MATERIA
Ecuacións Diferenciais Ordinarias

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física,
Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

unidade didáctica
2

Ciencias Experimentais

Estabilidade de sistemas lineares

Érika Diz Pita
M. Victoria Otero Espinar
Área de Análise Matemática
Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155719

MATERIA: Ecuacións Diferenciais Ordinarias
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Sistemas autónomos en $\mathbb{R}^n$
- Motivacións e exemplos
- Xeneralidades e propiedades
- Ecuación das órbitas
- Retratos de fases de sistemas lineares en $\mathbb{R}^2$
- Retratos de fases de sistemas lineares en $\mathbb{R}^3$

Unidade 2. Estabilidade de sistemas lineares
- Estabilidade e estabilidade asintótica
- Estabilidade de sistemas lineares autónomos en $\mathbb{R}^n$
- Estabilidade asintótica de sistemas lineares autónomos en $\mathbb{R}^n$
- Aplicacións

Unidade 3. Estabilidade de sistemas non lineares
- Estabilidade de sistemas autónomos non lineares en $\mathbb{R}^n$
- Estabilidade asintótica de sistemas autónomos non lineares en $\mathbb{R}^n$
- Aplicacións a problemas da física, bioloxía e medicina
- Método da primeira aproximación
- Método de Lyapunov
- Rexión de atracción

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (UD) forma parte da materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias (EDO) que se imparte no primeiro semestre do terceiro curso do Grao en Matemáticas e no primeiro semestre do cuarto curso do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas.

A materia está incluída no módulo de Ecuacións Diferenciais, precedida pola materia Introdución ás Ecuacións Diferencias Ordinarias.

O estudo das EDO pasou por tres etapas ben diferenciadas que se poden resumir en:

1. Intentar obter de forma explícita as solucións da EDO.

2. Abordar a cuestión da existencia de solucións das EDO por vías indirectas sen pretender resolvelas explicitamente. Nesta etapa é fundamental coñecer, entre outras cousas, se existe solución dunha EDO, se esta solución é única e en que intervalo existe esta solución.

3. Estudar cualitativamente as EDO, obtendo, a partir da propia ecuación, a máxima información posible sobre as propiedades e comportamento de ditas solucións: regularidade, acotación, converxencia, periodicidade, comportamento de conxunto, etc. Isto é importante xa que en xeral non se poden obter explicitamente as solucións dunha EDO.

Na materia Introdución ás Ecuacións Diferenciais Ordinarias tratouse de dar unha introdución ás etapas 1 e 2. Nesta materia, Ecuacións Diferenciais Ordinarias, trataremos de iniciarnos na teoría cualitativa de EDO tanto dende o punto de vista teórico como práctico. Trataremos de poñer de manifesto o interese do estudo cualitativo das EDO, motivando o estudo con modelos matemáticos que xorden de diferentes problemas en distintos campos.

Esta materia supón o primeiro contacto dos alumnos coa teoría cualitativa das ecuacións diferenciais, polo que se tratará de mostrar as súas vantaxes e posibilidades.

Esta UD céntrase no estudo da estabilidade e estabilidade asintótica dos puntos de equilibrio para sistemas lineares en $\mathbb{R}^n$ así como na análise dalgunhas das súas aplicacións.

A UD desenvolverase ao longo de 3 semanas, o que se corresponde con 3 sesións expositivas, 3 de seminario e 3 de laboratorio.

OBXECTIVOS

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

— introducir o alumnado no campo da teoría cualitativa das ecuacións diferenciais ordinarias, tanto dende o punto de vista teórico como práctico;

— poñer de manifesto o interese do estudo cualitativo das EDO pois permite deducir o comportamento das solucións, sen necesidade de resolver o sistema estudado. Esta resolución pode ser moi custosa en sistemas lineares de dimensión elevada, resultando imposible na maioría dos sistemas non lineares;
— abordar a estabilidade e inestabilidade dos puntos de equilibrio do sistema, caracterizándoa no caso linear
— motivar o estudo de modelos matemáticos que xorden de diferentes problemas en distintos campos científicos;
— representar a evolución das órbitas dos distintos sistemas usando programas informáticos.

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:
— comprender os conceptos de estabilidade e estabilidade asintótica de puntos de equilibrio de sistemas lineares;
— caracterizar a estabilidade en función dos autovalores da matriz xacobiana;
— demostrar que a estabilidade e a estabilidade asintótica se conserva por conxugacións topolóxicas;
— mostrar mediante distintas aplicacións a importancia dos conceptos de estabilidade e estabilidade asintótica.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

A metodoloxía docente prevista para esta UD inclúe actividades presenciais e non presenciais. As actividades presenciais realizaranse nas clases expositivas, de seminario e de laboratorio. Nas clases expositivas exporanse os contidos teóricos que os alumnos poden ter revisado previamente nesta unidade didáctica e noutros materiais que terán dispoñibles. Nas clases de seminario formularanse e resolveranse algúns exemplos e exercicios que permitan aplicar os contidos teóricos, e resolveranse as dúbidas que formulen os estudantes. Estas mesmas tarefas abordaranse nas clases de laboratorio, coa diferenza de que nestas nos apoiaremos no emprego de ferramentas informáticas e que se requirirá unha maior participación por parte do alumnado. As actividades non presenciais inclúen a lectura e comprensión dos contidos teóricos por parte dos alumnos, a realización dos exercicios e exemplos propostos e a elaboración dun traballo en grupos de 4 ou 5 persoas, que será transversal a todas as UD da materia, e no que se pretende que se aplique a teoría á resolución dun problema da vida real elixido polo grupo.

Os recursos necesarios estarán a disposición do alumnado nun equipo de Microsoft Teams. Nese equipo estarán dispoñibles todos os documentos que poidan ser necesarios no desenvolvemento da materia.

CONTIDOS

Nesta unidade didáctica comezaremos introducindo os conceptos de estabilidade e estabilidade asintótica das singularidades dun sistema diferencial, ambos de grande importancia no estudo cualitativo destes sistemas. Centrarémonos despois no caso de sistemas lineares en $\mathbb{R}^n$, para os que daremos unha caracterización da estabilidade da orixe en función dos autovalores da matriz que define o sistema. Remataremos coa aplicación destes conceptos a algúns exemplos da vida real.

1. Estabilidade e estabilidade asintótica

Sexa $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unha función de clase $\mathcal{C}^1$ no aberto A de $\mathbb{R}^n$ e a ecuación diferencial asociada

$$\dot{x} = F(x). \tag{4.1}$$

Denotamos por $\varphi_x : I_x \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a solución maximal de $\dot{x} = F(x)$ que verifica a condición inicial $\varphi_x(0) = x$.

Definición 1. Diremos que $x_0 \in A$ é unha **singularidade** ou un **punto de equilibrio** para a ecuación (4.1) ou para o campo F se $F(x_0) = 0$. Diremos que x_0 é un **punto regular** para (4.1) ou para F se $F(x_0) \neq 0$.

Observación 1. Sen perda de xeneralidade podemos supoñer que a singularidade da ecuación se atopa na orixe xa que calquera outra singularidade poderá ser levada á orixe por unha translación.

En efecto, supoñamos que a ecuación $\dot{x} = F(x)$ ten unha singularidade en $x_0 \neq 0$. Consideramos

$$y = x - x_0,$$

e a ecuación

$$\dot{y} = G(y),$$

dada por $G(y) = F(y + x_0)$ que presenta unha singularidade na orixe. Nestas condicións, φ é solución de $\dot{x} = F(x)$ se e só se $\phi(t) = \varphi(t) - x_0$ é solución de $\dot{y} = G(y)$.

Definición 2. Diremos que a singularidade x_0 é **estable** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $||x - x_0|| < \delta$ entón

(i) $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$,

(ii) $||\varphi_x(t) - x_0|| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Diremos que x_0 é **inestable** se non é estable.

Observación 2. A definición de establilidade no punto x_0 é equivalente a que para calquera veciñanza V de x_0 existe unha veciñanza W de x_0 tal que se $x \in W$, $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\varphi_x(t) \in V$ para todo $t \geq 0$.

Definición 3. A singularidade x_0 é **asintoticamente estable** cando se verifican as seguintes condicións:

(i) x_0 é estable,

(ii) existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que se $||x - x_0|| < \tilde{\delta}$ entón $\lim_{t\to\infty} ||\varphi_x(t) - x_0|| = 0$.

Diremos que x_0 é **globalmente asintoticamente estable** se é estable e $\lim_{t\to\infty} ||\varphi_x(t) - x_0|| = 0$ para todo $x \in A$.

Observación 3. A definición de estabilidade asintótica no punto x_0 é equivalente a que x_0 sexa estable e exista unha veciñanza U de x_0 tal que se $x \in U$, $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\lim_{t\to\infty} ||\varphi_x(t) - x_0|| = 0$.

Observación 4. Os conceptos de estabilidade e estabilidade asintótica son de tipo local xa que só inflúe o comportamento do fluxo nunha veciñanza da singularidade correspondente. Así pois é equivalente afirmar que a singularidade x_0 é (asintoticamente) estable para o campo F que dicir que x_0 é (asintoticamente) estable para o campo $F_{|W}$ sendo W unha veciñanza calquera de x_0.

Exemplo 1. Para a ecuación $\dot{x} = -x$, a singularidade $x_0 = 0$ é asintoticamente estable . En efecto, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon$, de maneira que se $|x| \leq \delta$ entón $|\varphi_x(t)| = |xe^{-t}| \leq \delta = \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Ademais

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_x(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de xeito que a estabilidade é asintótica e 0 é globalmente asintoticamente estable.

Exemplo 2. Por outra parte, a singularidade $x_0 = 0$ é inestable para a ecuación $\dot{x} = x$ pois, con independencia da condición inicial elixida $x \neq 0$, o valor $|\varphi_x(t)| = |xe^t|$ faise tan grande como queiramos sen máis que tomar $t \geq 0$ suficientemente grande.

Exemplo 3. A ecuación escalar $\dot{x} = x^2$ presenta unha única singularidade en $x = 0$. Neste caso a singularidade non é estable, pois a solución do problema que no instante 0 pasa por x vén dada por $\varphi_x(t) = x(1 - xt)^{-1}$, que está definida en $(-\infty, x^{-1})$ cando $x > 0$, e en (x^{-1}, ∞) se $x < 0$. Deste xeito en calquera veciñanza do punto 0 podemos atopar $x > 0$ para o que non se cumpre a primeira condición da definición de estabilidade.

Definición 4. Diremos que x_0 é **un atractor** se existe unha veciñanza U de x_0 tal que se $x \in U$, entón $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e verifica $\lim_{t\to\infty} ||\varphi_x(t) - x_0|| = 0$.

Os conceptos de atractor e punto asintoticamente estable non son equivalentes. Aínda que un punto de equilibrio asintoticamente estable sempre é un atractor, o recíproco non sempre é certo. Un atractor non ten por que ser un punto estable e polo tanto tampouco asintoticamente estable, como se pode ver no seguinte exemplo.

Exemplo 4. Consideramos o campo definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por

$$\dot{x} = x - y + \frac{xy - x^3 - xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\dot{y} = x + y - \frac{x^2 + x^2 y + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

cuxo retrato de fases se presenta na Figura 1. A singularidade $(0,1)$ é á vez atractora e inestable, como se pode comprobar facendo o cambio a coordenadas polares, é dicir,

$$x = r\sin\theta,$$
$$y = r\cos\theta,$$

mediante o cal obtemos o sistema equivalente

$$\dot{r} = r(1-r^2),$$
$$\dot{\theta} = 1-\cos\theta,$$

para $r \neq 0$.

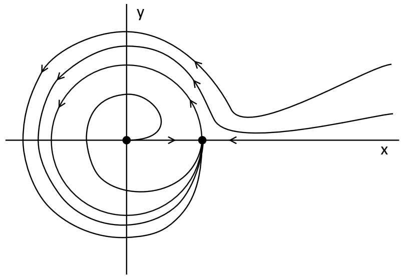


Figura 1: Atractor inestable.

Estamos interesados en facer unha clasificación dos campos tendo en conta os seus comportamentos cualitativos similares, para iso preséntase a seguinte definición.

Definición 5. Sexan $F_i : A_i \to \mathbb{R}^n$, $F_i \in C^1(A_i)$, A_i abertos de $\mathbb{R}^n$, $i=1,2$. Unha **conxugación topolóxica** entre F_1 e F_2 (ou entre $\dot{x}=F_1(x)$ e $\dot{x}=F_2(x)$) é un homeomorfismo $h : A_1 \to A_2$ que verifica

$$h((\varphi_1)_x(t)) = (\varphi_2)_{h(x)}(t), \quad t \in I_x^1 = I_{h(x)}^2, \quad x \in A_1,$$

sendo $(\varphi_i)_\xi$ a solución maximal definida en I_ξ^i de $\dot{x}=F_i(x)$, tal que $\varphi_i(0)=\xi$, $i=1,2$.

Observación 5. Como se pode ver, unha conxugación topolóxica leva órbitas de F_1 en órbitas de F_2 conservando a orientación.

Exemplo 5. Os campos $F_1(x,y)=(x,-y)$ e $F_2(x,y)=(x,-y+x^3)$ son topoloxicamente conxugados mediante o homeomorfismo $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $h(x,y)=(x,(y+x^3)/4)$.

Temos que $\psi(t,(a,b))=(ae^t, be^{-t})$ é unha solución para o campo F_1 e $\varphi(t,(a,b))=(ae^t,(b-a^3/4)e^{-t}+a^3e^{3t}/4)$ é unha solución para F_2, e ademais $h(\psi(t,p))=\varphi(t,h(p)))$.

Observación 6. Dous campos poden non ser topoloxicamente conxugados pero si localmente topoloxicamente conxugados, isto é, existen veciñanzas V en A_1 e W en A_2 e un homeomorfismo $h : V \to W$ tal que $h((\varphi_1)_x(t)) = (\varphi_2)_{h(x)}(t), \quad x \in V$.

Un primeiro resultado importante é que as conxugacións topolóxicas conservan a estabilidade e a estabilidade asintótica:

Teorema 1. Sexan $F_i : A_i \to \mathbb{R}^n$, $F_i \in C^1(A_i)$, A_i abertos de $\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, e $h : A_1 \to A_2$ unha conxugación topolóxica entre F_1 e F_2. Nestas condicións verifícase que x_0 é unha singularidade estable (asintoticamente estable) de $\dot{x} = F_1(x)$ se e só se $h(x_0)$ é unha singularidade estable (asintoticamente estable) de $\dot{x} = F_2(x)$.

O teorema anterior é sumamente útil pois permítenos, por exemplo, estudar a estabilidade de campos lineares a través doutros campos tamén lineares pero máis simples, como veremos no apartado seguinte. Tamén resulta de utilidade cando se combina co teorema de Hartman-Grobman, que se estudará na Unidade Didáctica 3, e que establece a existencia dunha conxugación topolóxica entre un campo de partida e o sistema linearizado arredor de certo tipo de singularidades. A consecuencia inmediata é que esas singularidades teñen o mesmo comportamento, en canto a estabilidade, que a orixe para o campo linearizado correspondente. Isto motiva que estudemos con detalle a estabilidade da orixe para campos lineares.

2. Estabilidade para sistemas lineares autónomos en $\mathbb{R}^n$

Sexa A unha matriz real $n \times n$ e consideremos o sistema diferencial asociado:

$$\dot{x} = Ax. \tag{4.2}$$

Lembramos que dada a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ existe unha matriz invertible P e unha matriz J chamada forma canónica de Jordan de A tal que $A = PJP^{-1}$. As solucións do sistema definido pola matriz A veñen dadas por

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

A continuación analizaremos a estabilidade da orixe para o sistema (4.2).

Baseándonos no Teorema 1 e tendo en conta que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = P^{-1}x$ é unha conxugación topolóxica entre $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = Jx$, entón tense o seguinte resultado:

Teorema 2. Se J é a forma canónica de Jordan dunha matriz A, entón os sistemas $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = Jx$ son topoloxicamente conxugados.

Dado que é doado demostrar a estabilidade do sistema $\dot{x} = Jx$, tendo en conta o Teorema 2, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3 (Estabilidade da orixe de sistemas lineares autónomos)**.** En relación coa estabilidade da orixe para o sistema (4.2) verifícanse as seguintes afirmacións:

1. A orixe é inestable se algún autovalor de A ten parte real positiva.

2. A orixe é asintoticamente estable se e só se todos os autovalores de A teñen parte real negativa.

3. Se todos os autovalores de A teñen parte real non positiva, entón

   3.1. A orixe é estable se os autovalores que teñen parte real cero dan lugar na forma canónica de Jordan a tantos bloques como a súa multiplicidade;

   3.2. A orixe é inestable se algún dos autovalores con parte real cero dá lugar a menos bloques que a súa multiplicidade.

Observación 7. A estabilidade asintótica para sistemas lineares presenta algunha particularidade. Se nun sistema linear a orixe é asintoticamente estable, entón é tamén globalmente asintoticamente estable, isto é, é estable e toda solución do sistema converxe a 0 cando t tende a ∞. Ademais, en sistemas lineares, a estabilidade asintótica (global) da solución trivial equivale a que o sistema sexa un atractor (Lembrar o visto para o caso xeral no exemplo (4)).

3. Aplicacións

3.1. O modelo de poboación de Malthus

Como se introduciu na primeira UD, o modelo de Malthus é un modelo sinxelo para predicir a evolución dunha poboación con recursos ilimitados. Se $X(t)$ denota o tamaño da poboación no instante t, a ecuación de Malthus é

$$\dot{X}(t) = kX(t), t \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación é unha ecuación linear, ou o que é o mesmo, un sistema linear de dimensión 1, polo que podemos aplicarlle o Teorema 3. Se $k = 0$, todos os puntos son singularidades, mais se $k \neq 0$ a única singularidade é a orixe. O sistema é de dimensión 1, e a súa matriz asociada (k) ten por único autovalor $\lambda = k$. Segundo o Teorema 3, se $k > 0$ a singularidade $x = 0$ é inestable e se $k < 0$ a singularidade $x = 0$ é asintoticamente estable. Coma neste caso sabemos calcular a solución, podemos comprobar que a interpretación é a mesma, tanto a partir da solución explícita como a partir deste resultado cualitativo. A solución é da forma $X(t) = xe^{kt}$, sendo $(0, x)$ a condición inicial, é claro que se $k > 0$ a poboación tende a infinito cando t tende a infinito, polo que $x = 0$ é inestable, mais se $k < 0$ a poboación tende a 0, á extinción, polo que $x = 0$ é asintoticamente estable.

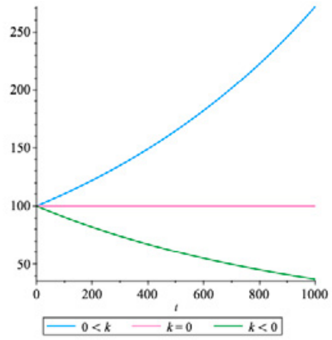


Figura 2: Solucións do modelo de Malthus con distintas constantes de proporcionalidade.

3.2. Desintegración radioactiva

As substancias radioactivas pódense empregar, por exemplo, para determinar a idade aproximada dos fósiles mediante o estudo da desintegración do carbono-14 ou como trazadores radioactivos para detectar problemas de saúde.

Existen substancias que se descompoñen noutras máis sinxelas a un ritmo constante independente do que pase na súa contorna. O físico E. Rutherford demostrou que a descomposición dunha substancia radioactiva é directamente proporcional ao número de átomos presentes. Se chamamos $X(t)$ á cantidade de material radioactivo existente no instante t, entón o proceso de desintegración pódese modelizar coa seguinte ecuación:

$$\dot{X}(t) = -kX(t),$$

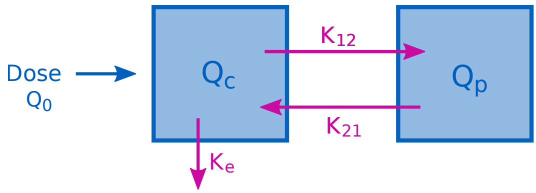
onde $k > 0$ é unha constante que depende do elemento radioactivo considerado. Esta ecuación coincide coa do modelo de Malthus con constante negativa. De novo a única singularidade é o punto $x = 0$, e como o autovalor da matriz (de dimensión 1) que define o sistema é $-k$ que é sempre negativo, o Teorema 3 permítenos garantir que ese punto é asintoticamente estable, de xeito que o material radioactivo tende a desintegrarse completamente.

3.3. Modelos farmacocinéticos

Algúns modelos de ecuacións diferenciais permítennos coñecer en cada instante a concentración dun medicamento no organismo. Se se subministra un fármaco que está deseñado para acumularse de forma homoxénea en certos tecidos (compartimento periférico) despois de pasar polo sangue (compartimento central) entón a ecuación que o modeliza é

$$\frac{dQ_c}{dt} = K_{21}Q_p - K_{12}Q_c - K_eQ_c,$$
$$\frac{dQ_p}{dt} = K_{12}Q_c - K_{21}Q_p,$$

sendo Q_c e Q_p as cantidades de fármaco no compartimento central e no compartimento periférico, respectivamente, $K_{ij} > 0$ as constantes da farmacotransferencia e $K_e \neq 0$ a constante de eliminación.



Este sistema ten unha única singularidade, a orixe, xa que é un sistema linear que vén dado pola seguinte matriz non singular

$$\begin{pmatrix} -(K_{12}+K_e) & K_{21} \\ K_{12} & -K_{21} \end{pmatrix}, \qquad (4.3)$$

cuxos autovalores son

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} =& \frac{1}{2}\left(-K_{12} - K_{21} - K_e \pm \sqrt{-4K_{21}K_e + (K_{12}+K_{21}+K_e)^2}\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(-K_{12} - K_{21} - K_e \pm \sqrt{K_{12}^2 + (K_{21}-K_e)^2 + 2K_{12}K_{21} + 2K_{12}K_e}\right).\end{aligned}$$

Da expresión pódese concluír que os autovalores son reais e negativos (pois $K_{21}K_e$ é positivo). Polo tanto, aplicando o Teorema 3, podemos concluír que a orixe é asintoticamente estable, como pode verse no retrato de fases da Figura 3. Isto quere dicir que o sistema tende a eliminar o fármaco, de xeito que a cantidade en cada un dos compartimentos tende a cero.

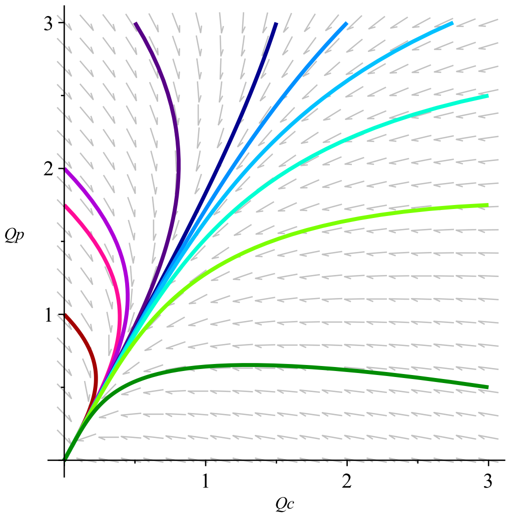


Figura 3: Retrato de fases do sistema (4.3).

ANEXO I

A forma canónica de Jordan dunha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é unha matriz diagonal por bloques

$$J = \begin{pmatrix} R_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_p & & & \\ & & & C_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & C_q \end{pmatrix}$$

onde as R_i son da forma

$$(\lambda) \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de A, e as C_j son da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & & & \\ -b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & a & b & \ddots & & & \\ & & -b & a & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & a & b \\ & & & & & & -b & a \end{pmatrix},$$

sendo $\lambda = a \pm i\,b$, con $b \neq 0$, un autovalor complexo de A. Ademais a matriz J é única salvo pola orde dos seus bloques. Cada autovalor real aparece en J tantas veces como a súa multiplicidade alxebraica, e cada bloque

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

tantas veces como multiplicidade do autovalor $a + i\,b$.

Así pois, para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ non singular tal que $A = PJP^{-1}$, sendo J a forma canónica de Jordan real. Entón,

$$\mathrm{e}^{t\,A} = P\mathrm{e}^{t\,J}P^{-1} = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\,R_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathrm{e}^{t\,R_p} & & & \\ & & & \mathrm{e}^{t\,C_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathrm{e}^{t\,C_q} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Vexamos a forma que teñen as exponenciais correspondentes a cada bloque de Jordan:

(1) Se

$$R = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r}$$

entón

$$\mathrm{e}^{t\,R} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\,\lambda} & t\,\mathrm{e}^{t\,\lambda} & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\mathrm{e}^{t\,\lambda} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t\,\mathrm{e}^{t\,\lambda} \\ & & & & \mathrm{e}^{t\,\lambda} \end{pmatrix}.$$

(2) Se

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ entón } \mathrm{e}^{t\,C} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a\,t}\cos bt & \mathrm{e}^{a\,t}\operatorname{sen} bt \\ -\mathrm{e}^{a\,t}\operatorname{sen} bt & \mathrm{e}^{a\,t}\cos bt \end{pmatrix}.$$

(3) Se

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & & & \\ -b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & a & b & \ddots & & & \\ & & -b & a & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & a & b \\ & & & & & & -b & a \end{pmatrix}$$

entón

$$\mathrm{e}^{t\,C} = \begin{pmatrix} B & t\,B & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}B \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t\,B \\ & & & & B \end{pmatrix},$$

sendo C unha matriz de $r \times r$ bloques de tamaño 2×2 e

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a\,t}\cos bt & \mathrm{e}^{a\,t}\operatorname{sen} bt \\ -\mathrm{e}^{a\,t}\operatorname{sen} bt & \mathrm{e}^{a\,t}\cos bt \end{pmatrix}.$$

ACTIVIDADES PROPOSTAS

- Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD individualmente no tempo de dedicación non presencial.
- Resolución dos exercicios propostos individualmente ou en grupo no tempo de dedicación non presencial.
- Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.
- Continuación do traballo en grupo. O alumnado debe realizar un traballo grupal no que se propoña un problema da vida real e se estude aplicando os contidos e técnicas que se van tratando na materia . Despois de ter proposto e iniciado o traballo despois da primeira UD, o alumnado deberá agora aplicar os coñecementos e resultados desta UD ao estudo do seu problema.
- Resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas ao inicio dunha clase para a súa entrega ao final da sesión.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Esta unidade didáctica corresponde á materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias, e a súa avaliación farase de forma conxunta coas demais unidades didácticas da materia. Para a cualificación final da avaliación continua teranse en conta as seguintes actividades:

- **Exercicios realizados na aula.** Nalgunhas das sesións presenciais recollerase ao final o traballo realizado polos alumnos durante esa sesión, que pode ser a realización dalgúns exercicios ou a resolución de cuestións teóricas breves. Ao comezo do curso especificarase a porcentaxe asignada, dentro da avaliación continua, ao conxunto de todas as actividades deste tipo realizadas en todas as unidades didácticas, dependendo o peso concreto das actividades desta UD do desenvolvemento de cada curso.
- **Traballo grupal.** Os contidos desta UD deben formar parte dese traballo grupal comentado previamente, que se completa con contidos relativos ás outras unidades didácticas. A puntuación deste traballo suporá unha porcentaxe da nota da avaliación continua, que se especificará ao comezo do curso. Dado que é un traballo libre e aberto, o peso concreto dos contidos desta UD dentro do traballo dependerá das eleccións do alumnado e do enfoque que elixan para o seu traballo. Valorarase tanto o traballo escrito como a súa exposición oral, tendo en conta a organización, a presentación, o emprego de recursos e bibliografía, o dominio do tema e a capacidade de comunicar e debater as ideas. Ademais o alumnado terá que cubrir enquisas de autoavaliación e de coavaliación dos seus compañeiros e compañeiras de grupo, cuxos resultados terán sidos en conta na avaliación do traballo.

Na cualificación final terase en conta a avaliación continua e a cualificación do exame final, no que se incluirán contidos desta unidade didáctica. O peso asignado a cada parte especificarase ao comezo de cada curso.

BIBLIOGRAFÍA

AGARWAL, R. E O'REGAN, D. (2008). *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Springer.

DIZ-PITA, É. (2022). *Sistemas de ecuacións diferenciais autónomos en R^n.* Colección Unidades Didácticas USC.

FERNÁNDEZ-PÉREZ, C. (1992). *Ecuaciones Diferenciales I.* Pirámide.

FERNÁNDEZ PÉREZ, C. E VEGAS MONTANER, J. M. (1996). *Ecuaciones Diferenciales II.* Pirámide.

OTERO-ESPINAR, M. V., E DIZ-PITA, É. (2019). *Apuntamentos da materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias.*

OTERO-ESPINAR, M. V., E DIZ-PITA, É. (2021). *Ecuacións Diferenciais Ordinarias: modelos esenciais aplicados a distintos ámbitos científicos.* Colección Esenciais USC.

PRECUP, R. (2018). *Ordinary Differential Equations.* De Gruyter.

SOTOMAYOR, J. (1979). *Liçoes de Equaçoes Diferenciais Ordinarias.* I.M.P.A.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA