MATERIA
Ecuacións Diferenciais Ordinarias

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física,
Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

unidade didáctica 3

Ciencias Experimentais

Estabilidade de sistemas non lineares

Érika Diz Pita
M. Victoria Otero Espinar

Área de Análise Matemática
Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155702

MATERIA: Ecuacións Diferenciais Ordinarias
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica (UD) forma parte da materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias (EDO) que se imparte no primeiro semestre do terceiro curso do Grao en Matemáticas e no primeiro semestre do cuarto curso do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas.

A materia está incluída no módulo de Ecuacións Diferenciais, precedida pola materia Introdución ás Ecuacións Diferencias Ordinarias.

O estudo das EDO pasou por tres etapas ben diferenciadas que se poden resumir en:

1. Intentar obter de forma explícita as solucións da EDO.

2. Abordar a cuestión da existencia de solucións das EDO por vías indirectas sen pretender resolvelas explicitamente. Nesta etapa é fundamental coñecer, entre outras cousas, se existe solución dunha EDO, se esta solución é única e en que intervalo existe esta solución.

3. Estudar cualitativamente as EDO, obtendo, a partir da propia ecuación, a máxima información posible sobre as propiedades e comportamento de ditas solucións: regularidade, acotación, converxencia cando t tende a máis infinito, periodicidade, comportamento de conxunto, etc. Isto é importante xa que en xeral non se poden obter explicitamente as solucións dunha EDO.

Na materia Introdución ás Ecuacións Diferenciais Ordinarias tratouse de dar unha introdución ás etapas 1 e 2. Nesta materia, Ecuacións Diferenciais Ordinarias, trataremos de iniciarnos na teoría cualitativa de EDO tanto dende o punto de vista teórico como práctico. Trataremos de poñer de manifesto o interese do estudo cualitativo das EDO, motivando o estudo con modelos matemáticos que xorden de diferentes problemas en distintos campos.

Esta materia supón o primeiro contacto dos alumnos coa teoría cualitativa das ecuacións diferenciais, polo que se tratará de mostrar as súas vantaxes e posibilidades.

Esta UD céntrase no estudo da estabilidade e estabilidade asintótica dos puntos de equilibrio para sistemas non lineares en $\mathbb{R}^n$. Para este fin, introdúcense os métodos da primeira aproximación e de Lyapunov. Analizarase o comportamento asintótico das órbitas da ecuación diferencial e estudarase o conxunto de puntos cuxas órbitas se aproximan a singularidades asintoticamente estables cando t tende a infinito, isto é, a rexión de atracción do punto.

A UD desenvolverase ao longo de 7 semanas, o que se corresponde con 7 sesións expositivas, 7 de seminario e 7 de laboratorio.

OBXECTIVOS

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

— introducir o alumnado no campo da teoría cualitativa das ecuacións diferenciais ordinarias, tanto dende o punto de vista teórico como práctico;
— poñer de manifesto o interese do estudo cualitativo das EDO pois permite deducir o comportamento das solucións, sen necesidade de resolver o sistema estudado. Esta resolución pode ser moi custosa en sistemas lineares de dimensión elevada, resultando imposible na maioría dos sistemas non lineares;
— abordar a estabilidade e inestabilidade dos puntos críticos do sistema, caracterizándoa nalgúns sistemas non lineares. Deducir condicións suficientes que garantan a estabilidade e inestabilidade no resto dos sistemas non lineares.
— motivar o estudo de modelos matemáticos que xorden de diferentes problemas en distintos campos científicos;

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:
— comprender os conceptos de estabilidade e estabilidade asintótica de puntos de equilibrio de sistemas lineares;
— determinar, cando sexa posible, a estabilidade dunha singularidade a través do sistema linearizado en torno ao punto;
— estudar a estabilidade dunha singularidade empregando o método directo de Lyapunov;
— analizar o comportamento asintótico das órbitas a través dos conxuntos ω e α-límite;
— estudar a rexión de atracción de singularidades asintoticamente estables;
— mostrar mediante distintas aplicacións a importancia dos conceptos de estabilidade e estabilidade asintótica.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

A metodoloxía docente prevista para esta UD inclúe actividades presenciais e non presenciais. As actividades presenciais realizaranse nas clases expositivas, de seminario e de laboratorio. Nas clases expositivas exporanse os contidos teóricos que os alumnos poden ter revisado previamente nesta unidade didáctica e noutros materiais que terán dispoñibles. Nas clases de seminario formularanse e resolveranse algúns exemplos e exercicios que permitan aplicar os contidos teóricos, e resolveranse as dúbidas que formulen os estudantes. Estas mesmas tarefas abordaranse nas clases de laboratorio, coa diferenza de que nestas nos apoiaremos no emprego de ferramentas informáticas e que se requirirá unha maior participación por parte do alumnado. As actividades non presenciais inclúen a lectura e comprensión dos contidos teóricos por parte dos alumnos, a realización dos exercicios e exemplos propostos e a elaboración dun traballo en grupos de 4 ou 5 persoas, que será transversal a todas as UD da materia, e no que se pretende que se aplique a teoría á resolución dun problema da vida real elixido polo grupo.

Os recursos necesarios estarán a disposición do alumnado nun equipo de Microsoft Teams. Nese equipo estarán dispoñibles todos os documentos que poidan ser necesarios no desenvolvemento da materia.

CONTIDOS

Esta unidade didáctica está dedicada ao estudo da estabilidade e estabilidade asintótica das singularidades dos sistemas non lineares. Introducimos o método da primeira aproximación que nos permite, nalgúns casos, deducir a estabilidade das singularidades a partir do sistema linearizado, e tamén o método directo de Liapunov. Ademais, analizaremos o comportamento asintótico a través dos conxuntos ω e α-límite e para as singularidades asintoticamente estables, estudaremos a súa rexión de atracción.

Consideraremos $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unha función de clase $\mathcal{C}^1$ no aberto A de $\mathbb{R}^n$. Estamos interesados no estudo da estabilidade dunha singularidade $x_0 \in A$ para o sistema

$$\dot{x} = F(x),$$

é dicir, un $x_0 \in A$ tal que $F(x_0) = 0$. Recordamos que unha singularidade x_0 é estable se para calquera veciñanza V de x_0 existe unha veciñanza W de x_0 tal que se $x \in W$, $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\varphi_x(t) \in V$ para todo $t \geq 0$. Por outra banda, x_0 é asintoticamente estable se é estable e existe unha veciñanza U de x_0 tal que se $x \in U$, $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\lim\limits_{t \to \infty} ||\varphi_x(t) - x_0|| = 0$.

Definición 1. A singularidade x_0 é **hiperbólica** se todos os autovalores de $DF(x_0)$ teñen parte real non nula.

1. Método da primeira aproximación

O método da primeira aproximación dános unha caracterización da estabilidade e estabilidade asintótica para algunhas singularidades de sistemas non lineares. Consiste en determinar o sistema linearizado en torno á singularidade e estudar a estabilidade da súa orixe, para logo aplicar o teorema 3 en (Diz-Pita, Otero-Espinar, 2021) e o seguinte resultado:

Teorema 1. (Hartman-Grobman) Sexan $A \subset \mathbb{R}^n$ un aberto e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Se $x_0 \in A$ é unha singularidade hiperbólica de F, entón existe unha veciñanza U de x_0, unha veciñanza V da orixe, e un homeomorfismo $h : U \to V$ que é unha conxugación topolóxica entre o campo $F_{|W}$ e o campo linear $DF(x_0)_{|V}$.

Teorema 2. Se $x_0 \in A$ é unha singularidade de F, verifícanse as seguintes proposicións:

1. Se todos os autovalores de $DF(x_0)$ teñen parte real negativa entón x_0 é asintoticamente estable.

2. Se algún autovalor de $DF(x_0)$ ten parte real positiva entón x_0 é inestable.

No caso particular do apartado 1, se todos os autovalores de $DF(x_0)$ teñen parte real negativa, a singularidade é hiperbólica polo que a demostración é trivial tendo en conta o teorema de Hartman-Grobman e os resultados sobre a conservación da estabilidade e da estabilidade asintótica mediante conxugacións topolóxicas (Teorema 1; Diz-Pita, Otero-Espinar, 2021), e a caracterización da estabilidade da orixe dos sistemas lineares (Teorema 3; Diz-Pita, Otero-Espinar, 2021). De feito, podemos enunciar o seguinte corolario:

Corolario 1. Se $x_0 \in A$ é unha singularidade hiperbólica de F entón verifícase:

1. x_0 é asintoticamente estable se e só se todos os autovalores de $DF(x_0)$ teñen parte real negativa.
2. x_0 é inestable se e só se algún autovalor de $DF(x_0)$ ten parte real positiva.

Observación 1. Debemos ter presente que cando as singularidades non son de tipo hiperbólico, entón as configuracións do sistema non linear nunha veciñanza da singularidade e do linearizado en torno á singularidade poden non ser topoloxicamente conxugadas, polo tanto, a aproximación linear non proporciona información sobre a estabilidade do sistema non linear.

A continuación analizaremos aspectos relacionados co teorema e corolario anteriores.

1. Unha singularidade non hiperbólica pode ser asintoticamente estable sen que todos os autovalores de $DF(x)$ teñan parte real negativa, como se porá de manifesto no seguinte exemplo. Isto indica que no Teorema 2 a condición "todos os autovalores de $DF(x_0)$ teñen parte real negativa", non é unha condición necesaria para a estabilidade asintotica de x_0.

   O cero é asintoticamente estable para a ecuación $\dot{x} = -x^3$, pois a solución xeral que satisfai $x(0) = x_0 \neq 0$ vén dada por

   $$\varphi(t) = \frac{x_0}{|x_0|}\sqrt{\frac{x_0^2}{2tx_0^2+1}} \quad \text{para todo } t \in (-(2x_0^2)^{-1}, +\infty),$$

   de onde se segue de inmediato que $\varphi(t)$ tende a 0 cando t tende a $+\infty$.

   Por outra parte dado que $F(x) = -x^3$, $DF(0) = 0$, e o único autovalor é o cero.

2. Nas condicións do teorema, tampouco é necesaria a condición "$DF(x_0)$ ten algún autovalor con parte real positiva" para a inestabilidade de x_0.

   A orixe é inestable para a ecuación $\dot{x} = F(x) = x^3$, como se pode comprobar facilmente, e, con todo, $DF(0) = 0$.

3. Tampouco se verifica que se a orixe é inestable para o sistema linearizado $\dot{x} = DF(x_0)x$ entón x_0 é inestable para $\dot{x} = F(x)$.

Considérese por exemplo o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases}$$

que presenta unha singularidade na orixe. A orixe do sistema linearizado

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

é inestable.

Vexamos que a orixe é estable para o sistema de partida. Para iso notamos que as órbitas do sistema veñen dadas por

$$x^4/2 + y^2 = k, \ k > 0,$$

de forma que a orixe presenta unha configuración de tipo centro e, por tanto, é estable.

Por outra banda, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3, \end{cases}$$

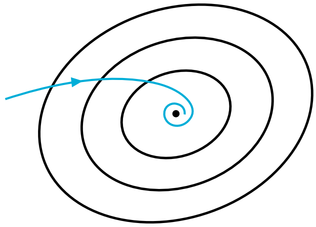
está en condicións análogas á anterior, pois o linearizado en torno á orixe é inestable (sen ser hiperbólico), e a orixe é tamén inestable para o sistema de partida.

2. Método directo de Liapunov

O método directo de Liapunov (ou segundo método de Liapunov) debe o seu nome ao feito de que permite deducir se unha singularidade é estable ou asintoticamente estable "directamente" a partir da propia ecuación diferencial. As ideas básicas do método directo son fundamentalmente xeométricas e trataremos de explicalas a continuación.

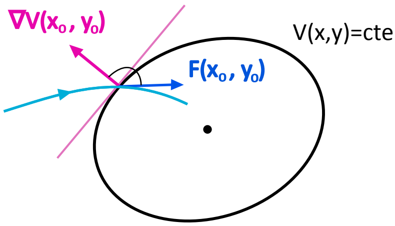
Supoñamos que $F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$ é un campo de vectores definido no aberto A do plano, e supoñamos que a orixe é unha singularidade illada para F, de modo que a función identicamente nula é unha solución. Preguntámonos polo carácter estable da orixe.

A idea fundamental do método é a seguinte: supoñamos que podemos atopar unha familia de curvas pechadas en torno á orixe e aniñadas formando un continuo; supoñamos, ademais, que a órbita do sistema $\dot{x} = F(x)$ que parte dun punto calquera dunha desas curvas entra na rexión limitada por esa curva pechada, de forma que a medida que avanza o tempo vai atravesando ditas curvas desde fóra cara a dentro e, deste xeito se aproxima á orixe cando t tende a $+\infty$. É de esperar que a existencia dunha tal familia de curvas implique a estabilidade (mesmo, quizais, a estabilidade asintótica).



Imos caracterizar esas familias de curvas sen mencionar as órbitas, coa intención de chegar a un criterio no que só interveña o campo F. Unha primeira simplificación do problema consiste en pensar que as curvas pechadas das que falabamos son as curvas de nivel dunha determinada función escalar $V : A \to \mathbb{R}$ que, por conveniencia, supomos que é de clase $\mathcal{C}^1(A)$. Se pretendemos que as órbitas crucen de fóra cara a dentro as curvas de nivel basta impor a condición de que o campo F en todo punto de cada curva apunte cara ao interior da mesma.

Neste punto simplificamos de novo o problema e supoñemos que o gradiente apunta cara á parte exterior das curvas (por exemplo, isto é así cando a gráfica de V é similar á dun paraboloide con mínimo na orixe). Xa que o gradiente é normal ás curvas de nivel, a condición de que o campo apunte cara ao interior tradúcese en que o ángulo que forma o campo co gradiente de V en cada punto debe ser maior que $\pi/2$.



É dicir, se (x_0, y_0) é un punto calquera dunha desas curvas debe ocorrer que

$$\langle F(x_0, y_0), \nabla V(x_0, y_0)\rangle < 0,$$

e como cada punto de A pertence a unha curva, debemos impoñer a condición

$$\langle F(x, y), \nabla V(x, y)\rangle < 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in A.$$

Se supomos, en cambio, que o gradiente de V apunta cara ao interior das curvas (por exemplo, cando a gráfica de V é similar á dun paraboloide con máximo na orixe), entón a condición de que o campo apunte cara ao interior tradúcese en

$$\langle F(x, y), \nabla V(x, y)\rangle > 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in A.$$

Notemos que unha función que cumpra esta segunda propiedade define outra, $-V$, que satisfai a condición anterior, polo que a partir de agora, sen perda de xeneralidade, sempre suporemos que o gradiente de V apunta cara ao exterior.

O problema será determinar esas funcións V, que chamaremos funcións de Liapunov, cuxa existencia implica a estabilidade. Empezamos agora coa formalización teórica do método.

Sexan $A \subset \mathbb{R}^n$ un aberto e $V : A \to \mathbb{R}$ unha aplicación diferenciable. Para cada $x \in A$, denotaremos por $V^*(x)$ a derivada direccional de V na dirección do campo F, é dicir

$$V^*(x) = \langle \nabla V(x), F(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) F_i(x).$$

Observación 2. A partir da definición de V^* podemos demostrar que $V^*(\varphi_x(t)) = \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t))$, $t \in I_x$, onde $\varphi_x(t) : I_x \to \mathbb{R}$ é a solución da ecuación diferencial $\dot{x} = F(x)$ que no instante 0 pasa por x.

Definición 2. Unha **función de Liapunov** para F relativa á singularidade $x_0 \in A$ é unha función diferenciable $V : U \to \mathbb{R}$, definida nun aberto U de A con $x_0 \in U$, que verifica as condicións seguintes:

1. $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$,
2. $V^*(x) \leq 0$ para todo $x \in U$.

Unha función de Liapunov é **estrita** cando $V^*(x) < 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$.

Observación 3. Se $V^*(x) = 0$ para todo $x \in A$, entón as órbitas do sistema están contidas nas curvas de nivel de V.

No seguinte resultado establécese de forma precisa como a existencia de funcións de Liapunov implica a estabilidade:

Teorema 3. Sexan A un aberto de $\mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in A$ unha singularidade. Nestas condicións verifícase:

(i) Se existe unha función de Liapunov relativa a x_0 entón x_0 é estable.

(ii) Se existe unha función de Liapunov estrita relativa a x_0 entón x_0 é asintoticamente estable.

(iii) Se existe unha función $V : U \to \mathbb{R}$, definida nun aberto $U \subset A$ con $x_0 \in U$, que verifica $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$ e $V^*(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$, entón x_0 é inestable.

Traballando con nocións semellantes, podemos enunciar o seguinte criterio de inestabilidade, aínda que debemos notar que a función empregada neste resultado non é unha función de Liapunov.

Teorema 4. Sexan A un aberto de $\mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in A$ unha singularidade. Se existe unha función $V : U \to \mathbb{R}$, definida nun aberto $U \subset A$ con $x_0 \in U$, tal que $V(x_0) = 0$, e $V^*(x)$ é definida positiva ou definida negativa en U, e para cada veciñanza de x_0, $V \subset U$, existe algún punto $a \in V \setminus \{x_0\}$ tal que $V(a)$ e $V^*(a)$ teñen o mesmo signo, entón x_0 é inestable.

Exemplo 1. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3, \\ \dot{y} = x^3. \end{cases}$$

A orixe é un punto de equilibrio non hiperbólico para o sistema, pois $DF(0,0)$ é a matriz nula. Neste caso o método da primeira aproximación non é aplicable, pero

$$V(x,y) = x^4 + y^4$$

define unha función de Liapunov e verifícase

$$V^*(x,y) = 4x^3\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 0.$$

Así a orixe é estable, e non asintoticamente estable pola Observación 3, xa que as órbitas xacen sobre as curvas pechadas en torno á orixe da ecuación

$$x^4 + y^4 = c^2.$$

Exemplo 2. Para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + yz, \\ \dot{y} = x - xz, \\ \dot{z} = xy, \end{cases}$$

a orixe é unha singularidade tal que

$$DF(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de forma que $DF(0,0,0)$ ten autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, é dicir, a orixe é unha singularidade non hiperbólica. Usemos entón o método directo de Liapunov para estudar a estabilidade da orixe. Para atopar unha función de Liapunov adecuada podemos probar con funcións do tipo

$$V(x,y,z) = c_1 x^{2n} + c_2 y^{2n} + c_3 z^{2n},$$

con certas constantes positivas c_1, c_2 e c_3. Neste caso, considerando $n = 1$, temos que

$$V^*(x,y,z) = \langle \nabla V(x,y,z), F(x,y,z) \rangle = 2(c_2 - 2c_1)xy + 2(c_1 - c_2 + c_3)xyz,$$

e tomando $c_1 = c_3 = 1$ e $c_2 = 2$, resulta que $V^*(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ polo que V é unha función de Liapunov non estrita e a orixe é estable.

Exemplo 3. Consideremos a seguinte modificación do sistema do exemplo anterior:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + yz - x^3, \\ \dot{y} = x - xz - y^3, \\ \dot{z} = xy - z^3. \end{cases}$$

A mesma función de Liapunov que determinamos anteriormente serve neste caso, de feito,

$$V^*(x,y,z) < 0 \quad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

de forma que a orixe é asintoticamente estable. Notemos que, tamén neste caso, a orixe é unha singularidade non hiperbólica.

Exemplo 4. A orixe é unha singularidade asintoticamente estable para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy^2 + z^2 - x^3, \\ \dot{y} = x + z^3 - y^3, \\ \dot{z} = -xz - zx^2 - yz^2 - z^5. \end{cases}$$

mais a orixe do sistema linearizado correspondente é estable e non asintoticamente estable. En efecto, se

$$f(x,y,z) = (-y - xy^2 + z^2 - x^3, x + z^3 - y^3, -xz - zx^2 - yz^2 - z^5),$$

entón

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y^2 - 3x^2 & -1 - 2xy & 2z \\ 1 & -3y^2 & 3z^2 \\ -z - 2zx & -z^2 & -x - x^2 - 2yz - 5z^4 \end{pmatrix},$$

de onde

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz xacobiana son 0 e $\pm i$ e a orixe é estable para o sistema linear correspondente, pois os autovalores teñen parte real cero e cada un dá lugar a tantos bloques na forma canónica de $Df(0,0,0)$ (que é ela mesma) como a súa multiplicidade.

Para determinar as órbitas do sistema linear podemos resolvelo directamente, observando que a solución xeral vén dada por

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t, c_2 \cos t - c_1 \operatorname{sen} t, c_3),$$

de modo que a órbita de cada solución percorre unha certa circunferencia centrada na orixe sobre un determinado plano $z = cte$.

Isto non nos di nada sobre a estabilidade da orixe para o sistema de partida. Aplicando o método de Liapunov para unha función $V(x, y, z) = c_1x^2+c_2y^2+c_3z^2$, comprobamos que para as $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, verifícase $V^*(x, y, z) < 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\backslash\{(0, 0, 0)\}$, polo que V é unha función de Liapunov estrita relativa á orixe e, polo tanto, a orixe é asintoticamente estable para o sistema.

Observación 4. Dado un sistema linear, o aumento de termos non lineares arbitrariamente pequenos pode cambiar o carácter estable da orixe de distintas formas, como podemos observar a continuación.

Sabemos que a orixe é un centro para o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Empregando a función de Liapunov $V(x, y) = x^2+y^2$, e considerando un parámetro $\alpha > 0$, podemos demostrar as seguintes afirmacións:

(a) A orixe é asintoticamente estable para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \alpha(x^3 + xy^2), \\ \dot{y} = x - \alpha(y^3 + yx^2). \end{cases}$$

(b) A orixe é inestable para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \alpha(x^3 + xy^2), \\ \dot{y} = x + \alpha(y^3 + yx^2). \end{cases}$$

(c) A orixe é estable, e non asintoticamente estable, para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \alpha xy, \\ \dot{y} = x + \alpha x^2. \end{cases}$$

Os apartados (a) e (b) son inmediatos. Para o sistema (c) tense que $V^*(x, y, z) = 0$, de forma que as órbitas xacen sobre circunferencias centradas na orixe. Posto que existen puntos tan preto da orixe como queiramos e cuxas órbitas se manteñen a distancia positiva do mesmo, concluímos que a estabilidade da orixe non é asintótica. Aínda que tanto no sistema linear coma no sistema (c) as órbitas están sobre circunferencias centradas na orixe, os retratos de fases son diferente en ambos os sistemas. Mentres que no sistema linear as órbitas son periódicas, no sistema (c), a recta $x = -1/\alpha$ está formada por singularidades, así que as circunferencias que cortan dita recta conteñen catro órbitas do sistema e non unha soa.

3. Conxuntos invariantes. Rexión de atracción

Neste apartado estaremos interesados no comportamento asintótico das solucións dunha EDO cando t tende $\pm\infty$. Isto é, queremos coñecer, cando teña sentido, como "morre" ou "nace" unha órbita dun punto.

Ademais, interésanos atopar o conxunto de puntos para os que as órbitas que parten deles converxen a unha singularidade dada, que é o que entenderemos por rexión de atracción dunha singularidade.

Se $x \in A$, denotamos por $\gamma_x = \{\varphi_x(t),\ t \in I_x\}$ á órbita de x. A **semiórbita positiva de** x é o conxunto

$$\gamma_x^+ = \{\varphi_x(t),\ t \in I_x,\ t \geq 0\}.$$

A **semiórbita negativa de** x é

$$\gamma_x^- = \{\varphi_x(t),\ t \in I_x,\ t \leq 0\}.$$

Definición 3. Sexa $\mathcal{D} = \{(t,x);\ x \in A\ , t \in I_x\} \subset \mathbb{R} \times A$. A aplicación $\varphi : \mathcal{D} \to A$ definida por

$$\varphi(t,x) = \varphi_x(t),\ (t,x) \in \mathcal{D},$$

chámase fluxo de F (ou da EDO $\dot{x} = F(x)$).

Se F é de clase $\mathcal{C}^1$ en A entón $\varphi(\cdot,\cdot)$ é de clase $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathcal{D}$. Ademais, a aplicación fluxo verifica:

- $\varphi(0,x) = x,\ \forall x \in A,$
- $\varphi(s,\varphi(t,x)) = \varphi(s+t,x),\ \forall s \in I_{\varphi(t,x)},\ t \in I_x,\ \forall x \in A.$

Definición 4. Sexa $x \in A$ tal que $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Definimos o **conxunto ω-límite** de x como

$$\omega(x) = \{y \in A \mid\ \exists\,\{t_n\} \subset \mathbb{R},\ \text{verificando} \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \{\varphi_x(t_n)\} = y\}.$$

Se $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \leq 0$ o **conxunto α-límite** de x é

$$\alpha(x) = \{y \in A \mid\ \exists\,\{t_n\} \subset \mathbb{R},\ \text{verificando} \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \{\varphi_x(t_n)\} = y\}.$$

A partir das definicións anteriores introducimos o concepto de órbitas homoclínicas e heteroclínicas para os casos particulares nos que os conxuntos ω e α-límites sexan un mesmo punto ou puntos distintos.

Definición 5. A órbita dun punto $x \in A$, γ_x é unha órbita **homoclínica** se $\omega(x) = \gamma(x) = p$ sendo $p \in A$. A órbita γ_x é unha órbita **heteroclínica** se existen $p_1, p_2 \in A$, $p_1 \neq p_2$ tales que $\omega(x) = p_1$, $\gamma(x) = p_2$.

Observación 5. O conxunto α-límite de x para o campo F coincide co conxunto ω-límite de x para o campo $-F$. Por este motivo, para estudar as propiedades xerais dos conxuntos α-límite e ω-límite, será suficiente restrinxir o estudo ás propiedades do conxunto ω-límite.

Teorema 5.

1. Se x é unha singularidade entón $\omega(x) = \{x\}$.
2. Se γ_x é unha órbita periódica entón $\omega(x) = \gamma_x$.
3. Se $y \in \gamma_x$ entón $\omega(x) = \omega(y)$.

Definición 6. O conxunto ω-límite dunha órbita defínese como o conxunto ω-límite de calquera dos seus puntos.

Teorema 6. Se $\gamma_x^+ \subset K \subset A$, sendo K compacto, entón:

1. $\omega(x)$ é un conxunto non baleiro,
2. $\omega(x)$ é un conxunto compacto,
3. $\omega(x)$ é un conxunto invariante,
4. $\varphi_x(t)$ aproxima a $\omega(x)$ cando t tende a ∞, é dicir:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, T > 0 \text{ tal que } \;\forall t \geq T \;\; \exists\, y_t \in \omega(x) \text{ verificando } ||\varphi_x(t) - y_t|| < \varepsilon.$$

Observación 6. Da demostración do resultado podemos afirmar que o conxunto $\omega(x)$ límite é sempre pechado e invariante aínda que non se cumpra a hipótese de existencia dun compacto $K \subset A$ que conteña a semiórbita positiva de x.

Definición 7. Se $x_0 \in A$ é unha singularidade asintoticamente estable, defínese a **rexión de atracción** de x_0 como

$$\mathcal{B}(x_0) = \{x \in A \;/\; \varphi_x(t) \text{ está definida } \forall t \geq 0, \text{ e } \lim_{t\to\infty} \varphi_x(t) = x_0\}.$$

Definición 8. Unha singularidade $x_0 \in A$ de F é **globalmente asintoticamente estable** se $\mathcal{B}(x_0) = A$

Definición 9. Sexa $M \subset A$.

1. M é **positivamente invariante** se:

$$\forall x \in M, \quad \varphi_x(t) \text{ está definida } \forall t \geq 0, \text{ e } \gamma_x^+ \subset M.$$

2. M é **negativamente invariante** se

$$\forall x \in M, \quad \varphi_x(t) \text{ está definida } \forall t \leq 0, \text{ e } \gamma_x^- \subset M.$$

3. M é **invariante** se M é positivamente e negativamente invariante.

Teorema 7. A rexión de atracción dunha singularidade asintoticamente estable x_0 é positivamente invariante.

Nos seguintes resultados obtemos condicións suficientes que garanten que un determinado conxunto está na rexión de atracción dunha singularidade asintoticamente estable.

Teorema 8. Se $A = \mathbb{R}^n$ e existe unha función de Liapunov estrita relativa á orixe definida en todo $\mathbb{R}^n$, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{||y|| \to \infty} V(y) = \infty$, entón $\mathcal{B}(\theta) = \mathbb{R}^n$.

Teorema 9. Se $V : U \subset A \to \mathbb{R}$ é unha función de Liapunov relativa á orixe, e a orixe é o único subconxunto invariante do conxunto

$$E = \{x \in U \mid V^*(x) = 0\},$$

entón a orixe é asintoticamente estable. Ademais, se $K \subset U$ é un compacto positivamente invariante que contén a orixe no seu interior, entón K está contido na rexión de atracción da orixe.
En particular, se C_k, a compoñente conexa de $S_k = \{x \in U \mid V(x) \leq k\}$ que contén a orixe, é compacto, entón C_k está contido na rexión de atracción da orixe.

Teorema 10. Se $A = \mathbb{R}^n$ e existe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unha función de Liapunov relativa á orixe, tal que a orixe é o único subconxunto invariante de $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V^*(x) = 0\}$ e $\lim\limits_{||y|| \to \infty} V(y) = \infty$, entón á orixe é globalmente asintoticamente estable (é dicir, é estable e $\mathcal{B}(\theta) = \mathbb{R}^n$).

4. Aplicacións á mecánica non linear. Sistemas conservativos

Sistemas conservativos

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = F(x),$$

con $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unha función de clase $\mathcal{C}^1$ no aberto A de $\mathbb{R}^n$.

Unha función $V : A \to \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ que non é constante en abertos de A e que verifica $V^*(x) = 0$ para todo $x \in A$ (isto é, V é constante sobre cada traxectoria do sistema) é unha **integral primeira** para F.

Se existe unha integral primeira para F diremos que o sistema $\dot{x} = F(x)$, ou o campo F, é **conservativo**. Pode demostrarse que un sistema conservativo non pode ter singularidades asintoticamente estables.

No caso en que V sexa nula nunha singularidade e positiva nos demais puntos dunha veciñanza, a integral primeira é unha función de Lyapunov relativa á singularidade.

Sistemas mecánicos conservativos

A segunda lei de Newton establece que a forza aplicada a un sistema mecánico é igual ao produto da súa masa pola aceleración:

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}).$$

Cando a forza só depende da posición x, o sistema é conservativo. A ecuación diferencial de segunda orde pode reescribirse, tomando $m = 1$, como

$$\ddot{x} = f(x).$$

Suporemos que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ no intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. O sistema equivalente á ecuación é

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x), \end{cases}$$

definido no aberto $A = I \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$. Os puntos de equilibrio do sistema son os puntos $(x_0, 0)$ con $f(x_0) = 0$. Tendo en conta que a ecuación das órbitas nunha veciñanza dun punto regular con $y \neq 0$ vén dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y},$$

integrando obtemos que a órbita do sistema verifica

$$\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E,$$

onde E é unha constante e

$$U(x) = -\int_0^x f(s)ds.$$

A expresión das órbitas ten unha clara interpretación física: o termo $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ representa a enerxía cinética do sistema e $U(x)$ representa a enerxía potencial. A ecuación das órbitas establece que a enerxía total do sistema se conserva ao longo de cada órbita.

Nos sistemas mecánicos conservativos a función de enerxía total

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$$

é unha integral primeira para o sistema. Se ademais se anula nunha singularidade e é positiva nos demais puntos nunha veciñanza da singularidade, a función de enerxía é unha función de Liapunov para o sistema relativa á singularidade e, xa que $E^*(x, y) = 0$ nesa veciñanza, a singularidade é estable e non asintoticamente estable.

Un exemplo de sistema conservativo é o que describe o movemento dun péndulo que consta dun peso de masa m suxeito a unha barra ríxida de masa desprezable e lonxitude l, sobre o que actúa a única forza dada polo peso cando se despraza da súa posición de equilibrio un certo ángulo θ. Tendo en conta a segunda lei de Newton e que a única forza que actúa no sistema é a compoñente tanxencial do peso, pois a compoñente normal compénsase coa tensión da barra, tense a ecuación

$$m\frac{d^2}{dt^2}r(t) = -m\,g\sin\theta.$$

sendo $r(t) = l\,\theta(t)$ o espazo percorrido polo peso. Así, a ecuación é

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

e as órbitas do sistema asociado

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\dfrac{g}{l}\sin x, \end{cases}$$

están sobre as curvas de nivel da función enerxía total

$$y^2 - \frac{2g}{l}\cos x = K,$$

sendo $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$ e K unha constante arbitraria.

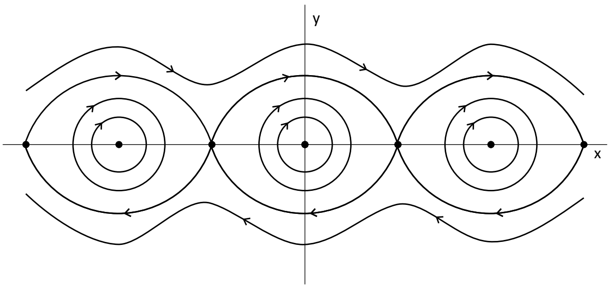


Figura 1: Retrato de fases do sistema que describe o movemento do péndulo sen rozamento.

Se o movemento do péndulo está suxeito a unha forza de rozamento, o sistema deixa de ser conservativo pois o rozamento provoca unha disipación de enerxía. Se supoñemos que a forza de rozamento é proporcional á velocidade, a ecuación que rexe o movemento nesta situación é

$$\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\,\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta,$$

con $k > 0$, e o sistema equivalente vén dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\dfrac{k}{m}\,y - \dfrac{g}{l}\sin x. \end{cases}$$

Usando o método da primeira aproximación nunha veciñanza do punto de equilibrio podemos ver que os centros non lineares do modelo sen rozamento transfórmanse en nodos atractores se o rozamento é forte, $\frac{k^2}{m^2} > \frac{4g}{l}$, en nodos dexenerados estables no caso crítico, $\frac{k^2}{m^2} = \frac{4g}{l}$ e en focos atractores cando o rozamento é menor, $\frac{k^2}{m^2} < \frac{4g}{l}$. No primeiro caso, o péndulo desprazado da súa posición de equilibrio, volve a ela lentamente a causa do forte rozamento. No segundo, faino cunha única oscilación e no terceiro aproxímase á posición de equilibrio con oscilacións que se van amortecendo.

Por outro lado, a función enerxía do péndulo sen rozamento,

$$E(x,y) = y^2 - \frac{2g}{l}\cos x,$$

definida nunha veciñanza conveniente da orixe, é unha función de Liapunov relativa á orixe para este sistema. Ademais, existe unha veciñanza da orixe, $B((0,0),r)$, na que a orixe é o único subconxunto invariante do conxunto

$$E = \{(x,y) \in B((0,0),r) \mid E^*(x,y) = 0\} = \{(x,0) \in B((0,0),r)\},$$

polo que a orixe é asintoticamente estable.

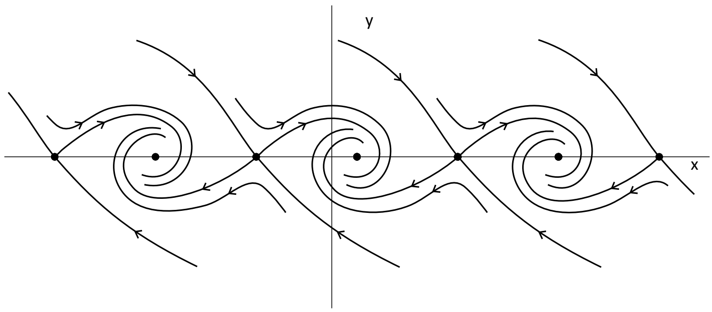


Figura 2: Retrato de fases do sistema que describe o movemento do péndulo con rozamento.

Sistemas hamiltonianos.

Un sistema de ecuacións diferenciais en $\mathbb{R}^{2n}$ é un **sistema hamiltoniano** se é da forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \\ \dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \end{cases}$$

con $i = 1, \ldots, n$, sendo $H \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$ e A un aberto de $\mathbb{R}^{2n}$.

Un gran número de sistemas de ecuacións diferenciais en mecánica e óptica redúcense a sistemas desta forma.

Se o Hamiltoniano ou función de Hamilton H non é constante en abertos de A, entón o sistema hamiltoniano é un sistema conservativo. En efecto, pode comprobarse que $H^*(x_, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = 0$ en A, polo que a función H é unha integral primeira. No caso en que H se anule na orixe e sexa positiva nos demais puntos dunha veciñanza, entón é unha función de Lyapunov relativa ´á orixe.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

- Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD individualmente no tempo de dedicación non presencial.
- Resolución dos exercicios propostos individualmente ou en grupo no tempo de dedicación non presencial.
- Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.
- Continuación do traballo en grupo. O alumnado debe realizar un traballo grupal no que se propoña un problema da vida real e se estude aplicando os contidos e técnicas que se van tratando na materia. Despois de ter proposto e iniciado o traballo despois da primeira UD, o alumnado deberá agora aplicar os coñecementos e resultados desta UD ao estudo do seu problema.
- Resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas ao inicio dunha clase para a súa entrega ao final da sesión.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Esta unidade didáctica corresponde coa materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias, e a súa avaliación farase de forma conxunta coas demais unidades didácticas da materia. Para a cualificación final da avaliación continua teranse en conta as seguintes actividades:

- **Exercicios realizados na aula.** Nalgunhas das sesións presenciais recollerase ao final o traballo realizado polos alumnos durante esa sesión, que pode ser a realización de algúns exercicios ou a resolución de cuestións teóricas breves. Ao comezo do curso especificarase a porcentaxe asignada, dentro da avaliación continua, ao conxunto de todas as actividades deste tipo realizadas en todas as unidades didácticas, dependendo o peso concreto das actividades desta UD do desenvolvemento de cada curso.
- **Traballo grupal.** Os contidos desta UD deben formar parte dese traballo grupal comentado previamente, que se completa con contidos relativos ás outras unidades didácticas. A puntuación deste traballo suporá unha porcentaxe da nota da avaliación continua, que se especificará ao comezo do curso. Dado que é un traballo libre e aberto, o peso concreto dos contidos desta UD dentro do traballo dependerá das eleccións do alumnado e do enfoque que elixan para o seu traballo. Valorarase tanto o traballo escrito como a súa exposición oral, tendo

en conta a organización, a presentación, o emprego de recursos e bibliografía, o dominio do tema e a capacidade de comunicar e debater as ideas. Ademais o alumnado terá que cubrir enquisas de autoavaliación e de coavaliación dos seus compañeiros e compañeiras de grupo, cuxos resultados terán tidos en conta na avaliación do traballo.

Na cualificación final terase en conta a avaliación continua e a cualificación do exame final, no que se incluirán contidos desta unidade didáctica. O peso asignado a cada parte especificarase ao comezo de cada curso.

BIBLIOGRAFÍA

AGARWAL, R. E O'REGAN, D. (2008). *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Springer.

DIZ-PITA, É. (2022). *Sistemas de ecuacións diferenciais autónomos en R^n.* Colección Unidades Didácticas USC.

FERNÁNDEZ-PÉREZ, C. (1992). *Ecuaciones Diferenciales I.* Pirámide.

FERNÁNDEZ PÉREZ, C. E VEGAS MONTANER, J. M. (1996). *Ecuaciones Diferenciales II.* Pirámide.

OTERO-ESPINAR, M. V., E DIZ-PITA, É. (2019). *Apuntamentos da materia Ecuacións Diferenciais Ordinarias.*

OTERO-ESPINAR, M. V., E DIZ-PITA, É. (2021). *Ecuacións Diferenciais Ordinarias: modelos esenciais aplicados a distintos ámbitos científicos.* Colección Esenciais USC.

OTERO-ESPINAR, M. V., E DIZ-PITA, É. (2022). *Estabilidade de sistemas lineares.* Colección Unidades Didácticas USC.

PRECUP, R. (2018). *Ordinary Differential Equations.* De Gruyter.

SOTOMAYOR, J. (1979). *Liçoes de Equaçoes Diferenciais Ordinarias.* I.M.P.A.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade