Esenciais
USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

# ECUACIÓNS DIFERENCIAIS ORDINARIAS
## modelos esenciais aplicados a distintos ámbitos científicos

M. Victoria Otero Espinar e Érika Diz Pita (Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización)

Neste *Esencial* presentamos algúns modelos matemáticos que se empregan para resolver problemas de distintas ciencias a través das ecuacións diferenciais ordinarias.

Describir unha situación real a través dun modelo matemático permite estudala, analizala, predicir a súa evolución e tomar decisións sobre ela. As ecuacións diferenciais son unha ferramenta matemática que pemite modelar moitos problemas procedentes de distintos ámbitos do coñecemento (bioloxía, farmacia, física, química, economía...).

Unha ecuación diferencial é una ecuación que relaciona unha función descoñecida coas súas derivadas. Tendo en conta que a derivada indica a taxa de cambio ou velocidade de cambio dunha variable con respecto a outra, as ecuacións diferenciais adoitan ser apropiadas para analizar procesos que cambian continuamente en relación ao tempo ou a outra variable.

As ecuacións que consideraremos ao longo deste traballo son da forma $x' = F(x)$ onde $F$ é una función regular definida en $\mathbb{R}^n$. Cando $n > 1$, entón $x = (x_1, \dots x_n)$ e a ecuación involucra máis dunha variable dependente, $x_1, \dots, x_n$.

### Proceso de modelaxe

| | |
|---|---|
| **Descrición do fenómeno** | Obxectivos do estudo |
| **Descrición cualitativa do fenómeno** | Identificar os elementos importantes do problema e os accesorios<br>Ver o seu efecto na evolución |
| **Descrición cuantitativa** | Definir as variables e os parámetros necesarios<br>Analizar de que xeito están relacionadas para describir o sistema real que queremos modelar |
| **Formulación matemática** | Expresar o problema mediante as ecuacións adecuadas<br>Comprobar que o seu estudo dá resposta ás cuestión iniciais |
| **Resolución do modelo** | Usar métodos analíticos e/ou numéricos |
| **Interpretación** | Relacionar os resultados matemáticos obtidos e o seu significado no fenómeno real |
| **Refinamento** | Reciclaxe do procedemento anterior para obter mellores predicións (se as comprobacións experimentais así o suxiren) |

## 1. Modelo de poboación de Maltus

### *Podemos predicir a evolución dunha poboación con recursos ilimitados?*

Supoñamos que queremos estudar unha poboación na que os individuos non teñen limitacións do medio (espazo, alimento, *etc.*) e non compiten entre eles. Entón podemos considerar que o que varía a poboación é proporcional ao seu tamaño. Se $P(t)$ é o tamaño da poboación no instante $t$, e consideramos a constante de proporcionalidade $k$, entón a evolución vén dada pola seguinte ecuación:

$$P'(t) = kP(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta é unha ecuación en variables separadas e a súa solución é $P(t) = Ce^{kt}$. Supoñendo que inicialmente hai $x_0$ individuos na poboación, é dicir, $P(0) = x_0$, entón a solución é $P(t) = x_0 e^{kt}$.

A constante $k$ é igual á diferenza entre a taxa de natalidade $n$ e a de mortalidade $m$, polo que o seu signo depende de que existan máis, menos ou igual número de nacementos e mortes ($k > 0$, $k < 0$ e $k = 0$, respectivamente).

O comportamento desta solución depende do signo da constante $k$.

- Se $k = 0$, a poboación permanece constante e igual a $x_0$.
- Se $k < 0$ a poboación tende á extinción, pois o límite da solución $Ce^{kt}$ cando $t$ tende a infinito é cero.
- Se $k > 0$ o límite de $Ce^{kt}$ cando $t$ tende a infinito é infinito, polo que a poboación ten un crecemento ilimitado.

Este modelo resulta válido mentres a poboación é suficientemente pequena para que non interveñan as limitacións do medio, como por exemplo no estudo de cultivos de bacterias.

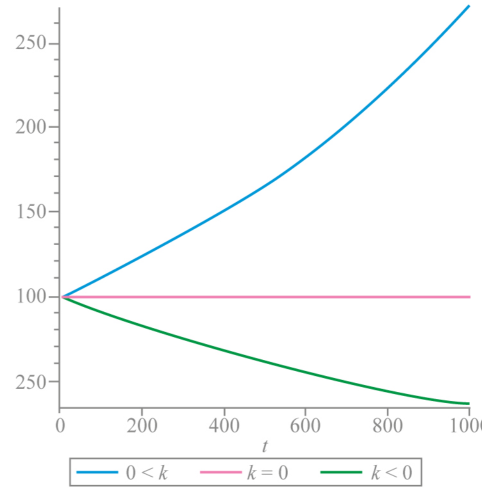



Figura 1: Solucións do modelo de Malthus con distintas constantes de proporcionalidade.

## 2. Ecuación loxística

### *Como predicimos a evolución dunha poboación cando os recursos son limitados?*

A escaseza de alimentos, espazo ou outros factores, fan que o crecemento dunha poboación non poida ser ilimitado. Cando a poboación é moi grande os individuos compiten entre si polo espazo vital, polos recursos naturais e os alimentos. Nesta situación, temos que representar esta competición engadíndolle ao modelo de Malthus un novo termo. Esta competición provoca unha diminución da poboación que podemos considerar que é proporcional ao número de encontros entre individuos. Isto represéntase na ecuación por un termo $-bP(t)^2$, onde $b$ é unha constante. A ecuación resultante é

$$P'(t) = rP(t) - bP(t)^2.$$

Tomando $K = r/b$, obtemos o seguinte modelo matemático:

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

coñecido como modelo loxístico. A función que define esta ecuación é positiva no intervalo $(0, K)$, negativa en $(K, \infty)$, e é cero nos extremos. Tendo en conta que esta función é a derivada da función poboación podemos afirmar que a poboación crece se hai un número de individuos entre 0 e $K$, decrece se hai máis de $K$ individuos, e a poboación permanece constante se hai 0 ou $K$ individuos, é dicir, hai dúas situacións de equilibrio.

A solución vén dada pola expresión

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}.$$

A constante $K$ é a capacidade de carga do medio. A poboación crece moi rapidamente pero o seu crecemento faise máis lento a medida que se achega a $K$, e tende a $K$ cando $t$ aumenta. Se a poboación inicial é maior que a capacidade de carga, o tamaño da poboación decrece achegándose a $K$ cando $t$ aumenta.

A representación gráfica da solución amosa os comportamentos mencionados dependendo da cantidade inicial de individuos.

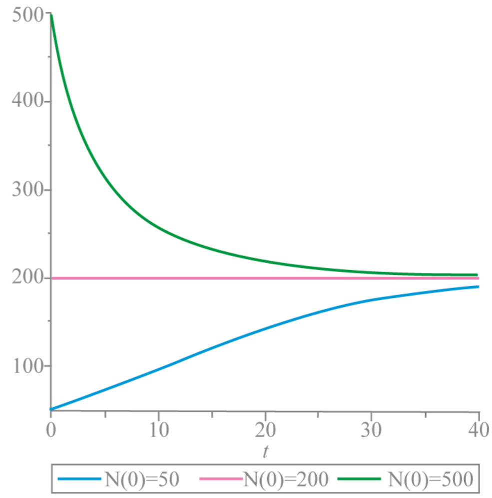



Figura 2: Modelo loxístico con $K = 200$.

## 3. Desintegración radioactiva

***Por que é interesante coñecer como se desintegra unha substancia radioactiva?***

As substancias radioactivas empréganse, entre outras cousas, para determinar a idade aproximada dos fósiles mediante o estudo da desintegración do carbono-14 ou como trazadores radioactivos para detectar problemas de saúde relacionados por exemplo coa tiroide ou coa bacteria E. coli.

Existen certas substancias que se descompoñen noutras máis sinxelas e fano a un ritmo constante independente do que pase na súa contorna. O físico E. Rutherford demostrou que a descomposición dunha substancia radioactiva é directamente proporcional ao número de átomos presentes. Se chamamos $x(t)$ á cantidade de material radioactivo existente no instante $t$, entón o proceso de desintegración pódese modelizar coa seguinte ecuación:

$$x'(t) = -kx(t),$$

onde $k > 0$ é unha constante que depende do elemento radioactivo considerado. Esta ecuación coincide coa de crecemento exponencial con constante negativa. A súa solución é por tanto $x(t) = x_0 e^{-kt}$, sendo $x_0$ a cantidade inicial de substancia. É importante coñecer o período de semidesintegración ou semivida, que é o tempo $\tau$ que tarda unha cantidade de substancia en reducirse á metade (por exemplo 5730 anos no caso do carbono 14). Así, se coñecemos $\tau$ podemos determinar a constante $k$ despexando:

$$x_0 e^{-k\tau} = \frac{x_0}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{\tau}.$$

**DATACIÓN DE FÓSIL CON CARBONO-14.**

| Porcentaxe $^{14}C$ | Idade (anos) |
|---|---|
| % | 0 |
| 50 % | 5730 |
| 25 % | 11460 |
| 12.5 % | 17190 |

## 4. Lei de variación de temperatura de Newton

***Como podemos coñecer a temperatura dun obxecto que se atopa nun ambiente con temperatura constante?***

É claro que se o obxecto ten unha temperatura moito máis alta que a temperatura ambiente arrefriará rapidamente. Canto máis se aproxime á temperatura ambiente, máis lento será o arrefriamento. Do mesmo modo, prodúcese o quecemento se o obxecto está a unha temperatura moito máis baixa. A Lei de Newton de variación da temperatura di que a variación da temperatura é proporcional á diferenza entre a temperatura do obxecto e a do ambiente.

Se $T(t)$ é a temperatura do obxecto no instante $t$, e $T_e$ é a temperatura do ambiente, a ecuación diferencial que o modeliza é

$$T'(t) = -k(T(t) - T_e).$$

Esta ecuación é unha ecuación lineal non homoxénea. A súas solucións veñen dadas por

$$T(t) = T_e + (T(0) - T_e)\, e^{-kt}.$$

Como pode verse na Figura 3, a temperatura do obxecto tende a $T_e$ calquera que sexa a temperatura inicial.

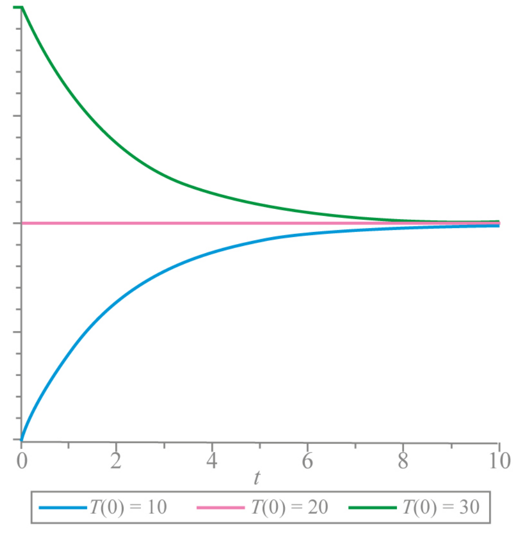



Figura 3: Evolución da temperatura dun obxecto dependendo da temperatura inicial, $T_e = 20$.

```
Código en Maple
Te:= 20:
T0_1:=10:
T0_2:=20:
T0_3:=30:
k:= 1/2:
plot([Te+(T0_1-Te)exp(-kt),
      Te+(T0_2-Te)exp(-kt),
```

## 5. Lei de Fick

***Cal é a concentración dunha substancia que atravesa unha membrana?***

A velocidade de difusión dunha substancia a través dunha membrana perpendicular ao fluxo, vén determinada pola Lei de Fick. Esta establece que a velocidade de difusión é directamente proporcional á área da membrana é á diferenza entre as concentracións de soluto a ambos os lados da membrana. Se a área da membrana permanece constante entón a ecuación que modeliza a situación é

$$\frac{d(C_1(t)-C_2(t))}{dt} = -k(C_1(t)-C_2(t)), \quad k>0.$$

Cando o volume dun compartimento é moi grande en relación ao outro, como ocorre cando unha célula está inmersa nun medio líquido, podemos supoñer que a concentración de soluto nese compartimento permanece aproximadamente constante, cun valor $C_e$. Entón a ecuación transfórmase en

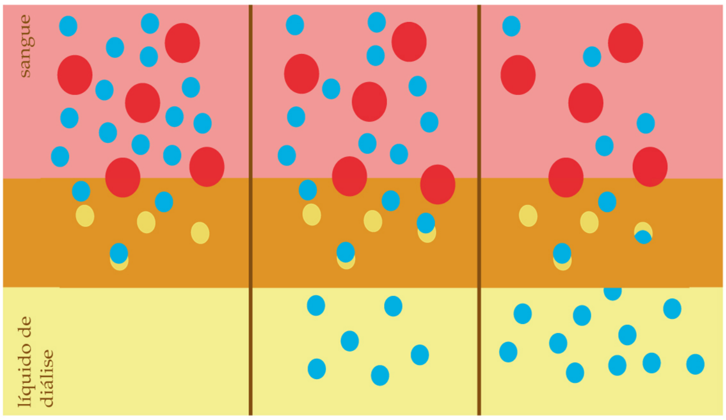
$$\frac{d(C_1(t))}{dt} = -k(C_1(t)-C_e), \quad k>0.$$

No caso de concentracións non constantes en ambos os compartimentos, de volume $v_1$ e $v_2$, a variación de concentración en cada un deles vén dada por

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= -\frac{k}{v_1}(C_1(t)-C_2(t)), \\ C_2'(t) &= -\frac{k}{v_2}(C_2(t)-C_1(t)). \end{aligned}$$

### APLICACIÓN Á HEMODIÁLISE

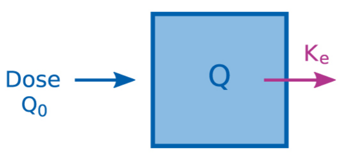
A hemodiálise consiste en interpoñer entre dous compartimentos líquidos (sangue e líquido de diálise) unha membrana semipermeable que permite que circulen a auga e os solutos de peso molecular pequeno e mediano, pero non proteínas ou células sanguíneas. Así, se o sangue ten unha concentración de refugallos $C_1(t)$ (creatina, urea...), ao circular a través da membrana, elimínase unha parte das impurezas que pasan ao líquido de diálise, cuxa concentración é $C_2(t)$. Esta situación modelízase co sistema de ecuacións diferenciais anterior.




## 6. Modelos farmacocinéticos

***Podemos coñecer en cada instante a concentración dun medicamento no organismo?***

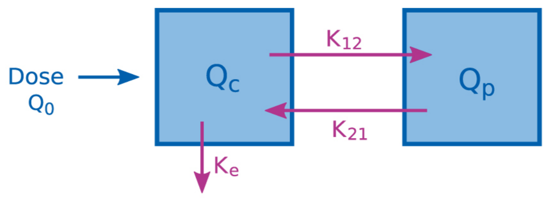
Se se subministra un fármaco a través dunha inxección intravenosa e supomos que se distribúe de forma instantánea e homoxénea por todo o organismo e posteriormente se elimina, entón a variación na concentración ou cantidade de fármaco pode ser descrita pola ecuación diferencial




$$\frac{dQ}{dt} = -K_e Q$$

sendo $Q$ a cantidade ou concentración do fármaco no organismo e $K_e$ a súa constante de eliminación. A súa solución vén dada por $Q(t)=Q_0e^{-K_e t}$, sendo $Q_0$ a dose subministrada.

Se o medicamento está deseñado para acumularse de forma homoxénea en certos tecidos (compartimento periférico) despois de pasar polo sangue (compartimento central) entón a ecuación que o modeliza é




$$\begin{aligned} \frac{dQ_c}{dt} &= K_{21}Q_p - K_{12}Q_c - K_eQ_c, \\ \frac{dQ_p}{dt} &= K_{12}Q_c - K_{21}Q_p, \end{aligned}$$

sendo $Q_c$ e $Q_p$ as cantidades de fármaco no compartimento central e no compartimento periférico, respectivamente, $K_{ij}$ as constantes da farmacotransferencia e $K_e$ a constante de eliminación. Se $\alpha+\beta = K_{12}+K_{21}+K_e$, $\alpha\beta = K_{21}K_e$, a solución da ecuación vén dada por

$$\begin{aligned} Q_c &= \frac{Q_0}{\alpha-\beta}\left((\alpha-K_{21})e^{-\alpha t}+(K_{21}-\beta)e^{-\beta t}\right), \\ Q_p &= \frac{Q_0K_{12}}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}\right). \end{aligned}$$

## 7. Ecuacións de Lotka-Volterra

***Como podemos representar a evolución poboacional dunha especie de presas e outra de depredadores?***

Consideramos dúas especies, unha de presas e outra de depredadores, que conviven nun mesmo hábitat. As ecuacións de Lotka-Volterra, modelizan a evolución temporal destas dúas especies baseándose nas seguintes hipóteses:

- En ausencia de depredadores, as presas $x$, teñen un crecemento exponencial. Representamos isto co termo $ax$.
- En ausencia de presas, os depredadores $y$, teñen un decrecemento exponencial, por non ter alimento. Representámolo co termo $-cy$.
- A interacción entre presas e depredadores produce un aumento da poboación de depredadores e unha diminución da poboación de presas, que serán proporcionais aos encontros entre ambas as especies. Representámolo cos termos $-bxy$ e $+dxy$.

Así, o sistema de ecuacións diferenciais que obtemos é

$$x'(t) = ax - bxy,$$
$$y'(t) = -cy + dxy.$$

Existen dúas situacións de equilibrio, $(0, 0)$ e $(c/d, a/b)$ e ambas as poboacións amosan comportamentos periódicos, como pode verse na na Figura 4.

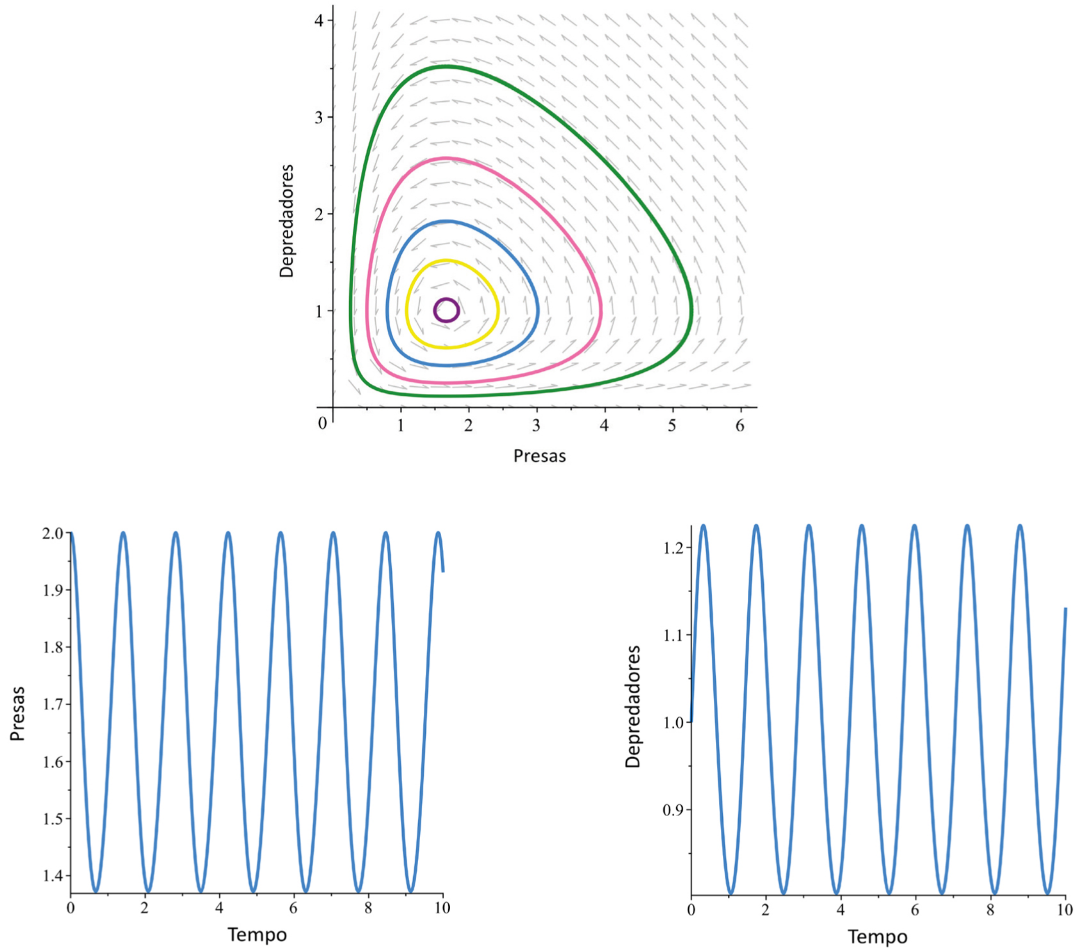



Figura 4: Evolución temporal do número de presas e depredadores segundo o modelo de Lotka-Volterra.

Na primeira gráfica amósase a relación entre o número de presas e depredadores ao longo do tempo. Se comezamos nun punto onde hai un elevado número de depredadores pero poucas presas, entón os depredadores non teñen suficiente alimento e a súa poboación comeza a decrecer. Ao decrecer o número de depredadores, un maior número de presas logra sobrevivir, e comeza a aumentar a súa poboación. Ao aumentar o número de presas, os depredadores teñen máis alimento e a súa poboación comeza a aumentar. Cando volve a haber un elevado número de depredadores, as presas son atacadas e volve a diminuír a poboación de presas, regresando á situación inicial e repetindo este comportamento ciclicamente.

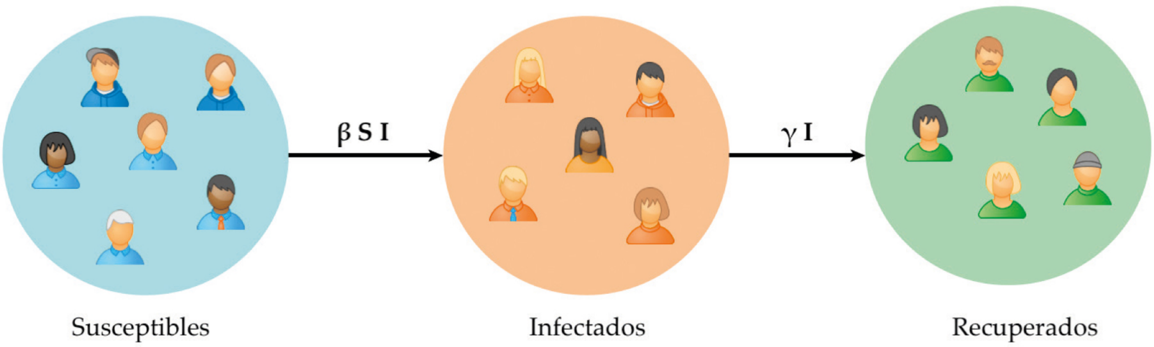
## 8. Modelo epidemiolóxico SIR

***Como podemos modelizar o avance dunha enfermidade contaxiosa?***

Para representar como evoluciona unha enfermidade contaxiosa nunha poboación podemos dividila en tres grupos: os susceptibles, $S(t)$, que son os que poden contaxiarse nun instante $t$; os infectados $I(t)$, que son os que teñen a enfermidade no instante $t$; e os recuperados $R(t)$ que xa pasaron a enfermidade. O modelo SIR baséase nesta división e nas suposicións de que a poboación é constante, é dicir, $S+I+R=N$, e que a enfermidade xera inmunidade. Deste xeito, matematicamente o modelo SIR formúlase co seguinte sistema de ecuacións diferenciais:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta I S, \\ I'(t) &= \beta I S - \gamma I, \\ R'(t) &= \gamma I, \end{aligned}$$

onde o parámetro $\beta$ representa como de contaxiosa é a enfermidade, e $\gamma$ o que tarda en recuperarse un contaxiado.




Se normalizamos as variables, é dicir, dividímolas entre a poboación total, temos un novo sistemas nas variables $u=S/N$, $v=I/N$, $w=R/N$, que é:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -R_0 u v, \\ v'(t) &= (R_0 u - 1) v, \\ w'(t) &= v, \end{aligned}$$

onde $R_0=\beta N/\gamma$ chámase número reprodutivo básico. Se $R_0<1$ a enfermidade tende a desaparecer, e se $R_0>1$ o número de contaxiados aumenta e prodúcese unha epidemia.

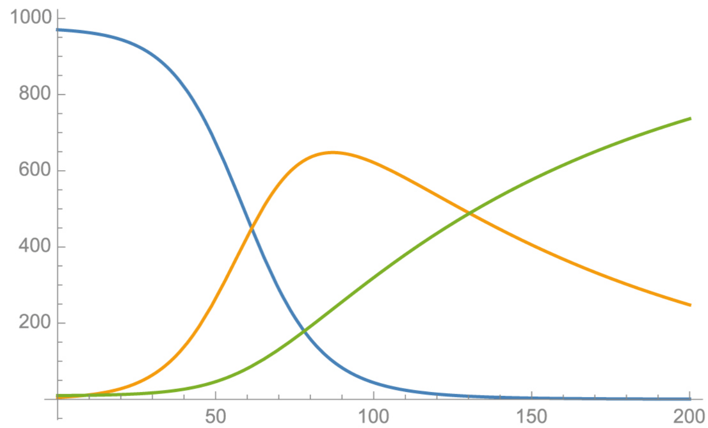



Figura 5: Un exemplo de modelo SIR. Poboación susceptible en azul, infectada en amarelo e recuperada en verde.