INTRODUCIÓN ÁS ECUACIÓNS DIFERENCIAIS ORDINARIAS

métodos de resolución de ecuacións diferenciais ordinarias escalares de primeira orde

Esenciais USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sebastián Buedo Fernández, Óscar A. Otero Zarraquiños, Rosana Rodríguez López (Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización)

As ecuacións diferenciais serven para modelar fenómenos reais, ao prediciren a súa evolución. A continuación, preséntase unha enumeración dos diferentes tipos de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde escalares para os que existen procedementos de resolución directa, os cales se explican e ilustran. Así, presentamos os principais conceptos e técnicas para a resolución de ecuacións en variables separadas, lineais, de Bernoulli, homoxéneas, reducibles a homoxéneas, exactas e reducibles a exactas (factor integrante). Empregarase o software libre SageMath como apoio á resolución, comprobación de resultados e visualización.

1. Conceptos fundamentais

No que segue, traballaremos cunha función

$$f : (t, x) \in A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$$

e cunha norma calquera $\| \cdot \|$ en $\mathbb{R}^n$.

1.1. Ecuación diferencial ordinaria

Chamarémoslle **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** de primeira orde dada en forma normal relativa á función f a $x' = f(t, x)$, onde x' denota $\frac{dx}{dt}$.

1.2. Solución dunha ecuación diferencial ordinaria

Dada $\varphi : t \in I \subseteq \mathbb{R} \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, con I intervalo, dicimos que φ é **solución** da EDO $x' = f(t, x)$ se satisfai:

(i) $(t, \varphi(t)) \in A,\ \forall t \in I$;

(ii) existe $\varphi'(t),\ \forall t \in I$;

(iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),\ \forall t \in I$.

1.3. Problema de Cauchy

Dada a EDO $x' = f(t, x)$ e $(t_0, x_0) \in A$, o **problema de Cauchy** consiste en buscar unha función $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con I intervalo real, solución de $x' = f(t, x)$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Dirase que tal función φ pasa por (t_0, x_0).

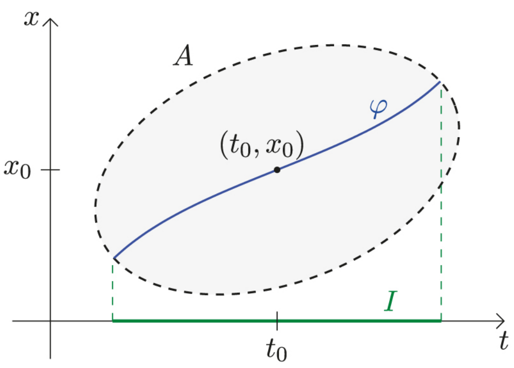


Figura 1: Solución de $x' = f(t, x)$ que pasa por (t_0, x_0).

1.4. Existencia de solución

Teorema de Cauchy-Peano
Se A é aberto, $(t_0, x_0) \in A$ e f é unha función continua en A, existe solución de $x' = f(t, x)$ pasando por (t_0, x_0).

1.5. Unicidade de solución

Diremos que f é **localmente lipschitziana en A con respecto a x** se, para cada $(t^*, x^*) \in A$, existen U veciñanza de (t^*, x^*) en A e $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$ tales que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|,\ \forall\, (t, x), (t, y) \in U.$$

Teorema de Picard-Lipschitz
Se A é aberto, $(t_0, x_0) \in A$ e f é unha función continua en A e localmente lipschitziana en A con respecto a x, entón existe solución única de $x' = f(t, x)$ pasando por (t_0, x_0).

Observación
Se $A = I \times W$, con I intervalo e W aberto convexo, e f é continua con derivada continua en A, cúmprense as condicións do teorema anterior.

2. Métodos de resolución

2.1. Ecuacións en variables separadas

Son do tipo $x' = h(t)g(x)$, sendo $h : I_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : I_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcións continuas en intervalos abertos e g localmente lipschitziana. Calculemos a solución pasando por $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$. Distinguimos dous casos:

- Se $g(x_0) = 0$, a solución é a constante $x(t) = x_0$, definida para $t \in I_1$.
- Se $g(x_0) \neq 0$, integramos $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t)$ e obtemos

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds.$$

  Se $H(t, x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du - \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds$, a expresión $H(t, x) = 0$ define local e implicitamente a solución buscada nunha veciñanza de t_0.

Nótese que, a partir de $\Gamma(x) = H(t) + C$, con Γ primitiva de $\frac{1}{g}$, H primitiva de h e $C \in \mathbb{R}$, temos todas as solucións da ecuación que localmente non anulan g.

Exemplo 1.
A ecuación $x' = \frac{-1}{x-2}$ é de variables separadas. Integrando, temos

$$\int (x-2)\, dx = \int (-1)\, dt,$$

ou sexa,

$$x^2 - 4x + 2t = C,\ C \in \mathbb{R},$$

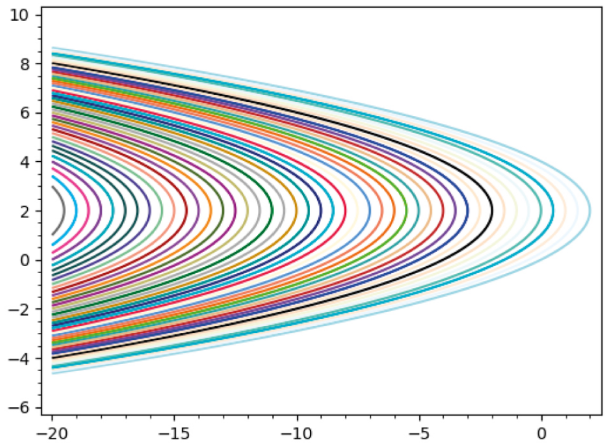
que pode facerse explícita como

$$x(t) = 2 \pm \sqrt{4 - 2t + C},\ C \in \mathbb{R}.$$

```
t = var('t')
x = function('x')(t)
ED = diff(x,t) == -1/(x-2)
desolve(ED,x)
```

```
-1/2*x(t)^2 + 2*x(t) == _C + t
```

```
y=var('y')
G = Graphics()
counter = 0
for col in colors.keys():
        G += implicit_plot(-1/2*y^2 + 2*y␣
↪== counter*.5 + t, (t,-20,2),(y,-6,10),␣
↪color=col)
        counter += 1
G
```




```
SI=desolve(ED,x)
solve(SI,x)
```

```
[x(t) == -sqrt(-2*_C - 2*t + 4) + 2, x(t)␣
↪== sqrt(-2*_C - 2*t + 4) + 2]
```

Exemplo 2.
A ecuación $x' = \frac{1}{t}\frac{1+x^2}{1-x}$ é de variables separadas. Integrando, temos

$$\int \frac{1-x}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt,$$

o que proporciona a expresión implícita

$$\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

```
t = var('t')
x = function('x')(t)
ED2 = diff(x,t) == 1/t*(1+x^2)/(1-x)
desolve(ED2,x)
```

```
arctan(x(t)) - 1/2*log(x(t)^2 + 1) == _C +␣
↪log(t)
```

2.2. Ecuacións lineais

Axústanse á expresión $x' = a(t)x + b(t)$, sendo as funcións $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas no intervalo I. Distinguimos dous casos:

- Se $b(t) = 0, \forall t \in I$, a ecuación é **lineal homoxénea**.
- Se $b(t) \neq 0$, para algún $t \in I$, a ecuación é **lineal completa**.

De acordo co apartado 2.1, a solución xeral da ecuación homoxénea, $x' = a(t)x$, vén dada por

$$x(t) = Ce^{A(t)},\ C \in \mathbb{R},$$

con A unha primitiva de a. Se pasa por (t_0, x_0), entón

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds},\ t \in I.$$

Dada a ecuación completa $x' = a(t)x + b(t)$, a súa solución xeral pode calcularse sumando unha das súas solucións particulares á solución xeral da ecuación homoxénea asociada $x' = a(t)x$. Usaremos o método de variación de constantes para buscar unha solución particular φ^* da ecuación completa da forma

$$x(t) = c(t)e^{A(t)},$$

onde $c(t)$ se calcula inserindo a expresión anterior na devandita ecuación. Por tanto, a solución xeral da ecuación completa será

$$x(t) = Ce^{A(t)} + \varphi^*(t),\ C \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, a solución da ecuación completa pasando por (t_0, x_0) é

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{s}^{t} a(u)\, du}\, ds,\ t \in I.$$

Exemplo 3.
A EDO $x' = -\frac{2t^2+x}{t+6}$ é lineal con $a, b : I \to \mathbb{R}$ dadas por $a(t) = -\frac{1}{t+6}$ e $b(t) = -\frac{2t^2}{t+6}$ no intervalo $I = (-\infty, -6)$ ou ben $I = (-6, \infty)$.

A solución xeral da ecuación homoxénea é

$$x(t) = \frac{C}{t+6},\ t \in I,\ \text{para}\ C \in \mathbb{R}.$$

Unha solución particular da ecuación completa é

$$x^*(t) = -\frac{2t^3}{3(t+6)},\ t \in I,$$

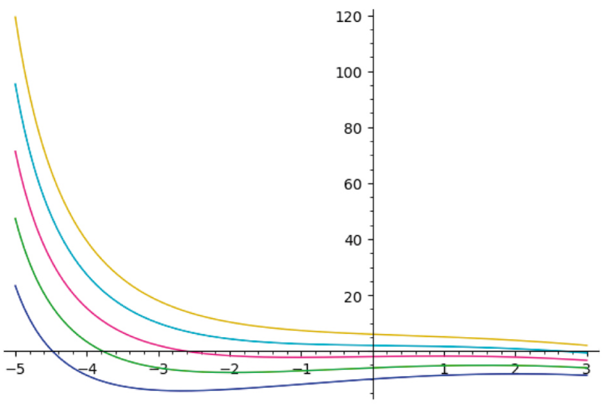
co que a solución xeral da ecuación completa é

$$x(t) = \frac{1}{t+6}\Big(C - \frac{2}{3}t^3\Big),\ t \in I,\ \text{para}\ C \in \mathbb{R}.$$

```
t = var('t')
x = function('x')(t)
ED3 = diff(x,t) == -(2*t^2+x)/(t+6)
desolve(ED3,x)
```

```
-1/3*(2*t^3 - 3*_C)/(t + 6)
```

```
plot([-1/3*(2*t^3 - 3*C)/(t + 6) for C in range(-60,60,24)], (-5,3))
```



A solución pasando polo punto $(1, \frac{1}{3})$ é

$$x(t) = \frac{1}{t+6}\Big(3 - \frac{2}{3}t^3\Big),\ t \in (-6, \infty).$$

2.3. Ecuacións de Bernoulli

Son ecuacións da forma $x' = p(t)x + q(t)x^m$, $m \in \mathbb{R}$, con $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcións continuas no intervalo I. Así:

- Se $m = 0$, obtemos a EDO lineal $x' = p(t)x + q(t)$.
- Se $m = 1$, obtemos a EDO lineal $x' = (p(t) + q(t))x$.
- Se $m \neq 0, 1$, entón o cambio de variables $u = x^{1-m}$ dá lugar á EDO lineal completa

$$\begin{aligned} u' &= (1-m)x^{-m}x' = (1-m)x^{-m}(p(t)x + q(t)x^m) \\ &= (1-m)p(t)x^{1-m} + (1-m)q(t) \\ &= (1-m)p(t)u + (1-m)q(t). \end{aligned}$$

Exemplo 4.
A EDO $x' = -\frac{2x+4t^2\sqrt{x}}{t+6}$ é de Bernoulli, con $m = \frac{1}{2}$ e funcións $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $p(t) = -\frac{2}{t+6}$, $q(t) = -\frac{4t^2}{t+6}$, sendo $I = (-\infty, -6)$ ou ben $I = (-6, \infty)$.

Realizando o cambio de variables $u = x^{\frac{1}{2}}$, obtemos a EDO lineal completa

$$u' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' = -\frac{\sqrt{x} + 2t^2}{t+6} = -\frac{u + 2t^2}{t+6}.$$

Polos cálculos no Exemplo 3,

$$u(t) = \frac{1}{t+6}\Big(C - \frac{2}{3}t^3\Big),\ t \in I,\ \text{para}\ C \in \mathbb{R},$$

logo a solución xeral vén dada por

$$x(t) = \frac{1}{(t+6)^2}\Big(C - \frac{2}{3}t^3\Big)^2,\ t \in I,\ \text{para}\ C \in \mathbb{R}.$$

A solución pasando polo punto $(1, \frac{1}{9})$ é

$$x(t) = \frac{1}{(t+6)^2}\Big(3 - \frac{2}{3}t^3\Big)^2,\ t \in (-6, \infty).$$

Observación
Outra ecuación relacionada de grande interese na ciencia é a de **Riccati**, da forma $x' = k(t) + p(t)x + q(t)x^2$, onde k, p, q son funcións continuas. Se $k \equiv 0$, trátase dunha ecuación de Bernoulli. Se $k \not\equiv 0$, sempre que se coñeza unha solución particular x_1, a transformación $y = x - x_1$ redúcea a unha ecuación de Bernoulli. Dada a complexidade do problema, omitimos os detalles. Ademais, entre as ecuacións deste tipo, pódense atopar exemplos que non admiten solucións expresables en termos elementais.

2.4. Ecuacións homoxéneas

As ecuacións homoxéneas son da forma $x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$, onde g é continua e con derivada continua nun intervalo real aberto. Nótese que a ecuación anterior só ten sentido no conxunto de puntos (t, x) tales que $\frac{x}{t}$ pertence ao dominio de g.
Unha función h dise **homoxénea de grao** k se, para todo $r \in \mathbb{R}$, $h(rt, rx) = r^k h(t, x)$. En particular, as ecuacións da forma $x' = \frac{h_1(t,x)}{h_2(t,x)}$, sendo h_1, h_2 funcións homoxéneas do mesmo grao, tamén son homoxéneas. En efecto, partindo desta expresión con $r = \frac{1}{t}$,

$$x' = \frac{r^k h_1(t,x)}{r^k h_2(t,x)} = \frac{h_1(rt, rx)}{h_2(rt, rx)} = \frac{h_1(1, \frac{x}{t})}{h_2(1, \frac{x}{t})} = g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Se agora facemos o cambio $x = tu$ e derivamos, obtemos $g(u) = g(\frac{x}{t}) = x' = u + tu'$ e, polo tanto, a ecuación escríbese como $u' = \frac{1}{t}(g(u) - u)$, que é de variables separadas.

Exemplo 5.
A ecuación $x' = \frac{t+x}{t-x}$ é homoxénea e tamén pode escribirse como $x' = \frac{1+\frac{x}{t}}{1-\frac{x}{t}}$. Facendo o cambio $x = tu$ e derivando, obtemos $u + tu' = \frac{1+u}{1-u}$, equivalente a $u' = \frac{1}{t}\frac{1+u^2}{1-u}$, que é de variables separadas. A solución, a partir do Exemplo 2, é

$$\arctan(u) - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R},$$

e, desfacendo o cambio,

$$\arctan\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right) = \ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

```
desolve(diff(x,t)==(t+x)/(t-x),x,show_method=True) # Indica método de resolución
```

```
[1/2*arctan(t/x(t)) + 1/4*log(t^2 + x(t)^2) == _C, 'exact']
```

Na Figura 2, representamos, en vermello, os (t,x) para os que $h_2(t,x) = t - x$ se anula. Este conxunto divide o plano en dúas rexións e determina os respectivos intervalos de definición das solucións que, neste exemplo, son limitados. Usamos dúas cores diferentes para subliñar que o grafo de cada solución só pode estar nunha das rexións.

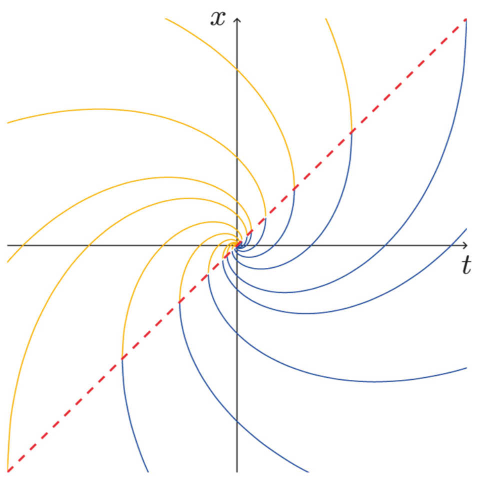


Figura 2: Algunhas solucións da ecuación $x' = \frac{t+x}{t-x}$.

2.5. Ecuacións reducibles a homoxéneas

Exprésanse como $x' = g\left(\frac{at+bx+p}{ct+dx+q}\right)$, $a,b,c,d,p,q \in \mathbb{R}$. Será de interese considerar as rectas no plano

$$r:\ at+bx+p=0, \qquad l:\ ct+dx+q=0.$$

Para resolvelas, distinguimos 3 casos:

- Se $p=q=0$, entón $x' = g\left(\frac{at+bx}{ct+dx}\right) = g\left(\frac{a+b\frac{x}{t}}{c+d\frac{x}{t}}\right)$ é unha ecuación homoxénea.
- Se p e q non son ambos nulos e r interseca a l nun punto (i.e., $ad-bc \neq 0$), realízase a translación dos eixos ao punto de corte $(h,k) \neq (0,0)$ dada por

$$(t,x) = (h,k) + (s,y).$$

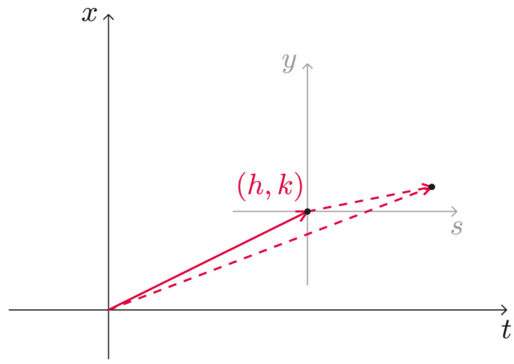


Figura 3: Ilustración do cambio de variable realizado.

Temos a seguinte relación:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d(k+y)}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds} = y',$$

que coincide con

$$g\left(\frac{at+bx+p}{ct+dx+q}\right) = g\left(\frac{a(h+s)+b(k+y)+p}{c(h+s)+d(k+y)+q}\right) = g\left(\frac{as+by}{cs+dy}\right) = g\left(\frac{a+b\frac{y}{s}}{c+d\frac{y}{s}}\right).$$

A ecuación $y' = g\left(\frac{a+b\frac{y}{s}}{c+d\frac{y}{s}}\right)$ é homoxénea.

- Se p e q non son ambos nulos e as rectas r e l son paralelas ou coincidentes (i.e., $ad-bc=0$), entón temos $(a,b) = \lambda(c,d)$ para algún λ e

$$x' = g\left(\frac{\lambda ct + \lambda dx + p}{ct+dx+q}\right) = g\left(\frac{\lambda(ct+dx)+p}{ct+dx+q}\right).$$

Co cambio $u = ct+dx$, a ecuación é de variables separadas, tomando a forma

$$u' = c + dx' = c + d\,g\left(\frac{\lambda u + p}{u+q}\right) =: g^*(u).$$

Exemplo 6.
A EDO $x' = \frac{t+x-3}{t-x-1}$ non é homoxénea. Consideramos as rectas $r:\ t+x-3=0,\ \ l:\ t-x-1=0$, que se cortan no punto $(2,1)$. Realizamos a translación dos eixos ao punto de corte, do xeito $(t,x) = (2,1)+(s,y)$. Así, $x' = y'$, que coincide con

$$\frac{t+x-3}{t-x-1} = \frac{2+s+(1+y)-3}{2+s-(1+y)-1} = \frac{s+y}{s-y} = \frac{1+\frac{y}{s}}{1-\frac{y}{s}},$$

pois g é a identidade. A ecuación $y' = \frac{1+\frac{y}{s}}{1-\frac{y}{s}}$ é homoxénea, logo, polo Exemplo 5,

$$\arctan\left(\frac{y}{s}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{s^2}\right) = \ln|s| + C,\ C \in \mathbb{R},$$

e, desfacendo o cambio,

$$\arctan\left(\frac{x-1}{t-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{(x-1)^2}{(t-2)^2}\right) = \ln|t-2| + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7.
A EDO $x' = -\frac{t-x-1}{t-x-2}$ non é homoxénea. É fácil comprobar que as rectas $r: \ t-x-1=0, \ \ l: \ t-x-2=0$ son paralelas. Facendo o cambio $u = t-x$, temos a ecuación de variables separadas

$$u' = 1 - x' = 1 - \frac{u-1}{u-2} = -\frac{1}{u-2}.$$

Polo Exemplo 1, temos

$$u = 2 \pm \sqrt{4-2t+C}, \ C \in \mathbb{R},$$

logo

$$x(t) = t - 2 \mp \sqrt{4-2t+C}, \ C \in \mathbb{R}.$$

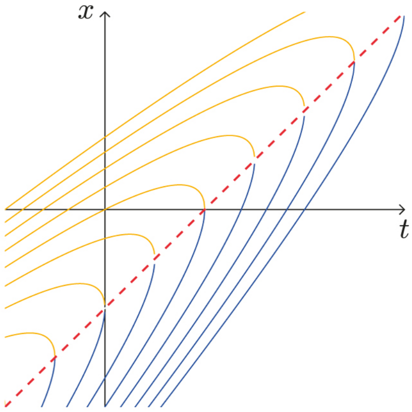


Figura 4: Algunhas solucións da ecuación $x' = -\frac{t-x-1}{t-x-2}$. En vermello, representamos os puntos (t,x) para os que se anula o denominador.

2.6. Ecuacións exactas

Sexa $x' = -\frac{M(t,x)}{N(t,x)}$, onde $M, N : I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funcións continuas con derivadas parciais continuas. Nótese que a ecuación anterior só ten sentido nos puntos (t,x) onde $N(t,x) \neq 0$.
Outra forma de escribila é $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$.
A ecuación anterior dise que é **exacta** se existe unha función $F : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} = M, \frac{\partial F}{\partial x} = N$.
A devandita función recibe o nome de **función potencial**.

Proposición 1.
Se F é unha función potencial, a solución da ecuación que pasa por $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$ vén dada implicitamente por $F(t,x) - F(t_0,x_0) = 0$.

Proposición 2.
A ecuación diferencial é exacta se e só se $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

Exemplo 8.
A EDO $x' = -\frac{2t^2+x}{t+6}$ do Exemplo 3 tamén é exacta, pois $M(t,x) = 2t^2 + x$ e $N(t,x) = t+6$, logo cúmprese a condición de exactitude $\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t}$.

A función potencial pode calcularse como

$$F(t,x) = \int (t+6)\,dx + g(t) = tx + 6x + g(t).$$

Derivando respecto de t, $\frac{\partial F}{\partial x} = x + g'(t) = 2t^2 + x$, entón $g'(t) = 2t^2$ e, polo tanto, $g(t) = \frac{2t^3}{3}$.
A solución xeral vén dada pola expresión

$$(t+6)x + \frac{2t^3}{3} = C, \text{ para } C \in \mathbb{R}.$$

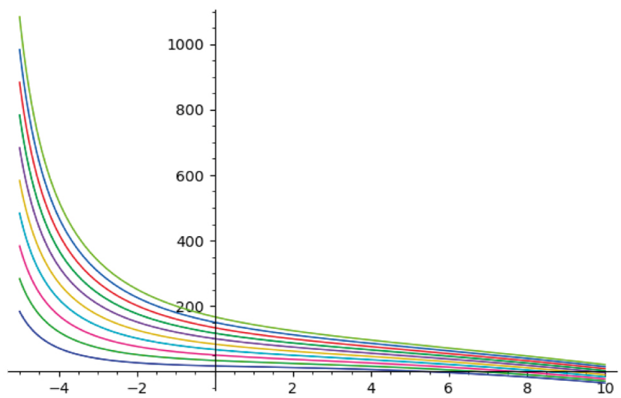
En base á Proposición 1, a solución que pasa por $(1, \frac{1}{3})$ (coincidente coa calculada no Exemplo 3) é

$$x(t) = \frac{3}{t+6} - \frac{2t^3}{3(t+6)}.$$

```
desolve(diff(x,t)==-(2*t^2+x)/(t+6),x)
```

```
-1/3*(2*t^3 - 3*_C)/(t + 6)
```

```
L=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000]
plot([-1/3*(2*t^3 - 3*C)/(t + 6) for C in L], (-5, 10))
```



2.7. Ecuacións reducibles a exactas (resolución por factor integrante)

Diremos que $\mu : (t,x) \in I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ é un **factor integrante** para $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ se

$$\mu(t,x)M(t,x)dt + \mu(t,x)N(t,x)dx = 0$$

é exacta.
En base á Proposición 2, $\mu_x M + \mu M_x = \mu_t N + \mu N_t$, onde o subíndice denota a variable con respecto á que se deriva.
Distinguimos algúns casos particulares sinxelos:
Caso 1: $\mu(t,x) = \mu(t)$. Aquí,

$$\mu(t)M_x(t,x) = \mu_t(t)N(t,x) + \mu(t)N_t(t,x),$$
$$\mu(t)(M_x(t,x) - N_t(t,x)) = \mu_t(t)N(t,x),$$
$$\frac{\mu_t(t)}{\mu(t)} = \frac{M_x(t,x) - N_t(t,x)}{N(t,x)}.$$

Se $\frac{M_x - N_t}{N}$ depende só de t, denotamos $h_1(t) := \frac{M_x - N_t}{N}$ e podemos calcular $\mu(t)$ como $\int \frac{\mu_t}{\mu} dt = \int h_1(t) dt$.

Caso 2: $\mu(t,x) = \mu(x)$, entón

$$\frac{\mu_x(x)}{\mu(x)} = \frac{N_t(t,x) - M_x(t,x)}{M(t,x)}.$$

Se $\frac{N_t - M_x}{M}$ depende só de x, denotamos $h_2(x) := \frac{N_t - M_x}{M}$ e podemos calcular $\mu(x)$ como $\int \frac{\mu_x}{\mu} dx = \int h_2(x) dx$.

Caso 3: $\mu(t,x) = \mu(z)$, sendo $z = t + x$, logo

$$\frac{\mu_z(z)}{\mu(z)} = \frac{N_t(t,x) - M_x(t,x)}{M(t,x) - N(t,x)}.$$

Se $\frac{N_t - M_x}{M - N}$ depende só de z, denotamos $h_3(z) := \frac{N_t - M_x}{M - N}$ e podemos calcular $\mu(z)$ como $\int \frac{\mu_z}{\mu} dz = \int h_3(z) dz$.

Caso 4: $\mu(t,x) = \mu(z)$, sendo $z = tx$. Neste caso,

$$\frac{\mu_z(z)}{\mu(z)} = \frac{N_t(t,x) - M_x(t,x)}{tM(t,x) - xN(t,x)}.$$

Se $\frac{N_t - M_x}{tM - xN}$ depende só de z, denotamos $h_4(z) := \frac{N_t - M_x}{tM - xN}$ e podemos calcular $\mu(z)$ como $\int \frac{\mu_z}{\mu} dz = \int h_4(z) dz$.

Exemplo 9.
Se denotamos por $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ as funcións dadas por $M(t,x) = \operatorname{sen} 2t + tx$ e $N(t,x) = x^2 - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{x}$, con $I_1 = \mathbb{R}$ e $I_2 = (-\infty, 0)$ ou ben $I_2 = (0, \infty)$, a ecuación $(\operatorname{sen} 2t + tx)dt + \left(x^2 - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{x}\right)dx = 0$ non é exacta, pois

$$t = \frac{\partial M}{\partial x} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{-1}{x}(2 \operatorname{sen} t \cos t).$$

Se $\mu(t,x) = \mu(x)$, entón

$$\mu_x(x)(\operatorname{sen} 2t + tx) = \mu(-\tfrac{1}{x} \operatorname{sen} 2t - t),$$
$$\frac{\mu_x(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{-\operatorname{sen} 2t}{x} - t}{\operatorname{sen} 2t + tx} = \frac{-1}{x}.$$

Polo tanto, tomando $\mu(x) = \frac{1}{x}$, a ecuación convértese en exacta e a solución xeral vén dada implicitamente por

$$\frac{t^2 + x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{x} = C, \text{ para } C \in \mathbb{R},$$

que tería sentido para $(t,x) \in I_1 \times I_2$ mentres $x \neq 0$.

Exemplo 10.
Se denotamos por $M, N : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funcións

$$M(t,x) = x^2 + t(1+2t)x + 2t^3,$$
$$N(t,x) = (t+6)x + t^2 + 6t,$$

a ecuación $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ non é exacta, pois $2x + t(1+2t) = \frac{\partial M}{\partial x} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial t} = x + 2t + 6$.

Se $\mu(t,x) = \mu(z)$, sendo $z = t + x$, entón

$$\frac{\mu_z(z)}{\mu(z)} = \frac{-x - 2t^2 + t + 6}{x^2 + (2t^2 - 6)x + 2t^3 - t^2 - 6t} = -\frac{1}{z}.$$

Tomando $\mu(t+x) = \frac{1}{t+x}$, a ecuación convértese na EDO exacta do Exemplo 8 e, polo tanto, a súa solución xeral é

$$x(t) = \frac{C}{t+6} - \frac{2t^3}{3(t+6)}, \text{ para } C \in \mathbb{R}.$$

```
t = var('t')
x = function('x')(t)
desolve(diff(x,t)+(x^2+t*(1+2*t)*x+2*t^3)/
↪((t+6)*x+t^2+6*t)==0,x)
```

```
-1/3*(2*t^3 - 3*_C)/(t + 6)
```

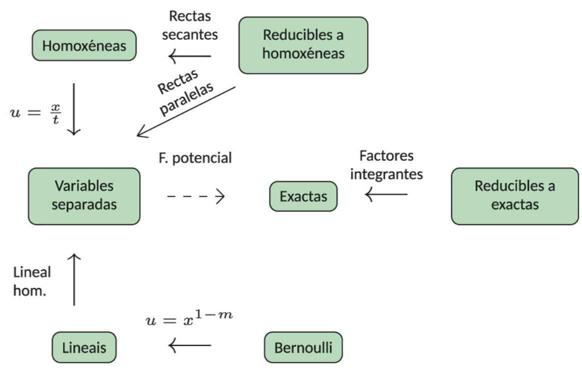


Figura 5: Resumo sobre transformación de ecuacións. A resolución de ecuacións de variables separadas axústase ao cálculo dunha función potencial do tipo $F(t,x) := \int \frac{1}{g(x)}\, dx - \int h(t)\, dt$.

BOYCE, W.E.; DI PRIMA, R.C. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores de Frontera, Limusa, 1996.

FERNÁNDEZ PÉREZ, C.; VÁZQUEZ HERNÁNDEZ, F.J.; VEGAS MONTANER, J.M. Ecuaciones diferenciales y en diferencias: Sistemas dinámicos, Thomson Editores Spain, Paraninfo, 2003.

SAGEMATH. https://www.sagemath.org

SIMMONS, G.F. Ecuaciones Diferenciales, McGraw-Hill, 1993.

TANTAU, T. The TikZ and PGF Packages, Manual for Version 3.1.9a, 2007 a 2013. https://ctan.org/pkg/pgf

THE LaTeX PROJECT. https://www.latex-project.org

WALTER, W. Ordinary Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics 182, Springer, 1998.

ZILL, D.G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, Cengage Learning, 9ª edición, 2009.