MATERIA
Continuidade e derivabilidade de funcións dunha variable real

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas

unidade didáctica
2

Ciencias Experimentais

Límites

Lucía López Somoza

Área de Análise Matemática
Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.es/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155528

MATERIA: Continuidade e derivabilidade de funcións dunha variable real
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade I: Preliminares topolóxicos

Abertos, pechados, puntos de acumulación, compactos e conexos en $\mathbb{R}$

Unidade II: Límites

Límite dunha función nun punto
Límites laterais
Límites infinitos e no infinito
Cálculo de límites. Indeterminacións

Unidade III: Continuidade

Continuidade dunha función nun punto. Continuidade secuencial. Funcións continuas: Propiedades
Teoremas de Weierstrass e Bolzano
Continuidade das funcións monótonas e das súas inversas
Continuidade uniforme. Teorema de Heine. Teorema da extensión continua. Criterios suficientes e criterios necesarios para a continuidade uniforme

Unidade IV: Derivabilidade

Derivada e derivadas laterais dunha función nun punto
Interpretacións xeométrica e física da derivada
Regras de derivación
Comportamento local das funcións derivables. Puntos críticos. Teorema de Darboux
Teorema do valor medio. Criterio de monotonía nun intervalo
Regras de L'Hôpital: Aplicación ao cálculo de indeterminacións

Unidade V: Derivabilidade de orde superior

Derivadas de orde superior
Concavidade e convexidade
O polinomio de Taylor. Resto da fórmula de Taylor. Aplicacións: Cálculos aproximados

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica forma parte da programación da materia obrigatoria "Continuidade e derivabilidade de funcións reais dunha variable real", do primeiro curso do Grao en Matemáticas. Esta materia forma parte do Módulo de Análise Matemática nunha variable e impártese no primeiro curso da titulación, cunha carga de 6 créditos ECTS.

Os contidos desta materia son ferramentas esenciais para o desenvolvemento do Cálculo, o cal xoga un papel importante en moitas áreas diversas como poden ser física, química, economía, enxeñaría ou informática e, por suposto, nas matemáticas.

Ademais, esta materia é fundamental para o desenvolvemento posterior do cálculo en varias variables, o cal terá lugar nas materias "Diferenciación de funcións de varias variables reais" e "Series funcionais e integración de Riemann en varias variables reais" do segundo curso do Grao en Matemáticas.

Nesta unidade didáctica estúdase o concepto de límite de funcións dunha variable real. Este concepto é familiar para os alumnos, que xa traballan con límites nos estudos previos á universidade. Por este motivo, o obxectivo principal da unidade non é tanto introducir conceptos novos, senón dotalos do formalismo e rigor matemático que precisa coñecer o alumnado do Grao en Matemáticas. Deste xeito, amais dos contidos novos que se engadan aos xa coñecidos polo alumnado, esta unidade contribuirá ao desenvolvemento das capacidades de razoamento e de formalización de demostracións matemáticas.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Ademais de contribuír a acadar as competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título do Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela, nesta materia traballaranse as seguintes competencias específicas:

- CE1 Comprender e utilizar a linguaxe matemática.
- CE2 Coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática.
- CE3 Idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas.
- CE4 Identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.
- CE5 Asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos.
- CE6 Saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais.
- CE9 Utilizar aplicacións informáticas de análise estatística, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en matemáticas e resolver problemas.

Enuméranse a continuación os obxectivos que se espera que os alumnos acaden ao final da presente unidade didáctica:

- Comprender o concepto de límite dunha función real de variable real e ser quen de traballar con el de forma intuitiva, xeométrica e rigorosa.
- Estudar a existencia ou non existencia de límite dunha función real de variable real.
- Coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos relativos ao cálculo de límites.
- Idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e estratexias para confirmalas ou negalas.
- Identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Para levar a cabo o desenvolvemento desta unidade didáctica seguirase unha metodoloxía activa, coa que se procurará fomentar a participación do alumnado.

O desenvolvemento da unidade levarase a cabo en tres tipos diferentes de clases: expositivas, seminarios e laboratorios.

Nas clases expositivas o docente exporá a parte teórica da unidade, combinando as leccións maxistrais con outras nas que se fomentará a participación do alumnado. Procurarase ilustrar os contidos teóricos con exemplos, para facelos máis comprensibles. Asemade proporanse cuestións para implicar os estudantes na súa discusión.

Os seminarios dedicaranse á resolución de exercicios prácticos e á discusión entre o profesor e o alumnado de diversas cuestións de carácter teórico-práctico. Abordaranse algúns problemas e aspectos da materia non tratados nas clases expositivas e analizaranse con detalle aquelas cuestións que adoitan resultar de máis difícil comprensión para o alumnado. A participación activa do alumnado será fundamental nestas sesións.

Por último, os laboratorios centraranse na resolución de exercicios por parte do alumnado, procurando que nestas sesións os alumnos traballen de forma máis autónoma. Nalgunha das sesións de laboratorio proporase que os alumnos traballen en pequenos grupos supervisados polo profesorado para tentar resolver problemas máis complexos.

Ademais do anterior, o alumnado terá ao seu dispor sesións de titorías individualizadas ou en grupos moi reducidos. Estas titorías terán un carácter voluntario e serán solicitadas ao profesor polo alumno cando este último desexe tratar cuestións concretas ou resolver dúbidas da materia.

CONTIDOS

Introduciranse a continuación os contidos básicos a desenvolver na presente unidade didáctica.

1. O concepto de límite

Consideraremos, de agora en adiante, f unha función real de variable real, é dicir, unha función definida nun conxunto A de números reais que asigna a cada elemento $x \in A$ un único valor real $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\colon A \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Observemos que, salvo que se indique o contrario, o dominio da función, A, é un subconxunto arbitrario de $\mathbb{R}$.

A idea intuitiva de que o límite de f cando x tende a x_0 é $L \in \mathbb{R}$ é que os valores de $f(x)$ se atopan arbitrariamente próximos a L sempre que os valores de x se tomen o suficientemente próximos a x_0 e distintos de x_0. Neste sentido, para poder garantir que existen puntos de A o suficientemente próximos a x_0 e distintos de x_0, será preciso que x_0 sexa un punto de acumulación de A.

Definición 1. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Dise que o número real L é o límite de f cando x tende a x_0, e escríbese

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se para cada número real positivo ε se pode atopar un número real positivo $\delta(\varepsilon, x_0)$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todos os puntos $x \in A$ tales que $0 < |x - x_0| < \delta$.

A condición anterior exprésase matematicamente do seguinte modo:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tal que } x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esta condición pode reescribirse de varias formas equivalentes:

- $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que se $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, entón $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
- $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que se $x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$, entón $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que se $x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$, entón $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
- $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$, entón $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$, entón $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$.
- ...

A equivalencia entre todas as expresións anteriores pódese comprobar sen máis que reinterpretar as desigualdades nas que aparece o valor absoluto na definición de límite.

Interpretación xeométrica

A definición anterior admite unha sinxela interpretación gráfica. Nas condicións consideradas, calquera que sexa o valor $\varepsilon > 0$ escollido, podemos atopar algún número real $\delta > 0$ (que, en xeral, dependerá tanto de ε coma do punto x_0 no que esteamos calculando o límite) para o cal a gráfica da restrición de f ao conxunto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ está contida no rectángulo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, que se constrúe como produto cartesiano dos intervalos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Dito doutro modo, o que ocorre é que as imaxes a través de f dos puntos do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ distintos de x_0 están no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, tal e como se pode observar na Figura 1.

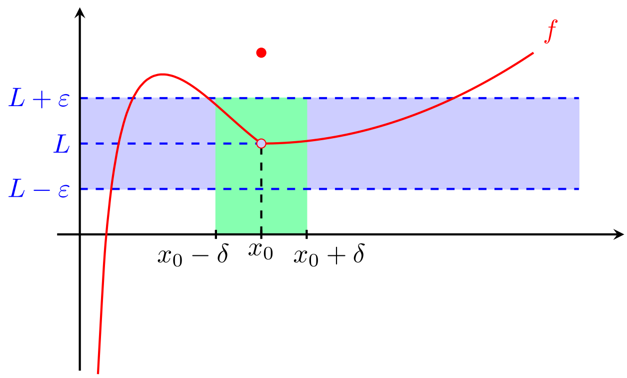

Figura 1: Interpretación xeométrica do concepto de límite.

Cabe observar ademais que no caso da función representada na figura, esta se atopa definida no punto x_0 pero a imaxe que toma a función f en dito punto non está (ni ten por que estar) no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Observación 1. Con respecto á definición de límite, cabe considerar as seguintes observacións:

(a) Na definición de límite requírese que a condición se cumpra para cada ε positivo, non para un valor de ε en concreto.

(b) A notación $\delta(\varepsilon, x_0)$ significa que o δ que cumpra a condición pode depender do valor de ε e do punto x_0 considerado, aínda que hai funcións para as que isto non ocorre e é posible tomar o mesmo valor de δ para todo valor de x_0.

(c) O δ atopado non é único. De feito, se dado un certo valor de ε se atopa un δ para o cal se cumpre a condición pedida, entón podería reemprazarse este δ por calquera valor δ' menor que δ.

(d) Se dado un valor de ε existe un δ que cumpra a definición de límite, entón ese mesmo δ serve para calquera ε' maior que ε.

(e) A propiedade arquimediana garántenos que, dado un número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Por tanto, tendo en conta a observación (d), é suficiente con comprobar que a definición de límite se cumpre cando se toma $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

(f) A observación anterior segue sendo certa se se toma calquera sucesión de epsilons $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que sexa decrecente e converxente a 0.

(g) Para falar de límite dunha función nun punto x_0 non é preciso que o punto x_0 estea no dominio de f, simplemente se require que sexa un punto de acumulación do mesmo (é dicir, que existan puntos do dominio de f arbitrariamente próximos a el).

(h) En caso de que $x_0 \in A$ terá sentido falar de $f(x_0)$ pero pode ocorrer que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq f(x_0).$$

De feito, é fundamental observar que na definición de límite aparece o termo $0 < |x - x_0| < \delta$, o cal implica que o valor da función no punto (en caso de que $x_0 \in A$) non inflúe en absoluto na existencia (nin no valor) do límite.

(i) Da definición de límite e as observacións previas deducimos que dúas funcións que tomen os mesmos valores nunha veciñanza de x_0, excepto posiblemente no punto x_0 (no que poderían non estar nin sequera definidas), terán o mesmo comportamento con respecto á existencia de límite no punto x_0. Por tanto, para tales efectos, pódense facer previamente as simplificacións que conveñan. Por exemplo, se quixésemos estudar a existencia de límite da función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $x \neq 3$ no punto $x_0 = 3$ poderiamos estudar a existencia de límite nese punto da función $g(x) = x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1. Probaremos, usando a definición de límite, que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Para iso, debemos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - 2| < \delta$ entón $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Para poder atopar un δ axeitado é preciso establecer unha relación entre os valores $|x^2 - 4|$ e $|x - 2|$. Para iso, comezamos observando que

$$|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2| \leq (|x| + 2)\,|x - 2|.$$

Ademais, como estamos calculando o límite no punto $x_0 = 2$, podemos asumir que $x \in (1, 3)$ (é dicir, x tal que $0 < |x - 2| < 1$) e entón temos que

$$|x^2 - 4| \leq 5\,|x - 2|.$$

Por tanto, tomando

$$0 < \delta \leq \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{5},\, 1\right\},$$

tense que se $0 < |x - 2| < \delta$ entón

$$|x^2 - 4| \leq 5\,|x - 2| < 5\,\delta < 5\,\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Negación da definición de límite

Como veremos, unha función non sempre ten límite (real) nun punto de acumulación do seu dominio. Por este motivo convén saber expresar, en particular, que un certo número real L non é o límite dunha función nun punto. Para isto bastará con negar a Definición 1 (ou calquera das súas variantes). Negaremos a continuación a Definición 1:

Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}$. Entón, L non é o límite de f cando x tende a x_0 se e só se se cumpre que

$$\exists\,\varepsilon_0 > 0 \text{ tal que } \forall\,\delta > 0,\ \exists\,x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ \text{tal que } |f(x) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Noutras palabras, dicir que $L \in \mathbb{R}$ non é o límite de f cando x tende a x_0 quere dicir que existe unha veciñanza de L, $(L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0)$ tal que en calquera veciñanza reducida de x_0, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, sempre se poderá atopar algún punto de A cuxa imaxe por f non estea en $(L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0)$.

2. Propiedades de límites

Veremos nesta sección algunhas propiedades dos límites de funcións.

Proposición 1. Se unha función f ten límite nun punto x_0, entón está limitada nunha veciñanza de x_0.

Demostración. Sexa $L \in \mathbb{R}$ o límite de f en x_0. Pola definición de límite, tomando $\varepsilon = 1$, sabemos que existirá $\delta > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$, entón $|f(x) - L| < 1$. Logo, para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$, cumprirase que

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$$

e, por tanto, f está limitada nunha veciñanza de x_0. $\square$

Proposición 2. Sexan $f\colon A \subset R \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A tales que existe

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Entón:

(1) Se $L > 0$ entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in A$ que cumpra que $0 < |x - x_0| < \delta$.

(2) Se $L < 0$ entón existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in A$ que cumpra que $0 < |x - x_0| < \delta$.

(3) Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, entón $L \geq 0$.

(4) Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, entón $L \leq 0$.

(5) Se existen $\delta > 0$ e dous valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, entón $a \leq L \leq b$.

Demostración. (1) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, entón se cumpre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$. Basta tomar entón $\varepsilon = \frac{L}{2}$ para garantir que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in \left(\frac{L}{2}, 3\,\frac{L}{2}\right)$ (e, en particular, $f(x) > 0$) para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$.

(2) Análogo a (1).

(3) Consecuencia directa de (2).

(4) Consecuencia directa de (1).

(5) Sexa $g(x) = f(x) - a$. Entón, cúmprese que $\lim_{x\to x_0} g(x) = L - a$ e, ademais, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$. Logo, por (3), sabemos que $L - a \geq 0$, é dicir, $L \geq a$. Analogamente pode verse que $L \leq b$.

□

Observación 2. As conclusións obtidas nos apartados (3) e (4) non melloran se se pide que f cumpra as desigualdades de forma estrita. Dito doutro modo, que exista $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, non implica que $L > 0$ (analogamente coas desigualdades invertidas). Un exemplo disto é a función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

que toma valores estritamente positivos en todo punto do seu dominio pero ten límite 0 en $x_0 = 0$.

O seguinte resultado establece o nexo de unión entre os conceptos de límite para sucesións e para funcións.

Teorema 1. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A e $L \in R$. As seguintes afirmacións son equivalentes:

(1) L é o límite da función f cando x tende a x_0.

(2) Dada calquera sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, con $x_n \neq x_0$, converxente a x_0, a sucesión das imaxes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L.

Demostración. Vexamos en primeiro lugar que $(1) \Rightarrow (2)$:

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ entón, por definición de límite, tense que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para os $x \in A$ tales que $0 < |x - x_0| < \delta$.

Consideremos entón $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ unha sucesión converxente a x_0 e vexamos que a sucesión das imaxes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ converxe a x_0, entón existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, sendo δ o valor atopado na definición de límite. Tense entón que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, entón $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ e, consecuentemente, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L.

Vexamos agora que $(2) \Rightarrow (1)$:

Supoñamos que non se cumpre (1), é dicir, que non se cumpre que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Entón, negando a definición de límite, existe un valor $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe un punto $x_\delta \in A$ tal que $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ e $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. En particular, para ese valor ε_0, podemos tomar unha sucesión de deltas, $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ e teríase entón que para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá un punto $x_n \in A$ tal que $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Deste modo temos construído unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, con $x_n \neq x_0$, converxente a x_0, para a cal a sucesión das imaxes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converxe a L (é dicir, non se cumpre (2)). $\square$

O resultado anterior resulta especialmente útil de cara a probar que unha función non ten límite nun punto, tal e como se pode ver no seguinte exemplo.

Exemplo 2. Consideremos a función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{sin}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

e o punto $x_0 = 0$. Se tomamos por exemplo a sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tense que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ ten límite 0. Non obstante, se tomamos a sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tense que $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ ten límite 1. Como consecuencia, podemos afirmar que f non ten límite en $x_0 = 0$.

O Teorema 1 permite trasladar todas as propiedades coñecidas para sucesións ao marco das funcións reais dunha variable real, tal e como se establece a continuación.

Proposición 3. Se unha función f ten límite nun punto, entón este é único.

Proposición 4. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dúas funcións e x_0 un punto de acumulación de $A \cap B$. Se existen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in \mathbb{R},$$

entón:

(a) Existe $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$.

(b) Existe $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda\, f(x)) = \lambda\, L_1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Existe $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = L_1\, L_2$.

(d) Se $L_1 \neq 0$, existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L_1}$.

(e) Se $L_2 \neq 0$, existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Observación 3. No apartado (d) da proposición anterior é posible que non se poida definir a función $\frac{1}{f}$ en todo o conxunto A pero, como $L_1 \neq 0$, sábese que $f(x) \neq 0$ nunha veciñanza reducida de x_0, polo que ten sentido falar de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Teorema 2. Sexan $f,\, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Se f e g teñen límite no punto x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$, entón $L_1 \leq L_2$.

Teorema 3 (de compresión (Regra do sándwich))**.** Sexan $f,\, g,\, h\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Supoñamos que:

(1) Existe $\delta > 0$ tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ para todo } x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

(2) Existe o límite de g e h cando x tende a x_0 e, ademais,

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

Entón existe o límite de f cando x tende a x_0 e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Como consecuencia inmediata do resultado anterior, obtense o seguinte corolario.

Corolario 1. Sexan $f,\, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Supoñamos que:

(1) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

(2) g está limitada nunha veciñanza de x_0.

Entón existe
$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0.$$

Teorema 4 (cambio de variable para límites). Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dúas funcións tales que $f(A) \subset B$, x_0 un punto de acumulación de A e $L,\, \widetilde{L} \in \mathbb{R}$. Supoñamos que se cumpren as seguintes condicións:

(1) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \widetilde{L}$, sendo $\widetilde{L}$ un punto de acumulación de B.

(2) Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq \widetilde{L}$ para todo $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$.

(3) Existe $\lim\limits_{y \to \widetilde{L}} g(y) = L$.

Entón existe
$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L.$$

Demostración. Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, buscamos atopar $\delta > 0$ tal que
$$|\,(g \circ f)\,(x) - L| < \varepsilon \quad \forall\, x \in A,\; 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Fixemos pois un $\varepsilon > 0$.

Por ser $\widetilde{L}$ un punto de acumulación de B e $\lim\limits_{y \to \widetilde{L}} g(y) = L$, para o ε fixado, existe $\delta_1 > 0$ tal que
$$|g(y) - L| < \varepsilon \quad \forall\, y \in B,\; 0 < |y - \widetilde{L}| < \delta_1. \tag{2.1}$$

Por outra parte, como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \widetilde{L}$, dado δ_1 existe $\delta_2 > 0$ tal que
$$|f(x) - \widetilde{L}| < \delta_1 \quad \forall\, x \in A,\; 0 < |x - x_0| < \delta_2. \tag{2.2}$$

Ademais, pola segunda condición do teorema sabemos que existe $\delta_3 > 0$ tal que
$$f(x) \neq \widetilde{L} \quad \forall\, x \in A,\; 0 < |x - x_0| < \delta_3. \tag{2.3}$$

Como consecuencia, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_2,\, \delta_3\}$, temos que para $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$, (2.2) e (2.3) garanten que $0 < |f(x) - \widetilde{L}| < \delta_1$ e entón, por (2.1), cúmprese que $|g(f(x)) - L| < \varepsilon$, é dicir,
$$|\,(g \circ f)\,(x) - L| < \varepsilon.$$

□

Observación 4. É fundamental observar que a condición (2) do teorema anterior é necesaria. Por exemplo, se consideramos as funcións f e g dadas por

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pódese comprobar que estas funcións cumpren todas as hipóteses do teorema anterior para $A = B = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ e $\widetilde{L} = 0$ salvo a de que exista unha veciñanza reducida de $x_0 = 0$ na cal $f(x) \neq 0$. Neste caso, ocorre que

$$\lim_{y \to 0} g(y) = 1$$

pero

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 0} (g(f(x)) = \lim_{x \to 0} 0 = 0,$$

o cal proba que a condición (2) do teorema é necesaria.

A hipótese (2) do teorema anterior pódese substituír pola condición (máis restritiva pero, en ocasións, máis sinxela de comprobar) de que f sexa localmente inxectiva. Obtense así o seguinte corolario.

Corolario 2. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \subset R \to \mathbb{R}$ dúas funcións tales que $f(A) \subset B$, x_0 un punto de acumulación de A e $L, \widetilde{L} \in \mathbb{R}$. Supoñamos que se cumpren as seguintes condicións:

(1) Existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = \widetilde{L}$, sendo $\widetilde{L}$ un punto de acumulación de B.

(2) f é inxectiva nunha veciñanza de x_0.

(3) Existe $\lim_{y \to \widetilde{L}} g(y) = L$.

Entón existe

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L.$$

3. Límites por subconxuntos

En determinadas ocasións é interesante estudar o comportamento dunha función nunha veciñanza dun punto, pero unicamente sobre un subconxunto do dominio de definición da función. Isto dá lugar á seguinte definición.

Definición 2. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \subset A$ e x_0 un punto de acumulación de E. Dise que $L \in \mathbb{R}$ é o límite de f cando x tende a x_0 segundo o subconxunto E se

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \ \text{tal que } x \in E, \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Escribirase

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = L.$$

Observación 5. Nótese que, nas condicións da definición anterior, dicir que $L \in \mathbb{R}$ é o límite de f cando x tende a x_0 segundo o subconxunto E é equivalente a dicir que a función restrición de f a E, $f_{|E}$, ten límite L cando x tende a x_0.

O seguinte resultado relaciona a existencia de límite coa existencia de límite a través de subconxuntos.

Teorema 5. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A.

1. Se existe o límite de f cando x tende a x_0 e é igual a $L \in \mathbb{R}$ entón existe o límite de f cando x tende a x_0 segundo calquera subconxunto de A do cal x_0 sexa punto de acumulación e, ademais, dito límite é igual a L.

2. Sexan $E_1, E_2 \subset A$ tales que $E_1 \cup E_2 = A$ e x_0 un punto de acumulación de E_1 e E_2. Se existe o límite de f cando x tende a x_0 segundo os subconxuntos E_1 e E_2 e é igual a L, entón existe o límite de f cando x tende a x_0 e é igual a L.

Observación 6. Cabe observar que o segundo apartado do teorema anterior pode estenderse para un conxunto finito de subconxuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Exemplo 3. Consideremos a función de Dirichlet, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Se consideramos $E_1 = \mathbb{Q}$ e $E_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entón se cumpre que $E_1 \cup E_2 = \mathbb{R}$ e, ademais, calquera $x_0 \in \mathbb{R}$ é punto de acumulación de E_1 e de E_2.

Para esta función e os subconxuntos considerados ocorre que dado calquera $x_0 \in \mathbb{R}$, o límite de f segundo o subconxunto E_1 é 1 mentres que o límite de f segundo o subconxunto E_2 é 0, o cal implica que a función de Dirichlet non ten límite en ningún punto.

Como consecuencia do teorema anterior, dedúcese o seguinte.

Corolario 3. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Entón f ten límite L cando x tende a x_0 se e só se existe o límite de f cando x tende a x_0 segundo calquera subconxunto do cal x_0 sexa punto de acumulación e é igual a L.

Un caso de especial interese tense cando $E = A \cap \{x \in \mathbb{R};\ x > x_0\} = A \cap (x_0, \infty)$ ou $E = A \cap \{x \in \mathbb{R};\ x < x_0\} = A \cap (-\infty, x_0)$, o cal leva a definir os límites laterais.

Definición 3. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de $A \cap (-\infty, x_0)$. Dise que $L \in \mathbb{R}$ é o límite pola esquerda de f cando x tende a x_0 se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \text{ tal que } x \in A,\ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Escribirase

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Tamén é frecuente denotar por $f(x_0^-)$ ao $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Definición 4. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de $A \cap (x_0, \infty)$. Dise que $L \in \mathbb{R}$ é o límite pola dereita de f cando x tende a x_0 se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0, \text{ tal que } x \in A,\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Escribirase

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Tamén é frecuente denotar por $f(x_0^+)$ ao $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

O Teorema 5 pode reescribirse entón en termos dos límites laterais.

Corolario 4. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de $A \cap (-\infty, x_0)$ e de $A \cap (x_0, \infty)$. Entón f ten límite cando x tende a x_0 se e só se existen os dous límites laterais de f en x_0 e son iguais.

4. Límites infinitos

Definiremos a continuación os conceptos de límites infinitos.

A idea intuitiva de que o límite de f cando x tende a x_0 é ∞ é que os valores de $f(x)$ sexan arbitrariamente grandes sempre que os valores de x se tomen o suficientemente próximos a x_0 e distintos de x_0.

Definición 5. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Dise que a función f tende a ∞ cando x tende a x_0 se

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \delta(M, x_0) > 0 \text{ tal que } x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Neste caso, escribirase

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Exemplo 4. A función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

tende a ∞ cando x tende a 0.

Analogamente, tense a seguinte definición de límite igual a $-\infty$.

Definición 6. Sexan $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A. Dise que a función f tende a $-\infty$ cando x tende a x_0 se

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \delta(M, x_0) > 0 \text{ tal que } x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Neste caso, escribirase

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Resultan interesantes as propiedades que relacionan as operacións de funcións cos límites correspondentes, no caso de que algúns destes sexan non finitos. Estas propiedades son análogas ás xa coñecidas para sucesións e resúmense no seguinte resultado.

Teorema 6. Sexan $f,\ g,\ h\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto de acumulación de A tales que existen $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$. Entón:

1. $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = L + \infty = \infty.$
2. $\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = L - \infty = -\infty.$
3. $\lim_{x \to x_0} (f + h)(x) = L - \infty = -\infty.$
4. $\lim_{x \to x_0} (f - h)(x) = L + \infty = \infty.$
5. $\lim_{x \to x_0} (g - h)(x) = \infty + \infty = \infty.$
6. $\lim_{x \to x_0} (-g - h)(x) = -\infty - \infty = -\infty.$
7. se $L > 0$, entón $\lim_{x \to x_0} (f\, g)(x) = L\, \infty = \infty.$
8. se $L < 0$, entón $\lim_{x \to x_0} (f\, g)(x) = L\, \infty = -\infty.$
9. se $L > 0$, entón $\lim_{x \to x_0} (f\, h)(x) = L\,(-\infty) = -\infty.$
10. se $L < 0$, entón $\lim_{x \to x_0} (f\, h)(x) = L\,(-\infty) = \infty.$
11. $\lim_{x \to x_0} (g\,(-h))(x) = \infty\, \infty = \infty.$
12. $\lim_{x \to x_0} (g\, h)(x) = \infty\,(-\infty) = -\infty.$
13. $\lim_{x \to x_0} (-g\, h)(x) = (-\infty)\,(-\infty) = \infty.$
14. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{L}{\infty} = 0.$

15. $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{h}(x) = \frac{L}{-\infty} = 0.$

Convén observar que non se deben considerar os simbolismos anteriores coma operacións no conxunto $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, posto que estas operacións non estarían definidas entre todos os elementos. Por exemplo, non están definidas as seguintes operacións:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad 0\,(\pm\infty).$$

Noutras palabras, para estes casos non é posible enunciar unha propiedade xeral coma as do teorema anterior, polo que se denominan indeterminacións. En caso de atoparnos ante unha indeterminación, o seu límite pode tomar calquera valor posible. Vexamos isto no seguinte exemplo.

Exemplo 5. Vexamos que $\frac{\infty}{\infty}$ é unha indeterminación. Para iso consideremos as funcións

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{1}{|x|}. \end{aligned}$$

Tense que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, polo que os límites dos dous posibles cocientes, $\frac{f}{g}$ e $\frac{g}{f}$, presentan unha indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ cando x tende a ∞. Non obstante, observamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

mentres que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Analogamente, resultaría posible encontrar outras funcións que tendan a ∞ nun punto x_0 para as cales o seu cociente tivese como límite calquera outro número real.

5. Límites no infinito

Veremos a continuación como se poden definir os límites no infinito, os cales serven para estudar como se comporta unha función para valores de x arbitrariamente grandes ou arbitrariamente pequenos.

Definición 7. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ un subconxunto de números reais non limitado superiormente e $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dise que a función f tende a L cando x tende a ∞ se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A,\ x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso escribiremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Definición 8. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ un subconxunto de números reais non limitado inferiormente e $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dise que a función f tende a L cando x tende a $-\infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A, \ x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso escribiremos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Combinando as definicións previas coas da sección anterior, é posible definir límites infinitos no infinito. Por unha cuestión de completitude, inclúense a continuación todas as definicións pertinentes.

Definición 9. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ un subconxunto de números reais non limitado superiormente e $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dise que a función f tende a ∞ cando x tende a ∞ se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists K(M) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A, \ x > K \Rightarrow f(x) > M.$$

En tal caso escribiremos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Definición 10. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ un subconxunto de números reais non limitado superiormente e $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dise que a función f tende a $-\infty$ cando x tende a ∞ se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists K(M) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A, \ x > K \Rightarrow f(x) < M.$$

En tal caso escribiremos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

Definición 11. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ un subconxunto de números reais non limitado inferiormente e $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dise que a función f tende a ∞ cando x tende a $-\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists K(M) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A, \ x < K \Rightarrow f(x) > M.$$

En tal caso escribiremos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Definición 12. Sexan $A \subset \mathbb{R}$ un subconxunto de números reais non limitado inferiormente e $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dise que a función f tende a $-\infty$ cando x tende a $-\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists K(M) \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in A, \ x < K \Rightarrow f(x) < M.$$

En tal caso escribiremos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

6. Límites de oscilación

Definición 13. Sexan $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$ e $L\in\mathbb{R}$. Dise que L é un límite de oscilación de f en x_0 se existe unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A\setminus\{x_0\}$ converxente a x_0 tal que a sucesión das imaxes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L.

Denotaremos por $L(f,x_0)$ ao conxunto dos límites de oscilación de f en x_0. Este conxunto cumpre a seguinte propiedade.

Proposición 5. Sexan $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$. O conxunto de límites de oscilación de f en x_0, $L(f,x_0)$, é pechado.

Exemplo 6. Dada a función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{sin}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

e o punto $x_0=0$, tense que $L(f,x_0)=[-1,1]$.

Definición 14. Dados $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$, defínese o límite superior de f en x_0 coma o supremo de $L(f,x_0)$. Denótase por $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x)$.

Analogamente, defínese o límite inferior de f en x_0 coma o ínfimo de $L(f,x_0)$. Denótase por $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x)$.

Exemplo 7. Dada a función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{sin}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

e o punto $x_0=0$, tense que

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)=\operatorname{sup} L(f,x_0)=\operatorname{sup}[-1,1]=1$$

e

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)=\operatorname{ínf} L(f,x_0)=\operatorname{ínf}[-1,1]=-1.$$

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Proporase ao alumnado a resolución de diversas cuestións e exercicios, que deberán ser resoltos de xeito individual ou en grupos reducidos. Inclúense a continuación algunhas propostas de exercicios:

Exercicio 1. Usa a definición $\varepsilon-\delta$ de límite para probar que:

(a) $\lim\limits_{x\to -3} 2x+5=-1.$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}, \forall\, x_0\neq 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x}=\sqrt{x_0}, \forall\, x_0\geq 0.$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}=0.$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{1}{2}.$

(f) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x=\sin x_0, \forall\, x_0\in\mathbb{R}.$

Exercicio 2. Sexa $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ unha función, x_0 un punto de acumulación de A e $L\in\mathbb{R}$.

(a) Proba que se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, entón $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|L|$.

(b) É certo o recíproco do apartado anterior?

Exercicio 3. Estuda a existencia dos seguintes límites e calcula o seu valor (ou os valores dos límites laterais correspondentes), cando existan:

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x^2+x}.$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}.$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}.$

(f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{x-1}.$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}.$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}.$

(i) $\lim\limits_{x\to 1} x\,E\left[\dfrac{3}{x}\right].$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(1-\cos x)}{\sin^4 x}.$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{x}.$

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}.$

(n) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}.$

(ñ) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{|x|}{x}}.$

(o) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-2x^2+4}{x-1}.$

(p) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^5+1}.$

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$

(r) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x+\sin(x)}{e^x-\sin(x)}.$

(s) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}.$

(t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}{3x^2}.$

(u) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-1}-x\right).$

(v) $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos\left(\frac{x}{|x|}\right).$

(w) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{x}{|x|}\right).$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}.$

(z) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}}{x}.$

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Posto que esta é a segunda unidade didáctica da materia, non se prevé realizar unha avaliación inicial.

A avaliación procesual levarase a cabo ao longo de toda a unidade, tomando nota da participación do alumnado no desenvolvemento das sesións.

A avaliación final realizarase mediante a avaliación continua da materia e o exame final da mesma. Como parte da avaliación continua o alumnado deberá resolver exercicios e tarefas propostos polo profesorado, así como realizar unha proba parcial de carácter similar ao exame final. Por outra banda, no exame final, correspondente a toda a materia, o alumnado deberá resolver diversas preguntas de teoría, cuestións de carácter teórico-práctico e exercicios.

A nota final do alumnado (NF) obterase empregando a seguinte fórmula:

$$\mathsf{NF} = \text{máx}\{0.4\,\mathsf{AC} + 0.6\,\mathsf{EF},\ \mathsf{EF}\},$$

sendo AC a nota de avaliación continua e EF a nota do exame final.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T.M. (1996). *Análisis Matemático.* Reverté.

Bartle, R.G. e Sherbert D.R. (2000). *Introducción al Análisis Matemático en una Variable (2ª Ed.).* Limusa Wiley.

De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw-Hill.

Larson, R., Hostetler, R. P. e Edwards, B. H. (2006). *Cálculo.* McGraw-Hill.

Spivak, M. (1994). *Calculus (2ª Ed.).* Reverté.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA