MATERIA
Series funcionais e Integración de Riemann en varias variables reais

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas

unidade didáctica 2

Ciencias Experimentais

Sucesións e series funcionais

Jorge Rodríguez López

Área de Análise Matemática
Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización.
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788418445972

MATERIA: Series funcionais e Integración de Riemann en varias variables reais
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Integrais impropias de funcións dunha variable real

Integrais impropias
Criterios de converxencia
Integrais impropias e series numéricas

Unidade 2. Sucesións e series funcionais

Sucesións de funcións. Converxencia puntual e converxencia uniforme.
Condición de Cauchy. Resultados de continuidade, derivabilidade e integrabilidade da función límite
Series de funcións. Converxencia puntual, absoluta e uniforme. Criterio maiorante de Weierstrass
Series de potencias. Raio de converxencia. Fórmula de Cauchy-Hadamard. Converxencia uniforme. Propiedades de continuidade, derivabilidade e integrabilidade da suma. Series de Taylor. Funcións analíticas

Unidade 3. Integral múltiple de Riemann

Integral de Riemann en rectángulos compactos de $\mathbb{R}^n$. Propiedades da integral
Conxuntos de contido nulo e de medida nula. Caracterización de Lebesgue da integrabilidade no sentido de Riemann
Integración en conxuntos medibles no sentido de Jordan
O teorema de Fubini
O teorema de cambio de variable. Algúns cambios de variable especiais

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica enmárcase dentro da materia Series funcionais e Integración de Riemann en varias variables reais, que se imparte no segundo cuadrimestre do segundo curso do Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela, cun peso de 6 créditos ECTS.

Esta materia obrigatoria pertence ao módulo de Análise Matemática en Varias Variables do que tamén forman parte Diferenciación de funcións de varias variables reais (segundo curso) e Cálculo Vectorial e Integración de Lebesgue (terceiro curso). Con todas elas preténdese afondar nos contidos presentados no primeiro curso no contexto da análise de funcións dunha variable real, tratando o estudo da diferenciación e a integración de funcións de varias variables reais, o que resulta fundamental para unha correcta formación matemática.

Nesta unidade didáctica preséntanse os conceptos de sucesión e de serie no contexto funcional. As nocións de sucesión e serie numéricas xa son ben coñecidas para os estudantes por seren tratadas na materia Introdución á análise matemática, de primeiro curso, mais a súa xeneralización funcional require o estudo de distintos tipos de converxencia, o que pode dificultar a súa comprensión. O tratamento da converxencia uniforme en contraposición á converxencia puntual, xunto coas propiedades que ambas trasladan á función límite, conforman o eixo central sobre o que xira esta unidade.

Por outra parte, estes contidos resultan básicos para o desenvolvemento doutras materias da área, como Series de Fourier e introdución ás ecuacións en derivadas parciais, do terceiro curso do Grao en Matemáticas, ou Análise funcional en espazos de Hilbert, do cuarto curso.

A temporalización prevista para esta unidade didáctica é de aproximadamente a metade das horas totais da materia.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

A maiores das competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título do Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela, o desenvolvemento da materia contribuirá a acadar as seguintes competencias específicas:

- CE1 Comprender e utilizar a linguaxe matemática.
- CE2 Coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática.
- CE3 Idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas.
- CE4 Identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

CE5 Asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos.

CE6 Saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais.

CE9 Utilizar aplicacións informáticas de análise estatística, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en Matemáticas e resolver problemas.

En particular, na presente unidade didáctica, traballaranse as seis primeiras competencias específicas: CE1 - CE6.

Como obxectivo fundamental da materia establécese o seguinte: *comprender, coñecer e manexar os principais conceptos, resultados e métodos relativos aos contidos do programa, que teñen unha importancia fundamental na Análise Matemática e, máis inmediatamente para o alumnado, nalgunhas materias do Grao en Matemáticas, como, por exemplo, as relativas á Análise Complexa, Análise funcional ou Integración de Lebesgue e Series de Fourier*.

A continuación preséntanse os obxectivos específicos que se agarda que o alumnado acade ao final da presente unidade didáctica:

- Comprender o concepto de converxencia uniforme dunha sucesión funcional e ser quen de traballar con el de forma rigorosa.
- Extraer información de funcións definidas como series funcionais.
- Manexar con soltura as propiedades das series de potencias.
- Comprender o concepto de función analítica e ser quen de discutir se certa función o é.
- Coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos relativos ás sucesións e ás series de funcións.
- Idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e estratexias para confirmalas ou negalas.

OS CONTIDOS BÁSICOS

As sucesións e as series funcionais xorden de xeito natural en análise co obxectivo de aproximar funcións complicadas por outras máis simples e, tamén, para definir funcións novas a partir doutras xa coñecidas.

1. Sucesións funcionais

A diferenza das sucesións numéricas, os termos dunha sucesión funcional son funcións, en lugar de números reais.

Definición 1. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ o conxunto de funcións reais definidas en A. Unha aplicación

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto f_n \in \mathcal{F}$$

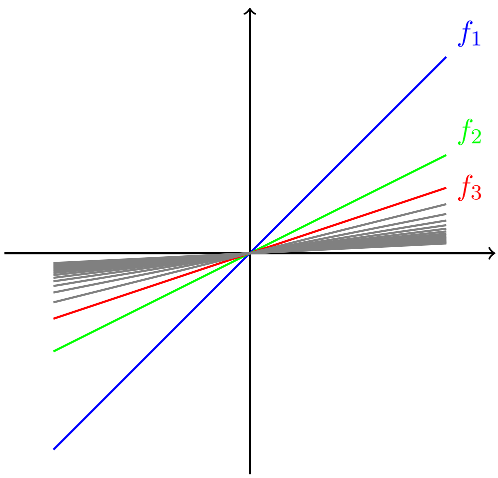
denomínase *sucesión de funcións* definidas en A. Denotarase por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

A función $f_n : A \to \mathbb{R}$ denomínase *termo n-ésimo* (ou *termo xeral*) da sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Evidentemente, para cada $x \in A$, a sucesión anterior dá lugar a unha sucesión de números reais: $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Véxase a figura 1.

Figura 1: Os primeiros termos da sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.



Cal é o límite da sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Como se define o concepto de límite?

Interesaranos estudar algunha noción de converxencia para a sucesión anterior.

Definición 2. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converxe puntualmente* a unha función f en A se, para cada $x \in A$, a sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a $f(x)$, é dicir, se para cada $x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Denotarase por $f_n \xrightarrow{p} f$ en A.

Noutras palabras, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe puntualmente a f en A se

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \,|\, n \geq N(\varepsilon, x),\ n \in \mathbb{N} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nese caso diremos que f é o *límite puntual* de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A.

O conxunto $C = \{x \in A : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$ denomínase *campo de converxencia* da sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e é o maior subconxunto de A no que a sucesión é puntualmente converxente.

Exemplo 2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ temos que $f_n(x) = x/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, así que a función identicamente nula $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é o límite puntual da sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$.

Unha vez que temos definida unha noción de converxencia para as sucesión funcionais, estaremos interesados nas seguintes cuestións sobre a transferencia das propiedades dos termos da sucesión, f_n, á función límite, f:

- Se para cada $n \in \mathbb{N}$ as funcións f_n son continuas en $x_0 \in A$ e $f_n \xrightarrow{p} f$ en A, entón é f unha función continua en x_0?

  Dito doutro xeito, a condición $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ implica $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$? Equivalentemente, a cuestión é se podemos realizar o seguinte intercambio de límites:

  $$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

- Se as funcións f_n son Riemann-integrables en $[a, b]$ e $f_n \xrightarrow{p} f$ en $[a, b]$, entón é f unha función Riemann-integrable en $[a, b]$? En caso afirmativo, cumprirase que

  $$\int_a^b f \equiv \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ ?$$

- Se as funcións f_n son derivables en $[a, b]$ e $f_n \xrightarrow{p} f$ en $[a, b]$, entón é a función f derivable en $[a, b]$? En caso afirmativo, cumprirase que

  $$f' \equiv \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'\ ?$$

A resposta a tódalas cuestións anteriores é negativa.

Exemplo 3. Consideremos a sucesión funcional dada por $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, que converxe puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Aínda que as funcións f_n son continuas en $[0, 1]$, o seu límite puntual non é unha función continua en $[0, 1]$. Do mesmo xeito, aínda que as funcións f_n son derivables en $[0, 1]$, f non o é (pois non é derivable pola esquerda en $x = 1$).

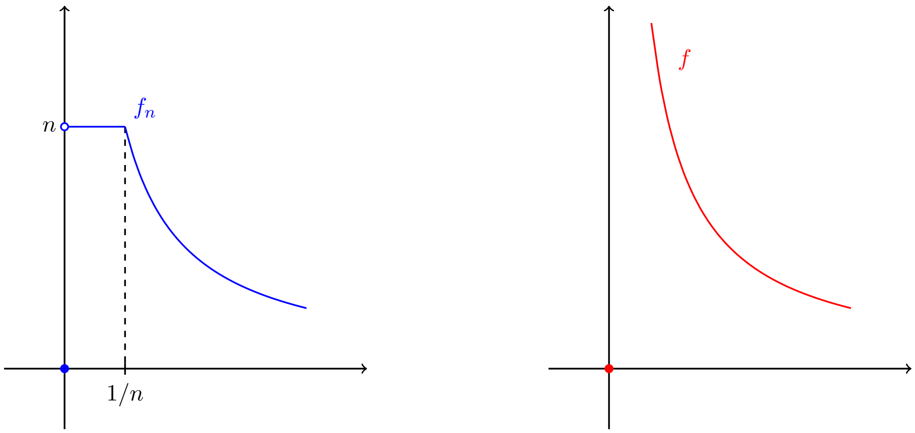
Exemplo 4. Consideremos a sucesión de funcións, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \text{mín}\left\{n, \dfrac{1}{x}\right\}, & \text{se } x \in (0,2], \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Converxe puntualmente en $[0,2]$ á función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \in (0,2], \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Figura 2: Sucesión de funcións integrables con límite non integrable.



A función f non é Riemann-integrable en $[0,2]$ (tampouco en sentido impropio), mentres que as funcións f_n si o son, ao ser continuas en $(0,2]$ cunha descontinuidade evitable en $x=0$, como se pode apreciar na figura 2.

1.1. Converxencia uniforme

Como vimos de comprobar, a converxencia puntual non é satisfactoria á hora de intercambiar os procesos de paso ao límite nin de transmitir as propiedades dos termos dunha sucesión ao seu límite puntual. Isto motiva a necesidade doutras nocións de converxencia.

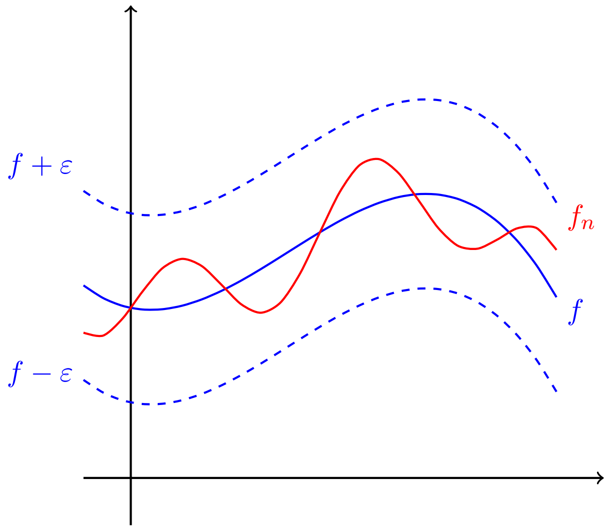
Definición 3. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n, f : A \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converxe uniformemente* á función f en A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,|\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Denotarase por $f_n \xrightarrow{u} f$ en A ou $f_n \rightrightarrows f$ en A.

Graficamente, isto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural N_ε tal que as gráficas das funcións f_n están na banda determinada por $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$ para calquera $n \geq N_\varepsilon$, como pode verse na figura 3.

Figura 3: Converxencia uniforme.



Observación 1. Se unha función $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente converxente a unha función f, entón tamén converxe puntualmente á función f. Polo tanto, en caso de que exista, o límite uniforme coincide necesariamente co límite puntual.

Proposición 1. *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente converxente a f en A, entón existen $M \geq 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tales que para calquera $n \geq N$ se ten*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq M \quad \forall x \in A.$$

Demostración. Inmediata a partir da definición da converxencia uniforme. □

Exemplo 5. A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = x/n$, $n \in \mathbb{N}$, non converxe uniformemente en $\mathbb{R}$ á función identicamente nula, pois $|f_n(x) - f(x)| = |x|/n$ non é limitada en $\mathbb{R}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Cuestión 1. É posible atopar unha sucesión uniformemente converxente cuxos termos sexan funcións non limitadas?

Definición 4. Dadas as funcións $g_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é *uniformemente limitada* en A se existe $M \geq 0$ tal que

$$|g_n(x)| \leq M \quad \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cuestión 2. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións uniformemente converxente a unha función f nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que as funcións f_n son limitadas en A. Entón é $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión uniformemente limitada en A?

Dado que a supresión dun número finito de termos dunha sucesión non modifica o seu carácter respecto á converxencia, á vista da Proposición 1 podemos supoñer que se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente converxente a unha función f, entón $\{f_n - f\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

Teorema 1. *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Equivalen:*

$a)$ *A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en A.*

$b)$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$

Demostración. A converxencia uniforme de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f en A significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para calquera natural $n \geq N_\varepsilon$ se ten que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

ou, equivalentemente,

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

isto é, $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$ $\square$

Observación 2 (Norma uniforme). Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, diremos que g é *limitada* se existe $M \geq 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in A$. Denotaremos por $\mathcal{B}(A)$ o conxunto de tódalas funcións limitadas de A en $\mathbb{R}$.

O conxunto $\mathcal{B}(A)$ é un espazo vectorial real e se $g \in \mathcal{B}(A)$ podemos considerar o número $\|g\|_\infty$ definido como

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in A} |g(x)|,$$

que existe en $\mathbb{R}$. A aplicación $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}$ é unha norma en $\mathcal{B}(A)$, que se denomina *norma do supremo* ou *norma uniforme*.

Claramente, dita norma está relacionada coa converxencia uniforme, pois reescribindo o resultado anterior temos que

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Agora amosamos cun par de exemplos como podemos empregar o Teorema 1 no estudo da converxencia uniforme dunha sucesión funcional.

Exemplo 6. A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converxe puntualmente no intervalo $(-1,1]$ á función $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-1,1), \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Vexamos que a converxencia non é uniforme. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se } x \in (-1,1), \\ 0, & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

así que

$$\sup_{x\in(-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1 \neq 0.$$

Obsérvese que a converxencia é uniforme en cada intervalo $[-r,r]$, $0 < r < 1$, xa que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-r,r]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

Exemplo 7. Consideremos a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n(x^2+1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

que converxe puntualmente á función $f(x) = 1/(x^2+1)$ en $\mathbb{R}$. Vexamos que a converxencia tamén é uniforme. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n(x^2+1)} \leq \frac{1}{n},$$

así que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

A conclusión obtense do Teorema 1.

Definición 5. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a *condición de Cauchy para a converxencia uniforme* en A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,|\, n, m \geq N_\varepsilon,\ n, m \in \mathbb{N} \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Teorema 2 (Criterio de Cauchy). *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Equivalen:*

a) A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente converxente en A.

b) A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en A.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sexa $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en A. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, entón

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A.$$

Polo tanto, se $n, m \geq N_\varepsilon$, temos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

isto é, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en A.

$b) \Rightarrow a)$ Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en A, para cada $x \in A$ a sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy (e, polo tanto, converxente), así que existe unha función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe puntualmente a f en A. Vexamos que a converxencia é uniforme. Por $b)$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, entón

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Tomando límites en (3.1) cando k tende a infinito, temos que se $n \geq N_\varepsilon$ entón

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

é dicir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en A. □

1.2. Continuidade, derivabilidade e integrabilidade da función límite

A continuación vemos que a converxencia uniforme é suficiente para transmitir a continuidade e a integrabilidade de Riemann dos termos dunha sucesión funcional á súa función límite.

Teorema 3. *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en A e cada función f_n é continua en $x_0 \in A$, entón f é continua en x_0.*

Demostración. Como a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en A, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, entón

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in A.$$

En particular,

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in A. \tag{3.2}$$

Por outro lado, como f_N é continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in A \quad \Longrightarrow \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

En conclusión, para calquera $x \in A$ cumprindo que $|x - x_0| < \delta$ temos que

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

e usando (3.2) e (3.3),

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

é dicir, f é continua en x_0. $\square$

Cuestión 3. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións descontinuas en todo punto dun intervalo $[a, b]$ que converxe uniformemente a certa función f en $[a, b]$. Entón é f descontinua en $[a, b]$?

Cuestión 4. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións uniformemente continuas nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$ que converxe uniformemente a certa función f en A. Entón é f uniformemente continua en A?

A converxencia uniforme é unha condición suficiente para transmitir a continuidade dos termos dunha sucesión funcional á función límite, pero non é necesaria.

Exemplo 8. Consideremos a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$, onde

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{se } 0 \leq x < \dfrac{1}{n}, \\ -nx + 2, & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \text{se } x \geq \dfrac{2}{n}, \end{cases}$$

que converxe puntualmente á función $f(x) = 0$, $x \in [0, 2]$, véxase a figura 4.

A converxencia non é uniforme, pois

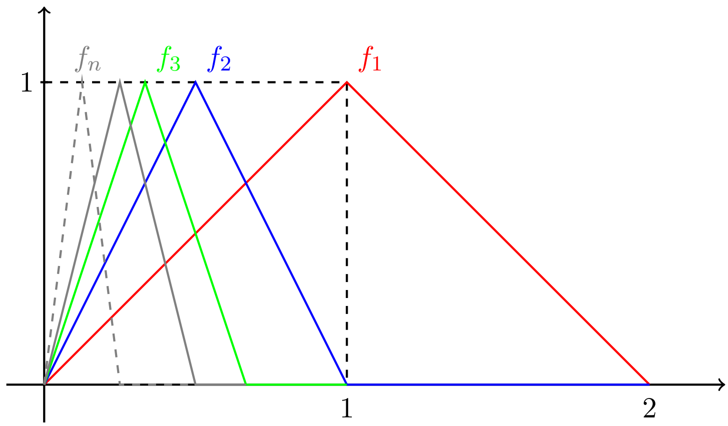
$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

así que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$.

Porén, tanto as funcións f_n como f son continuas en $[0, 2]$.

Como amosa o exemplo anterior, existen sucesións funcionais con termos continuos que converxen puntualmente a unha función continua nun intervalo compacto, mais dita converxencia non é uniforme. Engandindo a hipótese adicional de que a sucesión sexa monótona é posible probar que a converxencia ten que ser uniforme.

Figura 4: Converxencia puntual e non uniforme.



Cuestión 5 (Teorema de Dini). Proba que se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de funcións continuas que converxe puntualmente a unha función continua f en $[a,b]$ e, ademais, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in [a,b]$ e todo $n \in \mathbb{N}$, entón $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en $[a,b]$.

A continuación centrámonos na transmisibilidade da integrabilidade no sentido de Riemann dos termos da sucesión á función límite.

Teorema 4. *Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións integrables segundo Riemann nun intervalo $[a,b]$. Se a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en $[a,b]$, entón f é Riemann-integrable en $[a,b]$. Ademais,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{3.4}$$

Demostración. Vexamos que f cumpre a condición de Riemann en $[a,b]$, é dicir, dado $\varepsilon > 0$ existe unha partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon, \tag{3.5}$$

onde $L(f,P_\varepsilon)$ e $U(f,P_\varepsilon)$ denotan, respectivamente, a suma inferior e a suma superior de Darboux de f asociadas á partición P_ε.

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$, entón

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad \forall x \in [a,b].$$

En particular,

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f(x) \leq f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Polo tanto, para calquera partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$ temos que

$$\begin{aligned} L\left(f_N - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, P\right) &\leq L(f,P) \leq L\left(f_N + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, P\right), \\ U\left(f_N - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, P\right) &\leq U(f,P) \leq U\left(f_N + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, P\right), \end{aligned}$$

e entón

$$\begin{aligned} L\left(f_N, P\right) - \frac{\varepsilon}{3} &\leq L(f,P) \leq L\left(f_N, P\right) + \frac{\varepsilon}{3}, \\ U\left(f_N, P\right) - \frac{\varepsilon}{3} &\leq U(f,P) \leq U\left(f_N, P\right) + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Así deducimos que

$$U(f,P) - L(f,P) \leq U(f_N,P) - L(f_N,P) + \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{3.6}$$

Por outro lado, como f_N é integrable no sentido de Riemann en $[a,b]$, existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(f_N,P_\varepsilon) - L(f_N,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7) obtemos que f cumpre (3.5), isto é, f é Riemann-integrable en $[a,b]$.

Finalmente, para probar (3.4), basta ver que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

que tende a cero por ser a converxencia de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f en $[a,b]$ uniforme. □

Obsérvese que o Exemplo 8 tamén mostra que a converxencia uniforme non é unha condición necesaria para transmitir a integrabilidade dos termos dunha sucesión funcional á función límite.

O seguinte resultado prescinde da converxencia uniforme.

Teorema 5 (da converxencia limitada). *Sexan $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supoñamos que*

a) *f_n é Riemann-integrable en $[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

b) *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe puntualmente a f en $[a,b]$;*

$c)$ *existe* $M \geq 0$ *tal que* $|f_n(x)| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in [a, b]$.

Entón existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. *Ademais, se* f *é Riemann-integrable en* $[a, b]$, *daquela*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Nótese que as hipóteses anteriores non garanten a integrabilidade da función límite puntual.

Exemplo 9. Sexa $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha enumeración dos racionais do intervalo $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos o conxunto $A_n = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ e consideremos a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, onde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_n, \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] \setminus A_n. \end{cases}$$

As funcións f_n son integrables segundo Riemann en $[0, 1]$, pois teñen un número finito de descontinuidades, e teñen integral nula en $[0, 1]$. Porén, a sucesión converxe á función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

que non é Riemann-integrable en $[0, 1]$.

Isto reforza a idea de que a integral de Riemann non é a máis axeitada para levar a cabo os procesos de *paso ao límite*.

A diferenza do que pasa coa continuidade e a integrabilidade, a converxencia uniforme non é suficiente para transmitir a derivabilidade dos termos dunha sucesión á función límite.

Exemplo 10. Consideremos a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Está claro que converxe puntualmente á función $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. De feito, a converxencia é uniforme, pois

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \leq \sqrt{\left(|x| + \frac{1}{n}\right)^2} - |x| = \frac{1}{n},$$

o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Porén, mentres que tódalas funcións f_n son derivables en $\mathbb{R}$, o seu límite, a función valor absoluto, non é derivable na orixe.

Teorema 6. *Sexan $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funcións derivables tales que*

$a)$ *Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe.*

$b)$ *Existe $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a g en (a,b).*

Entón

$i)$ *Existe $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en (a,b).*

$ii)$ *f é derivable en (a,b) e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$.*

Demostración. Empecemos probando o apartado $i)$. En base ao criterio de Cauchy, é suficiente con ver que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en (a,b).

Primeiro, obsérvese que como $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é converxente, entón é unha sucesión de Cauchy, así que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N_1$, entón

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, como $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente en (a,b), cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en (a,b), así que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq N_2$, entón

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \forall x \in (a,b). \tag{3.9}$$

Sexa agora $x \in (a,b)$ arbitrario. Aplicando o teorema do valor medio á diferenza $f_m - f_n$ no intervalo con extremos x_0 e x, concluímos que existe $y \in (a,b)$ tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\left(f_m'(y) - f_n'(y)\right).$$

Tomando valores absolutos e aplicando a desigualdade triangular obtemos que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)\left|f_m'(y) - f_n'(y)\right|.$$

Entón, usando (3.8) e (3.9), temos que para calquera $m, n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall x \in (a,b),$$

é dicir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme en (a,b). Polo tanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a certa función f en (a,b), o que proba $i)$.

A continuación demostramos $ii)$. Fixémonos primeiro que como as funcións f_n son continuas en (a,b) e a converxencia é uniforme, a función f é continua en (a,b).

Vexamos que existe a derivada de f nun punto $c \in (a,b)$ arbitrariamente fixado. De novo, polo Criterio de Cauchy, como $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente en (a,b), dado $\varepsilon > 0$ existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq M_1$, implica que

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in (a,b).$$

Aplicando o teorema do valor medio a $f_m - f_n$ no intervalo con extremos c e x, deducimos que existe $z \in (a,b)$ tal que

$$f_m(x) - f_n(x) - (f_m(c) - f_n(c)) = (x-c)\left(f'_m(z) - f'_n(z)\right).$$

Polo tanto, se $x \neq c$ e $m,n \geq M_1$, temos que

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| = |f'_m(z) - f'_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando límites cando m tende a infinito obtemos que

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para } x \neq c,\ n \geq M_1. \tag{3.10}$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(c) = g(c)$, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq M_2$, entón

$$|f'_n(c) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.11}$$

Denotemos por $M = \max\{M_1, M_2\}$. Como existe $f'_M(c)$ e, ademais,

$$f'_M(c) = \lim_{x\to c} \frac{f_M(x) - f_M(c)}{x-c},$$

existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-c| < \delta$, entón

$$\left|\frac{f_M(x) - f_M(c)}{x-c} - f'_M(c)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Usando (3.10), (3.11) e (3.12) obtemos que se $0 < |x-c| < \delta$, daquela

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| &\leq \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_M(x)-f_M(c)}{x-c}\right| \\ &\quad + \left|\frac{f_M(x)-f_M(c)}{x-c} - f'_M(c)\right| \\ &\quad + |f'_M(c) - g(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

isto é, existe

$$f'(c) := \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = g(c).$$

Como $c \in (a,b)$ é arbitrario, $f' = g$ en (a,b). $\square$

Cuestión 6. Seguen a ser certas as conclusións do Teorema 6 se substituímos o intervalo limitado (a,b) por $\mathbb{R}$?

2. Series funcionais

Ao igual que pasaba coas series numéricas, as *series funcionais* defínense a partir das correspondentes sucesións. Entre as motivacións para o seu estudo, podemos citar polo menos as dúas seguintes:

- As series funcionais permiten aproximar unha función dada por outras que resultan máis sinxelas á hora de realizar as operacións de integración e derivación, como poden ser polinomios ou funcións trigonométricas.
- As series funcionais poden verse como un instrumento para construír novas funcións.

Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. A partir da sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, construímos unha nova sucesión funcional, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Definición 6. O par de sucesións $(\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ denomínase *serie funcional* e denotarase por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. A sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a *sucesión de sumas parciais* da serie.

Sexa $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converxe puntualmente* a f en A se a sucesión de sumas parciais $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é puntualmente converxente a f en A. Equivalentemente, se para cada $x \in A$, a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é converxente a $f(x)$.

Diremos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é *absolutamente converxente* en A se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ é puntualmente converxente en A, é dicir, se para cada $x \in A$ a serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é absolutamente converxente.

A serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dise *condicionalmente converxente* se é puntualmente converxente, pero non é absolutamente converxente.

Diremos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converxe uniformemente* a f en A se a sucesión de sumas parciais $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente converxente a f en A.

Cuestión 7. Obviamente, tanto a converxencia absoluta como a uniforme implican a converxencia puntual, mentres que é fácil ver que o recíproco non é certo. Existe relación entre a converxencia absoluta e a converxencia uniforme?

O seguinte resultado é consecuencia inmediata do análogo para sucesión funcionais.

Teorema 7 (Condición de Cauchy para a converxencia uniforme de series funcionais). *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Equivalen:*

$a)$ *A serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente converxente en A.*

$b)$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \,|\, n \geq N, \, n \in \mathbb{N} \implies \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) \right| < \varepsilon \; \forall x \in A, \forall p \in \mathbb{N}.$

Como resultado da condición de Cauchy anterior, pode probarse a seguinte condición necesaria para a converxencia uniforme dunha serie funcional, que resulta de grande utilidade práctica.

Cuestión 8. Proba que se a serie funcional $\sum f_n$ converxe uniformemente en $A \subset \mathbb{R}$, entón a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente en A á función identicamente nula.

É certo o recíproco?

A continuación presentamos un resultado que proporciona unha condición suficiente para garantir tanto a converxencia uniforme como a converxencia absoluta dunha serie funcional.

Teorema 8 (Criterio maiorante de Weierstrass). *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se existe unha sucesión de números reais non negativos, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que*

$a)$ *para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in A$;*

$b)$ *a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é converxente;*

entón a serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniforme e absolutamente en A.

Demostración. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é converxente, polo criterio de Cauchy para series numéricas, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, entón

$$\left| \sum_{k=1}^{p} M_{n+k} \right| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, temos que para calquera $x \in A$,

$$\left| \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{p} M_{n+k} = \left| \sum_{k=1}^{p} M_{n+k} \right|,$$

de onde se deduce que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ cumpre a condición de Cauchy para a converxencia uniforme e, polo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente en A.

Ademais, a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ tamén cumpre a condición de Cauchy, así que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe absolutamente. $\square$

Exemplo 11. A serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2x)}{n^2}$ converxe absoluta e uniformemente en $\mathbb{R}$. Unha *maiorante numérica* da serie funcional dada é a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que é converxente.

Como consecuencia dos resultados para sucesións funcionais, obtemos os seguintes sobre a transmisibilidade da continuidade, a derivabilidade e a integrabilidade dos termos dunha serie funcional.

Teorema 9. *Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente a f en A e cada f_n é continua en $x_0 \in A$, entón f é continua en $x_0 \in A$.*

Teorema 10. *Sexan $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente a f en $[a,b]$ e f_n é Riemann-integrable en $[a,b]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entón f tamén é Riemann-integrable en $[a,b]$. Ademais,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Teorema 11. *Sexan $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funcións derivables en (a,b) tales que*

$a)$ *Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que a serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converxe.*

$b)$ *Existe unha función g tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converxe uniformemente a g en (a,b).*

Entón,

$i)$ *Existe unha función f tal que a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente a f en (a,b).*

$ii)$ *f é derivable en (a,b) e, ademais, $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$.*

2.1. Series de potencias

Agora centrámonos nun caso particular de series funcionais especialmente relevantes: as *series de potencias*.

Definición 7. Unha *serie de potencias* de centro $x_0 \in \mathbb{R}$ é unha serie funcional da forma $f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, onde $f_0, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funcións definidas como

$$f_0(x) = a_0, \qquad f_n(x) = a_n(x - x_0)^n,$$

para certos números reais a_0 e a_n, $n \in \mathbb{N}$.

A sucesión de números reais $\{a_n\}_{n\geq 0}$ denomínase *sucesión dos coeficientes da serie de potencias* e o coeficiente a_0 chámase *termo independente da serie*.

Usaremos a notación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ para referirnos á serie funcional anterior.

A cada serie de potencias, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, asociarémoslle un valor $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ denominado *raio de converxencia da serie*, que se define como

$$R = \frac{1}{\lambda} \equiv \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

A expresión anterior coñécese como *Fórmula de Cauchy-Hadamard* para o raio de converxencia e sobreentenderase que $R = 0$ se $\lambda = +\infty$ e $R = +\infty$ se $\lambda = 0$.

O intervalo aberto $(x_0 - R, x_0 + R)$ denomínase *intervalo de converxencia da serie*.

Teorema 12. *Sexa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ unha serie de potencias de centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e sexa $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ o seu raio de converxencia. Entón,*

$i)$ *Se $R = 0$, a serie converxe unicamente no punto x_0.*

$ii)$ *Se $0 < R < +\infty$, a serie converxe absolutamente no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e diverxe no conxunto $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > R\}$.*

$iii)$ *Se $R = +\infty$, a serie converxe absolutamente en $\mathbb{R}$.*

Ademais, a serie converxe uniformemente en cada subconxunto compacto do intervalo de converxencia.

Demostración. Polo criterio da raíz, para cada $x \in \mathbb{R}$ a serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

converxe absolutamente se

$$\operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} < 1$$

e diverxe se

$$\operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} > 1.$$

Se $R = 0$, é dicir, se $\lambda = \operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, entón

$$\operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} = \begin{cases} 0, & \text{se } x = x_0, \\ +\infty, & \text{se } x \neq x_0, \end{cases}$$

así que a serie numérica é diverxente para calquera $x \neq x_0$.

Se $R = +\infty$, isto é, se $\lambda = \operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, entón

$$\operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} = |x-x_0| \operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

así que a serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$, converxe absolutamente.

Finalmente, se $0 < R < +\infty$, temos que

$$\operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} = |x-x_0| \operatorname*{lím\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

se, e só se,

$$|x-x_0| < \frac{1}{\lambda} = R.$$

Polo tanto, a serie converxe absolutamente en (x_0-R, x_0+R) e diverxe no conxunto $\mathbb{R} \setminus [x_0-R, x_0+R]$.

Para probar que a converxencia é uniforme en cada subconxunto compacto do intervalo de converxencia usaremos o criterio maiorante de Weierstrass.

Sexa K un conxunto compacto contido en (x_0-R, x_0+R) e definamos a aplicación continua $h : K \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = |x-x_0|\,.$$

Ao ser K compacto, h acada os seus valores máximo e mínimo absolutos en K, así que existe $p \in K$ tal que

$$h(x) = |x-x_0| \leq h(p) = |p-x_0| \qquad \forall\, x \in K.$$

Polo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n|\,|x-x_0|^n \leq |a_n|\,|p-x_0|^n \qquad \forall\, x \in K.$$

Ademais, como $p \in K \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, a serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|p - x_0|^n$ é converxente. O criterio maiorante de Weierstrass permite concluír entón que a serie de potencias converxe uniformemente en K. □

Observación 3. Se $0 < R < +\infty$, o comportamento da serie nos puntos extremos do intervalo de converxencia $(x_0 - R, x_0 + R)$ depende dos coeficientes da serie considerada.

As series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ teñen raio de converxencia $R = 1$, así que o seu intervalo de converxencia é $(-1, 1)$. Porén, as tres series converxen puntualmente en conxuntos distintos: $(-1, 1)$, $[-1, 1)$ e $[-1, 1]$, respectivamente.

Se denotamos por C ao campo de converxencia puntual da serie, isto é, o conxunto de puntos nos que a serie converxe puntualmente, tense que

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subset C \subset [x_0 - R, x_0 + R].$$

Observación 4. En xeral non se poderá garantir que a serie de potencias converxa uniformemente en todo o intervalo de converxencia. Por exemplo, a serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ non converxe uniformemente en $(-1, 1)$.

Observación 5. Para calquera sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de termos non nulos tense que

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

así que se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

entón

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

Polo tanto, se os coeficientes dunha serie de potencias son non nulos e

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

podemos calcular dun xeito alternativo o raio de converxencia da serie como

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Obsérvese tamén que o centro x_0 da serie de potencias non xoga un papel relevante á hora de estudar o seu intervalo de converxencia, polo que non será restrictivo traballar con series de potencias centradas na orixe.

Ademais, é oportuno mencionar que as series de potencias converxentes nun único punto non serán de interese e denominaranse *series de potencias dexeneradas*.

A converxencia uniforme das series de potencias non dexeneradas nos subconxuntos compactos dos seus intervalos de converxencia permite concluír que as funcións definidas por estas series son moi regulares, como veremos nos resultados que seguen.

Teorema 13. *Sexan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *unha serie de potencias con intervalo de converxencia* (x_0-R, x_0+R) *e* $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ *a función suma*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Entón f *é unha función continua en* (x_0-R, x_0+R).

Demostración. Sexa $\overline{x}\in(x_0-R,x_0+R)$ arbitrario, vexamos que f é continua en $\overline{x}$. Obsérvese que existe un intervalo compacto, $K_{\overline{x}}$, tal que $\overline{x}\in K_{\overline{x}}\subset(x_0-R,x_0+R)$.

Como os termos da serie funcional, $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, son funcións continuas en $K_{\overline{x}}$ e a serie de potencias converxe uniformemente en $K_{\overline{x}}$, obtemos en base ao Teorema 9 que a función suma, f, é continua en $K_{\overline{x}}$ (e, en particular, en $\overline{x}$). $\square$

Teorema 14. *Sexan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *unha serie de potencias con intervalo de converxencia* (x_0-R, x_0+R) *e* $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ *a función suma*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Se $a,b\in(x_0-R,x_0+R)$, *entón*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n(x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left[(b-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}\right].$$

Demostración. O resultado séguese de xeito inmediato a partir do Teorema 10 ao ser os termos da serie funcional, $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, funcións Riemann-integrables en $[a,b]$ e a converxencia da serie uniforme no intervalo compacto $[a,b]$. $\square$

Cuestión 9. Proba que a serie de potencias obtida derivando termo a termo unha serie de potencias non dexenerada ten o mesmo intervalo de converxencia cá serie orixinal.

Se o raio de converxencia é finito, podemos garantir que as dúas series teñen o mesmo comportamento nos extremos do intervalo de converxencia?

Teorema 15. *Sexan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *unha serie de potencias con intervalo de converxencia* (x_0-R, x_0+R) *e* $f : (x_0-R, x_0+R) \to \mathbb{R}$ *a súa función suma. Entón* $f \in \mathcal{C}^{\infty}((x_0-R, x_0+R))$ *e, ademais, para cada* $k \in \mathbb{N}$*, cúmprese que*

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n(x-x_0)^{n-k} \qquad \forall\, x \in (x_0-R, x_0+R). \tag{3.13}$$

Demostración. Primeiro, vexamos que f é derivable en (x_0-R, x_0+R) e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1} \qquad \forall\, x \in (x_0-R, x_0+R). \tag{3.14}$$

Sexa $\overline{x} \in (x_0-R, x_0+R)$ arbitrario e $s > 0$ tal que $[\overline{x}-s, \overline{x}+s] \subset (x_0-R, x_0+R)$. Obsérvese que a serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converxe puntualmente no intervalo $(\overline{x}-s, \overline{x}+s)$ e a serie das derivadas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1},$$

que ten o mesmo raio de converxencia, converxe uniformemente no intervalo compacto $[\overline{x}-s, \overline{x}+s]$ contido en (x_0-R, x_0+R). Polo tanto, o Teorema 11 implica que f é derivable en $\overline{x}$ e

$$f'(\overline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(\overline{x}-x_0)^{n-1}.$$

Como $\overline{x}$ foi tomado arbitrariamente, f é derivable en (x_0-R, x_0+R) e cúmprese (3.14).

Repetindo o proceso, pode probarse usando o método de indución que a función f é infinitamente derivable en (x_0-R, x_0+R) e cúmprese (3.13). □

Corolario 1. *Nas hipóteses do teorema anterior, temos que*

$$a_0 = f(x_0), \quad a_k = \frac{f^{k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Demostración. Polo resultado anterior, $f \in \mathcal{C}^{\infty}((x_0-R, x_0+R))$ e

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n(x-x_0)^{n-k} \qquad \forall\, x \in (x_0-R, x_0+R).$$

Tomando $x = x_0$ na igualdade anterior obtemos que

$$f^{k)}(x_0) = k(k-1)\cdot(k-k+1)\, a_k = k!\, a_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

e $a_0 = f(x_0)$. □

Polo tanto, se f é a función definida pola serie de potencias non dexenerada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, no seu intervalo de converxencia a serie ten que ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

En base a isto obtemos o seguinte resultado.

Teorema 16. *Sexan* $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ *(con* $x_0\in\mathbb{R}$ *e* $R>0$*) e* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *series de potencias tales que*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \qquad \forall\, x\in(x_0-R,x_0+R).$$

Entón $a_n=b_n$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

2.2. Series de Taylor e funcións analíticas

Se unha serie de potencias define unha función f no seu intervalo de converxencia (x_0-R,x_0+R), entón dedúcese que $f\in\mathcal{C}^\infty((x_0-R,x_0+R))$ e a serie é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{3.15}$$

Por outro lado, se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^\infty((a,b))$, e $x_0\in(a,b)$ ten sentido considerar a serie de potencias (3.15).

Definición 8. Sexa $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ unha función de clase $\mathcal{C}^\infty((a,b))$ e $x_0\in(a,b)$. A serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

denomínase *serie de Taylor* da función f centrada en x_0. Se $x_0=0$, a serie anterior coñécese como *serie de McLaurin*.

Unha cuestión que nos debemos formular é se nalgunha veciñanza de x_0 é válida a igualdade

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

é dicir, se a serie de Taylor representa a f nunha veciñanza de x_0. En xeral, a resposta é negativa, como amosa o seguinte exemplo.

Exemplo 12. Consideremos a función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x\neq 0,\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Cumpre que $f^{n)}(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, así que a súa serie de McLaurin representa á función identicamente nula. Porén f é distinta de 0 en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Se $r>0$ e $f\in\mathcal{C}^\infty((x_0-r,x_0+r))$, polo Teorema de Taylor, para cada $x\in(x_0-r,x_0+r)$, $x\neq x_0$, e cada $n\in\mathbb{N}$, existe un punto c entre x e x_0 tal que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-x_0)^n. \tag{3.16}$$

Polo tanto, unha condición necesaria e suficiente para que a serie de Taylor converxa a f é que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-x_0)^n=0.$$

Teorema 17. *Sexan $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo, $f:I\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^\infty(I)$ e $x_0\in I$. Se existen $r>0$ e $M\geq 0$ tales que para cada $n\in\mathbb{N}$,*

$$\left|f^{n)}(x)\right|\leq M^n \qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r)\cap I,$$

entón para cada $x\in(x_0-r,x_0+r)\cap I$ temos que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Demostración. Para cada $x\in(x_0-r,x_0+r)\cap I$ e cada $n\in\mathbb{N}$, polo Teorema de Taylor temos (3.16) e por hipótese $\left|f^{n)}(c)\right|\leq M^n$. Por outro lado, para calquera $A\in\mathbb{R}$ cúmprese que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A^n}{n!}=0$, así que do anterior obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-x_0)^n=0,$$

e polo tanto que a serie de Taylor converxe a $f(x)$. □

Non tódalas funcións de clase $\mathcal{C}^\infty$ poden ser representadas mediante as súas series de Taylor, o que motiva o seguinte concepto.

Definición 9. Sexan $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo aberto, $x_0\in I$ e $f:I\to\mathbb{R}$. Diremos que f é *analítica en* x_0 se existen $r>0$ e unha serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ tal que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r).$$

Diremos que f é *analítica en* I se é analítica en cada punto de I.

Cuestión 10. Existe algunha función f que sexa analítica na orixe e tal que $f(0) = 0$ e $f^{n)}(0) = (n!)^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$?

Os resultados que seguen xustifican que a función suma dunha serie de potencias é unha función analítica.

Teorema 18. *Sexan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *unha serie de potencias non dexenerada con intervalo de converxencia* $(-R, R)$ *e* $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *a función suma*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Entón para cada $x_0 \in (-R, R)$ *existe* $r > 0$ *tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \qquad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Corolario 2. *Sexa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *unha serie de potencias non dexenerada con intervalo de converxencia* $(-R, R)$*. Entón a función suma* $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n,$$

é analítica en $(-R, R)$*.*

METODOLOXÍA E ACTIVIDADES PROPOSTAS

O desenvolvemento da unidade didáctica levarase a cabo por medio de tres tipos de clases: expositivas, laboratorios e seminarios. Referirémonos ás dúas últimas como clases interactivas. A continuación detallamos a metodoloxía empregada segundo o tipo de clase.

En xeral, para as clases expositivas empregarase a lección maxistral, pero fomentando a participación activa por parte do alumnado durante o seu desenvolvemento. O docente presentará os contidos teóricos da materia, que ilustrará con diversos exemplos, e suscitará cuestións para a discusión e afondamento por parte dos estudantes.

Nas clases interactivas o docente servirá de guía propoñéndolles aos estudantes exercicios e/ou cuestións teórico-prácticas para a súa resolución. Serán estes últimos, coa súa participación, os que leven o peso do desenvolvemento da clase. Nos laboratorios (en grupos máis reducidos cós seminarios) procurarase que os estudantes traballen dun xeito máis autónomo, corrixindo eles mesmos os exercicios. En ocasións, tamén se formarán grupos para a súa resolución de xeito colaborativo. Nalgunhas sesións de seminario, propoñeranse tarefas que logo se recollerán e se terán en conta na avaliación continua da materia.

Finalmente, o alumnado disporá de titorías individualizadas para resolver dúbidas relacionadas coa materia ou para discutir cuestións concretas sobre algunha tarefa proposta.

Para o desenvolvemento da metodoloxía anterior, empregaranse diferentes actividades e exercicios. Algunhas cuestións para a discusión co alumnado xa foron integradas dentro da sección relativa aos contidos básicos da materia. Outras, de carácter máis práctico e dirixidas ás clases interactivas, poden atoparse no boletín de exercicios do anexo final. Proporcionaránselles aos estudantes tanto os apuntamentos cos contidos básicos coma boletíns de exercicios para realizar na clase e, tamén, para que poidan afianzar os contidos fóra dela.

Para finalizar esta sección, presentamos algunha das tarefas propostas para a súa resolución na clase e valoradas na avaliación continua.

Actividade 1

Proba o seguinte resultado:

Teorema. Supoñamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesións funcionais uniformemente converxentes a f e g en $A \subset \mathbb{R}$, respectivamente. Se cada f_n e cada g_n son funcións limitadas en A, entón a sucesión $\{f_n \cdot g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a $f \cdot g$ en A.

Exercicio. Estuda se as seguintes afirmacións son certas ou falsas:

1. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións uniformemente converxente a unha función f nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$. Entón a sucesión $\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f^2 en A.

2. Sexan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións uniformemente converxente a unha función f nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$ e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais converxente a $\lambda \in \mathbb{R}$. Entón $\{\lambda_n f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión uniformemente converxente en A a λf.

3. Supoñamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesións funcionais uniformemente converxentes a f e g nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$, respectivamente. Sexan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entón a sucesión $\{\alpha f_n + \beta g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a $\alpha f + \beta g$ en A.

Actividade 2

Exercicio. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións continuas en $[0,\infty)$ uniformemente converxente a unha función f en $[0, M]$ para calquera $M > 0$. Entón estuda se as seguintes afirmación son certas ou falsas:

1. A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en $[0,\infty)$.

2. A función f é continua no intervalo $[0,\infty)$.

Exercicio. Razoa se o seguinte enunciado é verdadeiro ou falso. Xustifica a resposta.

Sexan $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe puntualmente a certa función f en $[a,b]$ e, ademais, a converxencia é uniforme en (a,b). Entón $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en $[a,b]$.

Actividade opcional

Proba o seguinte resultado usando os *polinomios de Bernstein*.

Teorema (Weierstrass)**.** Sexa $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua. Entón existe unha sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada función f_n é un polinomio, que converxe uniformemente á función f en $[a,b]$.

En relación ao resultado anterior xustifica as seguintes cuestións:

1. A función exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ non é o límite uniforme en $\mathbb{R}$ dunha sucesión de polinomios.

2. O teorema de aproximación de Weierstrass deixa de ser certo se cambiamos o intervalo pechado $[a,b]$ por un intervalo aberto (a,b).

AVALIACIÓN

Esta unidade didáctica enmárcase dentro da materia Series funcionais e Integración de Riemann en varias variables reais e, polo tanto, a súa avaliación final non será específica para ela, senón que estará integrada na propia da materia. Nela terase en conta a avaliación continua e mais un exame final. A avaliación continua levarase a cabo por medio de tarefas e/ou exercicios (individuais ou grupais), algunhas das cales serán realizadas polos estudantes dentro da aula e outras fóra da mesma. Tamén se contempla a posibilidade de realizar unha proba parcial de carácter similar ao exame final. Ademais, o docente proporá actividades opcionais adicionais, que se ben non serán precisas para acadar a máxima cualificación na avaliación continua, poderán servir de motivación para esa parte do alumnado con grandes inquietudes sobre a materia a tratar. A modo de exemplo destas tarefas poden verse as actividades 1 e 2 e a actividade opcional da sección relativa a actividades propostas.

Para o cómputo da cualificación final do alumnado (CF) empregarase a seguinte fórmula:

$$\text{CF} = \text{máx}\{0.4\,\text{AC} + 0.6\,\text{EF},\ \text{EF}\},$$

sendo AC a nota de avaliación continua e EF a nota do exame final. Á súa vez a cualificación da avaliación continua repartirase do seguinte xeito:

- Tarefas realizadas na aula (50 %).
- Proba parcial (30 %).
- Actividades entregadas e realizadas fóra da aula (20 %).

Ao tratarse da segunda unidade didáctica da materia, non está previsto realizar unha avaliación inicial para ela, pois o grao de adquisición dos contidos e das competencias por parte dos estudantes xa será coñecido.

Con respecto á avaliación procesual, levarase a cabo de forma continua durante todo o período en que se imparta a unidade didáctica, por medio da participación nas clases e dos resultados obtidos nas tarefas entregadas. O obxectivo será recoller información sobre as dificultades dos estudantes durante o proceso de ensino-aprendizaxe e sobre o grao de adquisición dos contidos, para poder adaptar en cada momento a planificación da unidade didáctica, e da materia en xeral, á situación real do proceso educativo.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. M. (1977) *Análisis Matemático*. Ed. Reverté.

Bartle, R. G. (1976) *The Elements of Real Analysis*. Wiley.

Bartle, R. G. e Sherbert, D. R. (2010) *Introducción al Análisis Matemático de una variable*. Limusa Wiley.

Bourchtein, A. e Bourchtein, L. (2017) *Counterexamples on uniform convergence. Sequences, series, functions and integrals*. Wiley.

ANEXO: BOLETÍN DE EXERCICIOS

1. Estuda a converxencia puntual das seguintes sucesións funcionais $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^2+nx}{n}$.

(c) $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$.

(d) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.

(e) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$.

(f) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$.

Estuda a converxencia uniforme das sucesións anteriores nos conxuntos: $A_1 = (0,\infty)$ e $A_2 = [0,1]$.

2. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Proba que as seguintes afirmacións son equivalentes:

$a)$ A sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converxe uniformemente a f en A.

$b)$ Existen un número $\varepsilon_0 > 0$, unha subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e unha sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tales que $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

3. Dada unha función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, proba que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se, e só se, a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dada por $f_n(x) = f(x+n)$, converxe uniformemente á función constante igual a L en $[0,+\infty)$.

4. Sexa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ unha función continua tal que $f(1) = 0$. Proba que a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(x) = x^n f(x)$ converxe uniformemente en $[0,1]$ á función identicamente nula.

5. Estuda a converxencia uniforme das seguintes sucesións funcionais nos conxuntos $A_1 = [a,\infty)$ (onde $a > 0$) e $A_2 = (0,1]$:

(a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{(1+n^2x^2)\ln n}$.

6. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións uniformemente converxente a unha función f en $A \subset \mathbb{R}$. Proba que se as funcións f_n son continuas en A e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de puntos de A converxente a $x_0 \in A$, entón $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

É suficiente con que a converxencia sexa puntual para que o resultado anterior sexa certo?

7. Sexan $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a unha función f en A. Supoñamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = y_n$. Proba que a sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é converxente.

8. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións uniformemente converxente a f en A. Estuda a veracidade das seguintes afirmacións:

$a)$ Se cada f_n é lipschitziana en A, entón f é lipschitziana en A.

$b)$ Se cada f_n é K-lipschitziana en A para certa constante $K \geq 0$, entón f é K-lipschitziana en A.

9. Proporciona un exemplo de sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}([0,1])$ cumprindo que $\|f_n\|_\infty \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que non ten ningunha subsucesión uniformemente converxente.

10. Estuda a converxencia puntual e uniforme das seguintes series funcionais:

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{n^2\sqrt{n}}.$ $(b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+nx^2)}.$ $(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(3^n x)}{2^n}.$

$(d)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx^2)}{n!}.$ $(e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}.$ $(f)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{x^2+n^4}.$

$(g)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{x^2+n^2}.$ $(h)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}.$ $(i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}.$

11. Dada a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $f_n(x) = \operatorname{sen}(x)\cos^{n-1}(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$a)$ Obtén a función suma da serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

$b)$ Estuda a converxencia uniforme da serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en cada intervalo $[a, \pi/2]$, con $0 \leq a < \pi/2$.

12. Dada a sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$:

$a)$ Obtén o maior conxunto A onde a serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe puntualmente.

$b)$ Proba que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converxe uniformemente en cada conxunto $[a, \infty)$, con $a > 0$.

$c)$ Se denotamos por f a función suma da serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, obtén a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad 0 < a < b \leq +\infty.$$

$d)$ Obtén unha primitiva da función f e a propia función f.

13. Sexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función derivable en $\mathbb{R}$ con $|f'(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estuda a converxencia puntual e uniforme da serie $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(x/n^2\right)$.

14. Obtén o intervalo de converxencia e o conxunto de puntos onde converxen as seguintes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1)x^n$. (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$. (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+n}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$. (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}x^n$. (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n(3^n-1)}$.

15. Calcula o intervalo de converxencia para as series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Obtén unha expresión para a función suma das series anteriores e calcula o valor da serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}.$$

16. Obtén a serie de Taylor das seguintes funcións en $x_0 = 0$:

(a) $f(x) = \ln(1+x)$. (b) $f(x) = \arctan(x)$. (c) $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.

Estuda se as funcións anteriores son analíticas.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA