MATERIA
Introdución á Análise Matemática

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física,
Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

unidade didáctica
4

Ciencias Experimentais

Números complexos

Rubén Figueroa Sestelo
Óscar A. Otero Zarraquiños

Área de Análise Matemática
Departamento Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl

© Universidade de Santiago de Compostela, 2022

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155641

MATERIA: Introdución á Análise Matemática
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Números reais

Números naturais ($\mathbb{N}$). Principio de indución
Números racionais ($\mathbb{Q}$). Numerabilidade
Axiomática dos números reais ($\mathbb{R}$). Axioma do supremo e consecuencias
Propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Densidade de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Unidade 2. Sucesións de números reais

Introdución intuitiva aos conceptos de sucesión e límite. Xeneralidades
Sucesións converxentes e os seus límites. Propiedades
Límites infinitos
Converxencia e diverxencia de sucesións monótonas
Subsucesións. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Límites de oscilación
Sucesións de Cauchy. Completitude de $\mathbb{R}$
Cálculo de límites. Criterios de Stirling e Stolz

Unidade 3. Series de números reais

Introdución intuitiva aos conceptos de serie e a súa suma
Series numéricas. Converxencia de series
Series de termos non negativos. Criterios de converxencia
Converxencia absoluta e condicional. Criterios de converxencia non absoluta

Unidade 4. Números complexos

Números complexos. Expresións, operacións e raíces dos números complexos

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (UD) enmárcase dentro da materia “Introdución á Análise Matemática” que se imparte no primeiro semestre do primeiro curso do Grao en Matemáticas, do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas, cunha carga de 6 créditos ECTS.

Esta materia básica está incluída no módulo de Análise Matemática nunha Variable, xunto con “Continuidade e Derivabilidade de Funcións dunha Variable Real” e “Integración de Funcións dunha Variable Real”, que se imparten no segundo semestre do primeiro curso, e “Variable Complexa”, que ten lugar no cuarto curso.

Esta UD fará unha moi breve incursión nos números complexos. De feito, os coñecementos adquiridos con respecto a este conxunto non se amplían moito en relación ao que debería coñecer o alumnado que cursou a materia Matemáticas II en $2^{\underline{o}}$ de bacharelato. Simplemente comentaranse algunhas xeneralidades acerca das distintas formas de expresar os números complexos (polar, binómica e exponencial), e as distintas operacións que se poden facer nese conxunto, facendo especial fincapé nas raíces, xa que é algo que non aparece no currículo de bacharelato.

Esta materia pretende introducir os alumnos nos conceptos e técnicas básicas da Análise que resultarán fundamentais, por unha parte na adquisición das competencias fixadas na memoria da titulación e, por outra, na construción posterior doutros obxectivos de traballo desta área de coñecemento, principalmente no que se refire á súa xeneralización a funcións dunha ou varias variables.

Esta UD é a última da materia e para a súa correcta explicación por parte do profesor e asimilación por parte do alumnado, a temporalización prevista é de 1 semana, o que se corresponde con 2 sesións expositivas, 1 de seminario e 1 de laboratorio.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Ademais de contribuír a acadar as competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título de Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela (USC), esta materia, e esta UD en concreto, permitirá acadar as seguintes competencias específicas:

- CE1 comprender e utilizar a linguaxe matemática;
- CE2 coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática;
- CE3 idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas;
- CE4 identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos;
- CE5 asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos;
- CE6 saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais;

CE9 utilizar aplicacións informáticas de análise estatística, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en Matemáticas e resolver problemas.

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

— presentar, practicando coas distintas notacións, as operacións cos números complexos;

— tomar contacto co programa MAPLE como apoio para o cálculo, a comprensión e a visualización dos conceptos relacionados cos conxuntos numéricos.

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:

— manexar distintas expresións dos números complexos, e saber operar con eles;

— identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

As actuacións do profesor orientaranse a conseguir unha aprendizaxe significativa, procurando que o alumno sexa o auténtico protagonista do seu proceso de aprendizaxe, favorecendo o conflito entre os contidos que se están presentando e as ideas previas do alumno e que deste conflito xurda a necesidade de construción dun novo coñecemento.

Nas clases expositivas impartirase a parte teórica da materia, ilustrándoa con algúns exemplos para facela máis comprensible. Ademais, reservaranse cuestións para implicar os estudantes na súa discusión.

Polo que respecta á docencia en grupos reducidos, preténdese lograr unha maior participación dos alumnos. Abordaranse problemas e aspectos da materia non tratados nas clases expositivas e analizaranse cuestións que adoitan resultar de máis difícil comprensión.

Por último, nas clases de laboratorio nas aulas de informática os alumnos utilizarán o programa MAPLE para realizaren cálculos e representacións gráficas, o que servirá de apoio para a resolución de problemas e para a comprensión de conceptos claves na materia.

Amais do anterior, o alumnado terá ao seu dispor sesións de titorías individualizadas ou en grupos moi reducidos. Estas titorías terán un carácter voluntario e servirán para tratar cuestións concretas ou resolver dúbidas da materia.

Como axuda contaremos con diversos recursos, entre os que destaca a USC Virtual, onde se irá subindo material docente periodicamente, como por exemplo boletíns de problemas, os apuntamentos da materia ou os arquivos do programa Maple.

CONTIDOS

1. Números complexos

1.1. O corpo dos números complexos

O corpo dos números reais resulta insuficiente para dar solución a certas ecuacións alxébricas, por exemplo, $x^2 + 1 = 0$ non ten solución real. De igual maneira, existen operacións que non teñen sentido en $\mathbb{R}$, como por exemplo $\log(-1)$. Imos construír un novo corpo, que conterá a $\mathbb{R}$ e que dará solución a estes problemas.

Definición 1. Chamamos **conxunto dos números complexos** ao conxunto de pares ordenados de números reais, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, dotado de dúas operacións internas:

- Suma: $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- Produto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Estas operacións, ao definirse a partir das de $\mathbb{R}$ herdan as súas propiedades, e fan de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ un corpo conmutativo, con elemento neutro para a suma $0 = (0, 0)$ e elemento unitario $1 = (1, 0)$.

Chamamos **unidade imaxinaria**, e denotámola por i, ao número complexo $(0, 1)$, $i = (0, 1)$. Da definición de produto, séguese que $i^2 = (-1, 0)$.

Podemos definir unha operación externa denominada produto por escalares de $\mathbb{R}$:

- $u \in \mathbb{R}, (a, b) \in \mathbb{C} \Rightarrow u \cdot (a, b) = (ua, ub)$.

Se $a \in \mathbb{R}$, identificarémolo co número complexo $(a, 0)$.

Teorema 1. En $\mathbb{C}$ non é posible definir unha relación de orde total que sexa compatible coas operacións. Polo tanto, $\mathbb{C}$ non é un corpo ordenado.

Demostración. Supoñamos que fose certo. Por ser corpo ordenado teriamos que $z^2 \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. En particular, $i^2 = -1 \geq 0$, de onde $-1 > 0$ por ser $1 \neq 0$. Pero $1 = 1^2 > 0$, e non poden ser 1 e -1 positivos á vez. $\square$

1.2. Expresións e operacións

Definición 2. Se $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, chamaremos a a **parte real** de z, $a = Re(z)$, e a b **parte imaxinaria** de z, $b = Im(z)$.

Como $z = (a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$, un número complexo pode ser escrito na forma $z = a + bi$. Dita expresión denomínase **forma binómica** de z, e permite realizar operacións de igual maneira que se fai cos polinomios, tendo en conta a relación $i^2 = -1$.

Exemplo 1. *Dados os números complexos* $z = 1 + 2i, w = 3 - 5i$*, tense que:*
$z + w = (1 + 2i) + (3 - 5i) = 4 - 31$,
$z \cdot w = (1 + 2i) \cdot (3 - 5i) = 3 - 5i + 6i - 10i^2 = 13 + i$.

Definición 3. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, chamamos **conxugado** de z ao número complexo $\overline{z} = a - bi$.

Teorema 2. Verifícanse as seguintes propiedades:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \forall\, z, w \in \mathbb{C}$;
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \forall\, z, w \in \mathbb{C}$;
3. $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z), \forall\, z \in \mathbb{C}$;
4. $z - \overline{z} = 2i \cdot Im(z), \forall\, z \in \mathbb{C}$;
5. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

O feito de que un número complexo é o mesmo que un par de números reais, suxire representar os números complexos como vectores no plano $\mathbb{R}^2$. O extremo do vector de posición que representa ao número complexo z denomínase **afixo** de z. Como un vector no plano queda determinado se coñecemos a súa lonxitude e o ángulo que forma co semieixo real positivo, o mesmo pasará cun número complexo.

Definición 4. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, chamamos:

- **módulo** de z á lonxitude do vector (a, b), $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **argumento** de z, arg z, ao ángulo que forma o vector (a, b) co semieixo real positivo.
  Se $z \neq 0$, entón cúmprese que: $\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$, $\text{sen}(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$.

Como se θ é un argumento de z tamén o é $\theta + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, todo número complexo non nulo ten infinitos argumentos. Chamaremos **argumento principal** de z, $Arg\, z$, ao único que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$.

Definición 5. A escritura $z = r_\theta$, con $r = |z|$ e $\theta = \arg z$, recibe o nome de **forma polar** de z. Se $r = |z|$ e $\theta = \arg z$, entón $Re(z) = r \cdot \cos(\theta)$ e $Im(z) = r \cdot \text{sen}(\theta)$, polo tanto $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$. Esta expresión recibe o nome de **forma trigonométrica** de z.

Definición 6. A **fórmula de Euler** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ permite reescribir a forma trigonométrica como $z = r \cdot e^{i\theta}$, que se coñece como **forma exponencial**.

As formas trigonométrica e exponencial permiten simplificar moito o produto e o cociente de números complexos.

Sexan $z = r \cdot e^{i\theta} = r \cdot (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, $w = s \cdot e^{i\phi} = s \cdot (\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$, entón tense que

$$z \cdot w = r\,s \cdot e^{i\cdot(\theta+\phi)} = r\,s \cdot (\cos(\theta + \phi) + i\,\text{sen}(\theta + \phi)),$$

isto é, o produto de dous números complexos ten por módulo o produto dos módulos e por argumento a suma dos argumentos.

De igual modo, se $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot e^{i(\theta-\phi)} = \frac{r}{s} \cdot (\cos(\theta-\phi) + i\,\text{sen}(\theta-\phi)),$$

é dicir, o cociente de dous números complexos ten por módulo o cociente dos módulos e por argumento a diferenza dos argumentos.

Para probar estas fórmulas poderiamos ou ben usar a fórmula de Euler, ou ben deducilas a partir das fórmulas trigonométricas:

$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$; $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$;
$\text{sen}(\theta+\phi) = \text{sen}\,\theta\cos\phi + \text{sen}\,\phi\cos\theta$; $\text{sen}(\theta-\phi) = \text{sen}\,\theta\cos\phi - \text{sen}\,\phi\cos\theta$.

Definición 7. (Fórmula de Moivre) Dado $z = r \cdot e^{i\theta}$, entón $z^n = r^n \cdot e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)), n \in \mathbb{Z}$.

Para probar dita fórmula poderiamos usar a forma exponencial, ou ben o feito de que

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta), n \in \mathbb{Z}.$$

1.3. Raíces de números complexos

Supoñamos $z \in \mathbb{C}$, $z = r \cdot e^{i\theta}$, e que queremos atopar $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$.
Se $w = s \cdot e^{i\phi}$, entón $w^n = s^n \cdot e^{in\phi}$. Do feito de que $w^n = z$ dedúcese que:

- $s^n = r \Rightarrow s = \sqrt[n]{r}$;
- $n\phi = \theta \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{n}$.

Pero obsérvese que se θ é un argumento de z, tamén o é $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$, polo que $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ será tamén un argumento de w. Se $k < n$, eses argumentos son todos distintos:

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi.$$

Entón, se $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, z ten n raíces n-ésimas $w_0, \ldots, w_{n-1}$, onde:
$|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$, $\forall k = 0, \ldots, n-1$; $\arg w_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

As raíces n-ésimas dun número complexo non nulo teñen todas o mesmo módulo, e os seus argumentos son equidistantes, con distancia $\frac{2\pi}{n}$. Os afixos das raíces n-ésimas dun número complexo coinciden cos vértices dun polígono regular de n lados.

Exemplo 2. *Calcular as raíces sextas da unidade.*
Dado $z = 1$ *tense que* $|z| = 1$ *e* $argz = 0$ *xa que* $cos\theta = 1$, $sen\theta = 0$.
Polo tanto as súas raíces sextas terán todas módulo $|w_k| = \sqrt[6]{|1|} = 1$, $\forall k = 0, \ldots, 5$;
e os seus argumentos serán respectivamente:

$$\arg w_0 = \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} = 0, \quad \arg w_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \quad \arg w_2 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\arg w_3 = \frac{6\pi}{6} = \pi, \quad \arg w_4 = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}, \quad \arg w_5 = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

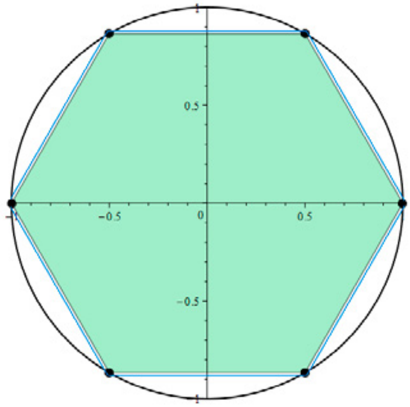

Figura 1: Representación gráfica das raíces sextas da unidade.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

— Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD, individualmente, no tempo de dedicación non presencial.

— Resolución dos exercicios propostos no boletín (incluído no anexo 1), individualmente ou en grupo, no tempo de dedicación non presencial.

— Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.

— Participación na resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas durante as sesións presenciais.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación constante é necesaria para determinar non só o nivel de coñecementos e a detección de posibles necesidades dos alumnos, senón tamén o funcionamento do método e o labor do profesor. A avaliación do proceso de ensinanza permitirá modificar aqueles puntos que se considere convenientes e dará confianza á hora de levar a cabo as liñas metodolóxicas que mellor funcionasen.

A avaliación continua fai referencia a todas as actividades que o alumno realiza dende o primeiro ata o último día de curso e que permiten analizar de maneira exhaustiva os seus progresos en tempo real, permitindo ao profesor intervir se fose necesario. Esta modalidade de avaliación terá carácter presencial e voluntario.

Esta UD corresponde coa materia Introdución á Análise Matemática, e por ser a última da materia a súa avaliación non se fará a través dunha proba como no caso das outras, senón mediante a resolución dos exercicios propostos no boletín 1, ou outros semllantes, nas sesións interactivas, así como pola participación na resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas nas sesións presenciais (tanto expositivas como interactivas).

No exame final haberá preguntas que traten sobre os conceptos relacionados con esta UD. Serán exercicios teórico-prácticos que permitan comprobar non só a memorización dos conceptos senón tamén o grao de asimilación dos mesmos aplicándoos a cuestións relacionadas, como as que se poden ver no boletín de exercicios que aparece como anexo 1.

A cualificación final de cada alumno (CF) virá dada por un número entre 0 e 10 que se obterá a partir da seguinte fórmula

$$CF = AC/3 + (1 - AC/30) * EF,$$

onde CF é a cualificación final, AC é a avaliación continua e EF é o exame final.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T.M. (1996). *Análisis Matemático.* Reverté.

GARCÍA LÓPEZ, A. E OUTROS (1994). *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable (2ª Ed.).* Clagsa.

SPIVAK, M. (1994). *Calculus (2ª Ed.).* Reverté.

CASASAYAS, J. E CASCANTE, M.C. (1990). *Problemas de Análisis Matemático de una variable real.* Edunsa.

ANEXO 1

Boletín de exercicios da unidade didáctica 4: Números complexos

1. Sexan $z, w \in \mathbb{C}$; demostra as seguintes afirmacións:

   a) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.
   b) $|zw| = |z||w|$.
   c) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ se $z \neq 0$.
   d) $|z^n| = |z|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   e) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re}(z\bar{w})$.
   f) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (Lei do paralelogramo: en calquera paralelogramo a suma dos cadrados das diagonais coincide coa suma dos cadrados dos lados).
   g) $\text{Re}z \leq |\text{Re}z| \leq |z|$.
   h) $\text{Im}z \leq |\text{Im}z| \leq |z|$.
   i) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdade triangular: cada lado dun triángulo é menor que a suma dos outros dous).
   j) $|z| \leq |\text{Re}z| + |\text{Im}z|$.

2. Calcula as partes reais e imaxinarias dos seguintes números complexos, sendo $z = 1 + 2i$ e $w = 3 + 4i$.

   (a) $3z + i\,w$ (b) $2z^2 - z\bar{w}$ (c) $2|w| + (1-i)z^2$

   (d) $\dfrac{w+z}{w-z}$ (e) $\dfrac{1-iz}{1+iz}$ (f) $(z + 5z^{-1})^{-1}$.

3. Pasa de forma binómica a polar os seguintes números complexos:

   (a) $1 + i\sqrt{3}$ (b) $4\sqrt{3} + i4$ (c) $-5i$ (d) -3.

4. Pasa de forma exponencial a binómica os seguintes números complexos:

   (a) $3\mathrm{e}^{i\pi/4}$ (b) $\mathrm{e}^{-\pi i}$ (c) $\pi\mathrm{e}^{-i\pi/3}$.

5. Representa graficamente no plano complexo os conxuntos dos números z que satisfan as seguintes relacións:

   (a) $|z-2| = |z+4|$ (b) $|z-2| = 3$ (c) $|z-3| + |z+3| = 10$

   (d) $1 < |z+2i| \leq 2$ (e) $\text{Re}\dfrac{z-i}{z+i} = 0$ (f) $\text{Im}\dfrac{z-i}{z+i} = 0$.

6. Calcula e representa graficamente:

   a) as raíces cadradas, cúbicas e sextas de i;

   b) as raíces sextas de $4\sqrt{3}+4i$;

   c) as raíces cuartas de $-1+i\sqrt{3}$;

   d) as raíces cúbicas de -8.

7. Resolve a ecuación

$$(1+i)z^3 = 8-8i.$$

8. Demostra que se $z \in \mathbb{C}$ é raíz (ou cero) dun polinomio con coeficientes reais entón tamén é raíz do conxugado $\bar{z}$ (polo que as raíces dos polinomios con coeficientes reais preséntanse por pares conxugados).

9. Resolve a ecuación

$$-\frac{1}{8}(2+i)z^4 = 2+\sqrt{3}+i(1-2\sqrt{3}).$$

ANEXO 2

Notacións e algúns comandos básicos con Maple

1. Notación e algúns comandos básicos

Símbolos e/ou comandos	Efecto/utilidade
I	Unidade imaxinaria
evalc	Comando para a avaliación simbólica en $\mathbb{C}$
Re	Obter a parte real dun número complexo
Im	Obter a parte imaxinaria dun número complexo
conjugate	Obter o conxugado dun complexo
abs	Obter o módulo dun complexo
argument	Obter o argumento principal dun complexo (Maple considera que o argumento principal dun número complexo z é aquel que verifica as desigualdades $-\pi < \arg(z) \leq \pi$)
polar	Obter a forma polar dun complexo (Maple devolve o módulo e o argumento do complexo)
solve	Comando para resolución de ecuacións (obtención de raíces)

2. Parte real e imaxinaria

```
Re(2-3*I);
Im(2-3*I);
```

$$2$$

$$-3$$

Maple non presupón que as variables que interveñen sexan reais. De non ser reais, x e y non serían a parte real e a parte imaxinaria de $x + Iy$ (por exemplo, x e y poderían ser, tamén, números complexos).

```
Re(x+I*y); Im(x+I*y);
```

$$\Re(x) - \Im(y)$$

$$\Im(x) + \Re(y)$$

```
Re(1+I+x+I*y);
Im(1+I+x+I*y);
```

$$1 + \Re(x) - \Im(y)$$

$$1 + \Im(x) + \Re(y)$$

O comando **evalc** presupón que as variables intervenientes son reais (agás se impoñemos condicións en sentido contrario). Vexamos agora como se modifican os anteriores resultados co uso de **evalc**:

```
evalc(Re(x+I*y));
evalc(Im(x+I*y));
```

$$x$$

$$y$$

```
evalc(Re(1+I+x+I*y));
evalc(Im(1+I+x+I*y));
```

$$1 + x$$

$$1 + y$$

3. Operacións con números complexos

```
evalc((a+b*I)+(c+d*I)); #SUMA
```

$$a + c + I(b + d)$$

```
evalc((a+b*I)*(c+d*I)); #PRODUTO
```

$$ac - bd + I(ad + bc)$$

```
evalc(1/(x+I*y));#Inverso dun complexo non nulo
```

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{Iy}{(x^2 + y^2)}$$

```
evalc((a+b*I)/(c+d*I));
```

$$\frac{ac}{c^2 + d^2} + \frac{bd}{c^2 + d^2} + I\left(\frac{bc}{c^2 + d^2} - \frac{ad}{c^2 + d^2}\right)$$

4. Conxugado dun número complexo

```
conjugate(2+3*I);
```

$$2 - 3I$$

```
conjugate(x+I*y);
```

$$\overline{(x + Iy)}$$

```
evalc(conjugate(x+I*y));
```

$$x - Iy$$

```
evalc((x+I*y)*conjugate(x+Iy));
```

$$x^2 + y^2$$

5. Módulo e argumento dun número complexo

```
abs(1+I);
```

$$\sqrt{2}$$

```
abs(x+I*y);
```

$$|x + Iy|$$

```
evalc(abs(x+I*y));
```

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

```
argument(1+I);
```

$$\frac{\pi}{4}$$

```
argument(I);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

```
argument(-1);
```

$$\pi$$

```
argument(-I);
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

```
argument(x+I*y);
```

$$\text{arg}(x + Iy)$$

```
evalc(argument(x+I*y));
```

$$\text{arctan}(y, x)$$

6. Forma polar ou trigonométrica dun número complexo

```
polar(1+I);
```

$$polar\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

```
polar(-2-I);
```

$$polar\left(\sqrt{5}, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \pi\right)$$

```
polar(x+I*y);
polar(z);
```

$$polar\left(|x+Iy|, (x+Iy)\right)$$

$$polar\left(|z|, \arg(z)\right)$$

```
evalc(polar(abs(z),theta)); simplify(%); #Forma trigonométrica
```

$$|z|cos(\theta) + I|z|sin(\theta)$$

$$|z|\left(I\sin(\theta) + \cos(\theta)\right)$$

7. Raíces n-ésimas de números complexos

Nesta sección veremos como utilizar o procedemento denominado **Ra** que ten por obxectivo axudar á interpretación visual das raíces n-ésimas dos números complexos.

Cada número complexo α, non nulo, ten n raíces n-ésimas distintas (n é un número natural), que poden obterse do seguinte xeito:

$$\sqrt[n]{|\alpha|}exp\left[\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n}\right], \; k = 0, \ldots, n-1,$$

onde θ é o argumento principal de α (calquera outro serviría o mesmo).

Dado que todas estas raíces teñen o mesmo módulo, $\sqrt[n]{|\alpha|}$, están situadas nunha circunferencia centrada na orixe con raio este módulo e, ademais, son os vértices dun polígono regular de n lados, inscrito na dita circunferencia.

Os argumentos sobre os que actúa o procedemento **Ra** son:

- un número complexo, poñamos z,
  e
- un número natural, n, que indicará a orde das raíces que estamos a considerar.

Executando unha sentenza da forma **Ra(z, n)**, obteremos algunha información sobre o complexo z, entre a cal figuran expresións das raíces n-ésimas do mesmo e aproximacións a estas raíces, así como unha representación gráfica delas, xunto coa circunferencia e o polígono regular mencionados máis arriba.

Exemplo 3. *Calcular as raíces cúbicas de* -1.

```
Ra(-1,3);
```

Complexo: $z = -1$

Orde das raíces: $n = 3$

$$|z| = 1$$

$$|z|^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\arg(z) = \pi$$

RAÍCES E A SÚA REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

$$Raiz_1 = \frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}$$

$$AproxRaiz_1 = 0.5000000000 + 0.8660254040I$$

$$Raiz = -1$$

$$AproxRaiz_2 = -1$$

$$Raiz_3 = \frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}$$

$$AproxRaiz_3 = 0.5000000000 - 0.8660254040I$$

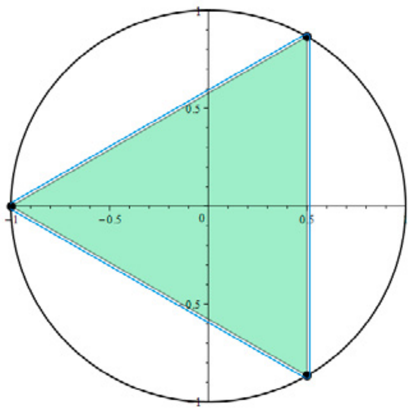

Figura 2: Representación gráfica das raíces cúbicas de -1.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA