MATERIA
Introdución á Análise Matemática

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

unidade didáctica
3

Ciencias Experimentais

Series de números reais

Rubén Figueroa Sestelo
Óscar A. Otero Zarraquiños

Área de Análise Matemática
Departamento Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155689

MATERIA: Introdución á Análise Matemática
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Números reais
Números naturais ($\mathbb{N}$). Principio de indución
Números racionais ($\mathbb{Q}$). Numerabilidade
Axiomática dos números reais ($\mathbb{R}$). Axioma do supremo e consecuencias
Propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Densidade de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Unidade 2. Sucesións de números reais
Introdución intuitiva aos conceptos de sucesión e límite. Xeneralidades
Sucesións converxentes e os seus límites. Propiedades
Límites infinitos
Converxencia e diverxencia de sucesións monótonas
Subsucesións. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Límites de oscilación
Sucesións de Cauchy. Completitude de $\mathbb{R}$
Cálculo de límites. Criterios de Stirling e Stolz

Unidade 3. Series de números reais
Introdución intuitiva aos conceptos de serie e a súa suma
Series numéricas. Converxencia de series
Series de termos non negativos. Criterios de converxencia
Converxencia absoluta e condicional. Criterios de converxencia non absoluta

Unidade 4. Números complexos
Números complexos. Expresións, operacións e raíces dos números complexos

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (UD) enmárcase dentro da materia “Introdución á Análise Matemática” que se imparte no primeiro semestre do primeiro curso do Grao en Matemáticas, do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas, cunha carga de 6 créditos ECTS.

Esta materia básica está incluída no módulo de Análise Matemática nunha Variable, xunto con “Continuidade e Derivabilidade de Funcións dunha Variable Real” e “Integración de Funcións dunha Variable Real”, que se imparten no segundo semestre do primeiro curso, e “Variable Complexa”, que ten lugar no cuarto curso.

Esta UD tratará cuestións relacionadas cas series de números reais e a súa converxencia, que están estreitamente ligadas ao capítulo anterior de sucesións de números reais.

Esta materia pretende introducir os alumnos nos conceptos e técnicas básicas da Análise que resultarán fundamentais, por unha parte na adquisición das competencias fixadas na memoria da titulación e, por outra, na construción posterior doutros obxectivos de traballo desta área de coñecemento, principalmente no que se refire á súa xeneralización a funcións dunha ou varias variables.

Esta UD, xunto coa de sucesións de números reais, forman o núcleo duro desta materia e para a súa correcta explicación por parte do profesor e asimilación por parte do alumnado, a temporalización prevista é de 3 semanas e media, o que se corresponde con 7 sesións expositivas, 4 de seminario e 3 de laboratorio.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Ademais de contribuír a acadar as competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título de Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela (USC), esta materia, e esta UD en concreto, permitirá acadar as seguintes competencias específicas:

- CE1 comprender e utilizar a linguaxe matemática;
- CE2 coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática;
- CE3 idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas;
- CE4 identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos;
- CE5 asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos;
- CE6 saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais;
- CE9 utilizar aplicacións informáticas de análise estatística, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en Matemáticas e resolver problemas.

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

— introducir e consolidar, con exemplos e exercicios, a noción de converxencia de series numéricas;

— tomar contacto co programa MAPLE como apoio para o cálculo e a comprensión e a visualización dos conceptos relacionados cas series numéricas.

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:

— comprender os principais conceptos vinculados coas series numéricas;

— manexar adecuadamente distintos criterios de converxencia;

— estudar a converxencia de series de números reais;

— coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos relativos ás series de números reais;

— idear desmotracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e estratexias para confirmalas ou negalas;

— identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

As actuacións do profesor orientaranse a conseguir unha aprendizaxe significativa, procurando que o alumno sexa o auténtico protagonista do seu proceso de aprendizaxe, favorecendo o conflito entre os contidos que se están presentando e as ideas previas do alumno e que deste conflito xurda a necesidade de construción dun novo coñecemento.

Nas clases expositivas impartirase a parte teórica da materia, ilustrándoa con algúns exemplos para facela máis comprensible. Ademais, reservaranse cuestións para implicar os estudantes na súa discusión.

Polo que respecta á docencia en grupos reducidos, preténdese lograr unha maior participación dos alumnos. Abordaranse problemas e aspectos da materia non tratados nas clases expositivas e analizaranse cuestións que adoitan resultar de máis difícil comprensión.

Por último, nas clases de laboratorio nas aulas de informática os alumnos utilizarán o programa MAPLE para realizaren cálculos e representacións gráficas, o que servirá de apoio para a resolución de problemas (estudar a converxencia dunha serie, etc) e para a comprensión de conceptos claves na materia como o de límite.

Amais do anterior, o alumnado terá ao seu dispor sesións de titorías individualizadas ou en grupos moi reducidos. Estas titorías terán un carácter voluntario e servirán para tratar cuestións concretas ou resolver dúbidas da materia.

Como axuda contaremos con diversos recursos, entre os que destaca a USC Virtual, onde se irá subindo material docente periodicamente, como por exemplo boletíns de problemas, os apuntamentos da materia ou os arquivos do programa Maple.

CONTIDOS

1. Introdución intuitiva aos conceptos de serie e á súa suma

Intentaremos dar sentido ás sumas de infinitos sumandos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Para iso consideramos a sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas parciais:

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \quad s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dots$$

Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ten límite s, ese será o valor da suma infinita $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$

Definición 1. Unha **serie de números reais** é un par $(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ de tal maneira que $s_n = x_1 + x_2 \cdots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denomínase **sucesión de termos** da serie, sendo x_n o termo xeral ou n-ésimo. A sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denomínase **sucesión de sumas parciais** da serie, sendo s_n a suma parcial n-ésima. Denotaremos a serie $(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ na forma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ou ben $\sum x_n$.

Definición 2. Diremos que unha serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **converxente** se o é a súa sucesión de sumas parciais.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ non é converxente, diremos que é **diverxente**. Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converxe, o valor do límite da sucesión de sumas parciais denominarémolo **suma** da serie.

Exemplo 1. *Sexa a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. *Fixado* $n \in \mathbb{N}$, *temos que:*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \\ \frac{1}{2}S_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

e se restamos as expresións anteriores:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Polo tanto, $S_n = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$, *polo que* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. *En consecuencia,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *é converxente e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 1$.

Nota 1. Non supón perda de xeneralidade considerar sempre series que comecen en $n = 1$, pois podemos reescribir:

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k-1}$$

Nota 2. Alterar unha cantidade finita de termos dunha serie non inflúe sobre a súa converxencia ou diverxencia. Influirá, obviamente, no valor da suma, se existe.

Lema 1. Sexa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ unha serie de números reais. Son equivalentes:

- A serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é converxente;
- A serie $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$ é converxente para calquera $k \in \mathbb{N}$.
- A serie $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$ é converxente para algún $k \in \mathbb{N}$.

2. Series numéricas. Converxencia de series

Teorema 1. (Criterio de Cauchy para a converxencia) A serie de números reais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é converxente se e só se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |s_p - s_q| = |x_{q+1} + x_{q+2} + \cdots + x_p| < \varepsilon.$$

Demostración. Basta ter en conta que a hipótese garante que a sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas parciais é de Cauchy, e unha sucesión de números reais é converxente se e só se é unha sucesión de Cauchy. □

Teorema 2. (Condición necesaria de converxencia) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é converxente, entón $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demostración. Sexa $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucesión de sumas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L \in \mathbb{R}$, tamén $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = L \in \mathbb{R}$, e polo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$.

Pero, dado $n \geq 2$, $s_n - s_{n-1} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1 + \ldots + x_{n-1}) = x_n$, polo que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. □

Corolario 1. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converxe a 0, entón $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ diverxe.

Exemplo 2. *A serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ é diverxente.*

A condición necesaria de converxencia non é suficiente, como se ve no seguinte exemplo.

Exemplo 3. *(Serie harmónica) A serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverxe, a pesar de que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.*

Sexa $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucesión de sumas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, e consideramos a seguinte subsucesión:

$$s_{n_1} = s_1 = 1 \geq \frac{1}{2},$$

$$s_{n_2} = s_2 = s_{n_1} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{n_3} = s_4 = s_{n_2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq s_{n_2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \geq 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{n_4} = s_8 = s_{n_3} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq s_{n_3} + 4 \cdot \frac{1}{8} \geq 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

Polo tanto, por indución obteriamos que:

$$s_{n_r} = s_{2^{r-1}} \geq r \cdot \frac{1}{2}.$$

Como $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é unha subsucesión non limitada de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entón $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é diverxente, xa que non está limitada.

Exemplo 4. *(Series xeométricas) Consideramos a serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$, con $a \in \mathbb{R}$. Como a sucesión $a^n \to 0 \Leftrightarrow |a| < 1$, tense que se $|a| \geq 1$, a serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ diverxe. Vexamos que ocorre nos casos $|a| < 1$: Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión de sumas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$, entón:*

$$\begin{aligned} s_n &= a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n, \\ as_n &= a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{n+1}, \end{aligned}$$

e se restamos as expresións anteriores:

$$(1-a)s_n = a - a^{n+1}.$$

Polo tanto, $s_n = \dfrac{a - a^{n+1}}{1-a}$*, polo que* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-a}$*. En consecuencia, a serie xeométrica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ *é converxente se e só se* $|a| < 1,$ *e nese caso* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n = \dfrac{a}{1-a}$.

Definición 3. Dadas dúas series de números reais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

- Suma: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$,
- Multiplicación por un escalar: $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha x_n$.

Teorema 3. Sexan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ series de números reais con sumas respectivas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = T,$$

e sexa $\alpha \in \mathbb{R}$. Entón as series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ e $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ son converxentes e ademais:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n = S + T, \quad \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \alpha S.$$

Demostración. É consecuencia das propiedades de sucesións de números reais. Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión de sumas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, entón $s_n \to S$. Se $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión de sumas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, entón $t_n \to T$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$, entón a sucesión de sumas parciais de

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é: $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1 + y_1, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), \ldots\} = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e polas propiedades das sucesións converxentes temos que:

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to S + T, i.e., \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n = S + T.$$

A demostración sería análoga para o caso do produto dunha serie por un escalar. $\square$

Definición 4. Unha serie de números reais da forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$, onde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de termos positivos, dise que é unha **serie alterna.**

Teorema 4. (Criterio de Leibniz para series alternas) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión decrecente e converxente a 0, entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ é converxente.

Demostración. Sexa $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucesión de sumas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$, e consideremos a subsucesión:

$$s_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \ldots + (x_{2n-1} - x_{2n}).$$

En consecuencia, a subsucesión $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crecente. Por outra parte:

$$s_{2n} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{2n-1} - x_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \ldots - x_{2n},$$

polo que $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada superiormente por x_1. En virtude do teorema de converxencia monótona, $s_{2n} \to S \in \mathbb{R}$.
Vexamos que tamén $s_{2n+1} \to S \in \mathbb{R}$. Sexa $\varepsilon > 0$ arbitrario, por ser $s_{2n} \to S$, tense que $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |s_{2n} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por ser $x_n \to 0$, $\exists N_\varepsilon{}' \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon{}' \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, en particular, $|x_{2n+1}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, se $n \geq$ máx$\{N_\varepsilon, N_\varepsilon{}'\}$ temos que: $|s_{2n+1} - S| = |s_{2n} + x_{2n+1} - S| \leq |s_{2n} - S| + |x_{2n+1}| < \varepsilon$. $\square$

Exemplo 5. *A serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é converxente.*

Definición 5. Dicimos que unha serie de números reais é **absolutamente converxente** se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é converxente.

Teorema 5. Se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente entón é converxente.

Demostración. Sexan $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucesión de sumas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\{\overline{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucesión de sumas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Por ser $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converxente, en virtude do criterio de Cauchy temos que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\overline{s_p} - \overline{s_q}| = |x_{q+1}| + |x_{q+2}| + \cdots + |x_p| < \varepsilon.$$

Polo tanto, se $p > q \geq N_\varepsilon$, temos que:

$$|s_p - s_q| = |x_{q+1} + x_{q+2} + \cdots + x_p| \leq |x_{q+1}| + |x_{q+2}| + \cdots + |x_p| < \varepsilon.$$

En consecuencia, a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cumpre o criterio de Cauchy e, entón, é converxente.

□

O recíproco do anterior teorema non é certo, como amosa o seguinte exemplo.

Exemplo 6. *A serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é converxente, pero a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é diverxente.*

Definición 6. Dicimos que a serie $\sum x_n$ é **condicionalmente converxente** se é converxente pero non é absolutamente converxente.

Definición 7. Dicimos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ se obtén de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ por **reordenación** de termos, se existe unha aplicación bixectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{f(n)}$.

Así por exemplo, a serie $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \cdots$ é unha reordenación da serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Teorema 6. Se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente con suma S, entón calquera reordenación dela é absolutamente converxente e a súa suma tamén vale S.

Teorema 7. (Teorema de Riemann) Se a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é condicionalmente converxente, entón dado $L \in (-\infty, +\infty)$ existe unha reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converxente con suma L.

Definición 8. Unha serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **incondicionalmente converxente** se é converxente e toda reordenación dela é converxente e ten a mesma suma.

Teorema 8. Unha serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente converxente.

Definición 9. Dicimos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ se obtén de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mediante **introdución de parénteses**, se existe unha subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$y_1 = x_1 + \ldots + x_{n_1},$$

$$y_2 = x_{n_1+1} + \ldots + x_{n_2},$$

$$\ldots$$

$$y_k = x_{n_{(k-1)}+1} + \ldots + x_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Reciprocamente dicimos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se obtén de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ mediante **supresión de parénteses**.

Teorema 9. Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é unha serie converxente e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ se obtén a partir de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ por introdución de parénteses, entón $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é converxente e ten a mesma suma que a de partida.

Nota 3. O recíproco do teorema anterior non é certo, é dicir, a supresión de parénteses pode destruír a converxencia.

Por exemplo, a serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+\ldots$ é diverxente (non verifica a condición necesaria), pero a serie $(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$ é converxente.

3. Series de termos non negativos. Criterios de converxencia

Comecemos dicindo que os resultados que veremos nesta sección serían igualmente válidos se as series teñen un número finito de termos negativos, prescindindo deles.

Ademais, debido a que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converxe $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} -x_n$ converxe, os resultados desta sección serían igualmente válidos se as series teñen case todos os seus termos non positivos.

Teorema 10. Sexa $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unha serie de números reais tal que $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Unha condición necesaria e suficiente para a que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sexa converxente é que exista $M > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{k} x_n \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$ (é dicir, que a sucesión de sumas parciais estea limitada superiormente).

Demostración. Como $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, tense que $\sum_{n=1}^{k} x_n \leq \sum_{n=1}^{k+1} x_n$, polo que a sucesión de sumas parciais é monótona crecente. En virtude do teorema de converxencia monótona, a sucesión de sumas parciais converxe se e só se está limitada. □

Teorema 11. (Criterio de comparación) Sexan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ series de números reais tales que $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (ou a partir dun índice). Entón:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \; diverxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \; diverxente.$$

Demostración. Supñamos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é converxente. Entón polo Teorema 10 a sucesión de sumas parciais s_n de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ está limitada, isto é, $\exists M > 0$ de tal maneira que:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En virtude da hipótese:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

polo que a sucesión de sumas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ está limitada e, en consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é converxente. O outro resultado é o contrarecíproco do primeiro, polo tanto é equivalente a el. □

Exemplo 7. *Se $p > 1$ entón a serie harmónica de orde p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, é converxente.*

En efecto:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{2^2}\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{2^3}\right)^{p-1} + \cdots,$$

polo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{p-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^n.$$

Polo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *para* $p > 1$ *é converxente por comparación con* $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^n$.

Exemplo 8. *Se* $0 < p < 1$ *entón a serie harmónica de orde* p *é diverxente. En efecto, se* $0 < p < 1$ *entón* $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$ *polo que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *diverxe por comparación coa serie harmónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Teorema 12. (Criterio de comparación por paso ao límite) Sexan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ series de números reais tales que $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (ou a partir dun índice). Se existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$, entón:

1. Se $L \in (0, +\infty)$ temos que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente.$
2. Se $L = 0$, temos que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente.$
3. Se $L = +\infty$, temos que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente.$

Demostración.

1. Por ser $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L \in (0, +\infty)$, dado $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - L| < \frac{L}{2} \Rightarrow -\frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} - L < \frac{L}{2}$. Polo tanto tense que:

$$\frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3L}{2},$$

e así:

$$\frac{L}{2} \cdot y_n < x_n < \frac{3L}{2} \cdot y_n.$$

Entón aplicando agora o criterio de comparación séguese que:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente,$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente.$

2. Por ser $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, dado $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ entón $|\frac{x_n}{y_n}| < 1 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} < 1$, é dicir $x_n < y_n$. Polo tanto aplicando o criterio de comparación séguese que:
   $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente.$

3. Por ser $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, dado $M = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ entón $\frac{x_n}{y_n} > 1$, é dicir $x_n > y_n$.
   Polo tanto aplicando o criterio de comparación séguese que: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \; converxente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \; converxente.$

$\square$

Exemplo 9. *Imos tratar de estudar a converxencia da serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n-1}$.

Se consideramos a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, *que é converxente, obtemos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+3n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3n-1} = 1,$$

polo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n-1}$ *converxe por comparación por paso ao límite con* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exemplo 10. *Estudemos agora a converxencia da serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3\sqrt{n}}{n^4-1}$.

Se consideramos a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, *a cal é diverxente, obtemos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3\sqrt{n}}{n^4-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-1} = 1,$$

polo que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3\sqrt{n}}{n^4-1}$ *diverxe por comparación por paso ao límite con* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4. Converxencia absoluta e condicional. Criterios de converxencia non absoluta

4.1. Converxencia absoluta

Teorema 13. (Criterio da raíz ou de Cauchy) Sexa $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unha serie de números reais. Entón:

1. Se $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente.
2. Se $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} > 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é diverxente.
3. Se $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ entón o criterio non decide sobre a converxencia da serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Nota 4. Se existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L$, entón o criterio anterior reescríbese así:

1. Se $L < 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente.
2. Se $L > 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é diverxente.
3. Se $L = 1$ entón o criterio non decide sobre a converxencia da serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplo 11. *Para xustificar o caso no que o criterio non decide, poremos 2 exemplos de series para as cales* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$*, pero nun caso a serie diverxe e noutro converxe. A serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverxe e* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. *Pola súa parte, a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converxe e* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$

Teorema 14. (Criterio do cociente ou de D'Alembert) Sexa $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unha serie de números reais tal que $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (ou a partir dun índice). Entón:

1. Se $\limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente.

2. Se $\liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é diverxente.

3. Se $\liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq 1 \leq \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ entón o criterio non decide sobre a converxencia da serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Nota 5. Se existe $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = L$, entón o criterio anterior reescríbese como:

1. Se $L < 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente.

2. Se $L > 1$ entón a serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é diverxente.

3. Se $L = 1$ entón o criterio non decide sobre a converxencia da serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplo 12. *Sexa* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, *con* $x \in \mathbb{R}$ *fixado. Neste caso observamos que:* $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$. *En consecuencia, a serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converxe absolutamente (e polo tanto converxe) para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Tense que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exemplo 13. *Vexamos* 2 *exemplos que xustifiquen que se o* $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$, *entón o criterio non decide. A serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverxe e* $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. *Pola súa parte, a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converxe e* $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

Teorema 15. Se $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou a partir dun índice) entón:

$$\liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \liminf \sqrt[n]{|x_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|x_n|} \leq \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}.$$

En consecuencia, se o criterio do cociente decide sobre a converxencia dunha serie, entón tamén decide o criterio da raíz, e se o criterio da raíz non decide, entón tampouco decide o criterio do cociente. É dicir, o criterio da raíz é máis potente.

Teorema 16. (Segundo criterio de Stolz-Cesàro) Se $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L \in [0,+\infty]$, entón existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

Exemplo 14. *Sexa a serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3-(-1)^n\right)^n}$. *Neste caso tense que os valores dos límites inferior e superior son:* $\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$, $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, *polo tanto o criterio do cociente non decide. Sen embargo* $\limsup \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, *polo tanto en virtude do criterio da raíz, a serie é converxente.*

Teorema 17. (Criterio de Raabe) Sexa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unha serie de números reais tal que $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (ou a partir dun índice). Entón:

1. Se $\liminf n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) > 1$ entón $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente.

2. Se $\limsup n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) < 1$ entón $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é diverxente.

3. Noutro caso o criterio no decide.

Nota 6. Se existe $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) = L$, entón o criterio anterior reescríbese da seguinte maneira:

1. Se $L > 1$ entón a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente converxente.

2. Se $L < 1$ entón a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é diverxente.

3. Se $L = 1$ entón o criterio non decide sobre a converxencia da serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exemplo 15. *Sexa a serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Entón tense que:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{(n+1)^2}\right) = 2 > 1$. *Polo tanto, a serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converxe en virtude do criterio de Raabe.*

Exemplo 16. *Sexa a serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+1)}$. *Comezamos intentando aplicar o criterio do cociente:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1$. *Polo tanto, o criterio do cociente non decide. En virtude do Teorema* 16, *terase que tamén* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, *polo que* *o criterio da raíz tampouco decide. En cambio, se probamos co criterio de Raabe:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}<1.$$

En consecuencia, a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ *diverxe.*

4.2. Converxencia non absoluta

Se a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converxe condicionalmente, entón ningún dos criterios anteriores serviría para deducir dita converxencia, pois soamente informan sobre converxencia absoluta ou diverxencia. Para estes casos temos o criterio, xa visto, das series alternas. Para series non necesariamente alternas, podemos enunciar os seguintes criterios.

Teorema 18. (Criterio de Dirichlet) Se a sucesión de sumas parciais da serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ está limitada e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión monótona e converxente a 0, entón $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converxe.

Exemplo 17. *Sexa a serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2})}{n}$*. Se tomamos* $x_n=\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}$*, entón temos que* $x_n=\begin{cases}1, & n=4k+1,\ k\in\mathbb{N},\\ -1, & n=4k+2,\ k\in\mathbb{N},\\ -1, & n=4k+3,\ k\in\mathbb{N},\\ 1, & n=4k,\ k\in\mathbb{N};\end{cases}$ *polo que a sucesión de sumas parciais de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é* $s_n=\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\dots\}$ *que está limitada. Como a sucesión* $y_n=\frac{1}{n}$ *é monótona e converxente a* 0*, en virtude do criterio de Dirichlet, a serie converxe. Obsérvese que a serie dos valores absolutos sería* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *a cal diverxe.*

Teorema 19. (Criterio de Abel) Se a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é converxente e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión monótona e limitada, entón $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converxe.

Exemplo 18. *Sexa a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$*. Como a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é converxente, en virtude ao criterio de Leibnitz, e a sucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *é monótona e limitada, o criterio de Abel permítenos concluír que a serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *converxe. Obsérvese que a serie dos valores absolutos,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *diverxe, por comparación coa serie harmónica.*

ACTIVIDADES PROPOSTAS

— Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD, individualmente, no tempo de dedicación non presencial.

— Resolución dos exercicios propostos no boletín (incluído no anexo 1), individualmente ou en grupo, no tempo de dedicación non presencial.

— Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.

— Participación na resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas durante as sesións presenciais.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación constante é necesaria para determinar non só o nivel de coñecementos e a detección de posibles necesidades dos alumnos, senón tamén o funcionamento do método e o labor do profesor. A avaliación do proceso de ensinanza permitirá modificar aqueles puntos que se considere convenientes e dará confianza á hora de levar a cabo as liñas metodolóxicas que mellor funcionasen.

A avaliación continua fai referencia a todas as actividades que o alumno realiza dende o primeiro ata o último día de curso e que permiten analizar de maneira exhaustiva os seus progresos en tempo real, permitindo ao profesor intervir se fose necesario. Esta modalidade de avaliación terá carácter presencial e voluntario.

Esta UD corresponde coa materia Introdución á Análise Matemática, e a súa avaliación farase a través dunha proba realizada nunha hora expositiva, con data coñecida polo alumnado e non sendo liberadora de materia. Nela preguntaranse exercicios prácticos e razoamentos sobre a veracidade ou falsidade de enunciados propostos, que permitan comprobar non só a memorización dos conceptos senón tamén o grao de asimilación dos mesmos aplicándoos a cuestións relacionadas, como as que se poden ver no boletín de exercicios que aparece como anexo 1.

A cualificación desa proba terá un peso dun $40\,\%$ dentro da avaliación continua, obtendo o $60\,\%$ restante a través doutra proba, das mesmas características citadas anteriormente, na cal se preguntarán cuestións relativas aos conceptos traballados nos temas 1 e 2.

No exame final volveranse a preguntar conceptos relacionados con esta UD. Amais do tipo de cuestións que aparecen na proba de avaliación, inlcuiranse preguntas de tipo teórico: definición de conceptos e enunciado e/ou proba de resultados vistos na clase.

A cualificación final de cada alumno (CF) virá dada por un número entre 0 e 10 que se obterá a partir da seguinte fórmula

$$CF = AC/3 + (1 - AC/30) * EF,$$

onde CF é a cualificación final, AC é a avaliación continua e EF é o exame final.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T.M. (1996). *Análisis Matemático.* Reverté.

Bartle, R.G. e Sherbert D.R. (2000). *Introducción al Análisis Matemático en una Variable (2ª Ed.).* Limusa.

García López, A. e outros (1994). *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable (2ª Ed.).* Clagsa.

Spivak, M. (1994). *Calculus (2ª Ed.).* Reverté.

Casasayas, J. e Cascante, M.C. (1990). *Problemas de Análisis Matemático de una variable real.* Edunsa.

ANEXO 1

Boletín de exercicios da unidade didáctica 3: Series de números reais

1. Razoa se as seguintes afirmacións son certas ou falsas:

   a) A serie suma de dúas series diverxentes é diverxente.

   b) Sexa $\sum x_n$ unha serie converxente de números reais. Entón:

      1) $\sum(x_n + y_n)$ é converxente $\Longleftrightarrow \sum y_n$ é converxente.
      2) $\sum(x_n + y_n)$ é diverxente $\Longleftrightarrow \sum y_n$ é diverxente.
      3) $\sum(x_n\, y_n)$ é converxente $\Longleftrightarrow \sum y_n$ é converxente.

   c) Sexa $\sum x_n$ unha serie de números reais converxente con suma $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Entón a serie $\sum x_n^{-1}$ é converxente e a súa suma vale x^{-1}.

2. Calcula a suma das seguintes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=12}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=-5}^{\infty} 2\,\pi^{-n}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (recorda que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$).

3. Obtén a serie que ten por suma parcial n-ésima a que se indica en cada caso; calcula a suma cando a serie sexa converxente:

   a) $s_n = \dfrac{n}{n+1}$

   b) $s_n = \dfrac{2\,n^2+4}{n^2+1}$

   c) $s_n = n$

   d) $s_n = \dfrac{5\,n^2-3n+2}{n^2+1}$

4. *a*) Unha serie de números reais $\sum x_n$ dise que é telescópica se existe unha sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = z_{n+1} - z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Proba que

   $$\sum x_n \text{ é converxente } \Leftrightarrow \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é converxente.}$$

   Calcula a suma da serie cando sexa posible.

b) Estuda a converxencia e calcula a suma das seguintes series usando descomposición en fraccións simples:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

5. Sexan $\sum x_n$ e $\sum y_n$ dúas series de números reais tales que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A converxencia de $\sum y_n$ implica a converxencia de $\sum x_n$?

6. Proba o Criterio de Pringsheim:
"Sexa $\sum x_n$ unha serie de termos non negativos e $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Se $n^\alpha x_n \to l \in \mathbb{R}$, para algún $\alpha > 1$, entón a serie $\sum x_n$ é converxente.

   b) Se $\{n^\alpha x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a algún número real distinto de cero ou tende a infinito para algún $\alpha \leq 1$, entón a serie $\sum x_n$ é diverxente.

7. Sexa $\sum a_n$ absolutamente converxente e $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Estuda a converxencia das seguintes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$, $a_n \neq -1$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

8. Razoa se as seguintes afirmacións son certas ou falsas:

   a) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é converxente e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión limitada entón a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$ é converxente.

   b) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é converxente e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión limitada entón $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$ é converxente.

9. Estuda a converxencia das seguintes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2\, 4^n}{(2n)!}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n\,5^n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2/n)^n}{2^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\,n!}{n^n}$, $a>0$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{3n-1}}{3n-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$, $x\in\mathbb{R}$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$, $x>0$.

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-2)}{b(b+1)\cdots(b+n-2)}$, $a,\,b>0$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}$.

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x>0$.

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}$.

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2}$.

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}}$.

ñ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\log(n+1)}$.

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10^{\frac{1}{(n+1)}}}$.

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n\,n!}$.

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n^2}.$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}, x \in \mathbb{R}.$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)^n \, 3^n}{n}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) \log n}{n}.$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$

w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}.$

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}.$

y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}.$

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2n}{n-1}\right]^{-n}.$

(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{(n+1)^n}.$

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA