

MATERIA

Ecuacións Diferenciais Ordinarias

unidade
didáctica
1

TITULACIÓN

Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

Sistemas de ecuacións diferenciais autónomos en \mathbb{R}^n

Érika Diz Pita

Área de Análise Matemática

Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>

© Universidade de Santiago de Compostela, 2021

Deseño e maquetación

J. M. Gairí

Edita

Edicións USC

usc.gal/publicacions

DOI

<https://dx.doi.org/10.15304/9788418445965>

MATERIA: Ecuacións Diferenciais Ordinarias

TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Sistemas autónomos en \mathbb{R}^n

Motivacións e exemplos

Xeneralidades e propiedades

Ecuación das órbitas

Retratos de fases de sistemas lineares en \mathbb{R}^2

Retratos de fases de sistemas lineares en \mathbb{R}^3

Unidade 2. Estabilidade de sistemas lineares

Estabilidade de sistemas lineares autónomos en \mathbb{R}^n

Estabilidade asintótica de sistemas lineares autónomos en \mathbb{R}^n

Aplicacións

Unidade 3. Estabilidade de sistemas non lineares

Estabilidade de sistemas autónomos non lineares en \mathbb{R}^n

Estabilidade asintótica de sistemas autónomos non lineares en \mathbb{R}^n

Aplicacións a problemas da física, bioloxía e medicina

Métodos da primeira aproximación

Método de Lyapunov

Rexión de atracción

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

OBXECTIVOS

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

CONTIDOS

1. Motivacións e exemplos
 - 1.1. Modelo de poboación de Malthus
 - 1.2. Ecuación loxística
2. Xeneralidades e propiedades
3. Ecuación das órbitas
4. Retrato de fases de sistemas lineais en \mathbb{R}^2
5. Retrato de fases de sistemas lineais en \mathbb{R}^3

ACTIVIDADES PROPOSTAS

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

ANEXO 1

ANEXO 2

BIBLIOGRAFÍA

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (UD) forma parte da materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias (EDO) que se imparte no primeiro semestre do terceiro curso do Grao en Matemáticas e no primeiro semestre do cuarto curso do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas.

A materia está incluída no módulo de Ecuacións Diferenciais, precedida pola materia Introducción ás Ecuacións Diferenciais Ordinarias, na que se estudan conceptos relativos á existencia e unicidade de solución das ecuacións diferenciais ordinarias, que son necesarios para abordar esta materia. Partindo dese coñecemento previo, abórdase o estudo das ecuacións diferenciais ordinarias dende un punto de vista cualitativo.

Esta UD céntrase no estudo dos sistemas autónomos en \mathbb{R}^n , comezando por expoñer algunhas das súas propiedades básicas. Introdúcense os conceptos de ecuación das órbitas e retrato de fases, e descríbense estes para os sistemas no plano. Danse algunhas nocións sobre os retratos de fases no espazo.

Esta materia supón o primeiro contacto dos alumnos coa teoría cualitativa das ecuacións diferenciais, polo que se tratará de mostrar as súas vantaxes e posibilidades.

A UD desenvolverase ao longo de 4 semanas, o que se corresponde con 4 sesións expositivas, 4 de seminario e 4 de laboratorio.

OBXECTIVOS

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

- introducir ao alumnado no campo da teoría cualitativa das ecuacións diferenciais ordinarias, tanto dende o punto de vista teórico como práctico;
- poñer de manifesto o interese do estudo cualitativo das EDO pois permite deducir o comportamento das solucións, sen necesidade de resolver o sistema estudado. Esta resolución pode ser moi custosa en sistemas lineares de dimensión elevada, resultando imposible na maioría dos sistemas non lineares;
- motivar o estudo de modelos matemáticos que xorden de diferentes problemas en distintos campos científicos;
- representar a evolución das órbitas dos distintos sistemas usando distintos programas informáticos.

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:

- coñecer problemas da vida real e doutras ciencias que motivan o estudo das ecuacións diferenciais ordinarias;
- coñecer propiedades básicas dos sistemas autónomos;
- saber expresar a ecuación das órbitas dun sistema e resolvela nalgúns casos sinxelos;
- clasificar os retratos de fases dos sistemas autónomos lineares no plano;

- debuxar retratos de fases dos sistemas autónomos lineares no plano, identificando cada un dos elementos que aparecen neles (singularidades, órbitas periódicas...)

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

A metodoloxía docente prevista para esta UD inclúe actividades presenciais e non presenciais. As actividades presenciais realizaranse nas clases expositivas, de seminario e de laboratorio. Nas clases expositivas expóranse os contidos teóricos que os alumnos poden ter revisado previamente nos apuntes da materia que terán dispoñibles. Nas clases de seminario formularanse e resolveranse algúns exemplos e exercicios que permitan aplicar os contidos teóricos, e resolveranse as dúbidas que formulen os estudantes. Estas mesmas tarefas abordaranse nas clases de laboratorio, coa diferenza de que nestas nos apoiaremos no emprego de ferramentas informáticas e que se requirirá unha maior participación por parte do alumnado. As actividades non presenciais inclúen a lectura e comprensión dos contidos teóricos por parte dos alumnos, a realización dos exercicios e exemplos propostos e a elaboración dun traballo en grupos de 4 ou 5 persoas, que será transversal a todas as UD da materia, e no que se pretende que se aplique a teoría a un problema da vida real elixido polo grupo.

Os recursos necesarios estarán a disposición do alumnado nun equipo de Microsoft Teams. Nese equipo estarán dispoñibles os apuntamentos da materia, os arquivos do programa Maple que se traballen na clase e calquera outro documento que poida ser necesario no desenvolvemento da materia.

CONTIDOS

1. Motivacións e exemplos

As ecuacións diferenciais ordinarias son unha ferramenta fundamental para a formulación de moitos modelos matemáticos que se empregan para resolver problemas de distintas ciencias. Nesta UD presentaremos algúns exemplos clásicos sobre os que estudaremos o seu comportamento cualitativo e o compararemos co realizado previamente na materia de IEDO, na que se estudaron a partir do cálculo das súas solucións.

1.1. Modelo de poboación de Malthus

É un modelo sinxelo que permite predicir a evolución dunha poboación con recursos ilimitados, con individuos que non compiten entre eles. Pódese considerar que a poboación varía proporcionalmente ao seu tamaño. Denotando $X(t)$ ao tamaño da poboación no instante t , e considerando unha constante de crecemento k , dada pola diferenza entre a taxa de natalidade e a de mortalidade, a evolución poboacional vén

dada pola seguinte ecuación:

$$\dot{X}(t) = kX(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.2. Ecuación loxística

Na vida real, as limitacións do medio como a escaseza de alimentos ou de espazo non permiten que unha poboación creza de xeito ilimitado. O primeiro modelo poboacional que representa esta realidade é o loxístico, que vén dado pola seguinte ecuación:

$$\dot{X}(t) = rX(t) \left(1 - \frac{X(t)}{K} \right),$$

onde a constante K representa a capacidade de carga do medio.

Exemplo 1. *Que outros elementos poden influír no crecemento dunha poboación e non se teñen en conta na ecuación loxística? Como poderías incluílos matematicamente no modelo?*

2. Xeneralidades e propiedades

Nesta UD introdúcese algúns conceptos básicos e imprescindibles para o resto da materia, así como algunhas propiedades importantes e as súas demostracións, que se explicarán con detalle nas clases expositivas.

Definición 1. Chámase **ecuación diferencial autónoma** a unha ecuación da forma

$$\dot{x} = F(x), \tag{4.1}$$

con $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo A un subconxunto aberto de \mathbb{R}^n .

Asumiremos en toda a UD que o campo F é polo menos localmente lipschitziano, garantindo así que para cada condición inicial existe unha solución única definida nun intervalo maximal.

Teorema 1. Se $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unha solución da ecuación (4.1) entón para cada $c \in \mathbb{R}$, a función $\psi(t) := \varphi(t + c)$ definida en $(a - c, b - c)$ é tamén unha solución de (4.1).

Deste resultado extraemos unha propiedade importante que non se verificaba para as ecuacións diferenciais non autónomas, se φ definida en (a, b) é a solución de

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0,$$

entón $\varphi(t - t_0)$ definida en $(a + t_0, b + t_0)$ é a solución de

$$\dot{x} = F(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Definición 2. Dada a ecuación (4.1) e $x \in A$, chamamos **órbita** de x ao conxunto

$$\gamma_x = \{\varphi_x(t); t \in I_x\}$$

sendo $\varphi_x(t)$ a solución maximal de (4.1) que pasa por $(0, x)$.

Debemos notar que a órbita é a proxección sobre \mathbb{R}^n da solución que pasa por x en calquera instante inicial. Ademais, o campo F é tanxente á órbita en cada un dos seus puntos, é dicir, en cada punto da órbita, a súa tanxente é F nese punto. Así, as órbitas están orientadas no sentido do recorrido no tempo. Consideraremos que unha órbita non é só unha curva en \mathbb{R}^n , senón unha curva orientada no sentido do recorrido no tempo.

Definición 3. Chamaremos **diagrama de fases** ou **retrato de fases** ao conxunto das órbitas do espazo de fases orientadas segundo o sentido de crecemento da variable t .

En xeral poderíamos dicir que o noso obxectivo en canto á teoría cualitativa de ecuacións diferenciais é facer unha descrición o máis completa posible do diagrama de fases, prestando especial atención ao comportamento asintótico das órbitas.

Definición 4. Dada a ecuación (4.1) e un punto $x_0 \in A$, diremos que x_0 é unha **singularidade** ou un **punto de equilibrio** para a ecuación (4.1) ou para o campo F se $F(x_0) = 0$. Diremos que x_0 é un **punto regular** para (4.1) ou para F se $F(x_0) \neq 0$.

Nótese que se x_0 é unha singularidade, entón a solución pasando por $(0, x_0)$ é constante e, polo tanto, a súa órbita γ_{x_0} está formada unicamente polo propio punto x_0 .

Definición 5. Dada γ unha órbita de (4.1) e φ unha parametrización de γ , diremos que γ é unha **órbita periódica** de período $T > 0$ se φ é una función periódica de período $T > 0$ (ou o que é o mesmo que $\varphi(0) = \varphi(T)$).

Dedúcese que se γ é unha órbita periódica de período $T > 0$ tamén é órbita periódica de período kT , para todo $k \in \mathbb{N}$. Cando falemos de T como período da órbita referirémonos ao $T > 0$ mínimo que verifica $\varphi(0) = \varphi(T)$, é dicir, $\varphi(t) \neq \varphi(0)$ para todo $t \in (0, T)$.

Ao igual que sabemos que dúas solucións distintas dunha EDO non poden cortarse, tampouco o poden facer dúas órbitas distintas, formalmente enunciaremos e probaremos os seguintes resultados relacionados con esta cuestión.

Teorema 2. Se γ_1 e γ_2 son órbitas de (4.1) e $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ entón $\gamma_1 = \gamma_2$.

Corolario 1. Dada a ecuación (4.1) e dous puntos $x, y \in A$, se $x \in \gamma_y$ entón $\gamma_x = \gamma_y$.

Teorema 3. Se γ é unha órbita non constante de (4.1), γ non pode cortarse a si mesma salvo que sexa periódica.

3. Ecuación das órbitas

Nesta sección comezaremos considerando o caso de sistemas planos, o que adoita facilitar a comprensión dos conceptos. Consideramos entón o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Se o campo $F = (F_1, F_2)$ está definido nun aberto A de \mathbb{R}^2 , para todos os puntos de x_0 de A que sexan regulares teremos que $F_1(x_0) \neq 0$ ou ben $F_2(x_0) \neq 0$. Supoñamos por exemplo que $F_1(x_0) \neq 0$, entón existe unha veciñanza V_{x_0} de x_0 tal que para todos os puntos $x \in V_{x_0}$ verificase $F(x) \neq 0$, polo que podemos considerar a ecuación

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)}\tag{4.3}$$

que se denomina **ecuación das órbitas**. Xustificarase teoricamente empregando o teorema da función inversa.

Cuestión 1. Unha vez estudado o caso de \mathbb{R}^2 , trata de estender a definición da ecuación das órbitas a \mathbb{R}^n e xustifícaa teoricamente.

4. Retrato de fases de sistemas lineares en \mathbb{R}^2

Os sistemas lineares no plano son os da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}$$

é dicir, veñen dados por unha matriz $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, de xeito que

$$\dot{X} = AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X.$$

Se J é a forma canónica de Jordan da matriz A , entón existe unha matriz $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ non singular tal que $A = PJP^{-1}$. Podemos estudar o diagrama de fases do sistema dado pola matriz A ou ben estudar o dado pola matriz J , pois un pode transformarse noutro a través da matriz P .

Comezamos estudando o caso no que **o determinante da matriz A é nulo**. Poden darse distintos casos:

1. Se a matriz A é idénticamente nula, entón estamos ante un caso trivial no que todos os puntos do plano son de equilibrio.

2. Se a matriz A ten dous autovalores nulos pero non é unha matriz nula, entón a súa forma canónica de Jordan é o correspondente sistema asociado son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Temos entón que a recta $y = 0$ está formada por singularidades e para calquera órbita que pase por un punto con compoñente $y_0 \neq 0$, a súa compoñente y non variará, polo que esas órbitas estarán sobre rectas paralelas ao eixo $y = 0$. Se pensamos na ecuación das órbitas, para un punto (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$, e polo tanto con $F_1(x_0, y_0) \neq 0$, teremos nunha veciñanza

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} = 0.$$

Localmente teremos entón que a órbita vén dada por $y(x) = y_0$, e se pode estender a toda a recta.

O retrato de fases para o sistema dado pola matriz A pode obterse grazas á matriz P . Con esta transformación, a recta de singularidades que estaba sobre o eixo converterase noutra recta calquera que pasa pola orixe, e as demais órbitas irán paralelas a esa recta. Para coñecer a súa orientación basta con estudar a dirección do campo nun punto da órbita.

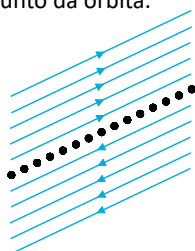
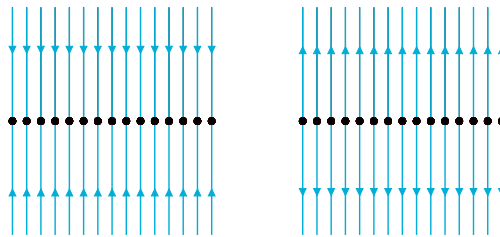


Figura 1: Retrato de fases do sistema cando A é non nula e ten dous autovalores nulos.

3. Se a matriz A ten autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, entón a súa forma canónica de Jordan e o correspondente sistema asociado son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

A recta $y = 0$ está formada por singularidades, e calquera órbita que pase por un punto $y_0 \neq 0$ será una semirrecta paralela á recta $x = 0$. A orientación vén dada polo signo de λ_2 .



(a) Caso con $\lambda_2 < 0$.

(b) Caso con $\lambda_2 > 0$.

Figura 2: Retrato de fases do sistema cando A ten autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

De novo o retrato de fases para o sistema dado pola matriz A pode obterse grazas á matriz P . A recta de singularidades que estaba sobre o eixo convertese noutra recta calquera que pasa pola orixe, e as demais órbitas achéganse ou afástanse das singularidades dependendo do signo do autovalor non nulo, λ_2 , e na dirección dada polo autovector asociado a este autovalor.

- Se a matriz A ten autovalores $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$, obtemos resultados análogos aos do caso anterior.

Estudamos agora os casos nos que a matriz A ten determinante non nulo.

- Autovalores reais e distintos**, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Consideramos v_1 e v_2 os autovectores asociados a λ_1 e λ_2 respectivamente, e E_1 e E_2 os espazos xerados polos autovectores. As solucións son da forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

- Se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ teremos un **nodo estable** ou **atractor**. Consideremos ademais que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, sendo o caso contrario análogo.

Cando t tende a infinito a órbita tende a cero, pois os autovalores son negativos e polo tanto os termos $e^{\lambda_i t}$ tenden a cero. Cando t tende a menos infinito a órbita tende a mais ou menos infinito.

Se $c_1 = 0$, as órbitas son da forma $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$, é dicir son semirrectas do subespazo xerado por v_2 , e tenden a cero cando t tende a infinito.

Se $c_2 = 0$, as órbitas son da forma $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$, é dicir son semirrectas do subespazo xerado por v_1 , e tenden a cero cando t tende a infinito.

Se $c_1 \neq 0$, as tanxentes ás orbitas tenden a E_1 cando t tende a infinito, pois ao ser $\lambda_2 < \lambda_1$ tense que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

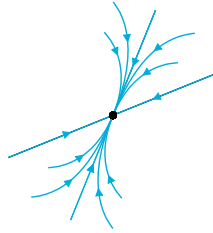


Figura 3: Nodo estable.

- b) Se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ teremos un **nodo inestable** ou repulsor. O estudo que debemos facer é análogo ao do caso anterior.

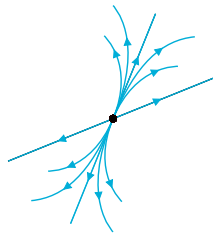


Figura 4: Nodo inestable.

- c) Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ teremos un **punto de sela**. Teriamos un caso análogo se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Se $c_1 = 0$ partimos dun punto do espazo xerado por v_2 e a órbita non sae dese subespazo. Neste caso $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ e o seu límite cando t tende a infinito é infinito, por ser $\lambda_2 > 0$.

Se $c_2 = 0$ partimos dun punto do espazo xerado por v_1 e a órbita non sae de ese subespazo. Neste caso $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$ e o seu límite cando t tende a infinito é cero, por ser $\lambda_1 < 0$.

Se $c_1, c_2 \neq 0$ a solución é $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$. Se estudamos os límites, vemos que tende a máis ou menos infinito tanto cando t tende a máis ou menos infinito, por ser un autovalor positivo e o outro negativo. Cando t tende a máis infinito, a compoñente en v_1 tende a cero e a compoñente en v_2 tende a máis ou menos infinito. Cando t tende a menos infinito, a compoñente en v_1 tende a máis ou menos infinito, e a compoñente en v_2 tende a cero.

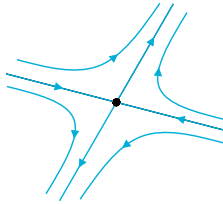


Figura 5: Punto de sela.

2. **Autovalores reais iguais**, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Neste caso falamos de nodos impropios, e distinguimos os seguintes casos:

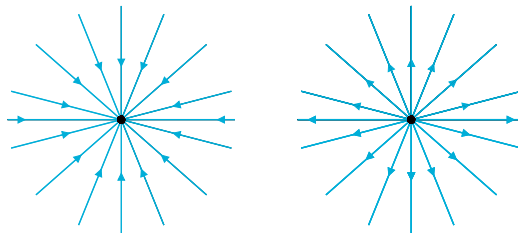
- a) Se a matriz A diagonaliza podemos atopar dous autovectores v_1 e v_2 linealmente independentes, pois o núcleo de $A - \lambda I$ ten dimensión dous. A solución é da forma:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2),$$

e todas as órbitas, salvo a orixe, son semirectas. A súa orientación vén determinada polo signo do autovalor:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = \begin{cases} \infty & \text{se } \lambda > 0, \\ 0 & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Dentro dos nodos impropios, este adoita chamarse **nodo impropio estrelado**, estable ou inestable dependendo do signo do autovalor.



(a) Estable

(b) Inestable

Figura 6: Nodos impropios estrelados.

- b) Se a matriz A non diagonaliza, o núcleo de $A - \lambda I$ ten dimensión un. Consideramos un autovector v asociado a λ e un vector w linealmente

independente de v tal que

$$AP = PJ \Leftrightarrow A(v \mid w) = (v \mid w) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Av = v\lambda, \\ Aw = v + \lambda w. \end{cases}$$

Como v e w forman unha base de \mathbb{R}^2 , dado $z_0 \in \mathbb{R}^2$ podemos expresar $z_0 = av + bw$. A órbita do sistema que pasa por z_0 será

$$e^{tA}z_0 = e^{tA}(av + bw) = e^{tA}av + be^{tA}w.$$

Empregando a igualdade $e^{tA}P = Pe^{tJ}$ podemos deducir que $e^{tA}w = vte^{\lambda t} + we^{\lambda t}$, e polo tanto a solución será da forma

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} [(a + bt)v + bw].$$

Se $b \neq 0$ podemos ver as tanxentes ás órbitas dividindo a compoñente en w entre a compoñente en v :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{be^{\lambda t}}{(a + bt)e^{\lambda t}} = 0.$$

Para determinar a orientación das órbitas debemos estudar o límite de $\varphi(t)$, que depende do signo de λ . Se $\lambda > 0$ as órbitas van a infinito se t tende a infinito e van a cero se t tende a menos infinito. Se $\lambda < 0$ as órbitas van a cero se t tende a infinito e van a infinito se t tende a menos infinito.

Se fixamos por exemplo $\lambda > 0$, vemos que as órbitas van a infinito cando t tende a infinito e as súas tanxentes tenden a ser paralelas a E_1 . Cando t tende a menos infinito, as tanxentes tamén tenden a ter a dirección de E_1 , pero como ademais a orbita tende a cero, a órbita é tanxente a E_1 .

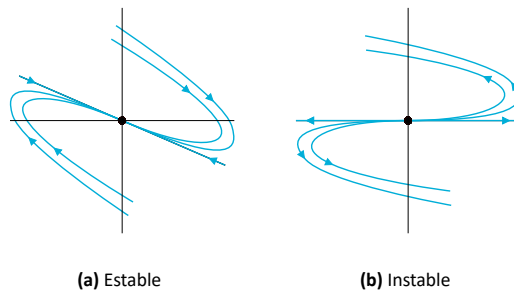


Figura 7: Nodos impropios.

3. **A matriz A ten autovalores complexos $\alpha \pm i\beta$.** Neste caso a solución é da forma:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\alpha t} [\cos \beta t v_1 - \sin \beta t v_2] + c_2 e^{\alpha t} [\sin \beta t v_1 + \cos \beta t v_2].$$

Se a reescribimos en coordenadas polares obtemos

$$\varphi(t) = e^{\alpha t} \rho [\cos(\omega - \beta t)v_1 + \sin(\omega - \beta t)v_2].$$

Debemos considerar distintos casos en función da parte real α .

a) Se $\alpha = 0$ teremos un **centro**. Neste caso

$$\varphi(t) = \rho [\cos(\omega - \beta t)v_1 + \sin(\omega - \beta t)v_2],$$

pois que temos un xiro periódico, xa que a variable temporal t só aparece nos argumentos do seno e do coseno. Temos entón órbitas periódicas.

b) Se $\alpha < 0$ teremos un **foco estable**. Neste caso temos que

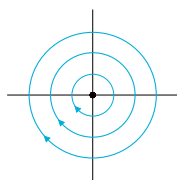
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0,$$

pois como $\alpha < 0$, o termo $e^{\alpha t}$ tende a cero. Por outra parte,

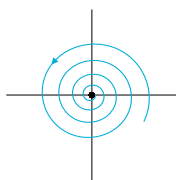
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \infty,$$

pois cando t tende a menos infinito, $e^{\alpha t}$ tende a infinito. Como o termo $e^{\alpha t} \rho$ se vai facendo máis pequeno, obtemos unha órbita que xira en forma de espiral cara o cero. O sentido de xiro pode ser horario ou antihorario, e pode determinarse a partir da expresión do campo F que define o sistema.

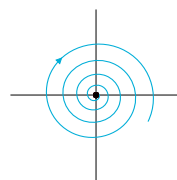
c) Se $\alpha > 0$ teremos un **foco inestable**, con órbitas en espiral que se afastan da orixe. Os razoamentos son iguais aos do caso anterior.



(a) Centro



(b) Foco estable



(c) Foco inestable

Rematada esta clasificación, preténdese que o alumnado a coñeza e sexa capaz de representar, tanto manualmente como co software Maple os distintos retratos de fases. Inclúese no Anexo 2 o contido dunha folla de Maple que se traballará na clase sobre a representación de retratos de fase. Faremos especial fincapé en que se comprendan ben todos os elementos que aparecen nos retratos de fases, por exemplo, os alumnos deben ter claro que rectas son as variedades invariantes dun punto de sela ou como determinamos o sentido de xiro das órbitas nun centro ou foco.

5. Retrato de fases de sistemas lineais en \mathbb{R}^3

Así como no caso de \mathbb{R}^2 dáse unha clasificación completa dos retratos de fases, non abordaremos ese obxectivo no caso de \mathbb{R}^3 . A nosa intención é dar algúns exemplos que permitan ao alumnado comparar o que se obtén no espazo co que xa coñecen do plano, extraendo conclusións sobre como se poderían xeneralizar os resultados coñecidos. Propónse o estudo e análise dos retratos de fases dos seguintes sistemas, para o que se recomenda o emprego do software Maple.

Exemplo 1. A parte linear do seguinte sistema ten tres autovalores reais positivos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + 5y + 4z, \\ \dot{y} &= 2x + 5y + 3z, \\ \dot{z} &= z.\end{aligned}$$

Exemplo 2. A parte linear do seguinte sistema ten un autovalor real positivos e dous complexos conxugados con parte real positiva:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0.1x + y, \\ \dot{y} &= -x + 0.1y, \\ \dot{z} &= 2z.\end{aligned}$$

Exemplo 3. A parte linear do seguinte sistema ten un autovalor cero e dous autovalores reais negativos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y, \\ \dot{y} &= -2y, \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}$$

ACTIVIDADES PROPOSTAS

- Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD individualmente no tempo de dedicación non presencial.
- Resolución dos exercicios propostos no boletín (incluído no anexo 1) individualmente ou en grupo no tempo de dedicación non presencial.
- Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.
- Inicio do traballo en grupo. O alumnado debe realizar un traballo grupal no que se propoña un problema da vida real e se estude aplicando os contidos e técnicas que se van tratando na materia. Despois de ter traballado esta UD o alumnado deberá facer a elección do problema real no que se centrará o traballo e aplicarán os contidos vistos nesta UD ao estudo dese problema escollido.

- Resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas ao inicio dunha clase para a súa entrega ao final da sesión.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Esta Unidade Didáctica corresponde coa materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias, e a súa avaliación farase de forma conxunta coas demais Unidades Didácticas da materia. Para a cualificación final da avaliación continua teranse en conta as seguintes actividades:

- **Exercicios realizados na aula.** Nalgunhas das sesións presenciais recollerase ao final o traballo realizado polos alumnos durante esa sesión, que pode ser a realización de algúns exercicios ou a resolución de cuestións teóricas breves. Ao comezo do curso especificarase a porcentaxe asignada, dentro da avaliación continua, ao conxunto de todas as actividades deste tipo realizadas en todas as unidades didácticas, dependendo o peso concreto das actividades desta UD do desenvolvemento de cada curso.
- **Traballo grupal.** Os contidos desta UD poderían dar lugar a unha primeira parte dese traballo grupal comentado previamente, que se irá completando con contidos relativos ás seguintes unidades didácticas. A puntuación deste traballo suporá unha porcentaxe da nota da avaliación continua, que se especificará ao comezo do curso. Dado que é un traballo libre e aberto, o peso concreto dos contidos desta UD dentro do traballo dependerá das eleccións do alumnado e do enfoque que elixan para o seu traballo. Valorarase tanto o traballo escrito como a súa exposición oral, tendo en conta a organización, a presentación, o emprego de recursos e bibliografía, o dominio do tema e a capacidade de comunicar e debater as ideas.

Na cualificación final terase en conta a avaliación continua e a cualificación do exame final, no que se incluírán contidos desta Unidade Didáctica. O peso asignado a cada parte especificarase ao comezo de cada curso.

ANEXO 1

Boletín de exercicios da unidade didáctica 1

1. Representa e compara os retratos de fases dos seguintes sistemas:

$$a) \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad b) \begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -x^2. \end{cases}$$

2. Representa o retrato de fases das seguintes ecuacións, empregando a ecuación das órbitas:

a) $\ddot{x} - 8x\dot{x} = 0$,

b) $\ddot{x} + x - x^3 + x^5 = 0,$

c) $\ddot{x} = x(x^2 - 1).$

3. Representa o retrato de fases do seguinte sistema empregando a ecuación das órbitas:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy, \\ \dot{y} = xy - 6y. \end{cases}$$

4. Representa o retrato de fases do sistema $\dot{x} = Ax$, sendo A a matriz dada por:

a) $\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. Representa o diagrama de fases dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -2y. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - \frac{3}{2}y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

6. Estudar o diagrama de fases dos seguintes sistemas en función do parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + ay, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = ax + 3y. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

7. Dada a ecuación do péndulo sen amortiguación, $\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0$:

- (a) Escribir o sistema de primeira orde asociado e obter as súas órbitas.
(b) Debuxar o diagrama de fases correspondente e interpretar físicamente as solucións obtidas.

ANEXO 2

Recollemos o código necesario para representar os retratos de fase no plano dalgúns sistemas de ecuacións diferenciais, acompañado dalgúns comentarios explicativos das distintas opcións así como advertencias sobre erros frecuentes.

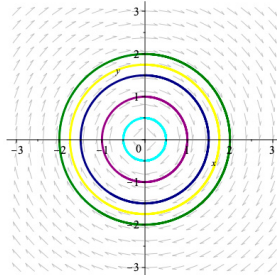
```
restart;  
with(DEtools);  
with(plots);
```

En primeiro lugar definimos dúas ecuacións, e despois definimos o sistema formado por ambas:

```
ec1 := diff(x(t), t) = y(t);  
ec2 := diff(y(t), t) = -x(t);  
ds := ec1, ec2;
```

Utilizamos o comando DEplot que nos permite representar o diagrama de fases. Especificamos o intervalo de tempo, t , que queremos representar, os intervalos das variables x e y que se mostrarán, e despois unha lista con condicións iniciais, de forma que se representarán no diagrama de fases as órbitas correspondentes a esas condicións iniciais. Despois podemos axustar outras opcións, coma neste caso o tamaño das frechas que representan o campo, ou a cor de cada unha das órbitas representadas. Axustar o valor de stepsize permítenos indicar a precisión coa que se representan as órbitas.

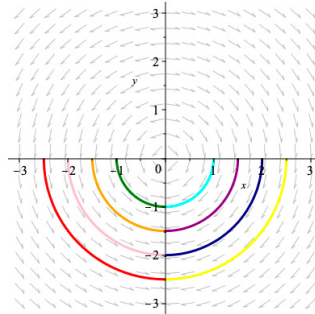
```
DEplot([ds], [x(t), y(t)], t=0..10, x=-3..3, y=-3..3,  
[[x(0)=0, y(0)=0.5], [x(0)=0, y(0)=1], [x(0)=0, y(0)=1.5],  
[x(0)=0, y(0)=1.75], [x(0)=0, y(0)=2]], arrows = small,  
linecolor=[Cyan, Purple, Navy, Yellow, Green], color=grey, stepsize = 0.02);
```



Para representar outros sistemas, na maioría dos casos temos que axustar os intervalos de t , x e y e as condicións iniciais. Definimos por exemplo o seguinte sistema:

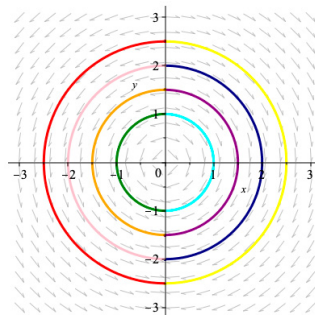
```
ec1 := diff(x(t), t) = x(t)*y(t);
ec2 := diff(y(t), t) = -x(t)^2;
ds := ec1, ec2;
```

Neste caso, se mantemos o tempo nos valores 0...10, obtemos a seguinte figura, na que non se amosan órbitas nos cuadrantes primeiro e segundo.



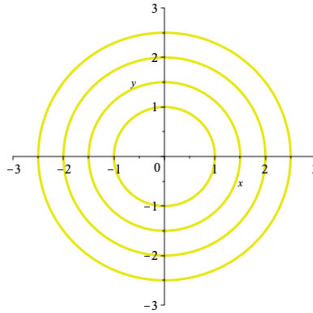
Isto débese a que no caso anterior as órbitas eran periódicas, pero neste non o son, polo que, para as condicións iniciais que fixamos, a parte da órbita que está nos cuadrantes superiores, só se obtén para valores negativos de t , como representamos a continuación.

```
DEplot([ds], [x(t), y(t)], t=-10..10, x=-3..3, y=-3..3,
[[x(0)=1, y(0)=0], [x(0)=1.5, y(0)=0], [x(0)=2, y(0)=0],
[x(0)=2.5, y(0)=0], [x(0)=-1, y(0)=0], [x(0)=-1.5, y(0)=0],
[x(0)=-2, y(0)=0], [x(0)=-2.5, y(0)=0]], arrows=small,
linecolor=[Cyan,Purple,Navy,Yellow,Green,Orange,Pink,Red],
color=grey, stepsize=0.02);
```



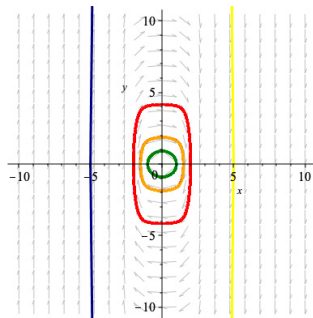
É importante ser conscientes de que non aparecen representadas as singularidades, e é importante tamén fixarnos no campo, pois por exemplo, se non distinguísamos as órbitas por cores, e non representasemos o campo obteríamos o seguinte retrato, que podería ser deste sistema pero tamén do anterior.

```
DEplot([ds], [x(t), y(t)], t=-10..10, x=-3..3, y=-3..3,
[[x(0)=1, y(0)=0], [x(0)=1.5, y(0)=0], [x(0)=2, y(0)=0],
[x(0)=2.5, y(0)=0], [x(0)=-1, y(0)=0], [x(0)=-1.5, y(0)=0],
[x(0)=-2, y(0)=0], [x(0)=-2.5, y(0)=0]], arrows=none,
stepsize=0.02);
```



Cuestión 2. Por que no seguinte código se inclúen 8 condicións iniciais, pero Maple só representa 5 órbitas?

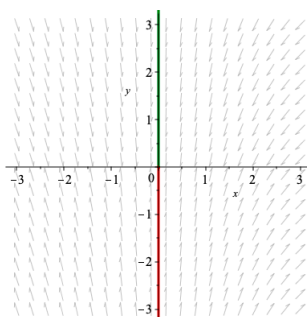
```
ec1 := diff(x(t), t)=y(t);
ec2 := diff(y(t), t)=-x(t) + x(t)^3 - x(t)^5;
ds := ec1, ec2;
DEplot([ds], [x(t), y(t)], t=-10..10, x=-10..10, y=-10..10,
[[x(0)=1, y(0)=0], [x(0)=1.5, y(0)=0], [x(0)=-5, y(0)=0],
[x(0)=5, y(0)=0], [x(0)=-1, y(0)=0], [x(0)=-1.5, y(0)=0],
[x(0)=-2, y(0)=0], [x(0)=2, y(0)=0]], arrows=small,
linecolor=[Cyan,Purple,Navy,Yellow,Green,Orange,DeepPink,Red],
color=grey, stepsize=0.02);
```



Cuestión 3. Por que o seguinte código non representa ningunha órbita salvo as que están sobre os eixos?

```
ec1 := diff(x(t), t) = -x(t)*y(t);
ec2 := diff(y(t), t) = x(t)*y(t) - 6*y(t);
```

```
ds := ec1, ec2;  
DEplot([ds], [x(t), y(t)], t=-10..10, x=-3..3, y=-3..3,  
[[x(0)=0.5, y(0)=0], [x(0)=-0.9, y(0)=0], [x(0)=1.2, y(0)=0],  
[x(0)=2, y(0)=0], [x(0)=0, y(0)=1], [x(0)=-1.5, y(0)=0],  
[x(0)=-2.5, y(0)=0], [x(0)=0, y(0)=-2]], arrows=small,  
linecolor=[Cyan,Purple,Navy,Yellow,Green,Orange,DeepPink,Red],  
color=grey, stepsize=0.02);
```



BIBLIOGRAFÍA

- AGARWAL, R. E O'REGAN, D. (2008). *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Springer.
- FERNÁNDEZ-PÉREZ, C. (1992). *Ecuaciones Diferenciales I*. Pirámide.
- FERNÁNDEZ PÉREZ, C. E VEGAS MONTANER, J. M. (1996). *Ecuaciones Diferenciales II*. Pirámide.
- OTERO-ESPINAR, M. V., E DIZ-PITA, É. (2019). *Apuntamentos da materia Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*.
- PRECUP, R. (2018). *Ordinary Differential Equations*. De Gruyter.
- SOTOMAYOR, J. (1979). *Lições de Equações Diferenciais Ordinarias*. I.M.P.A.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA