MATERIA
Introdución á Análise Matemática

TITULACIÓN
Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física,
Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas

unidade didáctica
2

Ciencias Experimentais

Sucesións de números reais

Rubén Figueroa Sestelo
Óscar A. Otero Zarraquiños

Área de Análise Matemática
Departamento Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
www.usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419155696

MATERIA: Introdución á Análise Matemática
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas, Dobre Grao en Matemáticas e Física, Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO

Unidade 1. Números reais
Números naturais ($\mathbb{N}$). Principio de indución
Números racionais ($\mathbb{Q}$)
Axiomática dos números reais ($\mathbb{R}$). Axioma do supremo e consecuencias
Propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Densidade de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Unidade 2. Sucesións de números reais
Introdución intuitiva aos conceptos de sucesión e límite. Xeneralidades
Sucesións converxentes e os seus límites. Propiedades
Límites infinitos
Converxencia e diverxencia de sucesións monótonas
Subsucesións. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Límites de oscilación
Sucesións de Cauchy. Completitude de $\mathbb{R}$
Cálculo de límites. Criterios de Stirling e Stolz

Unidade 3. Series de números reais
Introdución intuitiva aos conceptos de serie e a súa suma
Series numéricas. Converxencia de series
Series de termos non negativos. Criterios de converxencia
Converxencia absoluta e condicional. Criterios de converxencia non absoluta

Unidade 4. Números complexos
Números complexos. Expresións, operacións e raíces dos números complexos

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (UD) enmárcase dentro da materia "Introdución á Análise Matemática" que se imparte no primeiro semestre do primeiro curso do Grao en Matemáticas, do Dobre Grao en Matemáticas e Física e do Dobre Grao en Enxeñaría Informática e Matemáticas, cunha carga de 6 créditos ECTS.

Esta materia básica está incluída no módulo de Análise Matemática nunha Variable, xunto con "Continuidade e Derivabilidade de Funcións dunha Variable Real" e "Integración de Funcións dunha Variable Real", que se imparten no segundo semestre do primeiro curso, e "Variable Complexa", que ten lugar no cuarto curso.

Esta UD tratará cuestións relacionadas coas sucesións de números reais e a súa converxencia, cunha parte final eminentemente práctica sobre o cálculo de límites.

Esta materia pretende introducir os alumnos nos conceptos e técnicas básicas da Análise que resultarán fundamentais, por unha parte na adquisición das competencias fixadas na memoria da titulación e, por outra, na construción posterior doutros obxectivos de traballo desta área de coñecemento, principalmente no que se refire á súa xeneralización a funcións dunha ou varias variables.

Esta UD é a central da materia e na que se ven un maior número de conceptos e resultados, por iso para a súa correcta explicación por parte do profesor e asimilación por parte do alumnado, a temporalización prevista é de 4 semanas e media, o que se corresponde con 9 sesións expositivas, 4 de seminario e 5 de laboratorio.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Ademais de contribuír a acadar as competencias básicas, xerais e transversais recollidas na Memoria do Título de Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela (USC), esta materia, e esta UD en concreto, permitirá acadar as seguintes competencias específicas:

- CE1 comprender e utilizar a linguaxe matemática;
- CE2 coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos en distintas áreas da Matemática;
- CE3 idear demostracións de resultados matemáticos, formular conxecturas e imaxinar estratexias para confirmalas ou refutalas;
- CE4 identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos;
- CE5 asimilar a definición dun novo obxecto matemático, relacionalo con outros xa coñecidos, e ser capaz de utilizalo en diferentes contextos;
- CE6 saber abstraer as propiedades e feitos substanciais dun problema, distinguíndoas daquelas puramente ocasionais ou circunstanciais;
- CE9 utilizar aplicacións informáticas de análise estatística, cálculo numérico e simbólico, visualización gráfica, optimización e software científico, en xeral, para experimentar en Matemáticas e resolver problemas.

De entre os obxectivos xerais da materia, nesta UD abordaranse os seguintes:

— introducir e consolidar, con exemplos e exercicios, a noción de converxencia de sucesións.

— tomar contacto co programa MAPLE como apoio para o cálculo e a comprensión e a visualización dos conceptos relacionados cos conxuntos numéricos.

Os obxectivos específicos que se pretenden cubrir nesta UD son:

— entender o concepto de límite dunha sucesión;

— manexar adecuadamente e coñecer a proba dos principais resultados de converxencia de sucesións;

— comprender a definición de subsucesión e algúns dos resultados máis importantes vinculados a ela;

— entender o concepto de sucesión de Cauchy, relacionándoo co de sucesión converxente en $\mathbb{R}$;

— calcular límites de sucesións;

— coñecer demostracións rigorosas dalgúns teoremas clásicos relativos ás series de números reais;

— identificar erros en razoamentos incorrectos, propoñendo demostracións ou contraexemplos.

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

As actuacións do profesor orientaranse a conseguir unha aprendizaxe significativa, procurando que o alumno sexa o auténtico protagonista do seu proceso de aprendizaxe, favorecendo o conflito entre os contidos que se están presentando e as ideas previas do alumno e que deste conflito xurda a necesidade de construción dun novo coñecemento.

Nas clases expositivas impartirase a parte teórica da materia, ilustrándoa con algúns exemplos para facela máis comprensible. Ademais, reservaranse cuestións para implicar os estudantes na súa discusión.

Polo que respecta á docencia en grupos reducidos, preténdese lograr unha maior participación dos alumnos. Abordaranse problemas e aspectos da materia non tratados nas clases expositivas e analizaranse cuestións que adoitan resultar de máis difícil comprensión.

Por último, nas clases de laboratorio nas aulas de informática os alumnos utilizarán o programa MAPLE para realizaren cálculos e representacións gráficas, o que servirá de apoio para a resolución de problemas e para a comprensión de conceptos claves na materia.

Amais do anterior, o alumnado terá ao seu dispor sesións de titorías individualizadas ou en grupos moi reducidos. Estas titorías terán un carácter voluntario e servirán para tratar cuestións concretas ou resolver dúbidas da materia.

Como axuda contaremos con diversos recursos, entre os que destaca a USC Virtual, onde se irá subindo material docente periodicamente, como por exemplo boletíns de problemas, os apuntamentos da materia ou os arquivos do programa Maple.

CONTIDOS

1. Introdución intuitiva aos conceptos de sucesión e límite. Xeneralidades

Definición 1. Chámase **sucesión de números reais** a unha aplicación

$$\begin{aligned} x:\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow x(n)=x_n. \end{aligned}$$

Cada valor x_n recibe o nome de **termo** da sucesión, concretamente, x_n dise que é o **termo n-ésimo** ou de índice n.

Unha sucesión pode ser dada enumerando ordenadamente todos os seus termos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, ou ben dando unha fórmula que nos proporcione o valor x_n en función de n, o que se denomina **termo xeral** da sucesión. Se cada termo da sucesión depende dun ou de varios termos anteriores, dise que está dada por **recorrencia**.

Exemplo 1.

- *A sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *é a sucesión de termo xeral* $x_n = n$*.*
- *A sucesión de termo xeral* $x_n = \frac{1}{n^2}$ *é* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\}$.
- *A sucesión de Fibonacci é un exemplo de sucesión de recorrencia:*

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Para que a sucesión estea ben definida debemos proporcionar un valor para os dous primeiros termos:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n \geq 3;$$

polo tanto

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}.$$

Definición 2. Unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais dicimos que é:

1. **limitada superiormente** se o conxunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está limitado superiormente, isto é, $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

2. **limitada inferiormente** se o conxunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está limitado inferiormente, isto é, $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

3. **limitada** se o conxunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está limitado, isto é, $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Polas propiedades do valor absoluto, isto equivale a dicir que existe $M' \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M',\ \forall n \in \mathbb{N}$;

4. **monótona crecente** se $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dicimos que é **estritamente crecente** se $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

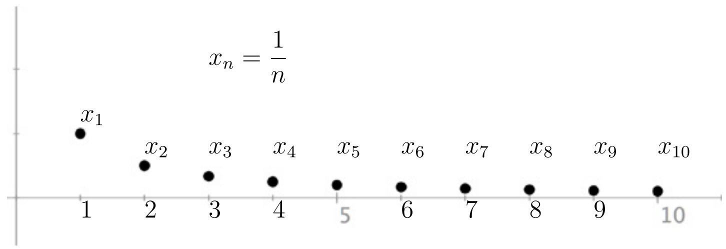
5. **monótona decrecente** se $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dicimos que é **estritamente decrecente** se $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

6. **(estritamente) monótona** se é (estritamente) monótona crecente ou decrecente.

7. **constante** se todos os seus termos son iguais $x_n = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. *Consideremos a sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \frac{1}{n}$. Tense que:*

- *É unha sucesión limitada superior e inferiormente:* $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- *É unha sucesión estritamente decrecente:* $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$



Definición 3. Dadas dúas sucesións de números reais $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e un número real $\lambda \in \mathbb{R}$, defínese:

- **SUMA:** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $z_n = x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **PRODUTO POR ESCALAR:** $\lambda \cdot \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $z_n = \lambda \cdot x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **PRODUTO:** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cdot \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $z_n = x_n \cdot y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **COCIENTE:** Supoñamos que $y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, defínese $\frac{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}{\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $z_n = \frac{x_n}{y_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que a sucesión $\{0, 0, 0 \ldots\}$ é o elemento neutro para a suma, e a sucesión $\{1, 1, 1 \ldots\}$ é o elemento neutro para o produto.

2. Sucesións converxentes e os seus límites. Propiedades

Definición 4. Dicimos que unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é **converxente** a $L \in \mathbb{R}$, ou que converxe a L, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon,$$

ou, equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Isto equivale a dicir que todos os elementos da sucesión, salvo posiblemente unha cantidade finita deles, están no intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Observación 1.

1. Ten que verificarse para cada ε e non só para un concreto.

2. O N atopado non ten por que ser o mesmo para todo ε, aínda que ás veces ocorre, como nas sucesións constantes.

3. O N atopado non ten por que ser único, pódese substituír por calquera natural $N' > N$.

4. Se dado ε achamos un N que verifica a definición de converxencia, ese N serve para calquera $\varepsilon' > \varepsilon$, por iso por ε denotamos números moi pequenos.

Definición 5. Dicimos que unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é **diverxente**, ou que diverxe, se non é converxente.

Exemplo 3.

- *A sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ converxe a 0. Debemos ver que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Pola propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Agora ben, se $n \geq N_\varepsilon$ entón $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$, polo tanto, $\frac{1}{n} \to 0$.*
- *A sucesión $x_n = n$ diverxe. Supoñamos por redución ao absurdo que a sucesión $x_n \to L \in \mathbb{R}$. Entón, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$, en particular, se $\varepsilon = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - L| < 1$, é dicir, $-1 < x_n - L < 1 \Rightarrow L - 1 < x_n = n < L + 1, \quad \forall n \geq N_1$. Pero pola propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{n} > L + 1$, en particular, se $n \geq \bar{n} \Rightarrow n > L + 1$, o cal contradí o anterior.*

Definición 6. Dicimos que unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **non converxe** a $L \in \mathbb{R}$ se:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad t.q. \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad existe \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| \geq \varepsilon.$$

Teorema 1. O límite dunha sucesión, se existe, é único.

Demostración. Supoñamos que $x_n \to L_1$ e que $x_n \to L_2$, con $L_1 \neq L_2$.
Como $x_n \to L_1$ tense que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\epsilon \Rightarrow |x_n - L_1| < \varepsilon$.
Como $x_n \to L_2$ tense que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon' \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon' \Rightarrow |x_n - L_2| < \varepsilon$.
Tomando $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$,
e $\exists\, N_\varepsilon' \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon' \Rightarrow |x_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$.
Se $N = \text{máx}\{N_\varepsilon, N_\varepsilon'\}$ e $n \geq N$ entón $|x_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}, \quad |x_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$,
polo tanto , se $n \geq N$ obtemos
$0 < |L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \frac{2}{3}|L_1 - L_2|$,
o cal non é posible xa que nos quedaría $3 < 2$. □

Teorema 2. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión converxente entón está limitada.

Demostración. Sexa $x_n \to L \in \mathbb{R}$, entón $\forall\varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$. En particular, se $\varepsilon = 1$, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - L| < 1$. Polo tanto, $|x_n| = |x_n - L + L| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|$, $\forall n \geq N_1$. Tomando $M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_1-1}|, 1 + |L|\}$ teríase que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Nota 1. O recíproco deste teorema non é certo xa que $x_n = (-1)^n$ está limitada, pero non é converxente (o cal se pode intuír, pero xustificarémolo detalladamente máis adiante cando vexamos o concepto de subsucesión).

Exemplo 4. *A sucesión $x_n = \sqrt{n}$ é diverxente e para probalo imos ver que non está limitada. Se existise $M > 0$ tal que $\sqrt{n} \leq M,\ n \in \mathbb{N}$, teriamos que $n \leq M^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$, co cal o conxunto $\mathbb{N}$ estaría limitado, en contra da propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Polo tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverxe.*

Teorema 3. (Álxebra de límites) Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sucesións de números reais tales que $\{x_n\} \to L_1 \in \mathbb{R}$, $\{y_n\} \to L_2 \in \mathbb{R}$. Entón:

1. A sucesión suma é converxente con límite a suma dos límites

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to L_1 + L_2.$$

2. A sucesión produto por escalar é converxente con límite o produto do escalar polo límite

$$\lambda\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \lambda\, L_1.$$

3. A sucesión produto é converxente con límite o produto dos límites

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to L_1\, L_2.$$

4. Se $y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $L_2 \neq 0$, a sucesión cociente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entre $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é converxente con límite o cociente dos límites:

$$\frac{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}{\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \to \frac{L_1}{L_2}.$$

Demostración. Sexa $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fixado.

1. Por ser $x_n \to L_1$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Por ser $y_n \to L_2$, $\exists\, N_\varepsilon{}' \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon{}' \Rightarrow |y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Polo tanto, se $n \geq N = \text{máx}\{N_\varepsilon, N_\varepsilon{}'\}$ temos que

   $|x_n + y_n - (L_1 + L_2)| \leq |x_n - L_1| + |y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

2. Por ser $x_n \to L_1$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.

   Polo tanto, se $n \geq N_\varepsilon$ temos que: $|\lambda x_n - \lambda L_1| = |\lambda||x_n - L_1| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

3. Por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxente está limitada (Teorema 2), polo tanto $\exists\, M > 0 :$ $|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Por ser $x_n \to L_1$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{M+|L_2|}$.

   Por ser $y_n \to L_2$, $\exists\, N_\varepsilon{}' \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon{}' \Rightarrow |y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{M+|L_2|}$.

   Polo tanto, se $n \geq N = \text{máx}\{N_\varepsilon, N_\varepsilon{}'\}$ temos que

   $$|x_n y_n - L_1L_2| = |x_n y_n - x_n L_2 + x_n L_2 - L_1 L_2| = |x_n(y_n - L_2) + L_2(x_n - L_1)| \leq |x_n||y_n - L_2| + |L_2||x_n - L_1| < M\,\frac{\varepsilon}{M+|L_2|} + |L_2|\,\frac{\varepsilon}{M+|L_2|} = \varepsilon.$$

□

Cuestión 1. Probar o apartado 4 do teorema 3.

Lema 1. Sexa $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais tales que $z_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entón se $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L, temos que $L \geq 0$.

Demostración. Supoñamos por redución ao absurdo que $L < 0$. Se $\varepsilon = -L > 0$, temos que $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < z_n - L < \varepsilon$. Entón $z_n \in (L - (-L), L - L) = (2L, 0)$, en contra de que $z_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 4. Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesións de números reais verificando que $x_n \leq y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se $\{x_n\} \to L_1$, $\{y_n\} \to L_2$, entón $L_1 \leq L_2$.

Demostración. Consideremos a sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entón $z_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\{z_n\} \to L_2 - L_1$, en virtude do teorema 3. Aplicando agora o lema 1 obtemos que debe ser $L_2 - L_1 \geq 0$, de onde $L_1 \leq L_2$. □

Corolario 1. Sexa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión converxente a $L \in \mathbb{R}$ e supoñamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x_n \leq b,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entón $a \leq L \leq b$.

Demostración. A sucesión constante $a_n = \{a, a, a, \ldots\}$ cumpre que $a_n \to a$ e tamén $a_n \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, polo tanto polo teorema 4, $a \leq L$. Analogamente, a sucesión constante $b_n = \{b, b, b, \ldots\}$ cumpre que $b_n \to b$ e $x_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Polo tanto, novamente polo teorema 4, $L \leq b$. □

Teorema 5. (Teorema de compresión) Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesións de números reais tales que $x_n \leq y_n \leq z_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son converxentes e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$, entón $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é converxente e $y_n \to L$.

Demostración. Sexa $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fixado. Por ser $x_n \to L$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$, e como $z_n \to L$, $\exists\, N_\varepsilon{}' \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_\varepsilon{}' \Rightarrow |z_n - L| < \varepsilon$. Polo tanto, se $n \geq N = \text{máx}\{N_\varepsilon, N_\varepsilon{}'\}$ temos que $y_n - L \leq z_n - L \leq |z_n - L| < \varepsilon$, $L - y_n \leq L - x_n \leq |x_n - L| < \varepsilon$, e entón $|y_n - L| < \varepsilon$. □

3. Límites infinitos

Definición 7.

- Dicimos que a sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverxe** a $+\infty$, ou que tende a $+\infty$, se

$$\forall M > 0 \quad \exists N_M \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_M \Rightarrow x_n > M.$$

  Escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ou ben $x_n \to +\infty$.

- Dicimos que a sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverxe** a $-\infty$, ou que tende a $-\infty$, se

$$\forall M > 0 \quad \exists N_M \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_M \Rightarrow x_n < -M.$$

  Escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ou ben $x_n \to -\infty$.

Teorema 6. Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sucesións de números reais tales que $x_n \to L_1 \in [-\infty, \infty]$ e $y_n \to L_2 \in [-\infty, \infty]$. Entón:

- $x_n + y_n \to L_1 + L_2$, onde

  $k + \infty = +\infty + k = +\infty, \forall k \in \mathbb{R};$
  $k - \infty = -\infty + k = -\infty, \forall k \in \mathbb{R};$
  $+\infty + \infty = +\infty; -\infty - \infty = -\infty.$

  Os casos $+\infty - \infty$ e $-\infty + \infty$ son formas indeterminadas. En tal caso, o límite de $x_n + y_n$ pode tomar calquera valor ou incluso non existir.

- $x_n \cdot y_n \to L_1 \cdot L_2$, onde

  $k \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot k = \pm\infty, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0;$
  $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty.$

  Os casos $0 \cdot \pm\infty$ e $\pm\infty \cdot 0$ son formas indeterminadas.

- Se $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entón $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{L_1}{L_2}$, onde

  $\frac{K}{\pm\infty} = 0, \forall k \in \mathbb{R}; \quad \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0; \quad \frac{k}{0} = \pm\infty, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$

  Os casos $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\frac{0}{0}$ son formas indeterminadas.

As indeterminacións son: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0$.

4. Converxencia e diverxencia de sucesións monótonas

Teorema 7. Sexa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais monótona crecente. Entón:

1. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada superiormente entón é converxente, e ademais, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada superiormente entón $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Demostración.

1. Por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada superiormente existe $L = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, en base ao axioma do supremo. Vexamos que $x_n \to L$. Por ser $L = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ temos que $x_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ademais, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_\varepsilon} \in (L-\varepsilon, L]$, xa que $L-\varepsilon$ non é unha cota superior. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crecente, se $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow x_n \geq x_{N_\varepsilon}$, e así $L-\varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq L$. Entón $\forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow x_n \in (L-\varepsilon, L] \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$. Polo tanto, $x_n \to L$.

2. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada superiormente, dado $M > 0$, existe $N_M \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_M} > M$. Por outra parte, xa que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crecente, se $n \geq N_m \Rightarrow x_n \geq x_{N_M} > M$, polo tanto, $x_n \to +\infty$.

□

Teorema 8. Sexa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais monótona decrecente. Entón:

1. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada inferiormente entón é converxente e ademais, $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada inferiormente entón $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Exemplo 5. *Sexa $x_n = n^p$, con $p \in \mathbb{R}$ fixado.*

1. *Se $p > 0$, entón $x_n \to +\infty$;*

2. *Se $p = 0$, entón $x_n \to 1$;*

3. *Se $p < 0$, entón $x_n \to 0$.*

*Vexamos a proba de **(1)**. Como $n^p > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tense que $x_{n+1} > x_n$ se e só se $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Efectivamente $\frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p > 1^p = 1$, polo tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crecente. Vexamos agora que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada superiormente. Supoñamos por redución ao absurdo que si que o está, polo tanto, existe $M > 0$ tal que $n^p \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de onde $(n^p)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{p}}$, é dicir, $n \leq M^{\frac{1}{p}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o cal contradí a propiedade arquimediana de $\mathbb{R}$. Polo tanto, se $p > 0$, a sucesión $x_n = n^p$ é monótona crecente e non está limitada superiormente, entón en virtude do teorema 7 tense que $x_n \to +\infty$.*
*A proba de **(2)** é inmediata, xa que se $p = 0$, $x_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, polo tanto $x_n \to 1$.*
*A proba de **(3)** é análoga á de **(1)**.*

Exemplo 6. *Sexa $x_n = a^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fixado.*

1. *Se $a \in (-1, 1)$, entón $x_n \to 0$;*

2. *Se $a = 1$, entón $x_n \to 1$;*

3. *Se* $a > 1$*, entón* $x_n \to +\infty$;

4. *Se* $a \leq -1$*, entón* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *non ten límite.*

Proposición 1. A sucesión $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é monótona crecente e está limitada superiormente, polo tanto, en base ao teorema 7 ten límite, o cal se denomina **e**. Tense que $e \approx 2.7182\ldots$.
Por outra parte, se $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverxe cara a $+\infty$ ou cara a $-\infty$, entón
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e.$

5. Subsucesións. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Límites de oscilación

Definición 8. Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais e $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ unha sucesión estritamente crecente de números naturais, entón a sucesión definida por $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$ dise que é unha **subsucesión** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. É dicir, escollemos infinitos termos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en orde crecente. En particular, unha subsucesión é unha sucesión.

Teorema 9. Sexa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais. Entón equivalen:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \in [-\infty, +\infty]$;

2. toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$.

Demostración.

- $(2) \Rightarrow (1)$

  É inmediato, pois a propia sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é subsucesión de si mesma.
- $(1) \Rightarrow (2)$
  - Caso $\underline{L \in \mathbb{R}}$

    Por ser $x_n \to L$, dado $\varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$. Como $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}$, temos que se $k \geq N_\varepsilon$ entón $n_k \geq k \geq N_\varepsilon$. Polo tanto, se $n_k \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon$ e, en consecuencia, $x_{n_k} \to L$.
  - Caso $\underline{L = +\infty}$

    Por ser $x_n \to +\infty$, dado $M > 0, \exists\, N_M \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N_M \Rightarrow x_n > M$. Como $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}$, temos que se $k \geq N_M$ entón $n_k \geq k \geq N_M$. Polo tanto, se $n_k \geq N_M \Rightarrow x_{n_k} > M$ e, en consecuencia, $x_{n_k} \to +\infty$.
  - Caso $\underline{L = -\infty}$

    Análogo ao caso $L = +\infty$.

□

Corolario 2. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posúe dúas subsucesións con límites diferentes entón $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ten límite.

Exemplo 7. *A sucesión $x_n = (-1)^n$ non ten límite xa que por unha parte a subsucesión $\{x_{2n}\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ converxe a 1 e a subsucesión $\{x_{2n-1}\} = \{-1, -1, \ldots\}$ converxe a -1.*

Teorema 10. (Existencia de subsucesións monótonas) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais, entón existe unha subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que é monótona.

Demostración. Imos definir primeiro o concepto de pico dunha sucesión.

Definición 9. Dicimos que un termo x_m da sucesión é un **pico** se $x_m \geq x_n, \forall n \geq m$, é dicir, x_m é maior ou igual que todos os termos seguintes.

Consideremos polo tanto dous casos:

- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posúe un número infinito de picos, denotados $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots$, en orde crecente $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, entón cúmprese que $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3} \geq \ldots$, xa que cada un deles é un pico, polo que os picos forman unha subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decrecente.
- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posúe un número finito de picos (que pode ser 0), denotados $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots, x_{m_r}$, entón:

  Se $n_1 = m_r + 1$ é o primeiro índice despois do último pico, entón existe $n_2 > n_1$, tal que $x_{n_2} > x_{n_1}$ xa que se non fose así, x_{n_1} sería un pico.

  De igual modo, existe $n_3 > n_2$, de tal maneira que $x_{n_3} > x_{n_2}$ xa que se non fose así, x_{n_2} sería un pico.

  Desta maneira, obtemos unha subsucesión $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \ldots\}$, tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} \ldots$, é dicir, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona crecente.

$\square$

Teorema 11. (Bolzano-Weierstrass) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais limitada, entón $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posúe unha subsucesión converxente.

Demostración. En virtude do teorema 10, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posúe unha subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que é monótona. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada, tamén o está $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Aplicando agora os teoremas 7 e 8 (toda sucesión monótona é converxente se e só se está limitada), podemos concluír que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é converxente. $\square$

Teorema 12. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais que non está limitada, entón ten unha subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que diverxe a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Demostración. Supoñamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada superiormente. En consecuencia:

- existe x_{m_1} tal que $x_{m_1} > 1$,
- existe x_{m_2} tal que $x_{m_2} > 2$,
- existe x_{m_3} tal que $x_{m_3} > 3$,
- $\ldots$

A subsucesión así construída cumpre que: $x_{m_k} > k,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Pero como $k \to +\infty$, entón tamén se terá que $x_{m_k} \to +\infty$.
O caso de que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada inferiormente sería análogo. □

Definición 10. Dada unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, chamamos **límites de oscilación** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a calquera límite dalgunha das súas subsucesións. En virtude dos dous teoremas anteriores, toda sucesión posúe límites de oscilación (en $[-\infty, +\infty]$).

- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada superiormente entón existe un límite de oscilación que é o maior de todos, e denominámolo **límite superior** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e denotámolo por $\operatorname{lím\,sup} x_n = \overline{\operatorname{lím}} x_n$.
- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada inferiormente entón existe un límite de oscilación que é o menor de todos, e denominámolo **límite inferior** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e denotámolo por, $\operatorname{lím\,inf} x_n = \underline{\operatorname{lím}} x_n$.
- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada superiormente, entón $\operatorname{lím\,sup} x_n = +\infty$.
- Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada inferiormente, entón $\operatorname{lím\,inf} x_n = -\infty$.

Teorema 13. Sexa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais e $L \in [-\infty, +\infty]$.
Entón $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \Leftrightarrow \operatorname{lím\,sup} x_n = L = \operatorname{lím\,inf} x_n$.

Exemplo 8. *Consideramos a sucesión:*

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \le 100, \\ \frac{1}{n}, & n = 3k,\ k \in \mathbb{N}, n > 100, \\ n^2, & n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}, n > 100, \\ -1, & n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N}, n > 100. \end{cases}$$

Entón x_n ten os límites de oscilación $-1, 0, +\infty$. En consecuencia, $\operatorname{lím\,inf} x_n = -1$, $\operatorname{lím\,sup} x_n = +\infty$, *e polo tanto, $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

6. Sucesións de Cauchy. Completude de $\mathbb{R}$

Definición 11. Dicimos que unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de **Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad p, q \ge N_\varepsilon \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Teorema 14. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais converxente entón é de Cauchy.

Demostración. Sexa $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, entón dado $\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \ge N_\varepsilon$ entón $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Polo tanto, se $p, q \ge N_\varepsilon$ temos que
$|x_p - x_q| = |x_p - L + L - x_q| \le |x_p - L| + |L - x_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
En consecuencia, a sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. □

Lema 2. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais de Cauchy entón está limitada.

Demostración. Por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, $\forall\varepsilon > 0\,\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\; t.q.\, p, q \geq N_\varepsilon$ entón $|x_p - x_q| < \varepsilon$. En particular, se $\varepsilon = 1$, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad p, q \geq N_1 \Rightarrow |x_p - x_q| < 1$. En particular, tomando $q = N_1$ obtemos que se $p \geq N_1 \Rightarrow |x_p - x_{N_1}| < 1$, é dicir, $|x_p| = |x_p - x_{N_1} + x_{N_1}| \leq |x_p - x_{N_1}| + |x_{N_1}| < 1 + |x_{N_1}|$. Polo tanto, se $M =$ máx$\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_1-1}|, 1 + |x_{N_1}|\}$, teríase que $|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 15. Unha sucesión de números reais $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é converxente se e só se é de Cauchy.

Demostración.

- " $\Rightarrow$ "

  É o teorema 14.
- " $\Leftarrow$ "

  En base ao Lema 2, por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy está limitada e en virtude do teorema de Bolzano-Weierstrass, existe unha subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converxe a L. Vexamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tamén converxe a L. Sexa $\varepsilon > 0$ arbitrario, por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad p, q \geq N_\varepsilon$ entón $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, por ser a subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converxente a L, $\exists\, N_\varepsilon{}' \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad k \geq N_\varepsilon{}' \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Polo tanto, se $n \geq$ máx$\{N_\varepsilon, N_\varepsilon{}'\}$, $N \geq$ máx$\{N_\varepsilon, N_\varepsilon{}'\}$, $N \in \{n_1, n_2, \ldots\}$
  $|x_n - L| = |x_n - x_N + x_N - L| \leq |x_n - x_N| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
  En consecuencia, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a L.

$\square$

7. Cálculo de límites. Criterios de Stirling e Stolz

7.1. Límites de sucesións polinómicas

Se $x_n = a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + a_{r-2} n^{r-2} + \ldots + a_1 n + a_0$, entón $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, en función do signo de a_r:

- $+\infty$, si $a_r > 0$.
- $-\infty$, si $a_r < 0$.

7.2. Límites de sucesións racionais

As sucesións racionais son da forma $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, onde $P(n)$ e $Q(n)$ son polinomios. Ditas sucesións dan lugar a indeterminacións do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, que se resolven dividindo pola maior potencia de n. En xeral, se:

$$P(n) = a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + a_{r-2} n^{r-2} + \ldots + a_1 n + a_0,$$

e

$$Q(n) = b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + b_{s-2} n^{s-2} + \ldots + b_1 n + b_0,$$

entón:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \pm\infty, & r > s, \\ \frac{a_r}{b_s}, & r = s, \\ 0, & r < s. \end{cases}$$

7.3. Composición con funcións continuas

Supoñamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de números reais que converxe a $L \in \mathbb{R}$.

Se f é unha función continua tal que $x_n \in Dom(f), \forall n \in \mathbb{N}$, e $L \in Dom(f)$, entón $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(L)$. En particular:

1. $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to L \geq 0, \Rightarrow \sqrt{x_n} \to \sqrt{L}$,
2. $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to L > 0, \Rightarrow \log x_n \to \log L$,
3. $x_n \to L \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{x_n} \to e^L$.

De maneira análoga, se $x_n \to L = \pm\infty$ e existe $\lim\limits_{x\to L} f(x)$, entón $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to L} f(x)$.

A segunda das propiedades anteriores resulta útil para simplificar algúns límites nos que interveñen potencias, e coñécese como **técnica de tomar logaritmos**.

Exemplo 9. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.
Para obter dito límite imos aplicar a técnica de tomar logaritmos, polo tanto se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = L$, *entón* $\log L = \lim\limits_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \log n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right) = 0$.
En consecuencia $L = e^0 = 1$.

7.4. Sucesións potenciais-exponenciais

Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesións de números reais tales que $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Consideramos a sucesión $x_n^{y_n} = e^{y_n \log(x_n)}$, polo que usando as propiedades anteriores temos que se $x_n \to x_0 > 0$ e $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}$, entón $x_n^{y_n} \to x_0^{y_0}$. Do mesmo modo, se temos en conta as propiedades asintóticas das funcións exponenciais e logarítmicas: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; obtemos que:

1. Se $x_n \to 0$, entón

   a) se $y_n \to y_0 > 0$ ou ben $y_n \to +\infty$, entón $x_n^{y_n} \to 0$.

   b) se $y_n \to y_0 < 0$ ou ben $y_n \to -\infty$, entón $x_n^{y_n} \to +\infty$.

   O caso $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ é unha forma indeterminada.

2. Se $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^+$, entón

   a) se $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}$, entón $x_n^{y_n} \to x_0^{y_0}$.

   b) se $y_n \to +\infty$ y $x_0 > 1$ ou ben $y_n \to -\infty$ y $x_0 < 1$, entón $x_n^{y_n} \to +\infty$.

   c) se $y_n \to -\infty$ y $x_0 > 1$ ou ben $y_n \to +\infty$ y $x_0 < 1$, entón $x_n^{y_n} \to 0$.

   O caso $x_0 = 1$, $y_n \to \pm\infty$ é unha forma indeterminada.

3. Se $x_n \to +\infty$, entón

   a) se $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}^+$ ou ben $y_n \to +\infty$, entón $x_n^{y_n} \to +\infty$.

   b) se $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}^-$ ou ben $y_n \to -\infty$, entón $x_n^{y_n} \to 0$.

   O caso $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ é unha forma indeterminada.

7.5. Técnicas para resolver distintas indeterminacións

- Algunhas indeterminacións do tipo 0^0 ou ∞^0 poden resolverse utilizando a técnica de tomar logaritmos.

Exemplo 10. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^4+2)^{\frac{1}{1+2\log n}}$.
Sexa $x_n = (3n^4+2)^{\frac{1}{1+2\log n}}$, *polo tanto* $\log x_n = \frac{1}{1+2\log n}\log(3n^4+2)$.
Usando as propiedades dos logaritmos obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2\log n}\log(3n^4+2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^4(3+2n^{-4}))}{1+2\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^4 + \log(3+2n^{-4})}{1+2\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4\log n + \log(3+2n^{-4}))}{1+2\log n},
\end{aligned}$$

e dividindo por $\log n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+\frac{\log(3+2n^{-4})}{\log n}}{\frac{1}{\log n}+2} = \dfrac{4}{2} = 2$. *Entón,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^2$.

Exemplo 11. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+2\log n}}$.

Sexa $x_n=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+2\log n}}$, *polo tanto* $\log x_n=\frac{2}{2+2\log n}\log\left(\frac{2}{n+1}\right)$.
Usando as propiedades dos logaritmos obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log x_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+2\log n}\log\left(\frac{2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2-\log(n+1)}{1+\log n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\log 2-\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\right]}{1+\log n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2-\log n-\log(1+\frac{1}{n})}{1+\log n},\end{aligned}$$

e dividindo por $\log n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\log 2}{\log n}-1-\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}}{\frac{1}{\log n}+1}=-1$. *Así,* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{-1}$.

- Moitas indeterminacións do tipo $1^{\pm\infty}$ poden resolverse utilizando o número e, reescribindo a sucesión orixinal na forma $x_n^{y_n}=\left[\left(1+\frac{1}{\widetilde{x_n}}\right)^{\widetilde{x_n}}\right]^{\widetilde{y_n}}$, onde $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{x_n}=\pm\infty$, entón $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{y_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{y_n}}$.

Exemplo 12. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+5}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}}$.
Seguindo os pasos anteriores obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+5}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n+5}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{3n+5}{4}\right)}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{3n+5}{4}\right)}\right)^{\left(-\frac{3n+5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3n+5}\right)\cdot\frac{n^2}{2n-1}},\end{aligned}$$

polo que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+5}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{6n^2+7n-5}}=e^{-\frac{2}{3}}$.

- Algunhas indeterminacións do tipo $\infty-\infty$ poden resolverse simplificando as sumas nas que aparecen. Se interveñen radicais, adoita ser efectivo multiplicar e dividir pola expresión conxugada.

Exemplo 13. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$

No expoñente atopamos unha indeterminación do tipo $\infty-\infty$ *polo tanto o primeiro que temos que facer é resolvela, para o cal multiplicamos e dividimos polo conxugado do denominador.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=+\infty.$$

Agora teriamos unha indeterminación do tipo $1^{+\infty}$ *que se resolvería de modo análogo ao exemplo* 12.

- Crecemento potencial fronte a crecemento exponencial.

  Se $p\in\mathbb{R}$ e $a>1$, entón $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{a^n}=0$. En efecto, se $x_n=\frac{n^p}{a^n}$, entón $x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, polo tanto, $\log(x_n)=\log\left(\frac{n^p}{a^n}\right)=\log(n^p)-\log(a^n)=p\log(n)-n\log(a)=n\left[p\frac{\log n}{n}-\log a\right]\to-\infty$, polo que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

7.6. Criterio de Stolz e fórmula de Stirling

Teorema 16. (Criterio de Stolz-Cesàro) Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesións de números reais tales que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crecente e $y_n\to+\infty$. Entón se $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=L\in[-\infty,\infty]$, tamén $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=L$.

Exemplo 14. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}$.

Como $y_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *é estritamente crecente e* $y_n\to+\infty$, *podemos aplicar o criterio de Stolz. Ademais* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(n-1)-\log(n)}{n+1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=0$, *entón* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}=0$.

Exemplo 15. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Como $y_n=n^3$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *é estritamente crecente e* $y_n\to+\infty$, *podemos aplicar o criterio de Stolz-Cesàro. Ademais*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(n+1)^3-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1}=\frac{1}{3},$$

entón $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$.

Teorema 17. (Fórmula de Stirling) Dita fórmula di que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}=1$.

Resulta útil para calcular límites nos que interveñen factoriais.

Exemplo 16. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!\cdot 2^n}$.

Por Stirling obtemos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n!\cdot e^n}\cdot\dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\dfrac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}2^n}$.
Agora estamos no caso de crecemento potencial fronte a exponencial, e polo tanto como $\frac{e}{2} > 1$, *tense que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{\sqrt{2\pi n}2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{e}{2}\right)}{\sqrt{2\pi n}} = +\infty$.

Exemplo 17. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
Usando a fórmula de Stirling obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!\cdot e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}.$$

Para calcular agora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\pi n}$ *tomamos logaritmos*

$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[2n]{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(2\pi n)}{2n} = 0$, *polo que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\pi n} = e^0 = 1$.
Volvendo ao límite inicial $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{e}\sqrt[2n]{2\pi n} = \dfrac{1}{e}$.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

- Resolución das cuestións teóricas formuladas ao longo da UD, individualmente, no tempo de dedicación non presencial.
- Resolución dos exercicios propostos no boletín (incluído no anexo 1), individualmente ou en grupo, no tempo de dedicación non presencial.
- Emprego de ferramentas informáticas para autoavaliar a resolución dos exercicios realizados no tempo de dedicación non presencial.
- Participación na resolución de exercicios ou cuestións teóricas propostas durante as sesións presenciais.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación constante é necesaria para determinar non só o nivel de coñecementos e a detección de posibles necesidades dos alumnos, senón tamén o funcionamento do método e o labor do profesor. A avaliación do proceso de ensinanza permitirá modificar aqueles puntos que se considere convenientes e dará confianza á hora de levar a cabo as liñas metodolóxicas que mellor funcionasen.

A avaliación continua fai referencia a todas as actividades que o alumno realiza dende o primeiro ata o último día de curso e que permiten analizar de maneira exhaustiva os seus progresos en tempo real, permitindo ao profesor intervir se fose necesario. Esta modalidade de avaliación terá carácter presencial e voluntario.

Esta UD corresponde coa materia Introdución á Análise Matemática, e a súa avaliación farase a través dunha proba conxunta coa unidade 1 de números reais, realizada nunha hora expositiva, con data coñecida polo alumnado e non sendo liberadora de materia. Nela preguntaranse, con respecto a esta unidade, exercicios prácticos e razoamentos sobre a veracidade ou falsidade de enunciados propostos, que permitan comprobar non só a memorización dos conceptos senón tamén o grao de asimilación dos mesmos aplicándoos a cuestións relacionadas, como as que se poden ver no boletín de exercicios que aparece como anexo 1.

A cualificación desa proba terá un peso dun $60\,\%$ dentro da avaliación continua, obtendo o $40\,\%$ restante a través doutra proba, das mesmas características citadas anteriormente, na cal se preguntarán cuestións relativas aos conceptos traballados no tema 3.

No exame final volveranse a preguntar conceptos relacionados con esta UD. Amais do tipo de cuestións que aparecen na proba de avaliación, incluiranse preguntas de tipo teórico: definición de conceptos e enunciado e/ou proba de resultados vistos na clase.

A cualificación final de cada alumno (CF) virá dada por un número entre 0 e 10 que se obterá a partir da seguinte fórmula

$$CF = AC/3 + (1 - AC/30) * EF,$$

onde CF é a cualificación final, AC é a avaliación continua e EF é o exame final.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T.M. (1996). *Análisis Matemático.* Reverté.

Bartle, R.G. e Sherbert D.R. (2000). *Introducción al Análisis Matemático en una Variable (2ª Ed.).* Limusa.

García López, A. e outros (1994). *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable (2ª Ed.).* Clagsa.

Spivak, M. (1994). *Calculus (2ª Ed.).* Reverté.

Casasayas, J. e Cascante, M.C. (1990). *Problemas de Análisis Matemático de una variable real.* Edunsa.

ANEXO 1

Boletín de exercicios da UD 2: Sucesións de números reais

1. Demostra os seguintes resultados:

   a) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ e $x_0 > a$, entón $x_n > a$ a partir dun certo índice.

   b) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ entón $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x_0|$. É certo o recíproco?

2. *a*) Demostra, usando a definición de límite, que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-4n^2+1}{2n^2-1} = -2$.

   b) Demóstrao usando que $1/n \to 0$ e o teorema de álxebra de límites.

3. Consecuencias do teorema de compresión.

   a) Demostra que $x_n \to x_0$ se e só se $|x_n - x_0| \to 0$.

   b) Proba que se $x_n \to 0$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada, entón $x_n y_n \to 0$.

   c) Usa os apartados anteriores para abreviar a proba de que o produto de sucesións converxentes converxe ao produto dos límites.

4. Algunhas cuestións sobre o criterio do exercicio 3 $b)$:

   a) Se $x_n y_n \to 0$, algunha das dúas sucesións debe converxer a 0? Algunha das dúas sucesiones debe estar limitada?

   b) Se $x_n y_n \to 0$ e $x_n \to 0$, está $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada?

   c) Se $x_n y_n \to 0$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada, converxe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a 0?

5. Demostra os seguintes resultados sobre límites e orde:

   a) Se $x_n \geq a \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x_0$, entón $x_0 \geq a$. E se $x_n > a \ \forall\, n$?

   b) Se $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ e $x_0 < y_0$, que relación hai entre os termos dunha e doutra sucesión? (Podes usar o exercicio 1 $a)$.)

6. Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesións de números reais. Demostra que:

   a) Se $\lim x_n = +\infty$ e $\{y_n\}$ está limitada inferiormente, entón $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

   b) Se $x_n \to +\infty$ e $y_n \to +\infty$ entón $\{x_n + y_n\} \to +\infty$.

   c) Se $x_n \to +\infty$ e $y_n \geq a > 0$ a partir dun índice, entón $x_n\, y_n \to +\infty$.

   d) Se $x_n \to +\infty$ e $y_n \to y_0 \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, entón $x_n\, y_n \to +\infty$.

e) $x_n \to +\infty$ se e só se $-x_n \to -\infty$.

f) Se $x_n \to -\infty$ e $y_n \to -\infty$, entón $x_n + y_n \to -\infty$.

g) Se $x_n \to +\infty$ e $y_n \to y_0 < 0$, entón $x_n\, y_n \to -\infty$.

h) Se $x_n \to -\infty$ e $y_n \to y_0 < 0$, entón $x_n\, y_n \to +\infty$.

i) Se $|x_n| \to +\infty$ entón $1/x_n \to 0$.

j) Se $x_n \to \pm\infty$ entón $1/x_n \to 0$.

k) Se $x_n \to 0$ e $x_n > 0$ a partir dun certo índice, entón $1/x_n \to +\infty$.

l) Se $x_n \to 0$ e $x_n < 0$ se n é suficientemente grande, entón $1/x_n \to -\infty$.

m) Son válidos os recíprocos dos apartados anteriores (menos o e))?

7. Sexan $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesións de números positivos tales que lím $\dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

   a) Proba que se lím $x_n = +\infty$ entón lím $y_n = +\infty$.

   b) Proba que se lím $y_n = 0$ entón lím $x_n = 0$.

   c) Que sucede se $x_n/y_n \to +\infty$? E se $x_n/y_n \to l \in (0, +\infty)$?

8. Razoa se as seguintes afirmacións son certas ou falsas:

   a) Toda sucesión converxente é monótona.

   b) Toda sucesión limitada é converxente.

   c) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión monótona entón lím inf $x_n =$ lím sup x_n.

   d) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non está limitada superiormente entón lím sup cos$(x_n) = 1$.

Estuda a converxencia e calcula os límites das seguintes sucesións

1. A sucesión $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n^2 + 4/25$ para $n \in \mathbb{N}$.

2. Sexan $\alpha \geq 2$ e a sucesión $x_1 = \alpha$, $x_{n+1} = 4(x_n - 1)/x_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

3. A sucesión definida por recorrencia do seguinte modo

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{sen}(n!)}{n+1}$

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 7}{5^n - 4}$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 + n}{n^2 - 2} - \frac{n^3 + n}{n^2 + 2}\right)$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{\frac{3n^2-3}{4n+1}}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2-4n}\right)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{\dfrac{n^2-n}{n^2+1}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}}}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+4n}-\sqrt{n^3-2n}\right)$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+\cos n}{\pi^{n+1}-\operatorname{sen} n!}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+5)!}{n^n}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a^{-n}$, sendo $a>1$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p\in\mathbb{N})$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2!+\cdots+n!}{n!}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n+k}{k}}{(n+k)^k}$ $(k\in\mathbb{N})$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+3n^4\right)^{\frac{1}{1+2\log n}}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+2\log n}}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(5n^4-4n^3+6n^2-2)}{\log(6n^3+4n^2-n+1)}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n^4}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, con $a \geq b > 0$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n!)}{\log(n^n)}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$

Límites de oscilación

1. Calcula o lím sup x_n e o lím inf x_n, sendo

   a) $x_n = (-2)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{\frac{3n-3}{4n+1}}$.

   b) $x_n = \begin{cases} \dfrac{n+9}{n+1}, & n < 1000, \\ \sqrt[n]{n}-1, & n \geq 1000,\ n = 2k, \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{3n^2+5}{(n+1)(n+2)}, & n \geq 1000,\ n = 2k+1. \end{cases}$

   c) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)^n$.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade