MATERIA
Continuidade e derivabilidade de funcións dunha variable real

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas

unidade didáctica
4

Ciencias Experimentais

Derivabilidade

Lucía López Somoza

Área de Análise Matemática
Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
usc.es/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155238

MATERIA: Continuidade e derivabilidade de funcións dunha variable real
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade I: Preliminares topolóxicos
Abertos, pechados, puntos de acumulación, compactos e conexos en $\mathbb{R}$

Unidade II: Límites
Límite dunha función nun punto
Límites laterais
Límites infinitos e no infinito
Cálculo de límites. Indeterminacións

Unidade III: Continuidade
Continuidade dunha función nun punto. Continuidade secuencial. Funcións continuas: Propiedades
Teoremas de Weierstrass e Bolzano
Continuidade das funcións monótonas e das súas inversas
Continuidade uniforme. Teorema de Heine. Teorema da extensión continua. Criterios suficientes e criterios necesarios para a continuidade uniforme

Unidade IV: Derivabilidade
Derivada e derivadas laterais dunha función nun punto
Interpretacións xeométrica e física da derivada
Regras de derivación
Comportamento local das funcións derivables. Puntos críticos. Teorema de Darboux
Teorema do valor medio. Criterio de monotonía nun intervalo
Regras de L'Hôpital: Aplicación ao cálculo de indeterminacións

Unidade V: Derivabilidade de orde superior
Derivadas de orde superior
Concavidade e convexidade
O polinomio de Taylor. Resto da fórmula de Taylor. Aplicacións: Cálculos aproximados

Unidade VI: Periodicidade
Combinacións lineais diofánticas
Funcións periódicas. Existencia do período mínimo. Períodos da suma e produto de funcións

ÍNDICE

1. PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica forma parte da programación da materia obrigatoria "Continuidade e derivabilidade de funcións reais dunha variable real", do primeiro curso do Grao en Matemáticas. Esta materia forma parte do Módulo de Análise Matemática nunha variable e impártese no primeiro curso da titulación, cunha carga de 6 créditos ECTS.

Os contidos desta materia son ferramentas esenciais para o desenvolvemento do cálculo, o cal xoga un papel importante en moitas áreas diversas como poden ser física, química, economía, enxeñaría ou informática e, por suposto, nas matemáticas.

Ademais, esta materia é fundamental para o desenvolvemento posterior do cálculo en varias variables, o cal terá lugar nas materias "Diferenciación de funcións de varias variables reais" e "Series funcionais e integración de Riemann en varias variables reais" do segundo curso do Grao en Matemáticas.

Nesta unidade didáctica estúdase o concepto de derivabilidade de funcións dunha variable real. Este concepto é familiar para os alumnos, que xa traballan con derivadas nos estudos previos á universidade. Por este motivo, o obxectivo principal da unidade non é tanto introducir conceptos novos, senón dotalos do formalismo e rigor matemático que precisa coñecer o alumnado do Grao en Matemáticas. Deste xeito, amais dos contidos novos que se engadan aos xa coñecidos polo alumnado, esta unidade contribuirá ao desenvolvemento das capacidades de razoamento e de formalización de demostracións matemáticas.

2. COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Ademais de contribuír a acadar as competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título do Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela, nesta materia traballaranse as seguintes competencias específicas:

- CE1 Comprender e utilizar a linguaxe matemática.
- CE2 Coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática.
- CE3 Idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas.
- CE4 Identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.
- CE5 Asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos.
- CE6 Saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais.
- CE9 Utilizar aplicacións informáticas de análise estatístico, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en Matemáticas e resolver problemas.

Enuméranse a continuación os obxectivos que se espera que os alumnos acaden ao final da presente unidade didáctica:

- Comprender o concepto de derivabilidade dunha función real de variable real e ser quen de traballar con el de forma intuitiva, xeométrica e rigorosa.
- Formular problemas de optimización e aplicar os métodos estudados para resolvelos.
- Coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos relativos ao cálculo diferencial.
- Idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e estratexias para confirmalas ou negalas.
- Identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

3. METODOLOXÍA

Para levar a cabo o desenvolvemento desta unidade didáctica seguirase unha metodoloxía activa, coa que se procurará fomentar a participación do alumnado.

O desenvolvemento da unidade levarase a cabo en tres tipos diferentes de clases: expositivas, seminarios e laboratorios.

Nas clases expositivas o docente exporá a parte teórica da unidade, combinando as leccións maxistrais con outras nas que se fomentará a participación do alumnado. Procurarase ilustrar os contidos teóricos con exemplos, para facelos máis comprensibles. Asemade proporanse cuestións para implicar aos estudantes na súa discusión.

Os seminarios dedicaranse á resolución de exercicios prácticos e á discusión entre o profesor e o alumnado de diversas cuestións de carácter teórico-práctico. Abordaranse algúns problemas e aspectos da materia non tratados nas clases expositivas e analizaranse con detalle aquelas cuestións que adoitan resultar de máis difícil comprensión para o alumnado. A participación activa do alumnado será fundamental nestas sesións.

Por último, os laboratorios centraranse na resolución de exercicios por parte do alumnado, procurando que nestas sesións os alumnos traballen de forma máis autónoma. Nalgunha das sesións de laboratorio proporase que os alumnos traballen en pequenos grupos supervisados polo profesorado para tentar resolver problemas máis complexos.

Ademais do anterior, o alumnado terá ao seu dispor sesións de titorías individualizadas ou en grupos moi reducidos. Estas titorías terán un carácter voluntario e serán solicitadas ao profesor polo alumno cando este último desexe tratar cuestións concretas ou resolver dúbidas da materia.

4. CONTIDOS BÁSICOS

Introduciranse a continuación os contidos básicos a desenvolver na presente unidade didáctica.

4.1. O concepto de derivada

Dedicaremos esta sección a definir o concepto de derivada dunha función real de variable real.
Definición 1. Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto de acumulación de A. Dise que f é derivable en x_0 se existe e é un número real o seguinte límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cando f é derivable en x_0, o valor do límite anterior recibe o nome de derivada de f en x_0 e denótase por $f'(x_0)$.
Definición 2. Dise que unha función é derivable se o é en cada punto do seu dominio.
Observación 1. É habitual empregar tamén o seguinte límite (equivalente ao da Definición 1) para definir a derivada da función f no punto x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definición 3. Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función e $B \subset A$ o subconxunto de puntos de A onde f é derivable. Defínese a función derivada de f e denótase por f' ou $f^{(1)}$ como a función que asigna a cada punto de B o valor da derivada de f en dito punto, é dicir,

$$\begin{aligned} f'\colon B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

Exemplo 1. A función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é derivable no seu dominio, sendo a súa función derivada $f'(x) = \cos x$. En efecto, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario tense que

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} = \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0. \end{aligned}$$

Considerando límites laterais pódense definir as derivadas laterais dunha función nun punto.
Definición 4. Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto de acumulación de $A \cap (-\infty, x_0)$. Dise que f é derivable pola esquerda en x_0 se existe e é un número real o seguinte límite:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cando f é derivable pola esquerda en x_0, o valor do límite anterior recibe o nome de derivada pola esquerda de f en x_0 e denótase por $f'_-(x_0)$.

Definición 5. Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto de acumulación de $A \cap (x_0, \infty)$. Dise que f é derivable pola dereita en x_0 se existe e é un número real o seguinte límite:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cando f é derivable pola esquerda en x_0, o valor de límite anterior recibe o nome de derivada pola esquerda de f en x_0 e denótase por $f'_+(x_0)$.

Observación 2. Non se deben confundir as derivadas laterais de f ($f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$) cos límites laterais da función derivada en x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$).

Dos resultados xa vistos para límites dedúcese de forma directa o seguinte resultado.

Corolario 1. *Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto de acumulación de $A \cap (-\infty, x_0)$ e $A \cap (x_0, \infty)$. Entón existe $f'(x_0)$ se e só se* existen $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ *e son iguais.*

Teorema 1. *Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é derivable en x_0, entón é continua neste punto.*

Demostración. En efecto, tense que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Observación 3. O recíproco do teorema anterior non é certo. Un exemplo é a función $f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$, que é continua en todo punto pero non é derivable en 0.

4.2. Interpretacións do concepto de derivada

4.2.1. Interpretación xeométrica do concepto de derivada

O concepto de derivada xorde de forma natural no proceso xeométrico do cálculo da recta tanxente a unha curva dada. Neste sentido, pódese definir a recta tanxente a unha curva como a posición límite das rectas secantes á curva para a cal os puntos de corte coa curva se achegan ata coincidir.

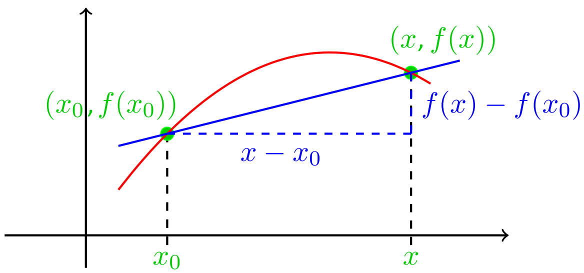
Sexa pois $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función e $x_0 \in A$ un punto de acumulación de A. O noso obxectivo é estudar se a gráfica da función f admite recta tanxente no punto $(x_0, f(x_0))$, é dicir, se as rectas secantes á gráfica de f pasando polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, con $x \neq x_0$, se achegan a unha posición límite cando x se aproxima a x_0.

Convén aclarar neste momento que entendemos pola posición límite das rectas secantes dado que aínda non definimos "límites de rectas". Neste caso, posto que unha recta no plano queda totalmente determinada se coñecemos a súa pendente e un punto polo que pasa, podemos falar do límite das pendentes das rectas secantes e considerar que se existe dito límite cando x tende a x_0 entón a posición límite das rectas secantes será a recta que pase polo punto $(x_0, f(x_0))$ e teña como pendente o límite das pendentes das rectas secantes.

Tal e como se pode ver na Figura 1, a recta secante á gráfica de f pasando polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ ten pendente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, polo que existirá recta tanxente á gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ se e só se existe o límite dos cocientes incrementais, é dicir,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Figura 1: Interpretación xeométrica dos cocientes incrementais.



Se os cocientes incrementais teñen límite cando x tende a x_0 entón a posición límite das secantes, é dicir, a recta tanxente á gráfica de f no punto $(x_0, f(x_0))$ é a recta de ecuación

$$y = f(x_0) + m\,(x - x_0),$$

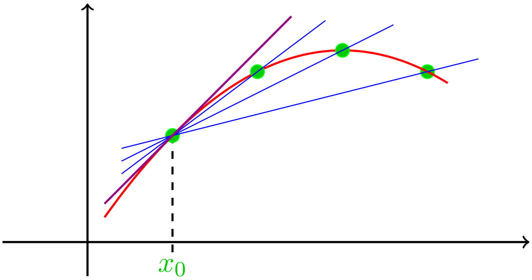
sendo

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Na Figura 2 represéntase a recta tanxente á gráfica da función no punto $(x_0, f(x_0))$ xunto con varias rectas secantes pasando por ese punto. Tal e como se observa, a medida que os puntos se aproximan a x_0, as pendentes das correspondentes rectas secantes (rectas azuis) aproxímanse á pendente da recta tanxente (pintada en cor morada).

Cabe comentar ademais que o feito de que na Figura 2 os puntos x que se aproximan a x_0 se atopen todos á dereita de x_0 é algo circunstancial e que estes puntos deben aproximarse a x_0 tanto pola esquerda como pola dereita, sempre que isto sexa posible.

Figura 2: Interpretación xeométrica da recta tanxente.



4.2.2. Interpretación física do concepto de derivada

Na definición de derivada, o cociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se denomina cociente incremental ou cociente de incrementos da función f no punto x_0. Este cociente, tal e como xa vimos, é a pendente da recta secante á curva $y = f(x)$ pasando polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Desde un punto de vista físico, podemos entender a función f como unha relación establecida do seguinte modo: a cada valor x dunha determinada magnitude (a variable independente) correspóndelle o valor $f(x)$ dunha segunda magnitude (a variable dependente). Neste caso, o cociente de incrementos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

correspóndese coa variación media da variable dependente en $[x_0, x] \cap A$ (en caso de que $x_0 < x$) ou ben en $[x, x_0] \cap A$ (se $x < x_0$). Noutras palabras, o cociente de incrementos representa a variación media da variable dependente cando a variable independente se move entre x_0 e x. Por exemplo, se a variable independente fose o tempo e a variable dependente o espazo percorrido por un móbil, o cociente de incrementos representaría a velocidade media á que se despraza o móbil durante un intervalo de tempo.

Seguindo con esta idea, posto que a derivada se define como o límite cando x tende a x_0 do cociente dos incrementos, habería que interpretar a derivada como a variación media da variable dependente nun intervalo arbitrariamente pequeno ou, o que é o mesmo, como a variación instantánea da variable dependente no punto x_0. No exemplo anterior, se a variable independente fose o tempo e a variable dependente o espazo percorrido por un móbil, a derivada representaría a velocidade instantánea á que se despraza o móbil nun certo instante de tempo.

Por este motivo, á derivada dunha función nun punto tamén se lle denomina razón instantánea de cambio da función *f* no punto dado, dado que serve para medir o cambio instantáneo da variable dependente con respecto á variable independente.

4.2.3. Interpretación da derivada como forma de aproximación lineal

Tal e como vimos, a derivabilidade da función f no punto x_0 equivale, por definición, á existencia dun número real $f'(x_0)$ tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Baixo esta hipótese de derivabilidade, a igualdade anterior pode expresarse de forma equivalente do seguinte modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\,(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

ou, o que é o mesmo,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0))}{x-x_0} = 0.$$

Neste sentido, poderíase dar a seguinte definición equivalente de derivabilidade.
Definición 6. Sexa $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0\in A$ un punto de acumulación de A. Dise que f é derivable en x_0 se existe un número real m tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+m\,(x-x_0))}{x-x_0} = 0.$$

En tal caso, ese valor real *m* recibe o nome de derivada de f en x_0 e denótase por $f'(x_0)$.

Cabe observar entón que unha recta arbitraria pasando polo punto $(x_0, f(x_0))$ é a gráfica da función

$$x\in\mathbb{R}\longrightarrow f(x_0)+m\,(x-x_0)$$

e que a recta tanxente á gráfica de f no punto $(x_0, f(x_0))$ é precisamente a gráfica da función

$$x\in\mathbb{R}\longrightarrow f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0). \tag{1}$$

Por este motivo, á vista do límite anterior, adóitase dicir que a recta tanxente a f en x_0 é, entre todas as rectas que pasan polo punto $(x_0, f(x_0))$, a que mellor aproxima a gráfica de f nas proximidades de deste punto ou, o que é o mesmo, que a función (1) é, localmente, a mellor aproximación lineal de f nunha veciñanza de x_0.

Recordamos a continuación a definición e caracterización das aplicacións lineais en $\mathbb{R}$.
Definición 7. Unha aplicación $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é lineal se cumpre que

$$f(\alpha\,x+\beta\,y)=\alpha\,f(x)+\beta\,f(y),\quad \forall\,\alpha,\,\beta\in\mathbb{R},\ x,\,y\in\mathbb{R}.$$

Proposición 1. *Sexa* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *unha aplicación. Son equivalentes:*

(a) f *é lineal.*

(b) Existe un (único) número real m tal que $f(x) = m\,x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Podemos reescribir entón a Definición 6 nos seguintes termos.

Definición 8. Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto de acumulación de A. Dise que f é derivable en x_0 se existe unha aplicación lineal $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))}{x - x_0} = 0.$$

En tal caso, esa aplicación lineal recibe o nome de aplicación diferencial de f en x_0 e denótase por $df(x_0)$.

Observación 4. Cando se define a derivabilidade en termos da definición anterior, é frecuente empregar o termo de “diferenciable” en lugar de “derivable”.

A caracterización das aplicacións lineais en $\mathbb{R}$, así como as diversas definicións de derivabilidade, fan evidente a relación entre a aplicación diferencial e a derivada de f en x_0. Esta relación é a seguinte

$$\begin{aligned} df(x_0)\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto df(x_0)(h) = f'(x_0)\,h. \end{aligned}$$

4.3. Regras do cálculo diferencial

Engádense nesta sección diversas regras para o cálculo de derivadas.

Proposición 2. *Sexan* f, g: $A \to \mathbb{R}$ *dúas funcións derivables nun punto* $x_0 \in A \cap A'$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. *Cúmprese que:*

(a) $f + g$ *é derivable en* x_0 *e, ademais,*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) $\lambda\, f$ *é derivable en* x_0 *e, ademais,*

$$(\lambda\, f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0).$$

(c) $f\,g$ *é derivable en* x_0 *e, ademais,*

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

(d) *se* $g(x_0) \neq 0$, *entón* $\frac{f}{g}$ *é derivable en* x_0 *e, ademais,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Demostración. (a) Dedúcese da propiedade de linealidade do límite:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$+ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0).$$

(b) Dedúcese da propiedade de linealidade do límite:

$$(\lambda f)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0} = \lambda \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda f'(x_0).$$

(c) Usando propiedades de límites tense o seguinte:

$$\begin{aligned}(f\,g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f\,g)(x)-(f\,g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x)-f(x)\,g(x_0)+f(x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} f(x)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} g(x_0)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= f(x_0)\,g'(x_0)+f'(x_0)\,g(x_0).\end{aligned}$$

(d) Usando propiedades de límites tense o seguinte:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)}}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \left(\frac{f(x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \left(\frac{f(x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \left(g(x_0)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\end{aligned}$$

Teorema 2 (Regra da cadea). *Sexan* $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *e* $g\colon B\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tales que* $f(A)\subset B$ *e sexa* $x_0\in A\cap A'$ *tal que* $f(x_0)\in B\cap B'$. *Se* f *é derivable en* x_0 *e* g *é derivable en* $f(x_0)$ *entón* $g\circ f$ *é derivable en* x_0 *e, ademais,*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0).$$

Demostración. Denotemos $y_0=f(x_0)$ e sexa $h\colon B\to\mathbb{R}$ a función definida por

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0, \\ g'(y_0), & y = y_0. \end{cases}$$

Como g é derivable en y_0, entón h é continua en y_0. Ademais, como f é continua en x_0, entón $h \circ f$ é continua en x_0, é dicir,

$$\lim_{x \to x_0} (h \circ f)(x) = g'(y_0).$$

Da definición de h obtemos a seguinte igualdade:

$$g(y) - g(y_0) = h(y)\,(y - y_0), \quad y \in B,$$

a cal se deduce da expresión de h para $y \neq y_0$ e cúmprese trivialmente para $y = y_0$.

Entón, tomando $x \in A$ e $y = f(x)$ tense que

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = h(f(x))\,(f(x) - f(x_0))$$

e, consecuentemente,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} h(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))\,f'(x_0).$$

□

Exemplo 2. Tendo en conta que $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, podemos empregar a regra da cadea para calcular a derivada da función $\cos x$. En particular, se $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ e $g(y) = \operatorname{sen} y$, tense que $(g \circ f)(x) = \cos x$ e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x) = \cos(f(x))\,f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x.$$

4.3.1. Derivación da función inversa

Estudaremos nesta sección a derivabilidade de funcións que se poidan obter como inversas de funcións derivables, obtendo ademais expresións que relacionen a derivada da función inversa coa derivada da función orixinal.

Teorema 3 (Derivada da función inversa). *Sexa $f \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función invertible e $x_0 \in A \cap A'$ tal que $y_0 = f(x_0) \in (f(A))'$. Se f^{-1} é continua en y_0,* f é derivable en x_0 *e, ademais, $f'(x_0) \neq 0$, entón f^{-1} é derivable en y_0 e tense que*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demostración. Sexa $g: A \to \mathbb{R}$ a función dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, & x \neq x_0, \\ \dfrac{1}{f'(x_0)}, & x = x_0. \end{cases}$$

Como f é invertible, entón é inxectiva, o cal permite asegurar que g está ben definida. Ademais, como f é derivable en x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, entón existe o seguinte límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

e, por tanto, g é continua en x_0.

Como f^{-1} é continua en $f(x_0)$ e g é continua en $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$, entón a composición $g \circ f^{-1}$ é continua en $f(x_0)$ e tense que

$$\lim_{y \to f(x_0)} \left(g \circ f^{-1}\right)(y) = \left(g \circ f^{-1}\right)(f(x_0)) = g(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Entón, chegamos a que existe o seguinte límite

$$\begin{aligned} \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} &= \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \lim_{y \to f(x_0)} g\left(f^{-1}(y)\right) \\ &= \lim_{y \to f(x_0)} \left(g \circ f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{f'(x_0)}, \end{aligned}$$

polo que concluímos que f^{-1} é derivable en $f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

tal e como queriamos probar. $\square$

En caso de que a función estea definida nun intervalo, non é necesario comprobar a hipótese de que a súa inversa sexa continua no punto. Deste modo, temos o seguinte resultado.

Corolario 2. *Sexa $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f: I \to f(I)$ unha función bixectiva e continua. Se f é derivable en $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$ entón f^{-1} é derivable en $y_0 = f(x_0)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Exemplo 3. A función $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ten inversa $f^{-1}(y) = \log y$, $y > 0$. Dado que f é derivable en $\mathbb{R}$ e $f'(x) = e^x$, usando a regra de derivación da función inversa tense que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

Exemplo 4. A función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ten inversa $f^{-1}(y) = \arcsin y$, $y \in (-1, 1)$.

Dado que f é derivable no seu dominio e $f'(x) = \cos x$, empregando a regra de derivación da función inversa obtense que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin e\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\arcsin e\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

onde usamos implicitamente que cos $x > 0$ posto que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observación 5. A hipótese de que a derivada da función de partida sexa distinta de 0 no punto considerado é imprescindible para garantirmos que a función inversa sexa derivable no punto imaxe. Noutras palabras, dada unha función $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sexa invertible, se existe un punto $x_0 \in A$ no cal f é derivable e $f'(x_0) = 0$, entón f^{-1} non é derivable en $f(x_0)$. Isto pódese probar aplicando a regra da cadea á seguinte igualdade

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \quad \forall x \in A.$$

En efecto, se f^{-1} fose derivable en $f(x_0)$ entón teríase que

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) = 1,$$

o cal contradí que $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 5. Usaremos a observación anterior para probar que as raíces n-ésimas non son derivables en 0. En efecto, sexa $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ e supoñamos que $A = \mathbb{R}$ se n é impar e $A = [0, \infty)$ se n é par.

A función $f(x) = x^n$, $x \in A$ é derivable en A con derivada

$$f'(x) = n\, x^{n-1}, \quad x \in A.$$

Ademais, f é invertible, sendo $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in A$, a súa inversa.

Como $f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$, entón o Corolario 2 garántenos que f^{-1} é derivable en todo punto distinto de $x_0 = 0$ e, ademais,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall\, x \neq 0.$$

Por outra parte, como $f'(0) = 0$, concluímos que f^{-1} non pode ser derivable no punto $f(0) = 0$.

4.3.2. Derivación logarítmica

En ocasións, para calcular a derivada dunha función, resulta máis cómodo considerar a súa composición coa función logaritmo e derivar esta composición, para despois "despexar" a derivada da función, tal e como se ilustra a continuación.

Consideremos $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función derivable e tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in A$.

Entón, a función $\log \circ f$ é derivable en A e, usando a regra da cadea, tense que

$$(\log \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \forall\, x \in A$$

e, por tanto,

$$f'(x) = f(x)\ (\log \circ f)'(x).$$

Isto resulta especialmente útil para derivar funcións da forma $[f(x)]^{g(x)}$, sendo f e g funcións derivables definidas nun mesmo conxunto A e $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Nestas condicións, sexa

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)}, \quad x \in A.$$

Dado que

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\,\log(f(x))}, \quad x \in A,$$

dedúcese que h é derivable en A por ser composición de funcións derivables. Consecuentemente, $\log \circ h$ tamén é derivable en A. Temos entón que

$$(\log \circ h)(x) = g(x)\ \log(f(x)), \quad x \in A,$$

e, derivando en ambos os lados da ecuación, chegamos a que

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x)\log(f(x)) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad x \in A.$$

Despexando $h'(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= h(x)\left(g'(x)\,\log(f(x)) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= [f(x)]^{g(x)}\left(g'(x)\log(f(x)) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right). \end{aligned}$$

Exemplo 6. Calculemos a derivada da función $h(x) = x^x$, definida para $x \in (0,\infty)$. Coa notación introducida anteriormente, $f(x) = x$ e $g(x) = x$ son derivables en $(0,\infty)$ e $f(x) > 0$ en $(0,\infty)$, polo que h é derivable en $(0,\infty)$. Temos entón que

$$\log(h(x)) = x\,\log(x), \quad x \in (0,\infty),$$

de onde deducimos que

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \log(x) + x\,\frac{1}{x} = \log(x) + 1, \quad x \in (0,\infty)$$

e, consecuentemente,

$$h'(x) = h(x)\,(\log(x)+1) = x^x\,(\log(x)+1)\,, \quad x \in (0,\infty).$$

4.3.3. Táboa de derivadas

Incluímos a continuación unha lista coas derivadas das funcións elementais:

Función	Derivada
$f(x) = k,\ \ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = \alpha\,x^{\alpha-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x,\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = a^x\ \log a$
$f(x) = \log x,\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x,\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\,\log a}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Función	Derivada
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arcsinh} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = \operatorname{arccosh} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \operatorname{arctanh} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

4.4. Comportamento local das funcións derivables

Nesta sección veremos como a existencia e o signo da derivada dunha función nun punto nos dan información acerca do comportamento da función nunha veciñanza de dito punto.

Por simplicidade, no que segue consideraremos funcións definidas nun intervalo I da recta real.

Teorema 4. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto interior de I tal que f é derivable en x_0.*

(a) Se $f'(x_0) > 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

(b) Se $f'(x_0) < 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Demostración. Demostraremos o apartado *(a)*, sendo *(b)* análogo.

Se $f'(x_0) > 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0.$$

Como $x - x_0 < 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, necesariamente ten que ocorrer que $f(x) < f(x_0)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Analogamente, $f(x) > f(x_0)$ para $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Observación 6. O resultado anterior dinos que a función f pasa de tomar valores menores que $f(x_0)$ a tomar valores maiores que $f(x_0)$ (ou viceversa) nunha veciñanza do punto x_0, segundo a derivada sexa positiva ou negativa en dito punto.

É fundamental observar que isto non quere dicir que a función f sexa crecente ou decrecente nesta veciñanza. Por exemplo, a función dada por

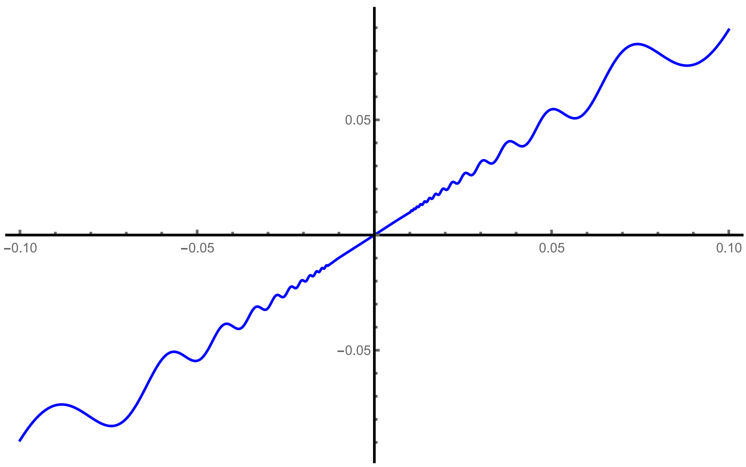
$$f(x) = \begin{cases} x + 2\,x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ten derivada positiva en $x_0 = 0$ xa que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 2\,h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 1 + 2\,h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 1 \end{aligned}$$

pero non é estritamente crecente, nin decrecente, en ningunha veciñanza de 0, tal e como se pode ver na Figura 3.

Figura 3: Exemplo de función non monótona con derivada positiva en $x_0 = 0$.



Como consecuencia do resultado anterior obtense unha condición necesaria para a existencia de extremos.

Definición 9. Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto interior de I tal que f é derivable en x_0. Se $f'(x_0)=0$, entón dise que x_0 é un punto crítico de f.

Corolario 3. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto interior de I tal que f é derivable en x_0. Unha condición necesaria para que f teña un extremo en x_0 é* que x_0 *sexa un punto crítico de f.*

Observación 7. A condición dada no resultado anterior é necesaria pero non suficiente. Un exemplo pódese ver na función $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, que ten un punto crítico en $x_0=0$ (xa que f é derivable en $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3\,x^2$ se anula en $x_0 = 0$). Porén $x_0 = 0$ non é un extremo da función f.

Observación 8. O resultado previo unicamente é válido para puntos interiores do dominio nos cales a función sexa derivable. Tendo isto en conta, á hora de buscar os extremos dunha función definida nun intervalo teremos que estudar tres tipos de puntos:

- Puntos interiores do intervalo nos que f sexa derivable e a derivada sexa 0 (puntos críticos).
- Puntos interiores do intervalo nos que f non sexa derivable.
- Extremos do intervalo.

Pódese adaptar o Teorema 4 para o caso no que a función non sexa derivable no punto pero exista algunha das derivadas laterais.

Corolario 4. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$* e *x_0 un punto interior de I.*

(a) Se f é derivable pola esquerda en x_0 e *$f'_-(x_0) > 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.*

(b) Se f é derivable pola esquerda en x_0 e $f'_-(x_0) < 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

(c) Se f é derivable pola dereita en x_0 e $f'_+(x_0) > 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

(b) Se f é derivable pola dereita en x_0 e $f'_+(x_0) < 0$, entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Outra consecuencia interesante do Teorema 4 é que a función derivada dunha función definida e derivable nun intervalo ten a propiedade de pasar de tomar un valor a tomar outro alcanzando todos os valores intermedios.

Teorema 5 (dos valores intermedios para a derivada ou de Darboux). *Sexa f unha función derivable nun intervalo I. Se a, $b \in I$, $a < b$ e λ é un número comprendido entre $f'(a)$ e $f'(b)$, entón existe polo menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda$.*

Demostración. Supoñamos que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, sendo o outro un caso análogo.

A función $g(x) = f(x) - \lambda\,x$, definida en I, cumpre que $g'(a) < 0$ e $g'(b) > 0$. Como g é derivable en $[a, b]$ (por selo f), entón é continua en $[a, b]$ e, polo Teorema de Weierstrass, alcanza mínimo absoluto en $[a, b]$. Como $g'(a) < 0$ e $g'(b) > 0$, o Teorema 4 garante que o mínimo non pode alcanzarse en a nin en b e, consecuentemente, debe alcanzarse nun punto intermedio $c \in (a, b)$ no cal $g'(c) = 0$. Consecuentemente, $f'(c) = \lambda$.

Observación 9. O resultado anterior permite afirmar, en particular, que se unha función f é derivable nun intervalo I e a súa función derivada non se anula en ningún punto, entón ou ben $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.

O teorema de Darboux pon tamén de manifesto o feito de que se unha función é derivable nun intervalo entón a súa función derivada só pode presentar descontinuidades esenciais, pero non de salto nin evitables, tal e como se probará a continuación.

Corolario 5. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$. Se f é derivable en I entón a súa función derivada f' non presenta descontinuidades de salto nin evitables.*

Demostración. Supoñamos que f é derivable en I e presenta unha descontinuidade nun punto $x_0 \in I$.

Se a descontinuidade é evitable, entón existen

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f'(x_0) = L_2,$$

sendo $L_1 \neq L_2$. Supoñamos, en particular, que $L_2 - L_1 = M > 0$ (no caso de ser $L_2 - L_1 < 0$ o procedemento sería análogo). Por definición de límite, temos que se tomamos $\varepsilon = \frac{M}{2}$ existe unha veciñanza reducida de x_0, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ na cal $|f'(x) - L_1| < \frac{M}{2}$. Tomemos agora un punto $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$. O teorema de Darboux garante entón que f' toma todos os valores entre $f'(x_1)$ e $f'(x_0) = L_2$ no intervalo (x_1, x_0). Non obstante, isto non pode ocorrer porque $(x_1, x_0) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, polo que non existe ningún punto en (x_1, x_0) no cal f' tome o valor $L_1 + \frac{M}{2}$.

Por outra banda, se a descontinuidade é de salto, entón existen

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = L_2 \in \mathbb{R},$$

sendo $L_1 \neq L_2$. Supoñamos de novo que $L_2 - L_1 = M > 0$. Por definición de límite, temos que se tomamos $\varepsilon = \frac{M}{4}$, existen δ_1, $\delta_2 > 0$ tales que $|f'(x) - L_1| < \frac{M}{4}$ para $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ e $|f'(x) - L_2| < \frac{M}{4}$ para $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$. Tomemos agora $x_1 \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ e $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta_2)$.

O teorema de Darboux garante entón que f' toma todos os valores entre $f'(x_1)$ e $f'(x_2)$ no intervalo (x_1, x_2) o cal é imposible porque $f'(x) < L_1 + \frac{M}{4}$ para $x \in (x_1, x_0)$ e $f'(x) > L_2 - \frac{M}{4}$ para $x \in (x_0, x_2)$.

O resultado previo permite xustificar por exemplo que a función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

non é derivable no punto $x_0 = 0$ dado que a súa función derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

en caso de estar definida en $x_0 = 0$, presentaría unha descontinuidade de salto nese punto.

Observación 10. Pode ocorrer que unha función sexa derivable nun intervalo e a súa función derivada teña descontinuidades (as cales, como consecuencia do corolario previo, deben ser necesariamente esenciais). Un exemplo desta situación tense coa función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

que é derivable no seu dominio e ten por función derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a cal presenta unha descontinuidade esencial no punto $x_0 = 0$.

4.5. Teoremas de Rolle e do Valor Medio

Os resultados que se presentan a continuación fan referencia a funcións derivables non só nun punto, senón en todo un intervalo.

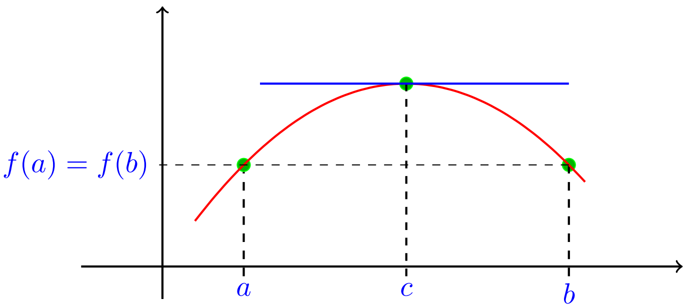
Teorema 6 (Rolle). *Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Entón existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f é unha función continua definida nun compacto, o teorema de Weierstrass garántenos que f alcanza máximo e mínimo absolutos en $[a, b]$.

Se o máximo e o mínimo absoluto coinciden con $f(a)=f(b)$, entón a función é constante e $f'(x)=0$ para todo $x \in (a,b)$. En caso contrario, f tería un extremo absoluto nun punto interior $x \in (a,b)$ no cal, como consecuencia do Corolario 3, teríase que $f'(c)=0$. $\square$

Observación 11. Xeometricamente falando, a conclusión do teorema de Rolle é que existe algún punto $c \in (a,b)$ no cal a recta tanxente á curva $y=f(x)$ é paralela ao eixe x, tal e como se ve na Figura 4.

Figura 4: Interpretación xeométrica do teorema de Rolle.



Teorema 7 (do valor medio de Lagrange ou dos incrementos finitos). *Se* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é unha función continua en* $[a,b]$ *e derivable en* (a,b), *entón existe un punto* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a).$$

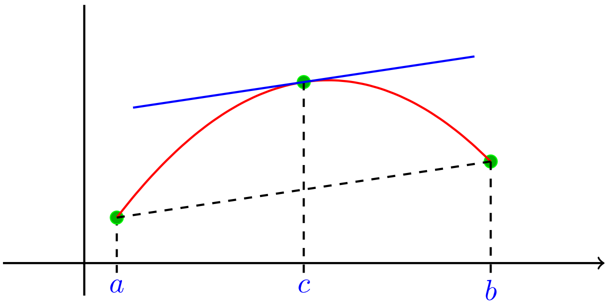
Demostración. Chega con aplicar o teorema de Rolle á función

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a). \end{aligned}$$

$\square$

Observación 12. Xeometricamente falando, a conclusión do teorema do valor medio é que existe un punto da gráfica da función $y=f(x)$ no cal a recta tanxente é paralela á recta que une os extremos da gráfica, tal e como se pode ver na Figura 5.

Figura 5: Interpretación xeométrica do teorema do valor medio.



Noutros termos, o teorema do valor medio permite afirmar que a variación media da función f no intervalo $[a, b]$ coincide coa variación instantánea nalgún punto de dito intervalo.

Observación 13. As conclusións dos teoremas previos non son necesariamente certas se as funcións non están definidas nun intervalo.

Cabe indicar tamén que os puntos cuxa existencia garanten os teoremas non son necesariamente únicos e non sempre poden calcularse explicitamente.

Por último, imos enunciar o teorema do valor medio xeneralizado de Cauchy.

Teorema 8 (valor medio xeneralizado de Cauchy). *Sexan f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ dúas funcións continuas en $[a, b]$ e derivables en (a, b). Entón existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))\ g'(c) = (g(b) - g(a))\ f'(c).$$

Demostración. Chega con aplicar o teorema de Rolle á función

$$\begin{aligned} h\colon [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x). \end{aligned}$$

4.5.1. Aplicacións do teorema do valor medio

Presentamos de contado varios resultados que permiten obter conclusións acerca dunha función a partir de información sobre a súa función derivada f'.

Teorema 9. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ unha función continua en I e derivable no interior de I. Cúmprese que:*

(a) Se $f'(x) > 0$ en todo punto interior de I, entón f é estritamente crecente en I.

(b) Se $f'(x) < 0$ en todo punto interior de I, entón f é estritamente decrecente en I.

(c) f é crecente en I se, e só se, $f'(x) \geq 0$ en todo punto interior de I.

(d) f é decrecente en I se, e só se, $f'(x) \leq 0$ en todo punto interior de I.

Demostración. Sexan $x,\, y \in I$ dous puntos arbitrarios do dominio, con $x < y$. Como f é continua en $[x, y]$ e derivable en (x, y) entón, polo teorema do valor medio, existe un punto $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x).$$

A partir desta relación dedúcense de forma inmediata as afirmacións *(a)* e *(b)* do teorema, así como as implicacións cara á esquerda de *(c)* e *(d)*.

Para probar as implicacións cara á dereita de *(c)* e *(d)* basta con observar que, dado $x_0 \in \mathring{I}$, cúmprese que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é sempre non negativo (respectivamente, non positivo) se f é crecente (respectivamente, decrecente) polo que o seu límite cando x tende a x_0 tamén será non negativo (respectivamente, non positivo).

Observación 14. Os recíprocos das dúas primeiras afirmacións non son certos xa que unha función pode ser estritamente monótona nun intervalo e ter derivada cero nalgún punto deste intervalo. Un exemplo é a función $f(x) = x^3$, que é derivable en todos os puntos da recta real e estritamente crecente en $\mathbb{R}$ pero a súa derivada anúlase en $x_0 = 0$.

Outro resultado que se obtén como consecuencia inmediata do teorema do valor medio é o seguinte.

Teorema 10. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ unha función continua en I e derivable no interior de I. Se $f'(x) = 0$ en todo punto interior de I, entón f é constante en I.*

Como consecuencia do teorema anterior, dedúcese o seguinte.

Corolario 6. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f,\, g\colon I \to \mathbb{R}$ dúas funcións continuas en I e derivables no interior de I. Se f e g teñen a mesma función derivada, entón as dúas funcións diferéncianse nunha constante, é dicir, existe unha constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in I$.*

O seguinte resultado dá unha condición suficiente para que unha función sexa derivable nun punto.

Teorema 11. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $x_0 \in \mathring{I}$ e f: $I \to \mathbb{R}$ unha función derivable nunha veciñanza reducida de x_0.* Se *f é continua en x_0 e existe $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$, entón f é derivable en x_0 e cúmprese que $f'(x_0) = L$.*

Demostración. Por definición de derivada tense que f será derivable en x_0 se e só se existe o límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Por hipótese tense que para $h>0$ suficientemente pequeno f é continua en $[x_0, x_0+h]$ e derivable en $c_h \in (x_0, x_0+h)$. Entón, polo teorema do valor medio, existe un valor $c_h \in (x_0, x_0+h)$ tal que

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(c_h)\, h.$$

Resulta evidente que cando h tende a 0, o valor c_h tende a x_0, de onde se deduce que

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(c_h) = \lim_{x\to x_0} f'(x) = L.$$

$\square$

Observación 15. É importante observar que o resultado anterior non só afirma que a función f é derivable en x_0, senón que a función derivada f' é continua neste punto.

Observación 16. O resultado anterior non é válido se a función f non é continua no punto x_0. É dicir, a existencia do $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ non implica a derivabilidade de f no punto x_0. Un exemplo desta situación ocorre coa seguinte función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\, x^3, & x \le 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

A función f é derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, con función derivada $f'\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2\, x, & x < 1, \\ 2\, x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Nótese que neste caso

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2,$$

é dicir, existe $\lim_{x\to 1} f'(x) = 2$. Non obstante, f non é derivable en $x_0 = 1$ por non ser continua neste punto.

Por último, dáse a continuación unha condición suficiente para que unha función derivable sexa uniformemente continua nun intervalo.

Teorema 12. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ unha función continua en I e derivable no interior de I. Se a función derivada de f está limitada (é dicir, se existe unha constante $k > 0$ tal que $|f'(x)| < k$ para todo o $x \in \mathring{I}$) entón f é uniformemente continua en I.*

Demostración. Sexa $k > 0$ tal que $|f'(x)| < k$ para todo $x \in \mathring{I}$.

Sexan $x,\ y \ \in \ I$ dous puntos arbitrarios e supoñamos que $y < x$. Como f é continua en $[x,\ y]$ e derivable en $(x,\ y)$ entón, polo teorema dos valores intermedios, existe un valor $c \in (x,\ y)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|, \quad \forall\, x,\ y \in I$$

Como consecuencia, dedúcese que

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|, \quad \forall\, x,\ y \in I,$$

é dicir, f é lipschitziana en I e, por tanto, uniformemente continua en I.

4.6. Regra de L'Hôpital

Teorema 13 (Regra de L'Hôpital). *Sexan f e g dúas funcións derivables nun intervalo (a, b), con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tales que*

(a) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$,

(b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ ou ben $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$.

Se existe $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ (respectivamente, se $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$), entón existe $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$ (respetivamente, $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$).

Demostración. Probaremos o caso no que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Nestas condicións, as funcións $F,\ G\colon\ [a,\ b) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ g(x), & x \in (a, b), \end{cases}$$

son continuas en $[a, b)$ e derivables en (a, b). Aplicando o teorema do valor medio xeneralizado, para cada $x \in (a, b)$ podemos garantir a existencia dun punto $c_x \in (a, x)$ para o cal

$$(G(x) - G(a))\, F'(c_x) = (F(x) - F(a))\, G'(c_x),$$

é dicir,

$$g(x)\, f'(c_x) = f(x)\, g'(c_x).$$

Como $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entón tamén se ten que $g(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$. En efecto, se existise algún $x_0 \in (a, b)$ para o que $g(x_0) = G(x_0) = 0$, entón aplicando o teorema de Rolle á función G, concluiriamos a existencia dalgún punto $d \in (a, x_0)$ tal que $G'(d) = g'(d) = 0$, o cal non é posible.

Entón, como $g'(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$, a igualdade anterior pódese reescribir como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Finalmente, basta observar que como $c_x \in (a, x)$ entón cando $x \to a^+$ tense que $c_x \to a^+$ e polo tanto que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L.$$

□

Observación 17.

(a) Pódese enunciar un resultado análogo para o límite en b pola esquerda.

(b) Combinando as afirmacións para os límites laterais pódese obter tamén o mesmo resultado para límites ordinarios. É dicir, se se quere empregar a regra de L'Hôpital para calcular un límite nun punto $x_0 \in (a, b)$, habería que pedir que f e g fosen derivables e $g'(x) \neq 0$ nos intervalos (a, x_0) e (x_0, b).

(c) A regra de L'Hôpital proporciona unha condición suficiente para a existencia do límite $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Esta condición non é necesaria, é dicir, a existencia de $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ non implica a de $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Por tanto, en caso de que se cumpran as hipóteses para utilizar a regra de L'Hôpital pero non exista o límite do cociente das derivadas $\left(\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ non podemos concluír que a función $\frac{f}{g}$ non teña límite neste punto.

(d) Se ao aplicar a regra de L'Hôpital a $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ se chega a que $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ volve a ser unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e cúmprense, para este novo límite, as hipóteses da regra de L'Hôpital, entón pódese aplicar de novo esta regra e o límite orixinal será igual $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$, en caso de que este límite exista. En xeral, a regra de L'Hôpital pode aplicarse tantas veces como sexa necesario, sempre que se satisfagan os requisitos necesarios cada vez que se aplique.

(e) As indeterminacións da forma $\infty - \infty$ ou $0 \cdot \infty$ pódense reducir ás anteriores mediante as identidades

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}}$$

e

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

(f) As indeterminacións da forma ∞^0, 0^0 e 1^∞ transfórmanse respectivamente en $0\cdot\infty$, $0\cdot(-\infty)$ e $\infty\cdot 0$ usando a igualdade

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\log f(x)}.$$

5. ACTIVIDADES PROPOSTAS

Proporase ao alumnado a resolución de diversas cuestións e exercicios, que deberán ser resoltos de xeito individual ou en grupos reducidos. Inclúense a continuación algunhas propostas de exercicios:

Exercicio 1. Proba que se f é unha función derivable nun punto $x_0\in\mathbb{R}$, entón

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha\,h)-f(x_0-\beta\,h)}{h} = (\alpha+\beta)\,f'(x_0).$$

Exercicio 2. Usa o teorema do valor medio para probar que $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ para todo $x>0$.

Exercicio 3. Sexan $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ e $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ a función definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2+b\,x+c, & -1\le x\le 0,\\ -x^2+1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

(a) Para que valores de $a,\ b$ e c é f uniformemente continua en $[-1,1]$?

(b) Para que valores de $a,\ b$ e c é f derivable en $(-1,1)$?

(c) Para que valores de $a,\ b$ e c ten f un máximo relativo no punto $x_0=0$? E un mínimo relativo?

6. AVALIACIÓN

Posto que esta é a cuarta unidade didáctica da materia, non se prevé realizar unha avaliación inicial.

A avaliación procesual levarase a cabo ao longo de toda a unidade, tomando nota da participación do alumnado no desenvolvemento das sesións.

A avaliación final realizarase mediante a avaliación continua da materia e o exame final da mesma. Como parte da avaliación continua o alumnado deberá resolver exercicios e tarefas propostos polo profesorado, así como realizar unha proba parcial de carácter similar ao exame final. Por outra banda, no exame final, correspondente a toda a materia, o alumnado deberá resolver diversas preguntas de teoría, cuestións de carácter teórico-práctico e exercicios.

A nota final do alumnado (NF) obterase empregando a seguinte fórmula:

$$\mathrm{NF} = \text{máx}\{0{,}4\,\mathrm{AC} + 0{,}6\,\mathrm{EF},\ \ \mathrm{EF}\},$$

sendo AC a nota de avaliación continua e EF a nota do exame final.

7. BIBLIOGRAFÍA

R. G. Bartle, D. R. Sherbert. *Introducción al Análisis Matemático de una variable*. Limusa Wiley, 2010.

J. de Burgos. *Cálculo infinitesimal de una variable*. McGraw-Hill, 2007.

R. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards. *Cálculo*. McGraw-Hill, 2006.

M. Spivak. *Calculus*. Reverté, 1994.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA