MATERIA
Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas

unidade didáctica 1

Ciencias Experimentais

Introdución á lóxica matemática

Beatriz Álvarez Díaz

Área de Álxebra
Departamento de Matemáticas
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón:
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl

© Universidade de Santiago de Compostela, 2022

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155573

MATERIA: Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Introdución á lóxica matemática

1.1. Necesidade e importancia da linguaxe lóxica: paraloxismos
1.2. Lóxica proposicional. Proposicións atómicas e moleculares
1.3. Táboas de verdade. Tautoloxías e contradicións
1.4. O proceso de dedución. Razoamentos e demostracións formais no cálculo proposicional

Unidade 2. Conxuntos

2.1. Conxuntos e elementos. Subconxuntos: partes dun conxunto
2.2. Representacións gráficas: Diagramas de Venn
2.3. Conxunto referencial. Operacións con conxuntos: propiedades. A álxebra de Boole das partes dun conxunto
2.4. Recubrimento e partición. Unión disxunta e produto cartesiano

Unidade 3. Aplicacións

3.1. Concepto de aplicación. Gráfica dunha aplicación: exemplos
3.2. Tipos de aplicacións: inxectiva, sobrexectiva e bixectiva
3.3. Composición de aplicacións: Propiedades. Aplicación inversa
3.4. Extensións dunha aplicación ao conxunto de partes

Unidade 4. Relacións

4.1. Noción de relación. Composición de relacións. Relación inversa
4.2. Representacións gráficas
4.3. Relacións binarias nun conxunto: propiedades. Relación inducida
4.4. Relacións de equivalencia. Clases de equivalencia: propiedades. Conxunto cociente
4.5. Factorización canónica dunha aplicación
4.6. Relacións de orde. Representacións gráficas: diagramas de Hasse (árbores). Orde total e parcial. Elementos destacados nun conxunto ordenado. Cadeas, retículos e conxuntos ben ordenados

Unidade 5. Combinatoria

5.1. Variacións. Variacións con repetición
5.2. Números factoriais. Permutacións. Permutacións con repetición
5.3. Números combinatorios. Combinacións
5.4. Combinacións con repetición
5.5. Principio de inclusión-exclusión. Enumeración das aplicacións sobrexectivas
5.6. O triángulo de Tartaglia-Pascal. O binomio de Newton

Unidade 6. Conxuntos infinitos

6.1. Conxuntos finitos e infinitos

6.2. Os números naturais como clases de conxuntos finitos equipotentes

6.3. Principio de indución. Operacións e orde en $\mathbb{N}$

6.4. Conxuntos numerables e non numerables. Os números racionais. O procedemento diagonal e a non numerabilidade de $\mathbb{R}$

6.5. O axioma de elección e o lema de Zorn

Unidade 7. Aritmética enteira e modular

7.1. Operacións binarias

7.2. Números enteiros e estrutura de ($\mathbb{Z}$,+). Propiedades de $\mathbb{Z}$

7.3. Divisibilidade. Números primos e o teorema fundamental da aritmética

7.4. Máximo común divisor e mínimo común múltiplo. Teorema de Bezout

7.5. Algoritmo de Euclides. Algoritmo de Euclides estendido

7.6. Aritmética modular. Os aneis $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Congruencias. Unidades módulo n. O teorema de Euler-Fermat

7.7. Ecuacións diofánticas. Resolución de ecuacións diofánticas lineais

7.8. Números enteiros coprimos: O teorema chinés dos restos

7.9. Polinomios nunha variable

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica é a primeira da materia *Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números* do primeiro curso do Grao en Matemáticas. É unha materia impartida no primeiro semestre e clasificada como de Formación Obrigatoria. Este tipo de materias están deseñadas para dotar ao alumnado dunha boa e ampla base, que lle permita desenvolverse noutras materias de temáticas máis concretas e afondar no amplo mundo das matemáticas.

A unidade *Introdución á lóxica matemática* supón o primeiro contacto do alumnado cos métodos de estructurar a información e o razoamento matemáticos, polo que será fundamental para a comprensión do resto de materias non só no primeiro curso, senón do grao. Por ser unha materia de primeiro curso, será preciso ter e conta que o alumnado non ten referencias aínda de como se traballa en matemáticas; polo que cómpre realizar a través desta primera unidade unha aproximación inicial para facer accesible a materia.

A programación da materia está dividida en sete unidades didácticas e explora temas que involucran números, conxuntos e funcións. Unha vez coñecidas as propiedades elementais, e coa lóxica e a teoría de conxuntos como base, pasarase a traballar a inducción e a cardinalidade. No eido da matemática discreta, consideraranse as técnicas de conteo e combinatoria. O estudo dos números naturais levará a afondar nas propiedades de divisibilidade e a aritmética modular.

As unidades didácticas son en principio independentes, mais esta independencia realmente non é total. Por exemplo, comézase abordando temas de linguaxe matemático e razoamento lóxico que serán imprescindibles para a comprensión do resto de unidades. Non obstante, os contidos e temas tratados en si mesmos son diferentes en cada unidade.

Nesta primeira unidade didáctica introduciremos os principios básicos da lóxica matemática, sentando as bases da demostración formal e por tanto das matemáticas como ciencia.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

A materia de *Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números* versa sobre os fundamentos das matemáticas, ofrecendo unha preparación para as demais materias da titulación do Grao en Matemáticas. Dentro dos obxectivos xerais contemplados para o Grao en Matemáticas, nesta unidade didáctica trataremos específicamente os seguintes:

OX2 Desenvolver nos estudantes as capacidades analíticas e de abstracción, a intuición e o pensamento lóxico e rigoroso a través do estudo da Matemática.

OX3 Transmitir aos estudantes unha visión das Matemáticas como parte integrante da Educación e a Cultura que lles permita recoñecer a súa presenza na Natureza a través da Ciencia, a Tecnoloxía e a Arte.

Con respecto aos obxectivos recollidos dentro da propia materia, nesta unidade proporemos os seguintes obxectivos específicos:

OE1 Desenvolver no alumnado bos hábitos de comprensión, comunicación e escritura matemáticas.

OE2 Traballar métodos e técnicas de razoamento, principalmente de matemática discreta, e aplicar estes métodos para a resolución de problemas.

OE3 Reflexionar sobre a natureza das matemáticas como ciencia do razoamento e non como un conxunto de técnicas calculísticas e memorísticas.

En canto ás competencias xerais da materia, estas poden clasificarse en competencias básicas (**CB**), competencias xerais (**CX**), competencias transversais (**CT**) e competencias específicas (**CE**). Dentro das establecidas no Grao en Matemáticas, esta unidade didáctica en concreto será fundamental para o desenvolvemento das competencias CT3 e CE1, aínda que se abordarán tamén repetidamente as competencias CB2, CB4, CX5, CT1, CT2, CT4, CT5, CE6, CE7 e CE8:

CB2 Que os estudantes saiban aplicar os seus coñecementos ao seu traballo ou vocación dunha forma profesional e posúan as competencias que adoitan demostrarse por medio da elaboración e defensa de argumentos e a resolución de problemas dentro da súa área de estudo.

CB4 Que os estudantes poidan transmitir información, ideas, problemas e solucións a un público tanto especializado como non especializado.

CX5 Estudar e aprender de forma autónoma, con organización de tempo e recursos, novos coñecementos e técnicas en calquera disciplina científica ou tecnolóxica.

CT1 Utilizar bibliografía e ferramentas de procura de recursos bibliográficos xerais e específicos de Matemáticas, incluíndo o acceso por Internet.

CT2 Xestionar de forma óptima o tempo de traballo e organizar os recursos dispoñibles, establecendo prioridades, camiños alternativos e identificando erros lóxicos na toma de decisións.

CT3 Comprobar ou refutar razoadamente os argumentos doutras persoas.

CT4 Traballar en equipos interdisciplinares, achegando orde, abstracción e razoamento lóxico.

CT5 Ler textos científicos tanto en lingua propia como noutras de relevancia no ámbito científico, especialmente a inglesa.

CE1 Comprender e utilizar a linguaxe matemática.

CE6 Saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais.

CE7 Propoñer, analizar, validar e interpretar modelos de situacións reais sinxelas, utilizando as ferramentas matemáticas máis adecuadas aos fins que se persigan.

CE8 Planificar e executar algoritmos e métodos matemáticos para resolver problemas no ámbito académico, técnico, financeiro ou social.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

As distintas sesións da materia están clasificadas segundo os contidos a desenvolver e o número de persoas por aula, dando lugar a tres tipos de sesións:

- **Sesións expositivas.** Realizaranse en gran grupo, da orde de oitenta persoas por aula. Estas sesións terán un formato de clase maxistral participativa: realizarase a exposición dos contidos teóricos fundamentais da materia, enriquecida coa resolución de problemas e coa presentación de exemplos.
- **Sesións interactivas de seminario.** Estarán constituídas por grupos máis reducidos, da orde de corenta persoas por aula. Nelas trataranse aspectos complementarios da materia, realizaranse problemas e exercicios e levarase a cabo a súa corrección por parte do profesorado.
- **Sesións interactivas de laboratorio.** Realizaranse en grupos reducidos de aproximadamente vinte persoas. Nestas clases o protagonismo fundamental será do alumnado, que deberán presentar exercicios e exposicións de temas relacionados coa materia.

A distribución semanal da materia é a seguinte: dúas horas de clases expositivas, unha hora de clase de seminario e unha hora de laboratorio. Ademais, terán lugar dúas **titorías en grupo moi reducidos** ao longo do semestre. Nelas farase un seguimento personalizado da aprendizaxe do alumnado e do desenvolvemento das competencias especificadas. En xeral, será un foro no que o alumnado poderá preguntar as dúbidas que xurdan no proceso de aprendizaxe e no que se realizarán, en caso de non haber dúbidas, exercicios de repaso co obxectivo de que se asenten os contidos.

En canto á temporalización, adicaranse a esta primeira unidade didáctica tres clases expositivas, dúas sesións de seminario e dúas de laboratorio para cada discente. En canto aos recursos, as notas cos contidos teóricos da unidade e os exercicios propostos para cada sesión serán postas a disposición do alumnado a través da Aula Virtual. No Anexo I preséntanse exemplos de actividades que se poderían realizar e propoñer nas sesións de seminario e laboratorio.

Para acadar os obxectivos propostos e que o alumnado desenvolva as competencias correspondentes será imprescindible a participación activa nas sesións presenciais. En ocasións, resolveranse problemas en pequenos grupos ou en gran grupo e pedirase que expoñan resultados e as súas propostas de solucións. Ademais, despois de cada sesión de laboratorio, solicitarase que realicen e entreguen a través da Aula Virtual un exercicio proposto, en relación cos contidos tratados no laboratorio correspondente.

CONTIDOS

1. Necesidade e importancia da linguaxe lóxica: paraloxismos

Todas as definicións de matemáticas que podemos atopar coinciden en que o traballo matemático consiste en, partindo dunhas certas premisas, extraer conclusións e deducir outras novas a través de razoamentos lóxicos.

As matemáticas son realmente a ciencia do razoamento, lonxe do concepto que ás veces se percibe na sociedade de que as matemáticas só funcionan a través de receitas ou algoritmos establecidos. Dótannos da capacidade de aprender a enfrontarnos a un problema e resolvelo correctamente e de xeito ordeado. Como di o matemático e divulgador Eduardo Saenz de Cabezón "as matemáticas fannos máis libres", pois axúdannos a ser máis críticos.

A linguaxe lóxica non é só necesaria para facer matemáticas, senón tamén no noso día a día. Por exemplo, é moi común atopar nos medios de comunicación, ou mesmo nunha conversa pola rúa, razoamentos como o seguinte: "metéronse con esa rapaza, seguro que algo fixo. Porque claro, se vas provocando á xente, acaba tendo consecuencias" ou "descubrírono roubando cartos públicos, polo tanto todos os políticos rouban". Aínda que expresados nesta linguaxe poden parecer certos, a lóxica proposicional permitiranos comprobar que estas afirmacións son paraloxismos, é dicir, razoamentos falsos desde o punto de vista lóxico.

2. Lóxica proposicional. Proposicións atómicas e moleculares

A *lóxica* é a disciplina que se ocupa dos métodos de razoamento, fornecendo regras e técnicas que nos permiten decidir se unha argumentación ou unha dedución é correcta ou non. É a base de todo razoamento matemático e ten numerosas aplicacións nas ciencias físicas e naturais, en computación, nas ciencia sociais e na vida diaria.

Unha *proposición* é unha oración declarativa que é verdadeira ou falsa, pero non pode ser ambas cousas á vez. Denotaremos estas proposicións con letras minúsculas: p, q, r, s, t...

Exemplo 1 *Son proposicións:*

- *O 2011 foi ano Xacobeo.*
- $1 + 2 = 3$
- *Atopei onde aparcar o coche.*
- *Teño fame e sono á vez.*

Exemplo 2 *Non son proposicións:*

- *Atendede!*
- *Cantas vacas tes?*
- $2x + 4 = 8$

O *valor de verdade* dunha proposición será 0 ou "falso" se a proposición é falsa ou 1 ou "verdadeiro" se a proposición é verdadeira.

Exemplo 3 *Se chamamos p: "O 2011 foi ano Xacobeo" o valor de verdade de p será 0 ou "falso", mentras que se chamamos q: "$1 + 2 = 3$" o valor de q é 1 ou "verdadeiro".*

A área da lóxica que se ocupa das proposicións e das regras para o cálculo dos seus valores de verdade chámase *lóxica proposicional* ou *cálculo proposicional*. Así como na linguaxe habitual, as proposicións poden ser máis complexas que ata as vistas ata agora, pois podemos combinar varias proposicións a través de operadores lóxicos para formar outras novas. Por exemplo, se p e q son proposicións tamén son proposicións: p e q, p ou q, non p...

Un *operador lóxico* é precisamente un elemento que permite formar unha nova proposición a partir doutras proposicións. Na seguinte táboa recóllense algúns dos operadores lóxicos máis habituais:

Táboa 1: Operadores lóxicos básicos.

Nome	Notación	Lectura	Valor de verdade
Negación	$\neg p$ $\bar{p}$	"non p"	Verdade cando p é falsa e falsa cando p é verdadeira.
Conxunción	$p \wedge q$	"p e q"	Verdade se ambas (p e q) son verdade e falsa noutro caso.
Disxunción (inclusiva)	$p \vee q$	"p ou q"	Falsa se ambas son falsas e verdadeira noutro caso.
Disxunción exclusiva	$p \oplus q$ $p \triangle q$	"ou só p ou só q"	Verdade cuando exclusivamente unha das dúas (ou p ou q) é verdadeira e falsa noutro caso.
Implicación	$p \rightarrow q$	"se p entón q" "p implica q" "p é condición suficiente para q" "q é condición necesaria para p" "q se p" "p só se q" "se p entón q" "de p dedúcese q"	Falsa se p é verdade e q é falsa e verdadeira noutro caso.
Bicondicional, dobre implicación ou equivalencia	$p \leftrightarrow q$	"p se e só se q" "p é equivalente a q" "p é condición necesaria e suficiente para q"	Verdade se p e q teñen o mesmo valor e falsa noutro caso.

Concluímos así que se combinamos distintas *proposicións atómicas* (é dicir, proposicións simples que non conteñan operadores lóxicos) a través de operadores lóxicos obtemos proposicións máis complexas, chamadas *proposicións moleculares*.

A medida que utilizamos máis operadores e proposicións atómicas para configurar as proposicións moleculares pode ser necesario o uso de parénteses, para indicar a prioridade. Por exemplo, se escribimos $p \wedge \neg q \vee s$ non obteriamos, *a priori*, unha proposición. Para ter unha proposición deberemos indicar quen opera primeiro: se $\wedge$, e escribiremos $[p \wedge (\neg q)] \vee s$; ou se $\vee$, e escribiremos $p \wedge [(\neg q) \vee s]$.

Neste senso, en lóxica proposicional existen unhas determinadas normas que nos permiten reducir o número de parénteses, para que a notación sexa máis clara. O que se establece son unhas regras de prioridade entre os operadores lóxicos por niveis. Deste xeito, para identificar os "átomos" que conforman unha proposición molecular, empezaremos separando os argumentos do operaror de maior nivel e descendendo nos mesmos. Os primeiros tres niveis están constituídos do seguinte xeito:

- Nivel 1: $\neg$
- Nivel 2: $\wedge$ e $\vee$
- Nivel 3: $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

Exemplo 4 *O enunciado*

$$(p \wedge q) \vee s \leftrightarrow \neg p \wedge q,$$

é unha forma correcta de escribir

$$[(p \wedge q) \vee s] \leftrightarrow [(\neg p) \wedge q].$$

Nas proposicións lóxicas é habitual atopar tamén cuantificadores. Por exemplo, se dicimos que "para todo polinomio de grado 1 existe unha raíz", estamos utilizando o *cuantificador universal* "para todo", que denotaremos co símbolo $\forall$. Na proposición "existe x tal que $x - 2 = 0$" estaremos utilizando o *cuantificador existencial*, que denotaremos por $\exists$, de xeito que poderiamos reescribir a anterior proposición como:

$$\exists\, x \text{ tal que } x - 2 = 0$$

Exemplo 5 *Sexa p: "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $\mid x - y \mid < \delta$ entón $\mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon$". Se queremos negar a proposición, é dicir, formular $\neg p$ obteriamos:*

$$\text{“}\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall \delta > 0,\ \mid x - y \mid < \delta \text{ entón } \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon\text{”}$$

3. Táboas de verdade. Tautoloxías e contradicións

Unha vez creada unha nova proposición molecular a través de proposicións atómicas é interesante coñecer os posibles valores de verdade da nova proposición. Para facelo, deberemos ter en conta todos os posibles valores que poidan acadar as proposicións atómicas que as compoñan e tamén as súas combinacións. Para representar estes valores de verdade de forma sinxela utilízanse táboas que se coñecen como *táboas de verdade*.

Por exemplo, as táboas de verdade dos operadores da Táboa 1 serían:

Táboa 2: Táboas de verdade dos operadores básicos.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vartriangle q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Cando os valores de verdade dunha proposición son sempre 1 ou " verdadeiro" diremos que esa proposición é unha *tautoloxía*. Se, pola contra, os valores son sempre 0 ou "falso" diremos que a proposición é unha *contradición*. Finalmente, se non ocorre ningunha das anteriores posibilidades e os valores de verdade son nalgúns casos "verdadeiro" e noutros "falso" diremos que a proposición é unha *continxencia*.

Exemplo 6 *A proposición* $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ *é unha tautoloxía.*

Táboa 3: Tautoloxía.

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p$	$\vee$	$\neg q$
0	1	1	1	**1**	0	0	0
1	1	0	0	**1**	0	1	1
1	0	0	1	**1**	1	1	0
1	0	0	0	**1**	1	1	1

Exemplo 7 *A proposición* $[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \to p$ *é unha continxencia.*

Táboa 4: Continxencia

$[(\neg p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\neg q]$	$\to$	p
0	1	1	0	0	**1**	1
0	0	0	0	1	**1**	1
1	1	1	0	0	**1**	0
1	1	0	1	1	**0**	0

Exemplo 8 *A proposición* $p \wedge (\neg p \wedge q)$ *é unha contradición.*

Táboa 5: Contradición.

p	$\wedge$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$
1	**0**	0	0	1
1	**0**	0	0	0
0	**0**	1	1	1
0	**0**	1	0	0

Ademais, estas táboas de verdade tamén nos permiten saber cando dúas proposicións son equivalentes de forma sinxela. Diremos que dúas *proposicións lóxicas son equivalentes* se teñen o mesmo valor de verdade para calquera valor de verdade de partida.

Exemplo 9 $p \vee \neg q$ *e* $p \to q$ *son equivalentes.*

Táboa 6: As proposicións $p \vee \neg q$ e $p \to q$ teñen a mesma táboa de verdade.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Podemos entón escribir que $p \vee \neg q \leftrightarrow p \to q$*.*

Deste xeito podemos comprobar e deducir algunhas propiedades ou leis que se cumpren para calquera proposición lóxica. Concretamente para os operadores $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ que para calesquera proposicións p, q e r:

- **Idempotencia**:

$$p \wedge p \leftrightarrow p$$

$$p \vee p \leftrightarrow p$$

- **Propiedade conmutativa**:

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$$

- **Propiedade asociativa**:

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow p \wedge q \wedge r$$

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r) \leftrightarrow p \vee q \vee r$$

- **Propiedade distributiva**:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- **Leis de De Morgan**:

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Unha vez coñecemos proposicións equivalentes podemos realizar procesos de simplificación partindo das expresións máis complexas. Por exemplo:

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \quad \leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \quad \leftrightarrow \quad \neg p \wedge (\neg q \vee q)$$

4. O proceso de dedución. Razoamentos e demostracións formais no cálculo proposicional

Existe certa semellanza entre as matemáticas e o xadrez. Se nos convidan a xogar contra un programa de computador cando a partida xa está iniciada, empezaremos analizando a posición que ocupan as pezas; a continuación deseñaremos un plan e poñerémolo en práctica utilizando as regras do xogo, a sabendas de que o computador non aceptará movementos ilegais. Se somos o bastante agudos, e a posición inicial das pezas o permíte, acabaremos por facer xaque mate. Analogamente, se nos piden que demostremos un teorema (sentenza relativa a obxectos matemáticos, tamén chamada proposición se se considera fácil de probar ou menos importante, corolario se é consecuencia directa do resultado que o precede e lema se vai a ser utilizado máis tarde para demostrar outro resultado verdadeiramente interesante), a hipótese (condicións que se supoñen satisfeitas) e a tese (o que se afirma que se cumpre en esas condicións) fan as veces de situación inicial dun taboleiro e xaque mate.

Das condicións contidas na hipótese iranse derivando novas sentenzas (comparables coas posicións intermedias da partida) utilizando regras lóxicas de aceptación universal ou convida (como as reglas do xogo no caso do xadrez), a última das cales debe ser a tese. (Goberna *et. al.*, 2000)

Unha *demostración* é un conxunto de argumentos que permite garantir a verdade dunha afirmación. Para realizar unha demostración partimos dunhas premisas ou condicións, que chamamos *hipóteses*; que utilizamos xunto con outras ferramentas coñecidas (resultados matemáticos), para chegar a concluír que a nosa conclusión ou *tese* é consecuencia desas hipóteses.

Supoñamos que coñecemos un feito p e pretendemos verificar que q é unha consecuencia de que p ocorra. Isto denotarémolo por $p \Rightarrow q$, onde diremos que p é a hipótese e q a tese. Aínda que, seguindo a notación da lóxica proposicional deberiamos utilizar os símbolos $\to$ e $\leftrightarrow$, en xeral en matemáticas adoitan utilizarse $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$.

Por convención escríbese como

$$\textbf{hipóteses} \quad \Rightarrow \quad \textbf{tese}$$

e no caso de que ambas as premisas sexan equivalentes, é dicir que tamén se cumpra

$$\textbf{hipóteses} \quad \Leftarrow \quad \textbf{tese}$$

entón escríbese

$$\textbf{hipóteses} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{tese}.$$

Exemplo 10 *Se por exemplo afirmamos que acabamos de mercar un cadro, entón temos un cadro novo. Logo podemos escribir que*

$$\textbf{\textit{acabamos de mercar un cadro}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{\textit{temos un cadro novo}}.$$

Porén, non sería certo que sexan premisas equivalentes

$$\textbf{\textit{acabamos de mercar un cadro}} \quad \not\Leftrightarrow \quad \textbf{\textit{temos un cadro novo}}.$$

xa que podemos ter un cadro novo pero non necesariamente o temos por que ter comprado, podería térnolo regalado alguén, por exemplo. Logo a implicación en sentido contrario ($\Leftarrow$) non se verifica.

Exemplo 11 *Supoñamos que p é un número enteiro positivo que ademais verifica a ecuación $x^2 - x - 2 = 0$. Podemos probar que entón $p = 2$.*

Demostración. *O que nos di o enunciado é que*

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ é enteiro positivo} \\ p \text{ verifica a ecuación } x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 2$$

Partimos das hipóteses:

1. p é un numero enteiro positivo, logo $p > 0$,

2. p verifica a ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, polo tanto é solución de dita ecuación.

Sabemos que as solucións dunha ecuación de segundo grao do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ son da forma

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Utilizando isto e a hipótese 2 sabemos entón que p debe ser

$$\frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \quad \text{ou} \quad \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1},$$

é dicir, $p = 2$ ou $p = -1$. Así, pola hipótese 1, p ten que ser dous xa que p é un enteiro positivo.

En xeral, podemos demostrar que $p \Rightarrow q$ a través dun destes tres xeitos de razoar:

- por **demostración directa**: verificando que ou non ocorre p ou ocorre q.
- por **demostración por contrarrecíproco**: comprobando que, partindo da premisa de que non ocorre q, entón tampouco ocorre p.
- por **demostración por redución ao absurdo**: supoñer que ocorre p sen que ocorra q e chegar a unha contradicción.

Exemplo 12 *Vexamos algúns exemplos destes tres tipos de demostración:*

- *Supoñamos que a nosa hipótese p é que "o chan está seco" e queremos demostrar q que é "non choveu recentemente". Claramente, ou o chan está mollado ou non choveu recentemente. Logo queda demostrado por demostración directa.*
- *Para p sendo "o can do veciño acaba de morrer agora" e q sendo "o can do veciño estaba vivo". Para facer unha demostración por contrarrecíproco partiremos de negar q. É dicir, "o can do veciño estaba morto" entón non puido ocorrer que "o can do veciño acabe de morrer agora", é dicir obtemos a negación de p.*
- *Agora p será "conducía a 180 km/h" e q será "infrixiu as normas de tráfico". Realizaremos a demostración de que $p \Rightarrow q$ por redución ao absurdo: supoñemos que ocorren p e non q á vez, pero iso é imposible porque non q é non infrinxir as normas de tráfico e p é conducir a 180 km/h (cousa que non está permitida), logo chegamos a unha contradición porque non poden ocorrer á vez.*

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

O peso da avaliación desta unidade didáctica dentro da nota de avaliación continua da materia será dun $10\,\%$ sobre o total. Para levar a cabo esta avaliación proporcionarase despois de cada laboratorio un documento con actividades relacionadas cos contidos da unidade (das incluídas nos Anexo 1 ou semellantes), que se deberán entregar dixitalizados a través da Aula Virtual. Unha vez subidos a cualificación final desa actividade será repartida do seguinte xeito:

- un $50\,\%$ pola cualificación do docente,
- un $25\,\%$ pola cualificación froito da coavaliación (levada a cabo por un compañeiro ou compañeira de clase asignado aleatoriamnte),
- un $25\,\%$ da cualificación da autoavaliación realizada unha vez vistas as avaliacións anteriores (a avaliación do profesorado e a coavaliación).

Tanto a avaliación como a coavaliación serán revisadas polos docentes da materia. Con este tipo de avaliación mixta búscase poñer en valor a súa capacidade didáctica e catalizadora da aprendizaxe.

A avaliación así deseñada fai ao alumnado partícipe do proceso tanto da súa propia avaliación como da do resto de discentes. Deste xeito, o alumnado ten a oportunidade de poñerse na pel do avaliador e ponderar os erros ou inexactitudes dos seus compañeiros, o que lle permitirá afondar nos seus coñecementos sobre os contidos e tamén comprender mellor a avaliación propia, recibida polo docente. Do mesmo xeito, despois deste proceso terá máis capacidade de autocrítica para avaliar o seu propio traballo e aprender do proceso ao completo.

ANEXOS

1. Anexo 1. Actividades propostas

Exercicio 1 *Despois de ler o artigo Las frases de nuestros políticos según la lógica proposicional (García, 2000), presenta dous exemplos de proposicións lóxicas atopadas nun contexto da vida real. Deberás indicar o contexto (medios de comunicación, libros, conversas...) no que se desenvolveron, escribilas coa linguaxe da lóxica proposicional e analizar a súa veracidade a través dunha táboa de verdade. É condición indispensable que as proposición sexan moleculares e non atómicas.*

Exercicio 2 *Nega as seguintes proposicións:*

- *Se Ana compra ese móbil, Eduardo tamén.*
- *Se Breixo non vén, Alicia tampouco.*

Exercicio 3 *Defínese o operador coñecido como barra de Sheffer a través da sequinte equivalencia:*

$$p \mid q \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Realiza a táboa de verdade da barra de Sheffer.

Exercicio 4 *Expresa mediante a barra de Sheffer o operador* $p \rightarrow q$.

Exercicio 5 *Simplifica a expresión* $\neg[\neg[(p \wedge q) \vee r] \wedge \neg q]$ *sen utilizar táboas de verdade.*

Exercicio 6 *Sendo (x, y) un punto do plano cuxas coordenadas verifican que $x = y$ e $y = 3x + 2$, demostra que entón $(x, y) = (-1, -1)$. Indica cales son as hipóteses e a tese no enunciado.*

Exercicio 7 *Nunha mesa hai tres sombreiros negros e dous brancos. Tres persoas poñen un sombreiro ao azar sen mirar a cor e colócanse en ringleira.*

- *O terceiro ve a cor dos dous que ten diante e pregúntaselle se sabería dicir cal é a cor do seu sombreiro. Contesta que non.*
- *O segundo só pode ver o sombreiro do primeiro. Fáiselle a mesma pregunta e contesta que non.*
- *O primeiro non ve ningún sombreiro, pero sabe perfectamente de que cor é o seu.*

Demostra mediante razoamentos lóxicos que efectivamente o primeiro di a verdade e ten un sombreiro negro.

Exercicio 8 *A seguinte demostración proba que $1 = 2$.*

Demostración. Supoñamos que temos dous números, a e b tales que $a = b$. Entón multiplicando por a temos:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a^2 = a \cdot b.$$

Se restamos en ambos os lados da igualdade b^2 obtemos:

$$a^2 = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2.$$

Agora, como $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, tamén se cumpre que

$$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2 \quad \Rightarrow \quad (a + b)(a - b) = b(a - b)$$

e entón

$$(a + b)(a - b) = b(a - b) \quad \Rightarrow \quad \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)} = \frac{b(a - b)}{(a - b)} \quad \Rightarrow \quad (a + b) = b$$

Como por hipóteses $a = b$, temos que

$$a + b = b \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a = 1 \cdot a \quad \Rightarrow \quad 2 = 1.$$

É correcta esta demostración? Proba que a tese que se sostén é incorrecta atopando o erro que nela se comete.

BIBLIOGRAFÍA

D'Angelo, J. P., e West, D. B. (2000). *Mathematical thinking. Problem Solving and Proofs.* Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.

Goberna, M. A., Jornet, V., Puente, R., e Rodríguez, M. (2000). *Álgebra y Fundamentos: una introducción.* Grupo Planeta (GBS).

Kike García (13 de maio de 2015). *Las frases de nuestros políticos según la lógica proposicional.* Verne, El País. https://verne.elpais.com/verne/2015/05/13/articulo/1431511831_312713.html

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA