MATERIA
Introdución á Análise Matemática

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

unidade didáctica
1

Ciencias Experimentais

Números reais

Rubén Figueroa Sestelo
Óscar A. Otero Zarraquiños

Análise Matemática
Departamento Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155740

MATERIA: Introdución á Análise Matemática
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Números reais
Números naturais ($\mathbb{N}$). Principio de indución
Números racionais ($\mathbb{Q}$)
Axiomática dos números reais ($\mathbb{R}$). Axioma do supremo e consecuencias
Propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Densidade de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Unidade 2. Sucesións de números reais
Introdución intuitiva aos conceptos de sucesión e límite. Xeneralidades
Sucesións converxentes e os seus límites. Propiedades
Límites infinitos
Converxencia e diverxencia de sucesións monótonas
Subsucesións. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Límites de oscilación
Sucesións de Cauchy. Completitude de $\mathbb{R}$
Cálculo de límites. Criterios de Stirling e Stolz

Unidade 3. Series de números reais
Introdución intuitiva aos conceptos de serie e a súa suma
Series numéricas. Converxencia de series
Series de termos non negativos. Criterios de converxencia
Converxencia absoluta e condicional. Criterios de converxencia non absoluta

Unidade 4. Números complexos
Números complexos. Expresións, operacións e raíces dos números complexos

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

CONTIDOS

1. Números naturais. Principio de indución
2. Números enteiros e racionais
   - 2.1. Números enteiros
   - 2.2. Números racionais
   - 2.3. Conxuntos limitados
3. Axiomática dos números reais ($\mathbb{R}$). Axioma do supremo e consecuencias

ACTIVIDADES PROPOSTAS

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

BIBLIOGRAFÍA

ANEXO 1

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (UD) enmárcase dentro da materia “Introdución á Análise Matemática” que se imparte no primeiro semestre do primeiro curso do Grao en Matemáticas, do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas, cunha carga de 6 créditos ECTS.

Esta materia básica está incluída no módulo de Análise Matemática nunha Variable, xunto con “Continuidade e Derivabilidade de Funcións dunha Variable Real” e “Integración de Funcións dunha Variable Real”, que se imparten no segundo semestre do primeiro curso, e “Variable Complexa”, que ten lugar no cuarto curso.

Esta UD tratará cuestións relacionadas cos conxuntos de números, dende os naturais ata os reais, estudando as principais propiedades de cada un deles así como as súas insuficiencias.

Esta materia pretende introducir os alumnos nos conceptos e técnicas básicas da Análise que resultarán fundamentais, por unha parte na adquisición das competencias fixadas na memoria da titulación e, por outra, na construción posterior doutros obxectivos de traballo desta área de coñecemento, principalmente no que se refire á súa xeneralización a funcións dunha ou varias variables.

Esta UD é a primeira da materia e para a súa correcta explicación por parte do profesor e asimilación por parte do alumnado, a temporalización prevista é de 4 semanas, o que se corresponde con 8 sesións expositivas, 4 de seminario e 4 de laboratorio.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Ademais de contribuír a acadar as competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título de Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela (USC), esta materia, e esta UD en concreto, permitirá acadar as seguintes competencias específicas:

- CE1 comprender e utilizar a linguaxe matemática;
- CE2 coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática;
- CE3 idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas;
- CE4 identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos;
- CE5 asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos;
- CE6 saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais;
- CE9 utilizar aplicacións informáticas de análise estatística, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en Matemáticas e resolver problemas.

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

- introducir o alumno, co apoio esencial de exemplos e práctica, na comprensión da primeira estrutura da Análise Matemática: o corpo ordenado e completo dos números reais;
- tomar contacto co programa MAPLE como apoio para o cálculo e a comprensión e a visualización dos conceptos relacionados cos conxuntos numéricos.

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:

- comprender as insuficiencias dos distintos conxuntos numéricos;
- coñecer e saber empregar na práctica o principio de indución;
- construír o conxunto dos números reais axiomaticamente.
- deducir as principais propiedades dos números reais a partir dos axiomas.
- coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos relativos ás series de números reais;
- identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

As actuacións do profesor orientaranse a conseguir unha aprendizaxe significativa, procurando que o alumno sexa o auténtico protagonista do seu proceso de aprendizaxe, favorecendo o conflito entre os contidos que se están presentando e as ideas previas do alumno e que deste conflito xurda a necesidade de construción dun novo coñecemento.

Nas clases expositivas impartirase a parte teórica da materia, ilustrándoa con algúns exemplos para facela máis comprensible. Ademais, reservaranse cuestións para implicar os estudantes na súa discusión.

Polo que respecta á docencia en grupos reducidos, preténdese lograr unha maior participación dos alumnos. Abordaranse problemas e aspectos da materia non tratados nas clases expositivas e analizaranse cuestións que adoitan resultar de máis difícil comprensión.

Por último, nas clases de laboratorio nas aulas de informática os alumnos utilizarán o programa MAPLE para realizaren cálculos e representacións gráficas, o que servirá de apoio para a resolución de problemas e para a comprensión de conceptos claves na materia.

Amais do anterior, o alumnado terá ao seu dispor sesións de titorías individualizadas ou en grupos moi reducidos. Estas titorías terán un carácter voluntario e servirán para tratar cuestións concretas ou resolver dúbidas da materia.

Como axuda contaremos con diversos recursos, entre os que destaca a USC Virtual, onde se irá subindo material docente periodicamente, como por exemplo boletíns de problemas, os apuntamentos da materia ou os arquivos do programa Maple.

CONTIDOS

1. Números naturais. Principio de indución

O conxunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ surxe pola necesidade de contar e sobre el constrúese toda a aritmética. O conxunto $\mathbb{N}$ introdúcese formalmente a partir dos **Axiomas de Peano**:

- (A_1) Existe un elemento chamado un que é un número natural, $1 \in \mathbb{N}$.
- (A_2) Dado un número natural n, existe outro número natural n^* univocamente determinado que se denomina "seguinte"de n.
- (A_3) Non existe ningún número natural n tal que $n^* = 1$.
- (A_4) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $m^* = n^*$ entón $m = n$.
- (A_5) **Axioma de indución completa**: Sexa $K \subseteq \mathbb{N}$ un subconxunto que cumpre as seguintes propiedades:
  - (i) $1 \in K$,
  - (ii) Se $n \in K$ entón $n^* \in K$,

  entón verificase que $K = \mathbb{N}$

No conxunto $\mathbb{N}$ defínense as operacións habituais de suma e produto, e a relación de orde usual. A relación de orde en $\mathbb{N}$ é total e cumpre a **propiedade da boa orde**: Todo subconxunto non baleiro, $K \neq \emptyset, K \subseteq \mathbb{N}$ ten un primeiro elemento, isto é, existe $x \in K$ tal que $x \leq y, \forall\, y \in K$.

Unha vez definidas as operacións en $\mathbb{N}$, o principio de indución pode reescribirse como segue: Sexa $K \subseteq \mathbb{N}$ un subconxunto que cumpre as seguintes propiedades:

- (i) $1 \in K$,
- (ii) Se $n \in K$ entón $n + 1 \in K$,

entón verificase que $K = \mathbb{N}$

O principio de indución úsase de maneira moi habitual para probar propiedades que implican o conxunto de todos os números naturais.

Exemplo 1. *Probar que a suma dos n primeros números naturais vale $\frac{n\,(n+1)}{2}$, é dicir:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Para demostrar a igualdade anterior usaremos o principio de indución matemática:

- *A propiedade é certa para $n = 1$, xa que $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.*
- *Supoñamos que a propiedade é certa para un determinado $n = k$ (Hipótese de indución):*

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

e probemos que é certa para $k+1$.

$$\begin{aligned} 1+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia, a propiedade é certa para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. *Probar que a suma dos* n *primeiros cadrados vale* $\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$*, é dicir:*

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Para demostrar a igualdade anterior usaremos o principio de indución matemática:

- *A propiedade é certa para* $n=1$*, xa que* $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.
- *Supoñamos que a propiedade é certa para un determinado* $n=k$ *(Hipótese de indución):*

$$1^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

e probemos que é certa para $k+1$.

$$\begin{aligned} 1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

En consecuencia, a propiedade é certa para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cuestión 1. Conxecturar o resultado da suma dos n primeiros números impares, e probalo facendo uso do principio de indución.

2. Números enteiros e racionais

2.1. Números enteiros

Existen ecuacións alxébricas que non teñen solución no conxunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, por exemplo $3+x=2$ ou, máis xeralmente, $a+x=b$ con $a,b\in\mathbb{N}, a\geq b$. Para dar solución a este tipo de ecuacións introdúcese o conxunto dos números enteiros $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

que pode construírse formalmente a partir de $\mathbb{N}$ e unha relación de equivalencia.

Comezamos dotando o noso conxunto $\mathbb{Z}$ das operacións usuais suma e produto. A continuación, definimos unha relación de orde total:

$$\ldots \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq \ldots,$$

que é compatible coas operacións, no seguinte sentido:

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Z}$,
- $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Z}, c \geq 0$,
  $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Z}, c \leq 0$.

O conxunto dos números enteiros, $\mathbb{Z}$, non está ben ordenado xa que $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z}^-$ non ten un primeiro elemento.

2.2. Números racionais

Existen ecuacións alxébricas que non teñen solución no conxunto dos números enteiros, $\mathbb{Z}$, por exemplo $3 \cdot x = 5$ ou, de maneira máis xeral, $a \cdot x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}, a \nmid b$.

O conxunto dos números racionais defínese formalmente como clases de equivalencia de pares de números enteiros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}.$$

Consideramos en $\mathbb{Q}$ as operacións usuais suma e produto:

- **Suma:**

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right) & \longrightarrow & \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}. \end{array}$$

- **Produto:**

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right) & \longrightarrow & \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}. \end{array}$$

Dotamos, a continuación, ao noso conxunto $\mathbb{Q}$ da relación de orde usual:

Dados $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, q, s \in \mathbb{N}$, tense que: $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Leftrightarrow p \cdot s \leq r \cdot q$.

A suma cumpre as seguintes propiedades:

$$+\begin{cases} \text{Propiedade Asociativa} & (p+q)+r = p+(q+r), \quad \forall p,q,r \in \mathbb{Q}; \\ \text{Propiedade Conmutativa} & p+q = q+p, \quad \forall p,q \in \mathbb{Q}; \\ \text{Elemento Neutro} & 0+p = p+0 = p, \quad \forall p \in \mathbb{Q}; \\ \text{Elemento Oposto (ou Simétrico)} & p+(-p) = (-p)+p = 0, \quad \forall p \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dise entón que $(\mathbb{Q},+)$ ten estrutura de **grupo conmutativo** ou abeliano. O conxunto dos números enteiros coa suma, $(\mathbb{Z},+)$, tamén ten estrutura de grupo conmutativo. En cambio $(\mathbb{N},+)$ ten estrutura de **semigrupo conmutativo**, xa que só verifica as propiedades asociativa e conmutativa.

O produto cumpre as seguintes propiedades:

$$\cdot\begin{cases} \text{Propiedade Asociativa} & (p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r), \quad \forall p,q,r \in \mathbb{Q}; \\ \text{Propiedade Conmutativa} & p\cdot q = q\cdot p, \quad \forall p,q \in \mathbb{Q}; \\ \text{Elemento Neutro (ou Unitario)} & 1\cdot p = p\cdot 1 = p, \quad \forall p \in \mathbb{Q}; \\ \text{Elemento Oposto (ou Inverso)} & p\cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\cdot 1 = 1, \quad \forall p \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}-\{0\}. \end{cases}$$

Tense, polo tanto, que $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ ten estrutura de **grupo conmutativo**. Pola súa parte, $(\mathbb{Z},\cdot)$ e $(\mathbb{N},\cdot)$ teñen estrutura de **semigrupo conmutativo con elemento neutro**.

Ademais, cúmprese a propiedade distributiva:

$$(p+q)\cdot r = p\cdot r + q\cdot r, \quad \forall p,q,r \in \mathbb{Q}.$$

En virtude de todo o anterior, dise que $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ten estrutura de **corpo conmutativo**. Pola súa parte: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ten estrutura de **anel conmutativo con elemento unidade**, e $(\mathbb{N},+,\cdot)$ ten estrutura de **semianel conmutativo con elemento unidade**.

Por último, a relación de orde é compatible coas operacións:

- $p \leq q \Rightarrow p+r \leq q+r, \forall p,q,r \in \mathbb{Q}$,
- $p \leq q \Rightarrow p\cdot r \leq q\cdot r, \forall p,q \in \mathbb{Q}, \forall r \in \mathbb{Q}, r \geq 0$.

Dise entón que $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ é un **corpo conmutativo ordenado**.

Proposición 1. A orde en $\mathbb{Q}$ é **arquimediana**, é dicir, dado $p \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \leq n$.

Proposición 2. A orde en $\mathbb{Q}$ é **densa**, é dicir, dados $p,q \in \mathbb{Q}, p<q$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p<r<q$.

Demostración. Sexa $r = \frac{1}{2}(p+q) \in \mathbb{Q}$. Como $p<q$, utilizando que a orde é compatible coa suma, séguese que: $p+p < q+p < q+q$, ou o que é o mesmo, $2p < p+q < 2q$. Como tamén se ten que a orde é compatible co produto por racionais non negativos, obtense que $p < \frac{1}{2}(p+q) < q$. Polo tanto $p<r<q$, que é o que queriamos demostrar. $\square$

Existen ecuacións alxébricas que non teñen solución no conxunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, por exemplo $x^2 - 2 = 0$.

Proposición 3. Non existe ningún número racional, $r \in \mathbb{Q}$, tal que $r^2 = 2$.

Demostración. (Redución ao absurdo) Supoñamos que $r = \frac{p}{q}$ tal que $r^2 = 2$ e m.c.d.$(p,q) = 1$. Polo tanto $r^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ e así $p^2 = 2q^2$ sendo entón p^2 par, polo que p tamén é par (xa que se p fose impar, novamente por redución ao absurdo, p^2 tamén o sería xa que: $p = 2m-1 \Rightarrow p^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$ impar). Entón como p é par é da forma $p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 = 2q^2$. Polo tanto, $q^2 = 2m^2$e igual que antes conclúese que q é par. Pero se p e q son pares obtemos unha contradición coa suposición m.c.d.$(p,q) = 1$. □

2.3. Conxuntos limitados

Definición 1. Sexa $(X, \leq)$ un conxunto ordenado e $Y \subset X, Y \neq \emptyset$.

- Dicimos que $x \in X$ é unha **cota inferior** de Y se $x \leq y, \forall y \in Y$.

  Dicimos que Y está **limitado inferiormente** se ten algunha cota inferior.
- Dicimos que $x \in X$ é unha **cota superior** de Y se $y \leq x, \forall y \in Y$.

  Dicimos que Y está **limitado superiormente** se ten algunha cota superior.
- Dicimos que Y está **limitado** se está limitado superior e inferiormente.

Exemplo 3. *Tomemos $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{N}$. Tense que Y está limitado inferiormente xa que 1 ou calquera outro número racional menor que el, é unha cota inferior de Y. Por outra parte, Y non está limitado superiormente. Supoñamos que existe unha cota superior r de Y, é dicir, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$. Pola propiedade arquimediana de $\mathbb{Q}$ sabemos que dado $r+1 \in \mathbb{Q}$ existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $r < r+1 \leq n^*$, de onde, $r < n^*$, en contra de que r era cota superior de Y.*

Exemplo 4. *Tomemos $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Tense que Y está limitado inferiormente xa que 0 ou calquera outro número racional negativo é unha cota inferior de Y. Por outra parte, Y está limitado superiormente por 1 xa que $\frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Definición 2. Sexa $(X, \leq)$ un conxunto ordenado e $Y \subset X, Y \neq \emptyset$.

- Se Y está limitado inferiormente, chamamos **ínfimo** de Y (se existe) á maior das súas cotas inferiores. Denotámolo por $\inf Y$.

  Se o ínfimo existe e pertence a Y chamarémolo **mínimo** de Y, e escribiremos $\min Y$.
- Se Y está limitado superiormente, chamamos **supremo** de Y (se existe) á menor das súas cotas superiores. Denotámolo por $\sup Y$.

  Se o supremo existe e pertence a Y chamarémolo **máximo** de Y, e escribiremos $\max Y$.

Exemplo 5. *Tomemos $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{N}$. Xa vimos que Y está limitado inferiormente. O 1 é cota inferior de Y xa que $1 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vexamos agora que o 1 é o ínfimo de Y. Se x é outra cota inferior de Y entón $x \leq 1$, pois se fose $1 < x$, como $1 \in Y$ teriamos que x non sería cota inferior. Polo tanto, $1 = \text{ínf}\, Y$. Como $1 \in Y$, tense que tamén $1 = \text{mín}\, Y$. Como Y non está limitado superiormente, non existe $\sup Y$ nin tampouco $\text{máx}\, Y$.*

Exemplo 6. *Tomemos $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Xa vimos que Y está limitado superiormente: $1 \geq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vexamos ahora que $1 = \sup Y$. Supoñamos que existe $x \in X$ cota superior de Y tal que $x < 1$. Posto que $1 \in Y$, a desigualdade $x < 1$ contradí o feito de que x sexa cota superior de Y. Ademais $1 = \text{máx}\, Y$. Por outra parte, xa vimos que Y está limitado inferiormente. Vexamos que $0 = \text{ínf}\, Y$. Claramente $0 \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Supoñamos que existe $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ que é cota inferior de Y, $0 < r \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $r \neq 0$, existe $\frac{1}{r}$ e ademais $\frac{1}{r} \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pero isto contradí o feito de que $\mathbb{N}$ non está limitado superiormente en $\mathbb{Q}$ (propiedade arquimediana). Polo tanto, $0 = \text{ínf}\, Y$, e como $0 \notin Y$, temos que $\nexists\, \text{mín}\, Y$.*

Nota 1. Para probar que un número é supremo (ou ínfimo) dun conxunto debemos verificar entón dúas condicións:

1. que é cota superior (ou inferior);
2. que é a menor (maior) das cotas superiores (ou inferiores).

Proposición 4. Sexan $(X, \leq)$ un conxunto ordenado e $Y \subset X, Y \neq \emptyset$. Se existe o supremo (ínfimo) de Y entón é único.

Demostración. Supoñamos que $x_1 = \sup Y$ e $x_2 = \sup Y$, entón x_1, x_2 son cotas superiores de Y. Por ser $x_1 = \sup Y$ tense que $x_1 \leq x_2$, e por ser $x_2 = \sup Y$ tense que $x_2 \leq x_1$. En consecuencia, $x_1 = x_2$. □

Cuestión 2. Probar a Proposición 4 para o ínfimo.

Proposición 5. Sexan $(X, \leq)$ un conxunto ordenado e $Y \subset X, Y \neq \emptyset$, tal que existen $\sup Y$ e $\text{ínf}\, Y$.

1. Se $x \in X, x < \sup Y$, entón existe $y \in Y$ tal que $x < y\, (\leq \sup Y)$.
2. Se $x \in X, x > \text{ínf}\, Y$, entón existe $y \in Y$ tal que $(\text{ínf}\, Y \leq)\, y < x$.

Demostración.

1. Supoñamos que fose falso. Entón $\forall y \in Y$ terase que $x \geq y$, polo que x sería cota superior de Y. Como $x < \sup Y$, x sería unha cota superior de Y menor que $\sup Y$, o cal é unha contradición.

□

Cuestión 3. Probar o apartado 2 da Proposición 5.

Proposición 6. ($\mathbb{Q}$ non verifica o axioma do supremo) En $\mathbb{Q}$ existen conxuntos que están limitados superiormente pero non teñen supremo en $\mathbb{Q}$, como por exemplo,

$$Y = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

3. Axiomática dos números reais ($\mathbb{R}$). Axioma do supremo e consecuencias

É posible realizar unha construción dos números reais a partir de $\mathbb{Q}$, pero nós introducirémolos de maneira axiomática.

Definición 3. Chamamos **corpo dos números reais** a un conxunto $\mathbb{R}$ de máis dun elemento, dotado de dúas operacións internas $(+)$, $(\cdot)$ e unha relación de orde $(\leq)$, que satisfan os seguintes axiomas:

AXIOMAS ALXÉBRICOS

- (A_1) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. (propiedade conmutativa de $(+)$)
- (A_2) $(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (propiedade asociativa de $(+)$)
- (A_3) $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$. (existencia de elemento neutro de $(+)$)
- (A_4) $a + (-a) = (-a) + a = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$. (existencia de oposto de $(+)$)
- (A_5) $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. (propiedade conmutativa de $(\cdot)$)
- (A_6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (propiedade asociativa de $(\cdot)$)
- (A_7) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$. (existencia de elemento neutro de $(\cdot)$)
- (A_8) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$. (existencia de oposto de $(\cdot)$)
- (A_9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. (propiedade distributiva)

Os axiomas $(A_1) \ldots (A_9)$ implican que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ten estrutura de **corpo conmutativo**.

AXIOMAS DE ORDE

Existe en $\mathbb{R}$ unha relación de orde, $\leq$, que satisfai as seguintes propiedades:

- (O_1) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, unha e só unha das seguintes afirmacións é certa:

$$(i)\, a < b \quad (ii)\, a = b \quad (iii)\, a > b$$

- (O_2) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
  (compatibilidade da orde coa suma)
- (O_3) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \geq 0.$
  (compatibilidade da orde co produto por reais non negativos)

Polo tanto, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é un **corpo conmutativo totalmente ordenado**.

AXIOMA DO SUPREMO

- (S) Todo subconxunto de $\mathbb{R}$ non baleiro e limitado superiormente ten supremo.

Definición 4. A propiedade de tricotomía permite separar $\mathbb{R}$ en tres conxuntos disxuntos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+,$$

sendo:

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ (conxunto dos números reais negativos).
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (conxunto dos números reais positivos).
Se $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dicimos que x é **non negativo**.
Se $x \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ dicimos que x é **non positivo**.

Proposición 7. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ cúmprense as seguintes propiedades:

1. $x + y = y \Rightarrow x = 0$.
2. $x, y \neq 0$, $x \cdot y = y \Rightarrow x = 1$.
3. $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$.
4. $x, y \neq 0$, $x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$.
5. $x \cdot 0 = 0$.
6. $-(-x) = x$.
7. $(-1) \cdot x = -x$.
8. $(-1) \cdot (-1) = 1$.
9. $x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \neq 0$, $\frac{1}{1/x} = x$.
10. $x \neq 0$, $x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$.
11. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou ben $y = 0$.

Proposición 8. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ cúmprense as seguintes propiedades:

1. $x^2 \geq 0$, e se $x \neq 0$ entón $x^2 > 0$.
2. $1 > 0$.
3. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0$.
4. $x \geq y$, $z < 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$.
5. $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$.
   $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$.
6. $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.
   $x \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$.

Proposición 9. Dados $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, entón: $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Demostración. Como $x < y$, utilizando que a orde é compatible coa suma séguese que: $x + x < x + y < y + y$, ou o que é o mesmo, $2x < x + y < 2y$. Como tamén se ten que a orde é compatible co produto por racionais non negativos, obtense que $x < \frac{x+y}{2} < y$. $\square$

Corolario 1. Non pode existir un número real positivo mínimo, é dicir, se $y \in \mathbb{R}, y > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}y < y$.

Demostración. Basta considerar $x = 0$ na proposición anterior. $\square$

Proposición 10. Sexa $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x < \varepsilon$, $\forall \epsilon > 0$, entón $x = 0$.

Demostración. Supoñamos por contra que $x > 0$. Entón, en virtude do Corolario 1, tense que $0 < \frac{x}{2} < x$, polo tanto o número $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ é tal que $0 < \varepsilon < x$, en contra da hipótese. $\square$

Proposición 11. Sexan $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ entón $x \leq y$.

Demostración. Supoñamos por contra que $y < x$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}(x - y)$ resulta: $y + \epsilon = y + \frac{1}{2}(x - y) = \frac{x+y}{2} < x$, en contra da hipótese. $\square$

O axioma do supremo dicía: Todo subconxunto de $\mathbb{R}$ non baleiro e limitado superiormente ten supremo. Como consecuencia del, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 1. Todo subconxunto de $\mathbb{R}$ non baleiro e limitado inferiormente ten ínfimo.

Demostración. Sexa $X \subset \mathbb{R}$ un conxunto non baleiro e limitado inferiormente por $a \in \mathbb{R}$, é dicir, $a \leq x$, $\forall x \in X$. Consideramos o conxunto $\widetilde{X} = \{-x : x \in X\}$. Entón $\widetilde{X}$ está limitado superiormente por $-a \in \mathbb{R}$, xa que $a \leq x$, $\forall x \in X \Leftrightarrow -a \geq -x$, $\forall x \in X$. En virtude do axioma do supremo, $\widetilde{X}$ ten supremo, poñamos $-s$. Vexamos que entón $s = \text{ínf}\, X$.

1. s é cota inferior de X, xa que por ser $-s$ cota superior de $\widetilde{X}$ tense que $-s \geq -x$, $\forall x \in X$, polo que $s \leq x$, $\forall x \in X$.

2. s é a maior das cotas inferiores de X. Supoñamos que existe s' cota inferior de X maior que s, $s' > s$, entón $-s'$ é cota superior de $\widetilde{X}$ e ademais:
   $s' > s \Rightarrow -s' < -s$, polo que $-s'$ sería unha cota superior de $\widetilde{X}$ menor que $-s$, en contra de que $-s$ é o supremo de $\widetilde{X}$.

$\square$

Teorema 2. Sexa $X \subset \mathbb{R}$ un subconxunto non baleiro e limitado superiormente. Son equivalentes:

1. $s = \sup X$;

2. s é cota superior de X e $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X$ tal que $s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s$.

Demostración.

- $(i) \Rightarrow (ii)$

  Supoñamos que non é certo, existe entón $\varepsilon > 0$ tal que $s - \varepsilon \geq x, \forall x \in X$, pero isto implicaría que $s-\varepsilon$ é unha cota superior de X menor que s, en contra de (i).
- $(ii) \Rightarrow (i)$

  Por hipótese s é cota superior de X. Supoñamos que existe unha cota superior de X, $\widetilde{s}$, que é menor que s. Tomamos $\varepsilon = \frac{s-\widetilde{s}}{2} > 0$ e por (ii), existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $s - \varepsilon < x_\varepsilon$, pero $s - \varepsilon = s - \frac{s-\widetilde{s}}{2} = \frac{s+\widetilde{s}}{2} > \widetilde{s}$. En consecuencia, $\widetilde{s} < s - \varepsilon < x_\varepsilon$, en contra de que $\widetilde{s}$ era cota superior de X.

$\square$

Cuestión 4. Enunciar e probar un resultado análogo para o ínfimo.

Proposición 12. (Propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demostración. Supoñamos que non é certo. En tal caso existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que $n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$, polo que x sería unha cota superior de $\mathbb{N}$. En consecuencia, tense que existe $s = \sup \mathbb{N}$ e aplicando o teorema 2, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < m$ (tomamos $\varepsilon = 1$), pero isto implica que $s < m + 1 \in \mathbb{N}$, en contra de que $s = \sup \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 2. Dados $x, y > 0$ tense:

1. $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$;
2. $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$;
3. $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

Demostración.

1. Tomamos $z = \frac{x}{y} > 0$. Aplicando a propiedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{x}{y}$, de onde $ny > x$.
2. Tomando $x = 1$ no apartado anterior, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny > 1$, de onde $y > \frac{1}{n}$.
3. En virtude da propiedade arquimediana, existe $\widetilde{m} \in \mathbb{N}$ tal que $x < \widetilde{m}$ e, en consecuencia, o conxunto $\{m \in \mathbb{N} : x < m\}$ é non baleiro. Aplicando a propiedade da boa orde de $\mathbb{N}$ existe un primeiro elemento n, entón $n - 1$ non pertence a este subconxunto, polo tanto $n - 1 \leq x < n$.

$\square$

Definición 5. Dado $x \in \mathbb{R}$, chamamos **parte enteira de** x, e denotámolo $[x]$, ao único número enteiro n tal que $n \leq x < n+1$. É dicir, a parte enteira dun número real é o maior enteiro que é menor ou igual que él.

Exemplo 7. $[\pi] = 3$, $[0] = 0$, $[-1.5] = -2$.

Teorema 3. (Densidade de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.

Demostración. Podemos supor sen perda de xeneralidade que $x > 0$ (se $x < 0$ e $y > 0$ tomamos $r = 0$; se $x = 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$ e se $x < y < 0$ razoamos con $0 < -y < -x$). A propiedade arquimediana garante a existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{y-x}$, e polo tanto tense $ny - nx > 1$. Por outra parte, aplicando a propiedade 3 do Corolario 2 a $nx > 0$ obtemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq nx < m$, polo tanto, $nx < m \leq nx + 1 < ny$. En consecuencia, $nx < m < ny$, polo que $x < \frac{m}{n} < y$. □

Corolario 3. (Densidade de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $\xi \in \mathbb{I}$ tal que $x < \xi < y$.

Demostración. Aplicando o teorema 3 aos números reais $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$, obtemos que existe $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, tal que $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$, de onde $x < \sqrt{2}r < y$. Posto que $\sqrt{2}r \in \mathbb{I}$, queda probado o corolario. □

Definición 6. Dado un número real x, $x \in \mathbb{R}$, defínese o **valor absoluto de** x, que denotaremos por $|x|$, como:

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Proposición 13. O valor absoluto satisfai as seguintes propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
5. Se $x \neq 0$, entón $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$;
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; (Desigualdade triangular)
   $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$;
7. $|x - y| \geq ||x| - |y||$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración.

1. Por definición, se $x \geq 0$ entón $|x| = x \geq 0$ e se $x < 0$ entón $|x| = -x > 0$.
2. " $\Leftarrow$ " Obviamente, $|0| = 0$.

   " $\Rightarrow$ " Supoñamos agora que $|x| = 0$, entón máx$\{x, -x\} = 0 \Rightarrow x = -x = 0$.
3. $|-x| = max\{-x, -(-x)\} = max\{-x, x\} = |x|$.
4.
   - Se $x = 0$ ou ben $y = 0$, entón por 2 teriamos que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = 0$;
   - Se $x > 0$ e $y > 0$, entón $|x| = x$ e $|y| = y$, e como $x \cdot y > 0$ tamén $|x \cdot y| = x \cdot y$, de onde $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$;
   - Se $x < 0$ e $y < 0$, entón $|x| = -x$ e $|y| = -y$, e como $x \cdot y > 0$ tamén $|x \cdot y| = x \cdot y$, de onde $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$;

   Os casos que faltan $x > 0, y < 0$ e $x < 0, y > 0$ serían totalmente análogos.
5. Se $x \neq 0$ entón existe x^{-1}. Como $x \cdot x^{-1} = 1$, aplicando 4 tense que $1 = |x \cdot x^{-1}| = |x| \cdot |x^{-1}|$, de onde $|x^{-1}| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.
6. Para facer a demostración da primeira parte basarémonos en 2 lemas:

   Lema A. Se $c \geq 0$, $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$.

   Lema B. Se $a \in \mathbb{R}$, $-|a| \leq a \leq |a|$.

   En virtude do Lema B séguese que: $-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$.

   Se sumamos en ambas as expresións obtemos: $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$.

   Usando agora o Lema A, queda demostrado que: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

   Probemos agora a segunda parte do resultado: $|x+y| = |x|+|y| \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$.

   " $\Leftarrow$ "

   Se $x \geq 0$, $y \geq 0$ entón $|x| = x, |y| = y, |x+y| = x+y \geq 0$, de onde $|x+y| = x+y = |x|+|y|$.

   Se $x < 0$, $y < 0 \Rightarrow |x| = -x, |y| = -y, |x+y| = -(x+y)$, de onde $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$.

   " $\Rightarrow$ "

   Supoñamos que $|x+y| = |x|+|y|$ e que $x \cdot y < 0$. Se por exemplo $x < 0, y > 0$, entón $|x| = -x$, $|y| = y$, de onde $|x|+|y| = -x+y$. Por outra parte, por definición $|x+y| = x+y$ ou ben $|x+y| = -x-y$. O primeiro caso implica que $x = 0$ e o segundo que $y = 0$, o que contradí as hipóteses.
7. Por unha parte, $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x-y| \geq |x|-|y|$.

   Por outra, $|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x| \Rightarrow |y|-|x| \leq |y-x| \Rightarrow -|y-x| = -|x-y| \leq |x|-|y|$. Polo tanto, xuntando as dúas expresións obtemos: $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$.

   Utilizando agora o Lema A, séguese que: $||x|-|y|| \leq |x-y|$. $\square$

Definición 7. O valor absoluto induce unha **distancia** na recta real, definida mediante:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Definición 8. Dados $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, definimos os seguintes subconxuntos da recta:

- intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
- intervalo semiaberto á esquerda: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
- intervalo semiaberto á dereita: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
- semirrecta cerrada á esquerda: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;
- semirrecta cerrada á dereita: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;
- semirrecta aberta á esquerda: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;
- semirrecta aberta á dereita: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Proposición 14. Sexan $x, y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Entón tense que:

- $|x - y| \leq a \Leftrightarrow x \in [y - a, y + a]$,
- $|x - y| < a \Leftrightarrow x \in (y - a, y + a)$.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

— Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD, individualmente, no tempo de dedicación non presencial.

— Resolución dos exercicios propostos no boletín (incluído no anexo 1), individualmente ou en grupo, no tempo de dedicación non presencial.

— Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.

— Participación na resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas durante as sesións presenciais.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación constante é necesaria para determinar non só o nivel de coñecementos e a detección de posibles necesidades dos alumnos, senón tamén o funcionamento do método e o labor do profesor. A avaliación do proceso de ensinanza permitirá modificar aqueles puntos que se considere convenientes e dará confianza á hora de levar a cabo as liñas metodolóxicas que mellor funcionasen.

A avaliación continua fai referencia a todas as actividades que o alumno realiza dende o primeiro ata o último día de curso e que permiten analizar de maneira exhaustiva os seus progresos en tempo real, permitindo ao profesor intervir se fose necesario. Esta modalidade de avaliación terá carácter presencial e voluntario.

Esta UD corresponde coa materia Introdución á Análise Matemática, e a súa avaliación farase a través dunha proba conxunta coa unidade 2 de sucesións de números de reais, realizada nunha hora expositiva, con data coñecida polo alumnado e non sendo liberadora de materia. Nela preguntaranse, con respecto a esta unidade, exercicios prácticos e razoamentos sobre a veracidade ou falsidade de enunciados propostos, que permitan comprobar non só a memorización dos conceptos senón tamén o grao de asimilación dos mesmos aplicándoos a cuestións relacionadas, como as que se poden ver no boletín de exercicios que aparece como anexo 1.

A cualificación desa proba terá un peso dun $60\,\%$ dentro da avaliación continua, obtendo o $40\,\%$ restante a través doutra proba, das mesmas características citadas anteriormente, na cal se preguntarán cuestións relativas aos conceptos traballados no tema 3.

No exame final volveranse a preguntar conceptos relacionados con esta UD. Amais do tipo de cuestións que aparecen na proba de avaliación, incluiranse preguntas de tipo teórico: definición de conceptos e enunciado e/ou proba de resultados vistos na clase. Cabe destacar que algúns dos conceptos traballados nesta unidade, como por exemplo o principio de indución, serán unha ferramenta fundamental para poder resolver exercicios relacionados co resto de unidades.

A cualificación final de cada alumno (CF) virá dada por un número entre 0 e 10 que se obterá a partir da seguinte fórmula

$$CF = AC/3 + (1 - AC/30) * EF,$$

onde CF é a cualificación final, AC é a avaliación continua e EF é o exame final.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T.M. (1996). *Análisis Matemático.* Reverté.

Bartle, R.G. e Sherbert D.R. (2000). *Introducción al Análisis Matemático en una Variable (2ª Ed.).* Limusa.

García López, A. e outros (1994). *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable (2ª Ed.).* Clagsa.

Spivak, M. (1994). *Calculus (2ª Ed.).* Reverté.

Casasayas, J. e Cascante, M.C. (1990). *Problemas de Análisis Matemático de una variable real.* Edunsa.

ANEXO 1

Boletín de exercicios da unidade didáctica 1: Números reais

O principio de indución

1. Utiliza o principio de indución para demostrar o seguinte:

   a) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   c) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   d) Fixado un número real $x\neq 1$, temos que

   $1+x^1+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   Canto vale a suma se $x=1$?

   e) $n<2^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   f) 5^n-4n-1 é divisible entre 16 para todo $n\in\mathbb{N}$.

   g) $(n+1)^3+5(n+1)$ é múltiplo de 6 para todo $n\in\mathbb{N}$.

2. Conxeturar o resultado das seguintes sumas e demostrar a fórmula correspondente usando o principio de indución:

   a) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\cdots$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   b) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\cdots$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\cdots$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

3. O factorial dun natural n defínese como $n!=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2$.

   Para que valores de $n\in\mathbb{N}$ se cumpre que $2^n<n!$?

4. Demostrar que $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para todo $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$.

Números racionais e números reais. Orde en $\mathbb{R}$. Supremos e ínfimos

1. Xustifica se as seguintes afirmacións son certas ou falsas:

   a) Se $r,s\in\mathbb{Q}$, $r\neq s$, entón existe $t\in\mathbb{Q}$ tal que $r<t<s$.

   b) Se $r\neq 0$ é racional e ξ é irracional entón $r\,\xi$, $\dfrac{1}{\xi}$, $\dfrac{r}{\xi}$ e $\dfrac{\xi}{r}$ son irracionais.

c) Se $\xi,\ \eta$ son irracionais entón $\xi+\eta$ y $\xi\,\eta$ son irracionais.

d) Se $r\neq 0$ é racional e ξ é irracional entón $r\ +\xi$ é irracional.

2. Demostra que o número real $\lambda=\frac{\ln 3}{\ln 2}$ é irracional.

3. Proba que se $x\in\mathbb{R}$ e $0<x<1$, entón $0<x^2<x<1$, e que se $1<x$ entón $1<x<x^2$.

4. Proba que para todo $n\in\mathbb{N}$ temos que $n^2\geq n$ e, polo tanto, $\dfrac{1}{n^2}\leq\dfrac{1}{n}$.

5. Demostra que se $0<x<y$ entón $x<\sqrt{xy}<y$.

6. Demostra a desigualdades da media aritmética–xeométrica: se $x,y>0$ entón $\sqrt{xy}\leq\dfrac{x+y}{2}$ e a igualdade cúmprese se e só se $x=y$.

7. Proba a desigualdade de Bernoulli: Se $x>-1$ entón $(1+x)^n\geq 1+nx$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

8. Proba que se A e B son subconxuntos limitados de $\mathbb{R}$ entón $A\cup B$ é limitado.

9. Demostra que unha cota inferior a dun conxunto non baleiro $S\subseteq\mathbb{R}$ é o ínfimo de S se e só se para todo $\epsilon>0$ existe $x_\epsilon\in S$ tal que $x_\epsilon<a+\epsilon$.

10. Demostra que se un conxunto S contén unha das súas cotas superiores entón esta cota superior é o supremo de S (e será, polo tanto, o máximo de S).

11. Determina o supremo e o ínfimo dos seguintes conxuntos. Son máximos e mínimos?

    a) $S=\left\{\dfrac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

    b) $S=\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

    c) $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{n!}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

12. Sexan S un conxunto limitado de $\mathbb{R}$ e S_0 un subconxunto non baleiro de S. Demostra que:
$$\inf S\leq\inf S_0\leq\sup S_0\leq\sup S.$$

13. Sexan S e T subconxuntos non baleiros de $\mathbb{R}$, tales que $s\leq t$ para todo $s\in S$ e todo $t\in T$. Demostra que T ten ínfimo, que S ten supremo, e que $\sup S\leq\inf T$.

14. Sexan $S\subseteq\mathbb{R}$ non baleiro e limitado superiormente e $a\in\mathbb{R}$. Proba que o conxunto $a+S=\{a+x\ :\ x\in S\}$ está limitado superiormente e $\sup(a+S)=a+\sup S$.

15. Demostra que se $u > 0$ é un número real positivo calquera e $x < y$ entón existe un racional r tal que $x < r\,u < y$. Polo tanto, o conxunto $\{r\,u : r \in \mathbb{Q}\}$ é denso en $\mathbb{R}$.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA