B, g_B, f, \frac{1}{n})$ é unha estrutura quasi-Einstein para certo enteiro $n \geq 2$, entón existe unha fibra Einstein F de dimensión n tal que $B \times_f F$ é un produto warped Einstein [67, 80].

O estudo da estrutura local dos (case) solitóns de Ricci e das métricas quasi-Einstein é un problema difícil de abordar en xeral. Por este motivo, é habitual estudar a estrutura local destas métricas baixo certas condicións xeométricas. Posto que o tensor de curvatura aparece reflectido nas ecuacións (2) e (3) a través do tensor Ricci, resulta natural considerar situacións nas que este segundo tensor quede determinado polo primeiro. Este é o caso dos case solitóns de Ricci gradientes e das variedades quasi-Einstein localmente conformemente chás. A estrutura local destas métricas foi investigada en múltiples situacións [12, 21, 39, 55].

En dimensión catro, o tensor de Weyl descomponse nas súas partes autodual e anti-autodual. Daquela, podemos debilitar a condición de ser localmente conformemente chá pola de ser hemi conformemente chá (i.e., autodual ou anti-autodual). Polo tanto, o punto de partida deste traballo é estudar a estrutura local dos case solitóns e das variedades quasi-Einstein baixo esta condición máis débil.

As ecuacións dos cases solitóns (2) e das variedades quasi-Einstein (3) reflicten a xeometría das hipersuperficies de nivel da función potencial a través da segunda forma fundamental Hes_f . Deste xeito, é natural considerar independentemente o caso no que estas hipersuperficies son dexeneradas e non-dexeneradas. Dicimos que os case solitóns de Ricci gradientes ou as variedades quasi-Einstein son *isotrópicas* cando $\nabla f \neq 0$ e $\|\nabla f\| = 0$, e dicimos que son *non-isotrópicas* cando $\|\nabla f\| \neq 0$. Para estruturas non-isotrópicas hemi conformemente chás a xeometría subxacente é moi ríxida. De feito, todas elas son localmente conformemente chás e localmente isométricos a un produto warped con base 1-dimensional (teoremas 2.6 e 3.10) nas tres posibles sinaturas que se dan en dimensión catro. Ademais, as variedades lorentzianas hemi conformemente chás son automaticamente localmente conformemente chás e en sinatura riemanniana só ten cabida considerar estruturas non-isotrópicas. Isto significa que non existen exemplos hemi conformemente chans que non sexan localmente conformemente chans nestas sinaturas.

A consideración anterior move o noso interese cara as variedades quasi-Einstein xeneralizadas isotrópicas de sinatura neutra $(2, 2)$. Baixo a consideración de ser hemi conformemente chás, tanto os case solitóns isotrópicos como as variedades quasi-Einstein xeneralizadas isotrópicas teñen estrutura de variedade de Walker e ademais, $\tau = 4\lambda$ (cf. teoremas 2.9 e 3.13). Daquela podemos considerar na nosa variedade a orientación dada pola estrutura de Walker. En principio, a autodualidade e a anti-autodualidade son conceptos intercambiabes, mais cando fixamos a orientación isto deixa de ser posible. Por esta razón, as estruturas isotrópicas autoduais e anti-autoduais teñen un comportamento ben diferente [16]. De feito, todas as variedades quasi-Einstein xeneralizadas isotrópicas anti-autoduais coa orientación dada pola estrutura de Walker teñen $\tau = 0$ e daquela, $\lambda = 0$. Consecuentemente, non existen exemplos anti-autoduais deste tipo de estruturas con λ non-constante.

O noso obxectivo na primeira parte desta memoria (capítulos 2 e 3) é dar unha caracterización local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas autoduais. Para facer isto, distinguimos dúas posibilidades: λ é constante e λ é non-constante. Con λ constante, obtense que a estrutura subxacente é a dunha extensión de Riemann deformada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ realizada sobre unha superficie afín (Σ, D) , onde Φ é un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ en Σ . Ademais, a función potencial é o pullback dunha función en Σ satisfacendo certa ecuación afín. Se, polo contrario, λ é non-constante, entón a estrutura subxacente é unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ realizada sobre unha superficie afín (Σ, D) , onde Φ é un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ e T é un tensor de tipo $(1, 1)$ en Σ . Novamente a función é o pullback dunha función en Σ , mais neste caso non existe ningunha restrición sobre a mesma.

No capítulo 2 consideramos case solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans. O seguinte teorema é o resultado principal deste capítulo e sintetiza a información principal sobre a estrutura local destas métricas.

Teorema 2.11. *Sexa (M, g, f) un case solitón de Ricci gradiente de sinatura $(2, 2)$, autodual e*

non Ricci chá. Distinguímos tres casos:

- (1) Se (M, g) é non-isotrópica, entón (M, g) é localmente conformemente chá e é localmente isométrica a un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é un intervalo real e N é de curvatura seccional constante.
- (2) Se (M, g) é isotrópica e λ constante, entón $\lambda = 0$ e (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann deformada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $f = \pi^*\hat{f}$ con $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$ cumprindo a ecuación do solitón afín $\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D = 0$.
- (3) Se (M, g) é isotrópica e λ non-constante, entón (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $f = \pi^*\hat{f}$ con $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$. Ademais, existe $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda = \frac{3}{2}Ce^{-f}$, $T = Ce^{-\hat{f}}\text{Id}$ e $\Phi = \frac{2}{C}e^{\hat{f}}(\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D)$.

O teorema anterior non só mostra a estrutura local destas métricas, senón que tamén proporciona un método de construción de case solitóns autoduais. A consecuencia disto, atopamos exemplos non-triviais de case solitóns autoduais que non son localmente conformemente chans. A afirmación (2) foi enunciada orixinalmente en [11]. As métricas descritas en (2) obtéñense a partir dunha superficie afín (Σ, D) para a cal existe unha solución da ecuación do *solitón de Ricci gradiente afín* $\text{Hes}_{\hat{f}}^D + \rho_s^D = 0$. Isto transforma o problema semi-riemanniano orixinal nun problema menos rixido en xeometría afín. As solucións para a ecuación do solitón de Ricci gradiente afín foron estudadas en [14]. Finalmente, as métricas descritas en (3) obtéñense a partir de calquera superficie afín (Σ, D) e calquera $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$. Isto conclúe a análise do capítulo 2.

No capítulo 3, consideramos o caso $\mu \neq 0$, polo que podemos considerar a ecuación quasi-Einstein linearizada (3). O seguinte teorema é o resultado principal deste capítulo e proporciona a estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas autoduais.

Teorema 3.18. *Sexa (M, g, h, μ) unha variedade quasi-Einstein xeneralizada autodual de sinatura $(2, 2)$ con $\mu \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$ e non Ricci chá. Distinguímos tres casos:*

- (1) Se (M, g) é non-isotrópica, entón (M, g) é localmente conformemente chá e é localmente isométrica a un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e N é de curvatura seccional constante.
- (2) Se (M, g) é isotrópica e λ constante, entón $\lambda = 0$ e (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann deformada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ dunha superficie afín (Σ, D) con $h = \pi^*\hat{h}$ para certa $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$ satisfacendo a ecuación

$$\text{Hes}_{\hat{h}}^D - 2\mu\hat{h}\rho_s^D = 0. \quad (4)$$

- (3) Se (M, g) é isotrópica e λ non constante, entón (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $h = \pi^*\hat{h}$ para certa $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$. Ademais, existe $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\lambda = \frac{3}{2}Ch^{\frac{1}{\mu}}$, $T = C\hat{h}^{\frac{1}{\mu}}\text{Id}$ e $\Phi = -\frac{2}{\mu C}\hat{h}^{-\frac{\mu+1}{\mu}}(\text{Hes}_{\hat{h}}^D - 2\mu\hat{h}\rho_s^D)$.

Tal e como acontece co teorema 2.11, o resultado anterior non só dá a estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas autoduais, senón que tamén proporciona un método de construción de exemplos non-triviais destas métricas. Isto mostra que existen variedades quasi-Einstein autoduais que non son localmente conformemente chás (sección 3.4). As métricas descritas na afirmación (3) obtéñense a partir de calquera superficie afín (Σ, D) e calquera $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$. Porén, as métricas descritas en (2) só se obteñen a partir dunha superficie afín (Σ, D) para a cal exista unha solución \hat{f} da ecuación (4). Isto transforma de novo o problema orixinal semi-riemanniano nun problema afín. Polo tanto a nosa análise móvese de forma natural cara o problema de atopar unha superficie afín con solucións para a ecuación (4). Por simplicidade, redefinimos a ecuación anterior como

$$\text{Hes}_{\hat{f}}^D - \mu \hat{f} \rho_s^D = 0 \text{ for some } \mu \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Esta recibe o nome de *ecuación quasi-Einstein afín*. Aínda que esta está orixinalmente definida para unha superficie, podemos considerala para dimensión arbitraria. Isto dá paso á segunda parte deste traballo, que está dedicada ao estudo da ecuación quasi-Einstein afín (5). Isto lévase a cabo nos capítulos 4 a 8.

No capítulo 4 comezamos estudando algunhas propiedades xerais da ecuación quasi-Einstein afín, especialmente aquelas relacionadas co seu espazo de solucións. O seguinte teorema mostra o bo comportamento que ten esta ecuación en termos de diferenciabilidade. Sexa $E_p(\mu, D)$ o espazo linear de xermes de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con base en p e sexa $E(\mu, D)$ o espazo global de solucións.

Teorema 4.2. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha variedade afín de dimensión m e $f \in E_p(\mu, D)$. Cúmpranse as seguintes afirmacións:*

- (1) $f \in C^\infty(M)$ e se \mathcal{M} é analítica real, entón f é analítica real.
- (2) Se X é un xerme dun vector Killing afín con base en p , entón $Xf \in E_p(\mu, D)$.
- (3) Se $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$, entón $f \equiv 0$ nunha veciñanza de p .
- (4) $\dim\{E_p(\mu, D)\} \leq m + 1$.
- (5) Se M é simplemente conexa e $\dim\{E_p(\mu, D)\}$ é constante para todo $p \in M$, entón f estende de forma única a un elemento de $E(\mu, D)$.

Tras establecer estes resultados fundacionais, consideramos o comportamento da nosa ecuación baixo dous tipos diferentes de relacións de equivalencia definidas no contexto afín. A primeira que estudamos é a *equivalencia proxectiva forte*, isto é, consideramos a equivalencia entre variedades que teñen as mesmas xeodésicas salvo parametrización e cuxo tensor de Ricci anti-simétrico coincide. O seguinte resultado mostra que pra unha variedade quasi-Einstein afín de dimensión m o autovalor $\mu = \mu_m := -\frac{1}{m-1}$ ten un papel destacado.

Teorema 4.16. *Sexa \mathcal{M} unha variedade afín de dimensión m e $\mu_m := -\frac{1}{m-1}$.*

- (1) \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá se e só se $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m + 1$.

- (2) Se $\dim\{E_p(\mu, D)\} = m + 1$ para algún $\mu \neq \mu_m$, entón \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá e Ricci chá.
- (3) Se $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m + 1$ existe unha base $\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$ de $E_p(\mu_m, D)$ tal que $\phi_0(p) \neq 0$ e $\phi_i(p) = 0$ para $i > 0$. Entón $\vec{z} = (z^1, \dots, z^m)$ con $z^i := \phi_i/\phi_0$ é un sistema de coordenadas definido nunha veciñanza de p tal que as xeodésicas non parametrizadas de \mathcal{M} son liñas rectas.

O teorema 4.16 mostra a intensa relación entre a ecuación quasi-Einstein afín e o carácter fortemente proxectivamente chan da conexión. Este resultado pode mellorarse no caso de superficies do xeito seguinte.

Teorema 4.18. Se \mathcal{M} é unha superficie afín, entón $\dim\{E_p(-1, D)\} \neq 2$. Ademais,

- (1) \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá se e só se $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$.
- (2) Se \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá e $\text{rang } \rho^D = 2$ tense que:
- (a) $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 0$ con $\mu \notin \{-1, 0\}$.
- (b) $\dim\{E_p(0, D)\} = 1$.
- (3) Se $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 3$ con $\mu \neq -1$, entón \mathcal{M} é chá.

Outro resultado fundamental nesta segunda parte da tese baséase no comportamento da ecuación quasi-Einstein afín co outro tipo de relación de equivalencia que consideramos: a equivalencia afín. Dúas estruturas afíns dinse *afinmente equivalentes* se existe un difeomorfismo dunha na outra conservando a conexión. En particular obtemos que a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = \mu_m$ sobre variedades fortemente proxectivamente chás compórtase moi ben con este tipo de transformacións.

Teorema 4.20. Sexan $\mathcal{M}_i := (M, D_i)$ con $i = 1, 2$ dúas estruturas afíns fortemente proxectivamente chás na mesma variedade simplemente conexa M e sexa Ξ un difeomorfismo en M .

- (1) Se $\mathcal{Q}(D_1) = \mathcal{Q}(D_2)$, entón $D_1 = D_2$.
- (2) Se $\Xi^*\mathcal{Q}(D_1) = \mathcal{Q}(D_2)$, entón $\Xi^*D_1 = D_2$.

Os teoremas 4.18 e 4.20 son esenciais para a nosa análise no capítulo 5, onde estudamos a ecuación quasi-Einstein afín sobre superficies localmente homoxéneas. Unha superficie afín dise *localmente homoxénea* se dados calquera dous puntos p e q existe un difeomorfismo local $\varphi : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{U}_q$ levando unha veciñanza \mathcal{U}_p de p nunha veciñanza \mathcal{U}_q de q tal que $\varphi(p) = q$ e conservando a conexión $\varphi^*D = D$. Obtense como consecuencia do traballo de Opozda [90] que unha superficie afín localmente homoxénea pode ser localmente modelada nalgún dos seguintes espazos:

- (A) $\mathcal{M} = (M, D)$ é un modelo tipo \mathcal{A} se $M = \mathbb{R}^2$ e os símbolos de Christoffel son constantes nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^2 .

(B) $\mathcal{M} = (M, D)$ é un modelo tipo \mathcal{B} se $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e os símbolos de Christoffel son da forma $\Gamma_{ij}^k = (x^1)^{-1} C_{ij}^k$ con C_{ij}^k constantes nas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, (x^1, x^2) .

(C) $\mathcal{M} = (M, D)$ é un modelo tipo \mathcal{C} se M é a 2-esfera coa métrica usual e D é a súa conexión de Levi-Civita.

Brozos-Vázquez, García-Río e Gilkey deron en [14, teoerma 4.12] unha descrición completa dos solitóns de Ricci afíns homoxéneos 2-dimensionais salvo equivalencia afín. A situación para as superficies quasi-Einstein afíns homoxéneas é aínda máis rico, dando lugar a unha gran cantidade de exemplos que son quasi-Einstein mais non solitóns de Ricci afíns. Ademais, existen algunhas superficies afíns homoxéneas que teñen solucións non-triviais tanto para os solitóns de Ricci gradientes afíns como para as quasi-Einstein afín. Estas son esencialmente as superficies tipo \mathcal{A} con tensor de Ricci de rango un (observación 7.13).

No capítulo 5 estúdase a forma xeral da ecuación quasi-Einstein afín para os modelos arriba definidos. Empregando esta información estudamos a dimensión do espazo de solucións salvo equivalencia linear para os distintos valores de μ . Os modelos tipo \mathcal{C} son moi ríxidos e o seu espazo de solucións está formado polas funcións constantes para $\mu = 0$, está xerado polas restricións á esfera dos polinomios homoxéneos de grao un para $\mu = -1$, e son triviais noutro caso (teorema 5.22).

A situación para os modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} é moito máis variada. Estudamos separadamente cada un destes dous tipos posto que presentan propiedades moi diferentes entre si. Consideramos primeiramente os modelos tipo \mathcal{A} . Estas superficies homoxéneas son fortemente proxectivamente chás e teñen tensor de Ricci simétrico. Ademais, o seu tensor de Ricci é de rango un se e só se a estrutura é recorrente. A forma xeral das solucións e a información básica sobre a dimensión dos espazos de solucións para estes modelos veñen dadas no seguinte resultado.

Teorema 5.11. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón a solución xeral para a ecuación quasi-Einstein afín pode expresarse na forma $\Re(f)$ ou $\Im(f)$ con $f = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} p$ para algún polinomio p con coeficientes reais e $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Ademais, se \mathcal{M} é chá, entón $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$ para todo μ , e se \mathcal{M} non é chá, entón temos as seguintes posibilidades:*

(1) *Se $\mu = 0$, entón $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ ou, salvo equivalencia linear, dáse algunha das seguintes posibilidades:*

(a) $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0$ con $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1\}$.

(b) $\Gamma_{11}^1 = 1, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{22}^1 = 0$ con $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, e^{x^1}\}$.

(2) *Se $\mu = -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$.*

(3) *Se $\mu \neq 0, -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ se } \text{rang } \rho = 1 \\ 0 \text{ se } \text{rang } \rho = 2 \end{array} \right\}$.*

O feito de que os modelos tipo \mathcal{A} sexan fortemente proxectivamente chans, permite obter todas as posibles parametrizacións salvo equivalencia linear para modelos tipo \mathcal{A} empregando o teorema 4.20 e a forma xeral das solucións dada no teorema 5.11. Esta cuestión é crucial na

nosa análise do capítulo 6 e marca unha diferenza fundamental cos modelos tipo \mathcal{B} que non son, en xeral, fortemente proxectivamente chans. Aínda que as ideas que usamos para obter esta clasificación son fundamentalmente diferentes, referímonos á clasificación afín e linear realizada en [14]. Neste traballo, os autores mostran que a equivalencia afín e linear coinciden cando o tensor de Ricci ten rango dous. En oposición a isto, obteñen tres posibles familias de equivalencia afín e cinco familias no caso da equivalencia linear cando o tensor de Ricci ten rango un. Non obstante, a equivalencia linear entre algúns elementos destas cinco familias non estaba clara. Ademais, este estudo non incluía os modelos tipo \mathcal{A} chans. A nosa análise resolve estes dous problemas empregando a ecuación quasi-Einstein afín.

Sexa $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$ o espazo de campos de vectores affine Killing de \mathcal{M} . En [14] móstrase que para un modelo tipo \mathcal{A} tense que $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) \in \{2, 4, 6\}$. A seguinte definición recolle todos os modelos tipo \mathcal{A} salvo equivalencia linear (cf. teorema 6.3).

Definición 6.1. Sexan $c, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Modelos \mathcal{M}_i^6 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^6 &:= \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \mathcal{M}_1^6 &:= \mathcal{M}(1, 0, 0, 1, 0, 0); \\ \mathcal{M}_2^6 &:= \mathcal{M}(-1, 0, 0, 0, 0, 1); \\ \mathcal{M}_3^6 &:= \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ \mathcal{M}_4^6 &:= \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ \mathcal{M}_5^6 &:= \mathcal{M}(1, 0, 0, 1, -1, 0);\end{aligned}$$

Modelos $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^4 &:= \mathcal{M}(-1, 0, 1, 0, 0, 2); \\ \mathcal{M}_2^4(c) &:= \mathcal{M}(-1, 0, c, 0, 0, 1 + 2c) \text{ con } c \notin \{0, -1\}; \\ \mathcal{M}_3^4(c) &:= \mathcal{M}(0, 0, c, 0, 0, 1 + 2c) \text{ con } c \notin \{0, -1\}; \\ \mathcal{M}_4^4(c) &:= \mathcal{M}(0, 0, 1, 0, c, 2); \\ \mathcal{M}_5^4(c) &:= \mathcal{M}(1, 0, 0, 0, 1 + c^2, 2c);\end{aligned}$$

Modelos $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2) &:= \mathcal{M}\left(\frac{a_1^2 + a_2 - 1, a_1^2 - a_1, a_1 a_2, a_1 a_2, a_2^2 - a_2, a_1 + a_2^2 - 1}{a_1 + a_2 - 1}\right) \text{ con } a_1 a_2 \neq 0 \text{ e} \\ &\quad a_1 + a_2 \neq 1; \\ \mathcal{M}_2^2(b_1, b_2) &:= \mathcal{M}\left(1 + b_1, 0, b_2, 1, \frac{1 + b_2^2}{b_1 - 1}, 0\right) \text{ con } b_1 \neq 1; \\ \mathcal{M}_3^2(c) &:= \mathcal{M}(2, 0, 0, 1, c, 1) \text{ con } c \neq 0; \\ \mathcal{M}_4^2(\pm) &:= \mathcal{M}(2, 0, 0, 1, \pm 1, 0).\end{aligned}$$

A seguinte táboa mostra unha base para o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para $\mu = -1$ asociada a cada $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ dada na definición anterior. Tamén se dá o tensor de Ricci e a dimensión do espazo de campos de vectores afín Killing.

dim \mathfrak{K}	\mathcal{M}	$\rho = \rho_s$	Xeradores de $E(-1, \mathcal{M})$
6	\mathcal{M}_0^6	0	$\mathbb{1}, x^1, x^2$
	\mathcal{M}_1^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^1}, x^2 e^{x^1}$
	\mathcal{M}_2^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^2}, e^{-x^1}$
	\mathcal{M}_3^6	0	$\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}$
	\mathcal{M}_4^6	0	$\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 + 2x^1$
	\mathcal{M}_5^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2)$
4	\mathcal{M}_1^4	$dx^2 \otimes dx^2$	$e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, e^{-x^1+x^2}$
	$\mathcal{M}_2^4(c)$	$(c^2 + c)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, e^{cx^2-x^1}$
	$\mathcal{M}_3^4(c)$	$(c^2 + c)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, x^1 e^{cx^2}$
	$\mathcal{M}_4^4(c)$	$dx^2 \otimes dx^2$	$e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, (c(x^2)^2 + 2x^1)e^{x^2}$
	$\mathcal{M}_5^4(c)$	$(1 + c^2)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2} \cos(x^2), e^{cx^2} \sin(x^2), e^{x^1}$
2	$\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1^2 - a_1}{a_1 + a_2 - 1} & \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - 1} \\ \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - 1} & \frac{a_2^2 - a_2}{a_1 + a_2 - 1} \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, e^{x^2}, e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}$
	$\mathcal{M}_2^2(b_1, b_2)$	$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & \frac{b_1 + b_2^2}{b_1 - 1} \end{pmatrix}$	$e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2), e^{b_1 x^1 + b_2 x^2}$
	$\mathcal{M}_3^2(c)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, (x^1 - cx^2)e^{x^1}, e^{x^1+x^2}$
	$\mathcal{M}_4^2(\pm)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, x^2 e^{x^1}, (2x^1 \pm (x^2)^2)e^{x^1}$

Dado que todos os modelos tipo \mathcal{A} son fortemente proxectivamente chans, a dimensión do espazo de solucións é maximal, i.e., $\dim\{E(-1, D)\} = 3$. Daquela, o teorema 4.20 permite obter explicitamente os símbolos de Christoffel que definen cada un dos modelos empregando a base do espazo de solucións. Este proceso detállase na observación 5.6 e proporciona unha ferramenta moi útil na nosa análise.

Recentemente, o traballo de [46] empregou esta clasificación linear para estudar os modelos tipo \mathcal{A} con torsión. Malia que os modelos chans non foran estudados en clasificacións lineares previas, resultan interesantes neste estudo xa que dan lugar a modelos non-triviais tipo \mathcal{A} con torsión.

No capítulo 6 tamén proporcionamos bases para o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para $\mu \neq -1$ asociada a cada un dos modelos da táboa.

Rematamos a nosa análise dos modelos tipo \mathcal{A} no capítulo 8, onde estudamos a completude de campos de vectores affine Killing e mais da completude xeodésica destes modelos. O seguinte resultado establece que modelos tipo \mathcal{A} son afín Killing completos. A relevancia xeométrica desta cuestión reside no feito de que para un espazo afín Killing completo a álgebra de Lie das transformacións infinitesimais e o espazo de campos de vectores afín Killing son isomorfos.

Teorema 8.2. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón \mathcal{M} é afín Killing completo se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a \mathcal{M}_0^6 , \mathcal{M}_4^6 , $\mathcal{M}_3^4(c)$, $\mathcal{M}_4^4(c)$ ou $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ para algún i .*

Como acontece no contexto semi-riemanniano, no que a completude xeodésica implica completude Killing, tamén é certo que completude xeodésica afín implica completude afín Killing. O recíproco non é certo en xeral. No que segue establecemos que modelos tipo \mathcal{A} son xeodesicamente completos.

Teorema 8.7. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón \mathcal{M} é xeodesicamente completo se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a \mathcal{M}_0^6 , a \mathcal{M}_4^6 , a $\mathcal{M}_3^4(-\frac{1}{2})$ ou a $\mathcal{M}_2^2(-1, a)$ para algún a .*

Isto remata a análise dos modelos tipo \mathcal{A} .

A situación para os modelos tipo \mathcal{B} é máis complexa. Por exemplo, o tensor de Ricci destes modelos non ten por que ser simétrico. Consecuentemente, tampouco son, en xeral, fortemente proxectivamente chans, polo que a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$, que probou ser moi útil para os modelos tipo \mathcal{A} , non pode empregarse do mesmo xeito para os tipo \mathcal{B} . O seguinte teorema proporciona a forma xeral das solución e resume a información básica sobre a dimensión do espazo de solucións para estes modelos.

Teorema 5.19. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ un modelo tipo \mathcal{B} . Entón a solución xeral para a ecuación quasi-Einstein afín pode expresarse como a parte real ou imaxinaria dunha función f da forma*

$$f = \sum_{\alpha, i, j} c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^i (\log(x^1))^j,$$

onde nesta suma finita $c_{\alpha, i, j} \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, e i e j son enteiros non negativos. Ademais, se $\rho_s \neq 0$, entón dáse algunha das seguintes posibilidades:

(1) *Se $\mu = 0$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{1, 2\}$, e tense que $\dim\{E(0, D)\} = 2$ se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das seguintes superficies:*

- (a) $C_{11}^1 = -1$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{22}^1 = 0$.
- (b) $C_{11}^2 = c C_{11}^1$, $C_{12}^2 = c C_{12}^1$, $C_{22}^2 = c C_{22}^1$ para algún $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $C_{11}^1 = \alpha - 1$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{22}^1 = 0$.

(2) *Se $\mu = -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{0, 1, 3\}$. Ademais, se \mathcal{M} non é fortemente proxectivamente chá, entón $\dim\{E(-1, D)\} \leq 1$ e, $\dim\{E(-1, D)\} = 1$ se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das seguintes superficies:*

- (a) $C_{22}^1 = 0$, $C_{22}^2 = C_{12}^1 \neq 0$.
- (b) $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2 \neq 0$, $C_{11}^1 = 1 + 2C_{12}^2 \pm (C_{11}^2)^2$.

(3) *Se $\mu \neq 0, -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{0, 1, 2\}$, e tense que $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 1$ se e só se, salvo equivalencia linear, \mathcal{M} é da forma*

$$C_{22}^1 = \pm 1, \quad C_{12}^1 = 0, \quad C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2, \quad \Delta := -C_{11}^1 + C_{12}^2 + 1 \neq 0, \\ \mu = \Delta^{-2} \{1 + 2(C_{11}^2)^2 - (C_{11}^1 - C_{12}^2)^2 + 2C_{12}^2\}.$$

Ademais, $\dim\{E(\mu, D)\} = 2$ se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das seguintes superficies:

- (a) $C_{11}^1 = \mp 8c^2 - \frac{5}{2}$, $C_{11}^2 = c$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{12}^2 = \frac{1}{2}(\mp 8c^2 - 3)$, $C_{22}^1 = \pm 1$,
 $C_{22}^2 = 2c$, $c \neq 0$.
- (b) $C_{11}^1 = c$, $C_{11}^2 = 0$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{12}^2 = c + 1$, $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{22}^2 = 0$
con $c \notin \{-3, -1\}$.

No capítulo 7 estúdase a clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{B} chans usando de novo o teorema 4.20. Non obstante, como xa se mencionou anteriormente, isto non é posible para todos os modelos tipo \mathcal{B} dado que non son, en xeral, fortemente proxectivamente chans. Por esta razón, empregamos a clasificación linear establecida en [14] para determinar bases de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín sobre modelos tipo \mathcal{B} para diferentes valores de μ .

Finalizamos a nosa análise sobre os modelos tipo \mathcal{B} no capítulo 8, onde estudamos a completude de campos de vectores afín Killing. O seguinte resultado mostra que modelos son afín Killing completos.

Teorema 8.5. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} .*

- (1) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa.*
- (2) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente ao plano hiperbólico.*
- (3) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa.*
- (4) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 6$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente ao plano euclidiano ou a $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, D)$, onde o único símbolo de Christoffel distinto de cero determinando D nas coordenadas usuais (x^1, x^2) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ é $\Gamma_{11}^1 = -(x^1)^{-1}$.*

Isto completa a nosa análise para os modelos tipo \mathcal{B} .

Finalmente, dedicamos a última parte do capítulo 8 á construción de exemplos de variedades Kähler quasi-Einstein en sinatura indefinida. A existencia de solucións para a ecuación quasi-Einstein resulta ser unha condición moi restritiva para unha variedade Kähler riemanniana. De feito, en [34] móstrase que estas métricas son localmente isométricas a unha variedade produto. Pola contra, isto non é verdade no caso indefinido. Na sección 8.4 empregamos a ecuación quasi-Einstein afín sobre un modelo \mathcal{B} para construír exemplos irreducibles de variedades Kähler quasi-Einstein de sinatura $(2, 2)$ que non son isométricas a unha variedade produto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introducimos os conceptos básicos necesarios para o estudo que se realiza nesta memoria. Incluímos notación, definicións e algúns resultados xerais ou particulares previamente coñecidos que forman parte da nosa análise.

Posto que a memoria está dividida en dúas partes, unha relativa a xeometría semi-riemanniana e outra a xeometría afín, resulta conveniente establecer as definicións de xeito paralelo para ambos os casos, sempre e cando isto sexa posible.

En xeral, o estudo que tratamos nesta memoria ten un carácter local. Por este motivo, cando non se indique explicitamente se a natureza das definicións e resultados é local ou global, entenderemos que se fai a nivel local.

1.1 Variedades semi-riemannianas e variedades afíns

Nesta sección introducimos as definicións de variedade semi-riemanniana e variedade afín, ao tempo que fixamos a notación relativa ás mesmas. En xeral usaremos a notación para variedades diferenciables dada en [77]. Por concretar isto para os elementos que máis aparecen ao longo deste traballo, salientamos os seguintes conceptos xerais sobre variedades. Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n . Denotamos por $C^\infty(M)$ o conxunto das funcións clase infinito en M e por TM o fibrado tanxente de M definido como

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M,$$

onde $T_p M$ denota o espazo tanxente a M en $p \in M$. Como norma xeral, denotamos os elementos de $T_p M$ con letras minúsculas x, y, z, u, v, w, \dots . Para o fibrado cotanxente empregamos a notación habitual, T^*M . Por outra banda, denotamos o espazo de campos de vectores sobre M por $\mathfrak{X}(M)$ e habitualmente denotamos os seus elementos por letras maiúsculas X, Y, Z, U, V, W, \dots . Denotamos o espazo de campos de tensores (ou simplemente tensores) de tipo (k, l) por $\tau_l^k(M)$. Se (x^1, \dots, x^n) son coordenadas locais en M , denotamos as súas derivadas parciais por $\partial_{x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i}$ e as parciais segundas por $\partial_{x^i x^j}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$. Se $T \in \tau_l^k(M)$, expandimos

$$T = T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}.$$

Na expresión anterior empregamos o convenio de Einstein de suma sobre índices repetidos que será empregado, salvo que se diga o contrario, ao longo de toda a memoria.

1.1.1 Xeometría semi-riemanniana

Unha variedade diferenciable de dimensión n dise *semi-riemanniana* se está dotada cun tensor métrico g , isto é, un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico e non-dexenerado. Se este é definido positivo ou negativo dise que a variedade é riemanniana. As situacións estritamente semi-riemannianas danse cando o tensor g non é definido positivo nin negativo. Se isto acontece, denotaremos a sinatura da métrica co par $(\nu, n - \nu)$ sendo ν o número de autovalores negativos e $n - \nu$ o de positivos. O caso $(1, n - 1)$ correspóndese coas variedades lorentzianas (ou de Lorentz) e se a dimensión é par con sinatura $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ dise de *sinatura neutra*. En calquera caso, sempre precisaremos en que sinatura estamos a traballar para que non haxa risco de confusión. En xeral denotamos a estrutura semi-riemanniana polo par (M, g) . Se g_p denota a restrición de g a T_pM , dicimos que un vector $v \in T_pM$ é *espacial* cando $g_p(v, v) > 0$, *temporal* cando $g_p(v, v) < 0$ e *nulo* ou *luminoso* cando $g_p(v, v) = 0$.

Se (M, g) é unha variedade semi-riemanniana, existe unha única conexión linear, que denotaremos por ∇ , que é libre de torsión e tal que a métrica é paralela con respecto a ela. Explicitamente, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entón:

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] &= 0, \end{aligned}$$

onde $[\cdot, \cdot]$ denota o corchete de Lie dado por $[X, Y] = XY - YX$. Dita conexión recibe o nome de *conexión de Levi-Civita*. Esta conexión queda determinada pola *Fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. A fórmula anterior permite determinar os *símbolos de Christoffel* Γ_{ij}^k definidos pola expansión $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$ a partir do tensor métrico. Explicitamente, tense que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

onde g_{ij} son as compoñentes da matriz da métrica con respecto á referencia dada polos campos coordenados e (g^{ij}) denota a súa matriz inversa. Fixadas unhas coordenadas existe unha relación biunívoca entre os símbolos de Christoffel e a conexión.

A existencia da métrica permite obter novos tensores a partir doutros empregando un proceso coñecido como *levantamento de índices*. En particular, para un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$, $T = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$, definimos o tensor t de tipo $(1, 1)$ obtido por levantamento de índices pola relación $g(t(X), Y) = T(X, Y)$, para todo X e Y campos de vectores. Por conveniencia, fixamos o criterio para escribir as compoñentes dun tensor de tipo $(1, 1)$ de xeito que $t = t_i^j \partial_{x^i} \otimes dx^j$. Desta forma, a relación entre T e t en coordenadas é $T_{ij} = t_k^i g_{kj}$.

Unha aplicación diferenciable $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ entre dúas variedades semi-riemannianas (M_1, g_1) e (M_2, g_2) dise *isometría local* ou, simplemente, *isometría* se é un difeomorfismo local tal que $\Phi^* g_2 = g_1$. Se o difeomorfismo está globalmente definido, diremos que é unha *isometría global*.

1.1.2 Xeometría afín

Aínda que toda variedade semi-riemanniana posúe unha única conexión de Levi-Civita, unha variedade diferenciable admite, en xeral, outras conexións sobre o seu fibrado tanxente. Dicimos que unha variedade diferenciable M de dimensión n é *afín* se está dotada cunha conexión D libre de torsión, i.e. $XY - YX = D_X Y - D_Y X$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Esta condición equivale a que para cada punto $p \in M$ existen coordenadas (x^1, \dots, x^n) tales que os *símbolos de Christoffel* Γ_{ij}^k , definidos mediante a expansión $D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$, son cero en p . Así como acontece no contexto semi-riemanniano, a relación entre conexión e símbolos de Christoffel é biunívoca nunha variedade afín; porén, non contamos cunha expresión do tipo fórmula de Koszul. Unha vez fixadas as coordenadas locais, podemos identificar a conexión D cos símbolos de Christoffel que a definen nesas coordenadas. Por simplicidade, e tendo en conta que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, expresamos os símbolos de Christoffel a partir dun vector de funcións ordenadas $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(M)^{\frac{(n+1)n}{2}}$. Dado que o noso estudo é esencialmente local, fixadas unhas coordenadas empregaremos indistintamente D ou Γ para referirnos á conexión sempre que isto non cree confusión. Por exemplo, no caso particular de superficies empregamos a notación $\Gamma = (\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2)$ para referirnos á conexión determinada polos símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Unha aplicación diferenciable $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ entre variedades afíns (M_1, D^1) e (M_2, D^2) dise *aplicación afín* se conserva a conexión, i.e., $\Psi^*(D^2) = D^1$. Se Ψ é un difeomorfismo, dicimos que é un *isomorfismo (afín)*.

Resulta conveniente lembrar que toda variedade semi-riemanniana é afín xa que por definición a conexión de Levi-Civita, que é única para cada estrutura semi-riemanniana, é libre de torsión. Por este motivo, os conceptos definidos no contexto de xeometría afín poden transportarse ao semi-riemanniano, mais o contrario non é posible, xa que, en xeral, unha variedade afín non posúe unha estrutura métrica asociada. Tendo isto en mente, continuamos introducindo conceptos básicos, distinguindo en que casos son válidos para o contexto afín e en cales son exclusivos do semi-riemanniano. Para evitar posibles confusións, denotamos por D as conexións libres de torsión e reservamos ∇ para a conexión de Levi-Civita proveniente dunha métrica.

1.2 Operadores diferenciais

Nesta sección introducimos os conceptos básicos relativos a operadores diferenciais, distinguindo aqueles que son propiamente semi-riemannianos dos que non.

Sexa $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e sexa (M, D) unha variedade afín. Definimos o *hessiano* de f , Hes_f , como o tensor de tipo $(0, 2)$ dado pola relación

$$\text{Hes}_f(X, Y) = (D_X df)Y \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Empregando a definición anterior, tense que

$$\text{Hes}_f(X, Y) = (D_X df)Y = Xdf(Y) - df(D_X Y) = XY(f) - D_X Y(f),$$

de onde se deduce que o hessiano é un tensor simétrico, por ser D libre de torsión. En coordenadas locais podemos expresar o hessiano como

$$\text{Hes}_f(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Restrinxíndonos ao contexto semi-riemanniano, definimos o *operador hessiano*, hes_f , que queda determinado pola relación

$$\text{Hes}_f(X, Y) = g(\text{hes}_f(X), Y) \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A partir deste, definimos o *laplaciano* de f como a función $\Delta f := \text{tr}(\text{hes}_f)$. Por outra banda, tamén no contexto semi-riemanniano, definimos o *operador gradiente* $\nabla : C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ pola relación

$$g(\nabla f, X) = X(f) \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Obtense inmediatamente da definición que en coordenadas locais (x^1, \dots, x^n)

$$\nabla f = g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Ademais, posto que ∇ é compatible coa métrica g tense que

$$\begin{aligned} \text{Hes}_f(X, Y) &= XY(f) - \nabla_X Y(f) = X(g(Y, \nabla f)) - g(\nabla_X Y, \nabla f) \\ &= g(\nabla_X \nabla f, Y), \end{aligned}$$

de onde é claro que $\text{hes}_f(X) = \nabla_X \nabla f$.

Rematamos esta sección presentando o concepto de diverxencia para campos de tensores de tipo $(0, s)$ e para campos de vectores. Aínda que é posible establecer a definición do primeiro a partir dun formalismo libre de coordenadas, resulta máis práctico dar a súa caracterización empregando unha referencia ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ con $\varepsilon_i \delta_{ij} = g(E_i, E_j)$, onde δ_{ij} denota a *delta de Kronecker* e $\varepsilon_i = \pm 1$. Se T é un tensor de tipo $(0, s)$, a súa diverxencia obtense como

$$\text{div } T(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\nabla_{E_i} T)(X_1, \dots, X_{s-1}, E_i), \quad X_1, \dots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M),$$

sendo independente da referencia (ortonormal) escollida. Finalmente, se X é un campo de vectores, defínese a súa diverxencia como $\text{div } X = \text{tr } \nabla X$. A partir desta definición obtemos a seguinte relación para o laplaciano:

$$\Delta f = \text{tr } \text{hes}_f = \text{tr } \nabla \nabla f = \text{div } \nabla f.$$

1.3 A curvatura

Neste apartado centrámonos no concepto de curvatura. Comezamos definindo este concepto e outros relacionados co mesmo tales como o tensor de Ricci, a curvatura escalar e a curvatura seccional; á par introducimos algunhas das propiedades e identidades máis importantes que satisfán. Finalmente, introducimos o tensor de Weyl.

Partindo dunha variedade afín (M, D) , o *operador de curvatura* (ou simplemente a *curvatura*) é un tensor de tipo $(1, 3)$ definido pola relación

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z.$$

Restrinxíndonos ao caso dunha variedade semi-riemanniana (M, g) , definimos o *tensor de curvatura*, \mathcal{R} como o tensor de tipo $(0, 4)$ dado pola relación

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, U) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, U).$$

Deste xeito, o tensor de curvatura satisfai as seguintes propiedades alxébricas:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathcal{R}(X, Y, Z, U) = -\mathcal{R}(Y, X, Z, U) = -\mathcal{R}(X, Y, U, Z), \\ \text{(ii)} \quad & \mathcal{R}(X, Y, Z, U) + \mathcal{R}(Y, Z, X, U) + \mathcal{R}(Z, X, Y, U) = 0, \\ \text{(iii)} \quad & \mathcal{R}(X, Y, Z, U) = \mathcal{R}(Z, U, X, Y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

e a identidade diferencial:

$$\text{(iv)} \quad (\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z, X, U, V) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X, Y, U, V) = 0.$$

As propiedades (ii) e (iv) coñécense como Primeira e Segunda Identidade de Bianchi, respectivamente. En coordenadas locais (x^1, \dots, x^n) tense que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\partial_{x^k}, \partial_{x^i})\partial_{x^j} &= \nabla_{\partial_{x^k}} \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} - \nabla_{\partial_{x^i}} \nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^j} \\ &= \nabla_{\partial_{x^k}} (\Gamma_{ij}^\alpha \partial_{x^\alpha}) - \nabla_{\partial_{x^i}} (\Gamma_{kj}^\alpha \partial_{x^\alpha}) \\ &= \{ \partial_{x^k} (\Gamma_{ij}^\beta) + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^\beta - \partial_{x^i} (\Gamma_{kj}^\beta) - \Gamma_{kj}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta \} \partial_{x^\beta}. \end{aligned}$$

Deste xeito, o tensor de tipo $(1, 3)$ ten compoñentes

$$\mathcal{R}_{kij}^\beta = \partial_{x^k} (\Gamma_{ij}^\beta) + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^\beta - \partial_{x^i} (\Gamma_{kj}^\beta) - \Gamma_{kj}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta.$$

A partir disto e da relación $\mathcal{R}(X, Y, Z, U) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, U)$, obtemos inmediatamente que $\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}, \partial_{x^k}, \partial_{x^l}) = R_{ijk}{}^r g_{rl}$.

Dicimos que un tensor é *de curvatura alxébrico* se verifica as propiedades alxébricas dun tensor de curvatura (1.1). Así, o tensor de curvatura estándar \mathcal{R}_0 definido por

$$\mathcal{R}_0(X, Y, Z, U) = g(X, U)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, U),$$

é un tensor curvatura-alxébrico. Definimos a *curvatura seccional* de $\Pi = \text{span}(X, Y)$ con $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, como:

$$K(\Pi) = \frac{\mathcal{R}(X, Y, Y, X)}{\mathcal{R}_0(X, Y, Y, X)}.$$

Unha variedade semi-riemanniana completa e conexas con curvatura seccional constante recibe o nome de *espazo forma*. O recubrimento universal deste tipo de espazos é isométrico á esfera

S^n , ao espazo euclidiano \mathbb{R}^n ou ao espazo hiperbólico \mathbb{H}^n , segundo a curvatura seccional sexa positiva, nula ou negativa, respectivamente. A curvatura seccional dunha variedade determina o tensor de curvatura.

Contraendo o tensor de curvatura obtemos outros tensores que codifican unha parte da información do tensor de curvatura. O *tensor de Ricci*, ρ é un tensor de tipo $(0, 2)$ que se define a partir da relación

$$\rho(X, Y) = \text{tr} \{Z \mapsto R(Z, X)Y\}.$$

A diferenza do que acontece no contexto semi-riemanniano, en xeometría afín este tensor non é en xeral simétrico. Por este motivo definimos o tensor de Ricci simétrico e anti-simétrico como

$$\rho_s(X, Y) = \frac{1}{2}\{\rho(X, Y) + \rho(Y, X)\}, \quad \rho_a(X, Y) = \frac{1}{2}\{\rho(X, Y) - \rho(Y, X)\}.$$

Restrinxíndonos ao caso semi-riemanniano definimos o *operador de Ricci*, Ric , como o tensor de tipo $(1, 1)$ definido pola relación $g(\text{Ric}(X), Y) = \rho(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Finalmente, definimos a función *curvatura escalar*, τ , como a traza do operador de Ricci. En coordenadas tense que

$$\rho_{ij} = \rho(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \partial_{x^\beta}(\Gamma_{ij}^\beta) + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \partial_{x^i}(\Gamma_{\beta j}^\beta) - \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta$$

e que $\tau = \rho_{ij}g^{ji}$. Para dimensións baixas estes dous tensores determinan o tensor de curvatura. En particular, se $\dim M = 2$ o tensor de curvatura queda determinado pola curvatura escalar, mentres que con $\dim M = 3$ queda determinado polo tensor de Ricci.

1.3.1 Operadores diferenciais e curvatura

Neste apartado establecemos dúas identidades importantes relacionando os elementos que vimos de definir e que forman parte do estudo dos capítulos 2 e 3.

A consecuencia das definicións do operador de Ricci e da función curvatura escalar obtense a relación

$$d\tau = 2 \text{div } \rho, \tag{1.2}$$

denominada *Identidade de Bianchi Contracta*. Para ver isto basta reescribir a diverxencia do tensor de Ricci en función da curvatura e aplicar a Segunda Identidade de Bianchi. Referimos a [6] para ver os detalles da proba.

A seguinte observación simplifica moito a obtención de igualdades tensoriais.

Observación 1.1. Sexa p un punto dunha variedade semi-riemanniana (M, g) de dimensión n . Denotamos por $X|_p$ o vector de $T_p M$ definido pola avaliación do campo de vectores X en p . Entón existe unha referencia $\{E_1, \dots, E_n\}$ nunha veciñanza de p tal que $(\nabla_{E_i} E_j)|_p = 0$ e $(\nabla_X E_i)|_p = 0$ para calquera i e j . Ademais, se $X = X^i E_i$ con $X^i \in \mathbb{R}$, tense que $(\nabla_{E_i} X)|_p = 0$ para todo i .

O seguinte lema é simplemente un resultado auxiliar que empregaremos a continuación para probar a Fórmula de Bochner.

Lema 1.2. *Sexa T un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico, f unha función en M e X un campo de vectores en M . Entón:*

$$\operatorname{div}(fT)(X) = f \operatorname{div}(T)(X) + T(\nabla f, X).$$

Proba. Sexa $\{E_1, \dots, E_n\}$ unha referencia ortonormal. Tense que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fT)(X) &= \varepsilon_i (\nabla_{E_i} f T)(E_i, X) \\ &= \varepsilon_i E_i(f T(E_i, X)) - \varepsilon_i f T(\nabla_{E_i} E_i, X) - \varepsilon_i f T(E_i, \nabla_{E_i} X) \\ &= \varepsilon_i E_i(f) T(E_i, X) \\ &\quad + \varepsilon_i f [E_i(T(E_i, X)) - T(\nabla_{E_i} E_i, X) - T(E_i, \nabla_{E_i} X)] \\ &= \varepsilon_i g(\nabla f, E_i) T(E_i, X) + f \operatorname{div}(T)(X) \\ &= T(\nabla f, X) + f \operatorname{div}(T)(X). \end{aligned}$$

□

O seguinte lema presenta a *fórmula de Bochner* que establece unha interesante relación involucrando a diverxencia do hessiano.

Lema 1.3 (Fórmula de Bochner). *Se (M, g) é unha variedade semi-riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, entón*

$$\operatorname{div} \operatorname{Hes}_f(X) = X(\Delta f) + \rho(\nabla f, X) \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.3)$$

Proba. Sexan $p \in M$ e $\{E_1, \dots, E_n\}$ unha referencia ortonormal nunha veciñanza de p . Tense que $\Delta f = \varepsilon_i g(\nabla_{E_i} \nabla f, E_i)$. A observación 1.1 permite supoñer que $(\nabla_{E_i} E_j)|_p = 0$. Sexa $X = X^i E_i$ con $X^i \in \mathbb{R}$. Entón

$$\begin{aligned} (X(\Delta f))|_p &= \varepsilon_i [g(\nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f, E_i) + g(\nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_X E_i)]|_p \\ &= \varepsilon_i g(\nabla_X \nabla_{E_i} \nabla f, E_i)|_p \\ &= \varepsilon_i [g(\nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i) + g(\nabla_{[X, E_i]} \nabla f, E_i) + \mathcal{R}(X, E_i, \nabla f, E_i)]|_p \\ &= \varepsilon_i g(\nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i)|_p - \rho(X, \nabla f)|_p. \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{Hes}_f)(X)|_p &= \varepsilon_i [E_i \operatorname{Hes}_f(X, E_i) - \operatorname{Hes}_f(\nabla_{E_i} X, E_i) - \operatorname{Hes}_f(X, \nabla_{E_i} E_i)]|_p \\ &= \varepsilon_i E_i \operatorname{Hes}_f(X, E_i)|_p = \varepsilon_i E_i g(\nabla_X \nabla f, E_i)|_p \\ &= \varepsilon_i [g(\nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i) + g(\nabla_X \nabla f, \nabla_{E_i} E_i)]|_p \\ &= \varepsilon_i g(\nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i)|_p. \end{aligned}$$

Se combinamos as expresións anteriores obtemos

$$\operatorname{div}(\operatorname{Hes}_f)(X)|_p = (X(\Delta f) + \rho(X, \nabla f))|_p.$$

Deste xeito, queda probada a igualdade puntualmente e polo tanto tamén se cumpre a expresión do enunciado por tratarse dunha ecuación tensorial. □

1.3.2 Tensor de Weyl

Neste apartado introducimos o tensor de Weyl no contexto semi-riemanniano. Este tensor aparece na descomposición da curvatura para dimensión maior que tres e a súa anulación caracteriza as variedades localmente conformemente chás, isto é, aquelas que son conformemente equivalentes a unha variedade chá. No que segue introducimos este tensor e estudamos a súa diverxencia.

Sexan A e B tensores de tipo $(0, 2)$ simétricos. O produto de Kulkarni-Nomizu de A e B , que denotamos por $A \odot B$, defínese como (ver [6])

$$(A \odot B)(X, Y, Z, U) = A(X, U)B(Y, Z) + A(Y, Z)B(X, U) \\ - A(X, Z)B(Y, U) - A(Y, U)B(X, Z),$$

con $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$. Deste xeito obtemos un tensor de tipo $(0, 4)$ satisfacendo as propiedades alxébricas da curvatura. Por outra banda, definimos o *tensor de Schouten*, S , por

$$S = \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)}g \right).$$

Empregando este tensor e o produto de Kulkarni-Nomizu definimos o *tensor de Weyl* \mathcal{W} como

$$\mathcal{W} = \mathcal{R} - S \odot g.$$

Reescribindo a ecuación anterior en termos de campos de vectores X, Y, Z, U obtense

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X, Y, Z, U) &= \mathcal{R}(X, Y, Z, U) \\ &- \frac{1}{(n-2)} \{ \rho(X, U)g(Y, Z) - \rho(X, Z)g(Y, U) \\ &\quad + \rho(Y, Z)g(X, U) - \rho(Y, U)g(X, Z) \} \\ &+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \{ g(X, U)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, U) \}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A partir da definición é claro que se $\mathcal{W} = 0$, entón \mathcal{R} queda completamente determinado polo tensor de Ricci.

Unha vez introducidos os tensores de Weyl e Schouten, definimos o *tensor de Cotton*, C , pola relación

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z) &= (\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) \\ &- \frac{1}{2(n-1)} (X(\tau)g(Y, Z) - Y(\tau)g(X, Z)). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Por un lado, este tensor mide a simetría na derivada covariante do tensor de Schouten xa que

$$C(X, Y, Z) = (n-2) [(\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)],$$

e por outro lado, é un múltiplo da diverxencia do tensor de Weyl como se mostra no seguinte resultado.

Lema 1.4. *Sexa (M, g) unha variedade semi-Riemanniana de dimensión $n \geq 4$, entón*

$$(\operatorname{div} \mathcal{W})(X, Y, Z) = \frac{n-3}{n-2} C(X, Y, Z). \quad (1.6)$$

Proba. Aplicando unha vez máis a observación 1.1 consideramos unha referencia ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ tal que $(\nabla_{E_i} E_j)|_p = 0$. Sexan X, Y, Z extensións a campos de vectores en M de forma que $(\nabla X)|_p = (\nabla Y)|_p = (\nabla Z)|_p = 0$. Comezamos vendo que

$$(\operatorname{div} \mathcal{W})(X, Y, Z)|_p = \varepsilon_i (\nabla_{E_i} \mathcal{W})(X, Y, Z, E_i)|_p = \varepsilon_i \nabla_{E_i} \mathcal{W}(X, Y, Z, E_i)|_p,$$

e posto que o tensor de Weyl pode expresarse na forma

$$\mathcal{W}(X, Y, Z, U) = \left[\mathcal{R} + \frac{\tau}{(n-2)(n-1)} \mathcal{R}_0 - \frac{1}{n-2} (\rho \odot g) \right] (X, Y, Z, U),$$

basta calcular as derivadas de cada sumando da expresión anterior. Para o primeiro termo tense que

$$\begin{aligned} \varepsilon_i (E_i(\mathcal{R}(X, Y, Z, E_i)))|_p &= -\varepsilon_i (X(\mathcal{R}(Y, E_i, Z, E_i)))|_p - \varepsilon_i (Y(\mathcal{R}(E_i, X, Z, E_i)))|_p \\ &= (X(\rho(Y, Z)) - Y(\rho(X, Z)))|_p, \end{aligned}$$

onde empregamos a Segunda Identidade de Bianchi e a anti-simetría nos dous primeiros argumentos. Para o segundo termo, tense que:

$$\varepsilon_i E_i \left(\frac{\tau}{(n-2)(n-1)} \mathcal{R}_0(X, Y, Z, E_i) \right) \Big|_p = \left(\varepsilon_i \frac{\mathcal{R}_0(X, Y, Z, E_i)}{(n-2)(n-1)} E_i(\tau) \right) \Big|_p.$$

Esta igualdade obtense sen máis que recordar a definición de \mathcal{R}_0 . En efecto:

$$E_i(\mathcal{R}_0(X, Y, Z, E_i))|_p = E_i(g(X, E_i)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, E_i))|_p = 0,$$

posto que todas as derivadas destes vectores son cero e a métrica é paralela. Volvendo á igualdade anterior e empregando que $X = \varepsilon_i g(X, E_i) E_i$, tense que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \left(\frac{g(X, E_i)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, E_i)}{(n-2)(n-1)} E_i(\tau) \right) \Big|_p &= \frac{1}{(n-2)(n-1)} [g(X, E_i)\varepsilon_i g(Y, Z) E_i(\tau) - g(Y, E_i)\varepsilon_i g(X, Z) E_i(\tau)]|_p \\ &= \frac{1}{(n-2)(n-1)} [g(Y, Z)X(\tau) - g(X, Z)Y(\tau)]|_p. \end{aligned}$$

Finalmente, para o terceiro sumando empregamos de novo que as derivadas son cero e que a métrica é paralela, obtendo que

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_i E_i \left(\frac{1}{n-2} (\rho \odot g)(X, Y, Z, E_i) \right) \Big|_p \\
&= \frac{1}{n-2} \varepsilon_i [E_i(\rho(X, E_i))g(Y, Z) - E_i(\rho(Y, E_i))g(X, Z) \\
&\quad + E_i(\rho(Y, Z))g(X, E_i) - E_i(\rho(X, Z))g(Y, E_i)] \Big|_p \\
&= \frac{1}{n-2} [g(Y, Z)(\operatorname{div} \rho)(X) - g(X, Z)(\operatorname{div} \rho)(Y) \\
&\quad + X(\rho(Y, Z)) - Y(\rho(X, Z))] \Big|_p.
\end{aligned}$$

Isto último pode reescribirse empregando a Identidade de Bianchi Contracta, obténdose:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_i E_i \left(\frac{1}{n-2} (\rho \odot g)(X, Y, Z, E_i) \right) \Big|_p = \\
& \frac{1}{2(n-2)} [g(Y, Z)X(\tau) - g(X, Z)Y(\tau) + 2X(\rho(Y, Z)) - 2Y(\rho(X, Z))] \Big|_p.
\end{aligned}$$

Finalmente, considerando todo o anterior e posto que (1.6) é tensorial, dedúcese que:

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{div} \mathcal{W})(X, Y, Z) = X(\rho(Y, Z)) - Y(\rho(X, Z)) \\
& \quad + \frac{1}{(n-2)(n-1)} \{g(Y, Z)X(\tau) - g(X, Z)Y(\tau)\} \\
& \quad - \frac{1}{2(n-2)} \{g(Y, Z)X(\tau) - g(X, Z)Y(\tau) \\
& \quad \quad + 2X(\rho(Y, Z)) - 2Y(\rho(X, Z))\} \\
& = \frac{n-3}{n-2} \{X(\rho(Y, Z)) - Y(\rho(X, Z)) \\
& \quad - \frac{1}{2(n-1)} [g(Y, Z)X(\tau) - g(X, Z)Y(\tau)]\} \\
& = \frac{n-3}{n-2} C(X, Y, Z),
\end{aligned}$$

obtendo así o resultado. □

Na seguinte sección introducimos a descomposición do tensor de Weyl, dando lugar ás noções de autodualidade e anti-autodualidade.

Observación 1.5. Existe un concepto equivalente ao tensor de Weyl en xeometría afín ao que se adoita chamar *tensor de Weyl afín*. A anulación de dito tensor caracteriza as variedades proxectivamente chás de dimensión $n \geq 3$ (ver teorema 4.8).

1.4 Autodualidade e anti-autodualidade

Nesta sección introducimos as condicións de autodualidade e anti-autodualidade en dimensión catro. Estes conceptos duais xorden pola descomposición que admite o endomorfismo de 2-formas asociado ao operador de Weyl nesa dimensión. Para presentar os detalles desta descomposición, comezamos traballando a nivel puramente alxébrico. Sexa $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espazo vectorial de dimensión catro dotado do produto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Este último induce, á súa vez, un produto interior $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ no espazo de 2-formas $\Lambda^2(V)$ de xeito que se $u, v, w, x \in V$, entón

$$\langle\langle u \wedge v, w \wedge x \rangle\rangle = \langle u, w \rangle \langle v, x \rangle - \langle u, x \rangle \langle v, w \rangle.$$

Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base de V tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$ con $\varepsilon_i = \pm 1$. Denotamos por e^i o elemento dual de e_i . Sexa $\text{vol}_V = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$ o elemento de volume que determina a orientación de V . Daquela, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ten sinatura riemanniana ou neutra, o *operador estrela de Hodge* $\star : \Lambda^2(V) \rightarrow \Lambda^2(V)$ definido pola relación $\alpha \wedge \star \beta = \langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle \text{vol}_V$ satisfai $\star^2 = \text{Id}$ e induce unha descomposición $\Lambda^2(V) = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$, onde $\Lambda_+^2 = \{\alpha \in \Lambda^2 : \star \alpha = \alpha\}$ e $\Lambda_-^2 = \{\alpha \in \Lambda^2 : \star \alpha = -\alpha\}$. Λ_+^2 recibe o nome de *espazo autodual* e Λ_-^2 , *espazo anti-autodual*. Ademais, un cambio de orientación en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ inverte os papeis de Λ_+^2 e Λ_-^2 .

No que segue, consideramos a construción anterior sobre o espazo tanxente dunha variedade semi-riemanniana (M, g) de dimensión catro. Denotamos por Λ^2 o espazo de 2-formas asociado a TM . Se a sinatura de g é riemanniana (i.e., $(4, 0)$ ou $(0, 4)$) ou neutra (i.e., $(2, 2)$), entón Λ^2 admite a descomposición inducida polo operador estrela de Hodge que se detalla no parágrafo anterior. No que resta de sección supoñemos que (M, g) é de sinatura $(2, 2)$, malia que os resultados que enunciámos son análogos en sinatura riemanniana. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a 1-forma asociada X^b pola relación $X^b(Y) = g(X, Y)$. Sexa $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ unha referencia local ortonormal do fibrado tanxente con $\varepsilon_i = g(E_i, E_i) = \pm 1$ para $i \in \{2, 3, 4\}$. Por simplicidade, denotamos $E^i = (E_i)^b$. Fixada unha orientación en (M, g) , supoñemos adicionalmente que a 4-forma $E^1 \wedge E^2 \wedge E^3 \wedge E^4$ ten a orientación do elemento de volume (riemanniano). Denotamos

$$\begin{aligned} L_1^\pm &= E^1 \wedge E^2 \pm \varepsilon_3 \varepsilon_4 E^3 \wedge E^4, \\ L_2^\pm &= E^1 \wedge E^3 \mp \varepsilon_2 \varepsilon_4 E^2 \wedge E^4, \\ L_3^\pm &= E^1 \wedge E^4 \pm \varepsilon_2 \varepsilon_3 E^2 \wedge E^3. \end{aligned}$$

Entón

$$\Lambda_\pm^2 = \text{span}\{L_1^\pm, L_2^\pm, L_3^\pm\}. \quad (1.7)$$

Por outra banda, o produto escalar inducido pola métrica g en Λ^2 , que denotamos por \tilde{g} , permite asociar de forma biunívoca un endomorfismo de Λ^2 a cada tensor de curvatura-alxébrico. En particular, se \mathcal{W} é o tensor de Weyl de (M, g) , o endomorfismo asociado $\widetilde{\mathcal{W}}$ defínese pola relación $\tilde{g}(\widetilde{\mathcal{W}}(X^b \wedge Y^b), Z^b \wedge U^b) = -\mathcal{W}(X, Y, Z, U)$ (ver, por exemplo, [59, 73]). Así, dicimos que (M, g) é autodual (anti-autodual) se $\widetilde{\mathcal{W}}(\Lambda_-^2) = 0$ ($\widetilde{\mathcal{W}}(\Lambda_+^2) = 0$). Dicimos que (M, g) é *hemi conformemente chá* se é autodual ou anti-autodual. Esta nomenclatura serve para evitar especificar a orientación. Sexa $\{i, j, k\}$ unha permutación dos índices $\{2, 3, 4\}$ e sexa σ_{ijk} o signo de dita permutación. A autodualidade caracterízase do xeito seguinte.

Lema 1.6. *Sexa (M, g) unha variedade de sinatura $(2, 2)$ orientada. Entón, (M, g) é autodual se e só se para calquera referencia ortonormal $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ e para calquera X, Y campos de vectores,*

$$\mathcal{W}(E_1, E_i, X, Y) = \sigma_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k\mathcal{W}(E_j, E_k, X, Y). \quad (1.8)$$

Proba. Posto que (M, g) está orientada e é autodual, se $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ é unha referencia ortonormal positivamente orientada, entón \widetilde{W} anúlase para os xeradores de Λ_-^2 dados en (1.7):

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(E^1 \wedge E^2 - \varepsilon_3\varepsilon_4 E^3 \wedge E^4) &= 0, \\ \widetilde{W}(E^1 \wedge E^3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 E^2 \wedge E^4) &= 0, \\ \widetilde{W}(E^1 \wedge E^4 - \varepsilon_2\varepsilon_3 E^2 \wedge E^3) &= 0. \end{aligned}$$

Usando que \widetilde{W} é linear e a relación deste con \mathcal{W} , obtemos que isto último é equivalente a que para calquera par de campos de vectores X e Y ,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(E_1, E_2, X, Y) &= \varepsilon_3\varepsilon_4\mathcal{W}(E_3, E_4, X, Y), \\ \mathcal{W}(E_1, E_3, X, Y) &= -\varepsilon_2\varepsilon_4\mathcal{W}(E_2, E_4, X, Y), \\ \mathcal{W}(E_1, E_4, X, Y) &= \varepsilon_2\varepsilon_3\mathcal{W}(E_2, E_3, X, Y). \end{aligned}$$

Así, as tres ecuacións anteriores son equivalentes a (1.8).

Reciprocamente, se se cumpre a condición (1.8), en particular sabemos que se anulan os xeradores de Λ_-^2 , polo que $\widetilde{W}(\Lambda_-^2) = 0$ e (M, g) é autodual como queriamos ver. \square

De cara a traballar coa autodualidade en sinatura $(2, 2)$ resulta interesante caracterizar esta condición en termos dunha referencia de campos de vectores nulos. O seguinte corolario do lema 1.6 proporciona unha caracterización da autodualidade en termos dunha referencia semi-ortonormal de vectores nulos.

Corolario 1.7. *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de sinatura $(2, 2)$. Entón, (M, g) é autodual se e só se para calquera referencia $\{T, U, V, W\}$ tal que os únicos produtos non nulos sexan $g(T, V) = g(U, W) = 1$ (salvo simetría) se cumpre*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(T, V, X, Y) &= \mathcal{W}(U, W, X, Y), \\ \mathcal{W}(T, W, X, Y) &= 0, \\ \mathcal{W}(U, V, X, Y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Proba. Basta observar que a referencia dada por

$$\left\{ E_1 = \frac{T - V}{\sqrt{2}}, E_2 = \frac{T + V}{\sqrt{2}}, E_3 = \frac{W - U}{\sqrt{2}}, E_4 = \frac{W + U}{\sqrt{2}} \right\}$$

é ortonormal con $g(E_i, E_i) = \varepsilon_i = (-1)^i$. Empregamos caracterización de autodualidade do lema 1.6. Por un lado, tense que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{W}(E_1, E_2, X, Y) + \mathcal{W}(E_3, E_4, X, Y) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{W}(T - V, T + V, X, Y) + \frac{1}{2}\mathcal{W}(W - U, W + U, X, Y) \\ &= \mathcal{W}(T, V, X, Y) + \mathcal{W}(W, U, X, Y), \end{aligned}$$

dando lugar á primeira das igualdades. Por outro lado, empregamos as condicións restantes da caracterización de autodualidade para referencias ortonormais do lema 1.6:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(E_1, E_3, X, Y) &= -\mathcal{W}(E_2, E_4, X, Y), \\ \mathcal{W}(E_1, E_4, X, Y) &= -\mathcal{W}(E_2, E_3, X, Y). \end{aligned}$$

Sumando separadamente os membros esquerdo e dereito das ecuacións anteriores tense que

$$\mathcal{W}(E_1, E_3 + E_4, X, Y) = -\mathcal{W}(E_2, E_4 + E_3, X, Y).$$

Xuntando todo no membro esquerdo obtemos $\mathcal{W}(E_1 + E_2, E_3 + E_4, X, Y) = 0$, de onde $\mathcal{W}(T, W, X, Y) = 0$. A ecuación que falta obtense analogamente restando as ecuacións en lugar de sumalas. \square

Observación 1.8. O lema 1.6 e o Corolario 1.7 caracterizan a autodualidade. De forma paralela podemos caracterizar a anti-autodualidade sen máis que reescribir as condicións dadas en (1.8) e (1.11) como

$$\mathcal{W}(E_1, E_i, X, Y) = -\sigma_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k\mathcal{W}(E_j, E_k, X, Y)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(T, V, X, Y) &= -\mathcal{W}(U, W, X, Y), \\ \mathcal{W}(T, W, X, Y) &= 0, \\ \mathcal{W}(U, V, X, Y) &= 0, \end{aligned}$$

respectivamente.

1.4.1 Autodualidade e tensor de Cotton

Para rematar esta sección empregamos o lema 1.6 e o corolario 1.7 para estudar o comportamento do tensor de Cotton baixo a condición de autodualidade.

Lema 1.9. *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de sinatura $(2, 2)$. Se (M, g) é autodual, entón dada unha referencia ortonormal $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ e un campo de vectores Z arbitrario, tense que*

$$C(E_1, E_i, Z) = \sigma_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k C(E_j, E_k, Z). \quad (1.10)$$

Proba. O lema 1.4 garante que en dimensión catro

$$(\operatorname{div} \mathcal{W})(X, Y, Z) = \frac{1}{2}C(X, Y, Z) \text{ con } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Sexa $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ unha referencia ortonormal con respecto á cal os símbolos de Christoffel en p son cero (ver observación 1.1). Aplicando o lema 1.6 tense que

$$\begin{aligned} C(E_1, E_i, Z)|_p &= \operatorname{div} \mathcal{W}(E_1, E_i, Z)|_p \stackrel{(*)}{=} \varepsilon_l (\nabla_{E_l} \mathcal{W})(E_1, E_i, Z, E_l)|_p \\ &= \varepsilon_l E_l \mathcal{W}(E_1, E_i, Z, E_l)|_p = \varepsilon_l E_l \sigma_{ijk} \varepsilon_j \varepsilon_k \mathcal{W}(E_j, E_k, Z, E_l)|_p \\ &\stackrel{(*)}{=} \sigma_{ijk} \varepsilon_j \varepsilon_k \operatorname{div} \mathcal{W}(E_j, E_k, Z)|_p = \sigma_{ijk} \varepsilon_j \varepsilon_k C(E_j, E_k, Z)|_p. \end{aligned}$$

En (*) empregamos que todas as derivadas covariantes en p son cero. Deste xeito, obtense o resultado. \square

Finalmente enunciámos o seguinte corolario cuxa proba omitimos por ser completamente análoga á do corolario 1.7 mudando \mathcal{W} por C , ou ben adaptando o argumento da proba do lema 1.9.

Corolario 1.10. *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de sinatura $(2, 2)$. Se (M, g) é autodual, entón para unha referencia $\{T, U, V, W\}$ tal que os únicos produtos non nulos sexan $g(T, V) = g(U, W) = 1$ (salvo simetría) tense que*

$$\begin{aligned} C(T, V, Z) &= C(U, W, Z), \\ C(T, W, Z) &= 0, \\ C(U, V, Z) &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.5 Métricas conformes

As transformacións conformes (é dicir, aplicacións que conservan ángulos) ocupan un lugar importante no estudo da xeometría semi-riemanniana. Isto débese en parte a que dúas estruturas conformemente equivalentes poden ter unha xeometría moi diferente, mais os obxectos xeométricos dunha poden obterse a partir dos da outra sempre que a relación de conformidade sexa coñecida. Para ver isto comezamos definindo o concepto de aplicación conforme e, seguidamente, veremos un teorema que nos permite relacionar a conexión de Levi-Civita, a curvatura e o tensor de Ricci de dúas variedades conformemente equivalentes.

Definición 1.11. Sexan (M, g) e $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ variedades semi-riemannianas. Diremos que unha aplicación diferenciable $F : M \rightarrow \widetilde{M}$ é unha *aplicación conforme* se existe unha certa función $\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$ chamada *factor de conformidade* que é distinta de cero en todo punto, e tal que para todo $p \in M$ e para calquera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\widetilde{g}_{F(p)}(F_*(p)X, F_*(p)Y) = \gamma^2(p)g_p(X, Y).$$

Observación 1.12. Sexa γ o factor de conformidade dunha aplicación conforme F .

1. Se γ é constante, entón F é unha homotecia.
2. Se $\gamma \equiv 1$, entón F é unha isometría.

Diremos que dúas variedades son conformes, homotéticas ou isométricas se existe unha aplicación conforme, unha homotecia ou unha isometría entre elas, respectivamente. Estas nocións definen relacións de equivalencia no espazo de métricas semi-riemannianas.

O seguinte resultado proporciona relacións entre os obxectos xeométricos principais de dúas variedades conformemente equivalentes.

Teorema 1.13. [73] *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión n e sexa $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable. Se consideramos en M a métrica dada por $\tilde{g} = e^{2\sigma}g$, entón podemos relacionar os seguintes elementos de (M, g) cos de (M, \tilde{g}) como segue:*

1. Se ∇ e $\tilde{\nabla}$ son as conexións de Levi-Civita de g e \tilde{g} , respectivamente, tense que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\sigma)Y + Y(\sigma)X - g(X, Y)\nabla\sigma. \quad (1.12)$$

2. Se \mathcal{R} e $\tilde{\mathcal{R}}$ denotan os tensores de curvatura de tipo $(0, 4)$ de g e \tilde{g} , respectivamente, entón

$$\tilde{\mathcal{R}} = e^{2\sigma} \left\{ \mathcal{R} + \left(\text{Hes}_\sigma - d\sigma \otimes d\sigma + \frac{1}{2}g(\nabla\sigma, \nabla\sigma)g \right) \odot g \right\}. \quad (1.13)$$

3. Se ρ e $\tilde{\rho}$ representan os operadores de Ricci de g e \tilde{g} , respectivamente, cúmprese que

$$\tilde{\rho} = \rho - (n - 2)(\text{Hes}_\sigma - d\sigma \otimes d\sigma) - (\Delta\sigma + (n - 2)g(\nabla\sigma, \nabla\sigma))g. \quad (1.14)$$

1.6 Produtos deformados

No estudo da xeometría semi-riemanniana, unha estrutura que cobra especial importancia é o das variedades produto. A partir de dúas variedades semi-riemannianas (M, g_M) e (N, g_N) definimos a variedade produto como o produto de variedades $M \times N$ dotado da métrica $g_M + g_N$. Esta nova variedade $(M \times N, g_M + g_N)$ herda moitas propiedades de M e N , polo que supón un modo moi axeitado de proporcionar exemplos de variedades con maior dimensión. Non obstante, é tan forte a dependencia que teñen as propiedades de $M \times N$ das variedades que a compoñen que non é moi habitual atopar novos exemplos con propiedades interesantes. Ademais, o que en principio poden parecer pequenos cambios na métrica dunha variedade produto, aumenta moito o seu interese á hora de proporcionar exemplos característicos. En concreto, resulta interesante o estudo de variedades produto que sofren unha modificación homotética da métrica dunha das dúas variedades.

Definición 1.14. Sexan (B, g_B) e (F, g_F) dúas variedades semi-riemannianas e sexa $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^+$ unha función positiva diferenciable. Defínese o *produto warped* $B \times_{\varphi} F$ como a variedade produto $B \times F$ equipada coa métrica

$$g = \pi^* g_B + (\varphi \circ \pi)^2 \sigma^* g_F,$$

onde $\pi : B \times F \rightarrow B$ e $\sigma : B \times F \rightarrow F$ son as proxeccións canónicas. A función φ recibe o nome de *función warping*, B dise a base do produto e F a fibra.

Se consideramos un produto warped como o dado na definición anterior podemos relacionar o tensor de Ricci do produto co tensor de Ricci dos seus factores. O seguinte resultado de [89] mostra estas relacións.

Lema 1.15. Sexa $M = B \times_{\varphi} F$ un produto warped con $\dim F = d_F > 1$; sexan $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$, e sexan $U, V \in \mathfrak{X}(F)$. Entón a conexión de Levi-Civita ∇ de (M, g) cumpre

$$\begin{aligned} \nabla_X Y & \text{ é o levantamento a } M \text{ de } {}^B \nabla_X Y, \\ \nabla_X U & = \nabla_U X = \frac{X(\varphi)}{\varphi} U, \\ \text{nor}(\nabla_U V) & = \text{II}(U, V) = -\frac{g(U, V)}{\varphi} \nabla \varphi, \\ \text{tan}(\nabla_U V) & \text{ é o levantamento a } M \text{ de } {}^F \nabla_U V, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde tan e nor denotan as compoñentes tanxente e normal á fibra F , respectivamente. Ademais, o tensor de Ricci queda determinando por

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) & = \rho^B(X, Y) - \frac{d_F}{\varphi} \text{Hes}_{\varphi}(X, Y), \\ \rho(X, U) & = 0, \\ \rho(U, V) & = \rho^F(U, V) - g(U, V) \left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi} + \frac{d_F - 1}{\varphi^2} \|\nabla \varphi\|^2 \right). \end{aligned} \tag{1.16}$$

O noso interese céntrase fundamentalmente nos produtos warped con base de dimensión un. En tal caso, o lema anterior simplifícase notablemente da forma seguinte:

Corolario 1.16. Sexa $M = I \times_{\varphi} F$ un produto warped con $\dim F = d_F > 1$ e métrica $g = \varepsilon dt^2 \oplus \varphi^2 g_F$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e $\varepsilon = \pm 1$. Sexan $U, V \in \mathfrak{X}(F)$, entón a conexión de Levi-Civita de (M, g) cumpre

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial t} \partial t & = 0, \\ \nabla_{\partial t} U & = \nabla_U \partial t = \frac{\varphi'}{\varphi} U, \\ \text{nor}(\nabla_U V) & = \text{II}(U, V) = -\varepsilon \frac{\varphi'}{\varphi} g(U, V) \partial t, \\ \text{tan}(\nabla_U V) & \text{ é o levantamento a } M \text{ de } {}^F \nabla_U V, \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde tan e nor denotan as compoñentes tanxente e normal á fibra F , respectivamente. Ademais, o tensor de Ricci queda determinado por

$$\begin{aligned} \rho(\partial t, \partial t) & = -\varepsilon d_F \frac{\varphi''}{\varphi}, \\ \rho(\partial t, U) & = 0, \\ \rho(U, V) & = \rho^F(U, V) - \varepsilon \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + (d_F - 1) \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \right) g(U, V). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Os produtos warped son interesantes desde diversos puntos de vista da xeometría, destacando a importancia que teñen á hora de buscar exemplos de variedades con propiedades que se conservan mediante transformacións conformes. O seguinte resultado mostra que todo produto warped hemi conformemente chan con base 1-dimensional é localmente conformemente chan.

Lema 1.17. *Sexa $M = B \times_{\varphi} F$ un produto warped con $\dim B = 1$ e $\dim F = 3$ coa métrica g dada na definición 1.14. Entón M é autodual se e só se é anti-autodual.*

Proba. Consideramos o caso de sinatura $(2, 2)$ sendo o riemanniano análogo. Supoñamos que $\varphi = 1$, isto é, (M, g) é unha métrica produto. Entón a métrica é da forma

$$g = \left(\begin{array}{c|c} g_B & 0 \\ \hline 0 & g_F \end{array} \right).$$

Sexa $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ unha referencia ortonormal para g respectando as caixas. Tense que $\nabla_{E_0} E_i = 0$ con $i \neq 0$. Entón $\mathcal{W}(E_0, E_j, E_k, E_l) = 0$ para calquera j, k, l . Así, o lema 1.6 xunto coa observación 1.8 mostran que M é autodual se e só se é anti-autodual. Supoñamos agora que φ non é constante. Sexa $\tilde{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$. Entón (M, \tilde{g}) é unha métrica produto conformemente equivalente a (M, g) . Deste xeito queda probado o resultado xa que a autodualidade e anti-autodualidade son un invariants por transformacións conformes. \square

A continuación introducimos outro tipo de deformación da métrica produto que xeneraliza os produtos warped de forma que a función de deformación non só depende da base.

Definición 1.18. Sexan (B, g_B) e (F, g_F) dúas variedades semi-riemannianas e sexa $\varphi : B \times F \rightarrow \mathbb{R}^+$ unha función positiva. Defínese o *produto twisted* de ambas as dúas variedades como a variedade produto dotada da métrica

$$g = \pi^* g_B + \varphi^2 \sigma^* g_F,$$

onde $\pi : B \times F \rightarrow B$ é a proxección na base e $\sigma : B \times F \rightarrow F$ é a proxección na fibra.

Os produtos warped e twisted constitúen unha interesante forma de dotar o produto de variedades de métricas que garden unha forte relación coas métricas de cada factor. A función de deformación φ indica o nivel de deformación que sofre a métrica. Por esta razón este tipo de variedades reciben o nome de *produtos deformados*.

Algunhas veces, a existencia de distribucións con determinadas propiedades xeométricas caracteriza os produtos twisted ou warped. Dicimos que unha subvariedade é totalmente xeodésica (umbilical) se a segunda forma fundamental é cero (é un múltiplo da métrica nunha dirección normal á subvariedade) en cada punto. O seguinte resultado foi enunciado e probado por Ponge e Reckziegel en [96].

Lema 1.19. *Sexa $(M_1 \times M_2, g)$ unha variedade semi-riemanniana e supoñamos que as foliacións canónicas L_1 e L_2 se intersecan perpendicularmente. Entón a métrica g correspóndese coa dun produto twisted $M_1 \times_{\varphi} M_2$ se e só se L_1 é totalmente xeodésica e L_2 é totalmente umbilical.*

O seguinte lema de [57] afirma que baixo certas hipóteses todo produto twisted pode expresarse como un warped.

Lema 1.20. *Sexa $B \times_{\varphi} F$ un produto twisted con $\dim(F) > 1$. Entón, $\rho(X, V) = 0$ para calquera X tanxente a B e calquera V tanxente a F se e só se $B \times_{\varphi} F$ pode expresarse como un produto warped $B \times_{\psi} F$ de (B, g_B) e (F, \widetilde{g}_F) , onde \widetilde{g}_F é unha métrica conformemente equivalente a g_F .*

1.7 Métricas de Walker

É un feito coñecido que a existencia dunha distribución paralela nunha variedade Riemanniana dá lugar a unha descomposición local de de Rham como produto. Esta propiedade mantense en sinatura semi-riemanniana se a distribución é paralela e non dexenerada. O caso no que a distribución é dexenerada foi estudado por Walker [100], obtendo unha forma canónica para a métrica. Baseándonos nisto diremos que unha variedade semi-riemanniana é unha *variedade de Walker* se admite unha distribución \mathcal{D} nula e paralela, isto é, a métrica é totalmente dexenerada restrinxida á distribución e $\nabla \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, respectivamente.

As métricas de Walker son unha clase especial de métricas semi-riemannianas que non teñen análogo riemanniano. Estas son responsables de moitas situacións estritamente semi-riemannianas, por exemplo: holonomía indescompoñible pero non irreductible, estruturas homoxéneas semi-riemannianas dexeneradas, variedades estritamente conformemente simétricas, métricas conformemente chás con operador de Ricci nilpotente en dous pasos, hipersuperficies de Einstein en variedades con curvatura seccional constante e operador de configuración nilpotente, estruturas para-Kähler, métricas de Osserman non localmente simétricas etc. Para obter máis información sobre estruturas de Walker pode consultarse [16].

1.7.1 Coordenadas de Walker

Na situación máis xeral, a existencia de coordenadas adaptadas de Walker vén dada polo seguinte resultado de [100].

Teorema 1.21. *Sexa (M, g) unha variedade de Walker de dimensión n e sexa \mathcal{D} unha distribución r -dimensional nula e paralela. Daquela existen $(x^1, \dots, x^{n-r}, x^{n-r+1}, \dots, x^n)$ coordenadas locais adaptadas en (M, g) de tal forma que a métrica vén dada por*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & H & \text{Id}_r \\ {}^t H & A & 0 \\ \text{Id}_r & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde Id_r é a matriz identidade de orde r , e A , B e H son matrices cuxos coeficientes son funcións das coordenadas verificando as seguintes condicións:

1. A e B son matrices cadradas simétricas de orde $n - 2r$ e r , respectivamente; H é unha matriz de orde $r \times (n - 2r)$, e ${}^t H$ denota a súa trasposta.

2. A e H son independentes das coordenadas (x^{n-r+1}, \dots, x^n) .

Ademais a distribución r -dimensional nula paralela \mathcal{D} está localmente xerada polos campos de vectores coordenados $\{\partial_{n-r+1}, \dots, \partial_n\}$.

A forma canónica do teorema anterior resulta máis sinxela se a distribución paralela ten dimensión máxima e a variedade é de dimensión par $n = 2m$. Nestas condicións existen coordenadas de Walker $(x^1, \dots, x^m, x_{1'}, \dots, x_{m'})$ de tal forma que a matriz da métrica resulta

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & \text{Id}_m \\ \text{Id}_m & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

onde as compoñentes de B son funcións de $(x^1, \dots, x^m, x_{1'}, \dots, x_{m'})$ (ver [16, 50]).

Observación 1.22. Se (M, g, \mathcal{D}) é unha variedade de sinatura $(2, 2)$ dotada cunha distribución nula 2-dimensional \mathcal{D} e $\{v_1, v_2\}$ é unha base de \mathcal{D} , entón $\star(v^1 \wedge v^2) = \pm v^1 \wedge v^2$, onde v^i denota o elemento dual de v_i . Se fixamos a orientación en (M, g, \mathcal{D}) de xeito que $\star(v^1 \wedge v^2) = v^1 \wedge v^2$ (i.e. $v^1 \wedge v^2$ é autodual), tense que calquera outra base de \mathcal{D} tamén dá lugar a un elemento autodual. Polo tanto, dicimos que a orientación de M é *compatible con \mathcal{D}* se a orientación que induce na distribución nula é autodual.

O noso interese polas estruturas de Walker xorde do estudo das variedades quasi-Einstein xeneralizadas isotrópicas que analizamos nos capítulos 2 e 3 baixo a condición de (anti-)autodualidade. Esta consideración restrinxe a nosa análise a dimensión catro e sinatura $(2, 2)$. Nestas condicións a métrica dada en (1.19) e a distribución de Walker \mathcal{D} son da forma

$$g = 2dx^i \circ dx_{i'} + a_{ij}dx^i \circ dx^j \text{ e } \mathcal{D} = \text{span}\{\partial_{x_{1'}}, \partial_{x_{2'}}\} \quad (1.20)$$

para certas funcións $a_{ij} = a_{ij}(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$, onde “ \circ ” denota o produto simétrico. Ademais, a existencia de \mathcal{D} permite definir unha orientación en (M, g, \mathcal{D}) mediante o procedemento do parágrafo anterior. Por conveniencia, no consecutivo, cando consideremos variedades de Walker, asumiremos que están orientadas coa orientación compatible coa distribución de Walker correspondente. Isto constitúe un feito crucial na xeometría de Walker, resultando en que para calquera sistema de coordenadas de Walker se ten que $\star(dx_{1'} \wedge dx_{2'}) = dx_{1'} \wedge dx_{2'}$ (para máis detalles ver [49]).

1.7.2 Extensións de Riemann

As extensións de Riemann son métricas de Walker realizadas no cotanxente dunha variedade afín que aparecen en diversas situacións xeométricas. En particular, estas métricas teñen grande interese para o noso estudo, xa que permiten trasladar problemas afíns a semi-riemannianos e viceversa. As extensións de Riemann foron introducidas por Patterson e Walker en [93] e estudadas posteriormente por diversos autores mostrando as súas múltiples aplicacións en diferentes campos (ver [1, 102]).

Sexa (M, D) unha variedade afín m -dimensional, sexan (x^1, \dots, x^m) coordenadas locais en M e sexan Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel asociados. Se ω é unha 1-forma en M , expresamos

$\omega = x_{i'} dx^i$. Entón, $(x^1, \dots, x^m, x_{1'}, \dots, x_{m'})$ son as correspondentes coordenadas duais no fibrado cotanxente $T^*\Sigma$. Denominamos *extensión de Riemann* de (M, D) á métrica no fibrado cotanxente de M definida por:

$$g_D = 2dx^i \circ dx_{i'} - 2x_{k'} {}^D\Gamma_{ij}{}^k dx^i \circ dx^j. \quad (1.21)$$

Este tipo de métricas pode xeneralizarse dando lugar a novas métricas no fibrado cotanxente de M que resultan interesantes desde o punto de vista xeométrico como veremos nos capítulos 2 e 3. Sexa Φ un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico. A métrica dada por

$$g_{D,\Phi} = 2dx^i \circ dx_{i'} + \{-2x_{k'} {}^D\Gamma_{ij}{}^k + \Phi_{ij}\} dx^i \circ dx^j, \quad (1.22)$$

recibe o nome de *extensión de Riemann modificada*. Este tipo de métricas aparecen no estudo de solitóns de Ricci gradientes autoduais non localmente conformemente chans en sinatura $(2, 2)$. Sexan $T = T_i^j \partial_{x^i} \otimes dx^j$ e $S = S_i^j \partial_{x^i} \otimes dx^j$ endomorfismos no fibrado tanxente de M . Chamamos *extensión de Riemann modificada* á métrica definida por

$$g_{D,\Phi,T,S} = 2 dx^i \circ dx_{i'} + \left\{ \frac{1}{2} x_{r'} x_{s'} (T_r^i S_s^j + T_r^j S_s^i) - 2x_{k'} {}^D\Gamma_{ij}{}^k + \Phi_{ij} \right\} dx^i \circ dx^j. \quad (1.23)$$

Ademais das que vimos de definir, existen outras métricas de Walker interesantes xeometricamente realizadas no fibrado cotanxente dunha variedade afín. Para ampliar información sobre extensións de Riemann pode consultarse [1, 16, 25, 51].

O seguinte teorema enunciado e probado en [25] caracteriza (salvo isometría) a métrica dunha variedade de Walker autodual.

Teorema 1.23. *Unha métrica de Walker en sinatura $(2, 2)$ é autodual se e só se é localmente isométrica ao fibrado cotanxente $T^*\Sigma$ dunha superficie afín (Σ, D) , dotada cunha métrica da forma*

$$g = x_{i'} X^i x_{j'} x_{k'} dx^j \circ dx^k + g_{D,\Phi,T,\text{Id}}, \quad (1.24)$$

sendo X un campo de tensores en Σ , T un tensor de tipo $(1, 1)$ en Σ e Φ un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ en Σ .

Pode mostrarse directamente que as métricas dadas en (1.21), (1.22), (1.23) e (1.24) están definidas invariantemente. Porén, no que segue introducimos un formalismo libre de coordenadas que empregamos na nosa análise e que mostra a naturalidade destas métricas, á vez que relaciona as xeometrías da superficie afín M e do fibrado cotanxente T^*M (para ver máis detalles pode consultarse [102]). Definimos a *avaliación dun campo de vectores* X en M como a función ιX en T^*M definida pola relación $\iota X(\xi) = \xi(X|_{\pi(\xi)})$. Entón non é difícil comprobar que os campos de vectores en T^*M quedan determinados pola súa acción sobre as avaliacións de campos de vectores en M . Isto permite dar a definición do *levantamento completo* dun campo de vectores X en M como o campo de vectores en T^*M satisfacendo $X^C(\iota Z) = \iota[X, Z]$ para calquera $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Sexan $(x^1, \dots, x^m, x_{1'}, \dots, x_{m'})$ coordenadas locais en M e sexa $X = X^i \partial_{x^i}$. Tense que $\iota X(x^1, \dots, x^m, x_{1'}, \dots, x_{m'}) = x_{i'} X^i$ e que

$$X^C = X^i \partial_{x^i} - \partial_{x^j}(X^i) x_{i'} \partial_{x_{j'}}.$$

Para ver isto último, tomamos $Z = \zeta \partial_{x^j}$ para un certo j e empregamos a definición anterior obtendo que

$$\begin{aligned} X^C(\iota Z) &= \iota[X, Z] = \iota[X^i \partial_{x^i}, \zeta \partial_{x^j}] = \iota(X^i \partial_{x^i}(\zeta \partial_{x^j}) - \zeta \partial_{x^j}(X^i \partial_{x^i})) \\ &= X^i \partial_{x^i}(\zeta) x_{j'} - \zeta \partial_{x^j}(X^i) x_{i'}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se expandimos $X^C = a^i \partial_{x^i} + b^i \partial_{x_{i'}}$ e posto que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, tense que

$$X^C(\iota Z) = (a^i \partial_{x^i} + b^i \partial_{x_{i'}})(\zeta x_{j'}) = a^i \partial_{x^i}(\zeta) x_{j'} + b^j \zeta.$$

Entón, basta tomar $\zeta = 1$ para ver que $b^j = -\partial_{x^j}(X^i) x_{i'}$ e así $a^j = X^j$ para todo j .

Os tensores de tipo $(0, s)$ en $T^*\Sigma$ quedan determinados pola súa acción en levantamentos completos de campos de vectores en Σ . Daquela, para un campo de tensores T de tipo $(1, 1)$ en Σ , a avaliación ιT é unha 1-forma en $T^*\Sigma$ determinada por $\iota T(X^C) = \iota(T(X))$. En coordenadas tense que

$$\iota T = T^j_i x_{i'} dx^j,$$

sendo $T = T^j_i \partial_{x^i} \otimes dx^j$. Tomemos $X = \zeta \partial_{x^k}$ para un certo k fixado. Aplicando a definición obtemos

$$\iota T(X^C) = \iota(T(X)) = \iota(T^k_i \zeta \partial_{x^i}) = T^k_i \zeta x_{i'}.$$

Por outra banda, se $\iota T = a^i dx^i + b^i dx_{i'}$ e posto que $X^C = \zeta \partial_{x^k} - \partial_{x^j}(\zeta) x_{k'} \partial_{x_{j'}}$, tense que

$$\iota T(X^C) = a^k \zeta - b^j \partial_{x^j}(\zeta) x_{k'}.$$

Se tomamos $\zeta = 1$ obtemos que $a^k = T^k_i x_{i'}$, polo que é inmediato que $b^k = 0$ para todo k . Agora xa estamos en disposición de probar que as métricas arriba definidas son invariantes. Comezamos por g_D . Posto que un tensor queda determinado pola súa acción sobre levantamentos completos, definimos a métrica invariante g pola relación

$$g(X^C, Y^C) = -\iota(D_X Y + D_Y X)$$

para calquera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. En efecto, comezamos vendo que

$$\begin{aligned} g(\partial_{x^i}{}^C, \partial_{x^j}{}^C) &= -\iota(D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} + D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i}) \\ &= -\iota(2\Gamma_{ij}{}^k \partial_{x^k}) = -2\Gamma_{ij}{}^k x_{k'}. \end{aligned}$$

Isto determina a métrica sobre os campos $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ definidos localmente en $T^*\Sigma$. Para determinar os produtos cruzados da forma $g(\partial_{x^i}, \partial_{x_{j'}})$ consideramos os produtos $g(\partial_{x^i}{}^C, (\zeta \partial_{x^j})^C)$. Por un lado, tense que

$$\begin{aligned} g(\partial_{x^i}{}^C, (\zeta \partial_{x^j})^C) &= g(\partial_{x^i}, \zeta \partial_{x^j} - \partial_{x^k}(\zeta) x_{j'} \partial_{x_{k'}}) \\ &= \zeta g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) - \partial_{x^k}(\zeta) x_{j'} g(\partial_{x^i}, \partial_{x_{k'}}). \end{aligned}$$

Por outro lado, pola definición de g obtemos

$$g(\partial_{x^i}{}^C, (\zeta \partial_{x^j})^C) = -\iota(D_{\partial_{x^i}} \zeta \partial_{x^j} + D_{\zeta \partial_{x^j}} \partial_{x^i}) = -\iota(\partial_{x^i}(\zeta) \partial_{x^j}) + \zeta g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}).$$

Combinando ambas as expresións con $\zeta = x^i$ vemos que $g(\partial_{x^i}, \partial_{x_{k'}}) = \delta_{ij}$. Finalmente, se consideramos un produto da forma $g((\eta\partial_{x^i})^C, (\zeta\partial_{x^j})^C)$, obtemos de xeito análogo ao anterior que $g(\partial_{x^{i'}}, \partial_{x_{j'}}) = 0$. En tal caso, tense que $g = g_D$. Por outra banda, é inmediato ver que $g_{D,\Phi}$ pode definirse invariamente como $g_D + \pi^*\Phi$ onde $\Phi = \Phi_{ij}dx^i \otimes dx^j$. A métrica $g_{D,\Phi,T,S}$ obtense como $\iota T \circ \iota S + g_{D,\Phi}$ sendo $T = T_r^i \partial_{x^r} \otimes dx^i$ e $S = S_s^j \partial_{x^s} \otimes dx^j$, polo que tamén é invariante. Finalmente, a métrica dada en (1.24) é da forma $\iota X(\iota \text{Id} \circ \iota \text{Id}) + g_{D,\Phi,T,\text{Id}}$. Desta forma, todas as métricas que definimos anteriormente a partir dunha extensión de Riemann son independentes das coordenadas escollidas. Ademais, todas elas son métricas de Walker con distribución 2-dimensional nula e paralela $\mathcal{D} = \ker \pi_*$ en $T^*\Sigma$.

Parte I

A ecuación quasi-Einstein en geometría semi-riemanniana

O estudo da existencia e unicidade de solucións para unha ecuación diferencial sobre un dominio dado é un problema central en matemáticas e física. Porén, tamén resulta interesante a pregunta contraria desde o punto de vista da xeometría, é dicir, dada unha ecuación diferencial, que implicacións xeométricas ten a existencia de solución non trivial sobre unha variedade dada? Isto é, a existencia de solución non trivial implica que a variedade subxacente posúe unha estrutura dada? En certas situacións, é posible probar unha correspondencia entre a existencia de solucións non triviais dunha ecuación diferencial e unha variedade diferenciable; noutros, unha mesma ecuación pode dar lugar a varios espazos solución, ou simplemente non ter solución. No caso de existir algún espazo satisfacendo unha certa ecuación, tamén resulta interesante coñecer a estrutura local ou global e, de ser posible, determinar se é único. Existen neste sentido importantes exemplos cando a ecuación ten algún contido físico ou xeométrico. Por citar algún en particular, podemos pensar na ecuación de Obata, onde se relaciona o hessiano dunha variedade co tensor métrico. É sabido que a única variedade completa, salvo isometría, satisfacendo dita ecuación é a esfera euclidiana, que polo tanto queda caracterizada a partir da mesma (véxase, por exemplo, [88]).

Se consideramos unha variedade semi-riemanniana, o tensor de Ricci e o hessiano son tensores de tipo $(0, 2)$ que poden combinarse xunto co tensor métrico para obter unha ecuación en derivadas parciais. Este é o caso dos solitóns de Ricci gradientes que aparecen de forma natural como solucións autosimilares do fluxo de Ricci. O interese neste tipo de métricas aumentou de forma notable nos últimos anos por teren sido os fluxos de Ricci unha ferramenta esencial na proba de Perelman da conxectura de Poincaré. Como consecuencia apareceron na literatura varias xeneralizacións destas métricas. Entre elas atopamos as variedades quasi-Einstein xeneralizadas que estudamos nesta primeira parte do traballo e que, en certo sentido, vertebran a totalidade do mesmo. Para ver máis detalles sobre solitóns e case solitóns de Ricci gradientes pode consultarse [29,30,94,95] en sinatura riemanniana e [12,22] en sinatura semi-riemanniana.

Esta primeira parte da memoria correspóndese co desenvolvemento do estudo da ecuación quasi-Einstein xeneralizada en xeometría semi-riemanniana. Esta ecuación foi introducida por primeira vez por Catino en [36]. O noso obxectivo é coñecer a estrutura local das variedades satisfacendo esta ecuación baixo a condición de ser hemi conformemente chás. Para facer isto dividimos a análise en dúas partes. Na primeira, correspondente ao capítulo 2, tratamos o estudo dos case solitóns de Ricci gradientes, onde diferenciamos os solitóns de Ricci gradientes (estudados en [11]) e os case solitóns de Ricci gradientes estritos. Na segunda, correspondente ao capítulo 3, estudamos as variedades quasi-Einstein xeneralizadas propias, diferenciando entre as que son quasi-Einstein e as que son quasi-Einstein xeneralizadas estritas. Estas catro familias de métricas que vimos de nomear entran dentro da definición de variedades quasi-Einstein xeneralizadas. Ademais, obsérvase que baixo a condición de ser hemi conformemente chás existe un comportamento formal similar entre solitóns de Ricci gradientes e variedades quasi-Einstein, así como entre case solitóns de Ricci gradientes estritos e variedades quasi-Einstein xeneralizadas estritas. Isto permite que o desenvolvemento dos dous capítulos se faga de forma parella adaptando o argumento como corresponda e remarcando as posibles diferenzas que aparecen entre unhas estruturas e outras. En calquera caso, cómpre mencionar que todo o estudo que realizamos é a nivel local, salvo que se especifique o contrario.

A ecuación quasi-Einstein vén descrita en termos da métrica, do tensor de Ricci, dun escalar

dato, e da función potencial e o hessiano da mesma (para máis detalles, ver definición 3.1). O noso obxectivo é describir a xeometría local das métricas que satisfán a devandita ecuación. En xeral, este problema é complicado de abordar, polo que resulta conveniente impoñer algunha condición adicional sobre as métricas de partida. Unha posibilidade é estudar métricas con algún tipo de restrición sobre a curvatura. Por exemplo, podemos considerar variedades localmente conformemente chás. Estas variedades están caracterizadas en dimensión maior que tres pola anulación do tensor de Weyl, presente na descomposición da curvatura. Esta condición resulta ser moi restritiva para as variedades quasi-Einstein xeneralizadas. Por poñer algún exemplo disto, en [31, 33] estúdanse os solitóns de Ricci gradientes localmente conformemente chans, véndose que teñen unha estrutura moi rixida. O mesmo acontece nas discusións dadas en [13, 39] onde se tratan as variedades quasi-Einstein en sinatura riemanniana e lorentziana, respectivamente.

Nesta primeira parte da memoria consideramos variedades quasi-Einstein xeneralizadas baixo a condición de seren auto-duais ou anti-auto-duais. Como veremos ao longo dos capítulos 2 e 3, estas condicións son menos restritivas que a de ser conformemente chá, permitindo a existencia de exemplos menos rixidos.

Capítulo 2

Solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans

Neste capítulo estudamos os case solitóns de Ricci gradientes baixo a condición de ser hemi conformemente chans. Os resultados principais deste capítulo recóllense en [22].

2.1 Introducción

O concepto de case solitón de Ricci gradiente foi introducido por vez primeira en [95] en sinatura riemanniana. A seguinte definición é unha adaptación desta no contexto semi-riemanniano.

Definición 2.1. Unha variedade semi-riemanniana (M, g) de dimensión n dise *case solitón de Ricci gradiente* (CSRG) ou simplemente *case solitón* se existe $f \in C^\infty(M)$ tal que se satisfai

$$\text{Hes}_f + \rho = \lambda g \text{ para algún } \lambda \in C^\infty(M). \quad (2.1)$$

Denotamos esta estrutura pola tripla (M, g, f) xa que a función λ , que recibe o nome de *función solitón*, queda determinada tomando a traza da ecuación (2.1). Se λ é constante, a ecuación anterior caracteriza os *solitóns de Ricci gradientes*. Se polo contrario λ é non-constante, as variedades que cumpren a ecuación (2.1) denomínanse *case solitóns de Ricci gradientes estritos*.

A nosa análise xira arredor do estudo local dos case solitóns de Ricci gradientes baixo a condición de ser hemi conformemente chans, polo que nos restrinxiremos a dimensión catro. En sinatura riemanniana teñen a estrutura local dada no teorema 2.6 para sinatura neutra $(+ + - -)$ con $g(\nabla f, \nabla f) \neq 0$. Por outra banda, toda variedade lorentziana hemi conformemente chá é automaticamente conformemente chá, polo que tampouco existen case solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans que non sexan localmente conformemente chans. Pola contra, a sinatura neutra permite a existencia de exemplos hemi conformemente chans que non son localmente conformemente chans (ver observación 2.14). Isto marca unha diferenza importante con respecto ás sinaturas anteriores e permite a obtención de exemplos interesantes. A estrutura local dos solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans foi estudada en [11]. Por este motivo, a nosa análise redúcese ao caso no que λ é unha función non-constante. Para máis referencias sobre (case) solitóns de Ricci gradientes, véxase, por exemplo, [29, 30, 94, 95] en sinatura riemanniana e [11, 12, 105] en semi-riemanniana.

Na primeira parte do capítulo proporcionamos exemplos particulares deste tipo de estruturas; analizamos as consecuencias da definición a partir do estudo da traza e da diverxencia da ecuación que os define, e estudamos a súa relación coa curvatura e o tensor de Weyl. Isto permite

levar a cabo a nosa análise e examinar a estrutura local deste tipo de métricas cando estas son hemi conformemente chás. Por unha banda, móstrase que (en calquera sinatura) un case solitón de Ricci gradiente hemi conformemente chan é tamén localmente conformemente chan cando as hipersuperficies de nivel da función potencial son non-dexeneradas (ver teorema 2.6). Por outra banda, e en contraposición ao anterior, a sinatura neutra $(+ + - -)$ permite, a diferenza da riemanniana ou lorentziana, a existencia de case solitóns de Ricci gradientes que son hemi conformemente chans, mais non localmente conformemente chans cando as hipersuperficies son dexeneradas (ver teorema 2.11). Ademais, mostramos que existen exemplos de case solitóns autoduais mais non localmente conformemente chans realizados sobre o fibrado cotanxente dunha superficie afín dotada dunha extensión de Riemann modificada cuxa función potencial é o pull-back dunha función na superficie afín (ver exemplo 2.13).

2.1.1 Casos particulares da ecuación do case solitón de Ricci gradiente

A ecuación (2.1) permite aglutinar o estudo de varias estruturas de grande interese xeométrico que se teñen estudado de forma máis ou menos estendida na literatura. Entre estas destacan a ecuación de Obata [87], a ecuación de Möbius [101], a ecuación Einstein ou a ecuación dos solitóns de Ricci gradientes. A continuación detallamos algúns destes e outros exemplos procedentes da ecuación dos case solitóns (2.1).

Exemplo 2.2 (Variedades Einstein). Se na ecuación (2.1) tomamos f constante, obtemos a condición Einstein. Polo tanto, calquera variedade Einstein é tamén un case solitón de Ricci gradiente. Por outra banda, se supoñemos que un case solitón (M, g, f) é Einstein, i.e., $\rho = \frac{\tau}{n}g$ con $n = \dim M$, tense que

$$\text{Hes}_f = \left(\lambda - \frac{\tau}{n}\right)g.$$

Esta é precisamente a ecuación de Möbius, dado que tomando trazas obtemos que $\Delta f = \lambda n - \tau$ (ver [101]).

Exemplo 2.3 (Solitóns de Ricci gradientes). Se λ é constante, a ecuación (2.1) redúcese á ecuación do solitón de Ricci gradiente (ver, por exemplo, [31, 33, 44, 82, 98]), que caracteriza as solucións autosimilares do fluxo de Ricci: $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\rho(t)$.

Exemplo 2.4 (Solitóns κ -Einstein). Os case solitóns de Ricci gradientes non son só unha mera xeneralización dos solitóns de Ricci gradientes, senón que tamén inclúen outras solucións autosimilares de fluxos xeométricos como o *fluxo de Ricci-Bourguignon* [38]. Este fluxo está definido para unha certa $\kappa \in \mathbb{R}$ a través da ecuación $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2(\rho(t) - \kappa \tau(t) g(t))$. As solucións autosimilares deste fluxo son case solitóns de Ricci con función solitón da forma $\lambda = \kappa \tau + \nu$ para certo $\nu \in \mathbb{R}$ e chámanse *solitóns κ -Einstein* (consúltense, por exemplo, [42, 43] para unha discusión máis completa).

2.2 Principais elementos xeométricos dos case solitóns de Ricci gradientes

Nesta sección estudamos os obxectos xeométricos esenciais dos case solitóns que nos permiten realizar a nosa análise na sección 2.3. Para abordar este estudo, comezamos considerando a traza e mais a diverxencia da ecuación (2.1). A partir das ecuacións resultantes e as súas derivadas extraemos información adicional sobre estas estruturas. Seguidamente, posto que o noso interese se centra en estudar variedades hemi conformemente chás, buscamos as relacións existentes entre as ecuacións anteriores e as expresións que definen os tensores de curvatura, Weyl e Cotton.

No seguinte lema recompílese a información que extraemos empregando o procedemento detallado no parágrafo anterior.

Lema 2.5. *Sexa (M, g, f) un case solitón de Ricci gradiente n -dimensional. Entón, satisfanse as seguintes identidades*

$$(1) \quad \Delta f + \tau = n\lambda.$$

$$(2) \quad \nabla\tau = 2 \operatorname{Ric}(\nabla f) + 2(n-1)\nabla\lambda.$$

(3) *Para calquera campos de vectores X, Y e Z en M ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y, Z, \nabla f) &= (\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) \\ &\quad - d\lambda(X)g(Y, Z) + d\lambda(Y)g(X, Z). \end{aligned}$$

(4) *Para calquera campos de vectores X, Y e Z en M ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X, Y, Z, \nabla f) &= C(X, Y, Z) \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \{ \rho(X, \nabla f)g(Y, Z) - \rho(Y, \nabla f)g(X, Z) \} \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)} \{ g(X, \nabla f)\rho(Y, Z) - g(Y, \nabla f)\rho(X, Z) \} \\ &\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \{ g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(Y, \nabla f)g(X, Z) \}. \end{aligned}$$

Proba. A identidade dada en (1) obtense tomando trazas na ecuación (2.1).

Para probar (2) comezamos empregando a fórmula de Bochner (1.3) e a identidade de Bianchi contracta (1.2) para reescribir a diverxencia da ecuación (2.1) como

$$\nabla(\Delta f) + \operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{\nabla\tau}{2} - \nabla\lambda = 0.$$

Empregando a derivada covariante de (1) substituímos $\nabla(\Delta f)$ na ecuación anterior e reagrupando termos obtemos (2).

Por outra banda, usamos a ecuación (2.1) para ver que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \rho)(Y, Z) &= (\nabla_X (\lambda g - \text{Hes}_f))(Y, Z) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) - (\nabla_X \text{Hes}_f)(Y, Z) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) - X(\text{Hes}_f(Y, Z)) \\
&\quad + \text{Hes}_f(\nabla_X Y, Z) + \text{Hes}_f(Y, \nabla_X Z) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) - X(g(\nabla_Y \nabla f, Z)) \\
&\quad + g(\nabla_{\nabla_X Y} \nabla f, Z) + g(\nabla_Y \nabla f, \nabla_X Z) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) - g(\nabla_X \nabla_Y \nabla f, Z) + g(\nabla_{\nabla_X Y} \nabla f, Z).
\end{aligned}$$

Posto que a expresión é análoga para $(\nabla_Y \rho)(X, Z)$, obtemos

$$(\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) = X(\lambda)g(Y, Z) - Y(\lambda)g(X, Z) - \mathcal{R}(X, Y, \nabla f, Z).$$

Isto proba (3).

Resta probar (4). Para isto comezamos combinando (3), a expresión do tensor de Weyl (1.4) e a do tensor de Cotton (1.5), dando lugar a

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(X, Y, Z, \nabla f) &= C(X, Y, Z) + \frac{1}{2(n-1)}(X(\tau)g(Y, Z) - Y(\tau)g(X, Z)) \\
&\quad - d\lambda(X)g(Y, Z) + d\lambda(Y)g(X, Z) \\
&\quad - \frac{1}{(n-2)}\{\rho(X, \nabla f)g(Y, Z) - \rho(X, Z)g(Y, \nabla f) \\
&\quad\quad + \rho(Y, Z)g(X, \nabla f) - \rho(Y, \nabla f)g(X, Z)\} \\
&\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(X, \nabla f)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, \nabla f)\}.
\end{aligned}$$

Finalmente empregamos a ecuación (2.1) para substituír o hessiano e a expresión (2) para substituír os termos onde aparece τ . Facendo contas obtemos (4), completando así a proba do lema. \square

2.3 Xeometría local dos case solitóns de Ricci gradientes hemi conformemente chans

Nesta sección estudamos a estrutura local dos case solitóns baixo a condicións de autodualidade e anti-autodualidade. Posto que a análise dos solitóns de Ricci gradientes (λ constante) foi levada a cabo en [11] (ver teorema 2.11), restrinximos o noso estudo ao caso λ non-constante. Para facer isto, e dado que traballamos en sinatura semi-riemanniana, distinguimos cando o gradiente da función potencial é nulo e cando non. Este feito desempeña un papel moi importante na nosa análise e permite a existencia de exemplos hemi conformemente chans que non son localmente conformemente chans. Cando as hipersuperficies de nivel da función potencial f son

non-dexeneradas (i.e., $\|\nabla f\| \neq 0$) dicimos que a estrutura é *non-isotrópica*; pola contra, cando as hipersuperficies son dexeneradas (i.e., $\|\nabla f\| = 0$), dicimos que a estrutura é *isotrópica* e sempre asumiremos que $\nabla f \neq 0$.

Posto que estamos interesados no estudo local deste tipo de estruturas, restrinximos o noso estudo a unha veciñanza aberta \mathcal{O} dun punto p de M . Asumimos que ∇f non é cero en \mathcal{O} . Consideramos as posibilidades $\|\nabla f\| \neq 0$ en \mathcal{O} ou ben $\|\nabla f\| = 0$ en \mathcal{O} que vimos de describir no parágrafo anterior. Posto que estamos interesados en estudar case solitóns autoduais que non son localmente conformemente chás, non incluímos no noso estudo o caso mixto no que o gradiente pasa de ser nulo a non-nulo nunha veciñanza do punto.

Na primeira parte da sección vemos que o caso non-isotrópico en sinatura neutra ten un comportamento similar ao riemanniano e lorentziano, mostrándose que todo case solitón non-isotrópico autodual ou anti-autodual é localmente conformemente chan (ver teorema 2.6). Ademais, xustificamos a existencia de solucións para este tipo de estruturas con λ non-constante a partir da análise da ecuación diferencial resultante (ver observación 2.8).

Na segunda parte consideramos estruturas isotrópicas. En contraposición ao que acontece no suposto non-isotrópico, existen exemplos de case solitóns de Ricci gradientes isotrópicos autoduais e anti-autoduais que non son localmente conformemente chans. Primeiramente vemos que tales estruturas son necesariamente Walker (ver teorema 2.9). A consecuencia disto, queda fixada a orientación na variedade e as devanditas nocións duais non son xa intercambiáveis. En particular, no caso isotrópico autodual determinamos a estrutura local destas métricas ao tempo que proporcionamos un método de construción de todos os posibles exemplos (ver teoremas 2.11 e 2.12).

2.3.1 O caso non-isotrópico

Nesta sección as superficies de nivel da función potencial son non-dexeneradas: $g(\nabla f, \nabla f) \neq 0$. O seguinte teorema proporciona a estrutura local dos case solitóns hemi conformemente chans cumprindo esa condición.

Teorema 2.6. *Sexa (M, g, f) un case solitón de Ricci gradiente non-isotrópico de sinatura $(2, 2)$. Se (M, g) é hemi conformemente chá, entón é localmente conformemente chá e é localmente isométrica a un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é un intervalo real e N é de curvatura seccional constante.*

Proba. (M, g) é hemi conformemente chá e a orientación non está fixada, logo podemos supoñer sen perda de xeneralidade que (M, g) é autodual. Posto que ∇f non é nulo, tomamos unha referencia ortonormal da forma $\{E_1 = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, E_2, E_3, E_4\}$. Empregando a autodualidade por medio do lema 1.6 tense que para calquera permutación (i, j, k) de $(2, 3, 4)$

$$\mathcal{W}(E_1, E_i, X, Y) = \sigma_{ijk} \epsilon_j \epsilon_k \mathcal{W}(E_j, E_k, X, Y).$$

Substituíndo o tensor de Weyl mediante a expresión dada no lema 2.5-(4) para case solitóns e

empregando o lema 1.9, tense que

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{6} \{df(E_1)g(E_i, Z) - df(E_i)g(E_1, Z)\} \\
& - \frac{1}{2} \{df(E_1)\rho(E_i, Z) - df(E_i)\rho(E_1, Z)\} \\
& - \frac{1}{6} \{\rho(E_1, \nabla f)g(E_i, Z) - \rho(E_i, \nabla f)g(E_1, Z)\} \\
= & \sigma_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k\frac{\tau}{6} \{df(E_j)g(E_k, Z) - df(E_k)g(E_j, Z)\} \\
& - \sigma_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k\frac{1}{2} \{df(E_j)\rho(E_k, Z) - df(E_k)\rho(E_j, Z)\} \\
& - \sigma_{ijk}\varepsilon_j\varepsilon_k\frac{1}{6} \{\rho(E_j, \nabla f)g(E_k, Z) - \rho(E_k, \nabla f)g(E_j, Z)\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Tomando $Z = \nabla f$ obtemos $\rho(E_i, \nabla f) = 0$ para $i \neq 1$, polo que a ecuación (2.1) mostra que $\text{Hes}_f(E_i, \nabla f) = 0$. Empregando de novo a ecuación (2.2), esta vez con $Z = E_j$ para $j \neq 1$, vemos que $\rho(E_i, E_j) = 0$ para todo $i \neq j$. En tal caso, o tensor de Ricci é diagonal para a referencia dos E_i e posto que a métrica é ortonormal, basta aplicarmos novamente a ecuación (2.1) para ver que o hessiano tamén é diagonal. Por outra banda, se usamos máis unha vez a ecuación (2.2) tomando $Z = E_i$ con $i \neq 1$, obtemos que

$$3\varepsilon_i\rho(E_i, E_i) = \tau - \varepsilon_1\rho(E_1, E_1).$$

Empregando isto xunto coa ecuación (2.1) obtemos que para $2 \leq i \leq 4$:

$$\text{Hes}_f(E_i, E_i) = \lambda g(E_i, E_i) - \rho(E_i, E_i) = \left(\lambda - \frac{\tau - \varepsilon_1\rho(E_1, E_1)}{3} \right) g(E_i, E_i).$$

Deste xeito, se nos restrinximos ás hipersuperficies de nivel de f coa métrica inducida, tense que o hessiano é un múltiplo de devandita métrica para a referencia $\{E_2, E_3, E_4\}$. Consecuentemente, as hipersuperficies de nivel de f son totalmente umbilicais. Ademais, posto que $\text{Hes}_f(E_j, \nabla f) = 0$ para $j \neq 1$, é claro que $\text{span}\{\nabla f\}$ é unha distribución 1-dimensional totalmente xeodésica. En tal caso, o lema 1.19 asegura que M é localmente un produto twisted da forma $I \times_\phi N$. Ademais, como o Ricci é diagonal o lema 1.20 asegura que o produto twisted pode expresarse como un produto warped da forma $I \times_\varphi N$. Daquela, o lema 1.17, que asegura que todo produto warped con base 1-dimensional autodual é localmente conformemente chan, mostra que M é localmente conformemente chá. Finalmente, aplicando o lema 1.16 e a ecuación (2.1) tense que N é un espazo Einstein 3-dimensional. Por conseguinte, N ten curvatura seccional constante e o teorema queda probado. \square

Observación 2.7. O teorema 2.6 mostra cal é a estrutura local dos case solitóns non-isotrópicos hemi conformemente chans en sinatura neutra. O mesmo resultado é certo para variedades riemannianas e lorentzianas. Non obstante, malia que para as primeiras a proba é totalmente análoga, para as segundas é máis directa xa que hemi conformemente chan implica localmente conformemente chan en sinatura lorentziana.

A proba anterior é unha xeneralización da que se fai en [11] para este mesmo resultado con λ constante e permite probar á vez o caso no que é constante e non-constante. Ademais, a

consideración de λ como función non muda o resultado con respecto ao caso λ constante, posto que ao facer contas observamos que as derivadas desta función non aparecen no lema 2.5-(4). En consecuencia, tanto a proba como o resultado son case iguais en ambos os casos. Porén, a seguinte observación mostra que existen exemplos de CSRG localmente conformemente chans como os dados no teorema (2.2) con λ non-constante.

Observación 2.8. Sexa $I \times_{\varphi} N = (I \times N, \epsilon dt^2 \oplus g_N)$ un produto warped da forma do teorema 2.6, onde $\epsilon = \pm 1$ e (N, g_N) ten curvatura seccional constante c_N . Por unha banda tense que $\rho_N = c_N(\dim N - 1)g_N$ por ser N de curvatura seccional constante (ver [78]). Por outra banda, posto que f, τ e φ son funcións de t , basta empregar o lema 2.5-(1) para ver que λ tamén o é. Entón unha conta directa empregando as fórmulas do lema 1.16 para produtos warped amosa que a ecuación do case solitón de Ricci gradiente (2.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \varphi(t)f''(t) - \epsilon\varphi(t)\lambda(t) - 3\epsilon\varphi''(t) = 0, \\ \varphi(t)(f'(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)) - \epsilon\lambda(t)\varphi(t)^2 - 2\varphi'(t)^2 + 2c_N\epsilon = 0. \end{cases}$$

Pola primeira ecuación tense que $\lambda(t) = \epsilon f''(t) - \frac{3\varphi''(t)}{\varphi(t)}$. Substituíndo isto na segunda ecuación obtemos

$$-\varphi(t)^2 f''(t) + \varphi(t)(f'(t)\varphi'(t) + (3\epsilon - 1)\varphi''(t)) - 2\varphi'(t)^2 + 2c_N\epsilon = 0.$$

Esta é unha EDO linear para a función potencial f , polo que dado un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$ como o do teorema 2.6 existe unha solución local f para a ecuación do case solitón de Ricci gradiente (2.1). Isto xustifica a existencia de exemplos deste tipo de métricas con λ non-constante. Ademais, podemos reescribir a ecuación anterior na forma

$$\varphi(t) \left(\frac{f'(t)}{\varphi(t)} \right)' = \frac{2c_N\epsilon - 2\varphi'(t)^2 + (3\epsilon - 1)\varphi(t)\varphi''(t)}{\varphi(t)^2},$$

de onde obtemos explicitamente a función potencial

$$f(t) = \int \varphi(t) \left(\int \frac{2c_N\epsilon - 2\varphi'(t)^2 + (3\epsilon - 1)\varphi(t)\varphi''(t)}{\varphi(t)^3} dt \right) dt.$$

Os case solitóns realizados sobre produtos warped da forma $I \times_{\varphi} N$ con (N, g_N) Einstein foron estudados no caso riemanniano en [95]. No parágrafo anterior emulamos a análise que se dá alí adaptándoa para sinatura $(2, 2)$. Isto tamén pode facerse coas mudanzas oportunas para métricas lorentzianas.

2.3.2 O caso isotrópico

Nesta sección as hipersuperficies de nivel da función potencial son dexeneradas, isto é, o gradiente da función potencial é nulo. Ademais, a nosa análise require que este campo de vectores sexa distinto de cero, polo que traballaremos sempre con $\nabla f \neq 0$ e $g(\nabla f, \nabla f) = 0$. Novamente estudamos a estrutura local dos case solitóns baixo a condición de ser hemi conformemente

chans. Para λ constante, isto foi estudado en [11], polo que restrinximos a nosa análise aos case solitóns de Ricci estritos, isto é, con λ non-constante.

En contraposición á situación non-isotrópica, a orientación si vai desempeñar un papel importante posto que nestas condicións a nosa variedade ten estrutura de variedade de Walker e iso fixa a orientación de forma natural. Ademais, veremos que nestas circunstancias existen exemplos hemi conformemente chans que non son localmente conformemente chans. De feito, isto fai que o caso de sinatura neutra sexa de especial interese en dimensión catro, dado que en sinatura riemanniana e lorentziana isto non é posible. Polo conseguinte, estes exemplos son xenuinamente novos e propios desta sinatura.

Teorema 2.9. *Sexa (M, g, f) un case solitón de Ricci gradiente isotrópico (i.e., $\nabla f \neq 0$ e $\|\nabla f\| = 0$) de sinatura $(2, 2)$. Se (M, g) é hemi conformemente chá, entón $\tau = 4\lambda$ e (M, g) é Walker.*

Proba. Posto que (M, g) é hemi conformemente chá, sen perda de xeneralidade, fixamos a orientación de forma que (M, g) sexa autodual. Entón, dado que ∇f é un vector nulo (distinto de cero), escollemos unha referencia ortonormal $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ orientada positivamente tal que $g(E_i, E_j) = (-1)^i \delta_{ij}$ e con $\nabla f = \frac{E_2 + E_1}{\sqrt{2}}$. A partir desta, definimos unha nova referencia formada exclusivamente por vectores nulos:

$$B = \left\{ \nabla f = \frac{E_2 + E_1}{\sqrt{2}}, U = \frac{E_4 - E_3}{\sqrt{2}}, V = \frac{E_2 - E_1}{\sqrt{2}}, W = \frac{E_3 + E_4}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Deste xeito, os únicos produtos de elementos da referencia B non nulos, salvo simetría, son

$$g(\nabla f, V) = g(U, W) = 1.$$

Comecemos vendo que $\tau = 4\lambda$. Dado que $g(\nabla f, \nabla f) = 0$, tense que

$$0 = Xg(\nabla f, \nabla f) = 2 \text{Hes}_f(X, \nabla f) \text{ para calquera } X.$$

Por tanto, $\text{hes}_f(\nabla f) = 0$. En tal caso, obtense da ecuación (2.1) que $\text{Ric}(\nabla f) = \lambda \nabla f$. Por outra banda, como (M, g) é autodual, o corolario 1.7 garante que

$$\mathcal{W}(\nabla f, V, Z, \nabla f) = \mathcal{W}(U, W, Z, \nabla f) \text{ para calquera } Z.$$

Substituíndo os dous membros desta igualdade empregando a expresión dada en (4) no lema 2.5 e tendo en conta que $C(\nabla f, V, Z) = C(U, W, Z)$ polo corolario 1.10, obtemos que

$$\begin{aligned} & \tau \{g(V, Z)\nabla f(f) - g(\nabla f, Z)V(f)\} \\ & - \{g(V, Z)\rho(\nabla f, \nabla f) - g(\nabla f, Z)\rho(V, \nabla f)\} \\ & - 3\{\rho(V, Z)\nabla f(f) - \rho(\nabla f, Z)V(f)\} \\ & = \tau \{g(W, Z)U(f) - g(U, Z)W(f)\} \\ & - \{g(W, Z)\rho(U, \nabla f) - g(U, Z)\rho(W, \nabla f)\} \\ & - 3\{\rho(W, Z)U(f) - \rho(U, Z)W(f)\}. \end{aligned}$$

Tomando $Z = V$ obtemos $\lambda = \frac{1}{4}\tau$, probando así a primeira parte do lema.

Vexamos agora que (M, g) é Walker, para o cal basta ver que existe unha distribución \mathcal{D} nula e paralela. No que resta de proba, veremos que $\mathcal{D} = \text{span}\{\nabla f, U\}$ cumpre as condicións anteriores. Por unha banda é claro que a distribución é nula. Vexamos agora que é paralela, é dicir, $\nabla\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Usando de novo a autodualidade tense que $\mathcal{W}(U, V, Z, \nabla f) = 0$ e $C(U, V, Z) = 0$. Empregando isto na ecuación dada no lema 2.5-(4), obtemos $\rho(U, Z) = \lambda g(U, Z)$ para calquera Z , ou equivalentemente, $\text{Ric}(U) = \lambda U$. Daquela, a ecuación (2.1) mostra que $\text{hes}_f(U) = 0$ e polo tanto, $0 = \text{Hes}_f(U, X) = g(U, \nabla_X \nabla f) = -g(\nabla_X U, \nabla f)$ para todo X . Por outra banda, posto que $g(U, U) = 0$, tense que $0 = Xg(U, U) = 2g(\nabla_X U, U)$ para todo X . Ademais, tense que $0 = \text{Hes}_f(\nabla f, X) = g(\nabla_X \nabla f, \nabla f)$ para todo X . En resumo, tense que para todo X

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla f, \nabla f) &= 0, & g(\nabla_X U, U) &= 0, \\ g(\nabla_X U, \nabla f) &= 0, & g(\nabla_X \nabla f, U) &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuacións equivalen a que $\nabla\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\perp$ e posto que $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}$, concluímos que \mathcal{D} é paralela. En consecuencia, \mathcal{D} é unha distribución 2-dimensional nula e paralela, polo que (M, g) é localmente unha variedade de Walker. \square

Observación 2.10. Ata este momento a orientación non xogou ningún papel posto que non había ningunha orientación preestablecida na variedade. Isto permitiría, en principio, intercambiar o espazo autodual co anti-autodual facendo un cambio de orientación. Porén, o teorema 2.9 afirma que todo CSRG isotrópico (M, g, f) de sinatura $(2, 2)$ hemi conformemente chan é Walker, polo que existe unha orientación natural en (M, g) inducida pola 2-forma xerada por calquera base da distribución \mathcal{D} (ver observación 1.22).

O feito que describe o parágrafo anterior é de crucial importancia. Tanto é así, que todos os exemplos anti-autoduais de case solitóns son steady (i.e., $\lambda = 0$) e polo tanto non existen exemplos de case solitóns estritos isotrópicos anti-autoduais. Isto débese a que toda variedade de Walker anti-autodual ten curvatura escalar identicamente cero (ver [51]) e así, o teorema 2.9 mostra que $\lambda = 0$. Polo contrario, no caso autodual isto está lonxe de ser certo, existindo abundantes exemplos que o corroboran. En particular, veremos que o teorema 2.12 mostra que calquera superficie afín dá lugar a un case solitón de Ricci estrito a través dunha extensión de Riemann modificada.

O seguinte teorema pon fin á nosa análise sobre a estrutura local dos case solitóns. As afirmacións (1) e (2) corresponden co caso non-isotrópico do teorema 2.6 e co dos solitóns de Ricci gradientes autoduais estudados por Brozos-Vázquez e García-Río en [11], respectivamente. A afirmación (3) conclúe a devandita análise amosando a estrutura local dos case solitóns estritos isotrópicos autoduais.

Teorema 2.11. *Sexa (M, g, f) un case solitón de Ricci gradiente de sinatura $(2, 2)$, autodual e non Ricci chá. Distinguímos tres casos:*

- (1) *Se (M, g) é non-isotrópica, entón (M, g) é localmente conformemente chá e é localmente isométrica a un produto warped da forma $I \times_\varphi N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é un intervalo real e N é de curvatura seccional constante.*

- (2) Se (M, g) é isotrópica e λ constante, entón $\lambda = 0$ e (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann deformada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $f = \pi^*\hat{f}$ con $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$ cumprindo a ecuación do solitón afín $\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D = 0$.
- (3) Se (M, g) é isotrópica e λ non-constante, entón (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $f = \pi^*\hat{f}$ con $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$. Ademais, existe $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda = \frac{3}{2}Ce^{-f}$, $T = Ce^{-f}\text{Id}$ e $\Phi = \frac{2}{C}e^{\hat{f}}(\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D)$.

Proba. A afirmación (1) recolle a información do teorema 2.6. A afirmación (2) foi enunciada e probada en [11]. Resta probar a afirmación (3). Polo teorema 2.9 tense que $\tau = 4\lambda$ e (M, g) é localmente Walker. Isto permite fixar coordenadas de Walker por medio do teorema 1.21 fixando así a orientación de forma que calquera base da distribución nula e paralela xera un elemento autodual (ver observación 2.10). Ademais, o teorema 1.23 afirma que (M, g) é localmente unha extensión de Riemann realizada no cotanxente dunha superficie afín (Σ, D) dotada dunha métrica da forma

$$\tilde{g} = \iota X(\iota \text{Id} \circ \iota \text{Id}) + g_{D,\Phi,T,\text{Id}},$$

onde X , T e Φ son un campo de vectores, un tensor de tipo $(1, 1)$ e un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ definidos en Σ , respectivamente. En coordenadas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$, a métrica anterior escríbese como

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= 2 dx^i \circ dx_{i'} \\ &+ \left\{ x_{k'} X^k x_{i'} x_{j'} + \frac{1}{2} x_{r'} (x_{j'} T_r^i + x_{i'} T_r^j) - 2x_{k'} {}^D \Gamma_{ij}^k + \Phi_{ij} \right\} dx^i \circ dx^j. \end{aligned}$$

Vexamos primeiro que $f = \pi^*\hat{f}$ para algún $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$. Consideremos o operador

$$Q(f) := \text{Hes}_f + \rho - \frac{\tau}{4}g.$$

É claro que $Q(f) = 0$ é equivalente a que f sexa solución da ecuación do case solitón de Ricci gradiente (2.1). Tense que

$$Q(f)(\partial_{x_{i'}}, \partial_{x_{j'}}) = \partial_{x_{i'}x_{j'}}^2 f = 0,$$

con $i = 1, 2$; de onde obtemos que existen un campo de vectores ξ en Σ e $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$ tales que $f = \iota\xi + \pi^*\hat{f}$. Resta probar que $\xi = 0$. Supoñamos que polo contrario $\xi \neq 0$ e vexamos que chegamos a unha contradición. Posto que $\xi \neq 0$, podemos escoller coordenadas locais en Σ tales que $\xi = \partial_{x^1}$ (ver [7, teorema 3.14]). Entón $f = x_{1'} + \pi^*\hat{f}$. Se P é un polinomio nunhas certas variables, denotamos por $\text{Coef}(P; \cdot)$ o coeficiente asociado a un monomio dado en P . Posto que $Q(f) = 0$, expandimos X como $X = X_1 \partial_{x^1} + X_2 \partial_{x^2}$ tendo que

$$\begin{aligned} \text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{1'}x_{2'}) &= -X_1, \\ \text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); (x_{2'})^2) &= -X_2; \end{aligned}$$

de onde obtemos $X = 0$. Por outra banda, se $T = T_i^j \partial_{x^i} \otimes dx^j$, tense que

$$\begin{aligned} \text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}); x_{2'}) &= -\frac{1}{2}T_1^2, \\ \text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{1'}) &= -\frac{1}{2}T_2^1, \\ \text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{2'}) &= -\frac{1}{4}(T_1^1 + T_2^2), \\ \text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}); x_{1'}) &= -T_1^1. \end{aligned}$$

Entón $T = 0$ e daquela $\lambda = \frac{\tau}{4} = \frac{3}{4}(T_1^1 + T_2^2 + 4X_1x_{1'} + 4X_2x_{2'}) \equiv 0$. Isto contradí que λ é non-constante, polo que concluímos que $\xi = 0$ e así, $f = \pi^* \hat{f}$.

Resta ver que $X = 0$ e que T , Φ e λ son da forma dada no enunciado do teorema. Por unha banda, un cálculo directo mostra que

$$\text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^i}, \partial_{x_{i'}}); x_{i'}) = X_i$$

con $i = 1, 2$; de onde obtemos $X = 0$. Por outra banda, tense que

$$\begin{aligned} Q(f)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}) &= \frac{1}{2}(T_1^1 - T_2^2), \\ Q(f)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{2'}}) &= T_1^2, \\ Q(f)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}) &= T_2^1; \end{aligned}$$

de onde $T = t \text{Id}$ para algunha $t \in C^\infty(\Sigma)$. Daquela,

$$\text{Coef}(Q(f)(\partial_{x^i}, \partial_{x_{i'}}); x_{i'}) = t \partial_{x^i} f + \partial_{x^i} t \text{ con } i = 1, 2;$$

de onde obtemos $t = Ce^{-\hat{f}}$. Entón, $\tau = 4\lambda = 6Ce^{-f}$. Para asegurar que $\lambda \neq 0$ impoñemos $C \neq 0$. Finalmente, tense que

$$Q(f)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = (\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) - \frac{C}{2}e^{-\hat{f}}\Phi_{ij} \text{ para todo } i, j \in \{1, 2\};$$

de onde obtemos a expresión de Φ . Isto conclúe a proba do teorema. \square

O seguinte resultado non só constitúe un recíproco para a afirmación (3) do teorema anterior, senón que nos proporciona un método de construción de exemplos de case solitóns de Ricci gradientes isotrópicos autoduais con λ non-constante (salvo isometría). A proba consiste nunha comprobación directa en coordenadas que se obtén a partir dos cálculos realizados para a proba do teorema 2.11.

Teorema 2.12. *Sexa (Σ, D) unha superficie afín, sexa $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$ e sexa $f = \pi^* \hat{f}$. Entón $(T^*\Sigma, g_{D, \Phi, T, \text{Id}}, f, \mu)$ con $T = Ce^{-\hat{f}} \text{Id}$ e $\Phi = \frac{2}{C}e^{\hat{f}}(\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D)$ para algún $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é un case solitón de Ricci gradiente isotrópico autodual con $\lambda = \frac{3}{2}Ce^{-f}$.*

Exemplo 2.13. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ unha superficie afín tal que nas coordenadas canónicas de \mathbb{R}^2 os símbolos de Christoffel veñen dados por funcións $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Para calquera función $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tense que, $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D, \Phi, T, \text{Id}}, \pi^* \hat{f}, \mu)$ con $T = Ce^{-\hat{f}} \text{Id}$ e $\Phi = \frac{2}{C}e^{\hat{f}}(\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D)$*

para algún $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é un case solitón de Ricci gradiente isotrópico autodual con $\lambda = \frac{3}{2}Ce^{-\hat{f}}$. Por unha banda, tense que $\partial_{x_1, x_1'}^2 \mathcal{W}_{1214} = \frac{1}{2}C^2e^{-\hat{f}}$, polo que $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D, \Phi, T, \text{Id}})$ é autodual, mais nunca é anti-autodual. Por outra banda, $\det\{\rho\} = (\frac{9}{4}Ce^{-2\hat{f}})^2$, polo que $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D, \Phi, T, \text{Id}})$ nunca é Ricci chá.

Rematamos o capítulo facendo as seguintes observacións.

Observación 2.14. O teorema 2.9 mostra que $\tau = 4\lambda$ para todo case solitón hemi conformemente chan isotrópico. Por esta razón, as métricas autoduais descritas no teorema anterior son solitóns κ -Einstein con $\kappa = \frac{1}{4}$ (ver exemplo 2.3). Por outra banda, toda variedade de Walker anti-autodual ten curvatura escalar idénticamente cero (ver [51]), polo que todos os exemplos anti-autoduais son steady ($\lambda = 0$). Desta forma é claro que as métricas do teorema anterior non son localmente conformemente chás, xa que son autoduais, mais nunca poden ser anti-autoduais. Isto ilustra que as condicións de autodualidade e anti-autodualidade nunha variedade de Walker teñen un comportamento ben diferente e que non son, en xeral, intercambiabes.

Observación 2.15. Os solitóns de Ricci gradientes autoduais foron estudados en [11] mostrando que todos os exemplos autoduais non localmente conformemente chans ocorren no caso isotrópico. Ademais, todos eles son steady (i.e., $\lambda = 0$) e son isométricos a unha extensión de Riemann deformada dunha superficie afín (Σ, D) . Se adicionalmente pedimos que non sexan Ricci chans, tense que a función potencial f tamén é o pull-back dunha certa función \hat{f} en Σ satisfacendo a ecuación do solitón de Ricci gradiente afín $\text{Hes}_{\hat{f}}^D + 2\rho_s^D = 0$.

A existencia dun solitón de Ricci gradiente afín é unha condición bastante restritiva. Por exemplo, unha superficie afín homoxénea compacta é un solitón de Ricci gradiente afín se e só se o tensor de Ricci ten rango un (ver [14]). Pola contra, toda superficie afín dá lugar a un case solitón de Ricci gradiente estrito (i.e., λ non-constante) no seu fibrado cotanxente a partir dunha extensión de Riemann modificada como mostra o teorema 2.12.

Finalmente, observamos que toda superficie afín proporciona exemplos de case solitóns de Ricci gradientes con λ non-constante para calquera función potencial $f = \pi^*\hat{f}$. En oposición a isto, no caso dos solitóns (i.e., λ constante) o tensor Φ da extensión de Riemann deformada é independente da función potencial, mais esta debe cumprir a ecuación do solitón de Ricci gradiente afín.

Métricas quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás

No presente capítulo estudamos a estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas baixo a condición de ser hemi conformemente chás.

Os resultados principais deste capítulo están recollidos en [18].

3.1 Introducción

Comezamos o capítulo introducindo a definición de métrica quasi-Einstein xeneralizada. Malia que na nosa análise posterior consideramos variedades hemi conformemente chás e, por tanto, restrinxiremos o noso estudo a dimensión catro, presentamos a definición para dimensión arbitraria $n \geq 2$.

Definición 3.1. Unha variedade semi-riemanniana (M, g) de dimensión n dise *quasi-Einstein xeneralizada* (QEX) se existen $f \in C^\infty(M)$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tales que se verifica a ecuación

$$\text{Hes}_f + \rho - \mu df \otimes df = \lambda g \text{ para algún } \lambda \in C^\infty(M). \quad (3.1)$$

Se λ é constante a ecuación anterior recibe o nome de quasi-Einstein, dando lugar ás estruturas quasi-Einstein, e se λ é non-constante dise ecuación quasi-Einstein xeneralizada estricta. Ademais, se $\mu \neq 0$ dicimos que a variedade é quasi-Einstein (xeneralizada) *propia*.

Este concepto foi estudado anteriormente en sinatura riemanniana e lorentziana por diversos autores. Catino proba en [41] que unha variedade riemanniana 4-dimensional con tensor de Weyl harmónico e con curvatura radial Weyl cero satisfacendo a ecuación quasi-Einstein xeneralizada con μ función é sempre localmente conformemente chá. Por outra banda, tamén se estudan na literatura as variedades quasi-Einstein xeneralizadas ou algunha subfamilia en dimensión catro baixo a condición de ser hemi conformemente chás. Tanto en sinatura riemanniana coma en lorentziana as variedades quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás son localmente conformemente chás (ver [35]).

Neste capítulo estudamos a ecuación quasi-Einstein xeneralizada (3.1) con $\mu \neq 0$. Isto correspóndese coas variedades quasi-Einstein xeneralizadas propias. A nosa análise xira en torno ao estudo local destas estruturas baixo a condición de ser hemi conformemente chás, polo que nos restrinxiremos a dimensión catro e sinatura neutra $(2, 2)$. Isto completa o estudo da estrutura de variedades quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás comezado no capítulo 2.

No que resta desta sección estudamos un cambio de variable na ecuación (3.1) que permite simplificar a nosa análise e proporcionamos exemplos particulares deste tipo de estruturas. Na sección 3.2 analizamos as consecuencias da definición a partir do estudo da traza e da diverxencia da ecuación que os define e das súas relacións coa curvatura e o tensor de Weyl. Na sección 3.3 empregamos estes resultados para examinar a estrutura local deste tipo de métricas cando estas son hemi conformemente chás. Por unha banda, vemos que toda variedade quasi-Einstein xeneralizada hemi conformemente chá é tamén localmente conformemente chá cando as hipersuperficies de nivel da función potencial son non-dexeneradas tanto en sinatura riemanniana como en sinatura $(2, 2)$ (ver teorema 3.10). Por outra banda, e en contraposición ao anterior, a sinatura neutra permite a existencia de variedades quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás mais non localmente conformemente chás cando as hipersuperficies son dexeneradas (ver teorema 3.18). En sinatura de Lorentz isto non se pode dar, xa que no caso real toda variedade hemi conformemente chá é localmente conformemente chá. Deste modo, só existen exemplos hemi conformemente chans non localmente conformemente chans en sinatura neutra e cando as hipersuperficies de nivel son dexeneradas. Ademais, todos os exemplos son localmente isométricos ao fibrado cotanxente dunha superficie afín dotada dunha extensión de Riemann modificada cuxa función potencial é o pull-back dunha función na superficie.

3.1.1 Linearización da ecuación

En contraposición ao que acontece cos case solitóns de Ricci gradientes, a ecuación que define as variedades quasi-Einstein xeneralizada non constitúe un sistema de ecuacións diferenciais lineares. Por este motivo, trataremos de reescribir lixeiramente a ecuación QEX de xeito que a ecuación resultante sexa linear. Posto que para $\mu = 0$ a ecuación xa é linear e coincide precisamente coa ecuación dos CSRG, centrámonos unicamente no caso no que $\mu \neq 0$. Expresamos $f = -\frac{\log h}{\mu}$ para unha certa función h . Equivalentemente, $h = e^{-\mu f}$. Usando a definición do hessiano tense que

$$\begin{aligned} \text{Hes}_h(X, Y) &= (\nabla_X dh)(Y) = (\nabla_X d(e^{-\mu f}))(Y) = (\nabla_X(-\mu e^{-\mu f} df))(Y) \\ &= -\mu(-\mu e^{-\mu f} X(f)df(Y) + e^{-\mu f}(\nabla_X df)(Y)) \\ &= -\mu h(-\mu df \otimes df + \text{Hes}_f)(X, Y). \end{aligned}$$

Empregando isto, reexpresamos a ecuación (3.1) en función de h obtendo

$$\text{Hes}_h - \mu h \rho = -\mu h \lambda g. \quad (3.2)$$

En particular, toda variedade QEX con $\mu \neq 0$ dá lugar a unha solución da ecuación anterior. Reciprocamente, se $h \in C^\infty(M)$ é solución da ecuación (3.2) con $h \neq 0$, tamén o é $-h$, e necesariamente $h > 0$ ou $-h > 0$ de xeito que podemos recuperar f . Así, sempre que $h \neq 0$ e $\mu \neq 0$, as ecuacións (3.1) e (3.2) son equivalentes e o sistema diferencial asociado a esta segunda é linear de segunda orde, polo que recibe o nome de *ecuación quasi-Einstein xeneralizada linearizada*. Desta forma, cando $\mu \neq 0$ podemos redefinir o concepto de variedade quasi-Einstein xeneralizada da definición 3.1 substituíndo a condición (3.1) por (3.2) con $h \neq 0$.

Se $\mu = 0$ na definición 3.1, recuperamos a ecuación dos CSG que xa foi considerada no capítulo 2. Por este motivo, no que resta de capítulo asumiremos que $\mu \neq 0$. Daquela, a condición (3.1) da definición 3.1 é equivalente a que exista unha función $h \neq 0$ satisfacendo a ecuación (3.2). Por conveniencia, sempre que non se diga o contrario, empregamos no que resta de capítulo esta condición para caracterizar as variedades quasi-Einstein xeneralizadas. A función h recibe o nome de *función potencial* e posto que λ está determinado pola traza da ecuación (3.2), denotamos a estrutura quasi-Einstein asociada pola cuádrupla (M, g, h, μ) , onde μ sempre é distinto de cero e h é unha función positiva.

3.1.2 Casos particulares da ecuación quasi-Einstein xeneralizada

A condición quasi-Einstein xeneralizada non é especialmente restritiva, permitindo aglutinar baixo a mesma definición varias estruturas de grande interese xeométrico. A continuación detallamos algunhas destas posibilidades e mostramos outras particularidades que presentan estas métricas.

Exemplo 3.2 (Variedades Einstein). Se na ecuación (3.2) tomamos h constante, o resultado é precisamente a condición Einstein. Polo tanto, calquera variedade Einstein é tamén quasi-Einstein xeneralizada. Por outra banda, se supoñemos que a variedade quasi-Einstein xeneralizada cumprindo a ecuación (3.2) con $\mu \neq 0$ é adicionalmente Einstein, tense que

$$\text{Hes}_h = \mu h \left(\frac{\tau}{n} - \lambda \right) g.$$

Esta é precisamente a ecuación de Möbius con $\Delta h = \mu h(\tau - n\lambda)$ (ver [101]). Ademais, cando λ é constante, a anterior redúcese á ecuación de Obata

$$\text{Hes}_h + \kappa h g = 0$$

posto que $\kappa = \mu \left(\frac{\tau}{n} - \lambda \right)$ é unha constante (ver [87]).

Exemplo 3.3 (Case solitóns de Ricci gradientes). Para $\mu = 0$, a ecuación (3.1) correspóndese coa ecuación dos case solitóns de Ricci gradientes estudada no capítulo 2 desta memoria. Posto que a definición de variedade quasi-Einstein xeneralizada inclúe a dos case solitóns, todos os exemplos que citamos na subsección 2.1.1 son tamén casos particulares deste tipo de métricas. Porén, os case solitóns de Ricci gradientes presentan unhas propiedades diferentes con respecto ás estruturas quasi-Einstein con $\mu \neq 0$ (ver [34]).

Exemplo 3.4 (Variedades conformemente Einstein). Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión $n \geq 3$. Asumindo a notación do teorema 1.13 consideramos a transformación conforme dada por $\sigma = -\log h$. Entón, tense que $\tilde{g} = h^{-2}g$ e o tensor de Ricci asociado cumpre que

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\left(\frac{-1}{n-2}\right)h} \text{Hes}_h + [\Delta(\log h) - (n-1)g(\nabla(\log h), \nabla(\log h))] g.$$

Daquela é claro que $(M, g, h, -\frac{1}{n-2})$ é quasi-Einstein se e só se $(M, \tilde{g} = h^{-2}g)$ é Einstein.

O parámetro $\mu = -\frac{1}{n-2}$ é un valor distinguido para a ecuación quasi-Einstein e que como veremos durante todo o traballo, xoga un papel esencial no estudo das estruturas quasi-Einstein. De feito, o problema das variedades quasi-Einstein xeneralizadas autoduais conformemente Einstein segue aberto, sabéndose moi pouco sobre este tipo de estruturas. Para unha lectura máis detallada sobre as variedades conformemente Einstein referimos a [8, 41, 64].

Exemplo 3.5 (Variedades espazo-tempo estáticas). Se tomamos $\mu = 1$ e $\lambda = -\frac{\Delta h}{h}$ na ecuación (3.2), obtemos $\text{Hes}_h - h\rho = \Delta h g$. Esta é precisamente a ecuación que define as chamadas *variedades estáticas* que aparecen no estudo dos espazos-tempo estáticos (ver, por exemplo, [68, 70]).

Exemplo 3.6 (Produtos warped Einstein). Sexa $B \times_{\varphi} F$ un produto warped Einstein con métrica g e $\dim F = d_F > 1$. Por ser Einstein tense que $\rho = \lambda g$, para certo λ constante. Entón o lema 1.15 mostra que

$$\rho^B(X, Y) - \frac{1}{\frac{1}{d_F}\phi} \text{Hes}_{\phi}(X, Y) = \lambda g^B(X, Y),$$

polo que $(B \times F, g, \varphi, \frac{1}{d_F})$ é quasi-Einstein. Reciprocamente, se partimos dunha estrutura quasi-Einstein (B, g, f, μ) onde $\mu = \frac{1}{d_F}$, existen fibras Einstein F tales que $B \times_{\varphi} F$ é Einstein (consúltase [67, 80] para ver a proba deste resultado).

Exemplo 3.7 (Métricas críticas para o funcional curvatura escalar total). Sexa M unha variedade e $\mathcal{M}_1(M)$ o espazo das métricas semi-riemannianas en M tales que $\int_M d \text{vol}_g = 1$, onde vol_g denota o elemento de volume semi-riemanniano. Definimos o funcional

$$\begin{aligned} S : \mathcal{M}_1(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_M \tau^2 d \text{vol}_g, \end{aligned}$$

onde τ denota a curvatura escalar. As métricas críticas para este funcional satisfán a ecuación

$$\text{Hes}_{\tau} - \tau\rho = \left(\Delta\tau - \frac{\tau^2}{4} \right) g.$$

Esta é precisamente a ecuación quasi-Einstein xeneralizada linearizada (3.2) con función potencial $h = \tau$, $\mu = 1$ e $\lambda = \frac{\tau}{4} - \frac{\Delta\tau}{\tau}$ (para máis detalles, véxase [5, 6, 37]).

Para máis referencias sobre variedades quasi-Einstein ou estruturas relacionadas pode consultarse [36, 39, 83].

3.2 Principais elementos xeométricos nas variedades quasi-Einstein xeneralizadas

Nesta sección analizamos os obxectos xeométricos esenciais que desempeñan un papel nas variedades quasi-Einstein. Obteremos relacións entre distintos operadores asociados á estrutura quasi-Einstein e á curvatura. Isto permitiranos realizar a nosa análise na sección 3.3.

No seguinte lema recompílese información que extraemos estudando a traza e mais a diverxencia da ecuación (3.2). A partir das ecuacións resultantes e as súas derivadas extraemos información adicional sobre estas estruturas. Feito isto, e posto que o noso interese se centra en estudar variedades hemi conformemente chás, buscamos as relacións existentes entre as ecuacións anteriores e as ecuacións que definen os tensores de curvatura, Weyl e Cotton.

Lema 3.8. *Sexa (M, g, h, μ) unha estrutura quasi-Einstein xeneralizada. Entón*

$$(1) \quad \Delta h - \mu h \tau + \mu h \lambda n = 0.$$

$$(2) \quad 2\mu(\tau - \lambda(n-1))\nabla h - 2\mu h(n-1)\nabla \lambda + \mu h \nabla \tau + 2(1-\mu)\text{Ric}\nabla h = 0.$$

$$(3) \quad \mathcal{R}(X, Y, Z, \nabla h) = \frac{1}{h}(Y(h)\text{Hes}_h(X, Z) - X(h)\text{Hes}_h(Y, Z)) \\ + \mu h \{(\nabla_Y \rho)(X, Z) - (\nabla_X \rho)(Y, Z) + X(\lambda)g(Y, Z) - Y(\lambda)g(X, Z)\}.$$

$$(4) \quad \text{Sexa } \eta = \mu(n-2) + 1. \text{ Entón}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X, Y, Z, \nabla h) &= -\mu h C(X, Y, Z) \\ &+ \frac{\tau \eta}{(n-1)(n-2)} \{g(Y, Z)X(h) - g(X, Z)Y(h)\} \\ &- \frac{\eta}{(n-1)(n-2)} \{g(Y, Z)\rho(X, \nabla h) - g(X, Z)\rho(Y, \nabla h)\} \\ &- \frac{\eta}{(n-2)} \{\rho(Y, Z)X(h) - \rho(X, Z)Y(h)\}. \end{aligned}$$

Proba. A ecuación 1 obtense tomando trazas na ecuación (3.2).

Para probar 2 comezamos empregando a fórmula de Bochner (1.3) e a identidade de Bianchi contracta (1.2) para reescribir a diverxencia da ecuación (3.2) como

$$\nabla(\Delta h) + \text{Ric}(\nabla h) - \mu \text{Ric}(\nabla h) - \mu h \frac{\nabla \tau}{2} + \mu \lambda \nabla h + \mu h \nabla \lambda = 0.$$

Empregando a derivada covariante de 1 despexamos $\nabla(\Delta h)$ na ecuación anterior e reagrupando termos obtemos 2.

Por outra banda, usamos a ecuación (3.2) para ver que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \rho)(Y, Z) &= \left(\nabla_X \left(\lambda g + \frac{1}{\mu h} \text{Hes}_h \right) \right) (Y, Z) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) + X \left(\frac{1}{\mu h} \right) \text{Hes}_h(Y, Z) + \frac{1}{\mu h} (\nabla_X \text{Hes}_h)(Y, Z) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) - \frac{1}{\mu h^2} X(h) \text{Hes}_h(Y, Z) \\
&\quad + \frac{1}{\mu h} (X(\text{Hes}_h(Y, Z)) - \text{Hes}_h(\nabla_X Y, Z) - \text{Hes}_h(Y, \nabla_X Z)) \\
&= X(\lambda)g(Y, Z) - \frac{1}{\mu h^2} X(h) \text{Hes}_h(Y, Z) \\
&\quad + \frac{1}{\mu h} (g(\nabla_X \nabla_Y \nabla h, Z) - g(\nabla_{\nabla_X Y} \nabla h, Z)).
\end{aligned}$$

Posto que a expresión é análoga para $(\nabla_Y \rho)(X, Z)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) &= d\lambda(X)g(Y, Z) - d\lambda(Y)g(X, Z) \\
&\quad + \frac{1}{\mu h} \left\{ \frac{1}{h} (dh(Y) \text{Hes}_h(X, Z) - dh(X) \text{Hes}_h(Y, Z)) + \mathcal{R}(X, Y, \nabla h, Z) \right\},
\end{aligned}$$

de onde se segue 3.

Para probar 4 comezamos combinando 3, a expresión do tensor de Weyl (1.4) e a do tensor de Cotton (1.5), obtendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(X, Y, Z, \nabla h) &= -\frac{1}{(n-2)} \{ \rho(X, \nabla h)g(Y, Z) - \rho(X, Z)g(Y, \nabla h) \\
&\quad + \rho(Y, Z)g(X, \nabla h) - \rho(Y, \nabla h)g(X, Z) \} \\
&\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \{ g(X, \nabla h)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, \nabla h) \} \\
&\quad + \frac{1}{h} (Y(h) \text{Hes}_h(X, Z) - X(h) \text{Hes}_h(Y, Z)) \\
&\quad + \mu h \left\{ -\frac{1}{2(n-1)} (X(\tau)g(Y, Z) - Y(\tau)g(X, Z)) \right. \\
&\quad \quad \left. - C(X, Y, Z) + X(\lambda)g(Y, Z) - Y(\lambda)g(X, Z) \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente empregamos a ecuación (3.2) para substituír o hessiano e a expresión 2 para substituír

os termos onde aparece τ . Obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X, Y, Z, \nabla h) &= -\mu h C(X, Y, Z) \\ &+ \frac{\tau(1 + \mu(n-2))}{(n-1)(n-2)} \{g(Y, Z)X(h) - g(X, Z)Y(h)\} \\ &+ \frac{(1 + \mu(n-2))}{(n-1)(n-2)} \{\rho(Y, \nabla h)g(X, Z) - \rho(X, \nabla h)g(Y, Z)\} \\ &+ \frac{(1 + \mu(n-2))}{(n-2)} \{\rho(X, Z)Y(h) - \rho(Y, Z)X(h)\}. \end{aligned}$$

Substituíndo $\eta = 1 + \mu(n-2)$ obtemos 4, completando así a proba do lema. \square

Observación 3.9. A ecuación 4 do lema 3.8 é esencial na nosa análise para o estudo da estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás (ver sección 3.3). Se $\eta = 0$ a ecuación anterior trivialízase. Isto correspóndese con $\mu = -\frac{1}{n-2}$, polo que a variedade é conformemente Einstein, tal e como se detalla no exemplo 3.4. No sucesivo excluiremos este caso da nosa análise, polo que asumiremos que $\mu \neq -\frac{1}{n-2}$.

O estudo local das variedades quasi-Einstein (xeneralizadas) autoduais conformemente Einstein segue a ser un problema aberto mesmo en sinatura riemanniana (ver [36]).

3.3 Xeometría local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás

Nesta sección estudamos a estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas baixo a condición de ser hemi conformemente chás. Esta condición xeométrica fai que, a diferenza da sección anterior na que os resultados se proban en dimensión n arbitraria, traballemos exclusivamente en dimensión $n = 4$. Ademais, a sinatura semi-riemanniana permite que distinguimos cando o gradiente da función potencial é nulo e cando non. Este feito xoga un papel moi importante na nosa análise e permite a existencia de exemplos hemi conformemente chans que non son localmente conformemente chans. Cando as hipersuperficies de nivel da función potencial h son non-dexeneradas (i.e., $\|\nabla h\| \neq 0$) dicimos que a estrutura é *non-isotrópica*; pola contra, cando as hipersuperficies son dexeneradas (i.e., $\|\nabla h\| = 0$), dicimos que a estrutura é *isotrópica* e sempre asumimos que $\nabla h \neq 0$.

Analogamente a como fixemos para os case solitóns e posto que estamos interesados no estudo a nivel local, restrinxímonos a unha veciñanza aberta \mathcal{O} dun punto p de M . Asumimos que ∇h non é cero en \mathcal{O} . Consideramos as posibilidades $\|\nabla h\| \neq 0$ en \mathcal{O} ou ben $\|\nabla h\| = 0$ en \mathcal{O} , que vimos de describir no parágrafo anterior. Posto que estamos interesados en estudar métricas quasi-Einstein xeneralizadas autoduais que non son localmente conformemente chás, non incluímos na nosa análise o caso mixto no que o gradiente pasa de ser nulo a non-nulo nunha veciñanza do punto.

Na primeira parte da sección estudaremos as variedades QEX non-isotrópicas hemi conformemente chás en sinatura netura. Veremos que estas teñen un comportamento similar en sinatura

riemanniana, lorentziana e neutra; téndose que todas elas son localmente conformemente chás. Ademais, xustificamos a existencia de solucións para este tipo de estruturas con λ non-constante a partir da análise da ecuación diferencial resultante (ver observación 3.12). Nunha segunda parte da sección consideramos o problema anterior para variedades QEX isotrópicas. En contraposición ao caso non-isotrópico, existen exemplos de estruturas quasi-Einstein xeneralizadas isotrópicas hemi conformemente chás que non son localmente conformemente chás. A nosa análise mostra que este tipo de estruturas son localmente Walker sempre que non sexan conformemente Einstein (ver teorema 3.13). Daquela, as nocións de autodualidade e anti-autodualidade non son intercambiabes, xa que as variedades de Walker teñen unha orientación natural inducida polas coordenadas de Walker (ver detalles na sección 1.7). En particular, se a variedade é autodual, determinamos a estrutura local das métricas anteriores ao tempo que proporcionamos un método de construción de todos os posibles exemplos (ver teoremas 3.18 e 3.19).

3.3.1 O caso non-isotrópico

Nesta sección consideramos que as superficies de nivel da función potencial son non-dexeneradas, é dicir, $g(\nabla h, \nabla h) \neq 0$. O seguinte resultado e a súa proba son análogos para as tres posibles sinaturas que se poden dar en dimensión catro.

Teorema 3.10. *Sexa (M, g, h, μ) unha estrutura quasi-Einstein xeneralizada non-isotrópica de sinatura $(2, 2)$ con $\mu \neq -\frac{1}{2}$. Se (M, g) é hemi conformemente chá, entón é localmente conformemente chá e é localmente isométrica a un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e N é de curvatura seccional constante.*

Proba. (M, g) é hemi conformemente chá e a orientación non está fixada, logo podemos supoñer sen perda de xeneralidade que (M, g) é autodual. Posto que ∇h é non-nulo, tomamos unha referencia ortonormal da forma $\{E_1 = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|}, E_2, E_3, E_4\}$. Posto que (M, g) autodual, o lema 1.6 mostra que para calquera permutación (i, j, k) de $(2, 3, 4)$ tense que

$$\mathcal{W}(E_1, E_i, X, Y) = \sigma_{ijk} \epsilon_j \epsilon_k \mathcal{W}(E_j, E_k, X, Y).$$

Empregando a ecuación dada no lema 3.8-4 con $n = 4$ xunto co lema 1.9, reescribimos as igualdades anteriores como

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{6} \{dh(E_1)g(E_i, Z) - dh(E_i)g(E_1, Z)\} \\ & - \frac{\eta}{6} \{\rho(E_1, \nabla h)g(E_i, Z) - \rho(E_i, \nabla h)g(E_1, Z)\} \\ & - \frac{\eta}{2} \{dh(E_1)\rho(E_i, Z) - dh(E_i)\rho(E_1, Z)\} \\ & = \sigma_{ijk} \epsilon_j \epsilon_k \frac{\eta}{6} \{dh(E_j)g(E_k, Z) - dh(E_k)g(E_j, Z)\} \\ & - \sigma_{ijk} \epsilon_j \epsilon_k \frac{\eta}{6} \{\rho(E_j, \nabla h)g(E_k, Z) - \rho(E_k, \nabla h)g(E_j, Z)\} \\ & - \sigma_{ijk} \epsilon_j \epsilon_k \frac{\eta}{2} \{dh(E_j)\rho(E_k, Z) - dh(E_k)\rho(E_j, Z)\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $\mu \neq -\frac{1}{2}$, tense que $\eta = 1 + 2\mu \neq 0$, polo que podemos eliminar η da ecuación. Tomando $Z = \nabla h$ obtemos $\rho(E_i, \nabla h) = 0$ para $i \neq 1$, polo que a ecuación (3.2) mostra que

$\text{Hes}_h(E_i, \nabla h) = 0$. Empregando de novo a ecuación (3.3), esta vez con $Z = E_j$ para $j \neq 1$, vemos que $\rho(E_i, E_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Daquela, o tensor de Ricci é diagonal para a referencia dos E_i e posto que a métrica é ortonormal, aplicamos novamente a ecuación (3.2) para ver que o hessiano tamén é diagonal. Por outra banda, se usamos máis unha vez a ecuación (3.3) tomando $Z = E_i$ con $i \neq 1$ obtemos que

$$3\varepsilon_i \rho(E_i, E_i) = \tau - \varepsilon_1 \rho(E_1, E_1).$$

Empregando isto xunto coa ecuación (3.2) obtemos que para $2 \leq i \leq 4$:

$$\begin{aligned} \text{Hes}_h(E_i, E_i) &= -\mu h \{ \lambda g(E_i, E_i) - \rho(E_i, E_i) \} \\ &= -\mu h \left(\lambda - \frac{\tau - \varepsilon_1 \rho(E_1, E_1)}{3} \right) g(E_i, E_i). \end{aligned}$$

Se nos restrinximos ás hipersuperficies de nivel de h coa métrica inducida, tense que o hessiano é un múltiplo da devandita métrica na referencia $\{E_2, E_3, E_4\}$. Consecuentemente, as hipersuperficies de nivel de h son totalmente umbilicais. Ademais, posto que $\text{Hes}_h(E_j, \nabla h) = 0$ para $j \neq 0$, é claro que $\text{span}\{\nabla h\}$ é unha distribución 1-dimensional totalmente xeodésica. Empregando o lema 1.19 tense que M é localmente un produto twisted da forma $I \times_\phi N$. Ademais, como o Ricci é diagonal o lema 1.20 afirma que o produto twisted pode expresarse como un produto warped da forma $I \times_\varphi N$. O lema 1.17 mostra que todo produto warped con base 1-dimensional autodual é localmente conformemente chan, polo que M é localmente conformemente chá. Finalmente, aplicamos o lema 1.16 e usando de novo a ecuación (3.2) é doado probar que N é un espazo Einstein 3-dimensional e polo tanto ten curvatura seccional constante, probando así o teorema. \square

Observación 3.11. En [36] o autor estudou as variedades quasi-Einstein xeneralizadas (3.1) coa consideración de que μ fose unha función con tensor de Weyl harmónico $W(\nabla h, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ en sinatura riemanniana. Neste traballo afirma que todas elas son localmente conformemente chás e que a hipótese de $W(\nabla h, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ é fundamental, pois do contrario, existen exemplos non localmente conformemente chans. En dimensión catro e sinatura lorentziana esta condición foi considerada en [21], obtendo que tales variedades son localmente conformemente chás no caso non-isotrópico e localmente isométricas a unha pp -wave no isotrópico. Se no teorema 3.10 substituímos a hipótese de ser hemi conformemente chan pola de ter tensor de Weyl harmónico con $W(\nabla h, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$, o resultado segue a ser o mesmo e a proba é análoga. Novamente a condición $W(\nabla h, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ é fundamental para poder empregar a mesma análise ca no suposto hemi conformemente chan.

A continuación xustificamos a existencia de exemplos de variedades quasi-Einstein non-isotrópicas nas condicións do teorema anterior.

Observación 3.12. Sexa $I \times_\varphi N = (I \times N, \varepsilon dt^2 \oplus g_N)$ un produto warped da forma do teorema 3.10, onde $\varepsilon = \pm 1$ e (N, g_N) ten curvatura seccional constante c_N . Por unha banda tense que $\rho_N = c_N(\dim N - 1)g_N$ por ser N de curvatura seccional constante (ver [78]). Por outra banda, posto que h, τ e φ son funcións de t , lema 3.8-1 mostra que λ tamén o é. Entón unha

conta directa empregando as fórmulas do lema 1.16 para produtos warped mostra que a ecuación quasi-Einstein xeneralizada linearizada (3.2) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} h''(t)\varphi(t) + \varepsilon\mu h(t)(\varphi(t)\lambda(t) + 3\varphi''(t)) = 0, \\ \varphi(t)(h'(t)\varphi'(t) + \mu h(t)\varphi''(t)) - \mu h(t)(2c_N\varepsilon - \varepsilon\lambda(t)\varphi(t)^2 - 2\varphi'(t)^2) = 0. \end{cases}$$

Pola primeira ecuación tense que $\lambda(t) = -\left(\frac{1}{\mu h(t)}\varepsilon h''(t) + \frac{3\varphi''(t)}{\varphi(t)}\right)$. Substituíndo isto na segunda ecuación obtemos

$$\mu h(t)(-2c_N\varepsilon + 2\varphi'(t)^2 + (1 - 3\varepsilon)\varphi(t)\varphi''(t)) + \varphi(t)(h'(t)\varphi'(t) - \varphi(t)h''(t)) = 0.$$

Esta é unha EDO linear para a función potencial h , polo que dado un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$ como o do teorema 3.10 existe algunha solución h para a ecuación quasi-Einstein xeneralizada linearizada (3.2). Isto xustifica a existencia de exemplos deste tipo de métricas con λ non-constante.

3.3.2 O caso isotrópico

Nesta subsección as hipersuperficies de nivel da función potencial son dexeneradas, é dicir, que o gradiente da función potencial é nulo. Ademais, a nosa análise require que este campo de vectores sexa distinto de cero, polo que en resumo traballamos sempre con $\nabla h \neq 0$ e $g(\nabla h, \nabla h) = 0$. Novamente estudamos a estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas de sinatura neutra con $\mu \notin \{0, -\frac{1}{2}\}$ baixo a condición de autodualidade. En contraposición ao anterior, a orientación si vai xogar un papel importante posto que nestas condicións a nosa variedade ten estrutura de variedade de Walker. Ademais, veremos que ao contrario do que acontece no caso non-isotrópico, nestas circunstancias a condición de autodualidade non implica que a variedade sexa localmente conformemente chá. De feito, isto fai que a sinatura neutra sexa de especial interese en dimensión catro, pois tanto en sinatura riemanniana como lorentziana ambas as condicións son equivalentes.

Teorema 3.13. *Sexa (M, g, h, μ) unha estrutura quasi-Einstein xeneralizada isotrópica (i.e., $\nabla h \neq 0$ e $\|\nabla h\| = 0$) de sinatura $(2, 2)$ con $\mu \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$. Se (M, g) é hemi conformemente chá, entón $\tau = 4\lambda$ e (M, g) é Walker.*

Observación 3.14. A definición 3.1 está baseada na introducida por Catino en [36] en sinatura riemanniana. Porén, a súa definición é un pouco máis xeral, permitindo que μ sexa función. A nosa análise non cobre este suposto xa que nesa situación o lema 3.8 non permitiría concluír que $\tau = n\lambda$ no teorema 3.13. Por este motivo, o estudo da estrutura local para unha variedade quasi-Einstein xeneralizada hemi conformemente chá constitúe un problema aberto.

Proba. Posto que ∇h é un vector nulo (distinto de cero), podemos escoller unha referencia ortonormal $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ tal que $g(E_i, E_j) = (-1)^i \delta_{ij}$ e $\nabla h = \frac{E_2 + E_1}{\sqrt{2}}$. A partir desta, definimos unha nova referencia formada exclusivamente por vectores nulos:

$$\mathcal{B} = \left\{ \nabla h = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}, U = \frac{E_4 - E_3}{\sqrt{2}}, V = \frac{E_2 - E_1}{\sqrt{2}}, W = \frac{E_3 + E_4}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Deste xeito, os únicos produtos de elementos da referencia \mathcal{B} non nulos son

$$g(\nabla h, V) = g(U, W) = 1.$$

Comecemos vendo que $\tau = 4\lambda$. Dado que $g(\nabla h, \nabla h) = 0$, tense que $0 = Xg(\nabla h, \nabla h) = 2 \operatorname{Hes}_h(X, \nabla h)$ para calquera X e, por conseguinte, $\operatorname{hes}_h(\nabla h) = 0$. Empregando isto na expresión que se obtén levantando índices na ecuación (3.2) obtemos que $\operatorname{Ric}(\nabla h) = \lambda \nabla h$. Por outra banda, (M, g) é hemi conformemente chá. Sen perda de xeneralidade tomamos a orientación tal que (M, g) sexa autodual. Entón o corolario 1.7 garante que $\mathcal{W}(\nabla h, V, Z, \nabla h) = \mathcal{W}(U, W, Z, \nabla h)$, para calquera Z . Substituíndo os dous membros desta igualdade empregando a expresión dada en 4 no lema 3.8 con $\mu \neq -\frac{1}{2}$ e tendo en conta que $C(\nabla h, V, Z) = C(U, W, Z)$ polo corolario 1.10 obtemos que

$$\begin{aligned} & \tau \{g(V, Z)\nabla h(h) - g(\nabla h, Z)V(h)\} \\ & - \{g(V, Z)\rho(\nabla h, \nabla h) - g(\nabla h, Z)\rho(V, \nabla h)\} \\ & - 3\{g(V, Z)\nabla h(h) - \rho(\nabla h, Z)V(h)\} \\ = & \tau \{g(W, Z)U(h) - g(U, Z)W(h)\} \\ & - \{g(W, Z)\rho(U, \nabla h) - g(U, Z)\rho(W, \nabla h)\} \\ & - 3\{\rho(W, Z)U(h) - \rho(U, Z)W(h)\}. \end{aligned}$$

Tomando $Z = V$ obtemos $\lambda = \frac{1}{4}\tau$, probando a primeira parte do lema.

Vexamos agora que (M, g) é Walker, para o cal basta ver que existe unha distribución \mathcal{D} nula e paralela. No que resta de proba, veremos que $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{\nabla h, U\}$. É claro que a distribución é nula. Vexamos que é paralela, é dicir, $\nabla \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Usando de novo a autodualidade tense que $\mathcal{W}(U, V, Z, \nabla h) = 0$ e $C(U, V, Z) = 0$. Empregando isto na ecuación dada en 4 no lema 3.8, obtemos $\rho(U, Z) = \lambda g(U, Z)$ para calquera Z , ou equivalentemente, $\operatorname{Ric}(U) = \lambda U$. Daquela, a ecuación (3.1) mostra que $\operatorname{hes}_h(U) = 0$ e polo tanto, $0 = \operatorname{Hes}_h(U, X) = g(U, \nabla_X \nabla h) = -g(\nabla_X U, \nabla h)$ para todo X . Por outra banda, posto que $g(U, U) = 0$, tense que $0 = Xg(U, U) = 2g(\nabla_X U, U)$ para todo X . Ademais, tense que $0 = \operatorname{Hes}_h(\nabla h, X) = g(\nabla_X \nabla h, \nabla h)$ para todo X . En resumo, tense que para todo X

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla h, \nabla h) &= 0, & g(\nabla_X U, U) &= 0, \\ g(\nabla_X U, \nabla h) &= 0, & g(\nabla_X \nabla h, U) &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuacións equivalen a que $\nabla \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\perp$ e posto que $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}$, concluímos que \mathcal{D} é paralela. En consecuencia, \mathcal{D} é unha distribución 2-dimensional nula e paralela, polo que (M, g) é localmente unha variedade de Walker. \square

Observación 3.15. Como corolario dos teoremas 2.9 e 3.13 obtemos que toda variedade quasi-Einstein xeneralizada hemi conformemente chá é de Walker. Ademais, a situación exposta na observación 2.10 para case solitóns é análoga á das variedades quasi-Einstein xeneralizadas propias. En particular, tense que a orientación nas variedades QEX hemi conformemente chás, que

ata o momento non xogaba ningún papel, queda fixada de forma natural. Tense tamén que non existen exemplos isotrópicos anti-autoduais con $\lambda \neq 0$. Porén, en contraposición ao anterior, existen infinidade de exemplos autoduais. En particular, no teorema 3.19 veremos que calquera superficie afín dá lugar a unha variedade quasi-Einstein xeneralizada estricta a través dunha extensión de Riemann modificada.

O seguinte resultado establece que a xeometría local das variedades autoduais quasi-Einstein xeneralizadas en sinatura $(2, 2)$ non Ricci chás e non conformemente Einstein é a dunha extensión de Riemann.

Teorema 3.16. *Sexa (M, g, h, μ) unha estrutura quasi-Einstein xeneralizada isotrópica de sinatura $(2, 2)$ con $\mu \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$ e non Ricci chá. Se (M, g) é autodual, entón é localmente isométrica a unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D, \Phi, T, \text{Id}})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $h = \pi^*\hat{h}$, onde $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$.*

Proba. Polo teorema 3.13 tense que $\tau = 4\lambda$ e (M, g) é localmente Walker, polo que a orientación queda fixada de xeito que calquera base da distribución nula e paralela xera un elemento autodual (ver observación 3.15). Ademais, o teorema 1.23 afirma que (M, g) é localmente unha extensión de Riemann realizada no cotanxente dunha superficie afín (Σ, D) dotada dunha métrica da forma

$$\tilde{g} = \iota X(\iota \text{Id} \circ \iota \text{Id}) + g_{D, \Phi, T, \text{Id}}$$

onde X, T e Φ son un campo de vectores, un tensor de tipo $(1, 1)$ e un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ definidos en Σ , respectivamente. En coordenadas $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$, a métrica anterior escríbese como

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= 2 dx^i \circ dx_{i'} \\ &+ \left\{ x_{k'} X^k x_{i'} x_{j'} + \frac{1}{2} x_{r'} (x_{j'} T_r^i + x_{i'} T_r^j) - 2x_{k'} {}^D \Gamma_{ij}^k + \Phi_{ij} \right\} dx^i \circ dx^j. \end{aligned}$$

Vexamos primeiro que $h = \pi^*\hat{h}$ para algún $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$. Consideremos o operador

$$Q(h) := -\text{Hes}_h + \mu h \left(\rho - \frac{\tau}{4} g \right).$$

É claro que $Q(h) = 0$ equivale á ecuación quasi-Einstein xeneralizada linearizada (3.2). Para $i, j \in \{1, 2\}$, tense que

$$Q(h)(\partial_{x_{i'}}, \partial_{x_{j'}}) = -\partial_{x_{i'} x_{j'}}^2 h = 0,$$

de onde obtemos que existen un campo de vectores ξ en Σ e $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$ tales que

$$h = \iota \xi + \pi^*\hat{h}.$$

Resta probar que $\xi = 0$. Supoñamos que, polo contrario, $\xi \neq 0$ e vexamos que chegamos a unha contradición. Posto que $\xi \neq 0$, sempre podemos escollemos coordenadas locais en Σ tales que $\xi = \partial_{x_{1'}}$ (ver [7, teorema 3.14]), polo que $h = x_{1'} + \pi^*\hat{h}$. Se P é un polinomio nunhas certas

variables, denotamos por $\text{Coef}(P; \cdot)$ o coeficiente dun monomio dado en P . Posto que $Q(h) = 0$, expandimos X como $X = X_1 \partial_{x^1} + X_2 \partial_{x^2}$ tendo que

$$\begin{aligned}\text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{1'} x_{2'}) &= (1 + 2\mu) X_1, \\ \text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{2'}^2) &= X_2.\end{aligned}$$

Como $\mu \neq -\frac{1}{2}$, obtemos que $X = 0$. Por outra banda, se $T = T_i^j \partial_{x^i} \otimes dx^j$, tense que

$$\begin{aligned}\text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}); x_{2'}) &= \frac{1}{2} T_1^2, \\ \text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{1'}) &= \frac{1}{2} (1 + 2\mu) T_2^1, \\ \text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}); x_{2'}) &= \frac{1}{4} (T_1^1 + T_2^2), \\ \text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{2'}}); x_{1'}) &= \frac{1}{4} \{(1 - 2\mu) T_1^1 + (1 + 2\mu) T_2^2\}.\end{aligned}$$

De novo, posto que $\mu \neq 0$ e $\mu \neq -\frac{1}{2}$, obtemos que $T = 0$. Empregando novamente que $Q(h) = 0$ e posto que

$$\begin{aligned}Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}) &= -\Gamma_{11}^1, & Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{2'}}) &= -\Gamma_{11}^2, \\ Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}) &= -\Gamma_{12}^1, & Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{2'}}) &= -\Gamma_{12}^2,\end{aligned}$$

obtemos $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$, e así,

$$\begin{aligned}\text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x^2}); x_{1'}) &= (1 + 2\mu) \partial_{x^1} \Gamma_{22}^1, \\ \text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x^2}); x_{2'}) &= \partial_{x^1} \Gamma_{22}^2.\end{aligned}$$

Empregando unha vez máis que $\mu \neq -\frac{1}{2}$, tense que $\partial_{x^1} \Gamma_{22}^1 = \partial_{x^1} \Gamma_{22}^2 = 0$. Entón $\rho = 0$ contradicindo a hipótese de que M é non Ricci chá. Polo tanto, $\xi = 0$, obtendo $h = \pi^* \hat{h}$.

Para rematar, expandimos de novo $X = X_1 \partial_{x^1} + X_2 \partial_{x^2}$, obtendo que

$$\begin{aligned}\text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}); x_{1'}) &= \mu h X_1, \\ \text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{2'}}); x_{2'}) &= \mu h X_2.\end{aligned}$$

Entón $X = 0$ e polo tanto $\tilde{g} = g_{D, \Phi, T, \text{Id}}$, como queriamos ver. \square

A continuación mostramos un exemplo de extensión de Riemann modificada $(T^* \Sigma, g_{D, \Phi, T, \text{Id}})$ que é quasi-Einstein xeneralizada e conformemente Einstein (i.e., $\mu = -\frac{1}{2}$) onde a función conforme non é o pullback dunha función na superficie (Σ, D) . Polo tanto, a condición de que $\mu \neq -\frac{1}{2}$ no teorema 3.16 é esencial.

Exemplo 3.17. Sexan (x^1, x^2) as coordenadas usuais en $\Sigma = \mathbb{R}^2$. Supoñamos que $\psi_1(x^2)$, $\psi_2(x^2)$, $\alpha(x^1, x^2)$, $\beta(x^1, x^2)$ e $\gamma(x^1, x^2)$ son funcións diferenciables en \mathbb{R}^2 e en particular que $\gamma \neq 0$. A partir destas funcións, consideramos as seguintes definicións para D (a partir dos símbolos de Christoffel distintos de cero), T , f e Φ :

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \alpha, & \Gamma_{22}^1 &= \beta, \\ \Gamma_{22}^2 &= \alpha + \psi_1(x^2), & T &= \gamma \partial_{x^2} \otimes dx^1, \\ f(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{1'} - 2\frac{\alpha}{\gamma}, & \Phi_{11} &= -4 \partial_{x^1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right), \\ \Phi_{12} = \Phi_{21} &= \frac{2\alpha^2}{\gamma} - \partial_{x^2} \left(\frac{2\alpha}{\gamma} \right), & \Phi_{22} &= \frac{4\alpha\beta}{\gamma} + \psi_2(x^2).\end{aligned}$$

Unha comprobación directa mostra que $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}}, f, -\frac{1}{2})$ é quasi-Einstein xeneralizada. Ademais, a función potencial ten gradiente nulo e o operador de Ricci é sempre distinto de cero e nilpotente en dous pasos.

No teorema 3.16 móstrase que toda variedade quasi-Einstein xeneralizada isotrópica autodual é localmente unha extensión de Riemann modificada. O seguinte teorema complementa a información anterior dando a forma concreta da extensión de Riemann cando λ é constante ou función (non-constante). Ademais, sintetiza boa parte da información que obtivemos ao longo deste capítulo referente á estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas autoduais propias. Este resultado xunto co seu equivalente para case solitóns recollido no teorema 2.11 completa o estudo da estrutura local das variedades quasi-Einstein xeneralizadas autoduais non conformemente Einstein.

Teorema 3.18. *Sexa (M, g, h, μ) unha variedade quasi-Einstein xeneralizada autodual de sinatura $(2, 2)$ con $\mu \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$ e non Ricci chá. Distinguímos tres casos:*

- (1) *Se (M, g) é non-isotrópica, entón (M, g) é localmente conformemente chá e é localmente isométrica a un produto warped da forma $I \times_{\varphi} N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e N é de curvatura seccional constante.*
- (2) *Se (M, g) é isotrópica e λ constante, entón $\lambda = 0$ e (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann deformada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ dunha superficie afín (Σ, D) con $h = \pi^*\hat{h}$ para certa $\hat{h} \in C^{\infty}(\Sigma)$ satisfacendo a ecuación*

$$\text{Hes}_{\hat{h}}^D - 2\mu\hat{h}\rho_s^D = 0. \quad (3.4)$$

- (3) *Se (M, g) é isotrópica e λ non constante, entón (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $h = \pi^*\hat{h}$ para certa $\hat{h} \in C^{\infty}(\Sigma)$. Ademais, existe $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\lambda = \frac{3}{2}Ch^{\frac{1}{\mu}}$, $T = C\hat{h}^{\frac{1}{\mu}}\text{Id}$ e $\Phi = -\frac{2}{\mu C}\hat{h}^{-\frac{\mu+1}{\mu}}(\text{Hes}_{\hat{h}}^D - 2\mu\hat{h}\rho_s^D)$.*

Proba. A afirmación 1 é consecuencia do teoremas 3.10. No que segue probamos as afirmacións 2 e 3. Polo teorema 3.16 tense que (M, g) é localmente isométrica a unha extensión de Riemann modificada $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,T,\text{Id}})$ dunha superficie afín (Σ, D) e $h = \pi^*\hat{h}$ para certa $\hat{h} \in C^{\infty}(\Sigma)$. No que segue asumimos a notación da proba de devandito teorema.

Supoñamos que λ é constante. Sabemos pola ecuación (3.2) que $\text{Ric}(\nabla h) = \lambda\nabla h$ e polo teorema 3.13, $\tau = 4\lambda$. Posto que $\nabla h \neq 0$, a ecuación 2 do lema 3.8 mostra entón que $\lambda = \tau = 0$. Isto mostra que $T_1^1 = -T_2^2$, polo que

$$\begin{aligned} Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}) &= \mu h T_1^1, & Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{2'}}) &= \mu h T_1^2, \\ Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}) &= \mu h T_2^1, & Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{2'}}) &= \mu h T_2^2. \end{aligned}$$

Como $\mu \neq 0$ e $h \neq 0$, tense que $T = 0$. Polo que efectivamente g é isométrico a unha extensión de Riemann deformada $g_{D,\Phi}$. Ademais, tense que

$$Q(h) = (-\text{Hes}_{\hat{h}}^D + 2\mu\hat{h}\rho_s^D)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}), \text{ con } i, j \in \{1, 2\},$$

polo que h é solución se e só se \hat{h} satisfai a ecuación (3.4). Isto proba a afirmación 1.

Supoñamos agora que λ é non constante. Tense que

$$\begin{aligned} Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{1'}}) &= \frac{1}{2} \mu \hat{h} (T_1^1 - T_2^2), \\ Q(h)(\partial_{x^1}, \partial_{x_{2'}}) &= \mu \hat{h} T_1^2, \quad \text{e} \quad Q(h)(\partial_{x^2}, \partial_{x_{1'}}) = \mu \hat{h} T_2^1. \end{aligned}$$

Posto que $Q(h) = 0$, T é un múltiplo da identidade, polo que existe $\mathfrak{t} \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $T = \mathfrak{t} \text{Id}$. Daquela,

$$\text{Coef}(Q(h)(\partial_{x^i}, \partial_{x^i}); x_{i'}) = -\mathfrak{t} \partial_{x^i} \hat{h} + \mu \hat{h} \partial_{x^i} \mathfrak{t}, \quad \text{con } i = 1, 2;$$

de onde obtemos $\mathfrak{t} = C \hat{h}^{1/\mu}$, para certa $C \neq 0$. En tal caso, tense que $\tau = 4\lambda = 6Ch^{\frac{1}{\mu}}$. Finalmente, obtemos que

$$Q(h)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = (-\text{Hes}_h^D + 2\mu \hat{h} \rho_s^D)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) - \mu \frac{C}{2} \hat{h}^{\frac{\mu+1}{\mu}} \Phi_{ij}, \quad \text{para } i, j \in \{1, 2\};$$

de onde obtemos a expresión de Φ . Isto conclúe a proba da afirmación 2, polo que o teorema queda demostrado. \square

O seguinte resultado non só constitúe un recíproco para as afirmacións 3 e 4 do teorema 3.18, senón que nos proporciona un método de construción para todos os posibles exemplos de variedades quasi-Einstein xeneralizadas isotrópicas autoduais (salvo isometría). Distinguímos dúas posibilidades: (M, g) é quasi-Einstein ($\lambda \in \mathbb{R}$) ou (M, g) é quasi-Einstein xeneralizada estrita (λ non-constante). Cabe destacar que o resultado é válido para o caso $\mu = -\frac{1}{2}$ que excluímos da nosa análise anterior pola razón dada na observación 3.9. A proba consiste nunha comprobación directa en coordenadas que se obtén a partir dos cálculos realizados para a proba do teorema 3.18.

Teorema 3.19. *Sexa (Σ, D) unha superficie afín.*

(1) *Sexa Φ un tensor de tipo $(0, 2)$ arbitrario. Se $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$ satisfai*

$$\text{Hes}_h^D - 2\mu \hat{h} \rho_s^D = 0 \quad \text{para algún } \mu \in \mathbb{R},$$

entón $(T^\Sigma, g_{D, \Phi}, \pi^* \hat{h}, \mu)$ é quasi-Einstein isotrópica autodual con $\lambda = 0$.*

(2) *Sexa $\hat{h} \in C^\infty(\Sigma)$ e sexa $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\Phi = -\frac{2}{\mu C} \hat{h}^{-\frac{\mu+1}{\mu}} (\text{Hes}_h^D - 2\mu \hat{h} \rho_s^D)$ e $T = C \hat{h}^{\frac{1}{\mu}} \text{Id}$ con $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entón $(T^*\Sigma, g_{D, \Phi, T, \text{Id}}, \pi^* \hat{h}, \mu)$ é unha variedade quasi-Einstein xeneralizada isotrópica autodual con $\lambda = \frac{3}{2} C h^{\frac{1}{\mu}}$.*

Observación 3.20. As variedades dadas no punto 1 do teorema anterior non son localmente conformemente chás en xeral. Se (Σ, D) non é proxectivamente chá, entón a extensión de Riemann deformada $(T^*\Sigma, g_{D, \Phi})$ non é localmente conformemente chá. Non obstante, mesmo cando (Σ, D) é proxectivamente chá, pode escollerse Φ tal que $(T^*\Sigma, g_{D, \Phi})$ non sexa localmente conformemente chá.

Por outra banda, como consecuencia do teorema 3.16, tense que toda variedade quasi-Einstein xeneralizada isotrópica hemi conformemente chá satisfai a relación $\lambda = \frac{\tau}{4}$. En [51] próbase que toda variedade de Walker anti-autodual ten curvatura escalar cero, polo que $\tau = 4\lambda \equiv 0$. Isto mostra que non existen exemplos de variedades quasi-Einstein xeneralizadas estritas que sexan anti-autoduais coa orientación inducida pola estrutura Walker. Así, as métricas do punto 2 do teorema 3.19 son autoduais, mais nunca anti-autoduais por ser $\lambda \neq 0$.

3.4 Exemplos

Na presente sección mostramos exemplos de variedades quasi-Einstein xeneralizadas hemi conformemente chás que non son localmente conformemente chás.

No primeiro apartado, mostramos exemplos de variedades quasi-Einstein xeneralizadas auto-duais obtidos a partir do teorema 3.19. No segundo apartado provemos un exemplo particular de variedade quasi-Einstein anti-autodual que polo tanto non encaixa na clasificación feita no teorema 3.18. Isto mostra unha vez máis que as condicións de autodualidade e anti-autodualidade para unha variedade de Walker teñen un comportamento ben diferente.

3.4.1 Exemplos obtidos a partir do teorema 3.19

O teorema 3.19 afirma que calquera superficie afín proporciona exemplos de variedades quasi-Einstein xeneralizadas mediante unha extensión de Riemann modificada. Ademais, se existe unha solución da ecuación quasi-Einstein afín (3.4) definida localmente na superficie, entón podemos construír exemplos quasi-Einstein. En tal caso, o problema redúcese ao estudo de solucións para a ecuación anterior. Non obstante, as variedades quasi-Einstein afíns serán analizadas na segunda parte desta memoria, polo que é conveniente tratar estes exemplos despois de estudar algunhas das propiedades destas estruturas.

Nos capítulos 4 e 5 veremos que a maior fonte de exemplos de estruturas quasi-Einstein afíns que coñecemos realízanse sobre as denominadas superficies localmente homoxéneas. En concreto, estudaremos todos os posibles exemplos localmente homoxéneos nos capítulos 5, 6 e 7, onde proveremos espazos de solucións explicitamente. Aínda que estes exemplos son especialmente apropiados para o estudo da ecuación quasi-Einstein afín posto que coñecemos a forma xeral das súas solucións (ver teoremas 5.7 e 5.16), tamén resulta interesante estudar outro tipo de exemplos que non sexan homoxéneos. Neste caso non coñecemos clasificacións nin familias concretas sobre as que estudar a ecuación quasi-Einstein afín, mais podemos dar exemplos particulares. En particular, o teorema de Cauchy-Kovaleskaya permite obter exemplos non-homoxéneos que serán tratados na subsección 4.4.2 do capítulo 4.

3.4.2 Superficies afíns dotadas cun tensor $(1, 1)$ nilpotente e paralelo

Neste apartado proporcionamos exemplos de variedades quasi-Einstein anti-autoduais que non entran dentro das hipóteses do teorema 3.18. Como xa dixemos, isto pon de manifesto que a orientación xoga un papel importante nas estruturas de Walker. Examinamos unha familia especial de variedades afíns (Σ, D) admitindo un tensor nilpotente e paralelo de tipo $(1, 1)$, isto é, $T \in \tau_1^1(M)$ tal que $DT = 0$ e $T^2 = 0$. Para obter máis información sobre este tipo de estruturas véxase [26]. O seguinte é un lema auxiliar que empregaremos na proba do teorema 3.22.

Lema 3.21. *Sexa (Σ, D) unha superficie afín con tensor de Ricci simétrico de rango un que admite un tensor de tipo $(1, 1)$ nilpotente e paralelo. Entón existen coordenadas (x^1, x^2) nas cales o único símbolo de Christoffel distinto de cero é Γ_{11}^2 cumprindo que $\partial_{x^2}\Gamma_{11}^2 \neq 0$ e o*

tensor T de tipo (1, 1) definido por $T(\partial_{x^1}) = \partial_{x^2}$ e $T(\partial_{x^2}) = 0$ é nilpotente e paralelo. Ademais, (Σ, D) ten tensor de Ricci recorrente con forma de recorrencia ω tal que $D\rho^D = \omega \otimes \rho^D$.

Proba. Sexa \tilde{T} un tensor de tipo (1, 1) non trivial, nilpotente e paralelo. Por ser $\tilde{T} \neq 0$ e nilpotente podemos escoller un sistema de coordenadas locais (x^1, x^2) tal que: $\tilde{T}\partial_{x^1} = \partial_{x^2}$ e $\tilde{T}\partial_{x^2} = 0$. Entón \tilde{T} é paralelo (i.e., $D\tilde{T} = 0$) se e só se se satisfán as seguintes relacións:

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Posto que $\ker \tilde{T} = \text{span}\{\partial_{x^2}\}$ é paralelo, ∂_{x^2} é un campo de vectores xeodésico. Tense que

$$\rho_s^D = (\partial_{x^2}\Gamma_{11}^2 - \partial_{x^1}\Gamma_{11}^1) dx^1 \circ dx^1, \quad \rho_a^D = 2 \partial_{x^2}\Gamma_{11}^1 dx^1 \wedge dx^2.$$

Como por hipótese ρ^D é simétrico, tense que $\partial_{x^2}\Gamma_{11}^1 = 0$. Nestas condicións o tensor de Ricci é recorrente de rango un. Entón, o traballo de Wong [104] proba que existen coordenadas locais (x^1, x^2) tal que o único símbolo de Christoffel distinto de cero é Γ_{11}^2 . Posto que ρ^D ten rango un, $\partial_{x^2}\Gamma_{11}^2 \neq 0$. Deste xeito $\rho^D = \partial_{x^2}\Gamma_{11}^2 dx^1 \otimes dx^1$ e $D\rho^D = \omega \otimes \rho^D$, onde a 1-forma de recorrencia ω vén dada por

$$\omega = \partial_{x^1}(\log \partial_{x^2}\Gamma_{11}^2) dx^1 + \partial_{x^2}(\log \partial_{x^2}\Gamma_{11}^2) dx^2. \quad (3.5)$$

O feito de que T definido da forma que se indica sexa nilpotente e paralelo é unha simple comprobación directa. \square

Nas condicións do lema anterior tense que a extensión de Riemann modificada $g_{D,0,T,T} = \iota T \circ \iota T + g_D$ nunca é autodual, pero si anti-autodual cando ω satisfai $\omega(\ker T) = 0$ (ver [25] para máis detalles). Estas superficies afíns son fortemente proxectivamente chás. Malia que as extensións de Riemann dunha conexión proxectivamente chá son localmente conformemente chás, tanto as extensións de Riemann deformadas $g_{D,\Phi}$ como as modificadas $g_{D,\Phi,T,S}$ non o son, en xeral, para tensores Φ , T e S arbitrarios. Por esta razón, o seguinte resultado mostra que existen exemplos de métricas de Walker anti-autoduais quasi-Einstein que nunca son autoduais, e polo tanto non entran dentro da caracterización local do teorema 3.18.

Teorema 3.22. *Sexa (Σ, D) unha variedade afín nas condicións do lema 3.21. Sexa $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $d\hat{f}(\ker T) = 0$ e $f = \pi^* \hat{f}$.*

1. *Se \hat{f} satisfai a ecuación (3.4), entón $(T^*\Sigma, g_{D,0,T,T}, f, \mu)$ é unha variedade quasi-Einstein isotrópica con $\lambda = 0$.*
2. *Se $\omega(\ker T) = 0$, entón existen coordenadas locais (x^1, x^2) en Σ tales que o único símbolo de Christoffel non nulo vén dado por $\Gamma_{11}^2 = u(x^1) + x^2 v(x^1)$. Se $\hat{f}(x^1)$ satisfai $\hat{f}''(x^1) - 2\mu \hat{f}(x^1)v(x^1) = 0$, entón $(T^*\Sigma, g_{D,0,T,T}, f, \mu)$ é unha variedade quasi-Einstein anti-autodual que non é localmente conformemente chá.*

Proba. A escolla de coordenadas locais (x^1, x^2) en Σ tales que $T\partial_{x^1} = \partial_{x^2}$, $T\partial_{x^2} = 0$ e o único símbolo de Christoffel distinto de cero é Γ_{11}^2 está garantida polo lema 3.21. Sexan

$(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ as coordenadas inducidas no espazo cotanxente $T^*\Sigma$. Sexa $\hat{f} \in C^\infty(\Sigma)$ satisfacendo $d\hat{f}(\ker T) = 0$. Entón:

$$(\text{Hes}_f - \mu f \rho)(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}) = (\text{Hes}_{\hat{f}}^D - 2\mu \hat{f} \rho_s^D)(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}),$$

sendo as outras compoñentes identicamente cero. Isto proba a afirmación 1.

Para probar a afirmación (2), supoñamos que $\omega(\ker T) = 0$. Usando a ecuación (3.5), tense que $\omega(\ker T) = 0$ se e só se $\partial_{x^2}^2 \Gamma_{11}^2 = 0$. Polo tanto, Γ_{11}^2 é unha función linear en x^2 , isto é, $\Gamma_{11}^2 = u(x^1) + x^2 v(x^1)$. Por último, unha conta directa mostra que a única compoñente non identicamente cero na ecuación (3.4) é

$$(\text{Hes}_{\hat{f}}^D - 2\mu \hat{f} \rho_s^D)(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}) = \hat{f}''(x^1) - 2\mu \hat{f}(x^1) v(x^1).$$

Isto mostra que as solucións da ecuación quasi-Einstein quedan determinadas pola EDO $\hat{f}''(x^1) - 2\mu \hat{f}(x^1) v(x^1) = 0$. □

Parte II

A ecuación quasi-Einstein en geometría afín

Motivados polo estudo dos case solitóns e das variedades quasi-Einstein hemi conformemente chás da primeira parte, o noso estudo dá un xiro cara a xeometría afín. Isto xorde pola relación que existe entre as ecuacións dos case solitóns e das variedades quasi-Einstein coas ecuacións dos solitóns de Ricci gradientes afíns e das superficies quasi-Einstein afíns, respectivamente. Os solitóns afíns foron investigados en [11]. Por este motivo, nesta segunda parte da memoria centramos o noso estudo na ecuación quasi-Einstein afín. Malia que a motivación orixinal desta ecuación se reduce ao caso de superficies, estudarémola, en principio, para dimensión arbitraria.

No capítulo 4 estudamos as propiedades xerais da ecuación quasi-Einstein afín, especialmente as referentes ao espazo de solucións da mesma. A nosa análise mostra que a ecuación presenta unhas propiedades moi desexables en termos de diferenciabilidade das súas solucións. O estudo de campos de Killing ten un lugar destacado no estudo desta ecuación. Ademais, pode garantirse a extensión de solucións locais a solucións globais se a variedade é simplemente conexas e os espazos de solucións locais teñen dimensión constante sobre esta. Por outra banda, tense que a ecuación quasi-Einstein afín permite caracterizar non só os espazos fortemente proxectivamente chans, senón tamén identificar as clases de equivalencia afín entre as superficies fortemente proxectivamente chás. Ademais ten un comportamento moi desexable coas transformacións que conservan as conexións cando estas son fortemente proxectivamente chás. Por todas estas razóns, a ecuación quasi-Einstein afín presenta un interese propio no contexto afín.

Unha vez establecidos estes resultados xerais sobre a ecuación quasi-Einstein afín, continuamos o noso estudo na procura de exemplos deste tipo de variedades. Posto que a motivación orixinal do problema era construír solucións sobre superficies afíns, na sección 4.4 empregamos o teorema de Cauchy-Kovalevskaya para construír tales exemplos. Unha familia que se presenta propicia para a construción de exemplos debido ao coñecemento que temos da súa xeometría é a de superficies localmente homoxéneas. Estas foron estudadas en diversas ocasións para conexións con e sen torsión [2, 71, 72]. A caracterización local de superficies localmente homoxéneas no caso xeral foi dado por Opozda en [90]. Neste traballo próbase que existen esencialmente tres posibles estruturas locais para este tipo de superficies relacionadas coa súa álgebra de campos de vectores afín Killing. Este resultado permite describir tales superficies en termos da existencia de coordenadas especiais para as cales os símbolos de Christoffel toman unha forma concreta. Isto permite definir os coñecidos como modelos tipo \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} que se corresponden coas tres posibles formas locais que pode tomar unha superficie localmente homoxénea. Os tipo \mathcal{C} redúcense esencialmente á esfera \mathbb{S}^2 . Os modelos tipo \mathcal{A} defínense en \mathbb{R}^2 a partir dunha conexión dada por símbolos de Christoffel constantes, mentres que os tipo \mathcal{B} están definidos en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e os seus símbolos de Christoffel son constantes divididas pola primeira coordenada.

No capítulo 5 estudamos a forma xeral das solucións da ecuación quasi-Einstein distinguindo entre os tres modelos e, a partir disto, proporcionamos a dimensión do espazo de solucións salvo equivalencia linear. O primeiro obxectivo do capítulo 6 consiste na clasificación linear para modelos tipo \mathcal{A} empregando a ecuación quasi-Einstein afín. Isto é posible dado que estes modelos son sempre fortemente proxectivamente chans, presentando unha clara diferenza cos modelos tipo \mathcal{B} que non o son, en xeral. Esta clasificación linear completa a iniciada en [14] e ten como novidade a consideración dos modelos chans. Paralelamente, estudamos o espazo de solucións para cada un dos modelos obtidos nesta clasificación. Seguidamente, no capítulo 7 estudamos os modelos tipo \mathcal{B} chans salvo equivalencia linear empregando novamente o feito de que ditos mo-

delos son fortemente proxectivamente chans. Porén, isto non pode facerse para todos os modelos tipo \mathcal{B} , polo que a seguinte parte do capítulo 7 límitase ao estudo de bases do espazo de solucións asociado a modelos tipo \mathcal{B} .

Rematamos esta segunda parte no capítulo 8, onde mostramos algunha aplicación máis da ecuación quasi-Einstein afín no contexto de superficies homoxéneas. En particular estudamos a completude afín Killing dos modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} e a completude xeodésica dos tipo \mathcal{A} . Concluimos o capítulo vendo que a ecuación quasi-Einstein afín permite construír exemplos de variedades Kähler quasi-Einstein en sinatura indefinida que, a diferenza do que acontece no caso riemanniano, non teñen por que ser localmente un produto de variedades.

Capítulo 4

A ecuación quasi-Einstein afín

Neste capítulo presentamos a ecuación quasi-Einstein afín que aparece de forma natural no estudo da ecuación quasi-Einstein (3.2) que vimos de estudar na primeira parte desta memoria. Esta ecuación non só presenta interese na construción de estruturas quasi-Einstein a partir de extensións de Riemann, senón que tamén é interesante por si mesma no contexto de variedades afíns como veremos ao longo deste capítulo.

Nunha estrutura afín podemos estudar dous niveis de equivalencia con significado xeométrico propio: equivalencia linear e equivalencia afín. A primeira delas considera estruturas equivalentes por difeomorfismos que preservan as conexións. Este concepto substitúe as isometría no contexto semi-riemanniano, polo que, como acontece nese caso, non distinguimos entre dúas estruturas cando son equivalentes neste sentido. A segunda equivalencia que xorde nas variedades afíns é a proxectiva. Este tipo de equivalencia está caracterizada a partir das xeodésicas non parametrizadas da variedade. Así, dúas estruturas afíns sobre a mesma variedade subxacente son proxectivamente equivalentes cando teñen as mesmas xeodésicas non parametrizadas. Ao longo deste capítulo veremos algunhas relacións entre estes tipos de equivalencia e a ecuación quasi-Einstein afín. Ademais, cando $\mu = -\frac{1}{n-1}$, onde n denota a dimensión da variedade en cuestión, a nosa ecuación presenta un comportamento moi particular con respecto á equivalencia proxectiva.

O contido deste capítulo recolle en detalle boa parte das investigacións de [17].

Debido a que o noso estudo segue a ser eminentemente local, novamente asumiremos que os resultados son locais, en xeral, e, do contrario, especificaremos o carácter global dos mesmos.

4.1 Introducción

Nesta sección introducimos a ecuación quasi-Einstein afín sobre a que basearemos o noso estudo no que resta de memoria. Por esta razón resulta conveniente introducir rigorosamente a definición desta ecuación en xeometría afín. Sexa (M, D) unha variedade afín. O *operador quasi-Einstein afín* \mathfrak{Q}_μ^D (ou simplemente \mathfrak{Q}) é un operador linear en derivadas parciais de segunda orde

$$\mathfrak{Q}_\mu^D(f) := \text{Hes}_f^D - \mu f \rho_s^D \quad \text{con } f \in C^\infty(M) \text{ e } \mu \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

onde Hes_f^D e ρ_s^D denotan o hessiano de f e a parte simétrica do tensor de Ricci asociados á conexión afín D , respectivamente. Cando non exista risco de confusión, suprimiremos o superíndice especificando a conexión e mais o subíndice co valor de μ . O noso obxectivo é estudar a ecuación definida en (3.4) e que equivale a $\mathfrak{Q}_{2\tilde{\mu}}^D(f) = 0$ con $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$. Por conveniencia, e posto que $\tilde{\mu}$ pode ser calquera número real, estudamos a ecuación equivalente $\mathfrak{Q}_\mu^D(f) = 0$, con $\mu = 2\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$\text{Hes}_f - \mu f \rho_s = 0. \quad (4.2)$$

Referímonos á ecuación anterior como *ecuación quasi-Einstein afín*. Posto que esta é homoxénea é claro que o cero sempre é solución e que para dúas solucións f e h tense que

$$\text{Hes}_{\alpha f + \beta h} - \mu\rho(\alpha f + \beta h) = \alpha(\text{Hes}_f + \mu\rho f) + \beta(\text{Hes}_h + \mu\rho h)$$

para todo α e β reais. Isto amosa que o espazo de solucións é un espazo vectorial real. Denotamos por $E_p(\mu, D)$ (ou simplemente E_p) o espazo linear de xermes de funcións diferenciables con base en $p \in M$ cumprindo a ecuación (4.2). É claro que se $\rho_s = 0$, entón $E_p(\mu, D) = E_p(0, D)$ para todo μ . Ademais, $E_p(0, D)$ é precisamente o espazo de xermes de solucións da ecuación dos *solitóns de Yamabe afíns* (para máis detalles, consultar [15]).

O operador Ω_μ^D da ecuación (4.1) e a ecuación quasi-Einstein afín asociada (4.2) teñen un interese xeométrico propio que veremos no que resta de memoria. Non obstante, esta ecuación aparece de forma natural no estudo da ecuación quasi-Einstein semi-riemanniana a través das extensións de Riemann como xa vimos nos capítulos 2 e 3 (ver a observación 2.15 e os teoremas 3.18 e 3.19).

4.2 Propiedades elementais da ecuación

Esta subsección está dedicada a estudar as propiedades do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín (4.2). Para comezar, presentamos un lema que mostra que esta ecuación se comporta ben coas transformacións afíns.

Lema 4.1. *Se (M, D) e (M, \tilde{D}) son dúas variedades afíns tales que existe un difeomorfismo (local) Φ entre elas conservando a conexión (i.e., $\Phi^*\tilde{D} = D$), entón $\Omega_\mu^{\tilde{D}}(f) = 0$ se e só se $\Omega_\mu^D(\Phi^*f) = 0$. Consecuentemente, se $p, q \in M$ e $\Phi(p) = q$, entón $E_p(\mu, D) = \Phi^*E_q(\mu, \tilde{D})$.*

Proba. A proba consiste en ver que tanto o tensor de Ricci como o hessiano son tensores intrínsecos, isto é, son invariantes por cambios de coordenadas afíns (i.e., por difeomorfismos afíns). Para ver isto comezamos probando que $\Phi^*R^{\tilde{D}} = R^D$. Empregando a definición de pullback, tense que

$$(\Phi^*\tilde{D})_X Y = (\Phi^{-1})_*(\tilde{D}_{\Phi_*X} \Phi_*Y)$$

ou, equivalentemente,

$$\Phi_*((\Phi^*\tilde{D})_X Y) = \tilde{D}_{\Phi_*X} \Phi_*Y.$$

Usando esta igualdade obtemos que

$$\tilde{D}_{\Phi_*X} \tilde{D}_{\Phi_*Y} \Phi_*Z = \tilde{D}_{\Phi_*X} \Phi_*((\Phi^*\tilde{D})_Y Z) = \Phi_*((\Phi^*\tilde{D})_X ((\Phi^*\tilde{D})_Y Z))$$

e que $\Phi_*[X, Y] = [\Phi_*X, \Phi_*Y]$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} (\Phi^*R^{\tilde{D}})(X, Y)Z &:= (\Phi^{-1})_*(R^{\tilde{D}}(\Phi_*X, \Phi_*Y)\Phi_*Z) \\ &= (\Phi^{-1})_*(\Phi_*((\Phi^*\tilde{D})_X (\Phi^*\tilde{D})_Y Z \\ &\quad - (\Phi^*\tilde{D})_Y (\Phi^*\tilde{D})_X Z - (\Phi^*\tilde{D})_{[X, Y]}Z)) \\ &= (R^{\Phi^*\tilde{D}})(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Como o tensor de Ricci se obtén por contracción do tensor de curvatura, tense a partir da definición que $\rho^{\Phi^* \bar{D}} = \Phi^* \rho^{\bar{D}}$. Por outra banda, o hessiano cumpre que $\text{Hes}_{\Phi^* f}^{\Phi^* D} = \Phi^*(\text{Hes}_f^D)$. En efecto, tense que

$$\begin{aligned} \text{Hes}_{\Phi^* f}^{\Phi^* D}(X, Y) &= X(Y(\Phi^* f)) - ((\Phi^* D)_X Y)(\Phi^* f) \\ &= \Phi_* X(df(\Phi_* Y)) - (\Phi_*((\Phi^* D)_X Y))(f) =: (\Phi^* \text{Hes}_f^D)(X, Y). \end{aligned}$$

Polo tanto obtemos

$$\Phi^*(\text{Hes}_f^D - \mu f \rho_s^D) = \text{Hes}_{\Phi^* f}^{\Phi^* D} - \mu(\Phi^* f) \rho_s^{\Phi^* D},$$

e así, $\mathfrak{Q}_\mu^{\bar{D}}(f) = 0$ se e só se $\mathfrak{Q}_\mu^D(\Phi^* f) = 0$, como queriamos ver. \square

No que segue establecemos algunhas propiedades relativas ás solucións da ecuación (4.2) en xeral e á súa relación con campos de Killing. Estes resultados supoñen un elemento central na nosa análise posterior e mostran o interese da ecuación desde o punto de vista do cálculo diferencial.

Teorema 4.2. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha variedade afín de dimensión m e $f \in E_p(\mu, D)$. Cúmpranse as seguintes afirmacións:*

- (1) $f \in C^\infty(M)$ e se \mathcal{M} é analítica real, entón f é analítica real.
- (2) Se X é un xerme dun vector afín Killing con base en p , entón $Xf \in E_p(\mu, D)$.
- (3) Se $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$, entón $f \equiv 0$ nunha veciñanza de p .
- (4) $\dim\{E_p(\mu, D)\} \leq m + 1$.

Proba. Probamos cada unha das afirmacións do teorema na orde na que se enuncian. Comezamos fixando coordenadas locais (x^1, \dots, x^m) e denotemos por \mathfrak{Q}_{ij} as compoñentes do operador quasi-Einstein (4.1).

Para probar (1), comezamos definindo

$$\mathfrak{D}_\mu = \text{tr}\{\mathfrak{Q}\} = \sum_{i=1}^m \mathfrak{Q}_{ii} = \sum_{i=1}^m \partial_{x^i x^i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Gamma_{ii}^j \partial_{x^j} - \mu \sum_{i=1}^m \rho_{ii}.$$

O operador \mathfrak{D}_μ é un operador diferencial parcial elíptico de segunda orde. Sexa $f \in C^2(M)$ satisfacendo $\mathfrak{Q}(f) = 0$. Tense que $\mathfrak{D}_\mu f = 0$, polo que a teoría de operadores elípticos mostra que $f \in C^\infty(M)$. Supoñamos adicionalmente que a estrutura subxacente é analítica real. Daquela tense que \mathfrak{D}_μ é analítica hipoeelíptica e daquela $\mathfrak{D}_\mu f = 0$ mostra que f é analítica real (ver, por exemplo, [45, 99]).

Para probar (2) consideramos o fluxo 1-paramétrico Φ_t^X definido nunha veciñanza de p asociado ao vector afín Killing X . Tense que Φ_t^X conserva a conexión, é dicir, $(\phi_t^X)^* D = D$. Entón

tense que $(\phi_t^X)^*\rho = \rho$ e que $(\phi_t^X)^*(\text{Hes}_f) = \text{Hes}_{(\phi_t^X)^*f}$, para todo t . Empregando isto obtemos que $(\Phi_t^X)^*f \in E_p(\mu, D)$ para todo t e que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^X)^*(\text{Hes}_f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{Hes}_{(\Phi_t^X)^*f} = \text{Hes}_{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ (\Phi_t^X)} = \text{Hes}_{(Xf)},$$

por ser X o xerador infinitesimal de Φ_t^X . Tendo en conta o anterior, tense que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^X)^*(\text{Hes}_f - \mu f \rho) = \text{Hes}_{(Xf)} - \mu(Xf)\rho.$$

Deste xeito, próbase que efectivamente $Xf \in E_p(\mu, D)$, como queríamos ver.

Vexamos agora que se $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$, entón $f \equiv 0$ nunha veciñanza de p . Posto que *a priori* unha variedade afín non conta cunha distancia, imos considerar a distancia inducida pola carta local escollida. Isto non é realmente unha distancia, pero o resultado é o mesmo independentemente da carta escollida. Aínda que non é difícil ver que o argumento que empregamos a continuación pode xeneralizarse a dimensión arbitraria, restrinxímonos a dimensión $m = 2$ por simplicidade. Sexan (x^1, x^2) coordenadas locais centradas en p . Sexa B_ε unha bóla de raio ε arredor da orixe. Supoñamos que $f \in E_p(\mu, D)$ satisfai $f(0) = 0$ e que $df(0) = 0$. Vexamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f \equiv 0$ en B_ε . Comecemos tomando T e ε números reais tales que

$$\frac{1}{3} < T, \quad |\Gamma_{ij}^k(x)| \leq T, \quad |\mu \rho_{s,ij}(x)| \leq T \text{ para todo } x \in B_\varepsilon, \quad \text{e} \quad \varepsilon < \frac{1}{12T}. \quad (4.3)$$

Consideremos a norma $\|\cdot\|_1$ no espazo de funcións diferenciables definida por

$$\|f\|_1 := \sup_{x \in B_\varepsilon} \{|\partial_{x^1} f(x)|, |\partial_{x^2} f(x)|, |f(x)|\}.$$

Sexa $\vec{x} = (a, b) \in B_\varepsilon$. Empregando (4.3) tense que:

$$\begin{aligned} |\partial_t \partial_{x^1} f|(t\vec{x}) &= |a \partial_{x^1 x^1}^2 f + b \partial_{x^1 x^2}^2 f|(t\vec{x}) \leq |a \partial_{x^1 x^1}^2 f|(t\vec{x}) + |b \partial_{x^1 x^2}^2 f|(t\vec{x}) \\ &= |a| \cdot |\Gamma_{11}^1 \partial_{x^1} f + \Gamma_{11}^2 \partial_{x^2} f + f \mu \rho_{sD,11}|(t\vec{x}) \\ &\quad + |b| \cdot |\Gamma_{12}^1 \partial_{x^1} f + \Gamma_{12}^2 \partial_{x^2} f + f \mu \rho_{sD,12}|(t\vec{x}) \\ &\leq 3(|a| + |b|)T \|f\|_1 \leq 6\varepsilon T \|f\|_1. \end{aligned}$$

Dado que $\partial_{x^1} f(0) = 0$, o Teorema Fundamental do Cálculo mostra que:

$$|\partial_{x^1} f(\vec{x})| \leq \int_{t=0}^1 |\partial_t \partial_{x^1} f|(t\vec{x}) dt \leq \int_{t=0}^1 6\varepsilon T \|f\|_1 dt = 6\varepsilon T \|f\|_1.$$

Analogamente, $|\partial_{x^2} f(\vec{x})| \leq 6\varepsilon T \|f\|_1$. Por outra banda, como $\frac{1}{3} < T$ e $f(0) = 0$, tense que

$$|f(\vec{x})| \leq \int_{t=0}^1 |\partial_t f|(t\vec{x}) dt \leq \int_{t=0}^1 (|a| + |b|) \|f\|_1 dt \leq 2\varepsilon \|f\|_1 \leq 6\varepsilon T \|f\|_1.$$

Así, $\|f\|_1 \leq 6\varepsilon T \|f\|_1$. Isto, combinado coa condición $6\varepsilon T < \frac{1}{2}$ de (4.3) implica que $\|f\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f\|_1$. Entón $\|f\|_1 = 0$ en B_ε probando a afirmación (3).

Como consecuencia de (3), tense que $f \in E_p(\mu, D)$ queda determinado por $f(p)$ e $df(p)$. Sexa $\{f_1, \dots, f_{m+2}\} \subset E_p(\mu, D)$, entón os vectores

$$(f_i(p), \partial_{x^1} f_i(p), \dots, \partial_{x^m} f_i(p)) \text{ con } i \in \{1, \dots, m+2\}$$

forman un conxunto linearmente dependente en \mathbb{R}^{m+1} . Entón, polo menos unha das f_i depende linearmente das outras, mostrando que ningunha base de $E_p(\mu, D)$ pode ter máis de $m+1$ elementos. Isto proba (4). \square

O seguinte resultado afirma que se o espazo de solucións ten dimensión constante sobre unha variedade simplemente conexas, entón as solucións están globalmente definidas. A proba consiste en adaptar o argumento usado en [85] para probar a extensión de campos de vectores Killing. Por simplicidade, dado un aberto $U \subseteq M$, denotamos por $E(U, \mu, D)$ (ou simplemente $E(U)$) o espazo de solucións globalmente definidas en U . Se U é conexo, a homoxeneidade da ecuación (4.2) mostra que $E(U)$ é de novo un espazo vectorial real.

Teorema 4.3. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha variedade afín de dimensión m . Se \mathcal{M} é simplemente conexas e $\dim\{E_p(\mu, D)\}$ é constante en M , entón cada solución localmente definida estende de forma única a un elemento de $E(M, \mu, D)$.*

4.3 Equivalencia proxectiva

Neste apartado definimos o concepto de equivalencia proxectiva para despois estudarmos a relación entre a ecuación quasi-Einstein afín e a equivalencia proxectiva. Veremos que esta relación adquire especial relevancia cando $\mu = \mu_m = -\frac{1}{m-1}$.

En termos xeométricos, dúas conexións sobre a mesma variedade subxacente son proxectivamente equivalentes se teñen as mesmas xeodésicas parametrizadas. Non obstante, na práctica esta propiedade non é a máis funcional, polo que definimos este concepto da seguinte forma equivalente. Para ver unha discusión máis detallada do significado xeométrico da equivalencia proxectiva pode consultarse [86].

Definición 4.4. Dicimos que D é *proxectivamente equivalente* a \tilde{D} se existe unha 1-forma ω tal que $D_X Y = \tilde{D}_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ademais, se ω é pechada (i.e., $d\omega = 0$), dicimos que D é *fortemente proxectivamente equivalente* a \tilde{D} .

A partir desta definición probamos que as xeodésicas non parametrizadas de dúas conexións fortemente proxectivamente equivalentes coinciden. Para facer isto, introducimos primeiramente a definición de xeodésica.

Definición 4.5. Sexa (M, D) unha variedade afín. Dicimos que unha curva parametrizada $\gamma(t)$ é *xeodésica* para D se $D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. En coordenadas, isto equivale a que $\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0$ para todo $k = 1, \dots, \dim M$. Dicimos que $\gamma(t)$ é *xeodésica non parametrizada* se existe unha reparametrización de γ que sexa xeodésica.

O seguinte lema caracteriza as xeodésicas non parametrizadas.

Lema 4.6. *Sexa γ unha curva en (M, D) . Entón, γ é xeodésica non parametrizada se e só se $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \lambda\dot{\gamma}$ para algunha función λ .*

Proba. Primeiro mostramos que se γ é xeodésica non parametrizada, entón $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \lambda\dot{\gamma}$. Supoñamos que φ é un difeomorfismo tal que $\gamma \circ \varphi$ é xeodésica, entón

$$\begin{aligned} 0 &= D_{(\gamma \circ \varphi)}(\dot{\gamma} \circ \varphi) = D_{(\gamma \circ \varphi)}\dot{\gamma}(\varphi)\varphi' = \varphi''\dot{\gamma}(\varphi) + \varphi' D_{(\gamma \circ \varphi)}\dot{\gamma}(\varphi) \\ &= \varphi''\dot{\gamma}(\varphi) + (\varphi')^2 D_{\dot{\gamma}(\varphi)}\dot{\gamma}(\varphi). \end{aligned}$$

Polo tanto, $D_{\dot{\gamma}(\varphi)}\dot{\gamma}(\varphi) = \frac{\varphi''}{(\varphi')^2}\dot{\gamma}(\varphi)$ ou, simplemente, $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \frac{\varphi''}{(\varphi')^2}\dot{\gamma}$.

Por outra banda, se γ é unha curva tal que $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \lambda\dot{\gamma}$, tense que

$$D_{(\gamma \circ \varphi)}(\dot{\gamma} \circ \varphi) = \varphi''\dot{\gamma}(\varphi) + (\varphi')^2 D_{\dot{\gamma}(\varphi)}\dot{\gamma}(\varphi) = (\varphi'' + (\varphi')^2 \lambda(\varphi))\dot{\gamma}(\varphi).$$

Entón, tense que φ cumpre que $\varphi'' + (\varphi')^2 \lambda = 0$. Polo tanto $\gamma \circ \varphi$ é xeodésica non parametrizada como queríamos ver. \square

Empregando este lema podemos probar o seguinte resultado que mostra que a equivalencia proxectiva dunha conexión queda completamente determinada polas súas xeodésicas non parametrizadas.

Lema 4.7. *Se D e \tilde{D} son dúas conexións afíns en M , entón son proxectivamente equivalentes se e só se teñen as mesmas xeodésicas non parametrizadas.*

Proba. Supoñamos primeiro que D e \tilde{D} son proxectivamente equivalentes. Entón existe unha 1-forma ω tal que $\tilde{D}_X Y = D_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X$. Sexa γ unha xeodésica non parametrizada para D . Se γ non é xeodésica, reparametrizámola para que o sexa. Entón, $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \tilde{D}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + 2\omega(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$, polo que o lema 4.6 mostra que γ é xeodésica non parametrizada para \tilde{D} . Reciprocamente, sexa γ xeodésica non parametrizada simultaneamente para D e \tilde{D} . Entón o lema 4.6 mostra que existe a_γ tal que $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} - \tilde{D}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = a_\gamma\dot{\gamma}$. Posto que $D - \tilde{D}$ define un tensor de tipo $(1, 2)$ simétrico, tomamos $T(X, Y) = D_X Y - \tilde{D}_X Y$ obtendo $T(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = a_\gamma\dot{\gamma}$. Definimos a 1-forma ω como $T(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \omega(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ ou equivalentemente, $\omega(\dot{\gamma}) = a_\gamma$. Sexa $p \in M$, e sexan X e Y campos de vectores definidos nunha veciñanza de p . Sexan γ_1 e γ_2 xeodésicas definidas por $\dot{\gamma}_1|_p = X|_p + Y|_p$, $\dot{\gamma}_2|_p = X|_p - Y|_p$ e $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Tense que

$$\begin{aligned} T(X, Y)|_p &= T(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)|_p = (a_{\gamma_1}\dot{\gamma}_1 - a_{\gamma_2}\dot{\gamma}_2)|_p \\ &= \{(a_{\gamma_1} - a_{\gamma_2})X + (a_{\gamma_1} + a_{\gamma_2})Y\}|_p = \{\omega(Y)X + \omega(X)Y\}|_p. \end{aligned}$$

Posto que T é un tensor, a igualdade é certa para calquera campos de vectores, completando así a proba do lema. \square

A relación “ser (fortemente) proyectivamente equivalente” é de equivalencia no conxunto de conexións afíns. Se D e \tilde{D} pertencen á mesma clase de equivalencia dicimos que son (*fortemente*) *proyectivamente equivalentes*. Ademais, se D é (fortemente) proyectivamente equivalente a unha conexión chá, dicimos que D é (*fortemente*) *proyectivamente chá*. Unha conexión D é proyectivamente chá se e só se para toda xeodésica non parametrizada de D existe unha carta local de forma que a imaxe pola carta sexa un segmento de recta no aberto euclidiano correspondente. As variedades afíns fortemente proyectivamente chás están caracterizadas no seguinte lema. A proba deste resultado pode atoparse en [53] empregando coordenadas locais. Para máis información sobre equivalencia proyectiva pode consultarse [53, 86, 97].

Lema 4.8. *Sexa (M, D) unha variedade afín con Ricci simétrico. Entón,*

1. *Se $\dim M = 2$, D é fortemente proyectivamente chá se e só se $D\rho$ é totalmente simétrico (i.e., $(D_X\rho)(Y, Z) = (D_Y\rho)(X, Z) = (D_X\rho)(Z, Y)$).*
2. *Se $\dim M = m > 2$, D é fortemente proyectivamente chá se e só se se anula identicamente o tensor W definido pola relación*

$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{m-1}(\rho(X, Z)Y - \rho(Y, Z)X).$$

Observación 4.9. Por definición, dúas estruturas afíns sobre M son fortemente proyectivamente equivalentes se son proyectivamente equivalentes e a 1-forma ω establecendo a equivalencia é pechada, é dicir, $d\omega = 0$. Posto que o noso estudo é local, o lema de Poincaré permite afirmar que toda forma pechada é localmente exacta, polo que existe $g \in C^\infty(M)$, tal que $\omega = dg$. Por suposto, se consideramos unha 1-forma $\omega = dg$ para algún $g \in C^\infty(M)$, entón $d\omega = 0$. En base a isto, se $\mathcal{M} = (M, D)$ é unha variedade afín resulta apropiado definir a seguinte perturbación de D mediante $g \in C^\infty(M)$ como ${}^gD_X Y := D_X Y + X(g)Y + Y(g)X$ dando lugar á estrutura afín ${}^g\mathcal{M}(M, {}^gD)$. Posto que $X(g) = dg(X)$, isto equivale a dicir que dg prové unha equivalencia proyectiva de \mathcal{M} a ${}^g\mathcal{M}$. Ademais, posto que $d(dg) = 0$, a equivalencia é forte. No sucesivo empregamos esta nomenclatura para establecer unha equivalencia proyectiva forte cando queiramos especificar cal é a función que a determina.

É un feito coñecido que dúas conexións proyectivamente equivalentes son fortemente equivalentes se e só se as compoñentes anti-simétricas dos tensores de Ricci asociados coinciden. En particular, se os tensores de Ricci son simétricos, entón ambas as dúas conexións son fortemente proyectivamente equivalentes.

Lema 4.10. *Sexa M unha variedade de dimensión m e sexan D e \tilde{D} dúas conexións proyectivamente equivalentes sobre M . Entón, D e \tilde{D} son fortemente proyectivamente equivalentes se e só se $\rho_a^D = \rho_a^{\tilde{D}}$.*

Proba. Sexan D e \tilde{D} conexións proyectivamente equivalentes. Sexan (x^1, \dots, x^m) coordenadas locais centradas en $p \in M$ e sexan $\Gamma_{ij}{}^k$ e $\tilde{\Gamma}_{ij}{}^k$ os símbolos de Christoffel asociados ás conexións D e \tilde{D} , respectivamente. Posto que D é libre de torsión podemos supoñer que $\Gamma_{ij}{}^k(p) = 0$. Por

ser conexións proxectivamente equivalentes tense que existe unha 1-forma $\omega = \omega_i dx^i$ tal que $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \omega_i \delta_{jk} + \omega_j \delta_{ik}$. A partir desta igualdade e posto que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, tense que

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^{\tilde{D}}|_p &= (\partial_{x^\beta}(\tilde{\Gamma}_{ij}^\beta) + \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\beta - \partial_{x^i}(\tilde{\Gamma}_{\beta j}^\beta) - \tilde{\Gamma}_{\beta j}^\alpha \tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\beta)|_p \\ &= \partial_{x^\beta}(\Gamma_{ij}^\beta + \omega_i \delta_{j\beta} + \omega_j \delta_{i\beta})|_p + (\omega_i \delta_{j\alpha} + \omega_j \delta_{i\alpha})(\omega_\beta \delta_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \delta_{\beta\beta})|_p \\ &\quad - \partial_{x^i}(\Gamma_{\beta j}^\beta + \omega_\beta \delta_{j\beta} + \omega_j \delta_{\beta\beta})|_p - (\omega_\beta \delta_{j\alpha} + \omega_j \delta_{\alpha\beta})(\omega_i \delta_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \delta_{i\beta})|_p \\ &= (\rho_{ij}^D + \partial_{x^j} \omega_i - m \partial_{x^i} \omega_j + (m-1) \omega_i \omega_j)|_p, \end{aligned} \quad (4.4)$$

de onde obtemos $(\rho_{ij}^{\tilde{D}} - \rho_{ij}^D)|_p = (\partial_{x^j} \omega_i - m \partial_{x^i} \omega_j + (m-1) \omega_i \omega_j)|_p$. Se definimos o tensor $T = \rho_a^{\tilde{D}} - \rho_a^D$, tense que

$$\begin{aligned} T_{ij}|_p &= \frac{1}{2} [\rho_{ij}^{\tilde{D}} - \rho_{ji}^{\tilde{D}} - \rho_{ij}^D + \rho_{ji}^D]|_p = \frac{(m+1)}{2} [\partial_{x^j} \omega_i - \partial_{x^i} \omega_j]|_p \\ &= (m+1) d\omega(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})|_p. \end{aligned}$$

$T = (m+1)d\omega$ é tensorial, polo que se cumpre a igualdade en p independentemente das coordenadas escolleitas. Posto que p é arbitrario, tense que $T = 0$ se e só se $d\omega = 0$. Isto proba o resultado. \square

Lema 4.11. *Sexa M unha variedade de dimensión m e sexan D e \tilde{D} dúas conexións fortemente proxectivamente equivalentes sobre M . Entón, $\tilde{D} = {}^g D$ para algunha función g definida localmente en M e cúmprese que*

$$\rho^{\tilde{D}} = \rho^D + (m+1)(dg \otimes dg - \text{Hes}_g^D).$$

Ademais, son equivalentes:

- (1) $\rho_s^{\tilde{D}} = \rho_s^D$.
- (2) $\text{Hes}_g^D - dg \otimes dg = 0$.
- (3) $e^{-g} \in E_p(0, D)$.

Observación 4.12. Dúas conexións proxectivamente equivalentes dinse *Liouville proxectivamente equivalentes* se os seus tensores de Ricci coinciden (ver, por exemplo, [74, 76, 86]). O lema anterior mostra cando dúas conexións proxectivamente equivalentes son Liouville proxectivamente equivalentes.

Proba. Dado que a equivalencia é forte, existe unha 1-forma ω pechada (i.e., $d\omega = 0$) que prové a equivalencia proxectiva de D a \tilde{D} . Entón, polo lema de Poincaré tense que localmente existe $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $\omega = dg$ e así, $\tilde{D} = {}^g D$. Posto que $\rho_a^{\tilde{D}} - \rho_a^D$ e supoñendo que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, empregamos a igualdade (4.4) para ver que

$$\begin{aligned} (\rho_s^{\tilde{D}}, ij - \rho_s^D, ij)|_p &= (\rho_{ij}^{\tilde{D}} - \rho_{ij}^D)|_p = (m-1)(\partial_{x^i} g \partial_{x^j} g - \partial_{x^i x^j}^2 g)|_p \\ &= (m-1)\{(dg \otimes dg - \text{Hes}_g^D)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})\}|_p. \end{aligned}$$

Posto que obtemos de novo unha igualdade tensorial, o mesmo argumento de arriba mostra que

$$\rho^{\tilde{D}} = \rho^D + (m-1)(dg \otimes dg - \text{Hes}_g^D).$$

Resta probar que os enunciados (1), (2) e (3) son equivalentes. A equivalencia dos dous primeiros séguese a partir da igualdade que vimos de probar. Finalmente, probamos que (2) e (3) son equivalentes. Por unha banda, tense que

$$\text{Hes}_{e^{-g}}^D = e^{-g} (dg \otimes dg - \text{Hes}_g^D)$$

(os detalles deste cálculo poden verse na subsección 3.1.1). Dado que $e^{-g} \in E_p(0, D)$ equivale a que $\text{Hes}_{e^{-g}}^D = 0$, a igualdade anterior proba a equivalencia entre (2) e (3), establecendo o resultado. \square

O lema 4.1 mostra como se relacionan as solucións de dúas estruturas afinmente equivalentes. Resulta interesante considerar a mesma cuestión entre dúas conexións fortemente proectivamente equivalentes. O lema anterior proporciona información interesante a este respecto. Por exemplo, se as conexións D e gD fosen chás, entón $e^{-g} \in E_p(0, D) = E_p(\mu, D)$ e $e^g \in E_p(0, {}^gD) = E_p(\mu, {}^gD)$. Posto que $\mathbb{1}$ é solución en ambos os conxuntos, cabe preguntarse se a aplicación $f \mapsto e^{-g}f$ con $f \in E_p(\mu, D)$ define un isomorfismo entre os espazos de funcións anteriores. O seguinte teorema resolve esta cuestión de forma máis xeral e proporciona unha ferramenta de vital importancia na nosa análise. Como consecuencia tense que a dimensión de $E_p(-1, D)$ é un invariante proectivo forte e que $\dim\{E_p(\mu, D)\}$ para μ arbitrario é un invariante proectivo de Liouville.

Teorema 4.13. *Sexan M unha variedade de dimensión m , $\mu_m = -\frac{1}{m-1}$ e D unha conexión afín sobre M . Dada $g \in C^\infty(M)$, consideramos a conexión $\tilde{D} = {}^gD$ fortemente proectivamente equivalente a D . Entón*

1. *A aplicación $f \mapsto e^g f$ é un isomorfismo de $E_p(\mu_m, D)$ a $E_p(\mu_m, \tilde{D})$.*
2. *Se $\rho^D = \rho^{\tilde{D}}$ (i.e., a equivalencia é de Liouville), entón a aplicación $f \mapsto e^g f$ é un isomorfismo de $E_p(\mu, D)$ a $E_p(\mu, \tilde{D})$ para calquera μ .*

Proba. Sexa $\tilde{D} = {}^gD$. Imos ver que a aplicación $f \mapsto fe^g$ é un isomorfismo nos supostos expostos en cada unha das afirmacións (1) e (2). Para isto comezamos considerando a ecuación $\tilde{\Omega}_\mu^{\tilde{D}}(fe^g) = 0$, isto é,

$$\text{Hes}_{(fe^g)}^{\tilde{D}} - \mu \rho_s^{\tilde{D}}(fe^g) = 0. \quad (4.5)$$

Por unha banda, tense que

$$\begin{aligned} \text{Hes}_{(fe^g)}^{\tilde{D}}(X, Y) &= (\tilde{D}_X d(fe^g))(X) = XY(f) - d(fe^g)(\tilde{D}_X Y) \\ &= XY(fe^g) - d(fe^g)(D_X Y + dg(X)Y + dg(Y)X) \\ &= \text{Hes}_{(fe^g)}^D(X, Y) - 2(dg \circ d(fe^g))(X, Y) \\ &= \{\text{Hes}_{(fe^g)}^D - 2e^g \{(dg \circ df) + f(dg \circ dg)\}\}(X, Y). \end{aligned}$$

Traballando sobre o primeiro sumando desta última expresión, tense que

$$\begin{aligned} \text{Hes}_{(fe^g)}^D &= (D_X d(fe^g))(Y) = (D_X e^g(df + fdg))(Y) \\ &= e^g \{X(g)(df(Y) + fdg(Y)) \\ &\quad + \text{Hes}_f^D(X, Y) + X(f)dg(Y) + f \text{Hes}_g^D(X, Y)\} \\ &= \{e^g \{2(dg \circ df) + f((dg \circ dg) + \text{Hes}_g^D) + \text{Hes}_f^D\}(X, Y). \end{aligned}$$

Combinando o anterior obtense

$$\begin{aligned} \text{Hes}_{(fe^g)}^{\tilde{D}} &= e^g \{2(dg \circ df) + f((dg \circ dg) + \text{Hes}_g^D) \\ &\quad + \text{Hes}_f^D - 2\{(dg \circ df) + f(dg \circ dg)\}\} \\ &= e^g \{f(\text{Hes}_g^D - (dg \circ dg)) + \text{Hes}_f^D\}. \end{aligned}$$

Por outra banda, o lema 4.11 mostra que $\rho_s^{\tilde{D}} = \rho_s^D + (m-1)(dg \otimes dg - \text{Hes}_g^D)$. Empregando a información anterior, tense que a ecuación (4.5) é equivalente a

$$e^g \{(\text{Hes}_g^D - dg \otimes dg)(1 + (m-1)\mu)f + \text{Hes}_f^D - \mu f \rho_s^D\} = 0.$$

Polo tanto, se $(\text{Hes}_g^D - dg \otimes dg)(1 + (m-1)\mu) = 0$, tense que $\mathfrak{Q}_\mu^D(f) = 0$ se e só se $\mathfrak{Q}_\mu^{\tilde{D}}(fe^g) = 0$. Isto establece a afirmación (1). Para ver que tamén se cumpre a afirmación (2), basta considerar a equivalencia establecida entre (1) e (2) no lema 4.11. \square

Observación 4.14. Como vimos no lema 4.10 se D e \tilde{D} son fortemente proxectivamente equivalentes, entón os tensores de Ricci anti-simétricos coinciden, é dicir, $\rho_a^{\tilde{D}} = \rho_a^D$. Porén, se D e \tilde{D} son tan só proxectivamente equivalentes, entón os tensores de Ricci anti-simétricos poden ser distintos e non se obteñen as conclusións do teorema 4.13. Consideremos, por exemplo, que D é a conexión euclidiana en \mathbb{R}^2 e que $\omega = x^2 dx^1$ define unha equivalencia proxectiva de D a \tilde{D} . Entón un cálculo directo mostra que $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$ e $\dim\{E_p(-1, \tilde{D})\} = 0$. Ademais, a pesar de que o cambio proxectivo conserva a estrutura xeodésica salvo parametrización, $\rho_{a, \tilde{D}} \neq 0$ e consecuentemente, en tal caso o tensor de Ricci anti-simétrico tampouco se conserva por equivalencia proxectiva. Así o teorema 4.13 non se cumpre se debilitamos a hipótese de equivalencia proxectiva forte a equivalencia proxectiva.

O anteriormente exposto mostra que o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = \mu_m := -\frac{1}{m-1}$ ten un comportamento distinguido, permitindo establecer un isomorfismo entre os espazos de solucións de conexións fortemente proxectivamente equivalentes. No que segue veremos que tal comportamento é aínda máis singular cando a $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m+1$. É dicir, cando a dimensión do espazo de solucións é maximal. De feito, o seguinte resultado mostra que as únicas conexións cumprindo esta propiedade son as fortemente proxectivamente chás. Ademais, se $\mu \neq \mu_m$, a dimensión só pode ser maximal se a variedade é fortemente proxectivamente chá e Ricci chá.

Teorema 4.15. *Sexa \mathcal{M} unha variedade afín de dimensión m e $\mu_m := -\frac{1}{m-1}$.*

- (1) \mathcal{M} é fortemente proectivamente chá se e só se $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m + 1$.
- (2) Se $\dim\{E_p(\mu, D)\} = m + 1$ para algún $\mu \neq \mu_m$, entón \mathcal{M} é fortemente proectivamente chá e Ricci chá.
- (3) Se $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = m + 1$ existe unha base $\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$ de $E_p(\mu_m, D)$ tal que $\phi_0(p) \neq 0$ e $\phi_i(p) = 0$ para $i > 0$. Entón $\vec{z} = (z^1, \dots, z^m)$ con $z^i := \phi_i/\phi_0$ é un sistema de coordenadas definido nunha veciñanza de p tal que as xeodésicas non parametrizadas de \mathcal{M} son liñas rectas.

Proba. Para probar (1), supoñamos primeiro que \mathcal{M} é fortemente proectivamente chá, isto é, D é fortemente proectivamente equivalente a unha conexión chá \tilde{D} . En tal caso existen coordenadas locais arredor de $p \in M$ tal que os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ son identicamente cero. Daquela,

$$E_p(\mu_m, \tilde{D}) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, \dots, x^m\}.$$

Por tanto, polo teorema 4.13 tense que $\dim\{E_p(\mu_m, D)\} = \dim\{E_p(\mu_m, \tilde{D})\} = m + 1$. Reciprocamente, supoñamos que $\dim\{E_p(\mu, D)\} = m + 1$ para algún μ . Definimos o homomorfismo de espazos vectoriais $\Theta : E_p(\mu, D) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ de xeito que

$$\Theta(\phi) := (\phi, \partial_{x^1}\phi, \dots, \partial_{x^m}\phi)(p) \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ para cada } \phi \in E_p(\mu, D).$$

$\Theta(\phi) = 0$ se e só se $\phi \equiv 0$, polo que $\ker \Theta = 0$ e Θ é inxectivo. Posto que a dimensión dos espazos vectoriais coincide, tense que Θ é un isomorfismo. Sexan e_i os elementos da base canónica de \mathbb{R}^{m+1} e sexa $\phi_i = \Theta^{-1}(e_i)$ a base correspondente para $E_p(\mu, D)$. Posto que $\Theta(\phi_i) = e_i$, tense que

$$\begin{array}{ccccccc} \phi_0(p) = 1, & \partial_{x^1}\phi_0(p) = 0, & \partial_{x^2}\phi_0(p) = 0, & \dots, & \partial_{x^m}\phi_0(p) = 0, \\ \phi_1(p) = 0, & \partial_{x^1}\phi_1(p) = 1, & \partial_{x^2}\phi_1(p) = 0, & \dots, & \partial_{x^m}\phi_1(p) = 0, \\ \phi_2(p) = 0, & \partial_{x^1}\phi_2(p) = 0, & \partial_{x^2}\phi_2(p) = 1, & \dots, & \partial_{x^m}\phi_2(p) = 0, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \phi_m(p) = 0, & \partial_{x^1}\phi_m(p) = 0, & \partial_{x^2}\phi_m(p) = 0, & \dots, & \partial_{x^m}\phi_m(p) = 1. \end{array}$$

Se consideramos as coordenadas $z^1 := \phi_1/\phi_0, \dots, z^m := \phi_m/\phi_0$, tense que

$$\begin{array}{ccccccc} z^1(p) = 0, & \partial_{x^1}z^1(p) = 1, & \partial_{x^2}z^1(p) = 0, & \dots, & \partial_{x^m}z^1(p) = 0, \\ z^2(p) = 0, & \partial_{x^1}z^2(p) = 0, & \partial_{x^2}z^2(p) = 1, & \dots, & \partial_{x^m}z^2(p) = 0, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ z^m(p) = 0, & \partial_{x^1}z^m(p) = 0, & \partial_{x^2}z^m(p) = 0, & \dots, & \partial_{x^m}z^m(p) = 1. \end{array}$$

Daquela $\vec{z}(p) = 0$ e $d\vec{z}(p) = \text{Id}$. Daquela, esta asignación define un cambio de coordenadas admisible centrado en p . Se tomamos $g = \log(\phi_0)$, tense que

$$E_p(\mu, D) = e^g \text{span}\{\mathbb{1}, z^1, \dots, z^m\}.$$

Polo tanto,

$$\mathfrak{Q}_{\mu, D}(e^g) = \mathfrak{Q}_{\mu, D}(\phi_0) = 0 \text{ e } \mathfrak{Q}_{\mu, D}(z^k e^g) = \mathfrak{Q}_{\mu, D}(\phi_k) = 0.$$

Empregando isto, cúmprese trivialmente a relación

$$e^{-g} \{z^k \mathfrak{Q}_{\mu, D}(e^g) - \mathfrak{Q}_{\mu, D}(z^k e^g)\} = 0.$$

Fixando i, j e k , obtense da relación anterior que

$$\begin{aligned} e^{-g} \{ \partial_{z^i} \partial_{z^j} (z^k e^g) - z^k \partial_{z^i} \partial_{z^j} (e^g) \} &= \delta_j^k \partial_{z^i} g + \delta_i^k \partial_{z^j} g, \\ -e^{-g} \Gamma_{ij}^\ell \{ \partial_{z^\ell} (z^k e^g) - z^k \partial_{z^\ell} (e^g) \} &= -\Gamma_{ij}^k, \\ e^{-g} \{ \mu \rho_{s, D}(z^k e^g) - z^k \mu \rho_{s, D} e^g \} &= 0, \\ 0 = e^g \{ \mathfrak{Q}_{\mu, D}(z^k e^g) - z^k \mathfrak{Q}_{\mu, D}(e^g) \}_{ij} &= \delta_j^k \partial_{z^i} g + \delta_i^k \partial_{z^j} g - \Gamma_{ij}^k. \end{aligned}$$

Sexan $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ os símbolos de Christoffel dunha conexión chá \tilde{D} . Tense que $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k + \delta_j^k \partial_{z^i} g + \delta_i^k \partial_{z^j} g$ de forma que dg prové unha equivalencia proxectiva forte de \tilde{D} a D . Polo tanto, D é fortemente proxectivamente chá. Posto que isto é válido para calquera μ , en particular é certo para $\mu = \mu_m$, probando así a afirmación (1). Supoñamos agora que $\mu \neq \mu_m$. Posto que $e^g \in E_p(\mu, D)$, tense que $\text{Hes}_{e^g} = \mu \rho_s e^g$. Por outra banda, como \tilde{D} é chá, tense que $E_p(\mu, \tilde{D}) = E_p(\mu_m, \tilde{D})$. Entón o teorema 4.13 afirma que $\tilde{f} \rightarrow e^g \tilde{f}$ é un isomorfismo de $E_p(\mu_m, \tilde{D})$ a $E_p(\mu_m, D)$. Consecuentemente $e^g \in E_p(\mu_m, D)$, logo $\text{Hes}_g = \mu_m \rho_s g$ e como $\text{Hes}_g = \mu \rho_s g$ con $\mu \neq \mu_m$, necesariamente $\rho_s = 0$. Ademais, posto que \tilde{D} e D son fortemente proxectivamente equivalentes e \tilde{D} é chá, o lema 4.10 asegura que $\rho_a^{\tilde{D}} = \rho_a^D = 0$. Polo tanto $\rho_s^D = \rho_a^D = 0$ e consecuentemente D é Ricci chá. Isto proba a afirmación (2).

A afirmación (3) simplemente resume o procedemento que nos permite escoller coordenadas na forma que detallamos no desenvolvemento da proba das anteriores afirmacións. \square

Teorema 4.16. *Sexa \mathcal{M} unha variedade afín de dimensión m e $\mu_m := -\frac{1}{m-1}$.*

- (1) *Se \mathcal{M} é fortemente proxectivamente equivalente a unha conexión \tilde{D} con $\rho_s^{\tilde{D}} = 0$, entón $E_p(\mu_m, D) \neq 0$.*
- (2) *Se existe $f \in E_p(\mu_m, D)$ tal que $f(p) \neq 0$, entón \mathcal{M} é fortemente proxectivamente equivalente a unha conexión \tilde{D} con $\rho_s^{\tilde{D}} = 0$ nunha veciñanza de p .*

Proba. Supoñamos que g prové unha equivalencia proxectiva forte de D a $\tilde{D} = {}^g D$ con $\rho_{s, \tilde{D}} = 0$. Empregamos o lema 4.11 para ver que $\text{Hes}_g - dg \otimes dg = \frac{1}{m-1} \rho_s^D$. Tomando $f = e^{-g}$, tense que

$$\text{Hes}_f = e^{-g} \{ -\text{Hes}_g + dg \otimes dg \} = -\frac{1}{m-1} f \rho_s^D,$$

polo que $f \in E_p(\mu_m, D)$ é non trivial. Isto proba a afirmación (1). Reciprocamente, se $f \in E_p(\mu_m, D)$ satisfai que $f(p) \neq 0$, polo que podemos asumir que $f(p) > 0$, basta tomar $g = -\log(f)$ e revertendo o argumento queda establecida a afirmación (2), probando así o teorema. \square

4.3.1 Equivalencia proectiva en superficies afíns quasi-Einstein

Cando reducimos o noso estudo ao caso de superficies aínda podemos dicir máis sobre o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín, especialmente cando μ toma o valor destacado $\mu_2 = -1$. A xeometría dunha superficie afín queda determinada polo tensor de Ricci, polo que o estudo da ecuación quasi-Einstein afín nesta situación é substancialmente máis sinxela.

Teorema 4.17. *Se \mathcal{M} é unha superficie afín, entón $\dim\{E_p(-1, D)\} \neq 2$. Ademais,*

(1) *\mathcal{M} é fortemente proectivamente chá se e só se $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$.*

(2) *Se \mathcal{M} é fortemente proectivamente chá e $\text{rang } \rho^D = 2$ tense que:*

(a) $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 0$ con $\mu \notin \{-1, 0\}$.

(b) $\dim\{E_p(0, D)\} = 1$.

(3) *Se $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 3$ con $\mu \neq -1$, entón \mathcal{M} é chá.*

Proba. Comezamos probando que $\dim\{E_p(-1, D)\} \neq 2$ por redución ao absurdo. Supoñemos pois que $\dim\{E_p(-1, D)\} = 2$. Distinguimos dous casos: $f(p) \neq 0$ e $f(p) = 0$. Primeiro supoñemos que $f(p) > 0$ para algunha $f \in E_p(-1, D)$ (o caso $f(p) > 0$ razónase analogamente). Tomando g tal que $f = e^g$ nunha veciñanza de p , consideramos a equivalencia proectiva forte que prové $-dg$ de D a $\tilde{D} = -^g D$. O teorema 4.13 mostra entón que $\mathbb{1} = e^{-g} f \in E_p(-1, \tilde{D})$ e polo tanto, $\rho_s^{\tilde{D}} = 0$. Posto que ademais, a equivalencia proectiva é forte, o lema 4.10, mostra que $\rho_a^D = \rho_a^{\tilde{D}}$. Se $\rho_a^D = 0$, entón \tilde{D} é Ricci chá e posto que $m = 2$, \tilde{D} é chá. Consecuentemente, o teorema 4.15 mostra que $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$, contradicindo que $\dim\{E_p(-1, D)\} = 2$. Supoñamos, por tanto, que $\rho_a^{\tilde{D}} = \rho_a^D$ é distinto de cero e que $\rho_s^{\tilde{D}} = 0$. Posto que en tal caso $\rho_a^{\tilde{D}}$ define unha 2-forma non nula, tense que (M, \tilde{D}) ten tensor de curvatura recorrente e é localmente da forma descrita no traballo de Wong [104, teorema 4.2]. A partir disto, Derdzinski mostrou en [48, teorema 6.1] que en tal caso as coordenadas locais poden escollerse de forma que os únicos símbolos de Christoffel distintos de cero sexan $\Gamma_{11}^1 = -\partial_{x^1}\phi$ e $\Gamma_{22}^2 = \partial_{x^2}\phi$. Posto que $E_p(-1, \tilde{D}) = \ker(\text{Hes}^{\tilde{D}})$, a suposición inicial mostra que $\ker(\text{Hes}^{\tilde{D}})$ é 2-dimensional. Como consecuencia do teorema 4.2 tense que existe $\tilde{f} \in \ker(\text{Hes}^{\tilde{D}})$ tal que $d\tilde{f}(p) \neq 0$. Entón

$$\begin{aligned} 0 &= (\text{Hes}_{\tilde{f}}^{\tilde{D}})_{11} = \partial_{x^1 x^1}^2 \tilde{f} + \partial_{x^1} \phi \partial_{x^1} \tilde{f}, & 0 &= (\text{Hes}_{\tilde{f}}^{\tilde{D}})_{22} = \partial_{x^2 x^2}^2 \tilde{f} - \partial_{x^2} \phi \partial_{x^2} \tilde{f}, \\ 0 &= (\text{Hes}_{\tilde{f}}^{\tilde{D}})_{12} = \partial_{x^1 x^2}^2 \tilde{f}. \end{aligned}$$

Da relación $\partial_{x^1 x^2}^2 \tilde{f} = 0$ tense que $\tilde{f}(x^1, x^2) = a(x^1) + b(x^2)$. Derivando as outras relacións con respecto a x^2 e x^1 , respectivamente, tense que

$$\partial_{x^1 x^2}^2 \phi a'(x^1) = 0 \quad \text{e} \quad -\partial_{x^1 x^2}^2 \phi b'(x^2) = 0.$$

Posto que $d\tilde{f}(p) \neq 0$ tense que $(a'(0), b'(0)) \neq (0, 0)$ nunha veciñanza de p . Entón $\partial_{x^1 x^2}^2 \phi$ é identicamente cero nunha veciñanza de p . Isto mostra que \tilde{D} é chá, polo que $\rho_a^{\tilde{D}} = 0$, contrario á nosa suposición.

Por outra banda, supoñamos que $f(p) = 0$ para todo $f \in E_p(-1, D)$ e supoñamos tamén que $\dim\{E_p(-1, D)\} = 2$. Sexa $\{f_1, f_2\}$ unha base de $E_p(-1, D)$. Posto que $f_i(p) = 0$, o teorema 4.2 mostra que $df_1(p)$ e $df_2(p)$ son linearmente independentes. Entón existen coordenadas arredor de p tales que $E_p(-1, D) = \text{span}\{x^1, x^2\}$. Se $q \neq p$, entón $\dim\{E_q(-1, D)\} \geq 2$ e existe un elemento distinto de cero $f_q \in E_q(-1, D)$ tal que $f_q(q) \neq 0$. O argumento dado para o caso anterior mostra entón que $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$. Así, D é fortemente proxectivamente chá nunha veciñanza de q polo que o lema 4.8 mostra que ρ^D e $D\rho^D$ son totalmente simétricos nunha veciñanza de q . Por un argumento de continuidade tense que o mesmo é certo arredor de p . Empregando de novo o lema 4.8 tense que D é fortemente proxectivamente chá nunha veciñanza de p e así $\dim\{E_p(-1, D)\} = 3$, de novo contrario á nosa suposición inicial. Polo tanto, isto mostra que $\dim\{E_p(-1, D)\} \neq 2$, como queríamos ver.

Resta probar a afirmación (2), xa que as afirmacións (1) e (3) son consecuencia directa do teorema 4.15 con $m = 2$ e $\mu_2 = -1$, e do feito de que unha superficie é chá se e só se é Ricci chá. Sexa \mathcal{M} fortemente proxectivamente chá con $\text{rang } \rho^D = 2$. Posto que no que resta de proba só imos traballar cunha única conexión, omitimos o superíndice D para simplificar a notación. O lema 4.8 mostra que $\rho = \rho_s$ e que $D\rho$ é totalmente simétrico. Se derivamos covariantemente a ecuación quasi-Einstein afín (4.2) con respecto a ∂_{x^i} obtemos

$$(\text{Hes}_f)_{jk;i} = \mu\{(\partial_{x^i} f)\rho_{jk} + f\rho_{jk;i}\},$$

onde empregamos a notación $T_{jk;i} := (D_{\partial_{x^i}} T)(\partial_{x^j}, \partial_{x^k})$. Empregando a expresión anterior e a resultante de intercambiar os índices i e j , tense que

$$\begin{aligned} R_{ijk}{}^l(\partial_{x^l} f) &= (\text{Hes}_f)_{ik;j} - (\text{Hes}_f)_{jk;i} \\ &= \mu\{(\partial_{x^j} f)\rho_{ik} + f\rho_{ik;j}\} - \mu\{(\partial_{x^i} f)\rho_{jk} + f\rho_{jk;i}\}. \end{aligned}$$

Posto que $D\rho$ é totalmente simétrico, obtemos empregando a expresión anterior que:

$$R_{ijk}{}^l(\partial_{x^l} f) = \mu\{(\partial_{x^j} f)\rho_{ik} - (\partial_{x^i} f)\rho_{jk}\}.$$

Dado que M é 2-dimensional o único termo da curvatura é

$$R_{12} : \partial_{x^i} \rightarrow \rho_{2i}\partial_{x^1} - \rho_{1i}\partial_{x^2}.$$

Por tanto, $(R_{12}\partial_{x^i})f = -\mu(R_{12}\partial_{x^i})f$, de onde obtemos o sistema de ecuacións lineares homoxéneo $(\mu + 1)(R_{12}\partial_{x^i})f = 0$. Dado que $\text{rang } \rho = 2$, tense que $\text{rang } R_{12} = 2$. Se $\mu \neq -1, 0$, entón as únicas solucións son $\partial_{x^i} f = 0$ polo que f é constante. Isto mostra que $\dim\{E_p(\mu, D)\} = 0$ para todo $\mu \neq 0, -1$. Ademais, se $\mu = 0$ tense que $R_{12}\partial_{x^i} f = 0$ e f é constante, mostrando que $\dim\{E_p(0, D)\} = 1$ e concluíndo así a proba do teorema. \square

Observación 4.18. A afirmación (3) do teorema 4.17 pon de manifesto o carácter tan diferenciado que ten o espazo de solucións asociado ás variedades fortemente proxectivamente chás con $\mu = \mu_m$. Así, se $\mathcal{M} = (M, D)$ é unha estrutura afín, sempre é certo que $\dim E(\mu, D) = m + 1$ implica que \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá independentemente do valor de μ . Non obstante, se $\mu \neq \mu_m$ a estrutura é ademais Ricci chá. Como no caso de superficies ($m = 2$), ser Ricci chá é

equivalente a ser chá, é claro que non existen exemplos non chans para os que $\dim E(\mu, D) = 3$ con $\mu \neq -1$. Pola contra, existen moitos exemplos nos que $\dim E(-1, D) = 3$ e \mathcal{M} non é chá (ver, por exemplo, sección 6.4, onde se proporcionan exemplos de superficies afíns homoxéneas con tensor de Ricci simétrico e de rango dous).

4.3.2 Ecuación quasi-Einstein afín e equivalencia afín

O seguinte teorema mostra que a información que recolle o espazo de solucións asociado á ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ é suficiente para caracterizar a conexión cando esta é fortemente proxectivamente chá. Por este motivo, constitúe un dos resultados máis importantes desta segunda parte do traballo e proporciona unha ferramenta útil para a nosa análise posterior dos capítulos 5, 6, 7 e 8. Por simplicidade, de agora en diante denotamos $\mathcal{Q}(D) = E(\mu_m, D)$, sendo $\mu_m = -\frac{1}{m-1}$.

Teorema 4.19. *Sexan $\mathcal{M}_i := (M, D_i)$ con $i = 1, 2$ dúas estruturas afíns fortemente proxectivamente chás na mesma variedade simplemente conexas M e sexa Ξ un difeomorfismo en M .*

(1) *Se $\mathcal{Q}(D_1) = \mathcal{Q}(D_2)$, entón $D_1 = D_2$.*

(2) *Se $\Xi^* \mathcal{Q}(D_1) = \mathcal{Q}(D_2)$, entón $\Xi^* D_1 = D_2$.*

Proba. Posto que \mathcal{M}_i é fortemente proxectivamente chá, tense que $\dim\{\mathcal{Q}(\mathcal{M}_i)\} = m + 1$ polo teorema 4.15. Comezamos probando a afirmación (1) baixo a hipótese suplementaria de que D_1 é chá. Sexa $p \in M$ e sexan (x^1, \dots, x^m) coordenadas nunha veciñanza de p tales que os símbolos de Christoffel de D_1 son todos cero. En tal caso, $\rho^{D_1} = 0$ e consecuentemente $\text{Hes}_f^{D_1} + \frac{1}{m-1} \rho_s^{D_1} f = \partial_{x^i} \partial_{x^j} f$. Entón $\{\mathbb{1}, x^1, \dots, x^m\} \subset \mathcal{Q}(D_1)$. Dado que $\mathbb{1} \in \mathcal{Q}(D_1) = \mathcal{Q}(D_2)$, tense que $0 = \text{Hes}_1^{D_2} + \rho_s^{D_2} = \rho_s^{D_2}$. Posto que $x^\ell \in \mathcal{Q}(D_1) = \mathcal{Q}(D_2)$ e $\rho_s^{D_2} = 0$,

$$0 = \text{Hes}_{x^\ell}^{D_2} = (\partial_{x^i} \partial_{x^j} x^\ell + {}^2\Gamma_{ij}^k \partial_{x^k} x^\ell) dx^i \otimes dx^j = {}^2\Gamma_{ij}^\ell dx^i \otimes dx^j.$$

para calquera ℓ . Isto mostra que ${}^2\Gamma = 0$ e así $D_1 = D_2$ arredor de p .

Supoñamos agora que \mathcal{M}_1 é fortemente proxectivamente chá, non necesariamente chá. Sexa g tal que $\tilde{D}_1 := {}^{-g}D_1$ é chá. Supoñamos que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{Q}(\mathcal{M}_2)$ e tomemos $\tilde{D}_2 := {}^{-g}D_2$. Polo teorema 4.13, tense que

$$\mathcal{Q}(M, \tilde{D}_2) = e^{-g} \mathcal{Q}(M, D_2) = e^{-g} \mathcal{Q}(M, D_1) = \mathcal{Q}(M, \tilde{D}_1).$$

Posto que \tilde{D}_1 é chá, empregamos o resultado probado no parágrafo anterior, téndose que $\tilde{D}_2 = \tilde{D}_1$. Entón $D_2 = {}^g\tilde{D}_2 = {}^g\tilde{D}_1 = D_1$. Isto proba a afirmación (1). Finalmente, o lema 4.1 asegura que $\Xi^* \mathcal{Q}(D) = \mathcal{Q}(\Xi^* D)$, polo que a afirmación (2) é consecuencia directa da afirmación (1). \square

Observación 4.20. O anterior resultado constitúe un recíproco para o lema 4.1 e mostra a importancia da ecuación quasi-Einstein afín (4.2) con $\mu = -\mu_m$ no contexto de variedades fortemente proxectivamente chás. A hipótese de ser fortemente proxectivamente chá non pode relaxarse, en tanto en canto é tamén esencial para o teorema 4.15 no que se mostra que a dimensión do espazo de solucións é maximal se e só se a variedade cumpre esa propiedade xeométrica. En certo

modo, o feito de que o espazo de solucións teña dimensión máxima permítelle codificar toda a información da conexión.

A utilidade deste resultado será exemplificado nos capítulos posteriores, onde resulta de grande interese para a clasificación linear das superficies localmente homoxéneas localmente proxectivamente chás (ver observación 5.6).

Unha primeira consecuencia do teorema anterior é que dada unha variedade afín chá, podemos atopar explicitamente o cambio de coordenadas (afín) que a transforma no espazo euclidiano correspondente a partir dunha base de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín.

Teorema 4.21. *Sexan $\mathcal{M} = (M, D)$ unha variedade afín chá de dimensión m e $\{\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_m\}$ unha base de $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$. Sexa $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicación definida por $\Phi(p) := (\phi_1(p), \dots, \phi_m(p))$ con $p \in M$. Entón $\det(d\Phi) \neq 0$ e $\Phi^*D_0 = D$, onde D_0 denota a conexión euclidiana en \mathbb{R}^m .*

Proba. Supoñamos que D é chá. Entón $\rho = 0$ e $\text{Hes}_{\mathbb{1}}^D = 0$. Polo tanto, temos que $\mathbb{1} \in \mathcal{Q}(D)$. Sexa $\{\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_m\}$ unha base de $\mathcal{Q}(D)$ e sexa Φ a aplicación definida no enunciado do teorema. Supoñamos que existe un punto $p \in M$ tal que $\det\{d\Phi(p)\} = 0$. Daquela existe unha relación de dependencia non trivial tal que $a_1 d\phi_1(p) + \dots + a_m d\phi_m(p) = 0$. Sexa

$$\phi := a_0 \mathbb{1} + a_1 \phi_1 + \dots + a_m \phi_m \text{ con } a_0 := -a_1 \phi_1(p) - \dots - a_m \phi_m(p).$$

Posto que $\phi(p) = 0$ e $d\phi(p) = 0$, o teorema 4.2 mostra que $\phi \equiv 0$. Isto contradí o feito de que $\{\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_m\}$ é unha base de $\mathcal{Q}(D)$. Entón $\det(d\Phi) \neq 0$ en todo punto e Φ define un difeomorfismo local de M a \mathbb{R}^m . Sexan $x^1 := \phi^1, \dots, x^m := \phi^m$ as coordenadas locais asociadas a este difeomorfismo nunha veciñanza simplemente conexas de p onde estea definido. Por construción, tense que $\mathcal{Q}(D) = \Phi^* \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, \dots, x^m\} = \Phi^* \mathcal{Q}(D_0)$, onde D_0 denota a conexión euclidiana en \mathbb{R}^m . Entón o teorema 4.19 mostra que $D = \Phi^*(D_0)$ \square

4.4 Exemplos

A continuación presentamos varias familias de exemplos onde estudamos a ecuación quasi-Einstein afín. Distinguimos entre exemplos homoxéneos, que se estudan de forma ampliada nos capítulos 5, 6 e 7, e exemplos non homoxéneos, que se obtemos a partir do teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

4.4.1 Exemplos homoxéneos

Nesta sección presentamos exemplos de variedades quasi-Einstein sobre superficies afíns localmente homoxéneas. Este último concepto será introducido e estudado pormenorizadamente no capítulo 5, para nos capítulos 6 e 7 fornecer os espazos de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín en moitas destas estruturas de forma explícita. Por este motivo, os exemplos que aquí se presentan son meramente ilustrativos e pretenden dar unha idea de como obter estruturas quasi-Einstein autoduais a partir da construción do teorema 3.19.

Exemplo 4.22. Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ unha superficie afín tal que nas coordenadas canónicas de \mathbb{R}^2 os símbolos de Christoffel quedan determinados por $\Gamma_{12}^1 = 1$, $\Gamma_{22}^1 = c$, $\Gamma_{22}^2 = 2$ e $\Gamma_{ij}^k = 0$ noutro caso. Entón, unha conta directa mostra que $\rho = dx^2 \otimes dx^2$ e que $\{e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, (c(x^2)^2 + 2x^1)e^{x^2}\}$ é un conxunto de solucións linearmente independente para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Entón, necesariamente $E(-1, D) = \text{span}\{e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, (c(x^2)^2 + 2x^1)e^{x^2}\}$, xa que polo teorema 4.2-(4) tense que $\dim E(-1, D) \leq 3$. Daquela, o teorema 4.17 afirma entón que D é fortemente proxectivamente chá. Por outra banda, empregando a construción do teorema 3.19 obtemos que $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D,\Phi}, \pi^*f, -\frac{1}{2})$ é unha estrutura quasi-Einstein para calquera $f \in E(-1, D)$ e calquera tensor Φ de tipo $(0, 2)$ definido en \mathbb{R}^2 . Ademais, se $\Phi = 0$ tense que $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D,\Phi})$ é localmente conformemente chá por ser \mathcal{M} fortemente proxectivamente chá. Para Φ arbitrario isto non é certo en xeral. Por exemplo, para $\Phi = dx^1 \otimes dx^1$ obtemos a métrica

$$g_{D,\Phi}(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'}) = \begin{pmatrix} 1 & -2x_{1'} & 1 & 0 \\ -2x_{1'} & -2(cx_{1'} + 2x_{2'}) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é autodual, mais non localmente conformemente chá.

Exemplo 4.23. Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ unha superficie afín tal que nas coordenadas canónicas de \mathbb{R}^2 os símbolos de Christoffel quedan determinados por $\Gamma_{22}^2 = 1$ e $\Gamma_{ij}^k = 0$ noutro caso. De novo, un cálculo en coordenadas mostra que $\rho = 0$ e que $\{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$ forma un conxunto de solucións linearmente independente para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Entón, $E(-1, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$. Posto que é unha superficie con $\rho = 0$ tense que \mathcal{M} é chá. Empregando de novo o teorema 3.19 obtemos que $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D,\Phi}, \pi^*f, -\frac{1}{2})$ é unha estrutura quasi-Einstein para calquera $f \in E(-1, D)$ e calquera tensor Φ definido en \mathbb{R}^2 . De novo, se $\Phi = 0$ tense que $(T^*\mathbb{R}^2, g_{D,\Phi})$ é localmente conformemente chá, mais mesmo sendo \mathcal{M} chá, para Φ arbitrario isto volve non ser certo en xeral. Por exemplo, para $\Phi = e^{2x^2} dx^1 \otimes dx^1$ obtemos a métrica

$$g_{D,\Phi}(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'}) = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2x_{2'} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é autodual, mais non é localmente conformemente chá.

Posto que o espazo de xermes de solucións ten dimensión máxima en cada punto p e \mathcal{M} é simplemente conexas e analítica real, tense que cada solución local estende a unha única función globalmente definida en \mathbb{R}^2 en virtude do teorema 4.3. A condición de ser simplemente conexo é esencial. Consideremos o espazo cociente que se obtén ao identificar os puntos de \mathbb{R}^2 mediante a relación $(x^1, x^2) \sim (y^1, y^2)$ se e só se $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$. Isto dá lugar a un cilindro infinito. Denotemos por $\mathcal{N} = (\mathbb{R}^2 / \sim, \tilde{D})$ a estrutura resultante, sendo \tilde{D} a conexión definida polos mesmos símbolos de Christoffel nas coordenadas inducidas pola identificación. Este espazo é conexo mais non é simplemente conexo. Localmente é claro que $\dim E_p(-1, \tilde{D}) = 3$ para todo $p \in \mathbb{R}^2 / \sim$, mais a función e^{x^2} que antes formaba parte de $E(\mathbb{R}^2, -1, D)$ non pasa ao cociente. Posto que toda

solución de $E(\mathbb{R}^2/\sim, -1, \tilde{D})$ ten que estender a unha única función en $E(\mathbb{R}^2, -1, D)$, non pode haber outra solución que non sexa combinación linear das funcións $\mathbb{1}$ e x^1 definidas sobre \mathbb{R}^2/\sim , polo que $\dim E(\mathbb{R}^2/\sim, -1, \tilde{D}) = 2$. Isto pon de manifesto que no teorema 4.17, o feito de que $\dim E_p(-1, D) \neq 2$ para unha superficie afín (M, D) só se dá a nivel local.

4.4.2 Exemplos non homoxéneos

Nesta sección mostramos algúns exemplos quasi-Einstein que se realizan sobre superficies afíns non localmente homoxéneas. Comezamos introducindo o seguinte resultado auxiliar. A proba do mesmo redúcese a unha comprobación directa. Empregamos a notación $\phi_i := \partial_{x^i} \phi$, $\phi_{ij} := \partial_{x^j} \phi_i$ e $\phi_{ijk} := \partial_{x^k} \phi_{ij}$.

Lema 4.24. *Sexa \mathcal{O} un aberto simplemente conexo de \mathbb{R}^2 . Sexa $\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$ e sexa $\mathcal{M}_\phi = (\mathcal{O}, D^\phi)$ onde D^ϕ é a conexión afín en \mathcal{O} con $\Gamma_{ii}^i = \phi_{ii}/\phi_i$ e $\Gamma_{ij}^k = 0$. Entón $\phi \in E(\mu, D^\phi)$ se e só se ϕ satisfai a ecuación en derivadas parciais non-linear:*

$$0 = \mu\phi \left(\frac{\phi_{122}}{\phi_2} + \frac{\phi_{112}}{\phi_1} \right) + \phi_{12} \left(2 - \mu\phi \left(\frac{\phi_{22}}{\phi_2^2} + \frac{\phi_{11}}{\phi_1^2} \right) \right). \quad (4.6)$$

No que segue, empregamos o teorema de Cauchy-Kovalevskaya (ver, por exemplo, [54]) para construír solucións para a ecuación (4.6) e dese xeito mostrar que o lema 4.24 non é trivial. Fixemos un punto $p \in \mathbb{R}^2$. Sexa $c = \phi(p)$, $c_i = \phi_i(p)$, $c_{ij} = \phi_{ij}(p)$ e $c_{ijk} = \phi_{ijk}(p)$. Sexa $\vec{c} := \mathcal{J}_k(\phi)(p)$ o k -jet de ϕ en p . Por exemplo

$$\mathcal{J}_3 = \{ \vec{c} = (c, c_1, c_2, c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{111}, c_{112}, c_{122}, c_{222}) \} \subset \mathbb{R}^{10}.$$

Sexa $\tilde{\mathcal{J}}_k$ o subconxunto de \mathcal{J}_k onde $c \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ e onde as relacións que se obteñen derivando a ecuación (4.6) se satisfán. Por exemplo, $\tilde{\mathcal{J}}_2$ é un subconxunto aberto e denso en \mathbb{R}^6 con oito compoñentes conexas por camiños obtidas ao eliminar 3 hiperplanos. Se fixamos un elemento $\xi_2 \in \tilde{\mathcal{J}}_2$, entón a relación da ecuación (4.6) é linear na terceira derivada de ϕ e polo tanto a proxección natural $\tilde{\mathcal{J}}_3 \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}_2$ é un fibrado tanxente 3-dimensional analítico real. Se fixamos un elemento $\xi_3 \in \tilde{\mathcal{J}}_3$, hai dúas relacións linearmente independentes nos 4-jets de ϕ que se obteñen ao derivar a ecuación (4.6) e a proxección natural $\tilde{\mathcal{J}}_4 \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}_3$ é novamente un fibrado tanxente 3-dimensional analítico real. De forma análoga, vemos que $\tilde{\mathcal{J}}_k$ é unha variedade analítica real de dimensión $3k$. Se asumimos que o tensor de Ricci é non-dexenerado. Sexan ρ_{ij} as compoñentes de ρ_s^D , sexan ρ^{ij} as compoñentes da matriz inversa e sexan $\rho_{ij;k}$ as compoñentes das derivadas covariantes do tensor de Ricci simétrico. Definimos o invariante escalar \mathcal{E} de tal xeometría como

$$\mathcal{E} := \rho^{ia} \rho^{jb} \rho^{kc} \rho_{ij;k} \rho_{ab;c}.$$

Teorema 4.25.

1. Dado $\xi \in \tilde{\mathcal{J}}_k$, existe un xerme dunha función ϕ con $\mathcal{J}_k(\phi) = \xi$ resolvendo a ecuación (4.6).
2. Se $k \geq 3$, existe un conxunto aberto denso \mathcal{O}_k en $\tilde{\mathcal{J}}_k$ tal que se $\mathcal{J}_k(\phi) \in \mathcal{O}_k$, entón o tensor de Ricci non é simétrico.

3. Sexa $\mu \neq -1$. Se $k \geq 5$, existe un conxunto aberto denso \mathcal{O}_k en $\tilde{\mathcal{J}}_k$ tal que $J_k(\phi) \in \mathcal{O}_k$, entón ρ_s^D é non dexenerado, $d\mathcal{E} \neq 0$ e a xeometría non é homoxénea.

Proba. Empregamos o teorema de Cauchy-Kovalevskaya clásico. Supoñamos que temos unha relación no 3-jets de ϕ que é linear unha vez que o 2-jets teña sido fixada e teña a forma:

$$0 = \alpha_{111}(\mathcal{J}_2(\phi))\phi_{111} + \alpha_{112}(\mathcal{J}_2(\phi))\phi_{112} + \alpha_{122}(\mathcal{J}_2(\phi))\phi_{122} + \alpha_{222}(\mathcal{J}_2(\phi))\phi_{222} + \alpha(\mathcal{J}_2(\phi)). \quad (4.7)$$

Asumamos que as funcións coeficiente son analíticas reais nalgún conxunto aberto \mathcal{J}_2 . Supoñamos que $\alpha_{111} \neq 0$. Entón dados datos iniciais para o problema de Cauchy $f_0(x^2)$, $f_1(x^2)$ e $f_2(x^2)$, existe unha única solución analítica real para a ecuación (4.7) con $\partial_{x^1}^i \partial_{x^2}^j \phi(0, x^2) = f_i(x^2)$ para $i = 0, 1, 2$. Se expandimos ϕ en serie de Taylor, as derivadas $\partial_{x^1}^i \partial_{x^2}^j \phi(0, 0)$ poden ser especificadas arbitrariamente para $i \leq 2$ e os coeficientes das series de Taylor restantes quedan entón determinados pola ecuación (4.7). Reinterpretando isto na linguaxe que introducimos, isto significa que se $\xi \in \tilde{\mathcal{J}}_k$ é dado, existe unha solución ϕ con $J_k(\phi) = \xi$. Esta observación non é directamente aplicable á situación presente xa que $\alpha_{111} = 0$ no noso exemplo. Posto que temos asumido que $\phi(0) \neq 0$, $\phi_1(0) \neq 0$ e $\phi_2(0) \neq 0$, a ecuación (4.6) prové unha relación linear non trivial entre os 3-jets de ϕ unha vez que os 2-jets foron fixados. Facemos un cambio de coordenadas para asegurar que $\tilde{\alpha}_{111} \neq 0$ nas novas coordenadas e así obtemos a afirmación (1).

Nótese que $\rho_a^D(\partial_{x^1}, \partial_{x^2})$ é unha función analítica real en $\tilde{\mathcal{J}}_k$ para todo $k \geq 3$. Entón ou ben se anula identicamente ou non se anula nalgún conxunto aberto denso. Tense que

$$\rho_a^D(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{22}\phi_{12} - \phi_2\phi_{122}}{\phi_2^2} + \frac{\phi_1\phi_{112} - \phi_{11}\phi_{12}}{\phi_1^2} \right).$$

Se tomamos

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 1, & \phi_1(0) &= \phi_2(0) = 1, \\ \phi_{11}(0) &= \phi_{12}(0) = \phi_{22}(0) = 0, & \phi_{122} &= -\phi_{112} = 1, \end{aligned}$$

entón a ecuación (4.6) satisfaise e $\rho_a^D(\partial_{x^1}, \partial_{x^2})(0) \neq 0$. Isto proba (2).

De forma parecida, ou ben se anula $d\mathcal{E}$ identicamente ou ben $d\mathcal{E}$ non se anula nalgún conxunto aberto denso en $\tilde{\mathcal{J}}_k$ para todo $k \geq 5$. Tomando $\phi(x^1, x^2) = \gamma(x^1 + x^2)$, a ecuación (4.6) transfórmase en:

$$\gamma^{(3)}(t) = -\frac{\gamma'(t)^2 \gamma''(t) - \mu \gamma(t) \gamma''(t)^2}{\mu \gamma(t) \gamma'(t)}. \quad (4.8)$$

Esta EDO pode resolverse para condicións iniciais arbitrarias $\{\gamma(0), \gamma'(0), \gamma''(0)\}$. Tense que $\phi_2(0) = \phi_1(0)$ así que obtemos 4 das 8 compoñentes de $\tilde{\mathcal{J}}_5$. As outras 4 compoñentes poden obterse considerando $\gamma(x^1 - x^2)$. Un cálculo directo mostra que esta conexión é recorrente. Impoñendo a identidade da ecuación (4.8) calculamos:

$$\begin{aligned} \rho^D &= \frac{\gamma''}{\mu\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & D\rho^D &= -\frac{(1+\mu)\gamma'}{\mu\gamma} (dx^1 + dx^2) \otimes \rho^D, \\ \mathcal{E} &= 4\frac{(1+\mu)^2(\gamma')^2}{\mu\gamma\gamma''}, & \dot{\mathcal{E}} &= 4\frac{(\mu+1)^2(\mu\gamma\gamma'\gamma'' - (\mu-1)(\gamma')^3)}{\mu^2\gamma^2\gamma''}. \end{aligned}$$

Dado que $\mu \neq -1$, tense que $\dot{\mathcal{E}} \neq 0$ para valores xenéricos de $\{\gamma(0), \gamma'(0), \gamma''(0)\}$. Isto proba (3). \square

Capítulo 5

Xeometría localmente homoxénea

Unha superficie afín dise localmente homoxénea se para cada dous puntos dela existe un isomorfismo afín local levando un punto no outro. O estudo do espazo de campos afín Killing xoga un papel moi importante no contexto das superficies localmente homoxéneas. En particular, permite probar que para estas superficies existen tres tipos de estruturas locais posibles ás que nos referiremos como tipo \mathcal{A} , tipo \mathcal{B} e tipo \mathcal{C} . Esta caracterización realízase en termos da existencia dun espazo de campos de vectores afín Killing cuxa estrutura alxébrica codifica información relevante sobre a xeometría da superficie. Por este motivo, a nosa análise está fortemente ligada ao estudo destes espazos. Na primeira parte do capítulo estudamos a forma xeral das solucións da ecuación quasi-Einstein afín (4.2) para as superficies tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} . Na segunda parte analizamos a dimensión do espazo de solucións desta ecuación salvo equivalencia linear para cada un dos tres tipos de superficies localmente homoxéneas.

O contido que se recolle neste capítulo baséase principalmente nas investigacións realizadas en [20].

5.1 Introducción

Unha variedade afín $\mathcal{M} = (M, D)$ dise *localmente homoxénea* se dados p e $q \in M$ existe un difeomorfismo local Φ tal que $\Phi(p) = q$ e $\Phi^*D = D$. Se o difeomorfismo en cuestión está globalmente definido dicimos que a variedade é *globalmente homoxénea*. A primeira descrición local completa que coñecemos para superficies afíns homoxéneas foi levada a cabo en [71] para o caso no que o tensor de Ricci é anti-simétrico. A caracterización local na situación xeral deste tipo de estruturas foi estudada por Opozda en [91] e resúmese no seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha superficie afín localmente homoxénea. Entón cúmprese polo menos unha das tres seguintes posibilidades describindo a xeometría local:*

- (a) *Existen coordenadas tales que os símbolos de Christoffel son constantes.*
- (b) *Existen coordenadas (x^1, x^2) con $x^1 > 0$ tales que os símbolos de Christoffel son da forma $\Gamma_{ij}^k = C_{ij}^k(x^1)^{-1}$ con C_{ij}^k constantes.*
- (c) *D é a conexión de Levi-Civita dunha métrica de curvatura constante.*

O teorema anterior afirma que localmente existen tres posibles formas para unha conexión localmente homoxénea. A primeira das posibilidades, recollida en (a), xeneraliza a conexión euclidiana; a segunda delas, dada en (b), xeneraliza a conexión do plano hiperbólico, e a última

delas, descrita en (c), inclúe a conexión de Levi-Civita do plano euclidiano, da esfera e mais a do plano hiperbólico. A nosa análise a partir de agora vaise apoiar en gran medida no traballo de Brozos-Vázquez *et al.* [14], onde se estudan este tipo de conexións empregando unha caracterización das mesmas a partir do seu espazo de campos afín Killing asociado. Se $\mathcal{M} = (M, D)$ é unha superficie afín localmente homoxénea e $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$ denota a álgebra de Lie de campos de vectores afín Killing sobre \mathcal{M} , tense que $2 \leq \dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) \leq 6$. Unha álgebra de Lie 2-dimensional $\mathfrak{g} = \text{span}\{X, Y\}$ pode ser abeliana (i.e., $[X, Y] = 0$) ou resoluble (i.e., $[X, Y] = Y$). Por unha banda, tense que $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$ contén unha subálgebra abeliana 2-dimensional xerada por campos afín Killing X e Y linearmente independentes tales que $[X, Y] = 0$ se e só se existen coordenadas (x^1, x^2) tales que os símbolos de Christoffel correspondentes Γ_{ij}^k son constantes. Por outra banda, $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$ contén unha subálgebra resoluble 2-dimensional xerada por campos afín Killing X e Y tales que $[X, Y] = Y$ se e só se existen coordenadas (x^1, x^2) con $x^1 > 0$ tales que os símbolos de Christoffel correspondentes satisfán $\Gamma_{ij}^k = (x^1)^{-1} C_{ij}^k$ para certas constantes C_{ij}^k (os detalles poden consultarse en [2]). Os casos anteriores coinciden precisamente coas conexións dadas en (a) e (b) no teorema 5.1. Para as dadas en (c) existen tres posibilidades. Se a curvatura é positiva a conexión é afinmente equivalente á da esfera. Se a curvatura é negativa a conexión é afinmente equivalente á do plano hiperbólico e, en tal caso, tamén cumpre (b). Finalmente, se a curvatura é cero a conexión é afinmente equivalente á do plano euclidiano e cúmprese (a). Tendo isto en consideración, a seguinte definición permite asociar, cando menos, unha destas tres formas a cada conexión dunha superficie afín localmente homoxénea.

Definición 5.2. Sexa \mathcal{M} unha superficie afín localmente homoxénea. Dicimos que:

- (a) \mathcal{M} é tipo \mathcal{A} se existen campos afín Killing X e Y tales que $[X, Y] = 0$.
- (b) \mathcal{M} é tipo \mathcal{B} se existen campos afín Killing X e Y tales que $[X, Y] = Y$.
- (c) \mathcal{M} é tipo \mathcal{C} se é localmente afinmente equivalente á esfera coa métrica usual.

O exposto anteriormente permite afirmar que toda superficie afín localmente homoxénea é tipo \mathcal{A} , \mathcal{B} ou \mathcal{C} . Porén, a nosa definición é un pouco diferente que a de [14]. A primeira gran diferenza é que a presente definición inclúe o caso chan que non foi considerado no traballo de Brozos-Vázquez *et al.*, mais ten especial relevancia na nosa análise (ver observación 6.10). A segunda diferenza atópase en que a nosa definición das tipo \mathcal{C} exclúe as conexións de Levi-Civita con curvatura non positiva para evitar que aparezan de novo como tipo \mathcal{A} ou tipo \mathcal{B} . Deste xeito, non existen superficies que sexan tipo \mathcal{C} e simultaneamente tipo \mathcal{A} ou tipo \mathcal{B} . Con todo, as posibilidades da definición anterior seguen sen ser excluíntes posto que existen superficies que son tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} á vez. Restringir a definición dalgún destes tipos para que non coincidan resulta contraproducente, polo que mantemos as definicións de [14] incluíndo o caso chan. Non obstante, é claro en que casos unha conexión é tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} , polo que isto non resulta a priori un problema se se quere facer unha clasificación estrita. En particular, unha superficie tipo \mathcal{B} non chá é tamén tipo \mathcal{A} se e só se $(C_{12}^1, C_{22}^1, C_{22}^2) = (0, 0, 0)$, salvo equivalencia linear (ver teorema 5.17).

A continuación introducimos exemplos de superficies localmente homoxéneas tipo \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} que definen os coñecidos como modelos (ou xeometrías) tipo \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} , respectivamente.

Exemplo 5.3. Os tres seguintes son exemplos de superficies localmente homoxéneas:

(A) \mathcal{M} dise un *modelo ou xeometría tipo \mathcal{A}* se $M = \mathbb{R}^2$ e $\Gamma = (a, b, c, d, e, f)$, onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{1}$ denota a función constante igual a 1. Para cada $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, a aplicación de M en M definida por $(x^1, x^2) \rightarrow (x^1 + a_1, x^2 + a_2)$ é unha transformación afín, polo que \mathcal{M} é (localmente) homoxénea e en particular é tipo \mathcal{A} .

(B) \mathcal{M} dise un *modelo ou xeometría tipo \mathcal{B}* se $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ é o grupo $ax + b$ e $\Gamma = (x^1)^{-1}(a, b, c, d, e, f)$, onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Se $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ con $a_1 > 0$, entón a aplicación de M en M definida por $(x^1, x^2) \rightarrow (a_1x^1, a_1x^2 + a_2x^1)$ é unha transformación afín, polo que \mathcal{M} é (localmente) homoxénea e en particular é tipo \mathcal{B} .

(C) Se \mathbb{S}^2 é a esfera coa métrica usual e se $D = \nabla$ é a conexión de Levi-Civita, entón (\mathbb{S}^2, ∇) dise un *modelo ou xeometría tipo \mathcal{C}* . O grupo de rotacións actúa sobre esta xeometría conservando a conexión, polo que \mathcal{M} é (localmente) homoxénea e en particular é tipo \mathcal{C} .

Empregando a caracterización local de superficies localmente homoxéneas do teorema 5.1 podemos afirmar que localmente toda superficie afín localmente homoxénea é afinmente equivalente a un aberto dun modelo tipo \mathcal{A} , \mathcal{B} ou \mathcal{C} . Posto que todas as esferas (pensadas como variedades riemannianas) son afinmente equivalentes independentemente do seu raio, os modelos tipo \mathcal{C} poden reducirse a un único modelo. Isto mostra que tales conexións son moi ríxidas, polo que centraremos o noso estudo nos modelos tipo \mathcal{A} e \mathcal{B} aos que lles dedicaremos practicamente todo o que resta de memoria. Coa vista posta neste obxectivo, no que segue introducimos algo de notación xunto co concepto de equivalencia linear para estes modelos.

5.1.1 Equivalencia linear dos modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B}

Neste apartado fixamos algúns criterios de notación que empregaremos ao longo do que resta de memoria e introducimos os conceptos de equivalencia linear para superficies tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} .

Empregando a notación introducida en 1.1.2 identificamos cada conexión cos símbolos de Christoffel asociados. Os símbolos de Christoffel dun modelo tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^2 son da forma $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$. Así, coas coordenadas usuais de \mathbb{R}^2 , cada conexión dun modelo tipo \mathcal{A} é da forma $\Gamma = (a, b, c, d, e, f)$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{M}(a, b, c, d, e, f)$ a correspondente estrutura afín en \mathbb{R}^2 . Analogamente, os símbolos de Christoffel dun modelo tipo \mathcal{B} en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ son da forma $\Gamma_{ij}^k = (x^1)^{-1}C_{ij}^k$ con $C_{ij}^k \in \mathbb{R}$. Así, coas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, cada conexión dun modelo tipo \mathcal{B} é da forma $\Gamma = (x^1)^{-1}(a, b, c, d, e, f)$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{N}(a, b, c, d, e, f)$ a correspondente estrutura afín en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Por simplicidade, denotamos por Γ_0 a conexión de \mathbb{R}^2 (ou en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) determinada por $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo i, j e k . É evidente que calquera cambio de coordenadas linear conserva a conexión de forma que todos os símbolos de Christoffel seguen a ser cero nas novas coordenadas. Isto non acontece con ningún outro modelo tipo \mathcal{A} ou \mathcal{B} . Antes de avanzar nesta liña, convén definir exactamente o que entendemos por cambio linear para cada un destes modelos.

Definición 5.4. (Cambio de coordenadas linear).

Sexan $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ e $\widetilde{\mathcal{M}} = (\mathbb{R}^2, \widetilde{D})$ modelos tipo \mathcal{A} . Dicimos que $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ define un cambio de coordenadas tipo \mathcal{A} se

$$\Phi(x^1, x^2) = (\phi_{11}x^1 + \phi_{12}x^2, \phi_{21}x^1 + \phi_{22}x^2)$$

con $(\phi_{ij})_{ij} \in GL(2, \mathbb{R})$ e $D = \Phi^*\widetilde{D}$. En tal caso, dise que Φ é un isomorfismo linear, e que \mathcal{M} e $\widetilde{\mathcal{M}}$ son modelos linearmente equivalentes.

Sexan $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, D)$ e $\widetilde{\mathcal{M}} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \widetilde{D})$ modelos tipo \mathcal{B} . Dicimos que $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ define un cambio de coordenadas tipo \mathcal{B} se

$$\Phi(x^1, x^2) = (x^1, \phi_{21}x^1 + \phi_{22}x^2)$$

con $\phi_{22} \neq 0$ e $D = \Phi^*\widetilde{D}$. En tal caso, dise que Φ é un isomorfismo linear, e que \mathcal{M} e $\widetilde{\mathcal{M}}$ son modelos linearmente equivalentes.

Os cambios de coordenadas lineares tipo \mathcal{A} (ou tipo \mathcal{B}) están definidos de forma que se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{A} (ou tipo \mathcal{B}), entón a estrutura resultante a través do cambio de coordenadas tamén o é. É importante ter claro que entre dous modelos tipo \mathcal{A} (ou tipo \mathcal{B}) sempre existen cambios de coordenadas lineares entre as variedades subxacentes \mathbb{R}^2 (ou $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$). Non obstante, non todos eles teñen unha estrutura afín equivalente linearmente. Por exemplo, calquera cambio de coordenadas linear conserva a conexión Γ_0 , polo que non é linearmente equivalente a ningún outro modelo. Desta forma, cabe pensar cales son as clases de equivalencia.

Observación 5.5. A vantaxe que ten empregar modelos no canto de superficies tipo \mathcal{A} ou \mathcal{B} consiste en que as conexións quedan univocamente determinadas polos símbolos de Christoffel (nas coordenadas canónicas de \mathbb{R}^2 ou $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, respectivamente). En tal caso, resulta interesante coñecer o cambio que sofren os símbolos ao realizar unha transformación linear. Consideremos primeiro un modelo tipo \mathcal{A} . Cada conexión deste modelo $\Gamma = (\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2)$ con $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$ identifícase cun vector de \mathbb{R}^6 . Posto que o espazo subxacente é \mathbb{R}^2 , podemos identificar o conxunto de transformacións lineares con $GL(2, \mathbb{R})$. Entón, o pullback dunha conexión define unha acción $\theta : GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ de forma que $\theta(\Phi, \Gamma) = \widetilde{\Gamma}$, onde $\widetilde{\Gamma}$ é o elemento de \mathbb{R}^6 identificado coa conexión $\Phi^*\Gamma$. Explicitamente, se $\Phi = (\phi_{ij})$, tense que $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \phi_{li}\phi_{rj}\Gamma_{lr}^s\phi^{ks}$. Desta forma, non é difícil comprobar que en termos de matrices $\widetilde{\rho} = \Phi^t\rho\Phi$. Para os modelos tipo \mathcal{B} o argumento é parecido, mais hai que facer as consideracións oportunas. Posto que as conexións agora son da forma $\Gamma = (x^1)^{-1}(C_{11}^1, C_{11}^2, C_{12}^1, C_{12}^2, C_{22}^1, C_{22}^2)$ con $C_{ij}^k \in \mathbb{R}$, podemos identificalas novamente cun vector de \mathbb{R}^6 . Ademais, os representantes de $GL(2, \mathbb{R})$ das transformacións lineares permitidas son da forma $\Phi = (\phi_{ij})$ con $\phi_{11} = 1, \phi_{12} = 0$ e $\phi_{22} \neq 0$, polo que forman un subgrupo. Deste xeito, podemos definir unha acción de forma análoga obtendo exactamente a mesma relación que antes coa restrición aos elementos deste subgrupo.

En base ao exposto anteriormente, podemos definir unha relación de equivalencia no conxunto de todos os modelos tipo \mathcal{A} (ou tipo \mathcal{B}) de forma que dous modelos están relacionados se e só se existe un isomorfismo linear entre eles. Neste contexto será no que desenvolveremos a nosa análise posterior.

Antes de comezar co estudo da dimensión do espazo de solucións asociado á ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$, introducimos a seguinte observación.

Observación 5.6. Se D e \tilde{D} son conexións fortemente proxectivamente chás, e Φ é un isomorfismo linear entre elas, entón o teorema 4.19 permite afirmar que $D = \Phi^* \tilde{D}$ (i.e. as conexións son linearmente equivalentes) se e só se $\mathcal{Q}(D) = \Phi^* \mathcal{Q}(\tilde{D})$ (i.e. os seus espazos de solucións asociados son iguais salvo o cambio de coordenadas linear que intercambia a conexión). Isto proporciona un método sinxelo para a comprobación da equivalencia linear entre conexións fortemente proxectivamente chás. Posto que todos os modelos tipo \mathcal{A} cumpren esta propiedade, este feito resulta especialmente relevante e mesmo permite dar unha clasificación linear completa baseada nos espazos de solucións. En contraposición, os modelos tipo \mathcal{B} non son, en xeral, fortemente proxectivamente chans, polo que o comportamento destes modelos coa ecuación quasi-Einstein afín é ben diferente ao dos tipo \mathcal{A} . Non obstante, para modelos tipo \mathcal{B} fortemente proxectivamente chans, a equivalencia linear pode ser estudada novamente a partir do espazo de solucións. En particular, este é o caso dos modelos tipo \mathcal{B} chans.

A continuación exemplificamos o procedemento a seguir para identificar unha conexión a partir do espazo de solucións. Para isto, sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \Gamma)$ un modelo tipo \mathcal{A} a determinar que cumpre que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$, onde (x^1, x^2) son as coordenadas usuais de \mathbb{R}^2 . Sabemos que os símbolos de Christoffel toman a forma $\Gamma = (a, b, c, d, e, f)$ nestas coordenadas. Posto que $x^1 \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$, tense $\Omega(x^1) = 0$, onde Ω denota o operador quasi-Einstein afín introducido en (4.1). Isto equivale a

$$\begin{aligned} (-adx^1 + a + x^1(b(c-f) + d^2)) &= 0, \\ (bex^1 - cdx^1 + c) &= 0, \\ (e(ax^1 - dx^1 - 1) + cx^1(f - c)) &= 0. \end{aligned}$$

Posto que as igualdades anteriores consisten na anulación dun polinomio linear en x^1 nun aberto do plano, tanto o coeficiente do monomio x^1 como o termo independente de cada ecuación teñen que ser cero. Consecuentemente, as tres ecuacións anteriores redúcense á ecuación $bf - d^2 = 0$. Empregando agora que $\Omega(e^{x^2}) = 0$ obtemos que $d = 0$ e $f = 1$. Finalmente, empregamos $\Omega(\mathbb{1}) = 0$ obtendo que $b = 0$. Deste xeito, tense que $\Gamma = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Ademais, un cálculo directo amosa que os únicos cambios lineares que preservan estes símbolos de Christoffel son os da forma $(x^1, x^2) \rightarrow (cx^1, x^2)$ con $c \neq 0$.

O procedemento que acabamos de mostrar é de vital importancia na nosa análise e permite identificar a conexión dunha superficie fortemente proxectivamente chá a partir dunha base do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein con $\mu = -1$. Ademais, isto tamén serve para estudar a equivalencia linear entre conexións, xa que dúas conexións son linearmente equivalentes se e só se existe un cambio de coordenadas que leva unha base de solucións dunha no da outra. Por exemplo, a conexión anterior é equivalente á que ten como base do espazo de solucións $B = \{\mathbb{1}, x^1, e^{2x^1+x^2}\}$ posto que o cambio linear $(x^1, x^2) \rightarrow (x^1, 2x^1+x^2)$ transforma $\{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$ na base B . Pola contra, Γ non é linearmente equivalente á conexión que ten por base do espazo de solucións $\{\mathbb{1}, e^{x^1}, x^2 e^{x^1}\}$, xa que ningunha transformación linear pode xerar un elemento da forma $x^2 e^{x^1}$ a partir dos de $\{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$.

A observación anterior afirma que cando dúas conexións son fortemente proxectivamente chás, son linearmente equivalentes se e só se os espazos de solucións asociados son iguais salvo transformación linear. Este feito ten un papel moi importante na nosa análise.

No que segue imos estudar a forma xeral das solucións para os modelos tipo \mathcal{A} e \mathcal{B} . Empregando isto analizaremos a dimensión do espazo de solucións para estes modelos salvo equivalencia linear para os distintos valores de μ . Como xa fixemos no capítulo anterior, definimos o espazo de solucións complexificado para a ecuación quasi-Einstein afín $E_{\mathbb{C}}(\mu, \nabla) := E(\mu, \nabla) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. As solucións reais obtéñense ao tomar a parte real e imaxinaria das solucións complexas posto que tanto a ecuación en cuestión como o autovalor μ son reais.

5.2 Superficies de tipo \mathcal{A}

Nesta sección estudamos as solucións da ecuación quasi-Einstein afín para unha superficie tipo \mathcal{A} e, a partir disto, proporcionamos un resultado onde se resumen as posibilidades en canto á dimensión de dito espazo de solucións. Para facer isto introducimos a álgebra conmutativa de campos de vectores afín Killing xerada por $\{\partial_{x^1}, \partial_{x^2}\}$, que denotamos por \mathfrak{A} . O seguinte resultado mostra cal é a forma das solucións para a ecuación quasi-Einstein afín para unha superficie tipo \mathcal{A} .

Teorema 5.7. *Sexa \mathcal{E} un \mathfrak{A} -submódulo de $C^\infty(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de dimensión finita. Entón existe unha base para \mathcal{E} de funcións da forma $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} p$ para algún polinomio p con coeficientes reais e $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Ademais, $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} \partial_{x^i} p \in \mathcal{E}$ para $i = 1, 2$.*

Proba. Sexa $f \in \mathcal{E}$. Definimos $\mathcal{E}(f) := \text{span}\{f, \partial_{x^1} f, \dots, \partial_{x^1}^k f, \dots\} \subset \mathcal{E}$. Posto que \mathcal{E} é de dimensión finita, existe unha relación de dependencia minimal:

$$\prod_i (\partial_{x^1} - \lambda_i)^{n_i} f = 0 \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ distintos entre si.} \quad (5.1)$$

Sexa $f_i := \prod_{j \neq i} (\partial_{x^1} - \lambda_j)^{n_j} f \in \mathcal{E}(f)$. Se fixamos x^2 , entón $f_i(x^1, x^2)$ satisfai a EDO de coeficientes constantes $(\partial_{x^1} - \lambda_i)^{n_i} f_i(x^1, x^2) = 0$ para unhas certas condicións iniciais determinadas por $\{f_i(0, x^2), \partial_{x^1} f_i(0, x^2), \dots\}$. Consecuentemente podemos expresar $f_i(x^1, x^2) = \{(x^1)^{n_i-1} h_{n_i-1}(x^2) + \dots + h_0(x^2)\} e^{\lambda_i x^1}$. Posto que a ecuación (5.1) é unha relación de dependencia minimal en f , as funcións h_{n_i-1} non son identicamente cero. Polo tanto as funcións $\{(\partial_{x^1} - \lambda_i)^k f_i\}_{0 \leq k \leq n_i-1}$ para cada i fixado son linearmente independentes. Os termos das exponenciais diferentes non interactúan entre si. Polo tanto, a colección de todas estas funcións forma unha base de $\mathcal{E}(f)$ por razóns de dimensión. Daquela f pode expresarse en termos destas funcións, é dicir, todo elemento de \mathcal{E} pode expresarse como unha suma de funcións da forma $e^{\alpha x^1} \sum_i (x^1)^i h_i(x^2)$ onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Unha análise similar para x^2 mostra que podemos expresar f na forma dada no enunciado do teorema. Ademais, tense que

$$e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} \partial_{x^i} p = (\partial_{x^i} - \alpha_i) \{e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} p\} \in \mathcal{E}.$$

Isto completa a proba do teorema. □

O seguinte resultado mostra que todo modelo tipo \mathcal{A} (de feito, toda superficie tipo \mathcal{A}) é localmente fortemente proxectivamente chá.

Teorema 5.8. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} . Entón ρ é simétrico, $\nabla\rho$ é totalmente simétrico e \mathcal{M} localmente fortemente proxectivamente chá.*

Proba. Sexa $\Gamma = (a, b, c, d, e, f)$ a conexión dun modelo tipo \mathcal{A} . Daquela, se $\rho_{ij} = \rho(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$ e $\rho_{ij;k} = (D_{\partial_{x^k}}\rho)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$, unha conta directa en coordenadas mostra que:

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= -bc + ad - d^2 + bf, & \rho_{12} &= \rho_{21} = cd - be, \\ \rho_{22} &= -c^2 + ae - de + cf\end{aligned}\tag{5.2}$$

e

$$\begin{aligned}\rho_{11;1} &= 2abc - 2a^2d - 2bcd + 2ad^2 + 2b^2e - 2abf, \\ \rho_{11;2} &= \rho_{12;1} = \rho_{21;1} = 2bc^2 - 2acd + 2bde - 2bcf, \\ \rho_{12;2} &= \rho_{21;2} = \rho_{22;1} = 2bce - 2ade + 2d^2e - 2cdf, \\ \rho_{22;2} &= -2cde + 2be^2 + 2c^2f - 2aef + 2def - 2cf^2.\end{aligned}$$

Entón obtemos que ρ e $\nabla\rho$ son totalmente simétricos, polo que o teorema 4.8 afirma \mathcal{M} é localmente fortemente proxectivamente chá. \square

Empregando a notación da observación 4.9 introducimos o seguinte teorema que permite refinar o resultado anterior.

Teorema 5.9. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Daquela, existe unha función linear $\varphi(x^1, x^2) = a_1x^1 + a_2x^2$ de forma que ${}^\varphi\mathcal{M}$ é un modelo tipo \mathcal{A} chan.*

Proba. Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ un modelo tipo \mathcal{A} que queda determinado pola conexión $\Gamma = (\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2)$ con $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$. Polo teorema 5.8 tense que \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chan, mais non sabemos se a estrutura chá asociada é un modelo tipo \mathcal{A} e tampouco se a equivalencia proxectiva está dada por unha función linear. Para ver isto, definimos a aplicación linear $\varphi(x^1, x^2) = a_1x^1 + a_2x^2$ con $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Sexa $\widetilde{\mathcal{M}} := {}^{-\varphi}\mathcal{M}$ e sexa $\tilde{\rho}$ o tensor de Ricci asociado. Queremos ver que existe (a_1, a_2) tal que $\tilde{\rho} = 0$. Supoñamos en primeiro lugar que $\Gamma_{11}^2 \neq 0$. Reescalando x^2 podemos asumir que $\Gamma_{11}^2 = 1$. Unha conta en coordenadas mostra entón que a ecuación $\tilde{\rho}_{11} = 0$ equivale a

$$(a_1)^2 + a_2 + a_1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{22}^2,$$

de onde despexamos

$$a_2 := (a_1)^2 - a_1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{22}^2.$$

Daquela tense que:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{12} &= -\Gamma_{22}^1 + (a_1 - \Gamma_{12}^2)(a_1^2 - a_1\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{22}^2), \\ \tilde{\rho}_{22} &= (a_1 - \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)\tilde{\rho}_{12}.\end{aligned}$$

Polo tanto, $\tilde{\rho}_{12}$ divide a $\tilde{\rho}_{22}$, polo que basta escoller a_1 tal que $\tilde{\rho}_{12} = 0$. Posto que $\tilde{\rho}_{12}$ é un polinomio de grao tres en a_1 , existe polo menos unha solución real tal que $\tilde{\rho}_{12} = 0$. Entón tense que $\tilde{\rho} = 0$ e así $\widetilde{\mathcal{M}}$ é chá como se pretendía.

Supoñamos agora que $\Gamma_{11}^2 = 0$. Se $\Gamma_{22}^1 \neq 0$, podemos intercambiar x^1 e x^2 e repetir o argumento anterior. Podemos asumir entón que $\Gamma_{22}^1 = 0$. Unha conta directa mostra que tomando $a_1 = \Gamma_{12}^2$ e $a_2 = \Gamma_{12}^1$ tense que $\tilde{\rho} = 0$. \square

No caso de existir un cambio proxectivo forte das características do teorema anterior, diremos que é un *cambio proxectivo linear*. Dúas superficies afíns relacionadas mediante o mesmo diranse *fortemente linearmente proxectivamente equivalentes* ou, simplemente, *linearmente proxectivamente equivalentes*. Dous modelos tipo \mathcal{A} con conexións Γ e $\tilde{\Gamma}$ son linearmente proxectivamente equivalentes, é dicir, existe unha función linear L tal que $\tilde{\Gamma} = {}^L\Gamma$ se e só se, a consecuencia do teorema 4.13, $\mathcal{Q}(\tilde{\Gamma}) = e^L\mathcal{Q}(\Gamma)$. Se $\Gamma = \Gamma(a, b, c, d, e, f)$, entón para $L = a_1x^1 + a_2x^2$, tense que

$${}^L\Gamma = (a + 2a_1, b, c + a_2, d + a_1, e, f + 2a_2).$$

Polo tanto, o espazo de conexións de modelos tipo \mathcal{A} linearmente proxectivamente equivalentes a Γ pode identificarse cun plano afín en \mathbb{R}^6 .

Observación 5.10. Sexa \mathcal{M} unha superficie tipo \mathcal{A} non chá. Se se verifica a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$, entón a extensión de Riemman correspondente $\mathcal{N} := (T^*M, g_{D, \Phi})$ é quasi-Einstein (con $\mu = -2$) e é conformemente Einstein para calquera Φ (ver exemplo 3.4 e teorema 3.19). Malia que nese caso \mathcal{N} é localmente conformemente chá se $\Phi = 0$, non o é en xeral para $\Phi \neq 0$ (para ver detalles, consultar [1]).

O seguinte resultado mostra cal é a posible dimensión do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín dun modelo tipo \mathcal{A} para os distintos valores de μ salvo equivalencia linear.

Teorema 5.11. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón a solución xeral para a ecuación quasi-Einstein afín pode expresarse na forma $\Re(f)$ ou $\Im(f)$ con $f = e^{\alpha_1x^1 + \alpha_2x^2}p$ para algún polinomio p con coeficientes reais e $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Ademais, se \mathcal{M} é chá, entón $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$ para todo μ , e se \mathcal{M} non é chá, entón temos as seguintes posibilidades:*

(1) *Se $\mu = 0$, entón $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ ou, salvo equivalencia linear, dáse algunha das seguintes posibilidades:*

(a) $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0$ con $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1\}$.

(b) $\Gamma_{11}^1 = 1, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{22}^1 = 0$ con $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, e^{x^1}\}$.

(2) *Se $\mu = -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$.*

(3) *Se $\mu \neq 0, -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ se } \text{rang } \rho = 1 \\ 0 \text{ se } \text{rang } \rho = 2 \end{array} \right\}$.*

Proba. Se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{A} e \mathfrak{A} a álgebra xerada por $\{\partial_{x^1}, \partial_{x^2}\}$, é claro que $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ é un \mathfrak{A} -submódulo de $C^\infty(\mathbb{R}^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de dimensión finita. Entón toda función de $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ ten a forma dada polo teorema 5.7. Isto establece a primeira parte do enunciado.

A continuación establecemos as posibles dimensións para un modelo tipo \mathcal{A} . Por unha banda, o teorema 5.8 asegura que todo modelo tipo \mathcal{A} é fortemente proxectivamente chá, de onde

$\dim\{\mathcal{Q}(\mathcal{M})\} = 3$ polo teorema 4.17. Se ademais \mathcal{M} é chá, tense que $\rho = \rho_s = 0$, polo que $E(-1, D) = E(\mu, D)$ para calquera μ . Por outra banda, se \mathcal{M} non é chá tense que $\rho \neq 0$. Polo teorema 4.2 tense que $\dim\{E(\mu, D)\} \leq 3$, e dado que $\rho \neq 0$, o teorema 4.17 mostra que $\dim\{E(\mu, D)\} \neq 3$ se $\mu \neq \mu_2 = -1$. Empregando isto, comezamos probando a afirmación 1. Sexa \mathcal{M} unha superficie tipo \mathcal{A} . Está claro que $\mathbb{1} \in E(0, D)$. Supoñamos agora que existe unha función non-constante $f \in E(0, D)$, polo que $\dim\{E(0, D)\} = 2$. Polo teorema 5.7, sabemos que existe unha base tal que o elemento que falta é da forma $f = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} p$, onde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e p é un polinomio. Se p tivese grao maior ca un, necesariamente existiría outra solución linearmente independente da forma $\partial_{x^i} f$. Isto contradí que $\dim E(0, D) = 2$, polo que $\text{grao}(p) \leq 1$. Por unha banda, se $\text{grao}(p) = 1$, tense que $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$ é constante, xa que $\partial_{x^i} f \in \text{span}\{\mathbb{1}, f\}$. Posto que $f = p$ ten grao un, podemos realizar un cambio de coordenadas linear tal que $f = x^1$. Daquela, unha comprobación directa mostra (a). Por outra banda, se $\text{grao}(p) = 0$, a solución é da forma $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$. Se fose complexo, de novo existirían dúas solucións linearmente independentes conxugadas, polo que $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Entón podemos cambiar coordenadas linearmente de forma que $f = e^{x^1}$. De novo, unha comprobación directa mostra (b). Isto proba a afirmación 1.

Posto que toda superficie tipo \mathcal{A} é fortemente proxectivamente chá, o teorema 4.17 mostra que $\dim\{E(-1, D)\} = 3$, establecendo a afirmación 2.

Supoñamos finalmente que $\mu \notin \{0, -1\}$. Se $\text{rang } \rho_D = 2$, novamente o teorema 4.17 afirma que $\dim\{E(\mu, D)\} = 0$. Supoñamos agora que $\text{rang } \rho = 1$. Posto que $\dim\{E(\mu, D)\} \leq 2$, basta probar que $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 2$. Facemos un cambio de coordenadas linear de forma que $\rho_{11} = \rho_{12} = 0$. Unha conta en coordenadas mostra entón que $\Gamma_{11}^2 = 0$, posto que se fose distinto de cero, as condicións $\rho_{11} = \rho_{12} = 0$ implicarían que $\rho = 0$. Empregando un razoamento análogo tense que $\Gamma_{12}^2 = 0$. Daquela, a ecuación quasi-Einstein afín para $f(x^1, x^2) = e^{ax^2}$ redúcese a:

$$a^2 - a\Gamma_{22}^2 - \mu\rho_{22} = 0.$$

En xeral está ecuación ten dúas solucións complexas diferentes. Resta probar que tamén obtemos dúas solucións cando o discriminante da ecuación cadrática anterior é cero, isto é, cando $(\Gamma_{22}^2)^2 + 4\mu\rho_{22} = 0$. Posto que $\mu \neq 0$ e $\rho_{22} \neq 0$, tense que $\Gamma_{22}^2 \neq 0$, polo que $\mu = -(\Gamma_{22}^2)^2 / (4\rho_{22})$. Daquela, a solución obtense para $a = \frac{\Gamma_{22}^2}{2}$ e unha comprobación directa mostra que $x^2 e^{ax^2}$ tamén é solución para a ecuación quasi-Einstein afín. Así $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 2$ como se quería mostrar. Isto proba a afirmación 3. \square

O teorema anterior permite construír exemplos non triviais de deformacións proxectivas.

Exemplo 5.12. Consideremos a conexión do teorema 5.11-(1.a) da que sabemos que $\Gamma_{11}^1 = 0$, $\Gamma_{12}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = 0$. Entón tense que

$$\rho_D = \{\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2\} dx^1 \otimes dx^1,$$

$D\rho_D = 0$ e $x^1 \in E(0, D)$. Sexa $\omega = -d(\log x^1)$. Consideramos a estrutura Liouville fortemente proxectivamente equivalente $\tilde{D} = {}^g D$. Tense que

$$\rho^{\tilde{D}} = \rho^D \quad \text{e} \quad \tilde{D}\rho^{\tilde{D}} = 4(x^1)^{-1} \rho_{11}^D dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1.$$

Polo tanto, o espazo non é simétrico cando $\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \neq 0$. Daquela D non é localmente isomorfo a \tilde{D} .

Exemplo 5.13. Consideremos a conexión do teorema 5.11-(1.b) da que sabemos que $\Gamma_{11}^1 = 1$, $\Gamma_{12}^1 = 0$ e $\Gamma_{22}^1 = 0$. Entón $\phi(x^1, x^2) = a + e^{x^1} \in E(0, D)$. Sexa $g = -\log \phi(x^1, x^2)$ e $\tilde{D} = {}^gD$. Tense que $\rho^D = \rho^{\tilde{D}} = \rho_{11}^D dx^1 \otimes dx^1$. Tanto $D\rho_D$ como $\tilde{D}\rho_{\tilde{D}}$ son múltiplos de $dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1$. Entón $\alpha := D\rho_{11}^2 \cdot \rho_{11}^{-3}$ é un invariante afín e tense que $\alpha_D = 4(\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2)^{-1}$ e $\alpha_{\tilde{D}} = \alpha_D \cdot (a - e^{x^1})^2 (a + e^{x^1})^{-2}$ (consultar [15] para máis detalles). Posto que $\alpha_{\tilde{D}}$ é non-constante para $a \neq 0$, obtemos superficies non afinmente equivalentes que son equivalentes de Liouville fortemente. Se $a = 0$, obtemos un modelo tipo \mathcal{A} isomorfo.

Exemplos de variedades tipo \mathcal{A} en dimensión superior

Analogamente a como o facemos para os modelos tipo \mathcal{A} (en \mathbb{R}^2), podemos definir unha estrutura homoxénea tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^3 como o espazo afín que se obtén ao dotar \mathbb{R}^3 cunha conexión dada por símbolos de Christoffel constantes nas coordenadas usuais. Referímonos a estas estruturas como modelos tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^3 . A continuación estudamos o comportamento do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = \mu_3 = -\frac{1}{2}$ sobre algúns destes modelos. Para máis referencias sobre variedades tipo \mathcal{A} de dimensión superior pode consultarse [60].

O seguinte é un exemplo de modelo tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^3 con $\mu \neq -\frac{1}{2}$ e tensor de Ricci non-dexenerado.

Exemplo 5.14. Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^3, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} que nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 queda determinado pola conexión cuxos símbolos de Christoffel non nulos son: $\Gamma_{12}^3 = 1$, $\Gamma_{13}^1 = 3$, $\Gamma_{23}^2 = 4$ e $\Gamma_{33}^3 = 5$. Entón,

$$\rho^D = 5 dx^1 \otimes dx^2 + 5 dx^2 \otimes dx^1 + 10 dx^3 \otimes dx^3$$

e

$$E(\mu, D) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{span}\{e^{3x^3}, x^1 e^{3x^3}\} & \text{se } \mu = -\frac{3}{5} \\ \text{span}\{\mathbb{1}\} & \text{se } \mu = 0 \\ \{0\} & \text{noutro caso} \end{array} \right\}.$$

Posto que $\mu_3 = -\frac{1}{2}$ non admite solución, é claro que \mathcal{M} non é fortemente proxectivamente chá a consecuencia do teorema 4.15. Ademais, tense que $D\rho$ é simétrico, polo que \mathcal{M} ten tensor de Ricci totalmente simétrico (ρ e $D\rho$ simétricos). Isto pon de manifesto que a caracterización dada no teorema 4.8 para dimensión dous non é válida para dimensión tres.

No seguinte exemplo analizamos unha familia de variedades afíns 3-dimensionais tales que $\dim\{E(-\frac{1}{2}, D)\}$ pode ser 0, 1, 2 e 4, mais nunca 3. Isto suxire que para variedades m -dimensionais $\dim\{E_p(-\frac{1}{m-1}, D)\} \neq m$. Esta cuestión constitúe un problema aínda aberto.

Exemplo 5.15. Sexa $\mathcal{M}_{x,y,z,w} = (\mathbb{R}^3, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} . A conexión D queda determinada nas coordenadas usuais polos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{11}^1 = z, \quad \Gamma_{12}^1 = 1, \quad \Gamma_{13}^1 = x, \quad \Gamma_{22}^2 = 1, \quad \Gamma_{23}^1 = x, \quad \Gamma_{33}^2 = y, \quad \Gamma_{33}^3 = w,$$

con $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ e todos os demais cero. Tense que

$$\rho_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(z-1) \\ 0 & x(z-1) & wx - x^2 + 2y \end{pmatrix},$$

que é dexenerado mais distinto de cero, polo que \mathcal{M} non é unha xeometría chá. Dependendo dos valores de x, y, z e w , temos as seguintes posibilidades para a dimensión do espazo de solucións con $\mu = -\frac{1}{2}$:

1. $\dim\{E(-\frac{1}{2}, D)\} = 0$ se e só se $x \neq 0$ e, ou ben $z = 0$ ou ben $z \notin \{0, 1\}$ e $w \neq \frac{x+2xz-xz^2}{2z}$.
2. $\dim\{E(-\frac{1}{2}, D)\} = 1$ se e só se $x \neq 0, z \notin \{0, 1\}$ e $w = \frac{x+2xz-xz^2}{2z}$.
3. $\dim\{E(-\frac{1}{2}, D)\} = 2$ se e só se $x \neq 0, z = 1$ e $w \neq x$.
4. $\dim\{E(-\frac{1}{2}, D)\} = 4$ se e só se $x = 0$ ou $w = x$ e $z = 1$.

5.3 Superficies tipo \mathcal{B}

Nesta sección centramos o estudo nas solucións para a ecuación quasi-Einstein afín sobre superficies tipo \mathcal{B} . Na primeira parte fornecemos a forma xeral das solucións empregando unha construción alxébrica, mentres que na segunda parte proporcionamos varios resultados onde se indica, salvo equivalencia linear, a forma das superficies en función da dimensión do espazo de solucións para distintos valores de μ .

Sexa \mathfrak{B} a álgebra non conmutativa xerada por ∂_{x^2} e $X := x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}$.

Teorema 5.16. *Sexa \mathcal{E} un \mathfrak{B} -submódulo de $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de dimensión finita. Se $f \in \mathcal{E}$, entón $f = \sum_{\alpha, i, j} c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^i (\log(x^1))^j$ onde nesta suma finita $c_{\alpha, i, j} \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, e i e j son enteiros non-negativos.*

Proba. Sexa \mathfrak{B} a álgebra non conmutativa xerada por $X := x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}$ e ∂_{x^2} . Sexan \mathcal{E} un \mathfrak{B} -submódulo de dimensión finita de $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $0 \neq f \in \mathcal{E}$. Empregando exactamente o mesmo argumento que o da proba do teorema 5.7 expandimos

$$f = \sum_{ij} e^{\beta_j x^2} (x^2)^i h_{ij}(x^1) \text{ con } \beta_j \in \mathbb{C}.$$

Supoñamos que $h_{ij} \neq 0$ para algún $\beta_j \neq 0$. Escollamos i_0 maximal de forma que $h_{i_0 j} \neq 0$. Obtense que

$$X^n f = e^{\beta_j x^2} \{ \beta_j^n (x^2)^{i_0+n} h_{i_0 j}(x^1) + O((x^2)^{i_0+n-1}) \} + \dots$$

onde os puntos suspensivos representan os termos onde non aparece a exponencial $e^{\beta_j x^2}$. Isto proporciona unha colección infinita de funcións linearmente independentes en \mathcal{E} , o cal é imposible posto que \mathcal{E} é por hipótese de dimensión finita. Daquela f ten que ser un polinomio en

x^2 . No que segue imos ver cal é a forma das funcións $h_i(x^1)$. Sexa $\tilde{X} := x^1 \partial_{x^1}$. Tense que $X^k f = \sum_i (x^2)^i (i + \tilde{X})^k h_i$. Posto que \mathcal{E} é de dimensión finita, a colección $\{(i + \tilde{X})^k h_i\}$ ou, equivalentemente, $\{\tilde{X}^k h_i\}$, ten que ter un número finito de elementos linearmente independentes. Se h_i é constante, non temos máis que facer h_i . Se pola contra h_i non é constante, entón existe unha relación minimal de dependencia que pode factorizarse na forma

$$\prod_j (\tilde{X} - \lambda_j)^{n_j} h_i = 0. \quad (5.3)$$

As solucións da ecuación (5.3) están xeradas por funcións da forma $(\log(x^1))^k (x^1)^\lambda$. Daquela, unha análise análoga á que empregamos na proba do teorema 5.7 permite expandir cada h_i en termos destas funcións, completando así a proba deste resultado. \square

As superficies tipo \mathcal{B} non son, en xeral, fortemente proxectivamente chás. Non obstante, existen superficies tipo \mathcal{B} que tamén son tipo \mathcal{A} , polo que é claro que son fortemente proxectivamente chás por selo todas as tipo \mathcal{A} . Ademais destas, existen outras superficies tipo \mathcal{B} que non son tipo \mathcal{A} pero si fortemente proxectivamente chás. O seguinte resultado mostra cales son todas as superficies tipo \mathcal{B} fortemente proxectivamente chás salvo equivalencia linear.

Teorema 5.17. *Se \mathcal{M} é modelo tipo \mathcal{B} , entón \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das seguintes superficies:*

1. $C_{12}^1 = C_{22}^1 = C_{22}^2 = 0$ (\mathcal{M} é tamén tipo \mathcal{A}).
2. $C_{11}^1 = 1 + 2v$, $C_{11}^2 = 0$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{12}^2 = v$, $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{22}^2 = 0$.

Proba. Polo lema 4.8, \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá se e só se ρ é simétrico e $D\rho$ é totalmente simétrico. Unha conta directa mostra que as superficies das afirmacións 1 e 2 satisfán esta condición. Vexamos agora que salvo equivalencia linear estas son as únicas superficies de tipo \mathcal{B} cumprindo esas propiedades. Por unha banda, tense que ρ é simétrico se e só se $C_{22}^2 = -C_{12}^1$. Impoñendo esta condición, obtense tras unha conta directa que $D\rho(1, 2; 1) = D\rho(2, 1; 1)$ e $D\rho(1, 2; 2) = D\rho(2, 1; 2)$. As dúas ecuacións restantes son

$$\begin{aligned} 0 &= D\rho(1, 2; 1) - D\rho(1, 1; 2) \\ &= (x^1)^{-3} (C_{11}^1 C_{12}^1 + 3C_{11}^2 C_{22}^1 - 2C_{12}^1 C_{12}^2 + 2C_{12}^1), \\ 0 &= D\rho(1, 2; 2) - D\rho(2, 2; 1) \\ &= (x^1)^{-3} (2C_{11}^1 C_{22}^1 - 6(C_{12}^1)^2 - 4C_{12}^2 C_{22}^1 - 2C_{22}^1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Se supoñemos primeiro que $C_{22}^1 = 0$, daquela a segunda ecuación redúcese a $-6(C_{12}^1)^2 = 0$, polo que $C_{12}^1 = 0$ e $C_{22}^2 = 0$. Estas son precisamente as superficies da afirmación 1. O feito de que \mathcal{M} sexa tamén tipo \mathcal{A} nesta circunstancia é consecuencia do traballo realizado en [14]. Asumamos agora que $C_{22}^1 \neq 0$, logo podemos facer un cambio de coordenadas tal que $C_{22}^1 = \varepsilon = \pm 1$. Se $\tilde{x}^1 = x^1$ e $\tilde{x}^2 = cx^1 + x^2$ establecen un cambio de coordenadas, entón $\tilde{C}_{12}^1 = C_{12}^1 - c\varepsilon$. Daquela podemos supoñer que $C_{12}^1 = 0$. En tal caso, as ecuacións dadas en (5.4) redúcese a $3C_{11}^2 = 0$ e $-1 + C_{11}^1 - 2C_{12}^2 = 0$. Tomando $C_{12}^2 = v$ obtemos as superficies dadas na afirmación 2, completando así a proba do teorema. \square

Observación 5.18. O caso $v = -1$ da afirmación 2 do teorema anterior dá lugar á conexión

$$C_{11}^1 = -1, \quad C_{11}^2 = 0, \quad C_{12}^1 = 0, \quad C_{12}^2 - 1v, \quad C_{22}^1 = \pm 1, \quad C_{22}^2 = 0,$$

e correspóndese co plano hiperbólico.

Os espazos de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\rho_s = 0$ son iguais para calquera μ . En tal caso, se D é chá tense que $\dim\{E(\mu, D)\} = \dim\{E(-1, D)\} = 3$ a consecuencia do teorema 4.17. Pola contra, se $\rho = \rho_a \neq 0$, entón D non é fortemente proxectivamente chá. Daquela o teorema 4.17 mostra que $\dim\{E(\mu, D)\} = \dim\{E(-1, D)\} \leq 1$. Finalmente, posto que $\dim\{E(\mu, D)\} = \dim\{E(0, D)\} \geq 1$, tense que $E(\mu, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ para todo $\mu \in \mathbb{R}$. O seguinte resultado establece as posibles dimensións que toma o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para un modelo tipo \mathcal{B} con $\rho_s \neq 0$.

Teorema 5.19. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ un modelo tipo \mathcal{B} . Entón a solución xeral para a ecuación quasi-Einstein afín pode expresarse como a parte real ou imaxinaria dunha función f da forma*

$$f = \sum_{\alpha, i, j} c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^i (\log(x^1))^j,$$

onde nesta suma finita $c_{\alpha, i, j} \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, e i e j son enteiros non negativos. Ademais, se $\rho_s \neq 0$, entón dáse algunha das seguintes posibilidades:

(1) Se $\mu = 0$, entón $\dim E(\mu, D) \in \{1, 2\}$, e tense que $\dim\{E(0, D)\} = 2$ se e só se \mathcal{M} é linealmente equivalente a algunha das seguintes superficies:

(a) $C_{11}^1 = -1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^1 = 0$.

(b) $C_{11}^2 = c C_{11}^1, C_{12}^2 = c C_{12}^1, C_{22}^2 = c C_{22}^1$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

(c) $C_{11}^1 = \alpha - 1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^1 = 0$.

(2) Se $\mu = -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{0, 1, 3\}$. Ademais, se \mathcal{M} non é fortemente proxectivamente chá, entón $\dim\{E(-1, D)\} \leq 1$ e, $\dim\{E(-1, D)\} = 1$ se e só se \mathcal{M} é linealmente equivalente a algunha das seguintes superficies:

(a) $C_{22}^1 = 0, C_{22}^2 = C_{12}^1 \neq 0$.

(b) $C_{22}^1 = \pm 1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2 \neq 0, C_{11}^1 = 1 + 2C_{12}^2 \pm (C_{11}^2)^2$.

(3) Se $\mu \neq 0, -1$, entón $\dim\{E(\mu, D)\} \in \{0, 1, 2\}$, e tense que $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 1$ se e só se, salvo equivalencia linear, \mathcal{M} é da forma

$$C_{22}^1 = \pm 1, \quad C_{12}^1 = 0, \quad C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2, \quad \Delta := -C_{11}^1 + C_{12}^2 + 1 \neq 0,$$

$$\mu = \Delta^{-2} \{1 + 2(C_{11}^2)^2 - (C_{11}^1 - C_{12}^2)^2 + 2C_{12}^2\}.$$

Ademais, $\dim\{E(\mu, D)\} = 2$ se e só se \mathcal{M} é linealmente equivalente a algunha das seguintes superficies:

- (a) $C_{11}^1 = \mp 8c^2 - \frac{5}{2}$, $C_{11}^2 = c$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{12}^2 = \frac{1}{2}(\mp 8c^2 - 3)$, $C_{22}^1 = \pm 1$,
 $C_{22}^2 = 2c$, $c \neq 0$.
- (b) $C_{11}^1 = c$, $C_{11}^2 = 0$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{12}^2 = c + 1$, $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{22}^2 = 0$
con $c \notin \{-3, -1\}$.

Proba. Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha modelo tipo \mathcal{B} . Posto que ∂_{x^2} e $X = x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}$ son campos de vectores afín Killing en \mathcal{M} , tense que $E(\mu, D)$ é un \mathfrak{B} -submódulo de dimensión finita. Entón o teorema 5.16 mostra que os elementos de $E(\mu, D)$ son da forma indicada no enunciado do teorema.

Probemos agora as afirmacións (1), (2) e (3). Supoñamos que $\rho_s \neq 0$. A proba da afirmación (1) obtense do teorema 7.12. A afirmación (2) é consecuencia dos teoremas 5.17 e 7.16. Finalmente, a afirmación (3) obtense a partir dos teoremas 7.9 e 7.17. \square

Observación 5.20. Sexa \mathcal{M} unha superficie tipo \mathcal{B} con $\dim\{E(-1, D)\} = 1$. Entón \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das parametrizacións dadas na afirmación (2) do teorema 5.19. Na observación 5.10 afirmase que $\mathcal{N} := (T^*M, g_{D, \Phi})$ é conformemente Einstein para calquera Φ . Ademais, posto que \mathcal{M} non é fortemente proxectivamente chá, a diferenza do que acontece no caso das tipo \mathcal{A} , tense que \mathcal{N} non é localmente conformemente chá para ningún Φ (para ver detalles, consultar [1]).

Observación 5.21. Existe unha forte relación entre as estruturas quasi-Einstein e os produtos warped Einstein (ver exemplo 3.2). A función warping de calquera produto warped Einstein cumpre a ecuación (3.1) con $\mu = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, se $f \in E(\frac{1}{2k}, D)$ para algún enteiro positivo k e se \mathcal{E} é unha variedade Ricci chá de dimensión k , entón o produto warped $\mathcal{N} \times_{\pi^*f} \mathcal{E}$ con base $\mathcal{N} := (T^*M, g_{D, \Phi})$ é Ricci chá. Os teoremas 5.11 e 5.19 mostran que existen superficies homoxéneas con $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 1$ para $\mu = \frac{1}{2k}$ arbitrario.

5.4 Superficies tipo \mathcal{C}

Neste apartado estudamos brevemente as superficies tipo \mathcal{C} . Como se expón na introdución deste capítulo, unha superficie é tipo \mathcal{C} se é localmente afinmente equivalente á esfera \mathbb{S}^2 . No contexto riemanniano dúas esferas son iguais (isométricas) se teñen igual raio. No contexto afín, pola contra, calquera esfera coa conexión de Levi-Civita é igual (afinmente) a outra. Por este motivo, estudaremos a ecuación quasi-Einstein no modelo da esfera \mathbb{S}^2 . En tal caso, $\rho = cg$ e a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ redúcese á ecuación de Obata $\text{Hes}_f + cfg = 0$ [66, 87]. Co obxectivo de obter solucións explícitas da ecuación, consideramos unha parametrización local da esfera \mathbb{S}^2 dada como o produto warped $g(x^1, x^2) = dx^1 \otimes dx^1 + \cos^2(x^1)dx^2 \otimes dx^2$. Daquela, o tensor de Ricci asociado é $\rho = g$ e os símbolos de Christoffel asociados á conexión de Levi-Civita ∇ son

$$\mathbb{S}^2 : \Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{12}^2 = -\tan x^1, \Gamma_{22}^1 = \cos x^1 \sin x^1, \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Ademais, calquera conexión proveniente dunha métrica de curvatura seccional constante é fortemente proxectivamente chá. Tendo o anterior en consideración, o seguinte resultado onde se

mostra cal é a dimensión do espazo de solucións para un modelo tipo \mathcal{C} é consecuencia do teorema 4.17.

Teorema 5.22. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{C} , polo que \mathcal{M} é afinmente equivalente a (\mathbb{S}^2, ∇) . Entón $\dim E(-1, D) = 3$, $E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ e $E(\mu, D) = 0$ para $\mu \neq -1, 0$. Ademais, unha comprobación directa mostra que*

$$E(-1, \nabla) = \text{span}\{\sin x^1, \cos x^1 \cos x^2, \cos x^1 \sin x^2\}.$$

Observación 5.23. As funcións que xeran o espazo $E(-1, \nabla)$ no teorema anterior son precisamente as restricións á esfera \mathbb{S}^2 dos polinomios homoxéneos harmónicos de grao un en \mathbb{R}^3 : $\sin x^1$, $\cos x^1 \cos x^2$, $\cos x^1 \sin x^2$. Isto é, a restrición das proxeccións coordenadas x , y , z , respectivamente. Posto que para \mathbb{S}^2 temos que $\rho = g$, a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ reescíbese como $\text{Hes}_f = -fg$. Tomando trazas tense que $\Delta f = -2f$. As solucións desta ecuación xa foran obtidas aplicando técnicas de teoría espectral. En [58, corolario 4.49] móstrase que se P é a restrición á esfera \mathbb{S}^n dun polinomio homoxéneo harmónico de grao k en \mathbb{R}^{n+1} , entón

$$\Delta P = -k(k + n - 1)P,$$

onde Δ denota o laplaciano en \mathbb{S}^n . Considerando o caso da esfera \mathbb{S}^2 e os polinimios de grao $k = 1$, obtemos novamente que as solucións da nosa ecuación cumpren que $\Delta f = -2f$.

A ecuación quasi-Einstein afín para os modelos tipo \mathcal{A}

Este capítulo está dedicado a dúas cuestións simultáneas: o estudo de parametrizacións para modelos tipo \mathcal{A} salvo equivalencia linear e o estudo de solucións particulares da ecuación quasi-Einstein afín asociadas a estas parametrizacións. A análise que realizamos no presente capítulo e mais no seguinte apóiase principalmente nas investigacións de Brozos-Vázquez, García-Río e Gilkey [14, 15].

Os resultados principais deste capítulo aparecen recollidos en [20, 62].

6.1 Introducción

O estudo da equivalencia afín e da equivalencia linear dos modelos tipo \mathcal{A} foi tratado por Brozos-Vázquez *et al.* en [14] para conexións non chás. Canto á equivalencia afín, a clasificación é completa. No caso chá todas as conexións son localmente afinmente equivalentes á conexión do espazo euclidiano \mathbb{R}^2 . No caso linear, pola contra, o estudo de Brozos-Vázquez *et al.* establece familias paramétricas non linearmente equivalentes, mais a equivalencia linear entre elementos da propia familia non está clara. Por esta razón, completamos ao longo do capítulo esta clasificación.

Na primeira parte do capítulo establecemos as parametrizacións para os modelos tipo \mathcal{A} chans salvo equivalencia linear e estudamos a partir da ecuación quasi-Einstein afín as equivalencias lineares entre elementos da mesma familia, completando así a clasificación linear destes modelos (ver teorema 6.9). Para completar a clasificación das superficies chás imos dar dúas probas. A primeira redúcese a unha conta directa en coordenadas. A segunda, máis xeral, emprega a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ e permite realizar a clasificación linear de todos os modelos tipo \mathcal{A} facendo as consideracións oportunas para os casos non chans. A xustificación de facelo de ambas as formas atópase na observación 6.10 que, en esencia, radica no feito de que a obtención das conexións chás permitiu observar a relación biunívoca que existe entre cada modelo tipo \mathcal{A} e o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein para $\mu = -1$ asociado ao mesmo. En calquera caso, para completar a clasificación das non chás, imos empregar o teorema 4.19. Deste xeito, dúas conexións son linearmente equivalentes se e só se os espazos de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ están relacionados a partir dunha transformación linear. Por todo isto, a ecuación quasi-Einstein afín para os modelos tipo \mathcal{A} resulta prover unha ferramenta moi útil para o estudo da equivalencia linear.

A seguinte definición recolle, salvo equivalencia linear, todas as posibles parametrizacións para modelos tipo \mathcal{A} . A xustificación a este feito recóllese no teorema 6.3, que se irá probando ao longo do presente capítulo. nos

Definición 6.1. Sexan $c, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Definimos os seguintes modelos tipo \mathcal{A} distinguindo se a dimensión do espazo de campos de vectores afín Killing é seis, catro ou dous:

Modelos \mathcal{M}_i^6 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^6 &:= \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \mathcal{M}_1^6 &:= \mathcal{M}(1, 0, 0, 1, 0, 0); \\ \mathcal{M}_2^6 &:= \mathcal{M}(-1, 0, 0, 0, 0, 1); \\ \mathcal{M}_3^6 &:= \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 0, 1); \\ \mathcal{M}_4^6 &:= \mathcal{M}(0, 0, 0, 0, 1, 0); \\ \mathcal{M}_5^6 &:= \mathcal{M}(1, 0, 0, 1, -1, 0);\end{aligned}$$

Modelos $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^4 &:= \mathcal{M}(-1, 0, 1, 0, 0, 2); \\ \mathcal{M}_2^4(c) &:= \mathcal{M}(-1, 0, c, 0, 0, 1 + 2c) \text{ con } c \notin \{0, -1\}; \\ \mathcal{M}_3^4(c) &:= \mathcal{M}(0, 0, c, 0, 0, 1 + 2c) \text{ con } c \notin \{0, -1\}; \\ \mathcal{M}_4^4(c) &:= \mathcal{M}(0, 0, 1, 0, c, 2); \\ \mathcal{M}_5^4(c) &:= \mathcal{M}(1, 0, 0, 0, 1 + c^2, 2c);\end{aligned}$$

Modelos $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2) &:= \mathcal{M}\left(\frac{a_1^2 + a_2 - 1, a_1^2 - a_1, a_1 a_2, a_1 a_2, a_2^2 - a_2, a_1 + a_2^2 - 1}{a_1 + a_2 - 1}\right) \text{ con } a_1 a_2 \neq 0 \text{ e} \\ &\quad a_1 + a_2 \neq 1; \\ \mathcal{M}_2^2(b_1, b_2) &:= \mathcal{M}\left(1 + b_1, 0, b_2, 1, \frac{1 + b_2^2}{b_1 - 1}, 0\right) \text{ con } b_1 \neq 1; \\ \mathcal{M}_3^2(c) &:= \mathcal{M}(2, 0, 0, 1, c, 1) \text{ con } c \neq 0; \\ \mathcal{M}_4^2(\pm) &:= \mathcal{M}(2, 0, 0, 1, \pm 1, 0).\end{aligned}$$

Observación 6.2. A notación da definición anterior escolleuse para realizar unha distinción clara entre familias non linearmente equivalentes e para identificar a dimensión do espazo de campos afín Killing asociado a cada parametrización. Así, $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M}_i^j(\cdot))\} = j$ e dúas parametrizacións $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ e $\mathcal{M}_k^l(\cdot)$ son sempre linearmente inequivalentes se $(i, j) \neq (k, l)$. Non obstante, pode acontecer que $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ sexa linearmente equivalente a $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ para diferentes valores dos parámetros que aparecen. Por exemplo, observamos que $\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$ é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_1^2(a_2, a_1)$ mediante o cambio $x^1 \leftrightarrow x^2$.

O seguinte resultado proporciona unha clasificación linear completa para os modelos tipo \mathcal{A} distinguindo a dimensión do espazo de campos afín Killing, ou equivalentemente, o rango do tensor de Ricci.

Teorema 6.3. *Sexa \mathcal{M} unha estrutura tipo \mathcal{A} .*

(1) *Os seguintes enunciados son equivalentes.*

(a) $\text{rang}\{\rho\} = 2.$

(b) $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2.$

(c) \mathcal{M} é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ para algún i .

(2) Os seguintes enunciados son equivalentes.

(a) $\text{rang}\{\rho\} = 1.$

(b) $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4.$

(c) \mathcal{M} é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ para algún i .

(3) Os seguintes enunciados son equivalentes.

(a) $\text{rang}\{\rho\} = 0.$

(b) $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 6.$

(c) \mathcal{M} é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_i^6(\cdot)$ para algún i .

A equivalencia entre as afirmacións (a) e (b) dos puntos (1), (2) e (3) do teorema anterior foron establecidas en [14]. As equivalencias restantes son consecuencia directa dos teoremas 6.9, 6.15 e 6.21 que veremos ao longo do capítulo.

Posto que todo modelo tipo \mathcal{A} é fortemente proxectivamente chá (ver teorema 5.8), tense que o espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín (4.2) con $\mu = -1$ asociado a estes modelos é 3-dimensional (ver teorema 4.17). Basta polo tanto coñecer unha base con tres elementos $\{f_1, f_2, f_3\}$ para determinar dito espazo. A seguinte táboa sintetiza a información relativa aos modelos tipo \mathcal{A} da definición 6.1 proporcionando o seu tensor de Ricci e unha base do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$.

dim \mathfrak{K}	\mathcal{M}	$\rho = \rho_s$	Xeradores de $E(-1, \mathcal{M})$
6	\mathcal{M}_0^6	0	$\mathbb{1}, x^1, x^2$
	\mathcal{M}_1^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^1}, x^2 e^{x^1}$
	\mathcal{M}_2^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^2}, e^{-x^1}$
	\mathcal{M}_3^6	0	$\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}$
	\mathcal{M}_4^6	0	$\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 + 2x^1$
	\mathcal{M}_5^6	0	$\mathbb{1}, e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2)$
4	\mathcal{M}_1^4	$dx^2 \otimes dx^2$	$e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, e^{-x^1+x^2}$
	$\mathcal{M}_2^4(c)$	$(c^2 + c)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, e^{cx^2-x^1}$
	$\mathcal{M}_3^4(c)$	$(c^2 + c)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, x^1 e^{cx^2}$
	$\mathcal{M}_4^4(c)$	$dx^2 \otimes dx^2$	$e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, (c(x^2)^2 + 2x^1)e^{x^2}$
	$\mathcal{M}_5^4(c)$	$(1 + c^2)dx^2 \otimes dx^2$	$e^{cx^2} \cos(x^2), e^{cx^2} \sin(x^2), e^{x^1}$
2	$\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1^2 - a_1}{a_1 + a_2 - 1} & \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - 1} \\ \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - 1} & \frac{a_2^2 - a_2}{a_1 + a_2 - 1} \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, e^{x^2}, e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}$
	$\mathcal{M}_2^2(b_1, b_2)$	$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & \frac{b_1 + b_2^2}{b_1 - 1} \end{pmatrix}$	$e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2), e^{b_1 x^1 + b_2 x^2}$
	$\mathcal{M}_3^2(c)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, (x^1 - cx^2)e^{x^1}, e^{x^1+x^2}$
	$\mathcal{M}_4^2(\pm)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$e^{x^1}, x^2 e^{x^1}, (2x^1 \pm (x^2)^2)e^{x^1}$

A obtención das bases dos espazos de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ que aparecen na táboa anterior redúcese a unha comprobación en coordenadas. O seguinte exemplo indica como realizar este proceso.

Exemplo 6.4. Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1^6 = (\mathbb{R}^2, \Gamma)$, sendo $\Gamma = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$ nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^2 . Polo teorema 5.7 sabemos que as solucións nun modelo tipo \mathcal{A} son da forma: $pe^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$ sendo p un polinomio ao sumo cadrático e $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$. Ademais, sabemos que se $pe^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$ é solución, entón $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$ tamén o é. En tal caso, a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ para $f = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$ redúcese ás ecuacións

$$(\alpha_1 - 1)\alpha_1 = 0, \quad (\alpha_1 - 1)\alpha_2 = 0, \quad (\alpha_2)^2 = 0.$$

De aquí obtemos que calquera solución ten que ter $\alpha_2 = 0$, e que e^{x^1} e $\mathbb{1}$ son solucións. A solución restante ten que ser da forma $p\mathbb{1}$ ou pe^{x^1} con p linear, xa que se fose cadrático obteríamos unha solución de máis. Comezamos considerando a forma $p \cdot \mathbb{1}$, sendo $p = p_{10}x^1 + p_{01}x^2 + p_{00}$. Como $\mathbb{1}$ é solución, asumimos que $p_{00} = 0$ e a ecuación quasi-Einstein afín redúcese ás ecuacións $p_{10} = 0$ e $p_{01} = 0$, isto é, $p = 0$, polo que non obtemos solución adicional desta forma. Por

tanto, a outra solución ten que ser da forma pe^{x^1} con $p = p_{10}x^1 + p_{01}x^2$. A quasi-Einstein afín para pe^{x^1} redúcese a $e^{x^1}p_{10} = 0$. Tomando $p_{01} = 0$ obtemos $p = p_{01}x^2$. Daquela as solucións son $\mathbb{1}$, e^{x^1} e $x^2e^{x^1}$.

Observación 6.5. No exemplo anterior mostramos como obter as solucións da ecuación quasi-Einstein con $\mu = -1$ para un modelo tipo \mathcal{A} concreto. A vantaxe que teñen este tipo de estruturas é que sabemos que teñen exactamente tres solucións independentes. En particular, cando a superficie ten $\rho_s = 0$, como sucede no exemplo anterior, a ecuación quasi-Einstein afín redúcese á ecuación de Yamabe e as solucións son independentes do valor de μ .

6.2 A ecuación quasi-Einstein afín na clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A}

O seguinte lema é xeral para superficies afíns e resulta de utilidade cando se queren obter bases do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín.

Teorema 6.6. *Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha superficie afín fortemente proxectivamente chá, entón $\mathcal{Q}(\mathcal{M}) \neq e^{g(x^1, x^2)} \text{span}\{f_1(x^1), f_2(x^1), f_3(x^1)\}$.*

Proba. Probamos este resultado por redución ao absurdo. Supoñamos pois que (M, D) é unha superficie fortemente proxectivamente chá con

$$\mathcal{Q}(M, D) = e^{g(x^1, x^2)} \text{span}\{f_1(x^1), f_2(x^1), f_3(x^1)\}.$$

O teorema 4.17 afirma que $\dim\{\mathcal{Q}(M, D)\} = 3$, polo que as funcións f_i forman un conxunto linearmente independente. Sexa $\tilde{D} := {}^{-g}D$. Entón

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\tilde{D}) &= e^{-g(x^1, x^2)} e^{g(x^1, x^2)} \text{span}\{f_1(x^1), f_2(x^1), f_3(x^1)\} \\ &= \text{span}\{f_1(x^1), f_2(x^1), f_3(x^1)\}. \end{aligned}$$

Sexa $f = c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3$. Posto que as f_i non dependen de x^2 , existe $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ tal que $f(p) = 0$ e $df(p) = 0$. Entón o teorema 4.2 afirma que f é idénticamente cero nunha veciñanza de p , mais entón $\{f_1, f_2, f_3\}$ non é un conxunto linearmente independente, polo que chegamos a unha contradición. \square

Antes de comezar co estudo dos modelos tipo \mathcal{A} chans, introducimos o seguinte resultado auxiliar. Este é determinante na clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A} a partir do estudo das solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$.

Teorema 6.7. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} e sexa $\mathcal{Q}_c := \mathcal{Q}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a complexificación do espazo de solucións. Entón*

- (1) *Existe unha base de \mathcal{Q}_c de elementos da forma $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} p(x^1, x^2)$ tal que $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} \in \mathcal{Q}_c$ con $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ e p é un polinomio ao sumo cadrático en (x^1, x^2) .*

(2) Existen funcións lineares L_i da forma $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$, un polinomio Q sen termo independente que é ao sumo cadrático e unha base \mathfrak{B} de $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ tal que se cumpre algunha das seguintes catro posibilidades

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1 &= \{e^{L_1} \cos(L_2), e^{L_1} \operatorname{sen}(L_2), e^{L_3}\}, & \mathfrak{B}_2 &= \{e^{L_1}, L_2 e^{L_1}, Q e^{L_1}\}, \\ \mathfrak{B}_3 &= \{e^{L_1}, e^{L_2}, e^{L_3}\}, & \mathfrak{B}_4 &= \{e^{L_1}, L_2 e^{L_1}, e^{L_3}\}.\end{aligned}$$

Ademais, o caso no que as tres funcións de cada unha das bases anteriores dependen dunha única coordenada non pode darse.

Proba. A afirmación (1) é consecuencia do teorema 5.7. Para probar a afirmación (2), examinamos as diferentes posibilidades sabendo que existe unha base de \mathcal{Q}_c de elementos da forma da afirmación (1). Os elementos da base de $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ obtéñense tomando a parte real e imaxinaria dos da base de \mathcal{Q}_c .

Comecemos supoñendo que $e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} \in \mathcal{Q}_c$, onde $\alpha_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ para algún j . Sexan $L_1 = \Re(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)$ e $L_2 = \Im(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)$. Entón tense que $e^{L_1} \cos(L_2) \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$ e $e^{L_1} \operatorname{sen}(L_2) \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$. Se $p e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2} \in \mathcal{Q}_c$ para un polinomio p de grao polo menos un, entón o conxunto

$$\left\{ \Re(p e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}), \Im(p e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}), \Re(e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}), \Im(e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}) \right\}$$

sería linearmente independente en $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$, o cal é imposible. Ademais, dado que a dimensión de $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ é tres, se $p(x^1, x^2) e^{\beta_1 x^1 + \beta_2 x^2} \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$ con $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (\beta_1, \beta_2)$, entón p ten que ser constante e $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Consecuentemente, tense que $\mathfrak{B}_1 = \{e^{L_1} \cos(L_2), e^{L_1} \operatorname{sen}(L_2), e^{L_3}\}$.

Asumamos agora que as α_i son reais. Pola afirmación (1) tense que $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ posúe unha base de elementos da forma $p e^L$ con

$$p = a_{20}(x^1)^2 + a_{02}(x^2)^2 + a_{11}x^1x^2 + a_{10}x^1 + a_{01}x^2 + a_{00}$$

e $L = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$, onde os a_{ij} e α_i son constantes reais. Vexamos que se obteñen exactamente as tres posibilidades restantes do enunciado. Supoñamos primeiro que p é un polinomio cadrático. Entón podemos escoller (i, j) con $i + j = 2$ tal que $a_{ij} \neq 0$ e así

$$\partial_{x^i} \partial_{x^j} (p e^L) - \alpha_i \alpha_j e^L = a_{ij} e^L \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}).$$

Ademais, posto que a dimensión do espazo de solucións ten que ser tres e $\partial_{x^i} (p e^L) \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$, obtemos que $\{e^L, (\partial_{x^i} p) e^L, p e^L\}$ é unha base para $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$, obtendo \mathfrak{B}_2 . Posto que e^L é solución, podemos asumir que $a_{00} = 0$. Resta probar o caso no que p é linear. Se p é constante, obtemos tres exponenciais distintas, obtendo o caso \mathfrak{B}_3 . Se p ten grao un, é claro que e^L é solución. Entón existe un polinomio linear $\bar{L} = \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2$ tal que a solución restante é da forma $e^{\bar{L}}$ con $L \neq \bar{L}$ ou ben $\bar{L} e^L$ con \bar{L} e p linearmente independentes, obtendo \mathfrak{B}_4 e \mathfrak{B}_2 , respectivamente. Finalmente, o lema 6.6 mostra que as tres funcións das bases \mathfrak{B}_i non poden depender dunha única coordenada. Isto completa a proba da afirmación (2). \square

Observación 6.8. No teorema 5.9 móstrase que todo modelo tipo \mathcal{A} é fortemente linearmente proxectivamente equivalente a un modelo tipo \mathcal{A} chan. A proba consiste nunha conta en coordenadas. O teorema 6.7 permite probar isto directamente. En efecto, se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{A} , entón o teorema 6.7 afirma que existe unha base do espazo de solucións onde, cando menos, un dos elementos é da forma e^L con L linear. Se consideramos a estrutura $\widetilde{\mathcal{M}} := {}^{-L}\mathcal{M}$. Tense que $\mathbb{1} \in \mathcal{Q}(\widetilde{D})$ a consecuencia do teorema 4.13. Isto mostra que $\rho_s = \rho = 0$, polo que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é chá. Posto que $-L$ é linear, isto proba o resultado.

No contexto de superficies fortemente proxectivamente chás, o teorema 4.19 permítenos identificar unha base do espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ cunha única conexión. Ademais, dúas conexións nestas condicións son linearmente equivalentes se e só se os espazos de solucións con $\mu = -1$ asociados a ditas conexións están relacionadas mediante unha transformación linear. Como este é o caso para os modelos tipo \mathcal{A} , no que segue imos empregar este feito para establecer sucesivamente as posibles parametrizacións para modelos tipo \mathcal{A} salvo equivalencia linear a partir do teorema 6.7.

Nas seccións consecutivas imos obter as parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{A} da definición 6.1 e establecer, en cada caso, bases para o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para os distintos valores de μ . Esta análise realízase atendendo á dimensión do espazo de campos afín Killing (ou equivalentemente, ao rango do tensor de Ricci).

6.3 Modelos tipo \mathcal{A} chans

Nesta sección traballamos cos modelos tipo \mathcal{A} chans. Unha superficie afín é chá se e só se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 6$ (ver [14]). Todas as superficies afíns chás son localmente afinmente equivalentes. En particular, toda superficie afín chá admite coordenadas locais (x^1, x^2) de forma que os símbolos de Christoffel asociados son todos cero. Polo tanto, $E(P, \mu, \nabla) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, x^2\}$ en cada punto $P \in M$. Porén, as superficies afíns chás non son localmente linearmente equivalentes. Nesta sección faremos un estudo pormenorizado deste feito.

Comezamos estudando a equivalencia linear para as conexións chás. Estas son as únicas conexións sobre as que non coñecemos clasificacións lineares previas. A clasificación dos modelos tipo \mathcal{A} chans pode facerse totalmente a partir do estudo da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Non obstante, como xa dixemos, imos presentar primeiro unha proba que consiste nun cálculo directo. Este foi o método empregado nun principio para obter as conexións chás salvo equivalencia linear, e ademais, permite obter todas as demais a partir da construción que mostraremos no exemplo 6.13. Isto pon de manifesto a intensa relación existente entre a ecuación quasi-Einstein e as superficies fortemente proxectivamente chás. Cabe destacar que a clasificación das superficies chás foi moi reveladora no noso estudo, xa que nos deu unha mostra de que, en condicións adecuadas, as solucións da ecuación quasi-Einstein afín determinan a conexión (ver teorema 4.19).

6.3.1 A clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A} chans

No que segue recolleemos todas as parametrizacións da definición 6.1 con $\rho = 0$ ou, equivalentemente, con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 6$. Ademais, indicamos cal é o seu espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Omitimos os detalles da súa obtención xa que se reducen a facer contas en coordenadas (ver exemplo 6.4).

Parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{A} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 6$

1. $\mathcal{M}_0^6 : \Gamma_0^6 = \mathbb{1}(0, 0, 0, 0, 0, 0) \equiv \Gamma_0$, $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_0^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, x^2\}$.
2. $\mathcal{M}_1^6 : \Gamma_1^6 = \mathbb{1}(1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_1^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, e^{x^1}, x^2 e^{x^1}\}$.
3. $\mathcal{M}_2^6 : \Gamma_2^6 = \mathbb{1}(-1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_2^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, e^{x^2}, e^{-x^1}\}$.
4. $\mathcal{M}_3^6 : \Gamma_3^6 = \mathbb{1}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_3^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$.
5. $\mathcal{M}_4^6 : \Gamma_4^6 = \mathbb{1}(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_4^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 + 2x^1\}$.
6. $\mathcal{M}_5^6 : \Gamma_5^6 = \mathbb{1}(1, 0, 0, 1, -1, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_5^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2)\}$.

O seguinte resultado mostra que os anteriores son todos os posibles modelos tipo \mathcal{A} chás salvo equivalencia linear.

Teorema 6.9. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} chan. Entón existe un único i tal que \mathcal{M} é linearmente equivalente \mathcal{M}_i^6 .*

A continuación presentamos dúas probas para o teorema anterior. A primeira consiste nunha computación en coordenadas. A segunda realízase a partir do estudo da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. A idea para esta segunda proba é empregar o teorema 4.19 xunto co teorema 6.7. Este método non só serve para os modelos chans, senón para calquera modelo tipo \mathcal{A} , permitindo así obter parametrizacións adaptadas á propia ecuación.

Primeira proba do teorema 6.9. Traballamos en coordenadas coa notación introducida anteriormente. Como xa se viu no teorema 5.8, para $\Gamma = (a, b, c, d, e, f)$ o tensor de Ricci é simétrico e queda determinado por

$$\rho_{11} = (a - d)d + b(f - c), \quad \rho_{12} = cd - be \quad \rho_{22} = -c^2 + fc + (a - d)e.$$

Para simplificar a nosa análise e posto que estamos interesados nunha clasificación linear das conexións chás, imos comezar vendo que para estas conexións sempre é posible facer un cambio linear axeitado de forma que os símbolos de Christoffel Γ_{11}^2 e Γ_{12}^1 sexan cero. É obvio que se $b = c = 0$ o anterior é certo. Vexamos agora o que acontece se $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Comezamos supoñendo que $c \neq 0$, entón a condición $\rho_{12} = 0$ mostra que $d = be/c$ e, empregando isto na ecuación $\rho_{22} = 0$, obtemos $f = \frac{-ace + be^2 + c^3}{c^2}$ e $\rho = 0$. Aplicando o cambio linear $(x^1, x^2) \rightarrow (x^2, x^1 + e/cx^2)$ obtemos $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0$ nas novas coordenadas. Por outra banda, se $b \neq 0$ obtemos da ecuación $\rho_{12} = 0$ que $e = cd/b$ e empregando isto en $\rho_{11} = 0$ obtemos $f =$

$\frac{-ad+bc+d^2}{b}$. Novamente, un cambio linear da forma $(x^1, x^2) \rightarrow (x^2, x^1 + d/b x^2)$ mostra que $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0$. Daquela podemos asumir que $b = c = 0$. Facendo isto, a ecuación $\rho = 0$ redúcese ás ecuacións $0 = (a - d)d$ e $0 = (a - d)e$. Chegados a este punto distinguimos as seguintes tres situacións:

- **$a = d \neq 0$:** Facendo o cambio linear $(x^1, x^2) \rightarrow (dx^1 + f/2 x^2, \kappa x^2)$ para un κ apropiado, obtemos que as posibles conexións resultantes, salvo equivalencia linear son $\Gamma = (1, 0, 0, 1, \xi, 0)$ con $\xi \in \{-1, 0, 1\}$. Isto dá lugar directamente a \mathcal{M}_1^6 para $\xi = 0$ e \mathcal{M}_5^6 para $\xi = -1$, e a \mathcal{M}_2^6 para $\xi = 1$, facendo o cambio $(x^1, x^2) \rightarrow (-x^1 - x^2, x^1 - x^2)$.
- **$a = d = 0$:** Se $f = 0$ con $e = 0$ obtemos \mathcal{M}_0^6 e con $e \neq 0$ basta reescalar x^1 para obter \mathcal{M}_4^6 . Se, pola contra, $f \neq 0$, o cambio $(x^1, x^2) \rightarrow (x^1 - e/f x^2, f x^2)$ dá lugar a \mathcal{M}_3^6 .
- **$a \neq d$:** Posto que $\rho = 0$ obtemos $d = e = 0$. Se $a = f = 0$ volvemos chegar a \mathcal{M}_0^6 . Se $a = 0$ e $f \neq 0$, obtemos de novo \mathcal{M}_3^6 reescalando x^2 . Se $a \neq 0$ e $f = 0$ basta intercambiar x^1 e x^2 para obter a situación anterior. Finalmente, se $a \neq 0$ e $f \neq 0$, o cambio $(x^1, x^2) \rightarrow (-a x^1, f x^2)$ leva novamente a \mathcal{M}_2^6 .

Para rematar, temos que ver que \mathcal{M}_i^6 non é linearmente equivalente a \mathcal{M}_j^6 se $i \neq j$. Facer esta comprobación directamente non é complicado debido á simplicidade destas superficies chás, mais pode resultar tedioso para parametrizacións máis complicadas. Por este motivo, referimos ao procedemento da observación 5.6 para completar os detalles desta proba. Para isto basta considerar o espazo de solucións asociado a $\mu = -1$ que aparece xunto a cada unha destas parametrizacións na definición 6.1 e aplicar o teorema 4.19. \square

Segunda proba do teorema 6.9. O teorema 6.7 garante que se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{A} , entón existe unha base para o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ que é dalgunha das seguintes catro formas

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \{e^{L_1} \cos(L_2), e^{L_1} \sin(L_2), e^{L_3}\}, & \mathfrak{B}_2 &= \{e^{L_1}, L_2 e^{L_1}, Q e^{L_1}\}, \\ \mathfrak{B}_3 &= \{e^{L_1}, e^{L_2}, e^{L_3}\}, & \mathfrak{B}_4 &= \{e^{L_1}, L_2 e^{L_1}, e^{L_3}\}. \end{aligned}$$

Imponendo a condición de que \mathcal{M} sexa chá, queremos determinar, salvo equivalencia linear, as conexións asociadas a cada unha destas catro bases mediante o teorema 4.19. Para unha superficie, ser chá é equivalente a que a función constante sexa solución da quasi-Einstein afín con $\mu \neq 0$. Daquela podemos asumir que $\mathbb{1} \in \mathfrak{B}_i$ sen perda de xeneralidade.

A continuación estudamos os posibles espazos de solucións asociados á ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ obtidos a partir de cada base \mathfrak{B}_i salvo equivalencia linear. Dúas bases son equivalentes se os espazos que xeran son iguais ou se existe unha transformación linear que leve unha noutra. Empregando estas consideracións, obtemos un representante da cada clase de bases equivalentes, salvo equivalencia linear, e asociamos mediante o teorema 4.19 a conexión correspondente. Distinguimos os seguintes casos:

(\mathfrak{B}_1) Posto que $\mathbb{1}$ é solución, asumimos que $L_3 = 0$. Por outra banda, como temos que ter tres

solucións linearmente independentes, entón $L_2 \neq 0$, polo que podemos facer un cambio de coordenadas de forma que $L_2 = x^2$. Finalmente, se L_1 e L_2 fosen linearmente dependentes, entón todas as funcións da base son independentes de x^1 , contradicindo o teorema 6.7. Daquela L_1 ten que ser da forma $L_1 = ax^1 + bx^2$ con $a \neq 0$. Novamente un cambio de variables permite asumir que $L_1 = x^1$. Así, $\mathfrak{B}_1 = \{e^{x^1} \cos x^2, e^{x^1} \sin x^2, \mathbb{1}\}$. Isto dá lugar a \mathcal{M}_5^6 .

(\mathfrak{B}_2) Posto que $\mathbb{1}$ é solución, asumimos que $L_1 = 0$. Daquela $L_2 \neq 0$ e un cambio de coordenadas permite asumir que $L_2 = x^2$. Por unha banda, se Q é de grao 2, entón existe i tal que $\partial_{x^i} Q$ é unha solución de grao 1, polo que necesariamente é combinación linear de L_2 e $\mathbb{1}$. Se o $\text{Coef}(Q, x^1 x^2) \neq 0$, entón $\partial_{x^2} Q$ depende de x^1 , contradicindo que é combinación linear de L_2 e $\mathbb{1}$. De forma similar, se $\text{Coef}(Q, (x^1)^2) \neq 0$ entón $\partial_{x^1} Q$ depende de x^1 . Empregando isto xunto co teorema 6.7, obtemos que Q é da forma $(x^2)^2 + ax^1 + bx^2$ con $a \neq 0$. Daquela, un cambio de coordenadas permite asumir que $Q = (x^2)^2 + 2x^1$. Así, $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 + 2x^1\}$, dando lugar a \mathcal{M}_4^6 . Por outra banda, se Q é linear, entón ten que ser linearmente independente de x^2 , polo que un cambio de coordenadas permite asumir que $Q = x^1$ e así $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{1}, x^1, x^2\}$, dando lugar a \mathcal{M}_0^6 .

(\mathfrak{B}_3) Posto que $\mathbb{1}$ é solución, asumimos que $L_3 = 0$. Daquela, $L_1 \neq 0$ e cambiando coordenadas apropiadamente obtemos $L_1 = -x^1$. En tal caso, $L_2 = ax^1 + bx^2$ con $b \neq 0$. Un novo cambio de coordenadas permite asumir que $L_2 = x^2$. Así, $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{1}, e^{-x^1}, e^{x^2}\}$, dando lugar a \mathcal{M}_2^6 .

(\mathfrak{B}_4) Posto que $\mathbb{1}$ é solución, podemos tomar $L_1 = 0$ ou $L_3 = 0$. Por outra banda, se $L_1 = 0$, entón $L_3 \neq 0$ e podemos asumir que $L_3 = x^2$. Daquela $L_2 = ax^1 + bx^2$ con $a \neq 0$. Un cambio linear permite entón asumir que $L_2 = x^1$. Así, $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{1}, x^1, e^{x^2}\}$, dando lugar a \mathcal{M}_3^6 . Por outra banda, se $L_3 = 0$, entón $L_1 \neq 0$, polo que un cambio de coordenadas apropiado permite asumir que $L_1 = x^1$. Se L_2 fose un múltiplo de L_1 , entón as tres funcións da base serían independentes de x^2 , contradicindo o teorema 6.7, polo tanto $L_2 = ax^1 + bx^2$ con $b \neq 0$. En tal caso, existe un cambio de coordenadas axeitado tal que $L_2 = x^2$. Así, $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbb{1}, e^{x^1}, x^2 e^{x^1}\}$, dando lugar a \mathcal{M}_1^6 . \square

Observación 6.10. A segunda proba non só é máis xeral, xa que permite realizar a clasificación para os modelos non chans, senón que ao tempo que proporciona parametrizacións para estes modelos, amosa cales son os xeradores do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para todo μ (ver observación 6.5). Ademais, pon en práctica un método moi eficaz para estudar a equivalencia linear de dous modelos tipo \mathcal{A} que consiste en comprobar se existe unha transformación linear que leve unha base do espazo de solucións dun nunha base do do outro.

Tendo en conta o anterior, temos máis que xustifico o emprego da segunda proba, mais a razón pola que decidimos incluír a primeira delas radica na importancia que tiveron as modelos tipo \mathcal{A} chans no noso estudo. Inicialmente o obxectivo era completar as clasificacións lineares iniciadas en [14, 15] relativas aos modelos tipo \mathcal{A} . A primeira proba resultaba suficiente para tal propósito, mostrando as seis conexións \mathcal{M}_i^6 da definición 6.1. A forma simple destas conexións permitiu estudalas explicitamente. Foi así como notamos que as solucións asociadas a dúas conexións chás linearmente equivalente diferían precisamente nunha transformación linear. Esta cuestión foi estudada para o resto de modelos tipo \mathcal{A} obtendo o mesmo resultado. Novamente as

conexións chás dan a idea de que esta relación pode non ser exclusiva para a equivalencia linear. En particular, sabemos que todas as conexións chás son localmente afinmente equivalentes á conexión euclidiana. Todo isto orixinou a seguinte pregunta: están dúas conexións relacionadas mediante unha transformación afín se e só se o están os seus espazos de solución asociados á ecuación quasi-Einstein con $\mu = -1$? A resposta en xeral é negativa, pero se a maiores pedimos que as conexións intervindo sexan fortemente proxectivamente chás o resultado é certo, dando lugar ao teorema 4.19. Posto que este é un dos resultado principais desta memoria, consideramos apropiado explicar o proceso de concreción desta idea, que ademais pon de manifesto a intensa relación que existe entre a ecuación quasi-Einstein afín e a propiedade de ser fortemente proxectivamente chá.

Observación 6.11. En virtude da observación 6.5 e do teorema 6.9, todos os espazos de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín para un modelo tipo \mathcal{A} chans son, salvo equivalencia linear, os que se presentan ao principio desta subsección asociados ás \mathcal{M}_i^6 .

6.3.2 Consecuencias da clasificación linear de modelos tipo \mathcal{A} chans

A continuación presentamos un corolario que nos permite tratar coas parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{A} chans sen empregar a ecuación quasi-Einstein afín. Non obstante, a natureza deste resultado pon de manifesto a forte relación entre esta ecuación con $\mu = -1$ e as conexións fortemente proxectivamente chás. Por simplicidade, empregamos a notación introducida na observación 4.9.

Corolario 6.12. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón, existe un isomorfismo linear φ de \mathbb{R}^2 tal que \mathcal{M} é linearmente equivalente a ${}^\varphi\mathcal{M}_i^6$ para algún i .*

A proba deste corolario é inmediata a partir do teorema 5.9 e do teorema 6.9.

O problema da clasificación linear de modelos tipo \mathcal{A} chans foi tratado en [14, 15] empregando invariantes lineares e estudando o espazo de campos de vectores afín Killing, respectivamente. Nas seccións 6.4 e 6.5 imos ver que este estudo tamén pode realizarse empregando a ecuación quasi-Einstein afín de forma análoga a como indicamos na segunda proba do teorema 6.9. Non obstante, existe un terceiro método que ilustramos no seguinte exemplo empregando o corolario 6.12.

Exemplo 6.13. *Sexa $\varphi(x^1, x^2) = a_1x^1 + a_2x^2$ unha función linear. Se consideramos, por exemplo, $\widetilde{\mathcal{M}} = {}^\varphi\mathcal{M}_4^6$, tense que*

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} (a_1)^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 + a_1 \end{pmatrix}.$$

Daquela, $\text{rang } \rho = 1$ se e só se $a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$; mentres que $\text{rang } \rho = 2$ se e só se $a_1 \neq 0$. No primeiro caso obtemos ${}^\varphi\Gamma = \widetilde{\Gamma} = (0, 0, a_2, 0, 1, 2a_2)$ e o teorema 4.13 afirma que

$$\mathcal{Q}(\Gamma) = e^\varphi \mathcal{Q}({}^\varphi\Gamma) = e^{a_2x^2} \text{span} \left\{ \mathbb{1}, x^2, \left(2x^1 + (x^2)^2 \right) \right\},$$

e así, o teorema 4.19 mostra que $\widetilde{\mathcal{M}}$ se corresponde con \mathcal{M}_4^4 (ver definición 6.1). No segundo caso tense que ${}^\varphi\Gamma = \widetilde{\Gamma} = (2a_1, 0, 0, a_1, 1, 0)$ e, razoando analogamente, obtense

$$\mathcal{Q}(\Gamma) = e^\varphi \mathcal{Q}({}^\varphi\Gamma) = e^{a_1 x^1} \text{span} \left\{ \mathbb{1}, x^2, \left(2x^1 + (x^2)^2 \right) \right\},$$

chegando a que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_4^2(+)$ (ver definición 6.1). Repetindo este proceso para as demais conexións chás, obtemos todos os posibles modelos tipo \mathcal{A} salvo equivalencia linear.

Unha vez que temos determinados todos os modelos tipo \mathcal{A} chans salvo equivalencia linear, o seguinte corolario é consecuencia do lema 4.15 e proporciona un exemplo claro de como obter o difeomorfismo entre unha superficie afín chá e o plano euclidiano.

Corolario 6.14. *As seguintes aplicacións Φ_i entre \mathcal{M}_i^6 con $i \geq 1$ e \mathcal{M}_0^6 definen unha transformación afín entre estes espazos:*

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (e^{x^1}, x^2 e^{x^1}), & \Phi_2 &= (e^{-x^1}, e^{x^2}), & \Phi_3 &= (x_1, e^{x^2}), \\ \Phi_4 &= (2x^1 + (x^2)^2, x^2), & \Phi_5 &= (e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \text{sen}(x^2)). \end{aligned}$$

Proba. Basta aplicar o lema 4.15 considerando as bases dos espazos de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ dos modelos \mathcal{M}_i^6 que aparecen ao comezo da subsección 6.3.1. \square

6.4 Modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$

O estudo da equivalencia afín e linear de superficies tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ foi tratado en [14]. Neste artigo tamén se mostra que unha superficie localmente homoxénea ten $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ se e só se \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá e ten Ricci recorrente de rango un. No referente á equivalencia afín, a clasificación foi realizada estudando o espazo de campos afín Killing e invariantes afíns. Ademais, mostrouse que toda superficie afín homoxénea con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ é localmente afinmente equivalente a un modelo tipo \mathcal{A} . Isto supón que calquera superficie tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ é localmente isomorfa a unha tipo \mathcal{A} .

Canto á equivalencia linear, cabe destacar que en [14] non se deu unha clasificación completa. Esencialmente obtíñanse cinco familias uniparamétricas non linearmente equivalentes, pero as equivalencias dentro de cada familia non estaban claras. A nosa análise permite resolver este problema mostrando exactamente cales son todas as equivalencias entre as familias a partir da ecuación quasi-Einstein afín. Para facer isto bastaría empregar o método de comparación de conexións a partir da ecuación quasi-Einstein afín da observación 5.6. Non obstante, e para continuar cunha análise autocontida, presentamos a continuación unha proba da clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A} con rang $\rho = 1$ análoga á segunda proba do teorema 6.9.

6.4.1 A clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$

No que segue recolleemos todas as parametrizacións da definición 6.1 con $\text{rang } \rho = 1$ ou, equivalentemente, con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$. Ademais, indicamos cal é o seu tensor de Ricci asociado e o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Omitimos os detalles da súa obtención xa que se reducen a facer contas en coordenadas (ver observación 6.4).

Parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{A} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$

1. $\mathcal{M}_1^4 : \Gamma_1^1 = \mathbb{1}(-1, 0, 1, 0, 0, 2)$,
 $\rho = dx^2 \otimes dx^2$ e $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{-x^1+x^2}, e^{x^2}, x^2 e^{x^2}\}$.
2. $\mathcal{M}_2^4(c) : \Gamma_2^1(c) = \mathbb{1}(-1, 0, c, 0, 0, 1 + 2c)$ con $c \notin \{0, -1\}$,
 $\rho = (c + c^2)dx^2 \otimes dx^2$ e $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, e^{-x^1+cx^2}\}$.
3. $\mathcal{M}_3^4(c) : \Gamma_3^1(c) = \mathbb{1}(0, 0, c, 0, 0, 1 + 2c)$ con $c \notin \{0, -1\}$,
 $\rho = (c + c^2)dx^2 \otimes dx^2$ e $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{cx^2}, x^1 e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}\}$.
4. $\mathcal{M}_4^4(c) : \Gamma_4^1(c) = \mathbb{1}(0, 0, 1, 0, c, 2)$ para todo $c \in \mathbb{R}$,
 $\rho = dx^2 \otimes dx^2$ e $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, (2x^1 + c(x^2)^2)e^{x^2}\}$.
5. $\mathcal{M}_5^4(c) : \Gamma_5^1(c) = \mathbb{1}(1, 0, 0, 0, 1 + c^2, 2c)$,
 $\rho = (1 + c^2)dx^2 \otimes dx^2$ e $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{cx^2} \cos(x^2), e^{cx^2} \text{sen}(x^2), e^{x^1}\}$.

O seguinte resultado mostra que os anteriores son, salvo equivalencia linear, todos os posibles modelos tipo \mathcal{A} con $\text{rang } \rho = 1$.

Teorema 6.15. *Sexa \mathcal{M} unha xeometría tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$. Entón \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$. Ademais,*

1. $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_j^4(\cdot)$ se $i \neq j$.
2. $\mathcal{M}_2^4(c)$ é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_2^4(\tilde{c})$ se e só se $c = \tilde{c}$ ou $c = -1 - \tilde{c}$.
3. $\mathcal{M}_3^4(c)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_3^4(\tilde{c})$ para $c \neq \tilde{c}$.
4. $\mathcal{M}_4^4(c)$ é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_4^4(\tilde{c})$ se e só se $c = \tilde{c}$ ou $c \neq 0$ e $\tilde{c} \neq 0$.
5. $\mathcal{M}_5^4(c)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_5^4(\tilde{c})$ para $c \neq \tilde{c}$.

Observación 6.16. Na proba do teorema 5.11, vimos que se un modelo tipo \mathcal{A} ten $\text{rang } \rho \leq 1$, sempre é posible facer un cambio linear de forma que $\rho = \rho_{22}dx^2 \otimes dx^2$. Ademais, esta condición equivale a que $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0$. En tal caso, a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ asociada á conexión $\Gamma = (a, 0, b, 0, c, d)$ ten como solución $e^{ax^1+bx^2}$. Por esta razón, para evitar que $\mathbb{1}$ sexa solución e, consecuentemente, $\rho = \rho_s = 0$, impoñemos que $a^2 + b^2 \neq 0$. Facendo un cambio de coordenadas linear da forma $(x^1, x^2) \rightarrow (a_{11}x^1 + a_{12}x^2, a_{22}x^2)$ con $a_{11}a_{22} \neq 0$ conservamos a condición $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0$, asegurando que $\rho = \rho_{22}dx^2 \otimes dx^2$.

Empregando estes cambios de coordenadas, non é difícil atopar todas as posibles conexións Γ salvo equivalencia linear, probando o teorema anterior. Non obstante, co obxectivo de continuar cunha análise máis autocontida, realizamos este estudo a partir da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ analogamente a como fixemos na segunda proba do teorema 6.9.

Proba do teorema 6.15. Para probar este resultado imos empregar novamente o teorema 6.7. Posto que $\text{rang } \rho = 1$, comezamos co estudo da casuística tendo en conta as consideracións da observación anterior.

(\mathfrak{B}_1) A base é da forma $\{e^{L_1} \cos(L_2), e^{L_1} \sin(L_2), e^{L_3}\}$. Necesariamente $L_2 \neq 0$, polo que cambiamos coordenadas de forma que $L_2 = x^2$. Por unha banda, se L_1 é un múltiplo de L_2 , entón existe $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $L_1 = cx^2$. Así, $L_3 = a_1x^1 + a_2x^2$ con $a \neq 0$, pois do contrario as tres funcións da base dependerían unicamente de x^2 , contradicindo o teorema 6.7. Polo tanto, sempre podemos cambiar coordenadas de forma que $L_3 = x^1$. Obtemos $\mathfrak{B}_1 = \{e^{cx^2} \cos x^2, e^{cx^2} \sin x^2, e^{x^1}\}$, dando lugar a $\mathcal{M}_5^4(c)$. Por outra banda, se L_1 non é múltiplo de x^2 , entón podemos facer un cambio de coordenadas tal que $L_1 = x^1$. Impondo que $e^{x^1} \cos x^2$ e $e^{x^1} \sin x^2$ sexan solucións obtemos condicións sobre certos símbolos de Christoffel, de forma que a conexión ten que ser da forma $\Gamma = (a, 0, c, 1, e, 0)$. Ademais, a ecuación quasi-Einstein asociada a estas solucións redúcese a $-(a-2)e + c^2 + 1 = 0$. Daquela $e \neq 0$ e tomando $a = \frac{c^2+2e+1}{e}$ o determinante do tensor de Ricci é $\frac{c^2+(e+1)^2}{e}$. Entón, é condición necesaria que $c = 0$ e $e = -1$ para asegurar que $\text{rang } \rho < 2$, mais en tal caso, $\rho = 0$. Polo tanto este segundo caso non dá lugar a novas parametrizacións.

(\mathfrak{B}_2) A base é da forma $\{e^{L_1}, L_2e^{L_1}, Qe^{L_1}\}$. Posto que $L_1 \neq 0$, cambiamos coordenadas de forma que $L_1 = x^2$. Para comezar supoñamos que L_2 é un múltiplo de L_1 , polo que podemos asumir que $L_2 = x^2$. Entón o teorema 6.7 mostra que Q ten que depender de x^1 e posto que $\partial_{x^i} Qe^{L_1}$ tamén é solución, podemos asumir que $Q = a(x^2)^2 + x^1 + bx^2$. Un cambio de coordenadas apropiado permite reescribir $Q = c(x^2)^2 + 2x^1$. Así, $\mathfrak{B}_2 = \{e^{x^2}, x^2e^{x^2}, e^{x^2}(c(x^2)^2 + 2x^1)\}$, dando lugar a $\mathcal{M}_4^4(c)$. Supoñamos agora que L_2 non é un múltiplo de L_1 , polo que podemos asumir que $L_2 = x^1$. Posto que $\partial_{x^i} Qe^{L_1}$ tamén é solución, podemos asumir que $Q = c(x^1)^2 + ax^2$. Se $a = 0$ con $c \neq 0$, as tres funcións non poden satisfacer a ecuación quasi-Einstein afín a un tempo. Asumindo que $a \neq 0$, obtemos $\mathfrak{B}_2 = \{e^{x^2}, x^1e^{x^2}, (c(x^1)^2 + 2x^2)e^{x^2}\}$. O Ricci da conexión asociada a esta base ten rango un se e só se $c = 0$, dando lugar a $\mathcal{M}_4^4(0)$.

(\mathfrak{B}_3) A base é da forma $\{e^{L_1}, e^{L_2}, e^{L_3}\}$. Posto que $L_1 \neq 0$ podemos tomar $L_1 = x^2$. Supoñamos primeiro que $L_2 = ax^2$ con $a \notin \{0, 1\}$. Daquela, L_3 ten que depender de x^1 , polo que facendo os cambios de coordenadas oportunos podemos asumir que $L_3 = x^1$. As funcións que obtemos son $e^{x^2}, e^{ax^2}, e^{x^1}$. Entón o cambio linear $(x^1, x^2) \rightarrow (cx^2 - x^1, cx^2)$ con $c = \frac{1}{a-1} \notin \{-1, 0\}$ permite tomar $\mathfrak{B}_3 = \{e^{cx^2}, e^{(c+1)x^2}, e^{cx^2-x^1}\}$ dando lugar a $\mathcal{M}_2^4(c)$. Supoñamos agora que L_2 non é múltiplo de L_1 , entón podemos tomar un cambio de coordenadas de forma que $L_2 = x^2$. Daquela, $L_3 = a_1x^1 + a_2x^2$. Empregando que e^{x^1} e e^{x^2} son solucións obtemos como condición necesaria que a conexión sexa da forma $\Gamma = (a+1, a, c, c, b, b+1)$. Supoñamos primeiro que $c = 0$. Para obter unha solución con $\text{rang } \rho = 1$, necesariamente $ab = 0$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Se $a = 0$ e $b \neq 0$ (o outro caso obtense facendo o cambio $x^1 \leftrightarrow x^2$), obtemos as solucións $e^{x^1}, e^{x^2}, e^{bx^2}$, dando lugar ao caso anterior. Se polo contrario $c \neq 0$ temos dous casos. Se $a = 0$ (ou $b = 0$),

entón $c = 1$ e non obtemos novas solucións. Finalmente, se $a \neq 0$ (ou $b \neq 0$), necesariamente $\text{rang } \rho = 2$, polo que non obtemos máis casos.

(\mathfrak{B}_4) A base é da forma $\{e^{L_1}, L_2 e^{L_1}, e^{L_3}\}$. Comezamos tomando $L_1 = x^2$. Se $L_2 = cx^2$ para algún c , podemos cambiar coordenadas de forma que $L_3 = x^2 - x^1$ e obtemos $\mathfrak{B}_4 = \{e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, e^{x^2 - x^1}\}$, dando lugar a \mathcal{M}_1^4 . Por outra banda, se L_2 non é múltiplo de L_1 , podemos escoller coordenadas de forma que $L_2 = x^1$. Tense que e^{x^2} e $x^1 e^{x^2}$ son solucións se e só se a conexión é da forma $\Gamma = (0, a, 1, b, 0, c + 1)$ con $-ac + a + b^2 = 0$. Se $a = 0$, entón $b = 0$. Ademais, $c \neq 0$ para asegurar que non sexa chá. Entón $e^{x^2}, x^1 e^{x^2}, e^{cx^2}$ son solucións que tras un cambio de coordenadas apropiado dan lugar a $\mathfrak{B}_4 = \{e^{\bar{c}x^2}, x^1 e^{\bar{c}x^2}, e^{(\bar{c}+1)x^2}\}$ con $c = \frac{\bar{c}+1}{\bar{c}}$, de onde obtemos $\mathcal{M}_3^4(\bar{c})$. Finalmente, se $a \neq 0$, entón $\text{rang } \rho = 2$, polo que non hai máis posibilidades.

Para probar as equivalencias dadas polas afirmacións 1–5 basta considerar as bases de solucións das parametrizacións dadas ao principio da presente subsección 6.1 e empregar a observación 5.6. \square

Observación 6.17. No desenvolvemento da proba anterior vemos que hai algúns modelos que admiten outras parametrizacións que tamén terían resultado moi simples para usar como definición das $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$. Non obstante, decidimos continuar coas parametrizacións obtidas en [14] para facilitar a transición dun documento a outro.

Como xa se dixo na introdución do capítulo, na clasificación de Brozos-Vázquez *et al.* xa se estableceu que ningunha $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_j^4(\cdot)$ se $i \neq j$, mais non se indicaban as equivalencias dentro de cada familia. O teorema 6.15 resolve este problema establecendo exactamente cales son as equivalencias en cada caso. Resolver este problema traballando directamente coas parametrizacións resulta laborioso. Por este motivo, o método descrito na observación 5.6 resulta de moita utilidade.

Observación 6.18. O estudo de Brozos-Vázquez *et al.* realizado en [14] resolve o problema da equivalencia afín para modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{R}(\mathcal{M})\} = 4$ empregando invariantes afíns. En particular, se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{R}(\mathcal{M})\} = 4$, móstrase que \mathcal{M} é afinmente equivalente a \mathcal{M}_1 , a algún $\mathcal{M}_2^4(c)$ ou a algún $\mathcal{M}_3^4(c)$.

Os modelos $\mathcal{M}_2^4(c)$ e $\mathcal{M}_3^4(c)$ son afinmente equivalentes para todo c . Tamén os modelos \mathcal{M}_1^4 e $\mathcal{M}_4^4(c)$ son afinmente equivalentes para todo c .

6.4.2 O espazo de solucións para as $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$

Os espazos de solucións para $\mu = -1$ asociados aos modelos $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ foron establecidos ao comezo da subsección 6.4.1 empregando o método do exemplo 6.4. A continuación estudamos o espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín para $\mu \neq -1$ asociado a cada un destes modelos. Por unha banda sabemos que se $\mu \neq -1$ o espazo de solucións ten ao sumo dimensión dous, dado que toda superficie tipo \mathcal{A} é fortemente proxectivamente chá. Por outra banda, de existir solucións, polo menos unha delas ten que ser da forma $e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}$ con $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$. No caso de haber outras solucións linearmente independentes tería que ser solución outra exponencial con coeficientes $(b_1, b_2) \neq (a_1, a_2)$ ou ben a anterior multiplicada por un polinomio linear $b_1 x^1 + b_2 x^2$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tendo en conta estas consideracións, estudamos unha a unha

as posibilidades e establecemos estes espazos. Sexa \mathfrak{Q} o operador quasi-Einstein afín asociado á estrutura \mathcal{M} e $f = e^{a_1x^1+a_2x^2}$.

Caso \mathcal{M}_1^4 . Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1^4$ e $\mathfrak{Q}(f) = 0$ con $\mu \neq -1$. Tense que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{11}(f) &= a_1(a_1 + 1)f, & \mathfrak{Q}_{12}(f) &= a_1(a_2 - 1)f, \\ \mathfrak{Q}_{22}(f) &= (a_2^2 - 2a_2 - \mu)f.\end{aligned}$$

Considerando $\mathfrak{Q}_{22}(f) = 0$ obtemos unha ecuación cadrática con parámetro μ de discriminante $4 + 4\mu \neq 0$. Se $a_2 = 1 \pm \sqrt{1 + \mu}$, entón $\mathfrak{Q}_{22}(f) = 0$. Posto que $\mu \neq -1$, tense que $a_2 \neq 1$. Entón $a_1 = 0$ e non existen solucións da forma pf para grao $\{p\} \geq 1$, así

$$E(\mu, D) = \text{span}\{e^{(1-\sqrt{1+\mu})x^2}, e^{(1+\sqrt{1+\mu})x^2}\}.$$

Caso $\mathcal{M}_2^4(c)$. Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2^4(c)$ con $c^2 + c \neq 0$ e $\mathfrak{Q}(f) = 0$ con $\mu \neq -1$. Tense que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{11}(f) &= a_1(a_1 + 1)f, & \mathfrak{Q}_{12}(f) &= a_1(a_2 - c)f, \\ \mathfrak{Q}_{22}(f) &= (a_2^2 - (2c + 1)a_2 - c(c + 1)\mu)f.\end{aligned}$$

Se $a_2 = c$, entón $\mathfrak{Q}_{22}(f) = c(1 + c)(1 + \mu)f \neq 0$. Polo tanto, $a_2 \neq c$ e así $a_1 = 0$. Empregando que $\mathfrak{Q}_{22}(f) = 0$ obtemos unha ecuación cadrática en a_2 . O discriminante desta ecuación anúlase cando $\mu = \mu_0$ con $\mu_0 := -\frac{(1+2c)^2}{4c(1+c)}$.

1. Se $\mu \neq \mu_0$, entón obtemos dúas solucións distintas $a_2 = s_i$, $i = 1, 2$ da relación $\mathfrak{Q}_{22}(f) = 0$, e así $E(\mu, D) = \text{span}\{e^{s_1x^2}, e^{s_2x^2}\}$. Non existen solucións pf con grao $\{p\} \geq 1$.
2. Se $\mu = \mu_0$, entón $a_2 = c + \frac{1}{2}$ e $E(\mu, D) = \text{span}\{e^{a_2x^2}, x^2e^{a_2x^2}\}$.

Caso $\mathcal{M}_3^4(c)$. Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_3^4(c)$ con $c^2 + c \neq 0$ e $\mathfrak{Q}(f) = 0$ con $\mu \neq -1$. Este modelo é afinmente equivalente a $\mathcal{M}_2^4(c)$, polo que a dimensión de $E(\mu, D)$ é a mesma. Tense que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{11}(f) &= a_1^2f, & \mathfrak{Q}_{12}(f) &= a_1(a_2 - c)f, \\ \mathfrak{Q}_{22}(f) &= (a_2^2 - a_2(1 + 2c) - c(1 + c)\mu)f.\end{aligned}$$

Tense que $a_1 = 0$ e de $\mathfrak{Q}_{22}(f)$ obtemos a mesma relación cadrática en a_2 que a de \mathcal{M}_2^c . A análise restante é igual ca naquel caso con $\mu_0 := -\frac{(1+2c)^2}{4c(1+c)}$.

1. Se $\mu \neq \mu_0$, entón obtemos dúas solucións distintas $a_2 = s_i$ con $i = 1, 2$, provenientes da relación $\mathfrak{Q}_{22}(f) = 0$ e $E(\mu, D) = \text{span}\{e^{s_1x^2}, e^{s_2x^2}\}$.
2. Se $\mu = \mu_0$, entón $a_2 = c + \frac{1}{2}$ e $E(\mu, D) = \text{span}\{e^{a_2x^2}, x^2e^{a_2x^2}\}$.

Caso $\mathcal{M}_4^4(c)$. Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_4^4(c)$ e $\mathfrak{Q}(f) = 0$ con $\mu \neq -1$. Estes modelos son afinmente equivalentes a \mathcal{M}_1^4 e, así, a dimensión do espazo de solucións é a mesma. Tense que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{11}f &= a_1^2 f, & \mathfrak{Q}_{12}f &= a_1(a_2 - 1)f, \\ \mathfrak{Q}_{22}f &= (a_2^2 - 2a_2 - a_1c - \mu)f.\end{aligned}$$

Tense que $a_1 = 0$ e que $a_2^2 - 2a_2 - \mu = 0$. O discriminante desta segunda relación é $4 + 4\mu \neq 0$, polo que sempre existen dúas solucións distintas $a_2 = 1 \pm \sqrt{1 + \mu}$. Non existen solucións lineares pf con grao $\{p\} \geq 1$ e

$$E(\mu, D) = \text{span}\{e^{(1-\sqrt{1+\mu})x^2}, e^{(1+\sqrt{1+\mu})x^2}\}.$$

Os modelos $\mathcal{M}_4^4(c)$ con $c \neq 0$ son as únicas superficies afíns con $\text{rang}\{\rho\} = 1$ que admiten un elemento $f \in E(-1, D)$ onde $f = pe^{a_1x^1 + a_2x^2}$ e p é cadrático.

Caso $\mathcal{M}_5^4(c)$. Sexa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_5^4(c)$ e $\mathfrak{Q}(f) = 0$ con $\mu \neq -1$. Este modelo non é tipo \mathcal{B} . Tense que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{11}f &= a_1(1 + a_1)f, & \mathfrak{Q}_{12}(f) &= a_1(a_2 - c)f, \\ \mathfrak{Q}_{22}(f) &= (a_2^2 - 2a_2c + a_1 - (1 + c^2)\mu)f.\end{aligned}$$

Se $a_1 = -1$, entón $a_2 = c$ e $\mathfrak{Q}_{22}(f) = -(1 + c^2)(1 + \mu)f \neq 0$. Entón $a_1 \neq -1$, polo que $a_1 = 0$ e tense que $a_2^2 - 2a_2c - (1 + c^2)\mu = 0$. O discriminante da ecuación cadrática anterior é cero se $\mu = \mu_0$ con $\mu_0 = -\frac{c^2}{1+c^2}$. Se $\mu = \mu_0$, entón $a_2 = c$ e $E(\mu_0, D) = \text{span}\{e^{cx^2}, x^2e^{cx^2}\}$. Se $\mu \neq \mu_0$, obtemos dúas solucións $a_2 = s_1$ e $a_2 = s_2$ con $s_1 \neq s_2$. Non hai outras solucións para esta ecuación, de forma que $E(\mu, D) = \text{span}\{e^{s_1x^2}, e^{s_2x^2}\}$.

6.5 Modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$

Tal e como acontecía nos casos precedentes, a dimensión do espazo de campos afín Killing dun modelo tipo \mathcal{A} queda caracterizada polo rango do tensor de Ricci. Neste caso, $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ se e só se $\text{rang}\rho = 2$. No contexto de superficies tipo \mathcal{A} con tensor de Ricci non dexenerado, equivalencia linear e afín coinciden. Para ver máis información ao respecto destes aspectos, así como as probas destes resultados, véxase [15]. É claro, por tanto, que os modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ presenta un comportamento diferente ao dos outros modelos, xa que para modelos chans tipo \mathcal{A} só existe unha clase afín e cinco lineares, e para os modelos con $\text{rang}\rho = 1$ existen tres familias non afinmente equivalentes nas que dúas delas se subdividen noutras dúas para a equivalencia linear.

Se o tensor de Ricci dunha superficie ten rango dous, entón define un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ non-dexenerado, dando así lugar a unha métrica sobre a superficie. Neste artigo de Brozos-Vázquez *et al.* resólvese o problema da equivalencia linear (ou afín) sobre os modelos tipo \mathcal{A} con Ricci de rango dous. Non obstante, imos continuar co obxectivo de facer unha análise autocontida e imos estudar primeiramente as parametrizacións destas xeometrías empregando novamente a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Nunha segunda parte da sección, estudaremos as solucións desta ecuación para os restantes valores de μ sobre as parametrizacións que obteñamos

da análise anterior. Isto presenta unha diferenza importante con respecto ao estudo desenvolvido en [14], posto que as parametrizacións que obtemos empregando a ecuación quasi-Einstein son máis manexables que as que se obtiñan naquel traballo. Ademais, o estudo da equivalencia entre conexións era realizado a partir do estudo de invariantes lineares empregando que ρ define unha métrica. Isto define un *espazo de moduli*, que permite dar unha interpretación gráfica da clasificación que resulta interesante. O espazo de *moduli* de conexións localmente homoxéneas non chás foi estudado en [15]. No noso caso, este estudo pode facerse directamente dado que a equivalencia linear para as nosas parametrizacións é abordable a partir do método da observación 5.6 empregando a ecuación quasi-Einstein afín. Non obstante, posto que as novas parametrizacións permiten simplificar a discusión orixinal, realizamos igualmente o estudo do espazo de *moduli* empregando os seguintes invariantes afíns (ou lineares) definidos orixinalmente en [14].

Definición 6.19. Sexan $\rho_{v,ij} := \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^k$, $\psi := \text{Tr}_\rho\{\rho_v\} = \rho^{ij}\rho_{v,ij}$ e $\Psi := \det\{\rho_v\}/\det\{\rho\}$.

Unha conta en coordenadas mostra que efectivamente ψ e Ψ son invariantes lineares (ver observación 5.5). O seguinte teorema de [14] mostra como estudar as equivalencias lineares (ou afíns) dos modelos tipo \mathcal{A} empregando estes invariantes.

Teorema 6.20. Sexan Γ e $\tilde{\Gamma}$ modelos tipo \mathcal{A} tales que ρ e $\tilde{\rho}$ son non-dexenerados e da mesma sinatura. Entón, Γ e $\tilde{\Gamma}$ son afínmente equivalentes se e só se $(\psi, \Psi)(\Gamma) = (\psi, \Psi)(\tilde{\Gamma})$.

No que segue recolleemos as parametrizacións da definición 6.1 con $\text{rang } \rho = 2$ ou equivalentemente, con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 2$. Ademais, indicamos cal é o seu tensor de Ricci asociado, o espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$, e os invariantes lineares (ou afíns) ψ e Ψ . Omitimos os detalles da súa obtención xa que se reducen a facer contas en coordenadas (ver observación 6.4).

Parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{A} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 2$

$$1. \mathcal{M}_1^2(a_1, a_2) : \Gamma_1^2(a_1, a_2) := \frac{1}{a_1 + a_2 - 1} (a_1^2 + a_2 - 1, a_1^2 - a_1, a_1 a_2, a_1 a_2, a_2^2 - a_2, a_1 + a_2^2 - 1)$$

con $a_1 + a_2 \neq 1$ e $a_1 a_2 \neq 0$. Entón

$$\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{x^1}, e^{x^2}, e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}\}, \quad \rho = \frac{1}{a_1 + a_2 - 1} \begin{pmatrix} a_1^2 - a_1 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 - a_2 \end{pmatrix},$$

$$\psi = \frac{a_1 - a_1^2 + a_2 + 4a_1 a_2 + a_1^2 a_2 - a_2^2 + a_1 a_2^2}{a_1 a_2} \quad \text{e}$$

$$\Psi = \frac{1 + a_1 - a_1^2 - a_1^3 + a_2 + 4a_1 a_2 + a_1^2 a_2 - a_2^2 + a_1 a_2^2 - a_2^3}{a_1 a_2}.$$

$$2. \mathcal{M}_2^2(b_1, b_2) : \Gamma_2^2(b_1, b_2) := (1 + b_1, 0, b_2, 1, \frac{1+b_2^2}{b_1-1}, 0) \text{ con } b_1 \neq 1 \quad \text{e} \\ (b_1, b_2) \neq (0, 0). \text{ Entón}$$

$$\mathcal{Q} = e^{x^1} \{\cos(x^2), \text{sen}(x^2), e^{(b_1-1)x^1 + b_2 x^2}\}, \quad \rho = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & \frac{b_1 + b_2^2}{b_1 - 1} \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{2b_1^2 + b_1^3 + 6b_2^2 + 4b_1 + b_1 b_2^2}{b_1^2 + b_2^2} \quad \text{e} \quad \Psi = \frac{2(2 + b_1^2 + 3b_2^2 + 2b_1 + 2b_1 b_2^2)}{b_1^2 + b_2^2}.$$

3. $\mathcal{M}_3^2(c) : \Gamma_3^2(c) := (2, 0, 0, 1, c, 1)$ con $c \neq 0$. Entón

$$\mathcal{Q} = e^{x^1} \text{span}\{\mathbb{1}, x^1 - cx^2, e^{x^2}\}, \quad \rho = dx^1 \otimes dx^1 + cdx^2 \otimes dx^2 \quad \text{e}$$

$$(\psi, \Psi) = (7, 10) + \frac{1}{c}(1, 4).$$

4. $\mathcal{M}_4^2(\pm) : \Gamma_4^2(\pm) := (2, 0, 0, 1, \pm 1, 0)$. Entón

$$\mathcal{Q} = e^{x^1} \text{span}\{\mathbb{1}, x^2, 2x^1 \pm (x^2)^2\}, \quad \rho = dx^1 \otimes dx^1 \pm dx^2 \otimes dx^2 \quad \text{e}$$

$$(\psi, \Psi) = (7, 10).$$

O seguinte resultado mostra que os anteriores son, salvo equivalencia linear, todos os posibles modelos tipo \mathcal{A} con $\text{rang}\{\rho\} = 2$ (ou equivalentemente, $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$).

Teorema 6.21. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} con $\text{rang}\{\rho\} = 2$.*

(1) \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$.

(2) $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_j^2(\cdot)$ se $i \neq j$.

Proba. Retomando a proba do teorema 6.15 coa consideración de que $\text{rang}\rho = 2$, distinguimos os seguintes casos.

(\mathfrak{B}_1) A base é da forma $\{e^{L_1} \cos(L_2), e^{L_1} \sin(L_2), e^{L_3}\}$. Posto que $L_2 \neq 0$, podemos cambiar coordenadas de forma que $L_2 = x^2$. Se L_1 fose un múltiplo de L_2 , obtemos unha conexión con Ricci de rango un. Se pola contra, L_1 non é múltiplo de L_2 , poderíamos tomar $L_1 = x^1$. Así, $L_3 = a_1x^1 + a_2x^2$. Empregando que $e^{x^1} \cos x^2$ e $e^{x^1} \sin x^2$ son solucións, obtemos que a conexión ten que ser da forma $\Gamma = (a, 0, b, 1, c - 1, 0)$ con $-ac + a + b^2 + 2c - 1 = 0$. Se $c = 1$, isto nunca se cumpre, polo que supoñemos $c \neq 1$. Así, $a = \frac{b^2 + 2c - 1}{c - 1}$ con $bc \neq 0$ para asegurar que $\text{rang}\rho = 2$. Impoñendo agora que $e^{b_1x^1 + b_2x^2}$ sexa solución, tense que $b = b_2$ ou $b_1 = 1$. Se $b_1 = 1$ a solución é complexa, polo que asumimos que $b = b_2$ e como $b_1 = b \neq 1$ obtemos $c = \frac{b_1 + b_2^2}{b_1 - 1}$, dando lugar a $\mathcal{M}_1^2(b_1, b_2)$.

(\mathfrak{B}_2) A base é da forma $\{e^{L_1}, L_2e^{L_1}, Qe^{L_1}\}$. Un cambio de coordenadas permite asumir que $L_1 = x^1$. Se L_2 é un múltiplo de L_1 obtemos unha conexión con $\text{rang}\rho = 1$. Entón L_1 e L_2 son linearmente independentes, polo que existe un cambio de coordenadas linear tal que $L_2 = x^2$. Posto que $\partial_{x^i} Qe^{L_1}$ tamén é solución, podemos asumir que $Q = c(x^2)^2 + ax^1$. Se $a = 0$ non obtemos solución adicional da forma que procuramos. Se $a \neq 0$ obtemos $\mathfrak{B}_2 = \{e^{x^1}, x^2e^{x^1}, (c(x^2)^2 + 2x^1)e^{x^2}\}$. O Ricci da conexión asociada a esta base ten rango dous se e só se $c \neq 0$. Reescalando x^2 obtemos $\mathcal{M}_4^2(\pm)$.

(\mathfrak{B}_3) A base é da forma $\{e^{L_1}, e^{L_2}, e^{L_3}\}$. Posto que $L_1 \neq 0$, tomamos $L_1 = x^2$. Se L_2 é un múltiplo de L_1 , obtemos unha conexión con $\text{rang}\rho < 2$. Se pola contra L_2 non é múltiplo de L_1 podemos facer un cambio de coordenadas de forma que $L_2 = x^2$. Daquela, $L_3 = a_1x^1 + a_2x^2 \neq 0$. Empregando que e^{x^1} e e^{x^2} son solucións, obtemos como condición necesaria que a conexión sexa da forma $\Gamma = (a + 1, a, c, c, b, b + 1)$ con $ab + c - c^2 = 0$. Se $b = 0$ a única opción para obter solución con $\text{rang}\rho = 2$ é que $c = 1$. Isto dá lugar a $\mathcal{M}_1^2(a + 1, 0)$. O caso $a = 0$ é

análogo. Supoñamos agora que $ab \neq 0$. Entón $a = \frac{c^2 - c}{b}$. Finalmente, empregamos que $e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}$ é solución. Se $a_1 + a_2 = 1$, non obtemos novas solucións. Se $a_1 + a_2 \neq 1$, obtemos $\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$, onde $a_1 a_2 \neq 0$ para asegurar que $\text{rang } \rho = 2$.

(\mathfrak{B}_4) A base é da forma $\{e^{L_1}, L_2 e^{L_1}, e^{L_3}\}$. Posto que $L_1 \neq 0$, cambiamos coordenadas de forma que $L_1 = x^2$. Se L_3 é un múltiplo de L_1 , obtemos unha conexión con $\text{rang } \rho < 2$, polo que podemos cambiar coordenadas de forma que $L_3 = x^1 + x^2$. Empregando que e^{x^2} e $e^{x^1 + x^2}$ son solucións chegamos a que a conexión ten que ser da forma $\Gamma = (1, a, 1, b, 0, c)$ con $a(-2 + c) - (-1 + b)b = 0$. Engadindo que $(b_1 x^1 + b_2 x^2)e^{x^2}$ sexa solución, obtemos que ou ben $b_2 = 0$ ou ben $b = 0$ e $c = 2$. Se se cumprise o primeiro, non obteríamos solución da forma requirida, polo que asumimos que $b = 0$ e $c = 2$. Daquela $\text{rang } \rho = 2$ se e só se $a \neq 0$, e posto que $b_2 \neq 0$ obtemos $\mathcal{M}_3^2(c)$.

Para ver que non son linearmente equivalentes entre si, basta aplicar o método da observación 5.6. Así, dado que as bases que xeran as familias $\mathcal{M}_2^2(\cdot)$, $\mathcal{M}_3^2(\cdot)$ e $\mathcal{M}_4^2(\cdot)$ teñen cando menos un elemento que non é combinación linear de elementos da base doutra familia, é claro que ningún elemento das catro familias é linearmente equivalente a calquera outro dunha familia distinta. Isto proba 2. \square

Observación 6.22. A proba anterior emprega unha análise análoga á da segunda proba do teorema 6.9 e á da proba do teorema 6.15. Aínda que é posible estudar directamente as parametrizacións salvo equivalencia linear, dun xeito parecido ao da primeira proba do teorema 6.9 (ver [14]), resulta máis proveitoso realizar este estudo a partir da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. A vantaxe que presenta este método é que as parametrizacións que obtemos válendonos da ecuación quasi-Einstein son máis manexables. Isto débese a que as tres funcións da base do espazo de solucións son escollidas deliberadamente cunha forma sinxela. Intuitivamente, a escolla dunha base do espazo de solucións axeitada equivale a atopar coordenadas apropiadas en tanto en canto unhas determinan as outras. Isto mostra novamente a importancia da ecuación neste contexto de superficies fortemente proxectivamente chás.

O teorema anterior mostra que ningún elemento das catro familias parametrizando os modelos tipo \mathcal{A} con $\text{rang } \{\rho\} = 2$ é linearmente equivalentes a un doutra familia. Non obstante, as equivalencias lineares dentro de cada familia están por determinar. Aínda que nalgúns casos isto é doado de facer aplicando a observación 5.6, imos estudar familia por familia estas posibles equivalencias. Con este obxectivo, estudamos o espazo de *moduli* asociado ao tensor de Ricci dos modelos tipo \mathcal{A} con $\text{rang } \{\rho\} = 2$ a partir dos invariantes lineares da definición 6.19.

A imaxe 6.5.1 representa o espazo de *moduli* a partir da imaxe de (ψ, Ψ) . A rexión á dereita da curva azul representa o espazo de *moduli* con tensor de Ricci definido positivo; o do medio representa o indefinido, e á esquerda da curva en vermello, o definido negativo. A curva vermella á esquerda que representa a fronteira entre o espazo de *moduli* con Ricci definido negativo e indefinido é σ_ℓ , mentres que a curva azul da dereita que representa a fronteira entre o espazo con Ricci definido positivo e indefinido é σ_r , onde

$$\begin{aligned}\sigma_\ell(t) &:= (-4t^2 - t^{-2} + 2, 4t^4 - 4t^2 + 2), \\ \sigma_r(t) &:= (4t^2 + t^{-2} + 2, 4t^4 + 4t^2 + 2).\end{aligned}$$

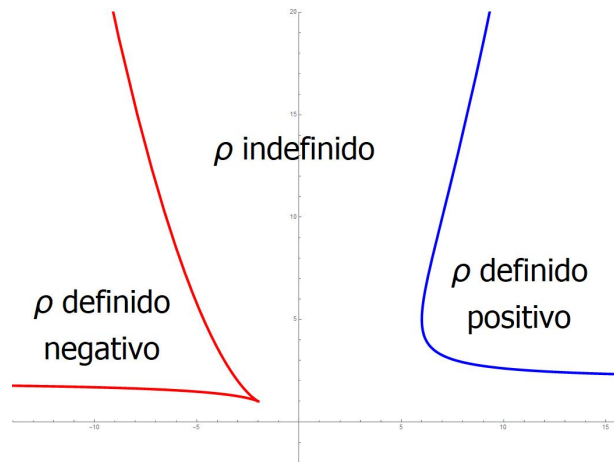


Figura 6.5.1: Espazos de *moduli* dos modelos tipo \mathcal{A} con $\det(\rho) \neq 0$.

Aínda que (ψ, Ψ) establece unha correspondencia unívoca con cada modelo salvo equivalencia linear no interior de cada un dos tres espazos anteriores, as imaxes intersécanse ao longo das curvas σ_ℓ e σ_r .

A continuación estudamos a equivalencia linear para as parametrizacións que aparecen no teorema 6.21 a partir do estudo dos invariantes ψ e Ψ .

Caso 1. Equivalencia linear de $\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$. O noso interese céntrase en estudar a equivalencia linear entre dous espazos $\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$ e $\mathcal{M}_1^2(b_1, b_2)$. Entón, unha vez máis, o teorema 4.19 permite estudar a equivalencia a partir da dos espazos de solucións asociados á ecuación quasi-Einstein, isto é, estudar cando existe un isomorfismo Φ tal que $\Phi^* \mathcal{Q}(\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)) = \mathcal{Q}(\mathcal{M}_1^2(b_1, b_2))$. A existencia de dito isomorfismo induce unha relación de equivalencia entre os pares (a_1, a_2) e (b_1, b_2) que denotamos por $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$. Posto que

$$\mathcal{Q}(\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)) = \text{span}\{e^{x^1}, e^{x^2}, e^{a_1 x^1 + a_2 x^2}\},$$

basta considerarmos os isomorfismos $\Phi(x^1, x^2) = (L_1, L_2)$, onde as L_i son funcións lineares en x^1 e x^2 tales que

$$\{L_1, L_2, a_1 L_1 + a_2 L_2\} = \{x^1, x^2, b_1 x^1 + b_2 x^2\}. \quad (6.1)$$

Entón o problema redúcese a achar (b_1, b_2) tal que se verifique a igualdade anterior ou, equivalentemente, $(b_1, b_2) \sim (a_1, a_2)$. Deste xeito, o caso máis doado consiste en tomar $L_1 = x^1$, $L_2 = x^2$ e $b_i = a_i$. Por dar outro exemplo menos trivial, se tomamos $L_1 = x^2$ e $L_2 = b_1 x^1 + b_2 x^2$, tense que $a_1 L_1 + a_2 L_2 = x^1$, de onde obtemos que $b_1 = \frac{1}{a_2}$ e $b_2 = -\frac{a_1}{a_2}$. En particular, cada unha das posibilidades que presenta a igualdade (6.1) correspóndense cos elementos do *grupo simétrico* ou *grupo de permutacións* de tres elementos, s_3 . En efecto, se $\sigma_{ijk} \in s_3$ é a permutación dada

por $1 \rightarrow i, 2 \rightarrow j, 3 \rightarrow k$ e denotamos $L_3 = b_1 L_1 + b_2 L_2$, tense que

$$\begin{aligned} \sigma_{123} : L_1 = x^1, L_2 = x^2, L_3 = a_1 x^1 + a_2 x^2, & (a_1, a_2) \sim (a_1, a_2). \\ \sigma_{213} : L_2 = x^1, L_1 = x^2, L_3 = a_2 x^1 + a_1 x^2, & (a_1, a_2) \sim (a_2, a_1). \\ \sigma_{132} : L_1 = x^1, L_3 = x^2, L_2 = -\frac{a_1}{a_2} x^1 + \frac{1}{a_2} x^2, & (a_1, a_2) \sim \left(-\frac{a_1}{a_2}, \frac{1}{a_2}\right). \\ \sigma_{321} : L_3 = x^1, L_2 = x^2, L_1 = \frac{1}{a_1} x^1 - \frac{a_2}{a_1} x^2, & (a_1, a_2) \sim \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_1}\right). \\ \sigma_{231} : L_2 = x^1, L_3 = x^2, L_1 = -\frac{a_2}{a_1} x^1 + \frac{1}{a_1} x^2, & (a_1, a_2) \sim \left(-\frac{a_2}{a_1}, \frac{1}{a_1}\right). \\ \sigma_{312} : L_3 = x^1, L_1 = x^2, L_2 = \frac{1}{a_2} x^1 - \frac{a_1}{a_2} x^2, & (a_1, a_2) \sim \left(\frac{1}{a_2}, -\frac{a_1}{a_2}\right). \end{aligned}$$

Posto que ψ e Ψ son invariantes lineares, permanecen constantes pola acción do grupo de permutacións s_3 . Aínda que en xeral s_3 actúa sen puntos fixos, existen casos dexenerados onde a acción ten puntos fixos.

Se $\det\{\rho\} > 0$ e $\text{Tr}\{\rho\} < 0$, entón ρ é definido negativo; se $\det\{\rho\} > 0$ e $\text{Tr}\{\rho\} > 0$, entón ρ é definido positivo, e se $\det\{\rho\} < 0$, entón ρ é indefinido. As seis rectas (representadas en negro na figura 6.5.2)

$$\{x = 0, x = -1, y = 0, y = -1, x + y = 1, x = y\}$$

dividen as rexións nas que ρ é definido negativo (en maxenta), ρ é definido positivo (laranxa) e ρ é indefinido (verde). As tres rexións (en cor) están divididas novamente en seis rexións delimitadas polas rectas anteriores. Cada unha destas rexións máis pequenas recibe o nome de *rexión fundamental*, xa que se transforma en calquera das outras cinco mediante a acción de s_3 . En particular, as rexións máis destacadas formando un triángulo tricolor son rexións fundamentais. En consecuencia, nese triángulo atópase un representante (linear) de cada elemento da familia $\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$.

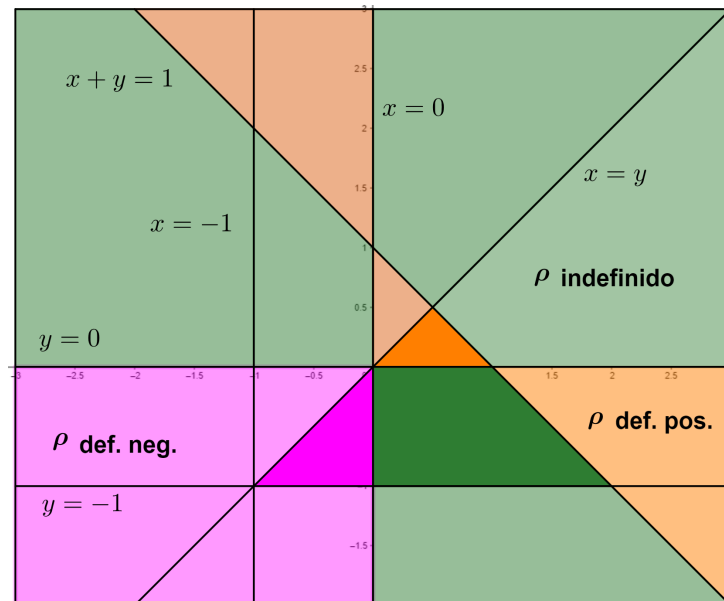


Figura 6.5.2: As seis rectas.

A continuación estudamos a equivalencia linear entre os elementos do espazo que se representa na figura distinguindo se o tensor de Ricci é definido negativo, definido positivo ou indefinido.

1.1. O tensor de Ricci é definido negativo. Consideramos a rexión fundamental do espazo de *moduli* onde ρ é definido negativo. O triángulo formado polas inecuacións $-1 \leq y \leq x < 0$ proporciona unha rexión fundamental onde o tensor de Ricci é definido negativo. As outras cinco rexións fundamentais obtéñense a partir desta aplicando algún elemento de s_3 listado arriba. As rexións intersecan ao longo das rectas $x = y$, $x = -1$ e $y = -1$. O punto singular $(-1, -1)$ é conservado por todos os elementos de s_3 . Obtemos o espazo de *moduli* completo xa que toda conexión Γ con ρ_Γ definido negativo ten por solucións tres exponenciais distintas que son, salvo equivalencia linear, $\{e^{x^1}, e^{x^2}, e^{a_1x^1+a_2x^2}\}$ con $a_1a_2 \neq 0$ e $1 \neq a_1 + a_2$. Isto non é certo para conexións cuxo tensor de Ricci é definido positivo ou indefinido, xa que existen conexións con estas características cuxo espazo de solucións asociado non está dado por tres exponenciais distintas. Polo tanto, só obtemos parte do espazo de *moduli*. Nas figuras 6.5.3 e 6.5.4 representamos o dominio fundamental para o caso no que ρ é definido negativo, a súa imaxe por cada un dos elementos de s_3 e a súa imaxe no espazo de *moduli*.

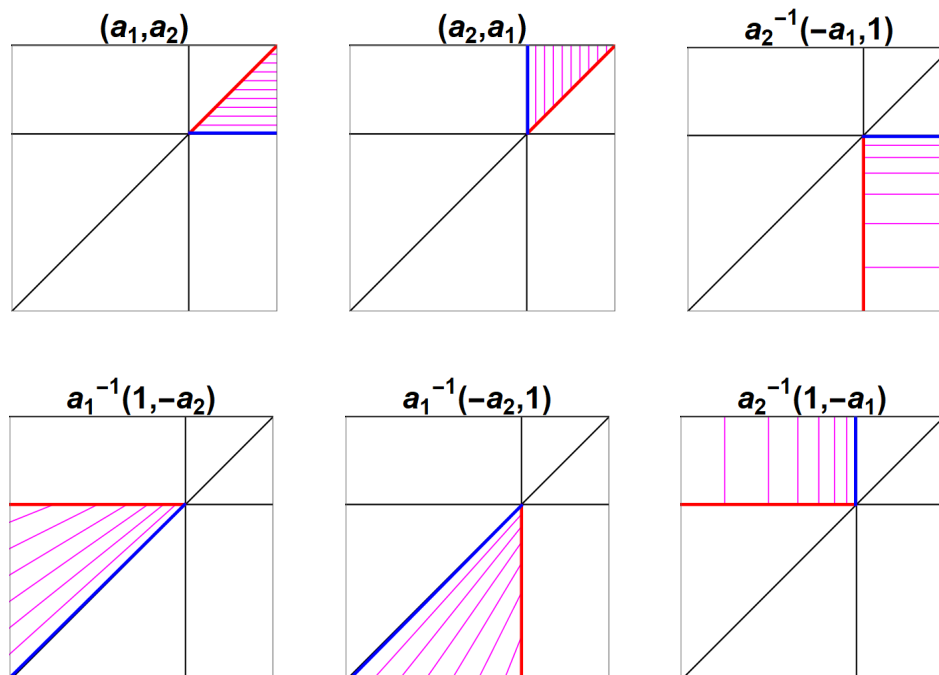


Figura 6.5.3: Os dominios fundamentais para ρ definido negativo.

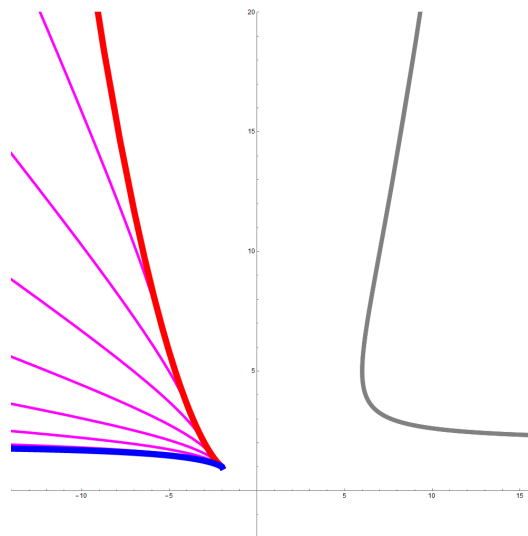


Figura 6.5.4: Espazo de *moduli* para ρ definido negativo.

A curva da fronteira σ_ℓ do espazo de *moduli* é a imaxe da fronteira do triángulo aberto. A curva $(\psi(t, t), \Psi(t, t))$ con $-1 \leq t < 0$ aparece en vermello e a curva $(\psi(t, -1), \Psi(t, -1))$ con $-1 \leq t < 0$, en azul. Estas curvas permanecen invariantes pola acción dun subgrupo \mathbb{Z}_2 de s_3 . O segmento restante da fronteira do triángulo dado por $(0, t)$ con $0 \leq t \leq -1$ non ten significado xeométrico.

1.2. O tensor de Ricci é indefinido. As inecuacións

$$0 < y < x \quad \text{e} \quad x + y > 1$$

proporcionan un dominio fundamental para o Ricci indefinido. Como avanzabamos na análise do caso definido negativo, hai porcións do espazo de *moduli* onde o tensor de Ricci é indefinido que non están presentes nesta rexión fundamental. A rexión esténdese infinitamente cara arriba e á dereita, polo que non ten máis fronteiras que as seccións das rectas

$$y = 0, \quad x = y, \quad \text{e} \quad x + y = 1$$

correspondentes. Nas figuras 6.5.5 e 6.5.6, mostramos este dominio fundamental xunto coa súa imaxe pola acción dos elementos de s_3 e o seu espazo de *moduli*, respectivamente.

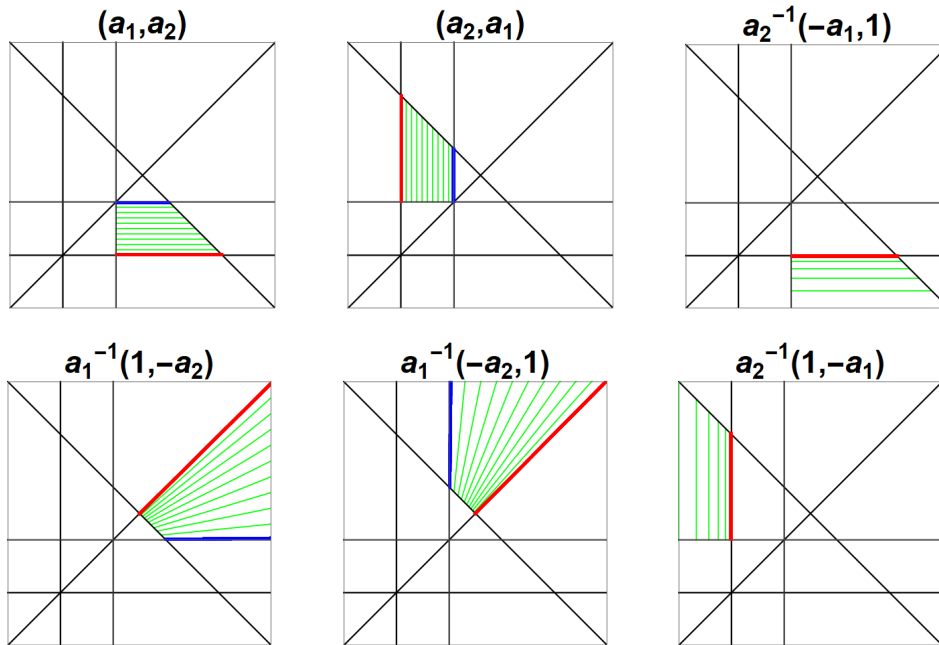


Figura 6.5.5: Os dominios fundamentais para Ricci indefinido.

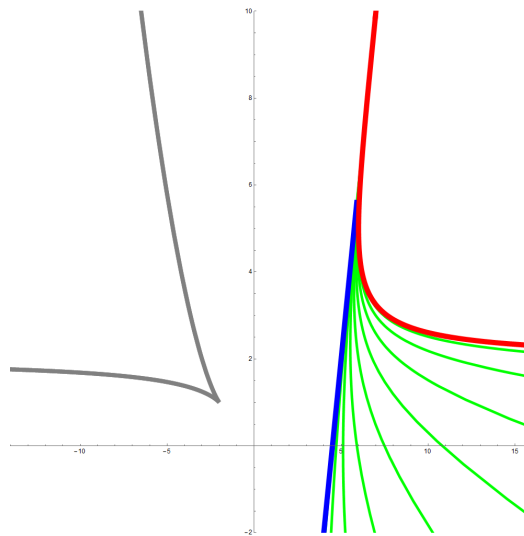


Figura 6.5.6: O espazo de *moduli* para ρ indefinido.

A curva ideal $(t, 0^-)$ con $t \in (0, 1)$ que aparece en azul vai sobre a recta excepcional $(7, 10) - t(1, 4)$ con $t > 0$. Esta non é a imaxe do espazo de *moduli*, xa que a recta excepcional aparece na análise das estruturas cuxo espazo de solucións asociado, \mathcal{Q} , contén un polinomio, como veremos un pouco máis adiante. A curva $(2t, -1)$ con $t \in (0, 1)$ que aparece en vermello vai sobre a parte da curva σ_r que está por debaixo da recta $\Psi = 10$.

1.3. O tensor de Ricci é definido positivo. A rexión fundamental que consideramos é o triángulo de vértices $\{(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. O segmento da fronteira (t, t) con $0 < t < \frac{1}{2}$ pertence á rexión fundamental, mais os segmentos da fronteira correspondentes a $(t, 0)$ con $0 \leq t \leq 1$ e $(t, 1 - t)$ con $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ non pertencen a esta rexión fundamental. De novo hai porcións do espazo de *moduli* no que o tensor de Ricci é definido positivo que non están presentes nesta rexión fundamental e que apecen na análise dos casos 2 e 3. O espazo de *moduli* con ρ definido positivo queda á dereita da curva σ_r . De novo aparece a recta excepcional $(7, 10) + t(1, 4)$ con $t \geq 0$ que fica á dereita de σ_r e é tanxente a esta curva no punto $(7, 10)$. As estruturas afíns asociadas a tres exponenciais reais con ρ definido positivo quedan á dereita da curva σ_r e á esquerda da recta excepcional.

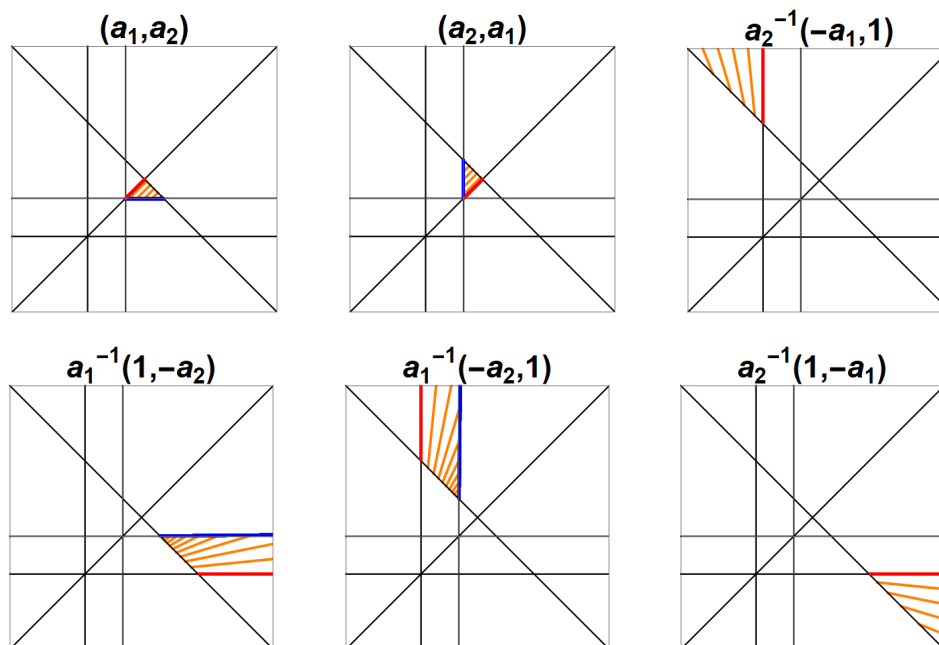


Figura 6.5.7: Os dominios fundamentais para ρ definido positivo.

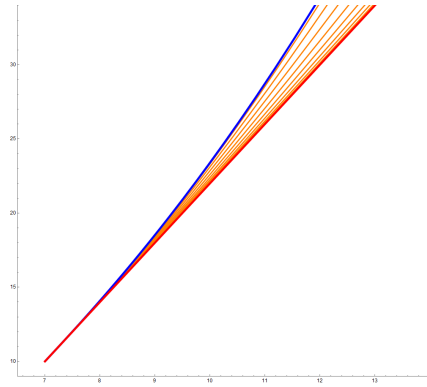


Figura 6.5.8: O espazo de *moduli* para ρ definido positivo.

Nos debuxos das figuras 6.5.7 e 6.5.8, σ_r aparece en vermello e representa a imaxe da curva (t, t) con $0 < t \leq \frac{1}{2}$. A recta excepcional aparece en azul e representa o segmento $(t, 0)$ con $0 < t < 1$ que non pertence a esta parte do espazo de *moduli*, senón que se obtén cando \mathcal{Q} é un polinomio. Isto será tratado posteriormente. O último dos segmentos da fronteira corresponde a $((1+t)/2, (1-t)/2)$ con $0 \leq t \leq 1$. Este vai sobre a recta $a_1 + a_2 = 1$ e non ten significado xeométrico.

Caso 2. Equivalencia linear de $\mathcal{M}_2^2(b_1, b_2)$. Sexa $\Gamma = \Gamma_2^2(b_1, b_2)$ con $b_1 \neq 1$ e $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$. Tense que $b_1 > 1$ corresponde con ρ definido positivo, mentres que $b_1 < 1$ corresponde con ρ indefinido. Ademais, (b_1, b_2) e $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ son linearmente equivalentes se e só se $b_1 = \tilde{b}_1$ e $b_2 = \pm\tilde{b}_2$. Os dous dominios fundamentais e as imaxes no espazo de *moduli* móstrase na figura 6.5.9.

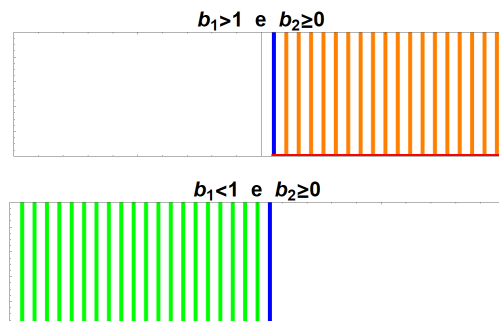


Figura 6.5.9: Dominios das exponenciais complexas.

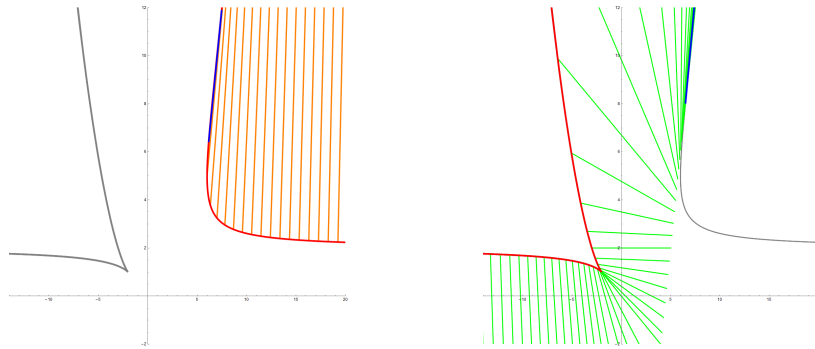


Figura 6.5.10: Espazo de *moduli* das exponenciais complexas.

Caso 3. Equivalencia linear de $\mathcal{M}_3^2(c)$ e $\mathcal{M}_4^2(\pm)$. Tense que $\Gamma = \Gamma_3^2(a)$ con $a \neq 0$ ou $\Gamma = \Gamma_4^2(\pm)$. Se $\Gamma = \Gamma_3^2(a)$ con $a > 0$, entón ρ é definido positivo e $(\psi, \Psi)(\Gamma_3^2) = (7, 10) + \frac{1}{a}(1, 4)$. Se $\Gamma = \Gamma_4^2(+)$ entón ρ definido positivo e $(\psi, \Psi)(\Gamma_4^2(+)) = (7, 10)$. Estas dúas estruturas dan lugar á curva $(7, 10) + t(1, 4)$ con $t \geq 0$ que aparece en vermello na figura 6.5.11. Por outra banda, se $a < 0$, entón ρ é definido negativo. Esta estrutura xunto con $\Gamma_4^2(-)$ dan lugar á curva $(7, 10) - t(1, 4)$ con $t \geq 0$ marcada en azul no espazo de *moduli* da figura 6.5.11. Estas dúas curvas dividen a porción do o espazo de *moduli* onde \mathcal{Q} contén tres exponenciais reais (caso 1) da porción do espazo de *moduli* onde \mathcal{Q} contén exponenciais complexas (caso 2).

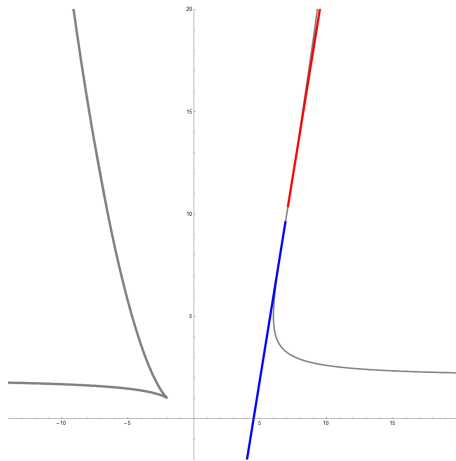


Figura 6.5.11: Espazo de *moduli* con \mathcal{Q} contendo algún polinomio.

Observación 6.23. A discusión anterior aclara cal é a equivalencia linear para os modelos tipo \mathcal{A} con Ricci de rango dous da definición 6.1. Ademais, o teorema 4.17 mostra que para calquera deses modelos $\dim E(\mu, \mathcal{M}) = 0$ con $\mu \notin \{-1, 0\}$ e $E(0, \mathcal{M}) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$. Así, os espazos $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ calculados ao principio desta sección asociados ás $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ resollen o estudo do espazo de solucións para os modelos tipo \mathcal{A} con Ricci de rango dous, salvo equivalencia linear.

Capítulo 7

A ecuación quasi-Einstein afín para os modelos tipo \mathcal{B}

Este capítulo dedícase principalmente a dúas cuestións. A primeira pretende estender a clasificación linear de modelos tipo \mathcal{B} efectuada en [14, teorema 3.11] a modelos chás. A segunda consiste en estudar os espazos de solucións da ecuación quasi-Einstein afín sobre os modelos que recolle esta clasificación estendida. Para facer isto, apoiámonos de novo no traballo de Brozos-Vázquez *et al.* [14].

O contido deste capítulo baséase en gran medida nas investigacións realizadas en [62].

7.1 Introducción

Unha superficie tipo \mathcal{B} está caracterizada pola existencia de dous campos de vectores afín Killing X e Y tales que $[X, Y] = Y$. Como consecuencia o espazo de campos de vectores afín Killing sobre estas superficies pode ter dimensións 2, 3, 4 e 6. Se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{B} , tense que $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$ se e só se \mathcal{M} é tamén tipo \mathcal{A} e non chá. O caso no que $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 3$ está caracterizado pola existencia dun terceiro campo de vectores afín Killing que se pode determinar, salvo equivalencia linear. Ademais, unha superficie afín é chá se e só se $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 6$. Os detalles de todo o anterior poden atoparse en [14], onde se realiza unha clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 3$ e $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$ (ver [14, teorema 3.11]). Porén, aínda que neste traballo aparecen resultados relativos a modelos con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 2$, o estudo da clasificación linear non foi resolto para estes modelos. O problema da clasificación linear para modelos con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 2$ antóllase difícil de abordar. En particular, posto que os modelos tipo \mathcal{B} , a diferenza dos tipo \mathcal{A} , non son *a priori* fortemente proxectivamente chans, a ecuación quasi-Einstein afín, que resulta tremendamente útil na clasificación linear para os modelos tipo \mathcal{A} , non permite realizar esta tarefa. En oposición a isto, o caso chan, que foi deixado fóra da clasificación de [14], si pode realizarse empregando este método, xa que toda superficie afín chá é fortemente proxectivamente chá, podendo así aplicar o teorema 4.19. Por este motivo, o noso primeiro obxectivo é realizar a clasificación dos modelos tipo \mathcal{B} chans.

Na segunda parte do capítulo estudamos a ecuación quasi-Einstein afín sobre os modelos tipo \mathcal{B} que obtemos da clasificación linear de Brozos-Vázquez *et al.* xunto cos modelos chans que se obteñen na primeira parte deste capítulo. Organizamos a información distinguindo entre os posibles valores de μ e a dimensión do espazo de campos de vectores afín Killing. O obxectivo é proporcionarmos bases explícitas do espazo de solucións para estes modelos. Para isto teremos en conta a información recollida nos teoremas da sección 5.3 do capítulo 5. Os modelos chans estúdanse na sección 7.2, obténdose unha clasificación linear destes modelos a partir da ecuación

quasi-Einstein afín. Na sección 7.3 estudamos os modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ e na sección 7.4, aqueles con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$. Finalmente, na sección 7.5 realizamos a análise dos modelos con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$.

A seguinte definición recolle todas as posibles parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\mathfrak{K}(\mathcal{M}) \in \{3, 4, 6\}$, salvo equivalencia linear.

Definición 7.1. Definimos os seguintes modelos tipo \mathcal{B} distinguindo pola dimensión do espazo de vectores afín Killing asociado:

Modelos $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_0^6 &:= \mathcal{N}(0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \mathcal{N}_1^6(\pm) &:= \mathcal{N}(1, 0, 0, 0, \pm 1, 0); \\ \mathcal{N}_2^6(c) &:= \mathcal{N}(c - 1, 0, 0, c, 0, 0) \text{ con } c \neq 0; \\ \mathcal{N}_3^6 &:= \mathcal{N}(-2, 1, 0, -1, 0, 0); \\ \mathcal{N}_4^6 &:= \mathcal{N}(0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ \mathcal{N}_5^6 &:= \mathcal{N}(-1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \mathcal{N}_6^6(c) &:= \mathcal{N}(c, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ con } c \neq 0, -1.\end{aligned}$$

Modelos $\mathcal{N}_i^4(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1^4(\kappa) &:= \mathcal{N}(2\kappa, 1, 0, \kappa, 0, 0) \text{ con } \kappa \notin \{0, -1\}; \\ \mathcal{N}_2^4(\kappa, \theta) &:= \mathcal{N}(2\kappa + \theta - 1, 0, 0, \kappa, 0, 0) \text{ con } \kappa \notin \{0, -\theta\} \text{ e } \theta \neq 0; \\ \mathcal{N}_3^4(\kappa) &:= \mathcal{N}(2\kappa - 1, 0, 0, \kappa, 0, 0) \text{ con } \kappa \neq 0.\end{aligned}$$

Modelos $\mathcal{N}_i^3(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1^3(\pm) &:= \mathcal{N}\left(-\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}, 0\right); \\ \mathcal{N}_2^3(c) &:= \mathcal{N}\left(-\frac{3}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}, c, 2\right); \\ \mathcal{N}_3^3 &:= \mathcal{N}(-1, 0, 0, -1, -1, 0); \\ \mathcal{N}_4^3 &:= \mathcal{N}(-1, 0, 0, -1, 1, 0).\end{aligned}$$

Observación 7.2. A notación da definición anterior escolleuse para realizar unha distinción clara entre familias non linearmente equivalentes e para identificar a dimensión do espazo de campos de vectores afín Killing asociado a cada parametrización. Así, $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N}_i^j(\cdot))\} = j$ e dúas parametrizacións $\mathcal{N}_i^j(\cdot)$ e $\mathcal{N}_k^l(\cdot)$ son sempre linearmente inequivalentes se $(i, j) \neq (k, l)$.

O seguinte teorema afirma que, salvo equivalencia linear, os únicos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\mathfrak{K}(\mathcal{M}) \in \{3, 4, 6\}$ son os dados na definición 7.1. As afirmacións 1, 2 e 3 foron obtidas por Brozos-Vázquez *et al.* en [14]. A afirmación 4 é consecuencia do teorema 7.4, que se enuncia e proba na seguinte sección deste capítulo.

Teorema 7.3. *Sexa \mathcal{N} un modelo tipo \mathcal{B} en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.*

1. $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} \in \{2, 3, 4, 6\}$.
2. $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 3$ se e só se \mathcal{N} é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_i^3(\cdot)$ para algún i .

3. As seguintes afirmacións son equivalentes:

- (a) $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 4$.
- (b) \mathcal{N} é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_i^4(\cdot)$ para algún i .
- (c) \mathcal{N} é tamén tipo \mathcal{A} .

4. As seguintes afirmacións son equivalentes.

- (a) $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 6$.
- (b) \mathcal{N} é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$ para algún i .
- (c) \mathcal{N} é chá.

7.2 Modelos tipo \mathcal{B} chans

Nesta sección estudamos os modelos tipo \mathcal{B} chans, isto é, aqueles con $\rho = 0$. Cabe destacar que ao contrario do que pasaba cos modelos tipo \mathcal{A} , existen modelos tipo \mathcal{B} que non son fortemente proxectivamente chans en xeral, polo que o emprego do teorema 4.19 para determinar as parametrizacións deste tipo de estruturas non é factible. Ademais, existen modelos tipo \mathcal{B} que non son chans pero cuxo tensor de Ricci só ten parte anti-simétrica, é dicir, $\rho_s = 0$ con $\rho = \rho_a \neq 0$ (ver teorema 7.9). Non obstante, posto que os modelos chans si son fortemente proxectivamente chans, seguimos a ter unha relación biunívoca entre conexión e solucións da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ a través do teorema 4.19. Por este motivo, na primeira parte desta sección realizamos a clasificación dos modelos tipo \mathcal{B} chans. Ademais, analogamente a como fixemos no caso dos modelos tipo \mathcal{A} chans, proporcionamos dúas probas diferentes: unha calculística e máis directa, e outra empregando a ecuación quasi-Einstein afín.

Recuperando a notación introducida no apartado 1.1.2 identificamos cada conexión cos símbolos de Christoffel asociados. En particular, coas coordenadas usuais de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, cada conexión dun modelo tipo \mathcal{B} é da forma $\Gamma = (x^1)^{-1}(a, b, c, d, e, f)$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{N}(a, b, c, d, e, f)$ a correspondente estrutura afín en \mathbb{R}^2 . Utilizamos tamén a notación introducida na subsección 5.1.1, dando os símbolos de Christoffel dun modelo tipo \mathcal{B} na forma $\Gamma_{ij}{}^k = (x^1)^{-1}C_{ij}{}^k$ con $C_{ij}{}^k \in \mathbb{R}$.

7.2.1 A clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{B} chans

No que segue recolleemos todas as parametrizacións da definición 7.1 con $\rho = 0$ ou equivalentemente, con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 6$. Ademais, indicamos cal é o seu espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$. Omitimos os detalles da súa obtención xa que se reducen a facer contas en coordenadas (ver observación 6.4).

Parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 6$

1. $\mathcal{N}_0^6 := \mathcal{N}(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_0^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, x^2\}$.

2. $\mathcal{N}_1^6(\pm) := \mathcal{N}(1, 0, 0, 0, \pm 1, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_1^6(\pm)) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^2, (x^1)^2 \pm (x^2)^2\}$.
3. $\mathcal{N}_2^6(c) := \mathcal{N}(c-1, 0, 0, c, 0, 0)$ con $c \neq 0$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_2^6(c)) = \text{span}\{\mathbb{1}, (x^1)^c, (x^1)^c x^2\}$.
4. $\mathcal{N}_3^6 := \mathcal{N}(-2, 1, 0, -1, 0, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_3^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, \frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1} + \log(x^1)\}$.
5. $\mathcal{N}_4^6 := \mathcal{N}(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_4^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, x^2 + x^1 \log(x^1)\}$.
6. $\mathcal{N}_5^6 := \mathcal{N}(-1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_5^6) = \text{span}\{\mathbb{1}, \log(x^1), x^2\}$.
7. $\mathcal{N}_6^6(c) := \mathcal{N}(c, 0, 0, 0, 0, 0)$ con $c \neq 0, -1$, $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_6^6(c)) = \text{span}\{\mathbb{1}, (x^1)^{1+c}, x^2\}$.

O seguinte resultado constitúe unha clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{B} chans. A diferenza do caso dos modelos tipo \mathcal{A} chans para os que existían, salvo equivalencia linear, exactamente seis posibilidades, para os tipo \mathcal{B} chans existen familias paramétricas infinitas cuxos elementos non son linearmente equivalentes entre si. Igual que fixemos para os modelos tipo \mathcal{A} chans, proporcionamos dúas probas. A primeira puramente calculística estudando a casuística e a segunda baseada no estudo da ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$.

Teorema 7.4. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\rho = 0$. Entón \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$. Ademais,*

1. $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_j^6(\cdot)$ se $i \neq j$.
2. $\mathcal{N}_1^6(+)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_1^6(-)$.
3. $\mathcal{N}_2^6(c)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_2^6(\tilde{c})$ para $c \neq \tilde{c}$.
4. $\mathcal{N}_3^6(c)$ non é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_3^6(\tilde{c})$ para $c \neq \tilde{c}$.

Primeira proba do teorema 7.4. Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} definido a partir da conexión $\Gamma = (x^1)^{-1}(a, b, c, d, e, f)$ nas coordenadas usuais en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. O tensor de Ricci asociado á conexión Γ é da forma

$$\rho = \begin{pmatrix} d(a-d+1) + b(f-c) & -be + cd + f \\ c(d-1) - be & e(a-d-1) - c^2 + cf \end{pmatrix}.$$

A continuación probamos que se $\rho = 0$, entón \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$. Para isto, comezamos tomando $f = be - cd$ e distinguimos dous casos: $e = 0$ e $e \neq 0$. Comecemos supoñendo que $e = 0$. Entón $c = 0$ e obtemos dúas posibilidades:

- Se $d = 0$, entón $\Gamma = (x^1)^{-1}(a, b, 0, 0, 0, 0)$. Con $a = 0$ e $b \neq 0$ obtemos \mathcal{N}_4^6 ; con $a = b = 0$ obtemos \mathcal{N}_0^6 , e con $a \neq 0$ obtemos $\mathcal{N}_6^6(a)$ e \mathcal{N}_5^6 .
- Se $d \neq 0$, entón $d = a + 1 \neq 0$. Distinguimos de novo dous casos. Se $d = -1$, con $b = 0$ obtemos \mathcal{N}_3^6 e con $b \neq 0$ obtemos $\mathcal{N}_2^6(-1)$. Se $d \neq -1$ obtemos $\mathcal{N}_2^6(d)$.

Por outra banda, se $e \neq 0$ tense que $b = \frac{c(d-1)}{e}$. Se $c = 0$, entón $d = 0$ e $a = 1$. Reescalando x^2 obtemos $\mathcal{N}_1^6(\pm)$. Finalmente, se $c \neq 0$, obtemos novamente $\mathcal{N}_1^6(\pm)$. Isto proba que \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$.

Para probar as equivalencias dadas polas afirmacións 1–4 basta considerar as bases de solucións dadas ao principio da presente subsección 7.1 e empregar a observación 5.6. \square

Segunda proba do teorema 7.4. A observación 5.6 mostra que é suficiente dar unha clasificación de bases do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para determinar a conexión dunha superficie fortemente proxectivamente chá. Sexa $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{N})$ o espazo de solucións asociado a un modelo tipo \mathcal{B} chan \mathcal{N} en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Traballamos módulo a acción do grupo $(x^1, x^2) \rightarrow (x^1, ax^1 + bx^2)$ con $b \neq 0$. Sexa $\Phi = (\phi^1, \phi^2)$ un difeomorfismo afín local de \mathcal{N} a \mathcal{N}_0^6 . Tense que

$$\mathcal{Q} = \Phi^* \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, x^2\} = \text{span}\{\mathbb{1}, \phi^1, \phi^2\}.$$

Posto que Φ é un difeomorfismo local, $\partial_{x^1} \mathcal{Q} \neq \{0\}$ e $\partial_{x^2} \mathcal{Q} \neq \{0\}$. Sexan $X := x^1 \partial_{x^1} + x^2 \partial_{x^2}$ e $Y := \partial_{x^2}$ campos de vectores afín Killing. No sucesivo imos analizar a acción da álgebra de Lie xerada por estes dous campos de vectores, para o cal complexificamos \mathcal{Q} definindo $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}} := \mathcal{Q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Os elementos de \mathcal{Q} obtéñense tomando as partes real e imaxinaria das solucións complexas. Descompoñemos $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{Q}_{\lambda}$ como suma directa dos autoespazos xeneralizados asociados a X onde

$$\mathcal{Q}_{\lambda} := \{f \in \mathcal{Q}_{\mathbb{C}} : (X - \lambda)^3 f = 0\}.$$

Posto que $[X, \partial_{x^2}] = -\partial_{x^2}$ tense que

$$\partial_{x^2} \mathcal{Q}_{\lambda} \subset \mathcal{Q}_{\lambda-1}.$$

Fixamos λ e tomamos $f \in \mathcal{Q}_{\lambda}$ tal que $\partial_{x^2} f \neq 0$. Isto mostra que $\mathcal{Q}_{\lambda-1} \neq 0$. Entón, $\dim\{\mathcal{Q}_{\mu}\} \leq 2$ para todo μ . Polo tanto,

$$\mathcal{Q}_{\mu} = \{f \in \mathcal{Q}_{\mathbb{C}} : (X - \mu)^2 f = 0\}.$$

Posto que $\dim\{\mathcal{Q}\} = 3$, tense que os espazos $\mathcal{Q}_{\lambda}, \mathcal{Q}_{\lambda-1}, \mathcal{Q}_{\lambda-2}, \mathcal{Q}_{\lambda-3}$ non poden ser todos non-triviais. En particular, $(\partial_{x^2})^3 f = 0$ para todo $f \in \mathcal{Q}_{\lambda}$. Isto mostra que calquera elemento de \mathcal{Q} é un polinomio de grao ao sumo dous en x^2 cuxos coeficientes son funcións en x^1 . Se $(X - \lambda)f = 0$, entón f é suma de elementos da forma $(x^1)^{\lambda-k}(x^2)^k$ con $k \leq 2$. Se $(X - \lambda)^2 f = 0$, entón f é suma de elementos da forma $(x^1)^{\lambda-k}(x^2)^k$ e $(x^1)^{\lambda-k}(x^2)^k \log(x^1)$ con $k \leq 2$. Posto que $\dim\{\mathcal{Q}_{\lambda}\} \leq 2$, os anteriores son os únicos casos a considerar de acordo coas posibilidades da descomposición de Jordan. En principio, o parámetro λ podería ser complexo. A nosa análise a seguir mostra que este suposto non se dá. En base ao anterior, consideramos os seguintes casos:

Caso 1. Supoñamos primeiro que existe $f \in \mathcal{Q}$ de grao cando menos dous en x^2 . Sexa $f \in \mathcal{Q}_{\lambda}$ tal que $\partial_{x^2}^2 f \neq 0$. Entón $\{f, \partial_{x^2} f, \partial_{x^2}^2 f\}$ é unha base de \mathcal{Q} . Isto mostra que $\partial_{x^2}^2 f = c$, polo que $\lambda = 2$. Posto que $f \in \mathcal{Q}_2$, tense que $\partial_{x^2} f \in \mathcal{Q}_1$ e $\mathbb{1} \in \mathcal{Q}_0$. Así, $\dim\{\mathcal{Q}_{\nu}\} \leq 1$ para todo ν , polo que non poden aparecer termos logarítmicos. Entón $f = (x^2)^2 + ax^1 x^2 + b(x^1)^2$. Facendo o cambio $x^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}ax^1$ podemos supoñer que $a = 0$. Entón $\mathcal{Q} = \text{span}\{f, 2x^2, \mathbb{1}\}$ e posto que $\partial_{x^1}\{\mathcal{Q}\} \neq 0$, tense que $b \neq 0$. Reescalando x^2 e normalizando f de forma que $f = (x^2)^2 \pm (x^1)^2$, obtemos $\mathcal{N}_1^6(\pm)$.

No sucesivo, supoñemos que todo elemento de \mathcal{Q} é ao sumo linear en x^2 . Posto que $\partial_{x^2}\{\mathcal{Q}\} \neq \{0\}$, sempre podemos tomar λ de forma que $f = a_0(x^1)x^2 + a_1(x^1) \in \mathcal{Q}_\lambda$ con $a_0(x^1) \neq 0$. Tendo en conta esta consideración, analizamos as seguintes posibilidades.

Caso 2. Supoñamos que $\lambda \notin \{0, 1\}$. Entón \mathcal{Q}_λ , $\mathcal{Q}_{\lambda-1}$ e \mathcal{Q}_0 son espazos distintos e non-triviais. Polo tanto todos eles son de dimensión un e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\lambda \oplus \mathcal{Q}_{\lambda-1} \oplus \mathcal{Q}_0$. Se λ fose complexo, entón \mathcal{Q}_λ é non-trivial e non está contido en $\mathcal{Q}_\lambda \oplus \mathcal{Q}_{\lambda-1} \oplus \mathcal{Q}_0$, mais isto é imposible e polo tanto, tal caso non se pode dar. Asumamos pois que λ é real. Posto que $\dim\{\mathcal{Q}_\lambda\} = 1$, non pode haber solucións onde aparezan termos logarítmicos, polo que $f = (x^1)^{\lambda-1}x^2 + (x^1)^\lambda c$. O cambio linear que leva x^2 en $x^2 - cx^1$ permite asumir que $f = (x^1)^{\lambda-1}x^2$ e así $\mathcal{Q} = \text{span}\{\mathbb{1}, (x^1)^{\lambda-1}, (x^1)^{\lambda-1}x^2\}$ con $\lambda \neq 0, 1$. Isto dá lugar a $\mathcal{N}_2^6(c)$ con $c = \lambda - 1 \notin \{-1, 0\}$.

Caso 3. Supoñamos que $\lambda = 0$ de forma que $f = a_0(x^1)x^2 + a_1(x^1) \in \mathcal{Q}_0$. Tense que $a_0(x^1) = \partial_{x^2}f \in \mathcal{Q}_{-1}$ e $\mathbb{1} \in \mathcal{Q}_0$. Necesariamente $\dim \mathcal{Q}_{-1} = 1$ polo que reescalando, podemos asumir que $a_0(x^1) = (x^1)^{-1}$ e así $f = \frac{x^2}{x^1} + \varepsilon \log(x^1)$. Se $\varepsilon = 0$, obtemos $\mathcal{N}_2^6(-1)$, e se $\varepsilon \neq 0$, un reescalado apropiado dá lugar a \mathcal{N}_3^6 .

Caso 4. Supoñamos que $\lambda = 1$, polo que $f = a_0(x^1)x^2 + a_1(x^1) \in \mathcal{Q}_1$. Podemos expresar f na forma

$$f = x^2 + x^2\alpha \log(x^1) + \beta x^1 + \gamma x^1 \log(x^1).$$

Supoñamos que $\alpha \neq 0$, entón X ten unha forma de Jordan non-trivial en \mathcal{Q}_1 polo que $\dim\{\mathcal{Q}_1\} \geq 2$. Ademais, $\partial_{x^2}f = \alpha \log(x^1) \in \mathcal{Q}_0$. Posto que $\mathbb{1} \in \mathcal{Q}_0$, tense que $\dim\{\mathcal{Q}_0\} \geq 2$, pero isto non pode ser. Entón $\alpha = 0$. Considerando o cambio linear que leva x^2 en $x^2 + \beta x^1$, podemos asumir que $\beta = 0$ e así, $f = x^2 + \gamma x^1 \log(x^1)$. Se $\gamma \neq 0$, basta aplicar $(X - 1)$ para ver que $x^1 \in \mathcal{Q}_1$. Reescalando apropiadamente obtemos \mathcal{N}_4^6 . Se pola contra $\gamma = 0$, tense que $x^2 \in \mathcal{Q}_1$. Se $\dim\{\mathcal{Q}_1\} = 2$, obtemos \mathcal{N}_0^6 . Se $\dim\{\mathcal{Q}_0\} = 2$, tense que $\log(x^1) \in \mathcal{Q}_0$ e obtemos \mathcal{N}_5^6 . Noutro caso obtemos $\mathcal{N}_6^6(c)$ con $c \neq 0, -1$, completando a clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{B} chans.

As equivalencias dadas polas afirmacións 1–4 próbanse agora do mesmo xeito que se fixo na primeira proba do teorema. \square

Concluimos esta sección lembrando que para unha superficie chá, as solucións para a ecuación quasi-Einstein afín son as mesmas independentemente do valor de μ escollido. Daquela, os espazos de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu \in \mathbb{R}$ para as parametrizacións do teorema anterior quedan determinados polos dados ao principio desta subsección para $\mu = -1$.

7.3 Modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$

En [15] móstrase que un modelo tipo \mathcal{B} ten $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ se e só se é tamén tipo \mathcal{A} . Ademais, o anterior tamén é equivalente a que $\Gamma_{12}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = 0$ e $\Gamma_{22}^2 = 0$, salvo equivalencia linear. Os modelos tipo \mathcal{A} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ foron estudados na sección 6.4, provendo solucións particulares para cada parametrización módulo equivalencia linear. Non obstante, posto que o noso obxectivo é proporcionar representantes do espazo de solucións explicitamente, imos repetir o proceso para as parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{B} dadas na definición 7.1 con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$.

No que segue consideramos todas as parametrizacións da definición 7.1 con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$. Ademais, indicamos cal é o seu espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ e o tensor de Ricci asociado. Omitimos os detalles da súa obtención xa que se reducen a facer contas en coordenadas (ver observación 6.4).

Parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$

1. $\mathcal{N}_1^4(\kappa) := \mathcal{N}(2\kappa, 1, 0, \kappa, 0, 0)$ con $\kappa \notin \{0, -1\}$,
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_1^4(\kappa)) = \text{span}\{(x^1)^\kappa, (x^1)^{\kappa+1}, (x^1)^\kappa(x^2 + x^1 \log x^1)\}$,
 $\rho = (x^1)^{-2}\kappa(1 + \kappa)dx^1 \otimes dx^1$.
2. $\mathcal{N}_2^4(\kappa, \theta) := \mathcal{N}(2\kappa + \theta - 1, 0, 0, \kappa, 0, 0)$ con $\kappa \notin \{0, -\theta\}$ e $\theta \neq 0$,
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_2^4(\kappa, \theta)) = \text{span}\{(x^1)^\kappa, (x^1)^\kappa x^2, (x^1)^{\kappa+\theta}\}$,
 $\rho = (x^1)^{-2}\kappa(\theta + \kappa)dx^1 \otimes dx^1$.
3. $\mathcal{N}_3^4(\kappa) := \mathcal{N}(2\kappa - 1, 0, 0, \kappa, 0, 0)$ con $\kappa \neq 0$,
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_3^4(\kappa)) = \text{span}\{(x^1)^\kappa, (x^1)^\kappa x^2, (x^1)^\kappa \log x^1\}$,
 $\rho = (x^1)^{-2}\kappa^2 dx^1 \otimes dx^1$.

O seguinte resultado mostra cales son os espazos de solucións para as anteriores parametrizacións.

Teorema 7.5. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$. Entón, satisfaise algunha das seguintes posibilidades*

1. \mathcal{M} é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_1^4(\kappa)$, e
 $E(-1, D) = \text{span}(x^1)^\kappa \{\mathbb{1}, x^1, x^2 + x^1 \log x^1\}$. Ademais
 - (a) Se $\frac{1}{4} + \tilde{\rho}_{11}(1 + \mu) \neq 0$, entón $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^{\alpha_+}, (x^1)^{\alpha_-}\}$, onde $\alpha_\pm = \frac{1}{2} + \kappa \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \tilde{\rho}_{11}(1 + \mu)}$.
 - (b) Se $\frac{1}{4} + \tilde{\rho}_{11}(1 + \mu) = 0$, entón $\mu = -\frac{1}{4}(1 + 4\tilde{\rho}_{11})\tilde{\rho}_{11}^{-1}$ e
 $E(\mu, D) = \text{span}(x^1)^{\kappa+\frac{1}{2}} \{\mathbb{1}, \log x^1\}$.
2. \mathcal{M} é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_2^4(\kappa, \theta)$ e $E(-1, D) = \text{span}(x^1)^\kappa \{\mathbb{1}, x^2, (x^1)^\theta\}$. Ademais
 - (a) Se $(2\kappa + \theta)^2 + 4\mu\tilde{\rho}_{11} \neq 0$, entón $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^{\alpha_+}, (x^1)^{\alpha_-}\}$, onde $\alpha_\pm = \frac{1}{2} \left(2\kappa + \theta \pm \sqrt{(2\kappa + \theta)^2 + 4\mu\tilde{\rho}_{11}} \right)$.
 - (b) Se $(2\kappa + \theta)^2 + 4\mu\tilde{\rho}_{11} = 0$, entón $\mu = -\frac{1}{4}(2\kappa + \theta)^2\tilde{\rho}_{11}^{-1}$ e
 $E(\mu, D) = \text{span}(x^1)^{\kappa+\frac{1}{2}\theta} \{\mathbb{1}, \log x^1\}$.
3. \mathcal{M} é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_3^4(\kappa)$ e $E(-1, D) = \text{span}(x^1)^\kappa \{\mathbb{1}, x^2, \log x^1\}$. Ademais
 $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^{\alpha_+}, (x^1)^{\alpha_-}\}$, onde $\alpha_\pm = \kappa \pm \sqrt{\tilde{\rho}_{11}(1 + \mu)}$.

Proba. O feito de que \mathcal{M} sexa linearmente equivalente a un dos \mathcal{Z}_i^k foi probado en [15]. Un cálculo directo en coordenadas mostra que as funcións do enunciado satisfán a ecuación quasi-Einstein afín (4.2) co valor de μ indicado. Ademais, é claro que as funcións que aparecen en cada base son linearmente independentes para os valores que se indica. O teorema 7.3 mostra que \mathcal{M} é tipo \mathcal{A} . Entón polo teorema 4.17, tense que $\dim\{E(-1, D)\} = 3$ e que $\dim\{E(\mu, D)\} \leq 2$ con $\mu \neq -1$ por ser $\rho \neq 0$. Polo tanto, é claro que as funcións de cada un dos enunciados forman unha base. \square

7.4 Modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$

Unha superficie semi-riemanniana é de curvatura constante distinta de cero se e só se o seu grupo de isometrías é 3-dimensional. Entón $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$. Se a superficie ten curvatura seccional constante positiva, entón é tipo \mathcal{C} . Este suposto foi estudado na sección 5.4. Se pola contra a superficie ten curvatura seccional constante negativa, resultados de [14] mostran entón que é afinmente equivalente a un modelo tipo \mathcal{B} . Ademais, existen modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$ que non son afinmente equivalentes a unha superficie semi-riemanniana con curvatura seccional constante negativa. Nesta sección completamos o estudo do espazo de solucións da ecuación quasi-Einstein afín para estes modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$.

No que segue consideramos todas as parametrizacións da definición 7.1 con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 3$. Ademais, indicamos cal é o seu espazo de solucións para a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = -1$ e o tensor de Ricci asociado. Omitimos os detalles da súa obtención xa que se reducen a facer contas en coordenadas (ver observación 6.4).

Parametrizacións dos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 3$

1. $\mathcal{N}_1^3(\pm) := \mathcal{N}(-\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}, 0)$,
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_1^3(\pm)) = \{0\}, \rho = \pm(x^1)^{-2}dx^2 \otimes dx^2$.
2. $\mathcal{N}_2^3(c) := \mathcal{N}(-\frac{3}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}, c, 2)$,
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_2^3(c)) = \{0\}, \rho = (x^1)^{-2}(3dx^1 \wedge dx^2 + (1 - 2c)dx^2 \otimes dx^2)$.
3. $\mathcal{N}_3^3 := \mathcal{N}(-1, 0, 0, -1, -1, 0)$,
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_3^3) = \text{span}\{\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \frac{(x^2)^2 - (x^1)^2}{x^1}\}$.
4. $\mathcal{N}_4^3 := \mathcal{N}(-1, 0, 0, -1, 1, 0)$, $\rho = (x^1)^{-2}(dx^2 \otimes dx^2 - dx^1 \otimes dx^1)$.
 $\mathcal{Q}(\mathcal{N}_4^3) = \text{span}\{\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \frac{(x^2)^2 + (x^1)^2}{x^1}\}, \rho = -(x^1)^{-2}(dx^i \otimes dx^i)$.

Observación 7.6. A conexión de \mathcal{N}_3^3 é precisamente a conexión de Levi-Civita da métrica lorentziana $(x^1)^{-2}\{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}$, polo que \mathcal{N}_3^3 é o plano hiperbólico lorentziano. A conexión de \mathcal{N}_4^3 é precisamente a conexión de Levi-Civita da métrica $\{(x^1)^{-2}\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}$, polo que \mathcal{N}_4^3 é o plano hiperbólico.

O seguinte é resultado de [15] proporciona, salvo equivalencia linear, todos os modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$.

Teorema 7.7. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$. Entón \mathcal{M} é linearmente isomorfo a algún $\mathcal{N}_1^3(\cdot)$, a algún $\mathcal{N}_2^3(\cdot)$, a \mathcal{N}_3^3 ou a \mathcal{N}_4^3 .*

O seguinte resultado mostra cales son os espazos de solucións para as $\mathcal{N}_i^3(\cdot)$. A proba redúcese a unha comprobación en coordenadas.

Teorema 7.8. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, D)$ un modelo tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$, entón $E(\mu, D) = \{0\}$ excepto nos seguintes casos módulo equivalencia linear:*

1. $E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$.
2. \mathcal{M} é \mathcal{N}_3^3 , $\mu = -1$ e $E(-1, D) = (x^1)^{-1}\text{span}\{\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 + (x^1)^2\}$.
3. \mathcal{M} é \mathcal{N}_4^3 , $\mu = -1$ e $E(-1, D) = (x^1)^{-1}\text{span}\{\mathbb{1}, x^2, (x^2)^2 - (x^1)^2\}$.
4. \mathcal{M} é $\mathcal{N}_1^3(\pm)$, $\mu = -\frac{1}{4}$ e $E(-\frac{1}{4}, D) = (x^1)^{\frac{1}{2}}\text{span}\{\mathbb{1}, x^2\}$.

7.5 Modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$

Como se dixo na introdución do capítulo, o problema de dar unha clasificación linear detallada para modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ semella difícil de resolver. Posto que nas seccións precedentes tratamos o resto de posibilidades, salvo equivalencia linear, o que faremos nesta sección é estudar a ecuación quasi-Einstein afín sobre os modelos tipo \mathcal{B} que non sexan linearmente equivalentes aos xa estudados anteriormente (ou cando menos, distinguindo cando o son).

A continuación estudamos dúas familias de modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ que xorden ao estudar modelos tipo \mathcal{B} con $\rho = \rho_a$. Se \mathcal{M} é un modelo tipo \mathcal{A} , tense que $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ é equivalente a $\text{rang}\{\rho\} = 2$ (ver [15]). Ademais, o tensor de Ricci dun modelo tipo \mathcal{A} sempre é simétrico, polo tanto determina unha métrica en \mathcal{M} . Esta métrica pode ter sinaturas $(2, 0)$, $(1, 1)$ ou $(0, 2)$, que son precisamente os casos que consideramos na sección 6.5. A situación para os modelos tipo \mathcal{B} é moi diferente partindo simplemente de que o tensor de Ricci non é necesariamente simétrico. Desta forma, a caracterización asociada ao rango deste tensor tamén deixa de ser certa para os modelos tipo \mathcal{B} . O teorema 7.17 mostra que a parte simétrica do tensor de Ricci pode ter rango un ou dous para estes modelos, mais tamén pode ser cero; isto é, existen modelos tipo \mathcal{B} con tensor de Ricci anti-simétrico. Os seguintes modelos tipo \mathcal{B} cumpren que $\rho = \rho_a \neq 0$.

$$\mathcal{Q}_c : C_{11}^1 = 0, C_{11}^2 = c, C_{12}^1 = 1, C_{12}^2 = 0, C_{22}^1 = 0, C_{22}^2 = 1, c \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{P}_{0,c}^\pm : C_{11}^1 = 1 \mp c^2, C_{11}^2 = c, C_{12}^1 = 0, C_{12}^2 = \mp c^2, C_{22}^1 = \pm 1, C_{22}^2 = \pm 2c,$$

con $c > 0$.

O seguinte teorema de [15] mostra que estes son, salvo equivalencia linear, os únicos modelos tipo \mathcal{B} cumprindo a propiedade anterior e que todos eles, salvo $\mathcal{P}_{0,3/\sqrt{2}}^+$, cumpren que

$\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Ademais, posto que $\rho_s = 0$, a ecuación quasi-Einstein afín (4.2) redúcese á ecuación de Yamabe $\text{Hes}_f = 0$, polo que $E(\mu, D) = E(0, D)$.

Teorema 7.9. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\rho_s = 0$. Entón \mathcal{M} é linearmente isomorfo a algún \mathcal{Q}_c ou a algún $\mathcal{P}_{0,c}^\pm$. Ademais, tense que*

1. $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{P}_{0,3/\sqrt{2}}^+)\} = 3$ e $\mathcal{P}_{0,3/\sqrt{2}}^+$ é linearmente isomorfo a $\mathcal{N}_2^{\frac{1}{2}}$.
2. $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{Q}_c)\} = 2$ e $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{P}_{0,c}^\pm)\} = 2$, salvo no caso da afirmación anterior.
3. $E(\mu, D) = E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$.

A continuación introducimos un resultado auxiliar que nos vai permitir analizar as posibilidades restantes para os espazos de solucións en modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Por simplicidade, no sucesivo empregaremos a notación $\Gamma_{ij}^k = (x^1)^{-1}C_{ij}^k$ para dar a conexión $\Gamma = (x^1)^{-1}(C_{11}^1, C_{11}^2, C_{12}^1, C_{12}^2, C_{22}^1, C_{22}^2)$ dun modelo tipo \mathcal{B} a partir das constantes C_{ij}^k .

Teorema 7.10. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} non chan e sexa $f \in E(\mu, D)$. Se c_i e c_{ij} denotan constantes arbitrarias, entón cúmprese o seguinte*

(1) *Dáse algunha das seguintes posibilidades:*

- (a) *Se $f(x^1, x^2) = (x^1)^\alpha\{(x^2)^2 + 2c_{12}x^1x^2 + c_{11}(x^1)^2\}$. Entón $\mu = -1$ e $E(-1, D) = \text{span}\{f, (x^1)^\alpha\{x^2 + c_{12}x^1\}, (x^1)^\alpha\}$.*
- (b) *Se $f(x^1, x^2) = (x^1)^\alpha\{x^2 + c_1x^1\}$. Distinguimos*
 - i. $E(\mu, D) = \text{span}\{f, (x^1)^\alpha\}$.
 - ii. $E(-1, D) = \text{span}\{f, (x^1)^\alpha, (x^1)^\beta\}$ con $\beta \neq \alpha$ e $\beta \neq \alpha + 1$.
- (c) *Se $f(x^1, x^2) = (x^1)^\alpha\{x^2 + c_1 \log(x^1)x^1\}$ con $c_1 \neq 0$. Entón $\mu = -1$ e $E(-1, D) = \text{span}\{f, (x^1)^\alpha, (x^1)^{\alpha+1}\}$.*
- (d) *Sexa $f(x^1, x^2) = f(x^1)$. Temos as seguintes posibilidades:*
 - i. $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^\alpha\}$.
 - ii. $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^\alpha, (x^1)^\alpha \log(x^1)\}$.
 - iii. $\mu = -1$ e $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^\alpha, (x^1)^\alpha \log(x^1), (x^1)^\beta\}$ con $\alpha \neq \beta$.
 - iv. $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^\alpha, (x^1)^\beta\}$ con $\alpha \neq \beta$.
 - v. $\mu = -1$ e $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^\alpha, (x^1)^\beta, (x^1)^\gamma\}$ con α, β, γ distintos entre si.

(2) *As constantes c_i e c_{ij} son todas reais na afirmación (1). Na afirmación (1.d-iv), se α é complexo, entón $\beta = \bar{\alpha}$. Na afirmación (1.d-v), se α é complexo, entón podemos asumir que $\beta = \bar{\alpha}$ e γ real. Nos casos restantes da afirmación (1), α e β son reais.*

(3) *Se $(x^1)^{\alpha_1}, (x^1)^{\alpha_2} \in E(\mu, D)$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entón*

$$\begin{aligned} C_{12}^1 &= 0, & C_{22}^1 &= 0, & C_{22}^2\mu &= 0, \\ \alpha_i^2 - \alpha_i(1 + C_{11}^1) - (C_{12}^2 + C_{11}^1C_{12}^2 - (C_{12}^2)^2)\mu &= 0. \end{aligned}$$

Observación 7.11. Existen exemplos de todas as posibilidades da afirmación (1) do teorema 7.10. A afirmación (1.a) materialízase nos teoremas 7.8 e 7.14. A afirmación (1.b) é ilustrada polos teoremas 7.8 e 7.17-(1). As posibilidades das afirmacións (1.c) e (1.d) aparecen no teorema 7.5.

A afirmación (3) materialízase no teorema 7.5, onde se presentan modelos tipo \mathcal{B} que son tamén tipo \mathcal{A} . Supoñamos que $E(\mu, D) = \text{span}\{(x^1)^\alpha, (x^1)^\beta\}$ con $\alpha \neq \beta$. Entón ou ben α e β son reais ou ben $\beta = \bar{\alpha}$. No segundo caso, as solucións reais obtéñense tomando as partes reais e imaxinarias de $(x^1)^\alpha$. A afirmación (3) tamén aparece ilustrada polo teorema 7.12-(4) onde $E(0, D) = \text{span}\{1, (x^1)^{C_{11}+1}\}$ e $C_{22}^2 \neq 0$.

Proba. Sexa $X := x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}$ e $Y := \partial_{x^2}$. Posto que X e Y son campos afín Killing, $X \cdot E(\mu, D) \subset E(\mu, D)$ e $Y \cdot E(\mu, D) \subset E(\mu, D)$. Polo teorema 4.2, $\dim\{E(\mu, D)\} \leq 3$. Dado que \mathcal{M} non é chan o teorema 4.17 mostra que $\dim\{E(\mu, D)\} = 3$ se e só se $\mu = -1$ e \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chan. Sexa $f \in E(\mu, D)$. Polo teorema 5.16 podemos asumir que

$$f = \sum_{\alpha, i, j} c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^i \log(x^1)^j.$$

Escollemos i_0 maximal de forma que existe $c_{\alpha, i_0, j}(f) \neq 0$ para algún α e algún j . Entón $f = \sum_{i \leq i_0} f_i(x^1)(x^2)^i$ e $f_{i_0}(x^1) \neq 0$. Tense que

$$\begin{aligned} Xf &= \sum_{\alpha, i, j} c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^i \{(\alpha + i) \log(x^1)^j + j \log(x^1)^{j-1}\} \in E(\mu, D), \\ Yf &= \sum_{\alpha, i, j} i c_{\alpha, i, j} (x^1)^\alpha (x^2)^{i-1} \log(x^1)^j \in E(\mu, D). \end{aligned} \tag{7.1}$$

A afirmación (1) establécese a partir do estudo da seguinte casuística.

Caso I. Supoñamos que $i_0 \geq 2$. Pola ecuación (7.1), $\{f, Yf, \dots, Y^i f\}$ son $i + 1$ elementos linearmente independentes de $E(\mu, D)$. Posto que $\dim\{E(\mu, D)\} \leq 3$, $i_0 = 2$ e

$$\begin{aligned} E(\mu, D) &= \text{span}\{f = f_2(x^1)(x^2)^2 + f_1(x^1)x^2 + f_0(x^1), \\ &Yf = 2f_2(x^1)x^2 + f_1(x^1), Y^2f = 2f_2(x^1)\}. \end{aligned}$$

Posto que $Xf = ((X + 2)f_2(x^1))(x^2)^2 + ((X + 1)f_1(x^1))x^2 + Xf_0(x^1)$ é combinación linear de $\{f, Yf, Y^2f\}$, entón $(X + 2)f_2$ é un múltiplo de f_2 . Daquela, podemos asumir que $f_2(x^1) = (x^1)^\alpha$ para algún α . Consecuentemente, $Y^2f = 2(x^1)^\alpha \in E(\mu, D)$. Tense que

$$Y(X - \alpha - 2)f = (X - \alpha - 1)f_1(x^1) \in E(\mu, D).$$

Isto debe ser un múltiplo de $(x^1)^\alpha$ e así $f_1(x^1) = c_1(x^1)^\alpha + 2c_{12}(x^1)^{\alpha+1}$. Restando $\frac{1}{2}c_1 Yf$ para asegurar que $c_1 = 0$, expresamos

$$f = (x^1)^\alpha \{(x^2)^2 + 2c_{12}x^1x^2\} + f_0(x^1).$$

Tense que $(X - \alpha - 2)f = (X - \alpha - 2)f_0$. Daquela $(X - \alpha - 2)f_0$ é un múltiplo de $(x^1)^\alpha$ e, en consecuencia, $f_0(x^1) = c_{11}(x^1)^{\alpha+2} + c_3(x^1)^\alpha$. Restando un múltiplo apropiado de $(x^1)^\alpha$ podemos asumir que $c_3 = 0$, obtendo

$$f = (x^1)^\alpha \{(x^2)^2 + 2c_{12}x^1x^2 + c_{11}(x^1)^2\}.$$

Esta é a posibilidade (1.a).

Caso II. Supoñamos que $i_0 = 1$ de forma que exista $f = f_1(x^1)x^2 + f_0(x^1) \in E(\mu, D)$ linear en x^2 . Supoñamos que $\{f_1, Xf_1\}$ son linearmente independentes. Entón

$$\begin{aligned} f &= f_1(x^1)x^2 + f_0(x^1), & Xf &= ((X+1)f_1(x^1))x^2 + Xf_0(x^1), \\ Yf &= f_1(x^1), & YXf &= (X+1)f_1(x^1) \end{aligned}$$

son catro elementos linearmente independentes de $E(\mu, D)$, o cal é imposible. Entón Xf_1 é múltiplo de f_1 polo que podemos asumir que $f_1 = (x^1)^\alpha$ para algún α . Por conseguinte, $f = (x^1)^\alpha x^2 + f_0(x^1)$ e así $(x^1)^\alpha = Yf \in E(\mu, D)$. Polo tanto $(X - 1 - \alpha)f = (X - 1 - \alpha)f_0$. Existen entón varios casos:

1. Se $E(\mu, D) = \text{span}\{f = (x^1)^\alpha x^2 + f_0(x^1), (x^1)^\alpha\}$, tense que $(X - 1 - \alpha)f_0$ é un múltiplo de $(x^1)^\alpha$. Isto mostra que $f_0(x^1) = c(x^1)^{\alpha+1} + c_1(x^1)^\alpha$. Restando un múltiplo apropiado de $(x^1)^\alpha$ obtemos a forma dada en (1.b-i), $f = (x^1)^\alpha x^2 + c_1(x^1)^{\alpha+1} = (x^1)^\alpha \{x^2 + c_1x^1\}$.
2. Se $E(\mu, D) = \text{span}\{f, (x^1)^\alpha, (x^1)^\beta\}$ con $\alpha \neq \beta$ e $\beta \neq \alpha + 1$. Tense que $(X - \alpha - 1)f_0 = d_1x^\alpha + d_2x^\beta$ de onde $f_0 = c_1(x^1)^{\alpha+1} + \tilde{d}_1x^\alpha + \tilde{d}_2x^\beta$. Restando un múltiplo apropiado de $(x^1)^\beta$ e $(x^1)^\alpha$, podemos asumir que $\tilde{d}_i = 0$ e $f = (x^\alpha)(x^2 + c_1x^1)$, obtendo (1.b-ii).
3. Se $E(\mu, D) = \text{span}\{f, (x^1)^\alpha, (x^1)^\beta\}$ con $\alpha \neq \beta$ e $\beta = \alpha + 1$, obtense que $(X - \alpha - 1)f_0$ é combinación linear de $(x^1)^\alpha$ e $(x^1)^{\alpha+1}$. Daquela, $f_0 = d_1(x^1)^\alpha + d_2(x^1)^{\alpha+1} + c_1 \log(x^1)(x^1)^{\alpha+1}$, obtendo (1.c).

Caso III. Supoñamos que $i_0 = 0$, de forma que toda función en $E(\mu, D)$ depende unicamente de x^1 . Daquela podemos descompoñer $E(\mu, \lambda)$ como suma directa de autoespazos xeneralizados de X . Tense que unha función f pertence a dito autoespazo se e só se $(X - \alpha)^3 f = 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$. Dita función ten que satisfacer $f = (x^1)^\alpha \{c_0 + c_1 \log(x^1) + c_2 \log(x^1)^2\}$. Supoñamos que $c_2 \neq 0$. Posto que $(X - \alpha)^2 f = 2c_2(x^1)^\alpha$, obtemos que $(x^1)^\alpha \in E(\mu, D)$. Normalizando obtemos $(x^1)^\alpha \{c_1 \log(x^1) + c_2 \log(x^1)^2\} \in E(\mu, D)$. Un argumento similar mostra que $c_2(x^1)^\alpha \log(x^1) \in E(\mu, D)$ e así $c_2 \log(x^1)^2 \in E(\mu, D)$. Isto non é posible xa que contradí o teorema 4.2. Daquela, $c_2 = 0$ e $E(\mu, D)$ está xerado por funcións da forma $(x^1)^\alpha$ ou $(x^1)^\alpha \log(x^1)$. Isto remata a proba da afirmación (1) do teorema.

A afirmación (2) séguese a partir dos argumentos dados para probar a afirmación (1). Posto que a (5.2) é unha ecuación en derivadas parciais con coeficientes reais, podemos tomar o conxugado complexo de cada solución. Se $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, entón tomando a parte real e imaxinaria de $(x^1)^\alpha$ e as solucións da afirmación (1), teriamos solucións de máis salvo nos casos expostos. Polo mesmo motivo, as constantes teñen que ser reais.

Para probar a afirmación (3) comezamos supoñendo que $(x^1)^\alpha \in E(\mu, D)$ e $(x^1)^\beta \in E(\mu, D)$ onde $\alpha \neq \beta$. Empregando o operador quasi-Einstein afín $\mathfrak{Q}_\mu(f) := \text{Hes}_f - \mu f \rho_s$ con $f \in C^\infty(M)$ tense que

$$\begin{aligned} & (x^1)^{2-\alpha} \mathfrak{Q}_\mu((x^1)^\alpha) - (x^1)^{2-\beta} \mathfrak{Q}_\mu((x^1)^\beta) \\ &= (\alpha - \beta) \begin{pmatrix} -1 + \alpha + \beta - C_{11}^1 & -C_{12}^1 \\ -C_{12}^1 & -C_{22}^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Isto mostra que $C_{12}^1 = C_{22}^1 = 0$. Considerando estas relacións e impoñendo $\mathfrak{Q}_\mu((x^1)^\alpha) = 0$ obtemos as últimas dúas relacións. \square

No que segue, empregamos o resultado anterior para determinar bases dos espazos de solucións para os modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Na subsección 7.5.1 consideramos os solitóns de Yamabe [10]. Estes correspóndense co caso $\mu = 0$ na ecuación (4.2) e están relacionados cos solitóns de Ricci gradientes afíns (ver observación 7.13). Na subsección 7.5.2 estudamos modelos tipo \mathcal{B} proxectivamente chans. Na subsección 7.5.3 empregamos os resultados anteriores para completar a descrición das solucións para a ecuación quasi-Einstein afín sobre modelos tipo \mathcal{B} .

7.5.1 Solitóns de Yamabe en modelos tipo \mathcal{B}

Os solitóns de Yamabe afíns defínense pola ecuación $\text{Hes}_f = 0$, isto é, a ecuación quasi-Einstein afín con $\mu = 0$. Este tipo de superficies non dan lugar a estruturas quasi-Einstein propias a partir dunha extensión de Riemann. O lema 4.1 de [15] mostra que $R_{ij}(df) = 0$, de forma que df pertence ao núcleo do operador de curvatura. Isto proporciona exemplos de modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ onde o tensor de Ricci ten rango un.

Teorema 7.12. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, D)$ un modelo tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Tense que $E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ agás nos seguintes casos nos que requirimos adicionalmente que $\tilde{\rho} := (x^1)^2 \rho$ non sexa cero.*

(1) $C_{11}^1 = -1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^1 = 0, C_{22}^2 \neq 0, E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, \log(x^1)\}$.

$$\tilde{\rho}_{11} = -(C_{12}^2)^2 + C_{12}^2 + C_{11}^2 C_{22}^2, \tilde{\rho}_{12} = C_{22}^2, \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{22} = 0.$$

(2) $(C_{11}^2, C_{12}^2, C_{22}^2) = (0, 0, 0), E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^2\}$,

$$\tilde{\rho}_{11} = 0, \tilde{\rho}_{12} = 0, \tilde{\rho}_{21} = -C_{12}^1, \tilde{\rho}_{22} = (C_{11}^1 - 1)C_{22}^1 - (C_{12}^1)^2.$$

(3) $(C_{11}^2, C_{12}^2, C_{22}^2) = -c_1(C_{11}^1, C_{12}^1, C_{22}^1), E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^2 + c_1 x^1\}$,

$$\tilde{\rho}_{21} = c_1 C_{11}^1 C_{22}^1 - C_{12}^1(1 + c_1 C_{12}^1), \tilde{\rho}_{11} = c_1 \tilde{\rho}_{21},$$

$$\tilde{\rho}_{22} = C_{22}^1(C_{11}^1 - 1) - (C_{12}^1)^2, \tilde{\rho}_{12} = c_1 \tilde{\rho}_{22}.$$

(4) $C_{12}^1 = 0, C_{22}^1 = 0, C_{11}^1 \neq -1, C_{22}^2 \neq 0, E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, (x^1)^{C_{11}^1+1}\}$,

$$\tilde{\rho}_{11} = -(C_{12}^2)^2 + C_{11}^1 C_{12}^2 + C_{12}^2 + C_{11}^2 C_{22}^2, \quad \tilde{\rho}_{12} = C_{22}^2, \quad \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{22} = 0.$$

Proba. Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} non chan. Entón, dado que $\mathbb{1} \in E(0, D)$, o teorema 4.17 mostra que $1 \leq \dim\{E(0, D)\} \leq 2$. Consideramos as posibilidades do teorema 7.10 para atopar as solucións adicionais para a ecuación $\text{Hes}_f = 0$. Posto que $\dim\{E(0, D)\} \leq 2$ certas posibilidades do teorema 7.10-(1) non se dan.

Sexa $f(x^1, x^2) = (x^1)^\alpha \{c_0 + c_1 \log(x^1)\} \in E(0, D)$ con $c_1 \neq 0$. Entón un cálculo directo mostra que $C_{12}^1 = 0$, $C_{22}^1 = 0$, $\alpha = 1 + C_{11}^1$ e $C_{11}^1 = -1$. Ademais, tense que $C_{22}^2 \neq 0$, pois do contrario \mathcal{M} sería tipo \mathcal{A} e \mathcal{B} á vez, e entón $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$, contradicindo que $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Isto proba (1).

Supoñamos agora que $f(x^1, x^2) = (x^1)^\alpha \{x^2 + c_1 x^1\} \in E(0, D)$. Se $\alpha \neq 0$, entón obtense que $(C_{12}^1, C_{22}^1, C_{22}^2) = (0, 0, 0)$ e de novo \mathcal{M} é tamén tipo \mathcal{A} , polo que isto non se pode dar. Entón $f(x^1, x^2) = x^2 + c_1 x^1$. Se $c_1 = 0$, entón obtense $(C_{11}^2, C_{12}^2, C_{22}^2) = (0, 0, 0)$, probando (2). Se $c_1 \neq 0$, entón (C_{ij}^2) e (C_{ij}^1) son linearmente dependentes, dando lugar a (3).

Finalmente consideramos $f(x^1, x^2) = (x^1)^\alpha \in E(0, D)$ con $\alpha \neq 0$. Entón o teorema 7.10 (3) mostra que $C_{12}^1 = 0$, $C_{22}^1 = 0$, $C_{11}^1 \neq -1$ e $\alpha = 1 + C_{11}^1$. Ademais, tense que $C_{22}^2 \neq 0$, xa que en caso contrario, unha vez máis, \mathcal{M} sería tipo \mathcal{A} e \mathcal{B} á vez, e así $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$. Isto proba (4), quedando establecido o teorema. \square

Observación 7.13. Un solitón de Ricci gradiente afín é unha tripla (M, D, f) onde f é unha solución da ecuación $\text{Hes}_f + \rho_s = 0$ sobre unha superficie afín $\mathcal{M} = (M, D)$. O solitóns de Ricci gradientes afíns sobre superficies localmente homoxéneas foron estudados en [15], mostrando que os únicos exemplos non triviais (i.e., f non constante) son os seguintes:

1. Unha superficie con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$.
2. Un modelo tipo \mathcal{B} linearmente equivalente a $\mathcal{P}_{a,c}^\pm$ con $a \neq 0$ e $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{a,c}^\pm : \quad C_{11}^1 &= \frac{1}{2} (a^2 + 4a \mp 2c^2 + 2), & C_{11}^2 &= c, & C_{12}^1 &= 0, \\ C_{12}^2 &= \frac{1}{2} (a^2 + 2a \mp 2c^2), & C_{22}^1 &= \pm 1, & C_{22}^2 &= \pm 2c. \end{aligned}$$

As superficies con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ admiten solucións non constantes da ecuación quasi-Einstein afín para todos os posibles valores de μ (ver sección 6.4). Pola contra, unha superficie $\mathcal{P}_{a,c}^\pm$ con $a \neq 0$ admite unha solución non-constante da ecuación quasi-Einstein afín se e só se $\mu = 0$ e $(a, c) = (-2, 0)$. Daquela, $\mathcal{P}_{a,c}^\pm$ é linearmente isomorfo a unha superficie dada no teorema 7.12-(3) e $E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}, x^2\}$.

O anterior mostra que aínda que a ecuación do solitón de Ricci gradiente afín e a ecuación quasi-Einstein afín sexan similares, o seu comportamento é bastante diferente.

7.5.2 Modelos tipo \mathcal{B} fortemente proactivamente chans

Toda superficie fortemente proactivamente chá cumpre que $\dim\{E(-1, D)\} = 3$. Por outra banda, o lema 4.10 mostra que se dúas conexións son fortemente proactivamente equivalentes, entón os tensores de Ricci anti-simétricos coinciden. Polo tanto, ningunha superficie con $\rho_a \neq 0$

pode ser fortemente proxectivamente chá. No teorema seguinte empregamos o feito anterior para ver cales son os modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ fortemente proxectivamente chans.

Teorema 7.14. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Entón \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá se e só se é linearmente isomorfo a un modelo tipo \mathcal{B} determinado por*

$$C_{11}^1 = 1 + 2c, C_{11}^2 = 0, C_{12}^1 = 0, C_{12}^2 = c, C_{22}^1 = \pm 1, C_{22}^2 = 0,$$

onde $c \notin \{-1, 0\}$. Entón $\rho = (x^1)^{-2}\{c(2+c) dx^1 \otimes dx^1 \pm c dx^2 \otimes dx^2\}$, e ademais $E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$, $E(-1, D) = (x^1)^c \text{span}\{\mathbb{1}, x^2, (x^1)^2 + (x^2)^2\}$ e $E(\mu, D) = \{0\}$ noutro caso.

Observación 7.15. Nunha superficie localmente homoxénea con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} \leq 3$ a noción de equivalencia linear e afín coinciden (ver [14]). Entón o único isomorfismo posible entre dúas superficies dadas no teorema 7.14 é o cambio linear $T(x^1, x^2) = (x^1, ax^1 + bx^2)$. Posto que $C_{22}^1 = \pm 1$, tense que $b = \pm 1$, e dado que $C_{22}^2 = 0$, concluímos que $a = 0$. Posto que a aplicación $(x^1, x^2) \rightarrow (x^1, -x^2)$ deixa inalterables estas estruturas, tense que as superficies dadas no teorema 7.14 son todas linearmente inequivalentes para cada valor de $c \neq 0$. Para $c = -1$, \mathcal{M} correspóndese co plano hiperbólico e o análogo lorentziano dado por \mathcal{N}_3^3 e \mathcal{N}_4^3 na definición 7.1.

Proba. O lema 4.8 garante que \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá se e só se ρ e $D\rho$ son totalmente simétricos. Para un modelo tipo \mathcal{B} tense que

$$\rho_a = \frac{1}{2}(x^1)^{-2}(C_{12}^1 + C_{22}^2) dx^1 \wedge dx^2.$$

Daquela ρ é simétrico se e só se $C_{12}^1 = -C_{22}^2$.

Consideremos agora $D\rho$. A igualdade $(D_{\partial_{x^1}}\rho)(\partial_{x^2}, \partial_{x^i}) - (D_{\partial_{x^2}}\rho)(\partial_{x^1}, \partial_{x^i}) = 0$ con $i = 1, 2$ é equivalente ás ecuacións

$$\begin{aligned} (2 + C_{11}^1 - 2C_{12}^2)C_{22}^2 - 3C_{11}^2C_{22}^1 &= 0, \\ (2 - 2C_{11}^1 + 4C_{12}^2)C_{22}^1 + 6(C_{22}^2)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Distinguímos dous casos:

Caso 1. $C_{22}^1 = 0$.

Pola segunda ecuación obtemos que $C_{22}^2 = 0$. Posto que $C_{12}^1 = -C_{22}^2$ tense que $C_{12}^1 = C_{22}^1 = C_{22}^2 = 0$ e o teorema 5.17 mostra entón que \mathcal{M} é tamén tipo \mathcal{A} .

Caso 2. $C_{22}^1 \neq 0$.

Se definimos o cambio linear $\tilde{x}^1 = x^1$ e $\tilde{x}^2 = ax^1 + x^2$, tense que $\tilde{C}_{12}^1 = C_{12}^1 - aC_{22}^1$. Entón, escollendo apropiadamente a podemos asumir que $C_{12}^1 = 0$. Isto mostra que $C_{22}^2 = 0$ e empregando a ecuación (7.2) tense que $C_{11}^2 = 0$ e $2 - 2C_{11}^1 + 4C_{12}^1 = 0$. Desta forma obtemos as relacións do enunciado para os coeficientes C_{ij}^k tras un reescalado apropiado para garantir

que $C_{22}^1 = \pm 1$. O recíproco tamén é certo posto que o argumento que empregamos funciona no sentido contrario.

Fixando $\mu = -1$ e tomando $f = (x^1)^\alpha$ tense que

$$\mathfrak{Q}_{22} = \pm(x^1)^{\alpha-2}(c - \alpha) \quad \text{e} \quad \mathfrak{Q}_{11} = (x^1)^{\alpha-2}(c - \alpha)(c + 2 - \alpha).$$

Así $\alpha = c$ e obtense que $(x^1)^c \text{span}\{\mathbb{1}, x^2, (x^1)^2 + (x^2)^2\} \subset E(-1, D)$. A igualdade cúmprese por teren ambos os espazos a mesma dimensión. Por outra banda, se $c \neq -2$ o tensor de Ricci ten rango dous e consecuentemente o teorema 4.17 mostra que $E(0, D) = \text{span}\{\mathbb{1}\}$ e $\dim\{E(\mu, D)\} = 0$ con $\mu \notin \{-1, 0\}$. Tomando $c = -2$ e $f = (x^1)^\alpha$, tense que

$$\mathfrak{Q}_{11} = (x^1)^{\alpha-2}\alpha(\alpha + 2), \quad \mathfrak{Q}_{22} = -(x^1)^{\alpha-2}(\alpha - 2\mu),$$

de onde se obtén $\mu = -1$ e $\dim\{E(\mu, D)\} = 0$ noutro caso. \square

Nas seccións anteriores vimos que cando $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} \geq 3$, tense que $\dim\{E(-1, D)\} \geq 1$ se e só se \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá. Pola súa parte, o teorema 4.17 mostra que o caso $\dim\{E(-1, D)\} = 2$ non pode darse. O seguinte teorema xustifica a existencia de modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{E(-1, D)\} = 1$.

Teorema 7.16. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ e non fortemente proxectivamente chan. Entón $\dim\{E(-1, D)\} = 1$ se e só se é linearmente isomorfo a algunha das seguintes superficies:*

1. $C_{22}^1 = 0, C_{22}^2 = C_{12}^1 \neq 0$. En tal caso, $E(-1, D) = \text{span}\{(x^1)^{C_{12}^2}\}$.
2. $C_{22}^1 = \pm 1, C_{12}^1 = 0, C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2 \neq 0, C_{11}^1 = 1 + 2C_{12}^2 \pm (C_{11}^2)^2$. En tal caso $E(-1, D) = \text{span}\{(x^1)^{(C_{11}^2)^2 + C_{12}^2}\}$.

Proba. Sexa \mathcal{M} unha superficie tipo \mathcal{B} non fortemente proxectivamente chá. Daquela o teorema 4.17 mostra que $\dim\{E(-1, D)\} \neq 2, 3$. Supoñamos agora que $\dim\{E(-1, D)\} = 1$. Polo teorema 5.16 sabemos que existe a tal que $f(x^1, x^2) = (x^1)^a$ xera $E(-1, D)$. Distinguímos dous casos que simplifican a análise e que se corresponden con $C_{22}^1 = 0$ e $C_{22}^1 \neq 0$.

Supoñamos primeiro que $C_{22}^1 = 0$. Entón a ecuación quasi-Einstein afín redúcese ás seguintes tres ecuacións

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 - a(C_{11}^1 + 1) + C_{12}^2(C_{11}^1 - C_{12}^2 + 1) + C_{11}^2(C_{22}^2 - C_{12}^1), \\ 0 &= C_{12}^1(-2a + 2C_{12}^2 - 1) + C_{22}^2, \quad 0 = C_{12}^1(C_{22}^2 - C_{12}^1). \end{aligned}$$

Cando $C_{12}^1 = 0$ a segunda ecuación mostra que $C_{22}^2 = 0$. Entón $C_{12}^1 = C_{22}^1 = C_{22}^2 = 0$, obtendo, polo teorema 5.17, que \mathcal{M} é fortemente proxectivamente chá. Posto que isto contradí a hipótese, tense que $C_{12}^1 \neq 0$ e empregando de novo a ecuación quasi-Einstein afín obtemos que $C_{12}^1 = C_{22}^2 \neq 0$. Finalmente, tomando $a = C_{12}^2 \neq 0$ cúmprense as tres ecuacións anteriores, obtendo as superficies da afirmación 1.

Supoñamos agora que $C_{22}^1 \neq 0$. En tal caso o cambio de coordenadas $\tilde{x}^1 = x^1$ e $\tilde{x}^2 = C_{12}^1|C_{22}^1|^{-1/2}x^1 + |C_{22}^1|^{1/2}x^2$ permite asumir que $C_{22}^1 = \varepsilon = \pm 1$ e $C_{12}^1 = 0$. Entón a ecuación quasi-Einstein afín redúcese de novo ás tres seguintes ecuacións:

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 - (C_{11}^1 + 1)a - (C_{12}^2)^2 + C_{11}^1C_{12}^2 + C_{12}^2 + C_{11}^2C_{22}^2, \\ 0 &= C_{22}^2 - 2C_{11}^2\varepsilon, \quad 0 = a - C_{11}^1 + C_{12}^2 + 1. \end{aligned}$$

Das dúas últimas ecuacións obtemos $C_{22}^2 = 2C_{11}^2\varepsilon$ e $a = C_{11}^1 - C_{12}^2 - 1$, e substituíndo isto na primeira delas tense que $C_{11}^1 = 1 + 2C_{12}^2 + \varepsilon(C_{11}^2)^2$. Desta forma obtemos as superficies da afirmación 2, probando así o resultado. \square

7.5.3 Caso xeral

Neste apartado presentamos o caso xeral onde aparecen todas as posibilidades non recollidas anteriormente, salvo equivalencia linear. Por este motivo imos asumir que $\rho_s \neq 0$ e que $\mu \notin \{-1, 0\}$. Sexa $\tilde{\rho} = (x^1)^2\rho$.

Teorema 7.17. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} con $\rho_s \neq 0$ e sexa $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Entón, tense que $\dim\{E(\mu, D)\} \geq 1$ se e só se, salvo equivalencia linear, \mathcal{M} é da forma*

$$\begin{aligned} C_{22}^1 &= \pm 1, \quad C_{12}^1 = 0, \quad C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2, \quad \Delta := -C_{11}^1 + C_{12}^2 + 1 \neq 0, \\ \mu &= \Delta^{-2}\{1 + 2(C_{11}^2)^2 - (C_{11}^1 - C_{12}^2)^2 + 2C_{12}^2\}. \end{aligned}$$

En tal caso, $\text{span}\{(x^1)^{\mu\Delta}\} \subset E(\mu, D)$ e

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 2(C_{11}^2)^2 + (C_{11}^1 - C_{12}^2 + 1)C_{12}^2 & C_{11}^2 \\ -C_{11}^2 & C_{11}^1 - C_{12}^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Ademais, $\dim\{E(\mu, D)\} = 2$ se e só se se \mathcal{M} é linearmente equivalente a algunha das seguintes superficies:

$$1. \quad C_{11}^1 = \mp 8c^2 - \frac{5}{2}, \quad C_{11}^2 = c, \quad C_{12}^1 = 0, \quad C_{12}^2 = \frac{1}{2}(\mp 8c^2 - 3),$$

$$C_{22}^1 = \pm 1, \quad C_{22}^2 = 2c, \quad c \neq 0.$$

Entón $\mu = -\frac{8c^2+3}{8c^2+4}$ e $E(\mu, D) = (x^1)^\alpha \text{span}\{\mathbb{1}, x^2 - 2cx^1\}$, onde $\alpha = -4c^2 - \frac{3}{2}$. Ademais

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 8(2c^4 \pm c^2) & c \\ -c & -4c^2 \mp 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad C_{11}^1 = c, \quad C_{11}^2 = 0, \quad C_{12}^1 = 0, \quad C_{12}^2 = c + 1, \quad C_{22}^1 = \pm 1, \quad C_{22}^2 = 0 \text{ con } c \notin \{-3, -1\}. \text{ Entón } \\ \mu = \frac{c+1}{2} \text{ e } E(\mu, D) = (x^1)^{1+c} \text{span}\{\mathbb{1}, x^2\}. \text{ Ademais, } \tilde{\rho} = \mp 2dx^2 \otimes dx^2.$$

Observación 7.18. Ningunha das superficies do teorema 7.17 ten $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$ xa que $C_{22}^1 = \pm 1$ en todos os casos. Ademais, as superficies do teorema 7.17-(1) teñen $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ xa que $\rho_a \neq 0$ e $\text{rang } \rho_s = 2$ para todo $c \neq 0$.

As superficies dadas no teorema 7.17-(2) teñen $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$ para todo $c \notin \{-3, -1\}$ agás para $c = -\frac{3}{2}$. Neste caso $\mu = -\frac{1}{4}$ e \mathcal{M} é linearmente isomorfo a \mathcal{N}_1^\pm sen máis que considerar a transformación $(u^1, u^2) = (x^1, \mp\sqrt{2}x^2)$ e así o teorema 7.17-(2) redúcese ao teorema 7.8-(4).

Proba. Comezamos asumindo que $C_{22}^1 = 0$ e tomamos $f = (x^1)^\alpha$ con $\alpha \neq 0$. Entón

$$\mathfrak{Q}_{22}(f) = \mu(x^1)^{\alpha-2}C_{12}^1(C_{12}^1 - C_{22}^2).$$

Tomando $C_{12}^1 = 0$ tense que $\mathfrak{Q}_{12}(f) = -\frac{1}{2}\mu C_{22}^2(x^1)^{\alpha-2}$. Por tanto \mathcal{M} é tamén de tipo \mathcal{A} xa que $(C_{12}^1, C_{22}^1, C_{22}^2) = (0, 0, 0)$.

Supoñamos agora que $C_{22}^1 \neq 0$. Un cambio de coordenadas linear mostra que $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{12}^1 = 0$. Tomando $f = (x^1)^\alpha$ con $\alpha \neq 0$, tense que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{12}(f) &= -\frac{1}{2}\mu(C_{22}^2 \mp 2C_{11}^2)(x^1)^{\alpha-2}, \\ \mathfrak{Q}_{22}(f) &= \mp(x^1)^{\alpha-2}(\alpha + \mu(C_{11}^1 - C_{12}^2 - 1)).\end{aligned}$$

Daquela $C_{22}^2 = \pm 2C_{11}^2$ e $\alpha = \mu(1 - C_{11}^1 + C_{12}^2) \neq 0$. Impoñendo estas condicións, a ecuación quasi-Einstein equivale á anulación da compoñente

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_{11}(f) &= (x^1)^{\alpha-2}\mu \{(C_{11}^1)^2 \mp 2(C_{11}^2)^2 + (C_{12}^2)^2 - 2C_{12}^2 - 2C_{11}^1C_{12}^2 - 1 \\ &\quad + (1 - C_{11}^1 + C_{12}^2)^2\mu\}\end{aligned}$$

que determina os valores admisibles para μ . Isto demostra o caso xeral no que se ten que $E(\mu, D) \neq \{0\}$.

Supoñamos que $\dim\{E(\mu, D)\} = 2$. Sexa

$$f(x^1, x^2) = (c_1x^1 + c_2x^2 + c_3 \log(x^1))(x^1)^\alpha.$$

Estudamos as posibilidades do teorema 7.10. Comezamos considerando a condición $\mathfrak{Q}_{22}(f) = 0$, que mostra que $c_3 + x^1(c_1 + 2c_2C_{11}^2) = 0$. Entón $c_3 = 0$ e $c_1 = -2c_2C_{11}^2$. Agora estudamos por separado os casos $C_{11}^2 = 0$ e $C_{11}^2 \neq 0$.

Tomando $C_{11}^2 = c \neq 0$, tense que $f(x^1, x^2) = (x^2 - 2cx^1)(x^1)^\alpha$, $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{12}^1 = 0$ e $C_{22}^2 = \pm 2c$. Posto que $\mathfrak{Q}_{11}(f) + 2c$ e $\mathfrak{Q}_{12}(f) = 0$, tense que $C_{11}^1 = \frac{1}{3}(3 + 7C_{12}^2 \pm 4c^2)$. Finalmente, usando $\mathfrak{Q}_{12}(f) = 0$ tense que $C_{12}^2 = -\frac{1}{2}(3 \pm 8c^2)$. Isto proba (1).

Consideremos agora o caso $C_{22}^1 = \pm 1$, $C_{12}^1 = 0$, $C_{11}^2 = 0$, $C_{22}^2 = 0$. Obtemos $f(x^1, x^2) = x^2(x^1)^\alpha$ e

$$\mathfrak{Q}_{12}(f) = \frac{(C_{11}^1)^2 + 2(C_{12}^2)^2 - C_{12}^2 - 3C_{11}^1C_{12}^2 - 1}{C_{11}^1 - C_{12}^2 - 1}.$$

Entón $C_{11}^1 = C_{12}^2 - 1$ ou $C_{11}^1 = 1 + 2C_{12}^2$. Se se cumpre este último, obtemos $\mu = -1$. Entón, tomando $C_{11}^1 = c$ e $C_{12}^2 = c + 1$ tense que $\mu = \frac{c+1}{2}$. Isto proba (2). \square

Aplicacións da ecuación quasi-Einstein afín

Neste último capítulo mostramos algunhas aplicacións máis da ecuación quasi-Einstein afín sobre superficies localmente homoxéneas. Nunha primeira parte abordamos o estudo da completude de campos afín Killing sobre modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} , mostrando que modelos son afín Killing completos e cales non. Na segunda parte, estudamos o problema da completude xeodésica sobre os modelos tipo \mathcal{A} módulo equivalencia linear. En ambos os dous casos anteriores a idea é atopar os espazos que son completos (no sentido correspondente) e a partir diso determinar cales non o son empregando inmersións sobre modelos completos que permitan concluír a incompletude. Os resultados principais relativos a estas cuestións están recollidos en [61].

Na última sección do capítulo construímos exemplos irreducibles de variedades Kähler quasi-Einstein. Para isto empregamos a construción do teorema 3.19, que permite obter exemplos de variedades quasi-Einstein a partir de superficies quasi-Einstein afíns. Este resultado forma parte das investigacións realizadas en [19].

8.1 Introducción

Sexa $\text{Af}(\mathcal{M})$ o grupo de Lie de todos os difeomorfismos afíns de \mathcal{M} . A álgebra de Lie de $\text{Af}(\mathcal{M})$ é precisamente o espazo de campos de vectores afín Killing completos. Dicimos que \mathcal{M} é *afín Killing completo* se todos os campos de vectores afín Killing de \mathcal{M} son completos. Isto é equivalente a que a álgebra de Lie de $\text{Af}(\mathcal{M})$ sexa $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$. Por este motivo, determinar se \mathcal{M} é afín Killing completo ten grande interese desde o punto de vista xeométrico.

Unha curva diferenciable $\sigma(t)$ en M é *xeodésica* se $\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$. Se (x^1, \dots, x^m) son coordenadas locais en M e $\nabla_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k\partial_{x^k}$, entón $\sigma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ é xeodésica se e só se se satisfai a *ecuación xeodésica*

$$\ddot{\sigma}^k + \Gamma_{ij}^k\dot{\sigma}^i\dot{\sigma}^j = 0,$$

para todo k (para máis detalles, ver sección 4.3). \mathcal{M} dise *xeodesicamente completa* se toda xeodésica pode definirse para tempo infinito, i.e. está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Se, polo contrario, algunha xeodésica alcanza cando menos un dos seus “límites” en tempo finito, diremos que M é xeodesicamente incompleta. Toda variedade afín xeodesicamente completa é afín Killing completa (ver [69]). O recíproco non é certo como se pode ver comparando os teoremas 8.2 e 8.7.

Sexa $\mathcal{M} = (M, D)$ unha superficie afín. Se \mathcal{M} é globalmente homoxénea, por definición, dados dous puntos en M existe un difeomorfismo globalmente definido levando un punto noutro e intercambiando as conexións. Isto é equivalente a dicir que $\text{Af}(\mathcal{M})$ actúa transitivamente en M . Se os difeomorfismos están definidos localmente, a variedade é localmente homoxénea e a clasificación de superficies localmente homoxéneas realizado por Opozda en [90] afirma que,

salvo isomorfismo, hai dous grupos Lie simplemente conexos de dimensión 2: o grupo de translacións de \mathbb{R}^2 e o grupo $ax + b$ en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Unha estrutura afín invariante pola esquerda en \mathbb{R}^2 (respectivamente en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) é *tipo A* (respectivamente *tipo B*). Estes modelos son globalmente homoxéneos, polo que $Af(\cdot)$ actúa transitivamente nestas xeometrías. Toda superficie afín localmente homoxénea está modelada nun modelo tipo \mathcal{A} , nun tipo \mathcal{B} ou na xeometría da esfera \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 coa conexión de Levi-Civita.

O estudo de campos de afín Killing completos en modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} faise na sección 8.2. A completude xeodésica para os tipo \mathcal{A} estúdase na sección 8.3. Malia que tamén resultaría oportuno estudar a completude para os tipo \mathcal{B} , está xustificada a ausencia deste caso pola imposibilidade de abordar esta análise a partir da ecuación quasi-Einstein afín por non seren estes modelos proxectivamente chans en xeral. Pechando o capítulo, a sección 8.4 recolle exemplos de variedades quasi-Einstein Kähler que se obteñen a partir de solucións da ecuación quasi-Einstein afín.

8.2 Completude afín Killing

Neste apartado estudamos en que casos os modelos tipo \mathcal{A} e \mathcal{B} son afín Killing completos. Para facer isto, valémonos da ecuación quasi-Einstein afín, que nos permite establecer facilmente aplicacións afíns entre unhas estruturas e outras cando estas son fortemente proxectivamente chás. En particular, tense que un espazo \mathcal{M} é afín Killing completo se existe unha base de difeomorfismos afíns B co mesmo número de elementos que a dimensión de $\mathfrak{K}(\mathcal{M})$ e tal que $B^*Q(\mathcal{M}) = Q(\mathcal{M})$.

É un feito ben coñecido que toda métrica de Riemann nunha variedade compacta é completa, polo que a esfera é xeodesicamente completa. Tamén é certo que calquera campo de vectores nunha variedade compacta é completo, polo que a esfera é afín Killing completa. No que segue, estudaremos a completude xeodésica e afín Killing para os modelos tipo \mathcal{A} e tipo \mathcal{B} . Unha variedade é xeodesicamente completa (respectivamente, afín Killing completa) se as solucións do sistema de segunda orde (respectivamente, de primeira orde) de EDOs non lineares estende para todo $t \in \mathbb{R}$. Mesmo no caso homoxéneo, estas ecuacións poden ser difíciles de resolver. Por esta razón, en lugar de resolvelas directamente, empregaremos a ecuación quasi-Einstein afín para simplificar a súa análise.

8.2.1 Completude afín Killing para modelos tipo \mathcal{A}

A continuación presentamos un resultado auxiliar que nos permite concluír en que casos, salvo equivalencia linear, un modelo tipo \mathcal{A} é afín Killing incompleto. Para isto introducimos a estrutura $\tilde{\mathcal{M}}_5^4(c) := (\mathbb{R}^2, \nabla)$ definida de forma que os únicos símbolos de Christoffel (que poden ser) distintos de cero son $\Gamma_{22}^1 = (1 + c^2)x^1$ e $\Gamma_{22}^2 = 2c$. Esta non é unha superficie de tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^2 [92]. Tense que

$$Q(\tilde{\mathcal{M}}_5^4(c)) = \text{span}\{e^{cx^2} \cos(x^2), e^{cx^2} \text{sen}(x^2), x^1\}.$$

Definimos as seguintes aplicacións de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\Theta_0^6(x^1, x^2) &= (x^1, x^2), & \Theta_1^6(x^1, x^2) &= (e^{x^1}, x^2 e^{x^1}), \\ \Theta_2^6(x^1, x^2) &= (e^{x^2}, e^{-x^1}), & \Theta_3^6(x^1, x^2) &= (x^1, e^{x^2}), \\ \Theta_4^6(x^1, x^2) &= (x^2, (x^2)^2 + 2x^1), & \Theta_5^6(x^1, x^2) &= (e^{x^1} \cos(x^2), e^{x^1} \sin(x^2)), \\ \Theta_1^4(x^1, x^2) &= (e^{-x^1}, x^2), & \Theta_2^4(x^1, x^2) &= (e^{-x^1}, x^2), \\ \Theta_4^4(c)(x^1, x^2) &= (x^1 + \frac{1}{2}c(x^2)^2, x^2), & \Theta_5^4(c)(x^1, x^2) &= (e^{x^1}, x^2).\end{aligned}$$

Teorema 8.1. *Cúmrense as seguintes afirmacións:*

1. Θ_i^6 é un mergullo afín de \mathcal{M}_i^6 en \mathcal{M}_0^6 con $i = 1, 2, 3, 5$.
2. Θ_4^6 é un isomorfismo afín de \mathcal{M}_4^6 en \mathcal{M}_0^6 .
3. Θ_1^4 é un mergullo afín de \mathcal{M}_1^4 en $\mathcal{M}_4^4(0)$.
4. Θ_2^4 é un mergullo afín de $\mathcal{M}_2^4(c)$ en $\mathcal{M}_3^4(c)$.
5. $\Theta_4^4(c)$ é un isomorfismo afín de $\mathcal{M}_4^4(c)$ a $\mathcal{M}_4^4(0)$.
6. $\Theta_5^4(c)$ é un mergullo afín de $\mathcal{M}_5^4(c)$ en $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$.

Proba. Para ver que aplicacións son mergullos, inmersións ou isomorfismos basta comprobar que cumpren a definición. Vexamos agora que tales aplicacións definen transformacións afíns, é dicir, que conservan a conexión. Posto que todo modelo tipo \mathcal{A} ten $\dim\{\mathcal{Q}\} = 3$, tense que é fortemente proxectivamente chan. Por outra banda, unha comprobación directa en coordenadas mostra que as aplicacións Θ_i^j intercambian o espazo de solucións \mathcal{Q} dos modelos onde están definidas (ver táboa na sección 6.1). Entón o teorema 4.19 garante que estas aplicacións son transformacións afíns. \square

O seguinte resultado mostra exactamente cales son, salvo equivalencia linear, os modelos tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^2 que son afín Killing completos.

Teorema 8.2. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón \mathcal{M} é afín Killing completo se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a \mathcal{M}_0^6 , \mathcal{M}_4^6 , $\mathcal{M}_3^4(c)$, $\mathcal{M}_4^4(c)$ ou $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ para algún i .*

Proba. Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} . En [14] móstrase que $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} \in \{2, 4, 6\}$. Posto que ∂_{x^1} e ∂_{x^2} sempre son campos afín Killing sobre un modelo tipo \mathcal{A} , é claro que se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$, tense que $\mathfrak{K}(\mathcal{M}) = \text{span}\{\partial_{x^1}, \partial_{x^2}\}$. Entón, as curvas do fluxo asociadas aos campos afín Killing son liñas rectas cunha parametrización linear, polo que son completas. Isto mostra que $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$ é afín Killing completa. Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 6$, daquela \mathcal{M} é chá. Posto que \mathcal{M}_0^6 é o plano euclidiano, tense que é xeodesicamente completo, polo que tamén é afín Killing completo. Empregando o teorema 8.1 é claro que \mathcal{M}_4^6 é afín Killing completo xa que Θ_4^6 é un difeomorfismo, e que \mathcal{M}_i^6 é incompleto para $i = 1, 2, 3, 5$, xa que as Θ_i^6 correspondentes non son sobrexectivas. Resta probar

o caso no que $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$. Os teoremas 8.1 e 6.15 mostran que todos os modelos con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$ están inmersos, salvo equivalencia linear, en $\mathcal{M}_3^4(c)$, $\mathcal{M}_4^4(0)$ e $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$. No que segue, probamos que estes tres modelos son afín Killing completos:

Caso $\mathcal{M}_3^4(c)$. Tense que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_3^4(c)) = \text{span}\{e^{cx^2}, e^{(1+c)x^2}, x^1 e^{cx^2}\}$. Co obxectivo de simplificar as contas consideramos o cambio de coordenadas $\Phi(x^1, x^2) := (x^1 e^{cx^2}, x^2) = (u^1, u^2)$ de forma que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_3^4(c)) = \Phi^* \text{span}\{e^{cu^2}, e^{(1+c)u^2}, u^1\}$. Definimos

$$T(a_1, b_1, c_1, d_1)(u^1, u^2) = (e^{a_1} u^1 + b_1 e^{cu^2} + c_1 e^{(1+c)u^2}, u^2 + d_1).$$

Tense que $T(a_1, b_1, c_1, d_1)^* \mathcal{Q}(\mathcal{M}_3^4(c)) = \mathcal{Q}(\mathcal{M}_3^4(c))$, polo que $T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ define un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 conservando a estrutura afín. Ademais,

$$\begin{aligned} & T(a_1, b_1, c_1, d_1) \circ T(a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= T(a_1 + a_2, b_2 e^{a_1} + b_1 e^{cd_2}, c_2 e^{a_1} + c_1 e^{(1+c)d_2}, d_1 + d_2), \\ & T(a_1, b_1, c_1, d_1)^{-1} = T(-a_1, -b_1 e^{-a_1 - cd_1}, -c_1 e^{-a_1 + (-1-c)d_1}, -d_1), \end{aligned}$$

polo que o conxunto dos $T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ forma un grupo de Lie 4-dimensional. Así, a álgebra de Lie asociada, que é precisamente o espazo de campos de vectores afín Killing completos é tamén 4-dimensional. Polo tanto, o espazo de campos de vectores afín Killing e o de campos de vectores afín Killing completos coinciden, isto é, todos os campos de vectores afín Killing son completos. Isto mostra que $\mathcal{M}_3^4(c)$ é afín Killing completa.

Caso $\mathcal{M}_4^4(0)$. Tense que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_4^4(0)) = \text{span}\{e^{x^2}, x^2 e^{x^2}, x^1 e^{x^2}\}$. Definimos

$$T(a_1, b_1, c_1, d_1)(x^1, x^2) := (e^{a_1} x^1 + b_1 x^2 + c_1, x^2 + d_1).$$

Tense que $T(a_1, b_1, c_1, d_1)^* \mathcal{Q}(\mathcal{M}_4^4(0)) = \mathcal{Q}(\mathcal{M}_4^4(0))$, polo que $T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ é un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 conservando a estrutura afín. Ademais,

$$\begin{aligned} & T(a_1, b_1, c_1, d_1) \circ T(a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= T(a_1 + a_2, b_1 + b_2 e^{a_1}, c_1 + b_1 d_2 + c_2 e^{a_1}, d_1 + d_2), \\ & T(a_1, b_1, c_1, d_1)^{-1} = T(-a_1, -b_1 e^{-a_1}, e^{-a_1}(b_1 d_1 - c_1), -d_1). \end{aligned}$$

Pola argumentación do caso anterior tense que $\mathcal{M}_4^4(0)$ é afín Killing completa.

Caso $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$. Tense que $\mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)) = \text{span}\{e^{cx^2} \cos(x^2), e^{cx^2} \sin(x^2), x^1\}$. Definimos

$$T(a_1, b_1, c_1, d_1)(x^1, x^2) := (e^{a_1} x^1 + b_1 e^{cx^2} \cos(x^2) + c_1 e^{cx^2} \sin(x^2), x^2 + d_1).$$

Tense que $T(a_1, b_1, c_1, d_1)^* \mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)) = \mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c))$, polo que $T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ é un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 conservando a estrutura afín. Ademais,

$$\begin{aligned} & T(a_1, b_1, c_1, d_1) \circ T(a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= T(a_1 + a_2, e^{a_1} b_2 + b_1 e^{cd_2} \cos(d_2) + c_1 e^{cd_2} \sin(d_2), \\ & \quad e^{a_1} c_2 - b_1 e^{cd_2} \sin(d_2) + c_1 e^{cd_2} \cos(d_2), d_1 + d_2), \\ & T(a_1, b_1, c_1, d_1)^{-1} = T(-a_1, -e^{-a_1 - cd_1}(b_1 \cos(d_1) - c_1 \sin(d_1)), \\ & \quad -e^{-a_1 - cd_1}(b_1 \sin(d_1) + c_1 \cos(d_1)), -d_1). \end{aligned}$$

Como nos casos anteriores, isto mostra que $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$ é afín Killing completa. Daquela é claro que $\mathfrak{K}(\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c))$ actúa transitivamente sobre \mathbb{R}^2 de forma que esta xeometría é globalmente homoxénea.

Deste xeito é claro que $\mathcal{M}_3^4(c)$ e $\mathcal{M}_4^4(0)$ son afín Killing completas. Ademais, posto que a única inmersión do teorema 8.1 que define un isomorfismo afín entre modelos con $\dim \mathfrak{K}(\mathcal{M}) = 4$ é $\Theta_4^4(c)$, calquera das outras é polo tanto incompleta, probando así o resultado. \square

O seguinte corolario é consecuencia directa do teorema anterior e da clasificación linear dos modelos tipo \mathcal{A} do teorema 6.9.

Corolario 8.3. *Os modelos \mathcal{M}_1^6 , \mathcal{M}_2^6 , \mathcal{M}_3^6 , \mathcal{M}_5^6 , \mathcal{M}_1^4 , $\mathcal{M}_2^4(c)$ e $\mathcal{M}_5^4(c)$ son, salvo equivalencia linear, todos os modelos tipo \mathcal{A} afín Killing incompletos.*

8.2.2 Completude afín Killing para modelos tipo \mathcal{B}

Neste apartado estudamos, salvo equivalencia linear, cando un modelo tipo \mathcal{B} é afín Killing completo. O procedemento que empregaremos para a nosa análise é necesariamente diferente ao usado para os modelos tipo \mathcal{A} do apartado anterior, xa que agora as estruturas non son necesariamente fortemente proxectivamente chás. Non obstante, para o estudo da incompletude, imos empregar de novo a existencia de inmersións afíns. Por este motivo, comezamos definindo as seguintes aplicacións de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Psi_1^6(\pm 1)(x^1, x^2) &= (x^2, (x^1)^2 \pm (x^2)^2), & \Psi_2^6(c)(x^1, x^2) &= ((x^1)^c, (x^1)^c x^2), \\ \Psi_3^6(x^1, x^2) &= \left(\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1} + \log(x^1)\right), & \Psi_4^6(x^1, x^2) &= (x^1, x^2 + x^1 \log(x^1)), \\ \Psi_5^6(x^1, x^2) &= (\log(x^1), x^2), & \Psi_6^6(c)(x^1, x^2) &= ((x^1)^{1+c}, x^2), \\ \Psi_1^4(x^1, x^2) &= (x^2 + x^1 \log(x^1), \log(x^1)), & \Psi_2^4(\kappa, \theta)(x^1, x^2) &= (x^2, \theta \log(x^1)), \\ \Psi_3^4(\kappa)(x^1, x^2) &= (x^2, \kappa \log(x^1)). \end{aligned}$$

Teorema 8.4. *Cúmrense as seguintes afirmacións:*

1. $\Psi_i^6(\cdot)$ é un mergullo afín de $\mathcal{N}_i^6(\cdot)$ en \mathcal{M}_0^6 para todo i .
2. Ψ_1^4 é un isomorfismo afín de $\mathcal{N}_1^4(\kappa)$ en $\mathcal{M}_3^4(\kappa)$.
3. $\Psi_2^4(\kappa, \theta)$ é un isomorfismo afín de $\mathcal{N}_2^4(\kappa, \theta)$ en $\mathcal{M}_3^4(\frac{\kappa}{\theta})$.
4. $\Psi_3^4(\kappa)$ é un isomorfismo afín de $\mathcal{N}_3^4(\kappa)$ en $\mathcal{M}_4^4(0)$.

Proba. Para ver que as aplicacións son mergullos ou isomorfismos basta comprobar que cumpren a definición. Vexamos agora que tales aplicacións definen transformacións afíns. Posto que todos os modelos que aparecen no teorema teñen $\dim \mathcal{Q} = 3$, tense que son fortemente proxectivamente chans. Por outra banda, unha comprobación directa en coordenadas mostra que as aplicacións Ψ_i^j intercambian o espazo de solucións \mathcal{Q} dos modelos onde están definidas (ver seccións 7.2 e 7.3). Entón o teorema 4.19 garante que estas aplicacións son transformacións afíns. \square

O seguinte resultado mostra cales son, salvo equivalencia linear, os modelos tipo \mathcal{B} afín Killing completos.

Teorema 8.5. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{B} .*

- (1) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa.*
- (2) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 3$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente ao plano hiperbólico.*
- (3) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 4$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa.*
- (4) *Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 6$, entón \mathcal{M} é afín Killing completa se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a \mathcal{N}_0^6 ou \mathcal{N}_5^6 .*

Proba. Sexa \mathcal{N} un modelo tipo \mathcal{B} . Traballamos co teorema 8.4 distinguindo os seguintes casos:

Caso 1. Se $\dim\{\mathfrak{K}\} = 6$, entón \mathcal{N} é linearmente equivalente a \mathcal{N}_i^6 . A aplicación Ψ_i^6 é un mergullo afín de \mathcal{N}_i^6 no plano euclidiano \mathcal{N}_0^6 . Se $i \neq 5$, o mergullo non é sobrexectivo e \mathcal{N}_i^6 é afín Killing incompleto. Se $i = 5$, entón Ψ_5^6 é un isomorfismo afín, polo que \mathcal{N}_5^6 é afín Killing completo.

Caso 2. Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 4$, entón \mathcal{N} é linearmente equivalente a $\mathcal{N}_i^4(\cdot)$. As aplicacións Ψ_i^4 son isomorfismos afíns de $\mathcal{N}_i^4(\cdot)$ en $\mathcal{M}_3^4(\cdot)$ ou $\mathcal{M}_4^4(0)$. Posto que as dúas últimas son afín Killing completas polo teorema 8.2, tense que $\mathcal{N}_i^4(\cdot)$ tamén o é.

Caso 3. Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 3$, entón existe $\sigma \in \{0, \pm 1\}$ tal que

$$\mathfrak{K}(\mathcal{M}) = \text{span}\{X := 2x^1x^2\partial_{x^1} + ((x^2)^2 + \sigma(x^1)^2)\partial_2, x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}, \partial_{x^2}\}.$$

Distinguimos tres casos:

- Para $\mathcal{N}_1^3(\pm)$ ou $\mathcal{N}_2^3(c)$ tense que $\sigma = 0$. A curva $\xi(t) = (x^1(t), x^2(t))$ é unha curva de fluxo para X se cumpre que $\dot{x}^1(t) = 2x^1(t)x^2(t)$ e $\dot{x}^2(t) = x^2(t)^2$. Tomamos $\xi(t) = (t^{-2}, -t^{-1})$ para resolver estas ecuacións e ver que estas estruturas son afín Killing incompletas.
- Para \mathcal{N}_3^3 temos que $\sigma = 1$. A curva $\xi(t) = (x^1(t), x^2(t))$ é unha curva de fluxo para X se cumpre que $\dot{x}^1 + 2x^1x^2 = 0$ e $\dot{x}^2 + (x^2)^2 + (x^1)^2 = 0$. Resolvemos estas ecuacións tomando $x^1(t) = x^2(t) = \frac{1}{2}t^{-1}$. Polo tanto, esta estrutura é afín Killing incompleta.
- \mathcal{N}_4^3 é o plano hiperbólico, polo que é afín Killing completo.

Caso 4. Se $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 2$, entón $\mathfrak{K}(\mathcal{N}) = \text{span}\{x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}, \partial_{x^2}\}$ e \mathcal{N} é afín Killing completo. \square

8.3 A completude xeodésica

Nesta sección estudamos os modelos tipo \mathcal{A} que son xeodesicamente completos. Para isto, imos analizar unha a unha as ecuacións xeodésicas das parametrizacións da definición 6.1 que recolle, salvo equivalencia linear, todos os modelos tipo \mathcal{A} . O problema da completude xeodésica para modelos tipo \mathcal{A} non chans foi tratado en [47] cunha análise diferente á que se propón a continuación.

O seguinte resultado permite reducir o sistema de ecuacións xeodésicas nun modelo tipo \mathcal{A} a unha única EDO. Isto simplifica a nosa análise posterior e marca unha diferenza clara cos modelos tipo \mathcal{B} , para os cales este resultado non ten análogo xa que se apoia no feito de que as estruturas tipo \mathcal{A} son linearmente proxectivamente chás. Por esta razón e por non contar cunha clasificación linear clara coa que traballar cos modelos tipo \mathcal{B} , o estudo da completude afín Killing sobre ditos modelos non é considerado nesta memoria.

Teorema 8.6. *Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} . Entón existe unha función linear ϱ tal que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}) = e^\varrho \text{span}\{\mathbb{1}, \phi_1, \phi_2\}$ e tal que a aplicación (ϕ_1, ϕ_2) define unha inmersión de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Toda xeodésica en \mathcal{M} ten localmente a forma $\sigma(t) = \Phi^{-1}(\psi_\sigma(t)u_\sigma + v_\sigma)$ para algunha función ψ_σ , e para certos vectores u_σ e v_σ de \mathbb{R}^2 .*

Proba. Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, D)$ un modelo tipo \mathcal{A} en \mathbb{R}^2 . Polo teorema 5.9 existe unha función linear ϱ con $e^\varrho \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$ e tal que $\widetilde{\mathcal{M}} := e^{-\varrho}\mathcal{M}$ é fortemente proxectivamente chá. Posto que $e^\varrho \in \mathcal{Q}(\mathcal{M})$ e $\dim\{\mathcal{Q}(\mathcal{M})\} = 3$, tense que $\mathcal{Q}(\mathcal{M}) = e^\varrho \text{span}\{\mathbb{1}, \phi_1, \phi_2\}$. Sexa $\Xi_p(\phi) := \{\phi, \partial_{x^1}\phi, \partial_{x^2}\phi\}(p)$ con $p \in \mathbb{R}^2$ un homomorfismo de espazos vectoriais. Pola proba do teorema 4.19 tense que Ξ_p é un isomorfismo de $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ a \mathbb{R}^3 . Entón $d\phi_1(p)$ e $d\phi_2(p)$ son linearmente independentes e $\Phi := (\phi_1, \phi_2)$ define unha inmersión.

Por outra banda, polo teorema 4.13, tense que

$$\mathcal{Q}(\widetilde{\mathcal{M}}) = \text{span}\{\mathbb{1}, \phi_1, \phi_2\} = \Phi^* \text{span}\{\mathbb{1}, x^1, x^2\} = \Phi^* \mathcal{Q}(\mathcal{M}_0^6).$$

Por tanto, o teorema 4.19 garante que $\widetilde{\mathcal{M}} = \Phi^* \mathcal{M}_0^6$. Posto que as xeodésicas en \mathcal{M}_0^6 son as liñas rectas, estas poden escribirse na forma $tu + v$ con u e v en \mathbb{R}^2 . Consecuentemente, as xeodésicas en $\widetilde{\mathcal{M}}$ toman localmente a forma $\Phi^{-1}(tu + v)$. Posto que \mathcal{M} e $\widetilde{\mathcal{M}}$ son fortemente proxectivamente equivalentes, as xeodésicas non parametrizadas de ambas as dúas coinciden. Isto proba o resultado. \square

O seguinte teorema mostra cales son, salvo equivalencia linear, os modelos tipo \mathcal{A} xeodesicamente completos. A proba deste resultado emprega a construción do teorema 8.6, polo que o espazo de solucións $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ asociado a cada modelo xoga un papel crucial nesta análise. A ecuación xeodésica dunha superficie redúcese a un sistema con dúas ecuacións diferenciais non lineares nunha variable relacionadas entre si. O teorema 8.6 reduce este problema a atopar unha única función dunha variable. Este procedemento permite obter todas as xeodésicas dos modelos $\mathcal{M}_i^j(\cdot)$ con $j = 4$ e $j = 6$; en contraposición a isto, para $j = 2$, obtemos EDOs que non somos capaces de resolver explicitamente, mais si permiten obter a información suficiente para establecer cando son xeodesicamente completas ou non.

En [47] determináronse os modelos tipo \mathcal{A} non chans xeodesicamente completos empregando unha análise diferente. O seguinte resultado completa aquel estudo considerando o caso chan co método arriba descrito.

Teorema 8.7. *Sexa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2, \nabla)$ un modelo tipo \mathcal{A} . Entón \mathcal{M} é xeodesicamente completo se e só se \mathcal{M} é linearmente equivalente a \mathcal{M}_0^6 , a \mathcal{M}_4^6 , a $\mathcal{M}_3^4(-\frac{1}{2})$ ou a $\mathcal{M}_2^2(-1, a)$ para algún a .*

Observación 8.8. Sexa \mathcal{M} un modelo tipo \mathcal{A} . Dicimos que \mathcal{M} é esencialmente xeodesicamente incompleto se non existe ningunha superficie tipo \mathcal{A} modelada en \mathcal{M} que sexa xeodesicamente completa. A través da proba do seguinte resultado móstrase que todo modelo tipo \mathcal{A} non chan que é xeodesicamente incompleto mais non esencialmente xeodesicamente incompleto é linearmente equivalente a $\mathcal{M}_2^4(-\frac{1}{2})$ ou a $\mathcal{M}_5^4(0)$, e que os únicos modelos tipo \mathcal{A} non chans que poden ser xeodesicamente completados son, salvo equivalencia linear, $\mathcal{M}_2^4(-\frac{1}{2})$ e $\mathcal{M}_5^4(0)$. A análise faise de forma análoga á que consideramos para campos de vectores afín Killing incompletos na sección anterior.

Proba. Posto que a proba é algo longa, estudamos separadamente os tres casos posibles segundo o valor do rango do tensor de Ricci. Á súa vez cada un destes casos subdivídese no estudo de cada unha das parametrización da definición 6.1 co valor do rango do tensor de Ricci que lle corresponda. No sucesivo $\sigma_{a,b}(t)$ denotará a xeodésica determinada por $\sigma_{a,b}(0) = 0$ e $\dot{\sigma}_{a,b}(0) = (a, b)$. Distinguimos os seguintes casos:

Caso 1. As xeometrías chás \mathcal{M}_i^6

Todas estas xeometrías son localmente afinmente equivalentes ao plano afín $(\mathbb{R}^2, \Gamma_0^6)$. Esta xeometría xeodesicamente completa proporciona un modelo local para cada un dos demais modelos. Posto que Θ_i^6 con $i = 1, 2, 3$ mergulla \mathcal{M}_i^6 en \mathcal{M}_0^6 ; Θ_4^6 proporciona un difeomorfismo afín entre \mathcal{M}_4^6 e \mathcal{M}_0^6 , e Θ_5^6 é unha inmersión non sobrexectiva de \mathcal{M}_5^6 en \mathcal{M}_0^6 . Por esta razón \mathcal{M}_i^6 é xeodesicamente incompleto para $i = 1, 2, 3, 5$ e \mathcal{M}_4^6 é xeodesicamente completo. No que segue empregamos o teorema 8.6 para determinar explicitamente a xeodésica correspondente para cada modelo \mathcal{M}_i^6 .

\mathcal{M}_0^6

$\sigma_{a,b}(t) = (at, bt)$. \mathcal{M}_0^6 é xeodesicamente completo e define o plano afín chan en \mathbb{R}^2 .

\mathcal{M}_1^6

$\sigma_{a,b}(t) = (\log(1 + at), \frac{bt}{1+at})$. \mathcal{M}_1^6 é xeodesicamente incompleto, xa que $\sigma_{a,b}(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ se e só se $a = 0$.

\mathcal{M}_2^6

$\sigma_{a,b}(t) = (-\log(1 - at), \log(1 + bt))$. \mathcal{M}_2^6 é xeodesicamente incompleto e ningunha xeodésica non trivial está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

\mathcal{M}_3^6

$\sigma_{a,b}(t) = (at, \log(1 + bt))$. \mathcal{M}_3^6 é xeodesicamente incompleto, xa que $\sigma_{a,b}(t)$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ se e só se $b = 0$.

\mathcal{M}_4^6

$\sigma_{a,b}(t) = (at - \frac{1}{2}b^2t^2, bt)$, polo que \mathcal{M}_4^6 é xeodesicamente completo.

\mathcal{M}_5^6

$\sigma_{a,b}(t) = (\frac{1}{2} \log((1 + at)^2 + b^2t^2), \arctan(\frac{tb}{1+at}))$. $\sigma_{a,b}(t)$ estende a todo $t \in \mathbb{R}$ se e só se $b \neq 0$.

Caso 2. As xeometrías $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$

Para estas xeometrías o tensor de Ricci é da forma $\lambda dx^2 \otimes dx^2$ con λ constante. Supoñamos que existe unha superficie afín xeodesicamente completa $\widetilde{\mathcal{M}}$ modelada en $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$. Sexa σ unha xeodésica nunha veciñanza dun punto de $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ definida por $\sigma(t) = (x^1(t), x^2(t))$ que pode transportarse a $\widetilde{\mathcal{M}}$. Entón $\rho(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})(t) = \lambda(x^2(t))^2$ estende a unha función analítica real en $\widetilde{\mathcal{M}}$ que polo tanto está definida para todo t . Se podemos atopar unha xeodésica tal que $\dot{x}^2(t)$ non estea acoutada, entón $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$ é automaticamente esencialmente xeodesicamente incompleta. No que segue empregamos de novo o teorema 8.6 para determinar explicitamente a xeodésica correspondente para cada modelo $\mathcal{M}_i^4(\cdot)$.

\mathcal{M}_1^4

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (-\log(1 - \frac{a \log(2bt+1)}{2b}), \frac{1}{2} \log(2bt + 1)) & \text{se } b \neq 0 \\ (-\log(1 - at), 0) & \text{se } b = 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta.

$\mathcal{M}_2^4(c)$

Se $c \neq -\frac{1}{2}$, entón

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (\log(\frac{b}{a+b}) - \log(1 - \frac{a(2bct+bt+1)^{\frac{1}{2c+1}}}{a+b}), \frac{\log(2bct+bt+1)}{2c+1}) & \text{se } b \notin \{-a, 0\} \\ \frac{(-\log(1+b(t+2ct)), \log(1+bt+2bct))}{1+2c} & \text{se } b = -a \neq 0 \\ (-\log(1 - at), 0) & \text{se } b = 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta. Se $c = -\frac{1}{2}$, entón

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (-\log(1 - at), 0) & \text{se } b = 0 \\ (-\log(a(e^{bt} - 1) - b) + \log(-b), bt) & \text{se } b < 0 \\ (-\log(-a(e^{bt} - 1) + b) + \log(b), bt) & \text{se } b > 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta. Polo teorema 8.1, existe un mergullo afín de $\mathcal{M}_2^4(-\frac{1}{2})$ a $\mathcal{M}_3^4(-\frac{1}{2})$. Posto que a continuación veremos que $\mathcal{M}_3^4(-\frac{1}{2})$ é xeodesicamente completa, tense que $\mathcal{M}_2^4(-\frac{1}{2})$ pode ser xeodesicamente completada.

$\mathcal{M}_3^4(c)$

Se $c \neq -\frac{1}{2}$, sexa $\kappa := 1 + 2c$, entón

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{a}{b}((1 + bt\kappa)^{1/\kappa} - 1), \kappa^{-1} \log(1 + bt\kappa) \right) & \text{se } b \neq 0 \\ (at, 0) & \text{se } b = 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta. Se $c = -\frac{1}{2}$,

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{a}{b}(e^{bt} - 1), bt \right) & \text{se } b \neq 0 \\ (at, 0) & \text{se } b = 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é xeodesicamente completa.

$\mathcal{M}_4^4(c)$

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (at, 0) & \text{se } b = 0 \\ \left(-\frac{1}{8b} \log(1 + 2bt)(-4a + bc \log(1 + 2bt)), \frac{1}{2} \log(1 + 2bt) \right) & \text{se } b \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta.

$\mathcal{M}_5^4(c)$

Existe un mergullo afín desta xeometría en $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$ que non é sobrexectivo $\mathcal{M}_5^4(c)$. Por tanto, a análise deste apartado pode abordarse a partir da do caso seguinte, onde se estuda $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$.

$\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$

Tense que $\rho = (1 + c^2)dx^2 \otimes dx^2$. Se $c = 0$, entón

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (at, 0) & \text{se } b = 0 \\ \left(\frac{a}{b} \sin(bt), bt \right) & \text{se } b \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría é xeodesicamente completa. Se $c \neq 0$, entón

$$\sigma_{a,b}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (at, 0) & \text{se } b = 0 \\ \left(\frac{a}{b}(1 + 2bct)^{1/2} \sin\left(\frac{\log(1+2bct)}{2c}\right), \frac{\log(1+2bct)}{2c} \right) & \text{se } b \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Esta xeometría e, consecuentemente, tamén $\mathcal{M}_5^4(c)$, son esencialmente xeodesicamente incompletas. Se $b \neq 0$, entón \dot{x}^2 non está acoutado para todo t . Por tanto, só pode ser completada unha das xeodésicas. Posto que $\mathcal{M}_5^4(c)$ pode mergullarse como un aberto de $\widetilde{\mathcal{M}}_5^4(c)$, isto mostra que $\mathcal{M}_5^4(c)$ tamén é esencialmente xeodesicamente incompleta se $c \neq 0$.

Caso 3. As xeometrías $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$

Supoñamos que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é unha superficie afín completa simplemente conexas que está localmente modelada en $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$. Posto que $\dim\{\mathfrak{K}(\widetilde{\mathcal{M}})\} = 2$, ∂_{x^1} e ∂_{x^2} estenden como campos de vectores afín Killing a todo \mathcal{M} . Isto mostra que se γ é xeodésica en $\mathcal{M}_i^2(\cdot)$, entón $\rho(\dot{\gamma}, \partial_{x^i})$ é unha función acoutada. A continuación estudamos a completude xeodésica para as parametrizacións restantes nas que, en xeral, o teorema 8.6 non consegue resolver o problema de determinar explicitamente as xeodésicas.

$\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$

Obtemos tres posibles xeodésicas da forma $\sigma_i(t) = \log(t)\vec{\alpha}_i$ onde

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{(1, 1)}{1 + a_1 + a_2}, \quad \vec{\alpha}_2 = \frac{(1 - a_2, a_1)}{1 + a_1 - a_2}, \quad \vec{\alpha}_3 = \frac{(a_2, 1 - a_1)}{1 - a_1 + a_2}.$$

A primeira xeodésica está definida para $a_1 + a_2 + 1 \neq 0$, a segunda para $a_1 - a_2 + 1 \neq 0$ e a terceira para $-a_1 + a_2 + 1 \neq 0$. Polo menos dúas destas xeodésicas están definidas para cada unha das $\mathcal{M}_1^2(a_1, a_2)$. Tense que $\dot{\sigma} = \frac{1}{t}(c, d)$ con $(c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Entón esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta.

$\mathcal{M}_2^2(a_1, a_2)$

Supoñamos que $a_1 \neq -1$. Tense que $\sigma(t) = \log(t)(\frac{1}{1+a_1}, 0)$ é xeodésica. Entón esta xeometría é esencialmente xeodesicamente incompleta. Supoñamos que $a_1 = -1$. Adaptamos un argumento dado por Bromberg e Medina en [9]. As ecuacións xeodésicas transfórmanse en $\dot{u} = v(2au - \frac{1}{2}(1+a^2)v)$ e $\dot{v} = v(2u)$, que en forma matricial resultan:

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}, \text{ sendo } A = \begin{pmatrix} -2a & \frac{1}{2}(1+a^2) \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $v(t_0) = 0$ para calquera parámetro do dominio, entón $u(t) = u(t_0)$ e $v(t) = 0$ resolven esta EDO. Daquela podemos supoñer sen perda de xeneralidade que v non cambia de signo. Consideramos un novo parámetro τ tal que $\partial_\tau t = v(t)$ e sexan $U(\tau) = u(t(\tau))$ e $V(\tau) = v(t(\tau))$. Tense que

$$\partial_\tau \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Posto que os autovalores de A son $-a \pm \sqrt{-1}$, a solución da ecuación anterior é da forma

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = e^{-\tau a} \left\{ \cos(\tau) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \text{sen}(\tau) \begin{pmatrix} -ac_1 + \frac{1}{2}(1+a^2)c_2 \\ -2c_1 + ac_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entón $V = e^{-\tau a}(c_2 \cos(\tau) + (-2c_1 + ac_2) \text{sen}(\tau))$. Posto que V non se anula en ningún punto, o rango de parámetros de τ ten ao sumo lonxitude π . Isto mostra que a xeodésica orixinal está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{M}_3^2(c)$ e $\mathcal{M}_4^2(\pm)$

Tense que $\sigma_{a,0} = (\frac{1}{2} \log(1 + 2at), 0)$ é xeodésica para estes dous modelos, polo que son esencialmente xeodesicamente incompletos. \square

Observación 8.9. O estudo da completude xeodésica para modelos tipo \mathcal{B} non se inclúe nesta memoria e aínda constitúe un problema aberto. A dificultade que presenta é que polo momento non dispoñemos de clasificacións lineares apropiadas para tratar o caso das superficies con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{N})\} = 2$.

8.4 Estructuras quasi-Einstein Kähler irreducibles

Nesta sección estudamos exemplos de variedades quasi-Einstein Kähler obtidos a partir de superficies quasi-Einstein afíns mediante o teorema 3.19.

Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión $n = 2m$. Unha *estructura case-compleja* en (M, g) é un tensor J de tipo $(1, 1)$ tal que $J^2 = -\text{Id}$. Se $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dicimos que (M, g, J) é *variedade case-hermítica*. Adicionalmente, se $\nabla J = 0$ dicimos que (M, g, J) é unha *variedade Kähler* (para máis información, véxase [4, 103]).

A existencia de solucións para a ecuación quasi-Einstein antóllase unha condición moi restritiva para as variedades Kähler. O seguinte resultado de [34] mostra esta situación en sinatura riemanniana.

Teorema 8.10. *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann n -dimensional cunha métrica quasi-Einstein Kähler con $\mu \neq 0$. Entón M é localmente isométrica a unha métrica produto $M_1 \times M_2$ e a función potencial f pode considerarse como función de M_2 , onde M_1 é unha variedade Einstein $(n - 2)$ -dimensional con constante Einstein λ e M_2 é unha variedade quasi-Einstein 2-dimensional.*

O resultado anterior é análogo no caso indefinido cando a estrutura non é isotrópica, i.e., se $\|\nabla f\| \neq 0$. O caso isotrópico, pola contra, ten un comportamento ben distinto. O noso obxectivo no que segue é ilustrar este feito. Sexa $(T^*\Sigma, g_{D,\phi})$ unha extensión de Riemann dunha superficie afín $\mathcal{M} = (\Sigma, D)$ e sexa J unha estrutura complexa en \mathcal{M} . Tomamos coordenadas locais (x^1, x^2) en Σ tales que $J\partial_{x^1} = \partial_{x^2}$ e denotamos por \mathcal{J} a estrutura complexa inducida nas fibras de $T^*\Sigma$ que en coordenadas locais $(x^1, x^2, x_{1'}, x_{2'})$ queda determinada por

$$\mathcal{J}\partial_{x_{1'}} = \partial_{x_{2'}}, \quad \mathcal{J}\partial_{x_{2'}} = -\partial_{x_{1'}}.$$

En [81] próbase que \mathcal{J} determina unha estrutura case-hermítica en $(T^*\Sigma, g_{D,\phi})$ chamada *estructura Walker case-hermítica propia* determinada por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\partial_{x^1} &= \partial_{x^2} - g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^2})\partial_{x_{1'}} + \frac{1}{2}\{g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}) - g_{D,\phi}(\partial_{x^2}, \partial_{x^2})\}\partial_{x_{2'}}, \\ \mathcal{J}\partial_{x^2} &= -\partial_{x^1} + \frac{1}{2}\{g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}) - g_{D,\phi}(\partial_{x^2}, \partial_{x^2})\}\partial_{x_{1'}} + g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^2})\partial_{x_{2'}}. \end{aligned}$$

Empregando isto, obtemos o seguinte resultado.

Lema 8.11. *A tripla $(T^*\Sigma, g_{D,\phi}, \mathcal{J})$ é unha variedade Kähler indefinida se e só se a tripla (Σ, D, J) é unha superficie afín Kähler.*

Proba. As condicións para que unha estrutura Walker case-hermítica propia sexa Kähler foron estudadas en [81]. Entón tense que $(T^*\Sigma, g_{D,\phi}, \mathcal{J})$ é Kähler se e só se

$$\begin{aligned}\partial_{x_1'} g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}) &= -\partial_{x_1'} g_{D,\phi}(\partial_{x^2}, \partial_{x^2}) = \partial_{x_2'} g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}), \\ \partial_{x_2'} g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^1}) &= -\partial_{x_2'} g_{D,\phi}(\partial_{x^2}, \partial_{x^2}) = -\partial_{x_1'} g_{D,\phi}(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}).\end{aligned}$$

Equivalentemente, os símbolos de Christoffel de \mathcal{M} satisfán

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 \text{ and } \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{12}^1.$$

polo que resultados de [24, lema 3.6] mostran que estas son condicións necesarias e suficientes para que (Σ, D, J) sexa unha superficie afín Kähler. \square

Unha superficie afín \mathcal{M} admite unha estrutura Kähler se e só se a parte simétrica do tensor de Ricci, ρ_s , é recorrente e $\det\{\rho_s\} > 0$. Isto é, ρ_s é definido positivo ou negativo. Entón, os modelos tipo \mathcal{A} non chans non admiten unha estrutura afín Kähler. Os modelos tipo \mathcal{C} sempre admiten unha estrutura afín Kähler. Ademais, en calquera destes casos, a ecuación quasi-Einstein ten solucións non triviais só no caso $\mu = -1$ (ver os teoremas 4.17 e 5.22).

Por último consideramos o caso dos modelos tipo \mathcal{B} con $\dim\{\mathfrak{K}(\mathcal{M})\} = 2$. Todos estes modelos tipo \mathcal{B} con $\rho_s = 0$ admiten unha estrutura afín Kähler, mais non admiten ningunha solución non constante da ecuación quasi-Einstein afín. Asumamos que $\rho_s \neq 0$. Entón, un resultado de [24, lema 5.6] mostra que se un modelo tipo \mathcal{B} admite unha estrutura Kähler, entón

$J = \begin{pmatrix} \mathfrak{t}_1^1 & 1 \\ \mathfrak{t}_1^2 & -\mathfrak{t}_1^1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ e os símbolos de Christoffel satisfán

$$\begin{aligned}C_{11}^1 &= C_{22}^1 \mathfrak{t}_1^2 + 2(C_{22}^2 + 2C_{22}^1 \mathfrak{t}_1^1) \mathfrak{t}_1^1, & C_{12}^1 &= C_{22}^2 + 2C_{22}^1 \mathfrak{t}_1^1, \\ C_{11}^2 &= (C_{22}^2 + 2C_{22}^1 \mathfrak{t}_1^1) \mathfrak{t}_1^2, & C_{12}^2 &= C_{22}^1 \mathfrak{t}_1^2, \\ C_{22}^1 &\neq 0.\end{aligned}$$

Tomando $C_{11}^1 = C_{12}^2 = -C_{22}^1 \neq 0$ e $C_{11}^2 = -C_{22}^2 = -C_{12}^1 = 0$, a relación anterior amosa que $\mathfrak{t}_1^1 = 0$ e $\mathfrak{t}_1^2 = -1$. Entón, a estrutura resultante é Kähler. Ademais, o teorema 7.17 mostra que a ecuación quasi-Einstein afín admite solucións non constantes $f(x^1, x^2) = (x^1)^{1+2C_{11}^1}$ con $\mu = 1 + 2C_{11}^1$. Sintetizando a información anterior, obtemos o seguinte resultado que nos proporciona unha familia de exemplos quasi-Einstein Kähler.

Teorema 8.12. *Sexa (Σ, D, J) un modelo tipo \mathcal{B} Kähler con $C_{11}^1 = C_{12}^2 = -C_{22}^1 \neq 0$ e $C_{11}^2 = -C_{22}^2 = -C_{12}^1 = 0$. Entón $(T^*\Sigma, g_{D,\phi}, \mathcal{J})$ é unha variedade quasi-Einstein Kähler indefinida con función potencial $f(x^1, x^2) = (x^1)^{1+2C_{11}^1}$ para algún $\mu = 1 + 2C_{11}^1$. Ademais neste caso non separa unha recta complexa a diferenza da situación considerada no teorema 8.10.*

Bibliografía

- [1] Z. Afifi, Riemann extensions of affine connected spaces, *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **5** (1954), no. 2, 312–320.
- [2] T. Arias-Marco e O. Kowalski, Classification of locally homogeneous affine connections with arbitrary torsion on 2-manifolds, *Monatsh. Math.* **153** (2008), 1–18.
- [3] A. Barros e E. Ribeiro Jr., Some characterizations for compact almost Ricci solitons, *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), 1033–1040.
- [4] M. Barros e A. Romero, Indefinite Kähler manifolds, *Math. Ann.* **261** (1982), no. 1, 55–62.
- [5] M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), no. 4, 285–294.
- [6] A.-L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [7] W. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Pure Appl. Math. **120**, Academic Press, Orlando, FL, 1986.
- [8] H.-W. Brinkmann, Riemann spaces conformal to Einstein spaces, *Math. Ann.* **91** (1924), no. 3-4, 269–278.
- [9] S. Bromberg e A. Medina, A note on the completeness of homogeneous quadratic vector fields on the plane, *Qual. Theory Dyn. Syst.* **6** (2005), 181–185.
- [10] M. Brozos-Vázquez, E. Calviño-Louzao, E. García-Río, e R. Vázquez-Lorenzo, Local structure of self-dual gradient Yamabe solitons, *Geometry, algebra and applications: from mechanics to cryptography*, Springer Proc. Math. Stat. **161** (2016), 25–35.
- [11] M. Brozos-Vázquez e E. García-Río, Four-dimensional neutral signature self-dual gradient Ricci solitons, *Indiana Univ. Math. J.* **65** (2016), 1921–1943.
- [12] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, e S. Gavino-Fernández, Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci Solitons, *J. Geom. Anal.* **23** (2013), 1196–1212.
- [13] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, e S. Gavino-Fernández, Locally conformally flat Lorentzian quasi-Einstein manifolds, *Monatsh. Math.* **173** (2014), 175–186.

- [14] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, e P. Gilkey, Homogeneous affine surfaces: affine Killing vector fields and gradient Ricci solitons, *J. Math. Soc. Japan* **70** (2018), 25–69.
- [15] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, e P. Gilkey, Homogeneous affine surfaces: Moduli spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **444** (2016), 1155–1184.
- [16] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, e R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics **5**, Morgan & Claypool Publ., Williston, VT, 2009.
- [17] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, e X. Valle-Regueiro, A natural linear equation in affine geometry: the affine quasi-Einstein equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** (2018), 3485–3497.
- [18] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, e X. Valle-Regueiro, Half conformally flat generalized quasi-Einstein manifolds, *International J. Math.* **29** (2018), 1850002, 25 pp.
- [19] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, e X. Valle-Regueiro, Solutions to the affine quasi-Einstein equation for homogeneous surfaces, arXiv:1802.07953 [math.DG].
- [20] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, e X. Valle-Regueiro, The affine quasi-Einstein Equation for homogeneous surfaces, *Manuscripta Math.* **157** (2018), no. 1-2, 279–294.
- [21] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, e X. Valle-Regueiro, Isotropic quasi-Einstein manifolds, arXiv.
- [22] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, e X. Valle-Regueiro, Half conformally flat gradient Ricci almost solitons, *Proc. A.* **472** (2016), no. 2189, 20160043, 12 pp.
- [23] E. Calviño-Louzao, M. Fernández-López, E. García-Río, e R. Vázquez-Lorenzo, Homogeneous Ricci almost solitons, *Israel J. Math.* **220** (2015), no. 2, 531–546.
- [24] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey, I. Gutiérrez-Rodríguez, e R. Vázquez-Lorenzo, Affine surfaces which are Kähler, para-Kähler, or nilpotent Kähler, *Results Math.* **73** (2018), no. 4, Art. 135, 24 pp.
- [25] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey, e R. Vázquez-Lorenzo, The geometry of modified Riemannian extensions, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **465** (2009), 2023–2040.
- [26] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, e R. Vázquez-Lorenzo, Bach-flat isotropic gradient Ricci solitons, *Pacific J. Math.* **293** (2018), 75–99.
- [27] H.-D. Cao, Geometry of complete gradient shrinking Ricci solitons, *Adv. Lect. Math. (ALM)* **17** (2011), no. 1, 227–246.

- [28] H.-D. Cao, Recent Progress on Ricci Solitons, *Adv. Lect. Math. (ALM)* **11** (2010), 1–38.
- [29] H.-D. Cao, G. Catino, Q. Chen, C. Mantegazza, e L. Mazzieri, Bach-flat gradient steady Ricci solitons, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **49** (2014), 125–138.
- [30] H.-D. Cao e Q. Chen, On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons, *Duke Math. J.* **162** (2013), 1149–1169.
- [31] H.-D. Cao e Q. Chen, On locally conformally flat steady gradient Ricci solitons, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 2377–2391.
- [32] X. Cao e H. Tran, The Weyl tensor of gradient Ricci solitons, *Geom. Topol.* **20** (2016), 389–436.
- [33] X. Cao, B. Wang, e Z. Zhang, On locally conformally flat gradient shrinking Ricci solitons, *Commun. Contemp. Math.* **13** (2011), 269–282.
- [34] J. Case, Y.-J. Shu, e G. Wei, Rigidity of quasi-Einstein metrics, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 93–100.
- [35] G. Catino, A note on four-dimensional (anti-)self-dual quasi-Einstein manifolds, *Differential Geom. Appl.* **30** (2012), 660–664.
- [36] G. Catino, Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor, *Math. Z.* **271** (2012), 751–756.
- [37] G. Catino, Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **54** (2015), no. 3, 2921–2937.
- [38] G. Catino, L. Cremaschi, Z. Djadli, C. Mantegazza, e L. Mazzieri, The Ricci-Bourguignon flow, *Pacific J. Math.* **287** (2017), 337–370.
- [39] G. Catino, C. Mantegazza, L. Mazzieri, e M. Rimoldi, Locally conformally flat quasi-Einstein manifolds, *J. Reine Angew. Math.* **675** (2013), 181–189.
- [40] G. Catino, P. Mastrolia, D. Monticelli, e M. Rigoli, Analytic and geometric properties of generic Ricci solitons, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 11, 7533–7549.
- [41] G. Catino, P. Mastrolia, D. Monticelli, e M. Rigoli, Conformal Ricci solitons and related integrability conditions, *Adv. Geom.* **16** (2016), 301–328.
- [42] G. Catino, P. Mastrolia, D. Monticelli, e M. Rigoli, On the geometry of gradient Einstein-type manifolds, *Pacific J. Math.* **286** (2017), 39–67.
- [43] G. Catino e L. Mazzieri, Gradient Einstein solitons, *Nonlinear Anal.* **132** (2016), 66–94.
- [44] X. Chen e Y. Wang, On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons, *J. Geom. Anal.* **25** (2015), 1335–1343.

- [45] M. Christ, Some non-analytic-hypoelliptic sums of squares of vector fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **26** (1992), 137–140.
- [46] D. D’Ascanio, P. Gilkey, e P. Pisani, Affine Killing vector fields on homogeneous surfaces with torsion, enviado a publicación.
- [47] D. D’Ascanio, P. Gilkey, e P. Pisani, Geodesic completeness for Type A surfaces, *Differential Geom. Appl.* **54** (2017), part A, 31–43.
- [48] A. Derdzinski, Connections with skew-symmetric Ricci tensor on surfaces, *Results Math.* **52** (2008), 223–245.
- [49] A. Derdzinski, Non-Walker self-dual neutral Einstein four-manifolds of Petrov type III, *J. Geom. Anal.* **19** (2009), 301–357.
- [50] A. Derdzinski e W. Roter, Walker’s theorem without coordinates, *J. Math. Phys.* **47** (2006), no. 6, 062504, 8 pp.
- [51] J.-C. Díaz-Ramos, E. García-Río, e R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *J. Geom. Anal.* **16** (2006), 39–52.
- [52] M. Dunajski e S. West, Anti-self-dual conformal structures in neutral signature, *ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc.* (2008), 113–148.
- [53] L.-P. Eisenhart, *Non-Riemannian geometry* (Reprint of the 1927 original), Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **8**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [54] L.-C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [55] M. Fernández-López e E. García-Río, A note on locally conformally flat gradient Ricci solitons, *Geom. Dedicata* **168** (2014), 1–7.
- [56] M. Fernández-López e E. García-Río, Rigidity of shrinking Ricci solitons, *Math. Z.* **269** (2011), 461–466.
- [57] M. Fernández-López, E. García-Río, D.-N. Kupeli, e B. Ünal, A curvature condition for a twisted product to be a warped product, *Manuscripta math.* **106** (2001), 213–217.
- [58] S. Gallot, D. Hulin, e J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Second edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [59] E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, e R. Vázquez-Lorenzo, *Applications of Affine and Weyl Geometry*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics **13**, Morgan & Claypool Publ., Williston, VT, 2013.
- [60] P. Gilkey e J.-H. Park, Moduli spaces of oriented Type A manifolds of dimension at least 3, *J. Korean Math. Soc.* **54** (2017), no. 6, 1759–1786.

- [61] P. Gilkey, J.-H. Park, e X. Valle-Regueiro, Affine Killing complete and geodesically complete homogeneous affine surfaces, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), 179–193.
- [62] P. Gilkey e X. Valle-Regueiro, Applications of PDEs to the study of affine surface geometry, *Mat. Vesnik* **71** (2019), no. 1-2, 45–62.
- [63] P. Gilkey e X. Valle-Regueiro, Geodesic completeness and the quasi-Einstein equation for locally homogeneous affine surfaces, en prensa.
- [64] A.-R. Gover e P. Nurowski, Obstructions to conformally Einstein metrics in n dimensions, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 450–484.
- [65] R.-S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, *Contemp. Math.* **71** (1988), 237–261.
- [66] M. Kanai, On a differential equation characterizing a Riemannian structure of a manifold, *Tokyo J. Math.* **6** (1983), 143–151.
- [67] D.-S. Kim e Y.-H. Kim, Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2573–2576.
- [68] O. Kobayashi, A differential equation arising from scalar curvature function, *J. Math. Soc. Japan* **34** (1982), 665–675.
- [69] S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry vol. I and II*, Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [70] O. Kobayashi e M. Obata, Certain mathematical problems on static models in general relativity, *Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations* (1982), no. 1-3, 1333–1343.
- [71] O. Kowalski, B. Opozda, e Z. Vlasek, A classification of locally homogeneous affine connections with skew-symmetric Ricci tensor on 2-dimensional manifolds, *Monatsh. Math.* **130** (2000), 109–125.
- [72] O. Kowalski, B. Opozda, e Z. Vlasek, On locally nonhomogeneous pseudo-Riemannian manifolds with locally homogeneous Levi-Civita connections, *Internat. J. Math.* **14** (2003), 559–572.
- [73] W. Kühnel, *Differential Geometry*, Student Mathematical Library **77**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [74] W. Kühnel e H.-B. Rademacher, Conformal diffeomorphisms preserving the Ricci tensor, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1995), 2841–2848.
- [75] W. Kühnel e H.-B. Rademacher, Conformal transformations of pseudo-Riemannian manifolds, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc.* (2008), 261–298.

- [76] W. Kühnel e H.-B. Rademacher, Liouville's theorem in conformal geometry, *J. Math. Pures Appl.* **88** (2007), 251–260.
- [77] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **218**, Springer, New York, 2003.
- [78] J. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics **176**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [79] G. Maschler, Almost soliton duality, *Adv. Geom.* **15** (2015), 159–166.
- [80] P. Mastrolia e M. Rimoldi, Some triviality results for quasi-Einstein manifolds and Einstein warped products, *Geom. Dedicata* **169** (2014), 225–237.
- [81] Y. Matsushita, Walker 4-manifolds with proper almost complex structures, *J. Geom. Phys.* **55** (2005), 385–398.
- [82] O. Munteanu e N. Sesum, On gradient Ricci solitons, *J. Geom. Anal.* **23** (2013), 539–561.
- [83] B.-L. Neto, Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic anti-self dual Weyl tensor, *Arch. Math.* **106** (2016), 489–499.
- [84] L. Ni e N. Wallach, On a classification of gradient shrinking solitons, *Math. Res. Lett.* **15** (2008), no. 5, 941–955.
- [85] K. Nomizu, On local and global existence of Killing vector fields, *Ann. of Math.* **72** (1960), no. 2, 105–120.
- [86] K. Nomizu e T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge Tracts in Math. **111**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [87] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 333–340.
- [88] M. Obata, Riemannian manifolds admitting a solution of a certain system of differential equations, *Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry* (1966), 101–114.
- [89] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics **103**, Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [90] B. Opozda, A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds, *Differential Geom. Appl.* **21** (2004), 173–198.
- [91] B. Opozda, Locally homogeneous affine connections on compact surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 2713–2721.
- [92] B. Opozda, Locally symmetric connections on surfaces, *Results Math.* **20** (1991), 725–743.

- [93] E.-M. Patterson e A.-G. Walker, Riemann extensions, *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **3** (1952), no. 2, 19–28.
- [94] P. Petersen e W. Wylie, On the classification of gradient Ricci solitons, *Geom. Topol.* **14** (2010), 2277–2300.
- [95] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimoldi, e A. Setti, Ricci almost solitons, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **10** (2011), no. 5, 757–799.
- [96] R. Ponge e H. Reckziegel, Twisted products in pseudo-Riemannian geometry, *Geom. Dedicata* **48** (1993), 15–25.
- [97] C. Steglich, Invariants of Conformal and Projective Structures, *Results Mat.* **27** (1995), 188–193.
- [98] Y. Su e K. Zhang, On the Kähler-Ricci solitons with vanishing Bochner-Weyl tensor, *Acta Math. Sci. Ser. B* **32** (2012), no. 3, 1239–1244.
- [99] F. Trèves, Analytic-hypoelliptic partial differential equations of principal type, *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), 537–570.
- [100] A.-G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford* **1** (1950), no. 2, 69–79.
- [101] X. Xu, On the existence and uniqueness of solutions of Möbius equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 927–945.
- [102] K. Yano e S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles: differential geometry*, Pure and Applied Mathematics **16**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [103] K. Yano e M. Kon, Structures on manifolds, *Series in Pure Mathematics* (1984), no. 3, ix+508 pp.
- [104] Y.-C. Wong, Two dimensional linear connexions with zero torsion and recurrent curvature, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 175–184.
- [105] Z.-H. Zhang, Gradient shrinking solitons with vanishing Weyl tensor, *Pacific J. Math.* **242** (2009), 189–200.

