

SERGIO HERRERO VILA

**DINÁMICA TOPOLÓGICA DE
ESPACIOS DE GRAFOS**

**149a
2022**

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERGIO HERRERO VILA

**DINÁMICA TOPOLÓGICA DE
ESPACIOS DE GRAFOS**

149a

2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2022



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Dinámica topológica de espacios de grafos

Sergio Herrero Vila

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen/Abstract	5
Introducción	7
1. Preliminares sobre grafos	11
1.1. Introducción a los grafos	11
1.2. Grafos de Cayley	15
1.3. Grafos de Schreier	18
1.4. Casi Isometría	22
2. Pseudogrupos	27
2.1. Pseudogrupos y equivalencia de Haefliger	27
2.2. Pseudogrupos grafados	30
3. Inducción y equivalencia de Kakutani	33
3.1. Reducción de pseudogrupos	33
3.2. Equivalencia de Kakutani	34
3.3. Pseudogrupos compactamente generados	37
4. Laminaciones y espacios foliados por grafos	41
4.1. Laminaciones	41
4.2. Holonomía	46
4.3. Espacios foliados por grafos	47
4.4. Pseudogrupo de holonomía	48
5. Pseudogrupos actuando sobre el Cantor	51
5.1. Teoremas de realización	52
5.2. Sistemas de generación compacta	55
5.3. Acciones de grupos	56
6. Espacio de Gromov-Hausdorff	59
6.1. Espacio de Gromov-Hausdorff	59
6.2. Dinámica del espacio de Gromov-Hausdorff	63
6.3. Dependencia del sistema de generadores	66

Bibliografía

69

Resumen

El propósito de este trabajo es estudiar algunos aspectos de la dinámica topológica del *espacio de Gromov-Hausdorff*, introducido por primera vez por É. Ghys en [9]. Para ello necesitaremos generalizar conceptos conocidos en el estudio topológico de los grafos, como la noción de *casi-isometría*, introducida por M. Gromov en [12], adaptándola al contexto dinámico por medio de la noción de *equivalencia de Kakutani*, o flexibilizar las foliaciones usuales sobre variedades remplazándolas por *laminaciones* o *espacios foliados por grafos*.

El concepto dinámico en el que se apoyan estas definiciones y que constituye el eje central de este estudio son los *pseudogrupos de transformaciones*, que se tratarán en profundidad en los capítulos 2 y 3. Además veremos que fijando un sistema de generadores del pseudogrupo y mediante un argumento similar al que se utiliza para construir los grafos de Cayley, las órbitas pueden dotarse de una estructura de grafo, dando lugar a lo que llamaremos *pseudogrupos grafados*.

Abstract

The aim of this work is to study some aspects of the topological dynamics of *Gromov-Hausdorff spaces*, which was first introduced by É. Ghys in [9]. To do so, we will need to generalize some concepts such as the notion of *quasi-isometry* (introduced by M. Gromov for graphs and metric spaces [12]) replaced by the notion of *Kakutani equivalence*, and also to adapt foliations on manifolds to more general topological spaces using *laminations* and *spaces foliated by graphs*.

Most of these definitions are related with the same dynamical concept, *pseudogroups of transformations*, which will be deeply studied in chapters 2 and 3. This will be the central axis of our study. Furthermore, given a system of generators of the pseudogroup, we shall endow the orbits with graph structure (by an argument similar to the one we used to construct Cayley graphs) which will lead us to the notion of *graphed pseudogroup*.

Introducción

En este trabajo se abordan varios aspectos conocidos de la teoría topológica de grafos. El primer capítulo es una introducción a los grafos, en la cual se definen los conceptos más básicos sobre este tema en una primera sección para dar paso al estudio de los *grafos de Cayley* y de *Schreier* en las dos secciones siguientes. El concepto de grafo de Cayley fue introducido por primera vez en 1878 por Arthur Cayley. La idea es construir un grafo con buenas propiedades (regular, conexo y de geometría acotada) a partir de un grupo y un sistema de generadores finito fijado, uniendo por una arista dos elementos del grupo, que serán los vértices del grafo, siempre que pueda pasar de uno a otro multiplicando por un generador. Los grafos de Schreier generalizan a los grafos de Cayley y se construyen de forma similar, pero el conjunto de vértices no tiene por qué ser un grupo, sino el cociente de un grupo por un subgrupo. Para concluir este capítulo introductorio presentamos la noción de casi-isometría, introducida por M. Gromov en [12], una propiedad geométrica que es de gran ayuda a la hora de comparar la geometría de distintos grafos. En esta sección se combinan resultados propios y clásicos entre los que destaca especialmente el teorema 1.42:

Teorema. *Dados dos grafos de Cayley asociados al mismo grupo pero con distinto conjunto de generadores, es decir, $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ y $\mathbb{G}' = \mathbb{G}(G, S')$, entonces los espacios (\mathbb{G}, d_S) y $(\mathbb{G}', d_{S'})$ son casi-isométricos.*

La casi-isometría es una propiedad que en el caso de grafos localmente finitos, como son los grafos de Cayley, tiene una interpretación geométrica muy visual y es que dos grafos son casi-isométricos si son indistinguibles desde el infinito. Un caso sencillo en el que se puede ver este fenómeno es considerando dos grafos de Cayley asociados al grupo \mathbb{Z} con dos sistemas de generadores distintos como se muestra en las siguientes imágenes.



Figura 1: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1\}$

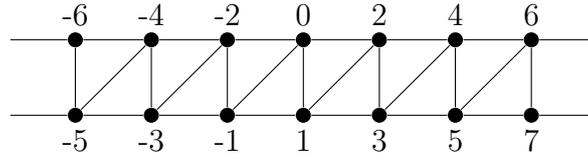


Figura 2: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1, \pm 2\}$

Los capítulos 2 y 3 son de corte más técnico, ya que en ellos introduciremos el concepto de *pseudogrupo de transformaciones*, estudiado por primera vez por Sophus Lie en el contexto de las simetrías en ecuaciones diferenciales y posteriormente estudiado por Élie Cartan, quien desarrolló esta teoría a principios del siglo XX, su alumno C. Ehresmann y los alumnos de éste, G. Reeb y A. Haefliger, que lo aplicarán en la naciente teoría de foliaciones. Los pseudogrupos generalizan a los grupos y serán una herramienta de gran utilidad en los capítulos 4, 5 y 6, donde nos ayudarán a estudiar los espacios de grafos. En los dos primeros capítulos citados estudiaremos las distintas propiedades de los pseudogrupos, dándole especial importancia a la *equivalencia de Haefliger*, modelada por la inducción de pseudogrupos, y también a la *equivalencia de Kakutani* en el contexto de *pseudogrupos grafados*. Un pseudogrupo grafado es un par formado por un pseudogrupo y un sistema de generadores que nos permite dotar, mediante una técnica parecida a la que se usaba en los grafos de Cayley, de una estructura de grafo a cada una de sus órbitas. Esta última equivalencia generaliza en cierto sentido a la relación de casi-isometría introducida en el capítulo 1.

En el capítulo 4 se realiza un estudio de las *laminaciones*, que generalizan la idea usual de las foliaciones en variedades diferenciables. Además daremos la noción de *pseudogrupo de holonomía*, uno de los ejemplos fundamentales de pseudogrupos, que nos da la información necesaria para saber cómo se enrollan las hojas de una laminación. Concluimos el capítulo dando la definición de *espacio foliado por grafos*, que ilustraremos más tarde, en el capítulo 6, con el ejemplo de los *espacios de Gromov-Hausdorff*.

La última parte de este trabajo consta primeramente de un capítulo en el cual se describe como realizar geoméricamente un pseudogrupo grafado de forma que al reducir el pseudogrupo de holonomía de la foliación obtenida a los vértices de las hojas recuperemos exactamente el pseudogrupo de transformaciones. Además, en la segunda sección, completaremos una serie de resultados que demuestran la equivalencia desde el punto de vista de la dinámica transversa de los tres siguientes conceptos:

- pseudogrupos grafados con función de valencia continua,
- espacios foliados por grafos,
- laminaciones transversalmente 0-dimensionales.

En la última sección, extenderemos un resultado demostrado por J. Feldmann y C.C. Moore para los pseudogrupos de transformaciones medibles por el que cualquier pseudo-

grupo grafado con función de valencia continua es equivalente en el sentido de Haefliger a un grupo finitamente generado, tal y como se describe en el ejemplo 2.8.

Por último, en el capítulo 6, se introducen los espacios de Gromov-Hausdorff, estudiando en una primera sección sus propiedades fundamentales, siguiendo [22] como principal referencia. En la segunda sección se define una relación de equivalencia que nos permite interpretar este espacio como un espacio foliado por grafos y estudiar su geometría. Además, para facilitar esto último, podemos sustituir esta relación de equivalencia por las órbitas de un pseudogrupo grafado. El objetivo principal de la última sección es responder a una pregunta formulada durante la lectura de tesis de A.C. Vázquez [26]: ¿qué relación existe entre los espacios de Gromov-Hausdorff asociados a un mismo grupo con distintos sistemas de generadores? A la vista del resultado que se tiene para grafos de Cayley, cabría esperar que las órbitas fuesen casi-isometría o mejor aún que los pseudogrupos grafados asociados fuesen equivalentes en el sentido de Kakutani. Sin embargo, veremos que no es así. De hecho, ni siquiera se tendrá una equivalencia más débil como es la equivalencia de Haefliger.

Capítulo 1

Preliminares sobre grafos

En este primer capítulo recordaremos algunas cuestiones básicas sobre grafos, así como el concepto de grafo de Cayley, grafo de Schreier y la casi-isometría.

1.1. Introducción a los grafos

Las referencias utilizadas en esta breve introducción son [2], [5] y [16].

Definición 1.1. Un *grafo* es un par ordenado de conjuntos disjuntos $G = (V, E)$ donde $V = V(G)$ denota el conjunto de vértices y $E = E(G)$ el conjunto de aristas con una aplicación

$$\begin{aligned}\Phi : E &\longrightarrow V \times V \\ e &\longmapsto (x, y)\end{aligned}$$

que lleva cada elemento de E en un par de $V \times V$. Habitualmente se supone que $V \neq \emptyset$ y E son numerables. Si son finitos, diremos que G es *finito*.

Observación 1.2. En lo que sigue vamos a suponer que la aplicación Φ es inyectiva, lo que significa que no existen *aristas múltiples*, es decir, aristas distintas que unen los mismos dos vértices ordenados. Asumiendo que no existe este tipo de arista, podemos considerar E el conjunto de aristas como un subconjunto de $V \times V$.

Observación 1.3. Un grafo finito o infinito puede pensarse como un CW-complejo de dimensión 1. El 0-esqueleto es el conjunto de vértices, que es un conjunto discreto, y el 1-esqueleto está formado por las aristas.

Si un par $(v_1, v_2) \in E$ o su opuesto $(v_2, v_1) \in E$ (es decir, si hay una arista que conecta v_1 y v_2), entonces diremos que v_1 y v_2 son *adyacentes* o *vecinos*. Esto lo denotaremos como $v_1 \sim v_2$ (a pesar de esta notación ‘ser adyacentes’ no es en general una relación de equivalencia). También decimos que v_1 y v_2 son incidentes con la arista $(v_1, v_2) \in E$ o que la arista es incidente con ellos.

Notación 1.4. Normalmente escribiremos $x \in G$ refiriéndonos realmente a $x \in V(G)$ y, ocasionalmente si no da lugar a confusión, también escribiremos $(x, y) \in G$ en lugar de $(x, y) \in E(G)$.

Definición 1.5. La *valencia* de un vértice $v \in V(G)$ que denotamos como $\text{val}(v)$ es el número de aristas que unen dicho vértice con sus vecinos. También podemos definir la *valencia saliente*, $\text{val}_s(v)$, como el número de aristas que tienen por origen al vértice v y la *valencia entrante*, $\text{val}_e(v)$, como el número de aristas que acaban en v (que tienen por extremo v). Es claro que

$$\text{val}(v) = \text{val}_e(v) + \text{val}_s(v). \quad (1.1)$$

Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia es finita en cada vértice y decimos que es de *geometría acotada* cuando, además, la valencia está uniformemente acotada, esto es, $\exists M \in \mathbb{N}$ t.q. $\text{val}(v) < M, \forall v \in V$. Obsérvese que dicha constante M es independiente del vértice considerado, lo que significa que el número de ramificaciones no aumenta. La máxima valencia de los vértices de un grafo G se denota $\Delta(G)$ y la mínima $\delta(G)$. Si un vértice tiene valencia cero se dice que es un vértice *aislado*. Diremos que un grafo es *regular* (o *n-regular*) si $\Delta(G) = \delta(G) = n$, es decir, si todos los vértices tienen la misma valencia.

Dada una arista $(v_1, v_2) \in E$, diremos que v_1 y v_2 son los *extremos*. Dos aristas son *adyacentes* si tienen exactamente un extremo en común. Así, las proyecciones de aplicación Φ definida en 1.1, que denotaremos $s := p_1 \circ \Phi$ y $r := p_2 \circ \Phi$ asignan a cada arista su vértice inicial y final respectivamente. Diremos entonces que una arista $e \in E$ está orientada de $s(e)$ a $r(e)$. De esta forma, podemos escribir 1.1 de la siguiente forma

$$\text{val}(v) = \#\{x \in V : s(x) = v\} + \#\{x \in V : r(x) = v\}. \quad (1.2)$$

Definición 1.6. Dado un grafo $G = (V, E)$ diremos que $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. En este caso escribimos $G' \subset G$ (aunque no es un contenido conjuntista). Si G' contiene todas las aristas de G que unen dos vértices de V' , entonces a G' se le llama *subgrafo inducido* en V' y lo denotamos como $G[V']$. De esta forma un subgrafo G' de G es un subgrafo inducido si y solo si $G' = G[V']$. Un subgrafo $G' = (V', E')$ tal que $V' = V$ se dice *subgrafo recubridor*.

Ejemplo 1.7. El siguiente es un ejemplo de un grafo G y de varios posibles subgrafos de éste.

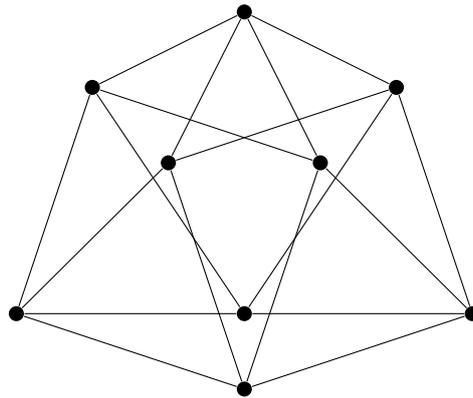


Figura 1.1: Grafo G .

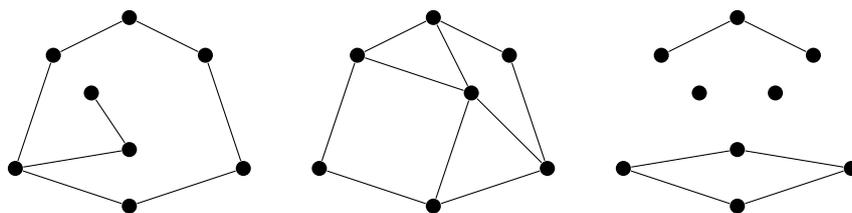


Figura 1.2: Un subgrafo, un subgrafo inducido y subgrafo recubridor del grafo G en 1.1.

Observación 1.8. Siguiendo esta idea, a partir de un grafo $G = (V, E)$ podemos construir nuevos grafos añadiendo o quitando vértices y aristas.

Si $W \subset V(G)$, entonces $G - W = G[V \setminus W]$ es el subgrafo de G obtenido quitando todos los vértices de W y todas las aristas incidentes con ellos. De forma parecida, si tomamos $E' \subset E(G)$, podemos considerar $G - E' = (V(G), E(G) \setminus E')$. De igual forma podemos añadir nuevas aristas, por ejemplo, si $x, y \in V$, podemos considerar $G + (x, y)$ que es el grafo G añadiendo el par (x, y) a E , lo que se traduce en unir estos dos vértices $x, y \in V$ en una arista del primero al segundo.

Definición 1.9. El *orden* de un grafo $G = (V, E)$, es el número de vértices de éste, que notaremos como $|G|$ o $\#G$. Paralelamente definimos el *tamaño* de un grafo como el número de aristas de G , y lo denotaremos por $e(G)$. Se observa que el máximo tamaño que puede tener un grafo es $|G|^2$ y sería $|G|(|G| - 1)$ si considerásemos un grafo sin bucles.

Definición 1.10. En un grafo $G = (V, E)$, dada una arista $e = (v_1, v_2)$ con *origen* $s(e) = v_1$ y *extremo* $r(e) = v_2$, podemos considerar la *arista opuesta* $e^- = (v_2, v_1)$, que pertenecerá o no al grafo G . Diremos que el grafo G es no orientado si el conjunto E es simétrico, es decir, si $(v_1, v_2) \in E$ entonces también $(v_2, v_1) \in E$. En este caso la arista (v_1, v_2) se confunde con la arista (v_2, v_1) y escribir simplemente $\{v_1, v_2\}$.

Definición 1.11. Un *camino* en un grafo orientado o no es una sucesión de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ tales que cada par de vértices consecutivos son el origen y el extremo de una arista en el grafo, es decir, $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para cada $i = 1, \dots, n - 1$. Si la sucesión de vértices es infinita se trata de un *camino infinito*. La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. Se llama *lazo* o *camino cerrado* a un camino finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $v_1 = v_n$ y *ciclo* a un lazo o camino cerrado que pasa una sola vez por los restantes vértices. Si una arista es de la forma $e = (v, v)$ entonces diremos que e es un *bucle*. Diremos que un grafo es *conexo* si dados dos vértices arbitrarios existe un camino que los une. A partir de ahora, salvo mención explícita de lo contrario, el término grafo se aplicará únicamente a grafos no orientados sin bucles ni aristas múltiples. Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico, esto es, un grafo en el que dos vértices cualesquiera están unidos por un solo camino.

En un grafo localmente finito $G = (V, E)$ podemos considerar una métrica natural de forma que la distancia entre dos vértices es el mínimo de las longitudes de los caminos que los unen. (Esta métrica no tendría cabida en un grafo que no fuese conexo pues podría

no existir ningún camino entre dos puntos). Si un camino minimiza la distancia entre sus extremos decimos que es un *camino geodésico*. Además podemos dotar a cada arista del grafo que una dos vértices distintos de una métrica que la haga isométrica al intervalo $[0, 1]$ y a los bucles isométricos a S^1 ; de esta forma, nuestra métrica se extiende a todo el grafo haciendo de este un espacio métrico localmente compacto.

Observación 1.12. En un árbol todos los caminos son geodésicos porque dados dos vértices existe un único camino que los une.

Definición 1.13. Sea X un espacio topológico Hausdorff e Y un espacio localmente compacto Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es tal que $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto $\forall K \subseteq Y$ compacto entonces decimos que f es una aplicación *propia*.

Definición 1.14. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto.

- Se llama *geodésica* a una aplicación isométrica $c : [0, l] \rightarrow X$ con $l \in \mathbb{R}$, y se llama *segmento geodésico* a $c([0, l])$, donde $c(0)$ y $c(l)$ se denominan *origen* y *extremo* respectivamente (al igual que sucedía con los extremos de las aristas en los grafos).
- Se dice que (X, d) es un *espacio geodésico* si dados $x, y \in X$ existe una geodésica c tal que $c(0) = x$ y $c(l) = y$ o $c(0) = y$ y $c(l) = x$. Decimos entonces que $c([0, 1])$ es un camino geodésico que une a x y a y .
- Un *rayo* de X es una aplicación $r : [0, +\infty] \rightarrow X$ continua y propia. Si además r es una isometría diremos que es un *rayo geodésico*.

Observación 1.15. Cabe destacar que los segmentos geodésicos (respectivamente los rayos geodésicos) se corresponden en un grafo con los caminos geodésicos finitos (respectivamente infinitos).

Definición 1.16. Se dice que dos rayos r y r' *convergen al mismo final* si para todo compacto $K \subseteq X$ existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $r([N, \infty])$ y $r'([N, \infty])$ están en la misma componente conexa de $X \setminus K$. Esta convergencia define una relación de equivalencia y la clase de un rayo r se denota $\mathcal{E}(r)$. El conjunto cociente de X con la relación de equivalencia "converger al mismo final" se denomina *espacio de finales* de X .

Definición 1.17. Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son *isomorfos* si existe una biyección $\phi : V \rightarrow V'$ entre sus conjuntos de vértices de forma que, $\forall v_1, v_2 \in V$,

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (\phi(v_1), \phi(v_2)) \in E',$$

es decir que exista una aplicación biyectiva que conserva la adyacencia en ambos sentidos. A esta aplicación ϕ se le llama *isomorfismo de grafos*, o, en este contexto, simplemente isomorfismo. Que dos grafos G, H sean isomorfos lo notaremos como $G \cong H$ o sencillamente $G = H$ ya que como un isomorfismo no es más que un reetiquetado de los vértices y las aristas no distinguiremos usualmente entre grafos isomorfos. Un invariante de un grafo G es un número asociado a G que tiene el mismo valor para cualquier grafo isomorfo a G .

Definición 1.18. Un *grafo enraizado* es un grafo con un vértice fijado que se denota por \mathbf{o} y se llama *raíz* u *origen*. Podemos pensar en esta raíz como una referencia del grafo. Dados dos vértices v y v' vecinos se dice que v' es *hijo de* v o que v es *padre de* v' si $d(v', \mathbf{o}) > d(v, \mathbf{o})$. Decimos que una arista en un grafo enraizado es *terminal* si uno de sus vértices finales no tiene descendencia, i.e., no es padre de ningún otro vértice. Si T es un árbol enraizado entonces, dado $v \in T$, denotamos por T^v al subárbol formado por v y sus descendientes.

Observación 1.19. Dados dos vértices vecinos en un grafo enraizado no siempre podemos encontrar una relación de parentesco y puede ocurrir que dos vértices sean padres del mismo hijo, como se aprecia en la figura 1.3, donde v y v' no tienen relación de parentesco porque $d(v, \mathbf{o}) = d(v', \mathbf{o}) = 2$ y v y v' son ambos padres de y e hijos de x .

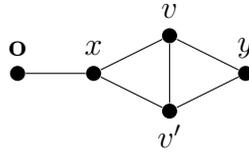


Figura 1.3: Vértices sin parentesco.

1.2. Grafos de Cayley

Definición 1.20. Sea G un grupo finitamente generado y $S = \{s_i\}_{i \in I}$ un sistema finito de generadores. El *grafo de Cayley* $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ construido a partir de G con respecto a S es el grafo \mathbb{G} cuyos vértices son los elementos del grupo G y sus aristas son $E = \{(g, gs) : s \in S\}$, es decir, $(g, g') \in E(\mathbb{G})$ si y solo si $g' = gs$ para algún $s \in S$; esto es, si $g^{-1}g' \in S$.

Salvo mención explícita, supondremos S un conjunto de generadores simétrico, i.e., $S = S^{-1}$. De este modo, siempre que tengamos una arista entre dos vértices tendremos también la arista contraria, de lo que deducimos que el grafo de Cayley de un grupo a partir de un conjunto de generadores simétrico es un grafo no orientado. También supondremos que el elemento neutro 1 no pertenece a S , de manera que G carece de bucles. Etiquetaremos de forma natural las aristas del grafo de Cayley con los elementos $s \in S$.

Se sigue de la definición 1.20 que un grafo de Cayley es un grafo, localmente finito, sin bucles ni aristas múltiples, no orientado si el conjunto de generadores es simétrico y que depende tanto del grupo como del sistema de generadores.

Observación 1.21. Dado un grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$, la acción por la izquierda del grupo G sobre sí mismo define una acción por la izquierda de G como grupo de automorfismos de \mathbb{G} . En efecto, el grupo G actúa naturalmente sobre las aristas de la siguiente forma:

$$g.(g', g's) = (gg', gg's).$$

Dado que la acción de un grupo sobre sí mismo es trivialmente transitiva, el grafo \mathbb{G} es *transitivo*, i.e., para cualquier par de vértices existe un automorfismo del grafo que envía un vértice sobre otro. Además, como sobre cada vértice $g \in G$ actúan siempre todos los generadores de S (donde solo incluiremos uno de los generadores, s o s^{-1}) y existen $\#S$ vértices distintos de forma que $g's = g$ se tiene que el grafo es $2\#S$ -regular ya que las valencias entrante y saliente en cada vértice coinciden y son exactamente $\#S$.

Ejemplo 1.22. Si consideramos el grupo $G = \mathbb{Z}^2$ y con el sistema de generadores $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$, el grafo de Cayley asociado, $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ tiene como conjunto de vértices los elementos de \mathbb{Z}^2 , y unimos por una arista aquellos vértices que distan 1, como muestra la figura 1.4.

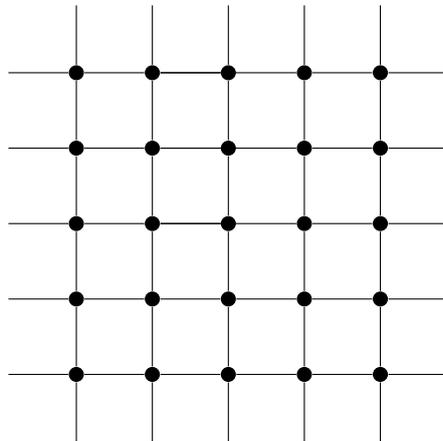


Figura 1.4: $G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.

A continuación se muestran otros ejemplos de grafos de Cayley, los tres primeros con el mismo grupo subyacente.



Figura 1.5: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1\}$.

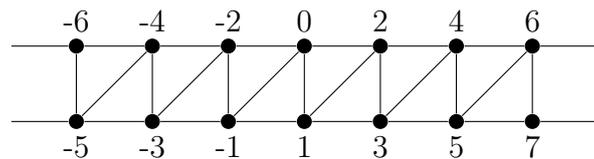


Figura 1.6: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1, \pm 2\}$.

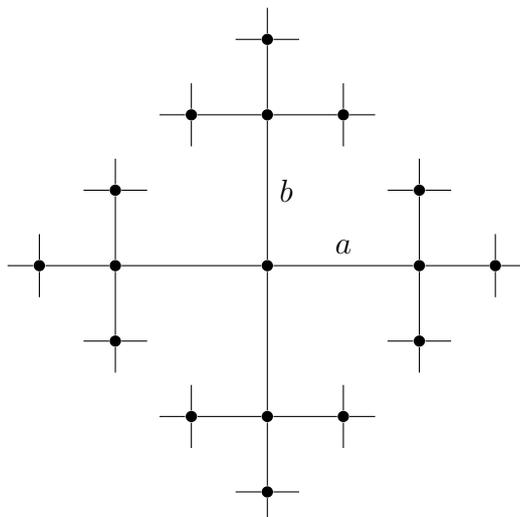


Figura 1.8: $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ donde $G = F_S = \langle a, b \rangle$ y $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, es decir, el grupo libre de dos generadores.

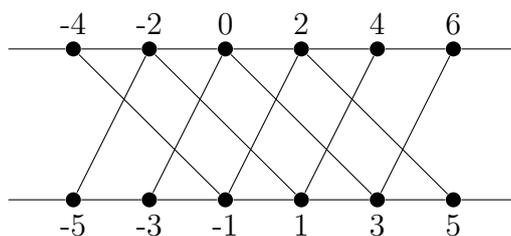


Figura 1.7: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 2, \pm 3\}$.

Proposición 1.23. *La acción de G sobre \mathbb{G} es propiamente discontinua y libre si el grupo G no contiene elementos de orden 2.*

Demostración. Como la acción de G sobre sí mismo es libre, la acción de G sobre \mathbb{G} será libre si y solo si ningún elemento de G intercambia los extremos de una arista, es decir, si ningún elemento de G tiene orden 2. Como (\mathbb{G}, d_S) es un espacio de Heine-Borel, ya que las bolas cerradas son compactos, el hecho de que G actúe por isometrías nos garantiza que la acción es propiamente discontinua. Para una demostración explícita de esta afirmación puede consultarse [3]. \square

El grafo de Cayley de un grupo G con sistema de generadores S (simétrico o no) está dotado de una métrica natural definida a partir de la *longitud de las S -palabras*. La longitud de un elemento $g \in G$ respecto al sistema de generadores S es el mínimo número

de elementos de $S \cup S^{-1}$ necesarios para escribir g , es decir

$$\text{long}_S(g) = \min\{n \in \mathbb{N} : g = s_1 \dots s_n, \text{ con } s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

y se define la *distancia de las S -palabras* entre dos elementos g y g' de G como

$$d_S(g, g') = \text{long}_S(g^{-1}g'),$$

que coincide con la métrica natural asociada a un grafo, pues el mínimo número de aristas necesarias para llegar de g a g' es precisamente el mínimo número de generadores necesarios s_1, \dots, s_n , para escribir g' como $g' = gs_1 \dots s_n$. Observemos que la distancia de las palabras sobre G coincide con la distancia inducida por la distancia de grafo sobre el conjunto de vértices. Luego podemos pensar en el grafo de Cayley \mathbb{G} como un espacio métrico (\mathbb{G}, d_S) donde las aristas son isométricas al intervalo $[0, 1]$.

1.3. Grafos de Schreier

En esta sección el punto de partida vuelve a ser, de nuevo, un grupo finitamente generado G y un conjunto de generadores S . Ahora además añadiremos un subgrupo $H < G$ y trataremos de asociarle un grafo al par formado por el subgrupo y el conjunto de generadores.

Definición 1.24. Sea G un grupo dotado de un conjunto de generadores $S = \{s_i\}_{i \in I}$ y $H < G$ un subgrupo. El *grafo de Schreier* de H construido con respecto de S es el grafo \mathbb{H} cuyos vértices son los elementos de $H \backslash G$ y en el que dos vértices Hg y Hg' están conectados por una arista $s_i \in S$ (identificaremos las aristas con los generadores) si y solo si $Hgs_i = Hg'$. Se dice entonces que la arista va de Hg a Hg' .

Observación 1.25. Nótese que si H es un subgrupo normal de G entonces el grafo de Schreier de H coincide con el grafo de Cayley salvo eliminación de los posibles bucles que se formen al unir dos vértices identificados debido a que el conjunto de generadores es de G , no de $H \backslash G$.

Después de la anterior observación, es claro que los grafos de Schreier son una generalización de los grafos de Cayley (bastaría tomar como subgrupo el neutro y ya tendríamos un grafo de Cayley). Sin embargo, la geometría en los grafos de Schreier es mucho más complicada. En adelante \mathbb{H} denotará el grafo de Schreier de un subgrupo $H < G$ respecto de un conjunto de generadores S de G asociado. También identificaremos abusivamente las aristas con los elementos de $s_i \in S$ que las etiquetan.

Los grafos de Schreier son conexos (fuertemente conexos si el conjunto de generadores considerado es simétrico), $2\#S$ -regulares, siendo exactamente $\#S$ la valencia entrante y saliente en cada vértice; y, a diferencia de los grafos de Cayley, estos sí pueden tener bucles, apareciendo uno de estos cada vez que dos vértices unidos por una arista pasen a ser el mismo vértice en el cociente.

A la elección de las “etiquetas” de las aristas del grafo de Schreier dentro de los generadores de un grupo le llamaremos *estructura de Schreier*. La idea es partir de un vértice $x \in \mathbb{H}$, e ir coloreando las aristas que tienen la misma etiqueta con el mismo color en todas las direcciones posibles. Siguiendo este proceso, llegaremos necesariamente a obtener un ciclo (quizá infinito como ocurre en el grafo de Cayley de la figura 1.5). Por inducción en el número de generadores, estos ciclos descomponen totalmente a \mathbb{H} .

Observación 1.26. Esta forma de etiquetar las aristas del grafo nos da una idea de cómo actúa el grupo G sobre el grafo \mathbb{H} . Una forma de pensar esto es la siguiente: si tomamos un $g \in G$, que, como sabemos, podemos presentar como una palabra del alfabeto $S \cup S^{-1}$, donde S es el conjunto de generadores de G subyacente al grafo de Schreier \mathbb{H} , entonces, de forma natural, este elemento g transforma el grafo \mathbb{H} cambiando su punto raíz, es decir, desplazando la raíz original (la órbita del neutro en el cociente) al final del camino trazado al movernos en la dirección de las aristas correspondientes a la presentación de g desde el vértice raíz hasta el punto $g \in G$. El resultado de este desplazamiento de raíz es el grafo de Schreier del subgrupo conjugado gHg^{-1} .

Veamos el porqué de esto. Si \mathbb{H} es el grafo de Schreier asociado a un subgrupo $H < G$ con respecto a un conjunto de generadores S (es decir, $\mathbb{H} = H \backslash \mathbb{G}$, donde $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$, es decir, es el grafo de Cayley de G respecto del conjunto de generadores S) entonces el subgrupo de isotropía $\text{Iso}(\mathbb{H}, H) = \{g \in G : H.g = H\} = H$ y se tiene que $\text{Iso}(\mathbb{H}, H) \backslash \mathbb{G} = \mathbb{H}$.

Obsérvese que estamos haciendo actuar los elementos de G sobre $H \backslash G$ por la derecha, es decir, la acción $\phi : H \backslash G \times G \rightarrow H \backslash G$ lleva un par (Hg, g') en $Hgg' \in H \backslash G$. Basta entonces comprobar que, en efecto, $\text{Iso}(\mathbb{H}, Hg) = g^{-1}Hg$. Sea $g' \in \text{Iso}(\mathbb{H}, Hg)$, es decir, g es tal que

$$Hgg' = Hg \Leftrightarrow gg' \in Hg \Leftrightarrow g' \in g^{-1}Hg.$$

Definición 1.27. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea Λ el espacio de grafos de Schreier del grupo libre \mathbb{F}_n , dotado de un sistema de generadores S con n elementos, Ω el conjunto de los grafos $2n$ -regulares enraizados. Dado un grafo $\mathbb{H} \in \Omega$, una *estructura de Schreier* Σ sobre \mathbb{H} es un etiquetado de sus aristas por los generadores del grupo libre \mathbb{F}_n que convierte a \mathbb{H} en un grafo de Schreier, es decir, una aplicación $\Sigma : E_0(\mathbb{H}) \rightarrow S$ donde $E_0(\mathbb{H})$ es un subconjunto de $E(\mathbb{H})$ tal que $E_0(\mathbb{H}) \cup E_0(\mathbb{H})^{-1} = E(\mathbb{H})$ y $E_0(\mathbb{H}) \cap E_0(\mathbb{H})^{-1}$ sean únicamente los bucles, de manera que Σ cumple que para cada $x \in \mathbb{H}$ y para cada $1 \leq i \leq n$, hay exactamente una arista entrante en x y otra saliente en x etiquetadas por s_i .

Observación 1.28. Nótese que para dotar a un grafo $2n$ -regular de una estructura de Schreier estamos suponiendo que el grafo es no orientado y cuando escogemos el conjunto $E_0(\mathbb{H}) \subset E(\mathbb{H})$ estamos orientando cada arista de \mathbb{H} de modo que si un vértice admite una arista entrante etiquetada por s , entonces hay otra saliente con la misma etiqueta s . Esto lo hacemos para respetar la propiedad de regularidad entrante y saliente de los grafos de Schreier tomando un conjunto de generadores en las condiciones de la observación 1.21.

La proyección canónica $p : G \rightarrow H \backslash G$ que envía cada elemento $g \in G$ en la clase $Hg \in H \backslash G$ se extiende en una proyección recubridora $p : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$, del grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ sobre el grafo de Schreier $\mathbb{H} = H \backslash \mathbb{G}$. En efecto, como la acción por la

izquierda de G sobre el grafo de Cayley \mathbb{G} es libre y propiamente discontinua en virtud de la proposición 1.23, la acción de H también lo es y, por consiguiente $p : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$ es una cubierta regular de grupo H que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & & \\ \downarrow q & \searrow H & \\ G \backslash \mathbb{G} & \xleftarrow{H \backslash G} & H \backslash \mathbb{G} \end{array}$$

Sea $L(G)$ el conjunto de los subgrupos de G y $\Lambda(G)$ el espacio de grafos de Schreier de G . Ambos están dotados de una estructura de retículo, i.e, conjunto ordenado donde cada par de elementos posee un único supremo y un único ínfimo: el conjunto $L(G)$ es un retículo dotado del orden por inclusión, mientras que $\Lambda(G)$ es un retículo dotado del orden $\mathbb{H} \leq \mathbb{H}'$ si hay una proyección recubridora $r : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$ que envía la raíz de \mathbb{H} en la de \mathbb{H}' . De hecho, la aplicación $f : L(G) \rightarrow \Lambda(G)$ que lleva cada subgrupo $H < G$ en el correspondiente grafo de Schreier $\mathbb{H} = H \backslash \mathbb{G}$ (entendemos fijado un conjunto de generadores) es un isomorfismo reticular que envía cada par $H \leq H'$ en el correspondiente $\mathbb{H} \leq \mathbb{H}'$ donde $r : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$ es una proyección recubridora que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & & \\ \downarrow q & \searrow H & \\ H' \backslash \mathbb{G} & \xleftarrow{r} & H \backslash \mathbb{G} \end{array}$$

De esta forma podemos reinterpretar lo que dice la observación 1.26 de la siguiente manera: el desplazamiento del punto base $1 \in G$ a $g \in G$ se traduce en cambiar el subgrupo H por el subgrupo conjugado $g^{-1}Hg$, pero ambos subgrupos están en la misma clase de conjugación y determinan la misma cubierta de $G \backslash \mathbb{G} = \bigvee_{i=1}^n S^1 \times \{i\}$ salvo el automorfismo de cubiertas que envía H en Hg .

La inversa del isomorfismo, $f^{-1} : \Lambda(G) \rightarrow L(G)$ se puede pensar de la siguiente manera: si \mathbb{H} es un grafo de Schreier correspondiente a G , entonces el subgrupo H asociado a \mathbb{H} es el estabilizador G_x de la raíz de G .

Gracias a la observación anterior sabemos que la cubierta universal de cualquier grafo de Schreier \mathbb{H} es el grafo de Cayley del grupo libre \mathbb{F}_S . De hecho, cualquier grafo de Schreier de un grupo G con un conjunto de generadores dado S es también grafo de Schreier del grupo libre \mathbb{F}_S . Esta descripción es interesante, ya que los grafos de Cayley de los grupos libres son siempre árboles y por tanto simplemente conexos (ya que son contráctiles) y esto nos permite obtener una formulación homotópica del subgrupo H por el que cocientamos. En efecto, el diagrama de cubiertas 1.3 se completa con el diagrama de cubiertas universales 1.3.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}_S & & \\
 \pi_1(H \setminus \mathbb{G}) \downarrow & \searrow \pi_1(\mathbb{G}) & \\
 H \setminus \mathbb{G} & \xleftarrow{H} & \mathbb{G}
 \end{array} \tag{1.3}$$

La cubierta p induce un monomorfismo,

$$p_* : \pi_1(\mathbb{G}) \longrightarrow \pi_1(H \setminus \mathbb{G})$$

que a su vez induce un isomorfismo:

$$\pi_1(H \setminus \mathbb{G}) / \pi_1(\mathbb{G}) \cong H$$

ya que la cubierta p es regular y H es isomorfo al grupo de automorfismos de ésta. Para ver los resultados de cubiertas utilizados en esta sección se puede consultar [1].

Al componer el isomorfismo reticular $f : L(G) \longrightarrow \Lambda(G)$ con la aplicación de olvido, $o : \Lambda \longrightarrow \Omega$, que lleva cada grafo de Schreier al grafo no orientado subyacente, se obtiene una aplicación natural $F : L(G) \longrightarrow \Omega(G)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L(G) & & \\
 f \downarrow & \searrow F & \\
 \Lambda(G) & \xrightarrow{o} & \Omega(G)
 \end{array}$$

Ahora cabe preguntarse si cualquier grafo enraizado $2n$ -regular admite una estructura de Schreier, es decir, si la aplicación de "olvido" es sobreyectiva. La respuesta se debe a J.Gross [13] y se basa en un teorema de Petersen sobre 2-factorización. Para probarlo se procede en varios pasos, primero se prueba que el hecho de ser un grafo de Schreier es equivalente a ser 2-factorizable, después se prueba que cualquier grafo finito $2n$ -regular es 2-factorizable, y por tanto de Schreier; y por último se prueba por inducción el caso de un grafo infinito apoyándonos en el lema del infinito de König. Para ver una prueba explícita de estos resultados puede consultarse [4].

Definición 1.29. Un *2-factor* de un grafo es un subgrafo recubridor 2-regular. Nótese que dicho subgrafo no tiene por qué ser conexo aunque lo sea \mathbb{H} ; de hecho, si lo fuese, sería además un ciclo Hamiltoniano (finito o infinito).

Un grafo se dice *2-factorizable* si se puede descomponer en 2-factores cuyas aristas son mutuamente disjuntas (no repetimos aristas). Esta descomposición no es necesariamente única.

Proposición 1.30. *Un grafo admite una estructura de Schreier si y solo si es 2-factorizable.*

Teorema 1.31 (Petersen-Gross). *Todo grafo $2n$ -regular admite estructura de Schreier.*

1.4. Casi Isometría

Sean (X, d) y (X', d') dos espacios métricos.

Definición 1.32. Una aplicación $f : X \rightarrow X'$ (no necesariamente continua) es una *casi-isometría* si existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que para cualesquier $x, y \in X$ se tiene:

$$(I) \quad \frac{1}{C_1}d(x, y) - C_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2,$$

$$(II) \quad d'(f(X), x') \leq C_2, \quad \forall x' \in X'.$$

Cuando existe dicha función se dice que X y X' son *casi-isométricos*. Si además $C_1 = 1$ se dice que X y X' son *isométricos a gran distancia* y llamaremos a f *isometría a gran distancia*.

Definición 1.33. Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') son *casi-isométricos* si existen aplicaciones lipschitzianas a gran distancia $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X$ tales que:

$$(I) \quad d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2, \quad \forall x, y \in X,$$

$$(II) \quad d'(g(x'), g(y')) \leq C_1d'(x', y') + C_2, \quad \forall x', y' \in X',$$

$$(III) \quad d(g \circ f(x), x) \leq C_2, \quad \forall x \in X,$$

$$(IV) \quad d(f \circ g(x'), x') \leq C_2, \quad \forall x' \in X',$$

donde $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ son las constantes correspondientes.

Ahora vamos a recordar un par de conceptos topológicos que nos servirán para dar la última definición de casi-isometría que será la que realmente utilicemos en la práctica.

Definición 1.34. Dado un número real $C \geq 0$, una C -red de un espacio métrico (X, d) es un subconjunto $A \subset X$ tal que $d(x, A) \leq C$ para todo $x \in X$. Decimos que una C -red es δ -separada si $\exists \delta > 0$ tal que $d(a, b) > \delta$ para cada par $a, b \in A$. Cabe destacar que si A es una C -red de X entonces es una C' -red para cualquier $C' \geq C$.

Definición 1.35. Dos espacios métricos (X, d) , (X', d') se dice que son *lipschitzianamente equivalentes* si existe una aplicación $l : X \rightarrow X'$ bilipschitziana, es decir, una aplicación biyectiva para la cual existe una constante $c > 0$ (llamada constante de Lipschitz) de forma que

$$\frac{1}{c}d(x, y) \leq d'(l(x), l(y)) \leq cd(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Esta definición es equivalente a decir que $l : X \rightarrow X'$ es una aplicación biyectiva y lipschitziana con inversa también lipschitziana ya que por ser tanto l como l^{-1} inyectivas las dos constantes de Lipschitz serán mayores que cero y bastará considerar el máximo para adaptarse a la definición anterior.

La siguiente definición es la definición original de M. Gromov [11, 12].

Definición 1.36. Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') son *casi-isométricos* si existen dos C -redes A y A' , de X y X' respectivamente, que son lipschitzianamente equivalentes. Si además A y A' son isométricas (es decir, existe $f : A \rightarrow A'$ tal que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, $\forall x, y \in A$) entonces se dice que X y X' son *isométricos a gran distancia*.

Observación 1.37. Obsérvese que no es restrictivo suponer que A y A' son C -redes con la misma constante $C \geq 0$ ya que si tuviésemos una C_1 -red A y una C_2 -red A' , siempre podemos tomar el máximo de $C_1, C_2 \geq 0$ de ambas redes y tendríamos que ambas serían $\max\{C_1, C_2\}$ -redes.

Teorema 1.38. *Las tres definiciones 1.32, 1.33 y 1.36 son equivalentes.*

La demostración de este teorema puede verse en [19].

Veamos algunos ejemplos ilustrativos de casi-isometrías e isometrías a gran distancia.

Ejemplo 1.39. Los espacios \mathbb{Z} y \mathbb{R} con la topología usual son espacios casi-isométricos.

Veamos primero que \mathbb{Z} y \mathbb{R} son casi-isométricos por la definición de Gromov. Si consideramos $A = \mathbb{Z}$ como 0-red de \mathbb{Z} , y $A' = \mathbb{Z}$ como 1-red de \mathbb{R} , claramente son lipschitzianamente equivalentes, de hecho son isométricas (la identidad sería la isometría entre ellas). Luego, siguiendo la definición 1.36, \mathbb{R} y \mathbb{Z} son espacios métricos isométricos a gran distancia. El mismo argumento sirve para probar que \mathbb{Z} y $2\mathbb{Z}$ son isométricos a gran distancia.

Ahora veamos que \mathbb{Z} y \mathbb{R} son casi-isométricos utilizando la definición 1.32, para ello probaremos que la inclusión $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ es una casi-isometría. Tomemos $x, y \in \mathbb{Z}$, y busquemos $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ de forma que

$$\frac{1}{C_1}d(x, y) - C_2 \leq d(x, y) \leq C_1d(x, y) + C_2$$

$$d(x', \mathbb{Z}) \leq C_2$$

para cualquier par $x, y \in \mathbb{Z}$, $x' \in \mathbb{R}$. Basta tomar $C_1 = 1$ y $C_2 = \frac{1}{2}$ y se tiene el resultado. Además, como $C_1 = 1$, los espacios son isométricos a gran distancia y la inclusión es, por tanto, una isometría a gran distancia entre ellos.

Ejemplo 1.40. \mathbb{Z} y $2\mathbb{Z}$ son casi-isométricos.

Para ver esto, probaremos que $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ tal que $f(n) = 2n$. Como f es sobreyectiva $d(x', f(x)) = 0$, luego podemos tomar $C_2 = 0$. Ahora bien,

$$d(f(x), f(y)) = d(2x, 2y) = \|2x - 2y\| = 2\|x - y\| = 2d(x, y).$$

Por lo tanto $C_1 = 2$ ya que

$$\frac{1}{2} \leq d(f(x), f(y)) \leq 2d(x, y).$$

De manera que f es una casi-isometría pero no es una isometría a gran distancia.

El conjunto de vértices de un grafo (con la métrica inducida) constituye una 1-red de modo que todo grafo es isométrico a gran distancia a su conjunto de vértices. Puesto que la casi-isometría es una propiedad que define una relación de equivalencia, si dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son casi-isométricos, entonces los conjuntos de vértices V y V' con las respectivas métricas inducidas son a su vez casi-isométricos entre sí. Por tanto, dos grafos G y G' son casi-isométricos si y solo si existen $A \subset V$ y $A' \subset V'$ lipschitzianamente equivalentes, esto es, si sus conjuntos de vértices son casi-isométricos. Además, ser isométrico a gran distancia también define una relación de equivalencia, luego también se transmite al conjunto de vértices.

Observación 1.41. Es importante señalar que para que la idea geométrica de casi isometría coincida con las definiciones anteriores debemos suponer que el grafo en cuestión es de geometría acotada. De otra forma podríamos encontrarnos, por ejemplo, con una situación en la que cada vértice tenga infinitos bucles que sí podemos apreciar desde el infinito, por lo que la red formada por los vértices no sería igual viéndola desde el infinito que nuestro grafo original y, sin embargo, sí serían casi isométricos según la definición.

Como ya vimos, el grafo de Cayley de un grupo depende del conjunto de generadores considerado. No obstante, cabe esperar que dados dos sistemas de generadores finitos S y S' , los respectivos grafos de Cayley $\mathbb{G}(G, S)$ y $\mathbb{G}(G, S')$ guarden cierta relación entre sí. Esta relación tratará de generalizarse en el siguiente capítulo apoyándonos en los pseudogrupos y recibirá el nombre de *equivalencia de Kakutani*.

Teorema 1.42. *Dados dos grafos de Cayley asociados al mismo grupo pero con distinto conjunto de generadores, es decir, $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ y $\mathbb{G}' = \mathbb{G}(G, S')$, entonces los espacios (\mathbb{G}, d_S) y $(\mathbb{G}', d_{S'})$ son casi-isométricos.*

Demostración. Podemos tomar como 1-red de ambos espacios $A = A' = G$. Sin embargo, no podemos deducir inmediatamente que ambas redes sean isométricas porque estamos considerándolas en espacios con métricas distintas. Denotemos como $n_s = \text{long}_{S'}(s)$, es decir el mínimo número de elementos de $S' \cup S'^{-1}$ necesarios para escribir el generador $s \in S$ como producto de ellos. Respectivamente, definimos $n_{s'} = \text{long}_S(s')$.

Tomemos ahora $c = \max_{s \in S, s' \in S'} \{n_s, n_{s'}\}$, y veamos que la identidad es una aplicación bilipschitziana entre las 1-redes A y A' .

Sean $g, g' \in G$,

$$g' = g s_1 \dots s_t,$$

donde $\text{long}(g^{-1}g') = t$. Pero

$$s_i = s'_{i_1} \dots s'_{i_{n_i}},$$

con $n_i \leq n_s$. Luego tenemos que:

$$g^{-1}g' = s'_{1_1} \dots s'_{1_{n_1}} \dots s'_{t_1} \dots s'_{t_{n_t}} \Rightarrow \text{long}_{S'} \leq t \max_{s \in \{s_1, \dots, s_t\}} \{n_s\} \leq t \max_{s \in S} \{n_s\} \leq tc.$$

De forma que,

$$d_{S'}(g, g') \leq c d_S((g, g')).$$

Por simetría, utilizando un argumento análogo al anterior obtenemos que,

$$d_S(g, g') \leq cd_{S'}((g, g')) \Rightarrow \frac{1}{c}d_S(g, g') \leq d_{S'}((g, g')).$$

Lo que concluye la prueba. \square

Un criterio útil para saber si dos espacios son localmente isométricos es el llamado *principio de la goma elástica*, que a su vez también admite una generalización para equivalencias de Kakutani.

Definición 1.43 ([12]). Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto M se dicen *uniformemente equivalentes* si id_M es un homeomorfismo uniforme, es decir, si existen aplicaciones $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crecientes tales que

$$d_2(x, y) \leq \mu_1(d_1(x, y)) \text{ y } d_1(x, y) \leq \mu_2(d_2(x, y)), \forall x, y \in M.$$

Nótese que las aplicaciones μ_1 y μ_2 pueden sustituirse por una sola aplicación: si definimos $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$, esto es, $\mu(t) = \max\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}$, es fácil comprobar que cumple las condiciones requeridas.

Proposición 1.44 (Principio de la goma elástica [12]). Sean A un conjunto, (M_1, d_1) y (M_2, d_2) dos espacios métricos geodésicos y $f_i : A \rightarrow M_i$ aplicaciones inyectivas tales que $f_i(A)$ es una red de M_i , $i \in \{1, 2\}$. Si las métricas inducidas por f_i son uniformemente equivalentes, entonces los espacios M_1 y M_2 son casi-isométricos.

Demostración. Es obvio que (A, d_i) con la distancia inducida por f_i , es decir, $d_A(a, a') = d_{M_i}(f_i(a), f_i(a'))$, es casi-isométrico a (M_i, d_i) . Nos basta entonces probar que (A, d_1) y (A, d_2) son casi-isométricos y concluiríamos el resultado por ser la casi-isometría una relación de equivalencia. Veremos de hecho que la casi-isometría es precisamente id_A . Denotemos con \bar{d}_i , $i \in \{1, 2\}$, la distancia inducida por f_i sobre A y sea $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función creciente que existe en virtud de la equivalencia uniforme entre estas distancias. Tomemos $x, y \in A$ y un arco geodésico g de M_1 que una $f_1(x)$ con $f_1(y)$. Fijemos ahora $n \leq \bar{d}_1(x, y) + 1$ y dividimos g en n subarcos geodésicos $\{g_i\}_{i=1}^n$, de forma que cada uno tenga longitud inferior a 1. Llamemos $\{x_i\}_{i=1}^n$ a los nuevos puntos que aparecen como extremos de la familia $\{g_i\}$ ($x_0 = x$ y $x_n = y$). Si $f_1(A)$ es una C_1 -red de M_1 , existe un punto $f_1(y_i) \in M_1$ a distancia inferior a C_1 de x_i . Entonces, aplicando reiteradamente la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d_2(y_i, y_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^n \mu(d_1(y_i, y_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \mu(d_1(f_1(y_i), x_i) + d_1(x_i, x_{i+1}) + d_1(x_{i+1}, f_1(y_{i+1}))) \\ &\leq n\mu(2C_1 + 1) \leq \mu(2C_1 + 1)(d_1(x, y) + 1). \end{aligned}$$

Cambiando los roles de d_1 y d_2 obtenemos

$$d_1(x, y) \leq \mu(2C_2 + 1)(d_1(x, y) + 1),$$

siendo $f_2(A)$ una C_2 -red de M_2 . Por lo tanto, como consecuencia de estas dos desigualdades, id_A es una casi-isometría. \square

Capítulo 2

Pseudogrupos

El concepto de pseudogrupo generaliza la noción de grupo de transformaciones. En este trabajo nos serviremos de ellos para generalizar a su vez el concepto de casi-isometría presentado en el capítulo anterior en el capítulo 3, así como para estudiar las propiedades geométricas del espacio de Gromov-Hausdorff en el capítulo 6. Uno de los objetivos principales de ese capítulo será estudiar la relación entre los espacios de Gromov-Hausdorff asociados a un mismo grupo pero con distintos sistemas de generadores.

2.1. Pseudogrupos y equivalencia de Haefliger

Definición 2.1. Un *pseudogrupo de transformaciones* de un espacio topológico X es una familia Γ de homeomorfismos entre abiertos de X de manera que:

1. Si $\gamma \in \Gamma$ y $W \subset \text{dom}(\gamma)$, entonces $\gamma|_W \in \Gamma$.
2. Si $\gamma : A \rightarrow B$ y $\gamma' : A' \rightarrow B'$ son elementos de Γ , entonces

$$\gamma' \circ \gamma : \gamma^{-1}(B \cap A') \rightarrow \gamma'(B' \cap A)$$

también está en Γ ,

3. Si $\gamma \in \Gamma$, entonces $\gamma^{-1} \in \Gamma$,
4. $id_X \in \Gamma$,
5. Si $\gamma : A \rightarrow B$ está localmente en Γ , es decir, $\gamma|_{A'} \in \Gamma$ para cualquier abierto $A' \subset A$, entonces $\gamma \in \Gamma$.

Esta definición se puede trasladar a un contexto medible como se puede ver en [24]. Básicamente se trata de sustituir en la definición anterior el espacio topológico X por un espacio boreliano estándar (espacio polaco dotado de una σ -álgebra isomorfa a la σ -álgebra de los borelianos de un espacio polaco) y los homeomorfismos locales por isomorfismos

borelianos entre borelianos de X . El pseudogrupo recibe entonces el nombre de *pseudogrupo medible*.

Lo que nos viene a decir la definición 2.1 es que un pseudogrupo de transformaciones no es otra cosa que una familia de homeomorfismos que cumple la condición de ser cerrada para la composición, restricción e inversión, y que contiene a la identidad y cualquier homeomorfismo que esté localmente en la familia. Decimos que una familia de homeomorfismos locales $\{h_i\}$ genera un pseudogrupo Γ si este es el menor pseudogrupo que contiene a todos los h_i , es decir, si los elementos de Γ se obtienen como resultado de restringir, invertir y ‘unir’ los homeomorfismos de la familia $\{h_i\}$ y las identidades.

Si existe una familia numerable que genera Γ entonces Γ se dice de *generación numerable*, si además la familia se puede escoger finita, decimos que Γ es finitamente generado.

La órbita de $x \in X$ se define como

$$\Gamma(x) = \{\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\},$$

y la isotropía de x como

$$\text{Iso}(x) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) = x\}.$$

Veamos algunos ejemplos que ilustren la utilidad de este concepto.

Ejemplo 2.2. *Acciones de grupos* Este, junto con el ejemplo 4.20 del capítulo 4, es un ejemplo fundamental que motiva en gran medida el estudio de los pseudogrupos. Una acción continua (resp. boreliana) de un grupo numerable G sobre un espacio topológico (resp. boreliano estándar) X define un pseudogrupo (resp. medible) formado por las restricciones a abiertos (resp. borelianos) de los homeomorfismos (resp. isomorfismos borelianos) $\tau_g : X \rightarrow X$, donde $\tau_g(x) = g \cdot x$, para todo $x \in X$ y todo $g \in G$. (Las órbitas de la acción y de Γ coinciden).

Ejemplo 2.3. *Relaciones de equivalencia medibles discretas.* Una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un espacio boreliano estándar X se dice *medible discreta* si las clases de equivalencia $\mathcal{R}[x]$ son numerables y el grafo es un boreliano de $X \times X$. Un resultado de [6] afirma que las clases de \mathcal{R} son las órbitas de una acción boreliana de grupo numerable. En general, llamamos *transformación parcial* de \mathcal{R} a cualquier homeomorfismo local (resp. isomorfismo boreliano) $\gamma : A \rightarrow B$ entre subconjuntos abiertos (resp. borelianos) de X cuyo grafo es

$$G(\gamma) = \{(x, y) \in X \times X : y = \gamma(x)\} \subset \mathcal{R}.$$

Entonces, las transformaciones parciales forman un pseudogrupo que define la relación \mathcal{R} , es decir, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = \gamma(x)$. En el caso topológico, el concepto de relación medible discreta debe sustituirse por el de relación de equivalencia *r-discreta* [25] o *étale* [10] que se describe a continuación. La equivalencia entre pseudogrupos y relaciones de equivalencia *étales* puede verse en la tesis de A. Vázquez [26]. Más adelante, en el capítulo 5, mostraremos una generalización del teorema de J. Feldman y C.C. Moore en el caso topológico.

Definición 2.4. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{R} \subset X \times X$ una relación de equivalencia sobre X dotada de una topología \mathcal{T} . Sean $p_1, p_2 : \mathcal{R} \rightarrow X$ las proyecciones sobre el primer

y el segundo factor respectivamente. Decimos que la relación de equivalencia \mathcal{R} es *étale* si verifica:

(I) las aplicaciones $p_1, p_2 : \mathcal{R} \rightarrow X$ son homeomorfismos locales,

(II) si U y V son abiertos de \mathcal{R} , entonces el conjunto

$$UV = \{(x, z) : (x, y) \in U, (y, z) \in V, \text{ para algún } y \in X\}$$

es también abierto,

(III) si $U \subset \mathcal{R}$ es abierto, entonces lo es también $U^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\}$.

Sea Γ un pseudogrupo actuando sobre un espacio topológico X e Y un abierto que corte a todas las órbitas. Se define el *pseudogrupo inducido*, o *reducido*, $\Gamma|_Y$ como el pseudogrupo generado por los elementos de Γ cuyo dominio e imagen están restringidos a Y , es decir $\Gamma|_Y$ es el menor pseudogrupo generado por la familia $\{\gamma \in \Gamma : \text{dom}(\gamma), \text{im}(\gamma) \subset Y\}$. La reducción de un pseudogrupo Γ a un abierto Y es el ejemplo básico de de equivalencia de pseudogrupos en el sentido de Haefliger, cuya definición se muestra a continuación.

Definición 2.5. Sean Γ y Γ' dos pseudogrupos actuando sobre espacios topológicos X y X' respectivamente. Decimos que Γ y Γ' son *equivalentes en el sentido de Haefliger*, o simplemente equivalentes, si existe una familia de homeomorfismos Φ entre abiertos de X y abiertos de X' de forma que

$$\Gamma' = \Phi \circ \Gamma \circ \Phi^{-1} \quad \text{y} \quad \Gamma = \Phi^{-1} \circ \Gamma' \circ \Phi.$$

En otras palabras, si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ y $\gamma \in \Gamma$, entonces $\varphi_2 \circ \gamma \circ \varphi_1^{-1} \in \Gamma'$. Esto se puede resumir en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\gamma} & V \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ U' & \xrightarrow{\gamma'} & V' \end{array}$$

Si consideramos un abierto $Y \subset X$ que corte a todas las órbitas de Γ , cada punto $x \in X$ está en el dominio de algún $\gamma \in \Gamma$ con $\text{im}(\gamma) \subset Y$. Si denotamos Φ_x^Y al conjunto de dichos elementos, y $\Phi_x^Y = \Phi_x^Y$, la familia $\Phi = \Phi_x^Y \cup (\Phi_x^Y)^{-1}$ define una equivalencia natural entre Γ y $\Gamma|_Y$ en el sentido anterior.

Ahora, a partir de la equivalencia natural entre Γ y $\Gamma|_Y$, es claro que tenemos la siguiente caracterización.

Proposición 2.6. *Dos grupos Γ y Γ' actuando sobre los espacios X y X' respectivamente son equivalentes en el sentido de Haefliger si y solo si existe un pseudogrupo Γ'' que opera sobre $X'' = X \sqcup X'$ de manera que X y X' cortan a todas las órbitas de Γ'' y se verifica que $\Gamma''_X = \Gamma$ y $\Gamma''_{X'} = \Gamma'$. \square*

De nuevo podríamos sustituir los espacios topológicos X y X' por espacios borelianos estándar y los homeomorfismos locales por isomorfismos borelianos entre partes borelianas, y obtendríamos una noción de equivalencia de pseudogrupos medibles.

2.2. Pseudogrupos grafados

Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones finitamente generado con sistema de generadores Σ sobre un espacio metrizable, localmente compacto y separable X . Por ser Γ de generación finita, dada una transformación parcial $\gamma \in \Gamma$, podemos escribir γ localmente como una Σ -palabra, esto es, para cada $x \in \text{dom}(\gamma)$ existe un entorno U tal que

$$\gamma|_U = (\sigma_n^{\varepsilon_n} \circ \cdots \circ \sigma_1^{\varepsilon_1})|_U,$$

donde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ y $\sigma_i \in \Sigma$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. En adelante supondremos para simplificar que γ se escribe globalmente como una Σ -palabra. Supondremos además sin pérdida de generalidad que la Σ -palabra es *reducida*, es decir, que no tenemos una letra y su inversa de forma consecutiva ($\sigma_i^{\varepsilon_i} \neq \sigma_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$).

Definición 2.7. Dado un pseudogrupo Γ con sistema finito de generadores Σ fijado, definimos la Σ -longitud de un elemento $\sigma \in \Gamma$ como el mínimo número de generadores, y sus inversos, necesarios para escribir σ . Lo denotamos como $\text{long}_\Sigma(\sigma) \in \mathbb{N}$. Se define la *distancia de las Σ -palabras* entre dos elementos $y, z \in \Gamma$, denotada por $d_\Sigma(y, z)$, como la Σ -longitud mínima de las transformaciones parciales $\gamma \in \Gamma$ tales que $z = \gamma(y)$.

El hecho de haber fijado un sistema finito de generadores Σ para Γ nos permite realizar cada Γ -órbita como el conjunto de vértices de un grafo de un modo similar a como hacíamos con los elementos de un grupo en los grafos de Cayley. Además, igual que en estos últimos, será un grafo localmente finito, conexo por caminos. Denotamos $\bar{\Gamma}(x)$ al grafo construido de la siguiente manera: el conjunto de vértices, como decíamos, serán los elementos de la órbita, es decir $V(\bar{\Gamma}(x)) = \Gamma(x)$, mientras que el conjunto de aristas será

$$E(\bar{\Gamma}(x)) = \{(y, \sigma(y)) : y \in \bar{\Gamma}(x), \sigma \in \Sigma\},$$

es decir, estamos uniendo dos vértices $y, z \in \Gamma(x)$ por una arista si existe un homeomorfismo local $\sigma \in \Sigma$ de manera que $z = \sigma(y)$ (de nuevo, igual que en los grafos de Cayley, estamos identificando las aristas con los generadores del pseudogrupo). La métrica natural sobre el grafo $\bar{\Gamma}(x)$ coincide con la distancia de las Σ -palabras, con la convención de que la palabra vacía sea id_X . Para indicar que las Γ -órbitas están dotadas de la métrica de grafo usaremos la notación (Γ, Σ) , y llamaremos a este par *pseudogrupo grafado* [21, 22]. Cabe destacar que, del mismo modo que ocurría en los grafos de Cayley, si suponemos Σ simétrico, el grafo asociado será orientado y si suponemos que no contiene identidades, entonces no tendrá bucles.

Ejemplo 2.8. Recuperando el ejemplo 2.2, cualquier grupo de transformaciones G de un espacio X define un pseudogrupo de transformaciones de X considerando las restricciones

de los elementos de G (pensando cada $g \in G$ como el automorfismo de X correspondiente, es decir $\tau_g : X \rightarrow X$ tal que $\tau_g(x) = g \cdot x$). Si además fijamos un sistema finito de generadores de G , tendremos también un sistema finito de generadores del pseudogrupo asociado, lo que lo convierte en un pseudogrupo grafado. Explícitamente, si S es el sistema de generadores de G , lo que hacemos es considerar como sistema de generadores Σ de Γ la familia $\{\tau_s\}_{s \in S}$.

Ejemplo 2.9. Una estructura de grafo sobre las clases de una relación de equivalencia medible discreta (X, \mathcal{R}) viene dada por un subconjunto medible simétrico $E \subset \mathcal{R}$ [20], de manera que dos puntos $x, y \in E$ están unidos por una arista si y solo si $(x, y) \in E$. Decimos entonces que la terna (X, E, \mathcal{R}) es una *relación de equivalencia grafada* y denotamos por $\mathcal{R}_E[x]$ a la clase de equivalencia de x dotada de la estructura de grafo inducida por E , es decir, todos aquellos puntos de X a los que puedo llegar con aristas de la relación de equivalencia grafada. Decimos que la estructura de grafo E es conexa si los grafos $\mathcal{R}_E[x]$ son conexos. Toda estructura de grafo conexa E sobre (X, \mathcal{R}) proviene de un pseudogrupo de transformaciones parciales (como describimos en el ejemplo 2.3). Esto ilustra la flexibilidad del contexto medible frente al topológico.

Observación 2.10. Esta misma construcción de un grafo a partir de una órbita de un pseudogrupo y un sistema de generadores se puede realizar sin necesidad de que el sistema de generadores Σ sea finito, localmente finito o ni siquiera puntualmente finito. Ahora bien, el grafo $\bar{\Gamma}(x)$ construido de esta manera no tiene por qué ser de geometría acotada, y sin suponer que Σ sea local o puntualmente finito, tampoco sería localmente finito, ya que los conjuntos $\Sigma_x = \{\sigma \in \Sigma : x \in \text{dom}(\sigma)\}$ no tienen por qué serlo.

Capítulo 3

Inducción y equivalencia de Kakutani

3.1. Reducción de pseudogrupos

Recordemos que si consideramos un abierto $Y \subset X$ que corte a todas las órbitas de Γ , el pseudogrupo reducido $\Gamma|_Y$ es equivalente a Γ en el sentido de Haefliger. Resultará de gran interés ver describir cómo afecta este *proceso de reducción o inducción* (estudiado por D. Gaboriau en el caso medible [7]) a la estructura métrica de las órbitas de un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) . Los resultados de este capítulo se deben en origen a Á. Lozano Rojo [21, 22]. Ya hemos visto que la elección de un sistema finito de generadores, del mismo modo que ocurría en los grafos de Cayley, define una estructura métrica de grafo conexo y localmente finito sobre cada Γ -órbita. Las órbitas del pseudogrupo reducido $\Gamma|_Y$ son precisamente la traza de las Γ -órbitas sobre Y , es decir, $\Gamma(x) \cap Y$. Por lo tanto, cada $\Gamma|_Y$ -órbita hereda una estructura de grafo y una métrica de la Γ -órbita correspondiente. Sin embargo, al eliminar los vértices pertenecientes a $X - Y$ y las aristas incidentes en ellos, el grafo resultante ya no tiene por qué ser conexo.

Ejemplo 3.1. Consideremos el pseudogrupo Γ sobre S^1 generado por un único homeomorfismo, $g_\alpha(e^{2\pi i(t+\alpha)})$ con $0 < \alpha < 1$ irracional. De un punto $e^{2\pi it}$ sale una arista hasta $e^{2\pi i(\alpha+t)}$ y llega otra desde $e^{2\pi i(t-\alpha)}$. Si tomamos $\alpha_0 = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$, podemos definir el abierto $Y = \{e^{2\pi it} \in S^1 : t \in (0, \alpha_0)\}$, que corta a todas las Γ -órbitas porque todas son densas. Ahora bien, la estructura de grafo de las $\Gamma|_Y$ -órbitas no tiene ninguna arista, ya que $g_\alpha(y) \notin Y$ para todo $y \in Y$.

Lo que observamos en este ejemplo es que el problema reside en que la estructura de grafo tras el proceso de inducción, no proviene, en general, de un sistema de generadores ya que si restringimos los dominios y las imágenes de los elementos de Σ a Y , obtenemos una familia $\Sigma|_Y$ de elementos de $\Gamma|_Y$, pero esta familia no genera el pseudogrupo $\Gamma|_Y$. De hecho, las órbitas del pseudogrupo generado por $\Sigma|_Y$ son los conjuntos de vértices de las componentes conexas de sus realizaciones geométricas como grafos. Aún así, usaremos la notación $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ para indicar que las $\Gamma|_Y$ -órbitas están dotadas de la métrica inducida por d_Σ , así como de la estructura de grafo ya mencionada. Estudiaremos la relación entre las estructuras métricas de los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$. Lo que haremos será

dar condiciones específicas para que las Γ -órbitas y las $\Gamma|_Y$ -órbitas sean casi-isométricas o que ambos pseudogrupos grafados sean equivalentes en el sentido de Kakutani.

3.2. Equivalencia de Kakutani

Como el subespacio Y corta a todas las Γ -órbitas, cualquier $x \in X$ pertenece al dominio de un elemento $\gamma \in \Gamma$, de forma que su imagen está contenida en Y . Denotemos con $\Sigma_{x,Y}$ al conjunto de tales elementos de Γ y la unión de todos estos conjuntos la denotaremos como $\Sigma_{X,Y}$, es decir,

$$\Sigma_{x,Y} = \{\gamma \in \Gamma : x \in \text{dom}(\gamma) \text{ e } \text{im}(\gamma) \subset Y\}$$

y

$$\Sigma_{X,Y} = \bigcup_{x \in X} \Sigma_{x,Y}.$$

Ahora bien, recordemos que el sistema de generadores Σ determina una distancia d_Σ sobre cada Γ -órbita. Podemos entonces definir la distancia $d_\Sigma(x, Y)$ como la Σ -distancia entre x y la $\Gamma|_Y$ -órbita $\Gamma(x) \cap Y$, que es precisamente la Σ -longitud mínima de todos los elementos de $\Sigma_{x,Y}$, esto es,

$$d_\Sigma(x, Y) = \min\{d_\Sigma(x, \gamma(x)), \gamma \in \Sigma_{x,Y}\} = \min\{\text{long}_\Sigma(\gamma), \gamma \in \Sigma_{x,Y}\}.$$

Definición 3.2. Se dice que un abierto Y de X es una Σ -base de X si verifica:

1. Y corta a todas las órbitas de X ,
2. existe una constante $C > 0$, de manera que $d_\Sigma(x, Y) \leq C$ para cada $x \in X$.

Esta última definición es el análogo para pseudogrupos grafados de una red en un espacio métrico. De la misma forma que ocurría en espacios métricos, la definición nos garantiza que las $\Gamma|_Y$ -órbitas, dotadas de la distancia de las Σ -palabras, son isométricas a gran distancia a las Γ -órbitas.

A continuación presentamos la prometida generalización de la casi-isometría. Es una definición análoga a la dada en [8] pero simplemente para pseudogrupos y no pseudogrupos medibles.

Definición 3.3. Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos grafados definidos sobre X y X' respectivamente. El pseudogrupo (Γ', Σ') es un *factor de Kakutani* de (Γ, Σ) si existe una aplicación boreliana $r : X \rightarrow X'$ que envía Γ -órbitas en Γ' -órbitas de manera casi-isométrica, esto es, para cada $x \in X$, la aplicación r envía la órbita $\Gamma(x)$ sobre la órbita $\Gamma'(r(x))$, y existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que para cada $x \in X$ y para cada par $x_1, x_2 \in \Gamma(x)$, se tiene:

$$\frac{1}{C_1} d_\Sigma(x_1, x_2) - C_2 \leq d_{\Sigma'}(r(x_1), r(x_2)) \leq C_1 d_\Sigma(x_1, x_2) + C_2.$$

Dos pseudogrupos grafados se dicen *equivalentes en el sentido de Kakutani*, o simplemente *Kakutani equivalentes*, si ambos tienen un factor de Kakutani en común.

Esta definición generaliza al caso de pseudogrupos grafados la noción de casi-isometría. Intuitivamente, dos pseudogrupos grafados serán equivalentes en el sentido de Kakutani si sus órbitas son casi-isométricas, es decir, si son indistinguibles a gran distancia.

Ejemplo 3.4. Si Γ es un pseudogrupo de transformaciones que actúa sobre un espacio topológico X y si Σ y Σ' son dos sistemas finitos de generadores de Γ , entonces los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y (Γ, Σ') son Kakutani equivalentes. Para probar este resultado basta comprobar que los grafos de Cayley de cada órbita respecto a Σ y Σ' son casi-isométricos. La prueba es análoga a la del teorema 1.42 para probar la casi-isometría entre grafos de Cayley con el mismo grupo subyacente y distinto conjunto de generadores.

Lema 3.5. *Si Y es una Σ -base de X , entonces los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.*

Demostración. Primero observamos que los dominios de los elementos de $\Sigma_{X,Y}$ forman un recubrimiento abierto de X , del que, además, es posible extraer un subrecubrimiento numerable. Sea pues $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de elementos de $\Sigma_{X,Y}$ cuyos dominios recubren X . Consideremos la siguiente aplicación boreliana

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \gamma_n(x), \end{aligned}$$

siendo $n \in \mathbb{N}$ el menor entero tal que $x \in \text{dom}(\gamma_n)$. Entonces, para cada punto $x \in X$ y cada par de puntos $y, z \in \Gamma(x)$, de verifica que

$$r(\Gamma(x)) \subset \Gamma|_Y(r(x)) \text{ y } d_\Sigma(y, z) - 2C \leq d_\Sigma(r(y), r(z)) \leq d_\Sigma(y, z) + 2C,$$

donde C es la constante de separación de la Σ -base Y de X . Por lo tanto, $\Gamma|_Y$ es un factor de Kakutani de Γ , de manera que Γ y $\Gamma|_Y$ son equivalentes en el sentido de Kakutani. \square

Observación 3.6. Si suponemos que el abierto Y del lema anterior es relativamente compacto, entonces se puede recubrir su clausura con los dominios una subfamilia finita $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ de $\Sigma_{X,Y}$. Además, no es restrictivo suponer que se trata de abiertos relativamente compactos de X de forma que

$$Y' = \bigcup_{\bar{\gamma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}} \text{dom}(\bar{\gamma})$$

es un abierto relativamente compacto de X tal que $\bar{Y} \subset Y'$. Para cualquier sistema de generadores $\Sigma'_{Y'}$ del pseudogrupo reducido $\Gamma|_{Y'}$, se tiene que Y es una $\Sigma'_{Y'}$ -base de Y' , ya que las $\Sigma'_{Y'}$ -longitudes de los elementos del conjunto finito $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ están acotadas. Por lo tanto, $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma'_{Y'})$ y $(\Gamma|_Y, \Sigma_{Y'}|_Y)$ son Kakutani equivalentes.

Observación 3.7. Si Y es una Σ -base relativamente compacta de X , entonces cualquier otro abierto Z que corte todas las órbitas de Γ es una Σ -base de X . Para ver esto, procedemos

como en el caso anterior: consideramos una subfamilia finita $\Sigma_{\bar{Y},Z}$ del pseudogrupo Γ de tal manera que los dominios de los elementos de $\Sigma_{\bar{Y},Z}$ recubran \bar{Y} y sus imágenes estén contenidas en Z . Igual que antes, las Σ -longitudes de los elementos de $\Sigma_{\bar{Y},Z}$ están acotadas, por lo tanto, al estar la distancia $d_\Sigma(x, Y)$ uniformemente acotada, también lo está la distancia $d_\Sigma(x, Z)$.

Comprobar que dos pseudogrupos grafados son Kakutani equivalentes a partir de la definición puede ser tedioso y por ello son especialmente útiles condiciones suficientes como la del lema 3.5 o la proposición que se enuncia a continuación.

Proposición 3.8. [22] Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos grafados. Si existen Y una Σ -base, Y' una Σ' -base, una aplicación biyectiva $f : Y \rightarrow Y'$ y una constante K , de forma que $\frac{1}{K} \leq d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$, para todo $x, y \in Y$, entonces (Γ, Σ) y (Γ', Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani. \square

Definición 3.9. Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones actuando sobre el espacio X . Dada una aplicación inyectiva $f : A \rightarrow X$, decimos que $\bar{\Gamma}$ es el *pseudogrupo de transformaciones inducido por f* si cada $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$ es tal que $\bar{\gamma}(a) = f^{-1}(\gamma(f(a)))$ para cierto $\gamma \in \Gamma$.

Como decíamos, la equivalencia de Kakutani viene a ‘trasladar’ la noción de casi-isometría a los pseudogrupos grafados; de hecho, es posible probar una versión del ‘principio de la goma elástica’ formulado en la proposición 1.44 en el marco de los pseudogrupos grafados. Éste será, además, un criterio de utilidad para comprobar si dos pseudogrupos grafados son Kakutani equivalentes.

Proposición 3.10. (*Principio de la goma elástica para pseudogrupos*) Sea A un conjunto y sean (Γ_1, Σ_1) , (Γ_2, Σ_2) dos pseudogrupos grafados definidos sobre los espacios X_1 y X_2 respectivamente. Dadas dos aplicaciones inyectivas $f_i : A \rightarrow X_i$ de manera que $f_i(A)$ es una Σ_i -base de X_i , $i = 1, 2$, y los pseudogrupos de transformaciones de A inducidos por f_i son el mismo. Si existen dos funciones crecientes $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$d_{\Sigma_2}(f_2(x), f_2(y)) \leq \mu_1(d_{\Sigma_1}(f_1(x), f_1(y)))$$

y

$$d_{\Sigma_1}(f_1(x), f_1(y)) \leq \mu_2(d_{\Sigma_2}(f_2(x), f_2(y)))$$

para cada par $x, y \in A$, entonces los pseudogrupos grafados (Γ_1, Σ_1) y (Γ_2, Σ_2) son Kakutani equivalentes.

Demostración. Por ser $f_i(A)$ una Σ_i -base, lo único que tenemos que probar es que el conjunto A con las métricas inducidas por las aplicaciones f_1 y f_2 son Kakutani equivalentes. Para ver esto nos basta comprobar que la identidad id_A es una casi-isometría sobre cada órbita del pseudogrupo inducido, lo cual se deduce directamente del principio de la goma elástica, es decir, la proposición 1.44. \square

Observación 3.11. Igual que ocurría en el principio de la goma elástica usual, podemos reemplazar las aplicaciones μ_1 y μ_2 por una sola aplicación: $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Además, como la distancia en los pseudogrupos grafados solo toma valores enteros, podemos suponer μ definida únicamente sobre \mathbb{N} .

3.3. Pseudogrupos compactamente generados

En esta sección veremos como afecta a las propiedades de un pseudogrupo de transformaciones el hecho de escoger un ‘mejor sistema de generadores’. Esta propiedad fue introducida por A. Haefliger en [14] con el nombre de propiedad de *generación compacta* y es la que se precisa en la siguiente definición.

Definición 3.12 ([14, 15]). Un pseudogrupo Γ de transformaciones de un espacio localmente compacto y Hausdorff X se dice *compactamente generado* si

1. existe un abierto relativamente compacto Y que corta a todas las órbitas de Γ y;
2. existe un sistema finito de generadores Σ de $\Gamma|_Y$ de manera que cada $\sigma \in \Sigma$ es la restricción de una transformación $\bar{\sigma} \in \Gamma$ tal que $\text{dom}(\sigma) \subset \text{dom}(\bar{\sigma})$

A este sistema de generadores Σ se le llama *sistema de generación compacta para Y* .

Ahora cabe preguntarse bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia de un sistema de generadores de generación compacta para un abierto relativamente compacto que corte a todas las órbitas. El siguiente lema nos dice que si existe un sistema de generación compacto para cierto abierto relativamente compacto Y , entonces existe un sistema de generación compacta para cualquier otro abierto Y' relativamente compacto que corte a todas las órbitas.

Lema 3.13. *Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones de X compactamente generado. Sea Y' un abierto relativamente compactamente que corta a todas las Γ -órbitas. Entonces existe un sistema de generación compacta para Y' .*

Demostración. Sea Y el abierto relativamente compacto para el cual existe un sistema de generación compacto Σ . Dado que Y e Y' son relativamente compactos, podemos obtener una familia $\Phi \subset \Gamma$ que define una equivalencia en el sentido de Haefliger entre $\Gamma|_Y$ y $\Gamma|_{Y'}$, ya que ambos pseudogrupos son trivialmente equivalentes en el sentido de Haefliger por ser una relación de equivalencia, y el hecho de que sean relativamente compactos los abiertos Y e Y' nos garantiza que podemos escoger una familia finita Φ que modele la equivalencia. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada elemento $\varphi \in \Phi$ es la restricción de un elemento $\tilde{\varphi} \in \Gamma$ que está definido sobre un entorno de $\text{dom } \varphi$. De esta forma, la familia de homeomorfismos $\Sigma' = \{\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi, \varphi' \in \Phi \text{ y } \sigma \in \Sigma\}$ es un sistema de generación compacta para Y' . \square

Como consecuencia directa de este último resultado se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.14. [14, 15] *La propiedad de ser compactamente generado es invariante por equivalencias de Haefliger.*

Uno de los problemas que encontrábamos al restringir pseudogrupos a abiertos arbitrarios era que, en general, no definían una buena estructura de grafo al considerar el pseudogrupo grafado asociado a un sistema de generadores cualquiera. El siguiente lema nos muestra que este problema desaparece en el caso de pseudogrupos compactamente generados.

Lema 3.15. *Sea X un espacio topológico localmente compacto, metrizable y separable; y sea Γ un pseudogrupo de transformaciones de X compactamente generado, dotado de un sistema numerable de generadores Σ . Sean Y un abierto relativamente compacto que corta a todas las órbitas de Γ y Σ_Y un sistema de generación compacta de Γ sobre Y . Si Y es una Σ -base de X , entonces (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.*

Demostración. En virtud del lema 3.5 los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani; luego, utilizando la propiedad transitiva, nos basta probar que los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ y $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ son Kakutani equivalentes. Para ver esto utilizaremos la versión para pseudogrupos del principio de la goma elástica (proposición 3.10). Sean $x, y \in Y$ dos puntos que estén en la misma $\Gamma|_Y$ -órbita y $K = \max\{\text{long}_\Sigma(\tilde{\sigma}) : \sigma \in \Sigma_Y\}$, donde $\tilde{\sigma}$ es una transformación tal que $\tilde{\sigma}|_Y = \sigma$. Supongamos $y = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1(x)$, $\sigma_i \in \Sigma_Y$, para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$d_\Sigma(x, y) \leq \text{long}_\Sigma(\tilde{\sigma}_n \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_1) \leq \sum_{i=1}^n \text{long}_\Sigma(\tilde{\sigma}_i) \leq Kn = Kd_{\Sigma_Y}(x, y).$$

Definimos entonces $\mu_1(n) = Kn$. Para acotar ahora las distancias en sentido contrario observamos en primer lugar que solo hay un número finito de Σ -palabras de longitud menor o igual a n por una cuestión simple de combinatoria, luego podemos definir la aplicación $\mu_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$\mu_2(n) = \max\{n, \text{long}_{\Sigma_Y}(\omega) : \omega \text{ es una } \Sigma\text{-palabra de } \Sigma\text{-longitud } \leq n\}.$$

Entonces, si $d_\Sigma(x, y) = n$, tendremos que $y = \omega(x)$, con ω una Σ -palabra de longitud n . Por lo tanto, ω se escribirá como una Σ_Y -palabra de Σ_Y -longitud menor o igual a $\mu_2(n)$. \square

Ahora centraremos nuestro interés en los pseudogrupos de generación compacta para los que exista una Σ -base.

Definición 3.16. Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones sobre un espacio topológico localmente compacto, metrizable y separable X , y sea Σ_Y un sistema de generación compacta sobre un abierto localmente compacto que corta todas las órbitas Y . Si existe un abierto relativamente compacto Z tal que $\bar{Z} \subset Y$ y si Z es una Σ_Y -base de Y , entonces Σ_Y es un *buen sistema de generación compacta*.

Ahora cabe preguntarse bajo qué condiciones un pseudogrupo compactamente generado admite un buen sistema de generación compacta. El siguiente lema nos dice que, en realidad, todos los pseudogrupos compactamente generados admiten un buen sistema de generación compacta.

Lema 3.17. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio topológico localmente compacto, metrizable y separable X . Para cualquier abierto $Y \subset X$ relativamente compacto que corte a todas las Γ -órbitas de X existe un buen sistema de generación compacta.*

Demostración. En la observación 3.6 hemos visto que podemos definir una familia finita, que notábamos como $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$, cuyos dominios son abiertos relativamente compactos que recubren a \bar{Y} . Además, cada elemento $\bar{\sigma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}$ es la restricción de un elemento σ de la familia $\Sigma_{X, Y}$ de manera que $\text{dom } \bar{\sigma} \subset \text{dom}(\sigma)$. De esta forma tenemos que $Z = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}} \text{im } \bar{\sigma}$ es un abierto relativamente compacto de X que además verifica que su clausura está contenida en el abierto Y . Denotemos ahora Φ_Y a la familia formada por restringir los elementos de $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ a Y . Así, añadiendo la familia Φ_Y a cualquier sistema de generación compacta sobre Y obtenemos un nuevo sistema de generación compacta Σ_Y de Γ sobre Y . De esta forma nuestra familia es ya un buen sistema de generación compacta, ya que Z es una Σ -base debido a que cualquier elemento $y \in Y$ se encuentra en el dominio de algún $\bar{\sigma} \in \Phi_Y$.

Además, siguiendo el esquema de lo que se hizo en la observación 3.7 se obtiene un abierto relativamente compacto $Y' = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}} \text{dom } \bar{\sigma}$ de X tal que $\bar{Y} \subset Y'$. Así, si $\bar{\Sigma}_Y = \{\sigma \in \Gamma : \sigma \in \Sigma_Y\}$, se tiene que Y es una $\bar{\Sigma}_Y$ -base y $\bar{\Sigma}_Y$ es entonces un sistema de generación compacta. \square

Nuestro siguiente objetivo será probar que si dos pseudogrupos compactamente generados son equivalentes en el sentido de Haefliger entonces su restricción a abiertos relativamente compactos y que corten a todas las órbitas lo será en el sentido de Kakutani. Para probar esto nos serviremos del siguiente lema.

Lema 3.18. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio topológico localmente compacto, metrizable y separable X . Dados dos abiertos relativamente compactos Y e Y' de manera que $Y \cap Y'$ corta a todas las órbitas, si Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$ son dos buenos sistemas de generadores para Y y para Y' respectivamente, entonces los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ son Kakutani equivalentes.*

Demostración. Como $Y \cap Y'$ es un abierto relativamente compacto que corta a todas las órbitas de Γ , estamos en condiciones de aplicar el lema 3.17 y obtenemos un abierto relativamente compacto que corta a todas las Γ -órbitas Z tal que $\bar{Z} \subset Y \cap Y'$. Ahora, utilizando que tanto Σ_Y como $\Sigma_{Y'}$ son buenos sistemas de generación compacta, según la observación 3.7, el abierto Z es una Σ -base de Y también una $\Sigma_{Y'}$ -base de Y' . En virtud del lema 3.15, los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_Z, \Sigma|_Y|_Z)$ son Kakutani equivalentes y también lo

son $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma|_{Y'})$ y $(\Gamma|_Z, \Sigma_{Y'}|_Z)$. Ahora seguiremos el esquema de demostración del lema 3.15 y utilizaremos el principio de la goma elástica para probar que los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Z, \Sigma|_Y|_Z)$ y $(\Gamma|_Z, \Sigma_{Y'}|_Z)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani. Para ello, veamos que las métricas de estos dos espacios son uniformemente equivalentes. Sea $W_{\Sigma_Y}^n$ la familia de las Σ_Y -palabras de Σ_Y -longitud menor o igual a n . Como ya vimos en la demostración del lema 3.15, por una cuestión de combinatoria esta familia es finita. Entonces, si nos restringimos a Z , obtenemos una familia de homeomorfismos $W_{\Sigma_Y}^n|_Z$ finita posiblemente vacía. Luego podemos definir la aplicación $\mu_Y(n) = \max\{n, \text{long}_{\Sigma_{Y'}}(\omega) : \omega \in W_{\Sigma_Y}^n|_Z\}$. De esta forma concluimos que $d_{\Sigma_{Y'}}(z, z') \leq \mu_Y(d_{\Sigma_Y}(z, z'))$, para cualquier par de elementos $z, z' \in Z$. Por simetría definiendo $\mu_{Y'}$ se concluye el resultado. \square

Teorema 3.19. *Sean Γ y Γ' dos pseudogrupos de transformaciones compactamente generados de dos espacios localmente compactos, metrizable y separables X y X' respectivamente. Sean $Y \subset X$ e $Y' \subset X'$ dos abiertos relativamente compactos que cortan todas las órbitas de Γ y Γ' respectivamente dotados de sendos buenos sistemas de generación compacta Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$. Entonces, si los pseudogrupos Γ y Γ' son equivalentes en el sentido de Haefliger, los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ y $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ son Kakutani equivalentes.*

Demostración. Por la caracterización de la equivalencia de Haefliger vista en la proposición 2.6 sabemos que existe un pseudogrupo Γ'' que actúa sobre $X \sqcup X'$ y que se reduce a Γ y a Γ' sobre X y X' respectivamente. Observamos además que el abierto $Y'' = Y \sqcup Y'$ es un abierto relativamente compacto que corta a todas las Γ'' -órbitas, de manera que por el lema 3.17 existe $\Sigma_{Y''}$ un buen sistema de generación compacta para $\Gamma|_{Y''}$. Entonces por el lema 3.18 tanto $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ y $(\Gamma|_{Y''}, \Sigma_{Y''})$ como $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ y $(\Gamma|_{Y''}, \Sigma_{Y''})$ son equivalentes en el sentido de Kakutani, y de la propiedad transitiva se deduce entonces el resultado. \square

Capítulo 4

Laminaciones y espacios foliados por grafos

El concepto de pseudogrupo aparece de forma natural al estudiar la holonomía de una foliación. En este capítulo introducimos brevemente los conceptos de foliación, laminación, buen atlas y holonomía, que son de ayuda para ampliar los ejemplos tratados en el segundo capítulo.

4.1. Laminaciones

Comencemos recordando la definición clásica de foliación a partir de la definición de atlas foliado.

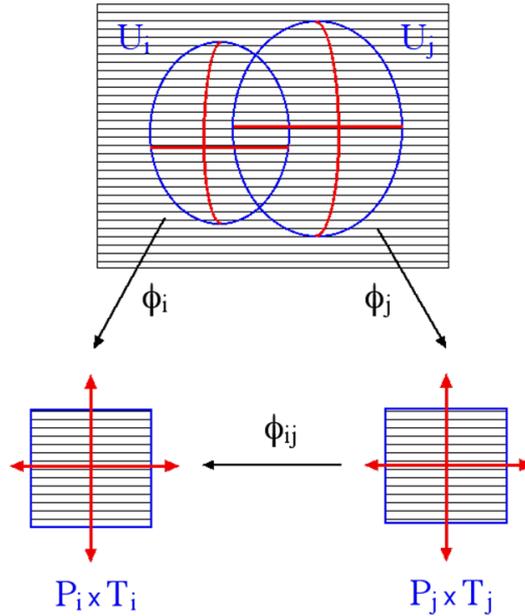
Definición 4.1. Un *atlas foliado* $\{(U_i, \varphi_i)\}$ de una variedad M de dimensión n cumple:

1. $\{U_i\}$ es un recubrimiento de M .
2. $\varphi_i : U_i \rightarrow B^p \times B^q$ es un homeomorfismo, donde $B^p \subset \mathbb{R}^p$ y $B^q \subset \mathbb{R}^q$ son las bolas centradas en el origen y de radio unidad en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^q respectivamente.
3. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces el cambio de cartas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) &\longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ (x, y) &\longmapsto (\alpha_{ij}(x, y), \sigma_{ij}(y)), \end{aligned}$$

donde las aplicaciones α_{ij} y σ_{ij} tienen la misma o menor clase de diferenciabilidad que M .

Las cartas de un atlas foliado se denominan *cartas foliadas*. A los conjuntos $P_i = \varphi_i^{-1}(B^p \times \{y\})$, $y \in B^q$, se les llama *placas*, mientras que a los conjuntos de la forma $X_i = \varphi_i^{-1}(\{x\} \times B^q)$, $x \in B^p$, se les llama *transversales locales*. El hecho de que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ implica que la unión de dos placas P_i y P_j pasando por un mismo punto es una subvariedad



embebida de M . En general, dado $x \in M$, se llama *hoja* que pasa por x al conjunto de puntos que podemos unir a x por un camino de placas, y se denota con L_x . Ahora L_x es una subvariedad débilmente embebida de M de dimensión p y la descomposición $\mathcal{F} = \{L_x : x \in M\}$ se llama *foliación* de M de dimensión p .

Tenemos entonces definido el concepto de foliación que, como vimos, no es más que una descomposición de una variedad de dimensión n en subvariedades (inmersas) de dimensión p , las hojas, que localmente están dispuestas como los subconjuntos de horizontales $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, con segunda coordenada constante. La idea detrás de la noción de *laminación* es generalizar las foliaciones dándole más libertad a las transversales. Esta generalización solamente se suele aplicar espacios metrizables, localmente compactos y separables, y lo que hacemos es sustituir cada transversal \mathbb{R}^q por un subespacio del mismo tipo.

Definición 4.2. Sean M y X dos espacios métricos localmente compactos y separables. Una *laminación* \mathcal{L} de dimensión p modelada transversalmente por X es una partición de M por subconjuntos conexos, que llamaremos hojas, de forma que existe un atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow B^p \times X_i\}_{i \in I}$ de modo que los conjuntos X_i son abiertos de X , las placas $P_i = \varphi_i^{-1}(B^p \times \{y\})$ que cortan a una hoja $L \in \mathcal{L}$ están contenidas en L y los cambios de cartas se escriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) &\longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ (x, y) &\longmapsto (\alpha_{ij}(x, y), \sigma_{ij}(y)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

Los conjuntos $\varphi_i^{-1}(\{*\} \times X_i)$ se siguen llamando *transversales locales* y se identifican con los abiertos X_i de X . Del mismo modo, el atlas \mathcal{A} se denomina *atlas foliado* y cada carta es una *carta foliada*. Decimos que la laminación es de clase C^k , $0 \leq k \leq \infty$, si las aplicaciones

$\alpha_{ij}(\cdot, y_j)$ son difeomorfismos de clase C^k sobre su imagen que dependen continuamente de $y_j \in X_j$ en la topología C^k .

El hecho de que los cambios de carta tengan la forma descrita implica que cada hoja de la laminación posee una estructura natural de variedad de clase C^k y dimensión p . Basta restringir las cartas del atlas foliado a las placas para obtener un atlas de las hojas, es decir, si P es una placa de L , entonces las cartas $\varphi_i|_P : P \rightarrow \mathbb{R}^p$ forman un atlas de L .

Notación 4.3. En adelante, salvo mención explícita, cuando hablemos de laminaciones asumiremos que el espacio ambiente es un espacio métrico localmente compacto y separable.

Definición 4.4. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua entre dos espacios métricos M, N dotados de laminaciones \mathcal{L}_M y \mathcal{L}_N respectivamente. Se dice que f es una *aplicación foliada* si lleva hojas de \mathcal{L}_M en hojas de \mathcal{L}_N , esto es, si para cada hoja $L \in \mathcal{L}_M$ existe una hoja $L' \in \mathcal{L}_N$ de manera que $f(L) \subset L'$. Decimos que una aplicación foliada es *de clase C^k a o largo de las hojas* si su restricción a cada hoja $f_L : L \rightarrow L'$ es de clase C^k en el sentido usual y las derivadas parciales de orden inferior a k dependen continuamente de la hoja.

Ejemplo 4.5. El primer ejemplo de laminación es la *laminación horizontal*. Se trata de considerar una variedad diferenciable N de clase C^k y dimensión p y un espacio métrico localmente compacto y separable X . Entonces, trivialmente, la partición $\mathcal{H} = \{N \times \{x\}\}_{x \in X}$ es una laminación modelada transversalmente por X del espacio $M = N \times X$ de dimensión p y clase C^k .

Ejemplo 4.6. Consideremos $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de todas las sucesiones biláteras, es decir, en ambas direcciones, de ceros y unos. Si dotamos al conjunto $\{0, 1\}$ de la topología discreta, la topología producto sobre X convierte a este espacio en un conjunto de Cantor. Se define entonces el *shift de Bernouilli* como la aplicación $\sigma : X \rightarrow X$ que actúa de la siguiente manera: $\sigma(\alpha)_i = \alpha_{i+1}$, para toda sucesión $\alpha = (\alpha_i) \in X$. Es sencillo comprobar que σ es un homeomorfismo. Consideramos el espacio cociente $M = \mathbb{R} \times X / (x, \alpha) \sim (x + 1, \sigma(\alpha))$. La laminación horizontal \mathbb{H} sobre $\mathbb{R} \times X$ induce una laminación \mathcal{L}_σ sobre M , modelada transversalmente por el conjunto de Cantor X .

Ejemplo 4.7. Sea X una variedad de dimensión p y clase C^k con $0 \leq k \leq \infty$ y $h : X \rightarrow X$ un difeomorfismo de clase C^k . A la acción de \mathbb{Z} sobre el producto $\mathbb{R} \times X$ generada por

$$H(t, x) = (t + 1, h(x))$$

se la llama *acción diagonal*. Como la acción de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R} es libre y propiamente discontinua, la acción de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{R} \times X$ también lo es y por tanto la proyección canónica

$$\pi : \mathbb{R} \times X \rightarrow M = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times X)$$

es una cubierta regular de grupo \mathbb{Z} . Obsérvese que la proyección sobre el primer factor $p_1 : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es equivariante respecto de ambas acciones, luego induce por paso al cociente un fibrado localmente trivial $p : M \rightarrow S^1$ de fibra F . Esta información se resume en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} \times F & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{R} \\
\downarrow \pi & & \downarrow \text{exp} \\
M = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times F) & \xrightarrow{p} & S^1 = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}
\end{array}$$

Consideremos la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\mathbb{R} \times \{y\}\}_{y \in F}$ de $\mathbb{R} \times F$, definida por la proyección sobre el segundo factor $p_2 : \mathbb{R} \times F \rightarrow F$. Esta foliación también es invariante, luego pasa al cociente en una foliación \mathcal{F} sobre M . Cada hoja de $\mathbb{R} \times \{y\}$ se proyecta en una hoja L_y de \mathcal{F} obtenida como cociente de \mathbb{R} por la acción del subgrupo $\{n \in \mathbb{Z} : h^n(y) = y\}$ de \mathbb{Z} . La hoja L_y es homeomorfa a S^1 si y es un punto periódico de h y a \mathbb{R} en caso contrario. La variedad foliada (M, \mathcal{F}) se llama *suspensión del difeomorfismo h* .

Ejemplo 4.8. La suspensión de un homeomorfismo es un caso particular de lo que se conoce como *suspensión de una representación*. Sean B una variedad conexa de dimensión p y X un espacio métrico localmente compacto y separable. Sea $\rho : \pi_1(B) \rightarrow \text{Homeo}(X)$ una representación del grupo fundamental de B en el grupo de homeomorfismos de X en sí mismo. Si $r : \tilde{B} \rightarrow B$ es la cubierta universal de B , entonces podemos identificar $\pi_1(B)$ con el grupo de automorfismos de \tilde{B} y obtenemos una acción diagonal de $\pi_1(B)$ sobre $\tilde{B} \times X$ dada por $\alpha \cdot (\tilde{b}, x) = (\alpha(\tilde{b}), \rho(\alpha)(x))$ para cada $\alpha \in \pi_1(B)$. Como antes, la acción diagonal es libre y propiamente discontinua y la aplicación cociente

$$\pi : \tilde{B} \times X \rightarrow M := \pi_1(B) \backslash (\tilde{B} \times X)$$

es una cubierta. Además, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{B} \times X & \xrightarrow{p_1} & \tilde{B} \\
\downarrow \pi & & \downarrow r \\
M & \xrightarrow{p} & B
\end{array}$$

donde, igual que ocurría antes, la aplicación p está inducida por la primera proyección p_1 . La terna (M, p, B) es un fibrado localmente trivial de fibra X cuyo grupo estructural se reduce a $\text{im}(\rho)$. Además, la acción diagonal conserva la laminación horizontal de $\tilde{B} \times X$ y ésta induce una laminación \mathcal{L}_ρ de dimensión p modelada transversalmente por X . Es sencillo construir un atlas foliado compatible a partir del atlas de trivialidad del fibrado localmente trivial subyacente.

Definición 4.9. Se dice que dos atlas son *equivalentes* si generan la misma laminación. Una caracterización de este fenómeno es que la unión de dos atlas siga siendo un atlas foliado. Así, las laminaciones se pueden pensar como clases de equivalencia en el espacio de atlas foliados.

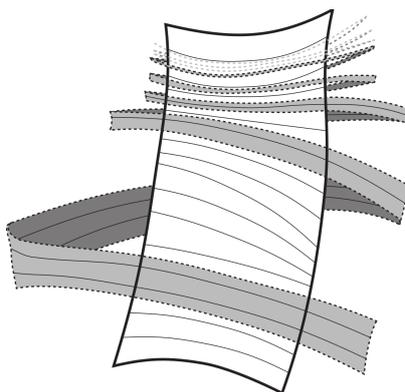


Figura 4.2: Si el atlas no es bueno una placa puede cortar a un número infinito de placas.

Tras esta definición cabe preguntarse si se puede escoger un buen representante en la clase de atlas foliados, es decir, si podemos elegir un atlas con buenas propiedades equivalente a uno dado. Veremos que la respuesta es afirmativa y en la siguiente definición se precisa qué es lo que entendemos por ‘buenas propiedades’.

Definición 4.10. Decimos que un atlas foliado $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ es *bueno* si cumple:

1. el recubrimiento $\{U_i\}$ es localmente finito,
2. las placas P_i son relativamente compactas,
3. si dos abiertos del atlas $U_i, U_j \in \mathcal{A}$ tienen intersección no vacía, entonces existe un abierto foliado en producto U_{ij} tal que $\overline{U_i} \cup \overline{U_j} \subset U_{ij}$ (véase la figura 4.1). Esta condición implica que las placas de U_i intersecan, como mucho, a una placa de U_j .

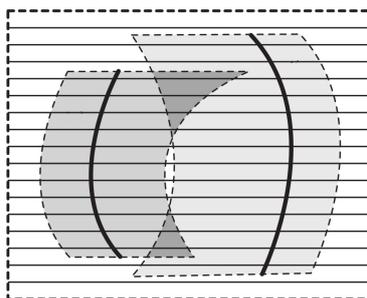


Figura 4.1: Atlas bueno en el que se observa que cada placa corta a una única placa.

La demostración del siguiente resultado puede verse en [17] o [22].

Proposición 4.11. *Dado un atlas foliado, existe un buen atlas foliado equivalente.*

Dada una laminación (M, \mathcal{L}) de clase C^k con $1 \leq k \leq \infty$ podemos dotarla de una métrica de Riemann. Primero observemos que cada hoja de la laminación es una variedad de clase C^1 (al menos) luego podemos considerar su fibrado tangente. La unión disjunta $T\mathcal{L} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}} TL$ de todos estos fibrados con la topología natural constituye el fibrado tangente de la laminación \mathcal{L} . Una aplicación $g : T\mathcal{L} \times T\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(M)$ es una *métrica de Riemann foliada* si su restricción a cada hoja $g|_{TL}$ lo es en el sentido clásico. Esto es, podemos definir localmente los coeficientes de la métrica como aplicaciones continuas diferenciables a lo largo de las hojas.

Así, cada hoja es una variedad de Riemann y podemos entonces definir la aplicación exponencial $\exp_x : T_x L = T_x \mathcal{L} \rightarrow L$, donde L es la única hoja que pasa por $x \in M$. Sabemos además que la exponencial es un difeomorfismo en una bola centrada en el origen $0 \in T_x L$ con un radio suficientemente pequeño. Ese radio es lo que se conoce como *radio de inyectividad en x* , es decir,

$$\text{inj}(x) = \sup\{\varepsilon > 0 : \exp_x : B_{T_x L}(0, \varepsilon) \rightarrow B_L(x, \varepsilon) \text{ es un difeomorfismo}\},$$

donde $\text{inj}(x)$ es positivo y puede tomar el valor $+\infty$.

4.2. Holonomía

La holonomía de una laminación nos dice cómo se enrollan unas hojas con otras. Esta información nos la da el llamado *pseudogrupo de holonomía*.

Fijamos un atlas foliado $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i\}_{i \in I}$ para una laminación (M, \mathcal{L}) . Fijado un punto $x_i \in P_i$, la transversal local $\varphi_i^{-1}(\{x_i\} \times X_i) \subset M$ se identifica mediante el homeomorfismo local φ_i con X_i . Diremos abusivamente que la unión disjunta $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ es una *transversal completa* (que corta a todas las hojas), denominada *eje de \mathcal{A}* . En lo sucesivo supondremos que \mathcal{A} es un buen atlas.

Definición 4.12. Sean (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) dos cartas locales de un buen atlas \mathcal{A} tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Sea U_{ij} un abierto distinguido dado por la condición 3 de la definición 4.10 y que contiene a la unión de U_i y U_j . Llamamos *transformación de holonomía* $\sigma_{ij} : D_{ij} \subset X_i \rightarrow D_{ji} \subset X_j$ a la aplicación definida por

$\sigma_{ij}(y_i) = y_j \Leftrightarrow$ las placas que pasan por y_i e y_j están contenidas en una placa de U_{ij} donde D_{ij} y D_{ji} son abiertos de X_i y X_j respectivamente. La aplicación σ_{ij} es un homeomorfismo entre ellos que extiende el homeomorfismo del mismo nombre del cambio de cartas (4.1).

Definición 4.13. Dada una laminación \mathcal{L} , se llama *pseudogrupo de holonomía de \mathcal{L}* reducido a la transversal completa X , denotado por Γ , al menor pseudogrupo que contiene a la familia de homeomorfismos $\{\sigma_{ij} : i, j \in I\}$.

Este pseudogrupo nos permite estudiar la dinámica transversa de la laminación en restricción a la transversal X .

Proposición 4.14. *Si Γ y Γ' son dos pseudogrupos de holonomía definido por dos buenos atlas foliados \mathcal{A} y \mathcal{A}' de una misma laminación (M, \mathcal{L}) , entonces Γ y Γ' son equivalentes en el sentido de Haefliger.* \square

Se llama *estructura transversa* de una laminación (M, \mathcal{L}) a la clase de equivalencia de su pseudogrupo de holonomía. Sea L una hoja de \mathcal{L} y $x \in L \cap X$. Consideremos el grupo de isotropía

$$\Gamma_x = \{h \in \Gamma : h(x) = x\}$$

y el grupo de gérmenes correspondientes \mathcal{H}_x . Sea $y \in X \cap L$. Dado que tanto x como y son puntos de una misma hoja, existe un homeomorfismo $\sigma \in \Gamma$ de manera que $\sigma(x) = y$. Esto define un isomorfismo entre los grupos \mathcal{H}_x y \mathcal{H}_y por conjugación. Luego podemos denotar el grupo de gérmenes \mathcal{H}_x por \mathcal{H}_L , lo que da sentido a la siguiente definición:

Definición 4.15. El grupo \mathcal{H}_L es el *grupo de holonomía de la hoja $L \in \mathcal{L}$* . Si \mathcal{H}_L es nulo, decimos que la hoja L no tiene holonomía.

4.3. Espacios foliados por grafos

En esta sección veremos un tipo especial de laminación en el que las hojas no son variedades, sino grafos; esto es lo que denominaremos como espacio foliado por grafos.

Definición 4.16. Sean X y \mathfrak{X} dos espacios localmente compactos, metrizablees y separables. Decimos que una familia de cartas locales \mathcal{A} es un *atlas foliado* de \mathfrak{X} si las cartas

$$\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i$$

satisfacen:

1. P_i es un grafo finito,
2. X_i es un abierto de X ,
3. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas se escribe como

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) &\longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ (x, y) &\longmapsto (\alpha_{ij}(x, y), \sigma_{ij}(y)), \end{aligned}$$

donde α_{ij} es un isomorfismo entre subgrafos de P_i y P_j .

Igual que ocurría en las foliaciones tradicionales, las *placas* son los conjuntos de la forma $P_i = \varphi_i^{-1}(P_i \times \{*\})$, y éstas definen una descomposición \mathcal{F} de \mathfrak{X} en grafos conexos de manera que las hojas son los menores conjuntos que contienen a cualquier placa que intersecan. Esta descomposición es lo que llamamos *foliación por grafos*. El hecho de que \mathfrak{X} sea localmente compacto implica que la estructura de grafo de las hojas es localmente finita.

Observación 4.17. Sin pérdida de generalidad, siempre podemos suponer que el eje del atlas \mathcal{A} está formado por vértices de las hojas. Esto significa que el espacio X que modela transversalmente la foliación por grafos \mathcal{F} también está formado por vértices. Ahora bien, como el conjunto de los vértices de las hojas de $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ es una transversal completa (cerrada), podemos tomar X igual al conjunto de vértices haciéndolo maximal. De esta forma, definimos la *función de valencia* $\text{val} : X \rightarrow \mathbb{N}$ como la valencia de cada vértice en la hoja correspondiente. Por definición, esta función es continua. Esto sugiere que la definición de espacio foliado por grafos impone restricciones severas a la estructura transversa, algo que confirmaremos más adelante en la proposición 4.19 y el ejemplo 4.20.

Igual que ocurría en el caso de las laminaciones, podemos preguntarnos si se puede dar una definición de ‘buen atlas’. La respuesta es que sí, y, como en el caso anterior, siempre existen y su construcción es análoga a la dada en la demostración de la proposición 4.11. De igual manera podemos repetir la construcción del pseudogrupo de holonomía, así como los resultados relacionados con ellos sin cambios en el argumento.

Proposición 4.18. *Dado un espacio foliado por grafos $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$, existe un buen atlas foliado tal que las placas son geodésicamente convexas y la intersección de dos placas es homeomorfa al intervalo $(0, 1)$.*

Demostración. En primer lugar, observamos que el conjunto $\mathfrak{X} - X$ formado por los puntos interiores de las aristas de \mathfrak{X} es homeomorfo al $(0, 1) \times E$, donde E es el conjunto de las aristas de \mathfrak{X} , cada una identificada con su punto medio. Ahora, gracias a la trivialidad local, los abiertos $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ que recubren $(0, 1)$ proporcionan tres abiertos foliados en producto por \mathcal{F} que recubren $\mathfrak{X} - X$.

Nos falta entonces recubrir el conjunto de vértices X . Ahora bien, como la función de valencia es continua, podemos dividir X en una cantidad numerable (posiblemente finita) de abiertos cerrados disjuntos

$$X = \bigsqcup_{n \geq 0} \text{val}^{-1}(n).$$

En efecto, cada conjunto $\text{val}^{-1}(n)$ puede recubrirse con un abierto

$$X^n = \bigcup_{x \in \text{val}^{-1}(n)} B(x, \frac{1}{4}),$$

donde $B(x, \frac{1}{4})$ es la bola en la hoja que pasa por el vértice x centrada en ese punto y con radio $\frac{1}{4}$. Nos bastaría entonces comprobar (es sencillo) que cada abierto X^n es homeomorfo al producto $B(x, \frac{1}{4}) \times \text{val}^{-1}(n)$. Así, los abiertos de trivialidad nos proporcionan cartas foliadas que, junto a las construidos anteriormente, forman un buen atlas fibrado que cumple todas las propiedades enunciadas. \square

4.4. Pseudogrupo de holonomía

Aunque históricamente el concepto de pseudogrupo se debe a S. Lie y aparece vinculado a las simetrías de los sistemas de ecuaciones diferenciales, el interés por los pseudogrupos

renace con los trabajos de C. Ehresmann y sus alumnos G. Reeb y A. Haefliger sobre foliaciones. Esto hace que el concepto de pseudogrupo de holonomía de una foliación, introducido en la definición 4.13, deba verse como un ejemplo fundamental. En esta sección estudiaremos brevemente qué es lo que ocurre al dotarlo de una estructura grafada.

Dada una laminación \mathcal{L} de un espacio compacto M , a cada buen atlas foliado \mathcal{A} , se le asocia el pseudogrupo de holonomía Γ actuando sobre el eje X de \mathcal{A} . Se convierte en un pseudogrupo grafado si se dota del conjunto de generadores formado por los homeomorfismos σ_{ij} descritos en la definición 4.12.

Por construcción, para cada $x \in X$, la órbita $\Gamma(x)$ está dotada de una estructura de grafo, que denotamos por $\bar{\Gamma}(x)$, y podemos considerar su valencia, $\text{val}_\Sigma(x)$. Reescribiendo (1.2) en este caso concreto, se tiene que:

$$\text{val}_\Sigma(x) = \#\{\sigma \in \Sigma : x \in \text{dom}(\sigma)\} + \#\{\sigma \in \Sigma : x \in \text{im}(\sigma)\}.$$

De hecho, podemos escribir esta última expresión de una forma más compacta del siguiente modo:

$$\text{val}_\Sigma(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (\chi_{\text{dom } \sigma}(x) + \chi_{\text{im}(\sigma)}(x)), \quad (4.2)$$

donde χ_A hace referencia a la función característica del conjunto A . Ahora bien, como el dominio y la imagen de las transformaciones $\sigma \in \Sigma$ son abiertos de X , las aplicaciones características correspondientes son semicontinuas inferiormente. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.19. *Sea \mathcal{L} una laminación de un espacio compacto M y Γ el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{L} reducido a una transversal completa X . La función de valencia*

$$\text{val}_\Sigma : X \longrightarrow \mathbb{N}$$

es semicontinua inferiormente. □

Si los dominios e imágenes de las aplicaciones $\sigma \in \Sigma$ son también cerrados, entonces la aplicación val_Σ es de hecho continua.

Ejemplo 4.20. Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ un espacio foliado por grafos y denotemos por X su conjunto de vértices. Veamos que a partir de la aplicación valencia somos capaces de definir un sistema de generadores del pseudogrupo de holonomía reducido a X que permite recuperar la estructura de grafo de las órbitas. Recordemos que cada abierto cerrado $\text{val}^{-1}(n) \subset X$ es el dominio de n transformaciones, una por cada arista saliente en cada vértice. En efecto, considerando la métrica natural sobre $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$, en la que las aristas son isométricas al intervalo $(0, 1)$, el conjunto $\bigcup_x \in \text{val}^{-1}(n) B(x, \frac{1}{2})$ es un abierto foliado en producto homeomorfo a $B(x_0, \frac{1}{2}) \times \text{val}^{-1}(n)$ para un $x_0 \in \text{val}^{-1}(n)$ fijado. Si ahora fijamos e , una de las ‘medias’ aristas de la bola $B(x_0, \frac{1}{2})$, obtenemos una transformación σ_e definida sobre $\text{val}^{-1}(n)$ como sigue: para cada $x \in \text{val}^{-1}(n)$, $\sigma_e(x) \in X$ es el extremo de la arista correspondiente con e que tiene como origen el punto x . Nótese que estos homeomorfismos pueden coincidir

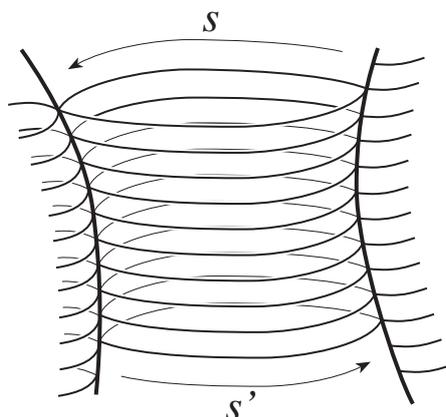


Figura 4.3: Dos transformaciones S y S' que son el mismo homeomorfismo debido a la existencia de aristas múltiples.

en un abierto, o incluso ser iguales en él. Un ejemplo sería tener un paquete de aristas múltiples como ocurre en la figura 4.4. Permitiendo entonces el caso de los multigrafos, lo que tenemos es una familia Σ que genera el pseudogrupo de holonomía reducido a X y cuyos dominios e imágenes forman un recubrimiento localmente finito. Obsérvese además que se respeta la estructura de grafo original si consideramos la estructura grafada dada por este conjunto de generadores. En este caso tenemos entonces que la función valencia del pseudogrupo coincide con la de $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, luego es una función continua.

Observación 4.21. Cabe resaltar que el pseudogrupo de holonomía reducido al eje de un atlas foliado de un espacio foliado compacto es compactamente generado, pues nos bastaría con refinar dicho atlas por otro con cuyas cartas sean relativamente compactas, de modo parecido a como se ha hecho en la proposición 4.11.

Capítulo 5

Pseudogrupos actuando sobre el Cantor

En el capítulo anterior hemos visto que la función de valencia de un pseudogrupo grafado es semicontinua, lo que ocurre en particular para el pseudogrupo de holonomía de cualquier laminación de un espacio compacto. No obstante, si consideramos un espacio foliado por grafos, la función de valencia de su pseudogrupo de holonomía es continua. El objetivo de este capítulo es demostrar que son los únicos ejemplos de pseudogrupos grafados con esta propiedad.

Empecemos recordando que dado un grafo $G = (V, E)$, su realización geométrica es el CW-complejo obtenido al considerar el conjunto de vértices V como un conjunto discreto que corresponde al 0-esqueleto y el conjunto de aristas E , el 1-esqueleto. Es decir, podemos escribir su realización como el espacio cociente

$$V \sqcup E \times [0, 1] / s(e) \sim (e, 0) \wedge r(e) \sim (e, 1).$$

Por otra parte, dado un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) que actúa como transformaciones de un espacio topológico X , cada órbita $\Gamma(x)$ es el conjunto de vértices de un grafo $\bar{\Gamma}(x)$. Ahora nuestro interés es cómo reunir todas estas realizaciones geométricas en un mismo espacio. Para conseguirlo, consideramos el espacio topológico X , los paquetes de aristas dadas por los homeomorfismos del conjunto de generadores Σ y definimos

$$\widetilde{M} = X \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \text{dom}(\sigma) \times \{\sigma\} \times [0, 1].$$

Ahora, definiremos la siguiente relación de equivalencia sobre el espacio \widetilde{M} :

$$x \sim (x, \sigma, 0) \quad \text{y} \quad \sigma(x) \sim (x, \sigma, 1),$$

si $x \in \text{dom}(\sigma)$. Denotamos por $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ (la misma notación que utilizábamos para los grafos de Cayley) al cociente de \widetilde{M} por esta relación de equivalencia, y por $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ a la proyección cociente. Además, denotaremos por \mathcal{F} a la descomposición de $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ en los grafos $\bigsqcup \bar{\Gamma}(x)$.

5.1. Teoremas de realización

Teorema 5.1 (de realización geométrica [21, 22]). *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado que actúa sobre un espacio topológico X . Si la función de valencia es continua, entonces $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ es un espacio metrizable, localmente compacto y separable, dotado de una foliación por grafos \mathcal{F} , que llamaremos espacio foliado de Cayley de (Γ, Σ) . Además X es la transversal canónica formada por los vértices de las hojas y el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} reducido a X coincide con Γ . Si X es compacto, entonces su realización geométrica $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ también lo es.*

Demostración. Nuestro objetivo es construir un atlas foliado adaptado a \mathcal{F} . Primero conviene observar que el espacio X es un cerrado de $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$, ya que es homeomorfo al cociente del cerrado saturado $\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \text{dom}(\sigma) \times \{\sigma\} \times [0, 1]$.

Por hipótesis, la función de valencia es continua, luego, para cada $x \in X$, la función de valencia es constante sobre un abierto cerrado maximal $X_x = \text{val}_{\Sigma}^{-1}(\text{val}_{\Sigma}(x))$ que contiene a x . Ahora, para cada $y \in X_x$, definimos el conjunto $\Sigma_y^+ = \{\sigma \in \Sigma : y \in \text{dom}(\sigma)\}$ y $\Sigma_y^- = \{\sigma \in \Sigma : y \in \text{im}(\sigma)\}$. Así, la unión de ambos conjuntos $\Sigma_y = \Sigma_y^+ \cup \Sigma_y^-$ tiene el mismo número de elementos que Σ_x . De hecho, el conjunto

$$U_x = X_x \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Sigma_x^+} \text{dom}(\sigma) \right) \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Sigma_x^-} \text{im}(\sigma) \right)$$

verifica que:

$$\Sigma_y^+ = \Sigma_x^+ \text{ y } \Sigma_y^- = \Sigma_x^- \quad (5.1)$$

para todo $y \in U_x$, debido a que el conjunto Σ_y^+ es un subconjunto de Σ_x^+ que tiene el mismo cardinal que éste (análogo para Σ_y^-). Por tanto

$$U_x = U_y \quad (5.2)$$

para todo $y \in U_x$. Ahora bien, como la función valencia está acotada superiormente por $2\#\Sigma$, que son el máximo número de aristas posibles incidentes en un vértice, los conjuntos U_x forman un recubrimiento abierto finito de X . Además, si X es compacto, cada uno de estos abiertos es relativamente compacto.

Dado $x \in X$, definimos el abierto V_x como el cociente del abierto saturado

$$\tilde{V}_x = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^+} U_x \times \{\sigma\} \times [0, \frac{1}{2}) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^-} U_x \times \{\sigma\} \times [\frac{1}{2}, 1).$$

Sea $E(x)$ el espacio cociente obtenido al cocientar $\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^+} \{\sigma\} \times [0, \frac{1}{2}) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^-} \{\sigma\} \times [\frac{1}{2}, 1)$ por la relación de equivalencia que identifica los puntos $(\sigma, 0)$ y $(\sigma, 1)$. El espacio $E(x)$ se puede interpretar como la bola de centro x y radio $\frac{1}{2}$ en $\bar{\Gamma}$. De las condiciones (5.1) y (5.2) deducimos que $E(x) = E(y)$ para cada $y \in U_x$.

El homeomorfismo canónico

$$\tilde{V}_x \cong U_x \times \left(\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x} \{\sigma\} \times [0, \frac{1}{2}) \right)$$

induce un homeomorfismo entre los cocientes $\varphi_x : V_x \rightarrow U_x \times E(x)$. Por otro lado, para cada $x \in X$ y cada $\sigma \in \Sigma_x^+$, definimos el abierto V_x^σ como el cociente del abierto saturado $\tilde{V}_x^\sigma = U_x \times \{\sigma\} \times (0, 1)$. En este caso $\pi : \tilde{V}_x^\sigma \rightarrow V_x^\sigma$ es un homeomorfismo y el homeomorfismo canónico entre \tilde{V}_x^σ y $U_x \times (0, 1)$ induce otro homeomorfismo $\varphi_x^\sigma : V_x^\sigma \rightarrow U_x \times (0, 1)$. Nos falta comprobar ahora que las cartas (V_x, φ_x) y $(V_x^\sigma, \varphi_x^\sigma)$ forman un atlas foliado de \mathcal{F} . Para comprobar esto supondremos, sin pérdida de generalidad, que los dominios de los elementos de Σ son abiertos-cerrados de X para que las condiciones (5.1) y (5.2) nos garanticen que, tanto los abiertos V_x como los V_x^σ o bien son disjuntos, o bien son iguales.

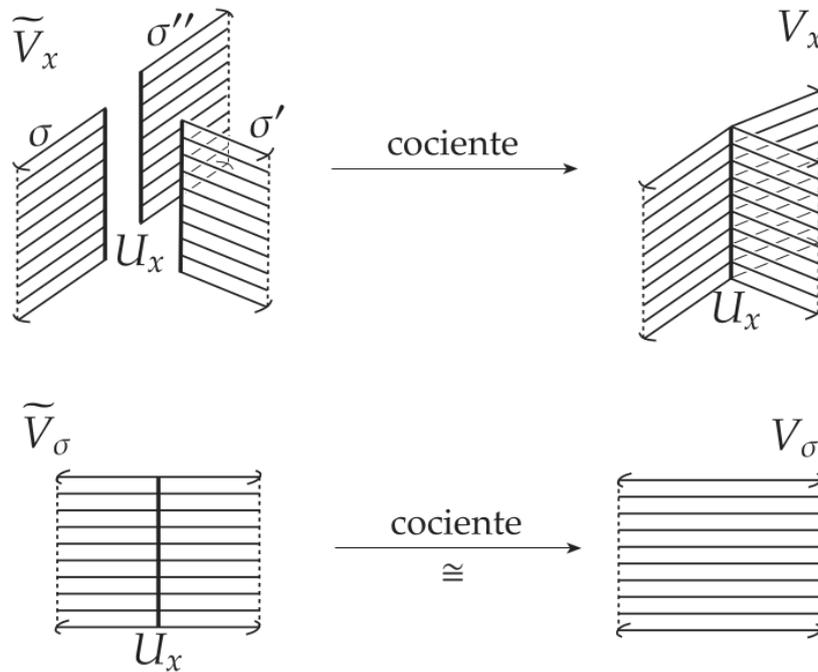


Figura 5.1: En la figura se ilustra el paso al cociente de los abiertos \tilde{V}_x .

Para los abiertos V_x , deducimos que estos solo intersecan a las cartas V_y^σ . Además, si $V_x \cap V_y^\sigma \neq \emptyset$, entonces tenemos que diferenciar los dos siguientes casos $x \in U_y$ o $x \notin U_y$:

- (1) $x \in U_y$.

En este caso, primero deducimos que $U_x = U_y$, luego podemos suponer $x = y$. De esta forma la intersección $V_x \cap V_x^\sigma$ se corresponde con el conjunto

$$\{(z, [(\sigma, t)]) \in U_x \times E(x) : (z, t) \in U_x \times (0, \frac{1}{2}) \vee (z, t) \in \sigma(U_x) \cap U_x \times (\frac{1}{2}, 1)\}$$

en función de las coordenadas de V_x . Ahora bien, la intersección $\sigma(U_x) \cap U_x$ es vacía salvo en el caso de que σ pertenezca al conjunto $\Sigma_x^+ \cap \Sigma_x^-$. El cambio de coordenadas se escribe entonces como:

$$(z, [(\sigma, t)]) \mapsto \begin{cases} (z, t), & \text{si } (z, t) \in U_x \times (0, \frac{1}{2}), \\ (\sigma(z), 1 - t), & \text{si } (z, t) \in \sigma(U_x) \cap U_x \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

De esta forma es claro que se respeta la estructura producto de $U_x \times E(x)$ y $U_x \times (0, 1)$.

(2) $x \notin U_y$.

En este caso, al no estar x en U_y , $\sigma(x') = x$ para cierto $x' \in U_y$. Además podemos suponer que $\sigma(y) = x$ ya que en otro podríamos reemplazar y por otro punto y' de U_y que cumpla esto. Así, la intersección V_y^σ se corresponde con el conjunto

$$\{(z, t) \in U_y \times (0, 1) : (\sigma(z), t) \in U_{\sigma(y)} \times (\frac{1}{2}, 1) \vee (z, t) \in U_y \cap \sigma^{-1}(U_{\sigma(y)}) \times (0, \frac{1}{2})\}$$

respecto de las coordenadas de V_y^σ . Entonces, igual que en el caso anterior, el cambio de coordenadas toma la siguiente forma

$$(z, t) \mapsto \begin{cases} (z, t), & \text{si } (z, t) \in U_x \times (0, \frac{1}{2}), \\ (\sigma(z), 1 - t), & \text{si } (z, t) \in \sigma(U_x) \cap U_x \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

De esta forma, la familia

$$\mathcal{A} = \{(V_x, \varphi_x), (V_x^\sigma, \varphi_x^\sigma) : x \in X, \sigma \in \Sigma_x^+\},$$

es un atlas foliado finito que define una foliación por grafos sobre $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$. Esta foliación es obviamente \mathcal{F} . Además, si X es compacto, las cartas del atlas \mathcal{A} son relativamente compactas, de manera que su realización geométrica $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ también es compacta. \square

Observación 5.2. (1) El anterior teorema sigue verificándose para cualquier pseudogrupos Γ dotado de un sistema de generadores Σ tal que Σ_x sea finito para cada $x \in X$. De esta forma nos garantizamos que la estructura grafada de las órbitas $\bar{\Gamma}(x)$ sea localmente finita. En este caso, la continuidad de la función valencia nos proporciona un atlas foliado numerable.

(2) Si la función val_Σ es constante e igual a 2, es decir si los grafos $\bar{\Gamma}(x)$ son 2-regulares, entonces la laminación por grafos \mathcal{F} es un flujo. De hecho, si X es una variedad, el grafo de Cayley del pseudogrupos $\mathbb{G}(\Gamma, \Sigma)$ también es una variedad. Es un hecho conocido que cualquier pseudogrupos de transformaciones se puede realizar como flujo sobre una variedad no compacta, sin embargo, esta realización modifica la estructura métrica de las órbitas. En nuestro caso, las métricas de las hojas y de las órbitas coinciden salvo casi-isometría.

Por el teorema anterior, cualquier pseudogrupo grafado cuya función de valencia sea continua se puede realizar como pseudogrupo de holonomía de un espacio foliado por grafos. Lo que dice el siguiente teorema es que podemos sustituir los espacios foliados por grafos por laminaciones de verdad.

Teorema 5.3 (de engorde, [9, 21]). *Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ el espacio foliado de Cayley de un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) de valencia continua. Entonces existe una laminación (M, \mathcal{L}) tal que el conjunto de vértices de \mathfrak{X} es una transversal completa y cerrada de (M, \mathcal{L}) y los pseudogrupos de holonomía de \mathcal{F} y de \mathcal{L} coinciden al reducirlos a dicha transversal. Además las hojas de \mathcal{F} son casi-isométricas a las hojas de \mathcal{L} .*

5.2. Sistemas de generación compacta

Si una laminación compacta (M, \mathcal{L}) está modelada transversalmente por el conjunto de Cantor, entonces el eje de un atlas foliado es unión numerable y disjunta de conjuntos abiertos del Cantor, es decir, se trata de un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional (lo que significa que a cada punto se le puede asociar una base de conjuntos abiertos-cerrados). Como hemos observado en el capítulo anterior, esto implica que la función de valencia del pseudogrupo de holonomía es continua. En esta sección estudiaremos los pseudogrupos que actúan sobre los espacios 0-dimensionales y comparten esta propiedad.

Lema 5.4. *Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones sobre un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional. Entonces, si existe un abierto relativamente compacto cortando a todas las órbitas del pseudogrupo Γ , existe también un abierto compacto que corta a todas las Γ -órbitas*

Demostración. Por ser X localmente compacto y 0-dimensional, existen entornos compactos alrededor de todos los puntos de X . Entonces, dado Y un abierto localmente compacto que corta a todas las Γ -órbitas, podemos recubrir su clausura, \overline{Y} por una familia de compactos que además podemos escoger finita por ser \overline{Y} compacto. Por tanto, la unión de esta familia será un abierto, por ser unión de abiertos, pero también un compacto, ya que la familia es finita y todos son compactos. Además, esta unión contiene a Y , luego corta a todas las Γ -órbitas. \square

Esto significa que los espacios foliados localmente compactos modelados transversalmente por el conjunto de Cantor siempre poseen una transversal completa cerrada, lo que es coherente con el hecho de que los espacio foliados por grafos tengan esa misma propiedad. La pregunta natural es conocer si el pseudogrupo de holonomía reducido a dicha transversal admite un buen sistema de generadores.

Teorema 5.5. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones sobre un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional X . Si Y es un abierto relativamente compacto que corta a todas las órbitas del pseudogrupo, entonces*

cualquier sistema de generación compacta define una estructura de grafo cuya función valencia es continua.

Demostración. Por el lema anterior el abierto Y puede escogerse directamente compacto. Sea Σ_Y un sistema de generación compacta para Y , que sabemos que existe en virtud del lema 3.17. Por definición, dada una transformación $\sigma \in \Sigma_Y$, existe otra aplicación $\tilde{\sigma} \in \Gamma$ tal que $\text{dom}(\sigma) \subset \text{dom}(\tilde{\sigma})$ y su restricción $\tilde{\sigma}|_{\text{dom}(\sigma)} = \sigma$. Así, por ser $\text{dom}(\sigma) \subset Y$ relativamente compacto, se puede recubrir por una cantidad finita de abiertos compactos contenidos en $\text{dom}(\tilde{\sigma})$. Entonces, la unión de esta familia finita es un abierto de X que denotaremos por X_σ . Tenemos entonces que $\text{dom}(\sigma) \subset X_\sigma \subset \text{dom}(\tilde{\sigma})$, de manera que

$$\text{dom}(\sigma) = Y \cap \text{dom}(\tilde{\sigma}) = Y \cap X_\sigma.$$

Luego, al haber escrito $\text{dom}(\sigma)$ como intersección de dos abiertos compactos de X , deducimos que $\text{dom}(\sigma)$ es un abierto compacto, y por tanto también cerrado debido al carácter Hausdorff de X .

De la expresión de la función valencia dada en 4.2 obtenemos

$$\text{val}_{\Sigma_Y} = \sum_{\sigma \in \Sigma_Y} (\chi_{\text{dom}(\sigma)}(x) + \chi_{\text{im}(\sigma)}(x)).$$

Ahora, como tanto $\text{dom}(\sigma)$ como $\text{im}(\sigma)$ son abiertos cerrados, las aplicaciones características correspondientes son continuas, y por tanto también lo es val_{Σ_Y} por ser suma finita de aplicaciones continuas. \square

La combinación de los resultados anteriores muestra que, desde un punto transverso, las laminaciones tansversalmente 0-dimensionales, los espacios foliados por grafos y los pseudogrupos grafados con función de valencia continua son equivalentes.

5.3. Acciones de grupos

Como acabamos de ver, el hecho de que la función de valencia sea continua es una condición restrictiva que nos dice que la dinámica tiene lugar en un espacio 0-dimensional (con una flexibilidad similar a un espacios medible). El siguiente teorema puede interpretarse como una generalización del teorema de Feldmann-Moore recordado en el ejemplo 2.3.

Teorema 5.6. *Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado actuando sobre un espacio topológico X de modo que la función de valencia es continua. Entonces (Γ, Σ) es equivalente en el sentido de Haefliger y en el sentido de Kakutani a una acción de un grupo finitamente generado.*

Demostración. En realidad, la prueba es también una adaptación de la demostración de J. Feldman y C.C. Moore para relaciones medibles [6]. Tomamos, para cada $\sigma \in \Sigma$, una copia $D_\sigma = \text{dom}(\sigma) \times \{\sigma\}$ de $\text{dom}(\sigma)$. Definimos el espacio

$$X' = X \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} D_\sigma.$$

Definimos las aplicaciones $f_\sigma, g_\sigma : X' \rightarrow X'$ de la siguiente manera:

$$f_\sigma(x') = \begin{cases} (x', \sigma), & \text{si } x' \in \text{dom}(\sigma), \\ p_1(x'), & \text{si } x' \in D_\sigma \text{ y,} \\ x' \in X' & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$g_\sigma(x') = \begin{cases} (\sigma^{-1}(x'), \sigma), & \text{si } x' \in \text{im}(\sigma), \\ \sigma(p_1(x')), & \text{si } x' \in D_\sigma \text{ y,} \\ x' \in X' & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde p_1 es proyección sobre el primer factor de D_σ en X , es decir, $p_1(x, \sigma) = x$ para cada $s(x, \sigma) \in D_\sigma$. Claramente f_σ y g_σ son involuciones, y como la función de valencia es continua, tanto $\text{dom}(\sigma)$ como $\text{im}(\sigma)$ son abiertos cerrados, luego sabemos que f_σ y g_σ son homeomorfismos. Consideremos G el grupo de homeomorfismos de X' generado por f_σ y g_σ y sea Γ' el pseudogrupo de transformaciones locales de X' obtenidas por la restricción de los homeomorfismos de G . tanto G como Γ' están generados por la familia $\Sigma' = \{f_\sigma, g_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, y la estructura de grafo sobre cada Γ' -órbita coincide con la estructura de grafo de Cayley inducida por el sistema de generadores Σ' sobre G . Ahora bien, $g_\sigma \circ f_\sigma|_{\text{dom}(\sigma)} = \sigma$, de lo que deducimos que $\Gamma = \Gamma'|_X$ y que $d_{\Sigma'}(x, y) = 2d_\Sigma(x, y)$ para cada par $x, y \in X$. Luego concluimos que (Γ, Σ) y (Γ', Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani. \square

Corolario 5.7. *Un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional es equivalente en el sentido de Haefliger y de Kakutani a una acción de un grupo finitamente generado.*

Gracias a este resultado, podemos realizar estos pseudogrupos como restricciones a un Cantor de pseudogrupos de transformaciones sobre la esfera S^2 . Para ello nos serviremos de un teorema (véase el capítulo 13 de [23]) que nos asegura que un homeomorfismo cualquiera del Cantor en sí mismo se puede extender a la esfera S^2 .

Corolario 5.8. *Un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional está inducido (salvo equivalencia de Haefliger y Kakutani) por un grupo de transformaciones de la esfera bidimensional.*

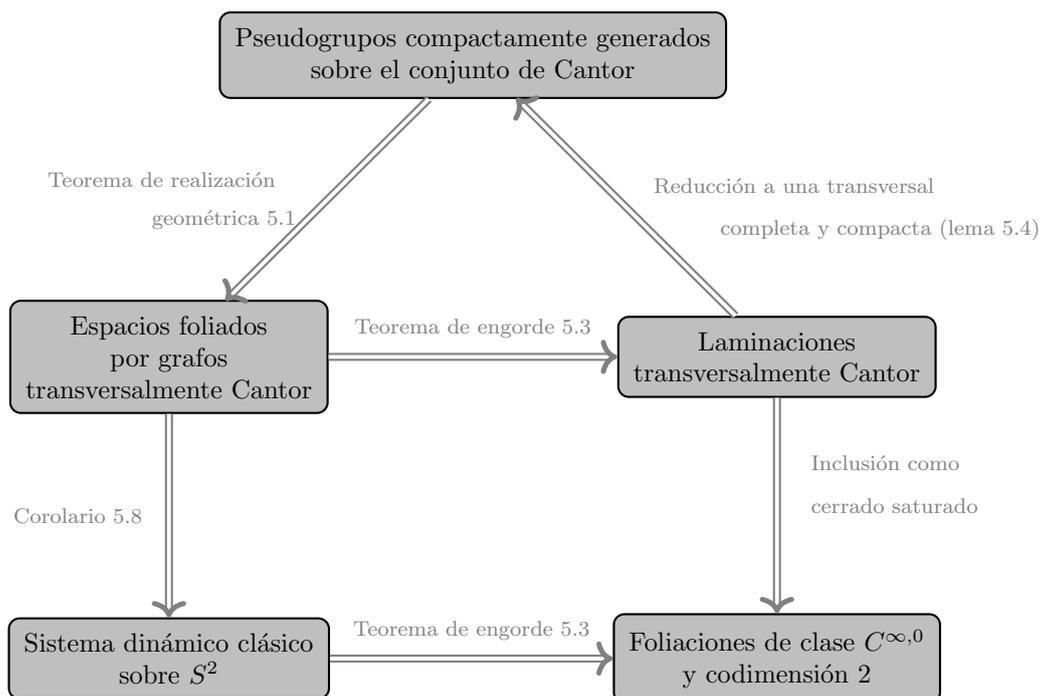
Demostración. En virtud del corolario anterior, podemos realizar el pseudogrupo por una acción de un grupo G de homeomorfismos del conjunto Cantor sobre sí mismo. Cada homeomorfismo $f \in G$ se extiende entonces a un homeomorfismo $F : S^2 \rightarrow S^2$, de forma que obtenemos una acción definida sobre la esfera que extiende a la primera. \square

Volviendo al caso de una laminación (M, \mathcal{L}) modelada transversalmente por el conjunto de Cantor, podemos sacar algunas conclusiones a partir de estos resultados. Gracias al teorema 5.5 podemos garantizar la existencia de una transversal completa homeomorfa

al conjunto de Cantor X de tal manera que el pseudogrupo de holonomía Γ se puede dotar de un sistema de generadores finito Σ tal que la aplicación valencia, $\text{val}_\Sigma : X \rightarrow \mathbb{N}$ sea continua. Observemos que los dominios e imágenes de las transformaciones de Σ son también homeomorfos al Cantor. Entonces, en virtud del lema 5.4, el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) es equivalente (en el sentido de Haefliger y Kakutani) a una acción de un grupo finitamente generado sobre otro conjunto de Cantor, que además, en virtud del corolario 5.8, podemos extender a una acción sobre la esfera S^2 . Esta información la podemos resumir en el siguiente corolario:

Corolario 5.9. *La dinámica de una laminación compacta modelada transversalmente por un conjunto de Cantor es realizable por un sistema dinámico clásico (es decir, existe una equivalencia de Haefliger entre el pseudogrupo de holonomía y una acción de un grupo finitamente generado sobre un conjunto de Cantor, que además respeta el tipo de casi-isometría de las órbitas) inducido por una acción sobre la esfera S^2 .*

El siguiente diagrama resume esta información.



Capítulo 6

Espacio de Gromov-Hausdorff

En este capítulo estudiaremos el espacio de Gromov-Hausdorff, un ejemplo de espacio foliado por grafos introducido por É. Ghys en [9]. Veremos que la estructura grafada de estos espacios proviene de un sistema de generadores del grupo subyacente, de un modo similar a como hacíamos con los grafos de Cayley o con los pseudogrupos grafados. El principal interés de este capítulo es estudiar en qué medida afecta a la estructura métrica del grafo asociado al espacio de Gromov-Hausdorff un cambio en el sistema de generadores sin alterar el grupo subyacente. Ya hemos visto en el teorema 1.42 que en el caso de los grafos de Cayley lo que teníamos era una relación de casi-isometría. Cabría esperar pues que hubiese también una relación de casi-isometría entre los espacios de Gromov-Hausdorff. Sin embargo, debido a que la métrica en estos espacios es una ultramétrica, esto no será cierto.

En adelante, igual que hacíamos al considerar los grafos de Cayley, G será un grupo finitamente generado y S un conjunto de generadores, normalmente simétrico, que no contiene al elemento neutro, i.e, $S = S^{-1}$ y $1 \notin S$.

6.1. Espacio de Gromov-Hausdorff

Definición 6.1. El espacio de *Gromov-Hausdorff* \mathcal{G} asociado al grafo de Cayley $\mathbb{G}(G, S)$ es el espacio formado por todos los subgrafos conexos de \mathbb{G} que contienen al neutro del grupo G (que denotaremos por 1), es decir,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{G}, S) = \{\mathbb{H} \subset \mathbb{G} : \mathbb{H} \text{ subgrafo conexo tal que } 1 \in \mathbb{H}\}$$

La condición de que el neutro sea un vértice de todos los grafos nos sirve para poder ‘compararlos’ entre sí, esto es, podemos darles una estructura de grafo enraizado con una raíz común a todos los elementos del espacio de Gromov-Hausdorff. Será precisamente este hecho el que nos permita definir una métrica comparando las bolas centradas en la raíz. La idea es que dos subgrafos de \mathcal{G} están más cerca cuanto mayor sea la bola alrededor del origen en la que ambos grafos coinciden. Para formalizar esta distancia necesitamos

introducir previamente el concepto de *radio de coincidencia*, que es una aplicación

$$R : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = \sup\{N \geq 0 : B_{\mathbb{H}}(1, N) = B_{\mathbb{H}'}(1, N)\},$$

esto es, el mayor de los radios para el cual las bolas cerradas centradas en 1 en \mathbb{H} y \mathbb{H}' coinciden. Cuando no haya lugar a ambigüedades hablaremos simplemente de radio para referirnos al radio de coincidencia. Una vez definido el radio, buscamos como función distancia una función positiva que disminuya a medida que aumenta el radio y que se anule cuando los dos grafos sean iguales, o lo que es lo mismo, cuando el radio de coincidencia sea infinito. Para ello escogemos

$$\begin{aligned} d : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow [0, 1] \\ (\mathbb{H}, \mathbb{H}') &\longmapsto e^{-R(\mathbb{H}, \mathbb{H}')}. \end{aligned}$$

Esta métrica definida sobre (\mathcal{G}, d) es lo que se conoce como la *métrica de Gromov-Hausdorff*.

Observación 6.2. En la definición de la distancia que define la métrica podíamos haber cogido cualquier otra función estrictamente decreciente positiva, por ejemplo $f(R) = \frac{1}{R+1}$.

Ejemplo 6.3. Sea L el grafo de Cayley de $\mathbb{Z} \times \{0\}$ respecto a $\{(1, 0)\}$, es decir, una copia del grafo de Cayley \mathbb{Z} con sistema de generadores $S = \{1\}$, que se puede ver en la figura 1.5. Este grafo es un subárbol del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 conjunto de generadores $S_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, que también se puede ver en la figura 1.4. Consideremos ahora los árboles L' y L'' obtenidos añadiendo a L una arista vertical en los vértices $(0, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente, como se puede ver en la figura 6.1. Ahora, a partir de la figura, es obvio que $B_L(0, 1) \neq B_{L'}(0, 1)$ mientras que $B_L(0, 1) = B_{L''}(0, 1)$ y $B_L(0, 2) \neq B_{L''}(0, 2)$. Por lo tanto, podemos afirmar que $d(L, L') = 1$ y que $d(L, L'') = e^{-1}$.



Figura 6.1: Los subárboles de $\mathbb{G}(\mathbb{Z}^2, \{(1, 0), (0, 1)\})$ L' y L'' respectivamente.

Proposición 6.4. *La distancia d es una ultramétrica, esto es,*

$$d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') \leq \max\{d(\mathbb{H}, \mathbb{H}''), d(\mathbb{H}', \mathbb{H}'')\} \quad (6.1)$$

para cada $\mathbb{H}, \mathbb{H}', \mathbb{H}'' \in \mathcal{G}$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{\mathbb{H}}(1, N) = B_{\mathbb{H}'}(1, N) \quad \text{y} \quad B_{\mathbb{H}'}(1, N) = B_{\mathbb{H}''}(1, N),$$

entonces

$$B_{\mathbb{H}}(1, N) = B_{\mathbb{H}''}(1, N),$$

luego

$$R(\mathbb{H}, \mathbb{H}'') \geq \min\{R(\mathbb{H}, \mathbb{H}'), R(\mathbb{H}', \mathbb{H}'')\}$$

que prueba la desigualdad 6.1. \square

Esta desigualdad tiene importantes consecuencias en las propiedades de la distancia: todas las bolas abiertas y cerradas con esta métrica y cualquier punto de éstas es su centro. Podemos deducir además el siguiente corolario.

Corolario 6.5. *El espacio $\mathcal{G}(G, S)$ es totalmente desconexo, 2-numerable y separable.*

Demostración. El espacio es totalmente desconexo porque los puntos son abiertos y cerrados. La 2-numerabilidad y la separabilidad se deducen observando que hay una cantidad numerable de bolas para cada radio y por consiguiente, como los radios toman valores naturales, una cantidad de bolas numerable en general. \square

Definición 6.6. Decimos que una sucesión (\mathbb{H}_n) de elementos en el espacio de Gromov-Hausdorff converge a un grafo \mathbb{H} si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbb{H}_n, \mathbb{H}) = 0.$$

Equivalentemente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\mathbb{H}_n, \mathbb{H}) = \infty. \quad (6.2)$$

Sea

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(G, S) = \{\mathbb{H} \in \mathcal{G}(G, S) : \mathbb{H} \text{ es un árbol}\} \subset \mathcal{G}(G, S)$$

el conjunto de los árboles de $\mathcal{G}(G, S)$. Usando la condición 6.2, podemos ver que $\mathcal{T}(G, S)$ es un cerrado de $\mathcal{G}(G, S)$. En efecto, sea $(\mathbb{H}_n) \subset \mathcal{T}(G, S)$ una sucesión de árboles convergente a un grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}(G, S)$. Para cualquier lazo $\sigma \neq 1$ del grafo \mathbb{H} , existe un número natural N_σ de manera que σ está contenido en la bola $B_{\mathbb{H}}(1, N_\sigma)$. Ahora bien, en virtud de la condición 6.2, podemos garantizar la existencia de un entero positivo N_0 que verifica que $B_{\mathbb{H}_n}(1, N_\sigma) = B_{\mathbb{H}}(1, N_\sigma)$, para cualquier $n \geq N_0$. Concluimos entonces que \mathbb{H}_n no es un árbol si $n \geq N_0$, pues contiene una copia del lazo σ .

Proposición 6.7. *El espacio métrico $(\mathcal{G}(G, S), d)$ es compacto.*

Demostración. Tomamos una sucesión $\mathbb{H}_n \in \mathcal{G}(G, S)$. Primero conviene observar que solamente hay una cantidad finita de grafos de diámetro 2, de nuevo se trata de una cuestión simple de combinatoria observando que el conjunto S , que determina las posibles aristas que pueden salir de cada vértice, es finito. Podemos entonces escoger una subsucesión $(\mathbb{H}_{1,n})$ de forma que

$$B_{\mathbb{H}_{1,n}}(1, 1) = \mathbb{H}_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $\mathbb{H}_1 \in \mathcal{G}$ un grafo de diámetro 2. Repitiendo este proceso, si $(\mathbb{H}_{k,n})$ es una subsucesión de (\mathbb{H}_n) tal que

$$B_{\mathbb{H}_{k,n}}(1, k) = \mathbb{H}_k,$$

con $\mathbb{H}_k \in \mathcal{G}$ de diámetro $2k$. Entonces, razonando por inducción, podemos construir una subsucesión $\mathbb{H}_{k+1,n}$ de (\mathbb{H}_n) de forma que

$$B_{\mathbb{H}_{k+1,n}}(1, k+1) = \mathbb{H}_{k+1},$$

siendo \mathbb{H}_{k+1} un subgrafo de diámetro $2(k+1)$ que contiene a \mathbb{H}_k . Tenemos por tanto una sucesión creciente de grafos finitos:

$$\mathbb{H}_1 \subset \dots \subset \mathbb{H}_k \subset \dots$$

Si definimos $\mathbb{H} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_k$, entonces \mathbb{H} es el grafo límite de la sucesión diagonal $(\mathbb{H}_{k,k})$. En efecto, por construcción, la función $R(\mathbb{H}_{k,k}, \mathbb{H}) \geq k$, luego

$$d(\mathbb{H}_{k,k}, \mathbb{H}) \leq e^{-k} \rightarrow 0.$$

□

Como consecuencia de la prueba de la proposición anterior, cualquier grafo infinito se puede obtener como límite de sucesiones de grafos finitos, las bolas centradas en 1. Además, si \mathbb{H} es un grafo finito, la bola en $\mathcal{G}(G, S)$ de centro \mathbb{H} y radio $\max\{d_{\mathbb{H}}(1, x) : x \in \mathbb{H}\}$ se reduce al grafo \mathbb{H} . Luego el conjunto derivado \mathcal{G}' de $\mathcal{G}(G, S)$, está formado por los grafos infinitos.

Ejemplo 6.8. (1) Si G es un grupo finito, entonces \mathcal{G} también lo es y, por lo que hemos visto, está dotado de la topología discreta.

(2) Si $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$, entonces el conjunto derivado \mathcal{G}' está formado por dos sucesiones (correspondientes a los subgrafos $[-n, +\infty]$ y $[-\infty, n]$ de \mathbb{R}) que convergen al grafo de Cayley $\mathbb{G}(\mathbb{Z}, S) = \mathbb{R}$. Luego el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} es infinito numerable.

Observación 6.9. Si G es no finito, el espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}(G, S)$ es infinito no numerable salvo en el caso $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$.

Proposición 6.10 ([22] Proposición 3.4). *Si G es infinito y no estamos en el caso $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$, entonces el conjunto derivado de $\mathcal{G}(G, S)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. En virtud de las proposición 6.7 y del corolario 6.5, $\mathcal{G}(G, S)$ es un espacio compacto y totalmente desconexo, luego nos basta probar que \mathcal{G} es perfecto, i.e, $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$. Como ya vimos, todo grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ es límite de grafos finitos, tomando como sucesión las bolas centradas en el origen de radio n y "extendiéndolas" en determinada dirección. El proceso es el siguiente: dado n natural, tomamos un camino infinito $\varepsilon_n \subset \mathbb{G}$ de manera que

$$\varepsilon_n \cap B_{\mathbb{H}}(1, n) = \{x_n\} \in \partial B_{\mathbb{H}}(1, n).$$

Esta elección del camino es posible porque \mathbb{G} es infinito y conexo. Se tiene por tanto que la sucesión $\mathbb{H}_n^{\varepsilon_n} = B_{\mathbb{H}}(1, n) \cup \varepsilon_n$ converge a \mathbb{H} .

Si quisiésemos podríamos además considerar caminos ε_n tales que $\mathbb{H}_n^{\varepsilon_n} \neq \mathbb{H}$ salvo en el caso de $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$. Supongamos que existe un natural n para el cual cualquier camino ε en las condiciones anteriores verifique que $\mathbb{H}_n^{\varepsilon} = \mathbb{H}$. En estas condiciones, todos los caminos serían el mismo por lo que la valencia de cualquier vértice de ε es 2. En virtud de la proposición 1.23, G actúa por automorfismos sobre \mathbb{G} , luego la valencia de cualquier vértice de \mathbb{G} es 2 y por consiguiente \mathbb{G} es una recta. Se tiene por tanto que $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$. \square

Podemos deducir a partir de esta proposición que el conjunto derivado de $\mathcal{T}(G, S)$ son los árboles infinitos y es homeomorfo al conjunto de Cantor salvo en el caso indicado. Podemos observar también que, si $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$, entonces $\mathcal{G}(G, S) = \mathcal{T}(G, S)$.

Proposición 6.11. *Si G es un grupo infinito, entonces el subespacio $\mathcal{T}(G, S)$ no es abierto salvo cuando el grupo G es un grupo libre y S es un sistema canónico de generadores, en cuyo caso $\mathcal{T}(G, S) = \mathcal{G}(G, S)$.*

Demostración. Si G no es un grupo libre, o S contiene relaciones, podemos encontrar un grafo tan cerca como queramos de un árbol. Por hipótesis, existe un lazo no trivial σ basado en el neutro en el grafo $\mathbb{G}(G, S)$. Consideremos un árbol finito $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ y un número natural n . Por ser los árboles conexos y $1 \in \mathbb{T}$, sabemos que existe $x \in T$ de manera que $d(1, x) = n$. Tenemos pues que el grafo $\mathbb{T}' = \mathbb{T} \cup \sigma$ verifica que $R(\mathbb{T}', \mathbb{T}) = n$. Por construcción, el interior de \mathcal{T} está formado por los árboles finitos que contienen al elemento neutro 1.

En cambio, si G es un grupo libre, entonces \mathbb{G} es un árbol y entonces $\mathcal{T}(G, S) = \mathcal{G}(G, S)$. \square

Observación 6.12. El conjunto $\mathcal{T}(G, S)'$ es un conjunto de Cantor con interior vacío contenido en el Cantor $\mathcal{G}(G, S)'$ excepto en el caso de los grupos finitos y los grupos libres.

6.2. Dinámica del espacio de Gromov-Hausdorff

En adelante denotaremos $\mathcal{G}(G, S)$, $\mathcal{T}(G, S)$ y $\mathbb{G}(G, S)$ simplemente por \mathcal{G} , \mathcal{T} y \mathbb{G} siempre que no exista ambigüedad.

Se define el grafo trasladado de un grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ como el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(g\mathbb{H}) = \{gx : x \in \mathbb{H}\}$ y su conjunto de aristas es $E(g\mathbb{H}) = \{ge : e \in \mathbb{H}\}$. Obsérvese que para que $g\mathbb{H}$ siga siendo un grafo de \mathcal{G} necesitamos que $g^{-1} \in \mathbb{H}$ (de hecho es también suficiente) ya que de otro modo el neutro $1 \in G$ no sería un vértice de $g\mathbb{H}$. Geométricamente, el grafo $g\mathbb{H}$ es el grafo resultante de mover el punto base de \mathbb{H} de 1 a g^{-1} .

Sobre el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} se puede definir una relación de equivalencia natural \mathcal{R} de la siguiente forma

$$\mathbb{H} \mathcal{R} \mathbb{H}' \Leftrightarrow g^{-1}\mathbb{H} = \mathbb{H}'$$

para cierto $g \in \mathbb{H}$. Por tanto, las clases de esta relación de equivalencia están formadas por los grafos obtenidos de cambiar el punto base a todos los vértices de \mathbb{H} (sin salirnos del espacio \mathcal{G}):

$$\mathcal{R}(\mathbb{H}) = \{g^{-1}\mathbb{H} : g \in \mathbb{H}\}.$$

Gracias a esta relación de equivalencia seremos capaces de definir una estructura de grafo simplicial sobre \mathcal{G} en la cual el propio espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} será el conjunto de vértices y cada componente conexa de dicha estructura simplicial nos dará una \mathcal{R} -clase. En otras palabras, se realizará cada clase $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$ como un conjunto de vértices de un modo similar a como hacíamos al dotar de una estructura grafada a las órbitas de un pseudogrupo de transformaciones. Diremos que $\mathbb{H}', \mathbb{H}'' \in \mathcal{R}[\mathbb{H}]$ están unidos por una arista si $\mathbb{H}' = s^{-1}\mathbb{H}''$ para algún $s \in S$.

Observación 6.13. El conjunto \mathcal{T} es un cerrado saturado por la relación de equivalencia \mathcal{R} .

Es importante resaltar que un grafo perteneciente a $\mathcal{R}[\mathbb{H}]$ está determinado por un vértice de \mathbb{H} . Ahora bien, dos vértices v y $v' \in \mathbb{H}$ determinan el mismo grafo si y solo si $\mathbb{H} = v'v^{-1}\mathbb{H}$, es decir, si $v'v^{-1} \in \text{Iso}(\mathbb{H}) = \{g \in G : g\mathbb{H} = \mathbb{H}\}$. Por lo tanto, el grafo $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$ es naturalmente isomorfo al grafo $\mathbb{H}/\text{Iso}(\mathbb{H})$. En particular, el grafo \mathbb{H} es una cubierta del grafo $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$ y el grupo $\text{Iso}(\mathbb{H})$ es el grupo de transformaciones de la cubierta. Además, si \mathbb{H} es un árbol, \mathbb{H} es de hecho la cubierta universal de $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$.

Ejemplo 6.14. Sea L el árbol definido en el ejemplo 6.3. Como $L = L + (1, 0)$, la clase de $\mathcal{R}[L]$ se reduce a $\{L\}$ y existe una sola arista en forma de bucle en el grafo $\overline{\mathcal{R}}[L]$ como se muestra en la figura 6.2. Sin embargo, si consideramos el subárbol L^+ de L cuyos vértices son los enteros no negativos, la isotropía en este caso es trivial ($\text{Iso}(L) = \{(0, 0)\}$), y por tanto el grafo $\overline{\mathcal{R}}[L^+]$ es isomorfo a L^+ .

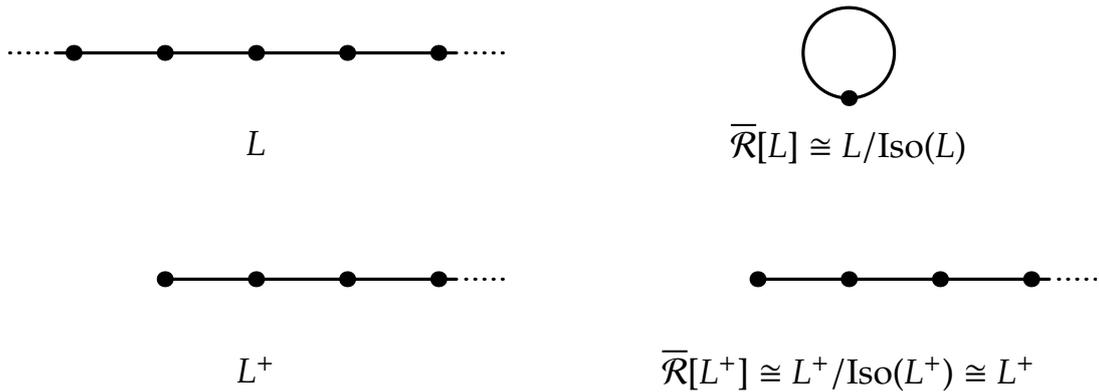


Figura 6.2: A la izquierda los árboles L y L^+ y a la derecha sus clases de equivalencia.

Como se puede ver en [22], la minimalidad de la clausura $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$ equivale al carácter repetitivo de \mathbb{H} . Geométricamente, un grafo es *repetitivo* si no se puede determinar en qué punto del grafo nos encontramos observando únicamente un entorno de éste.

Estamos pensando entonces cada grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ como un vértice de $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$, de manera que tiene sentido considerar la función valencia. Ahora bien, como hemos visto, \mathbb{H} es una cubierta de $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$, luego es obvio que

$$\text{val}(\mathbb{H}) = \text{val}_{\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]}(\mathbb{H}) = \text{val}_{\mathbb{H}}(1_G).$$

Y por el mismo motivo se tiene que $\text{val}(g^{-1}\mathbb{H}) = \text{val}(g)$.

Lema 6.15. *La función de valencia $\text{val} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$ es continua.*

Demostración. Sean \mathbb{H} y $\mathbb{H}' \in \mathcal{G}$ tales que $d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') < 1$, lo que significa que las bolas centradas en el origen en ambos grafos coinciden en un radio mayor o igual a 1, es decir $B_{\mathbb{H}}(1_G, 1) = B_{\mathbb{H}'}(1_G, 1)$. Luego $\text{val}(\mathbb{H}) = \text{val}_{\mathbb{H}}(1_G) = \text{val}_{\mathbb{H}'}(1_G) = \text{val}(\mathbb{H}')$. Por lo tanto la valencia es localmente constante y, por consiguiente, continua. \square

La relación de equivalencia \mathcal{R} puede describirse mediante un pseudogrupo de transformaciones, y la estructura de grafo de las \mathcal{R} -clases mediante un sistema finito de generadores de dicho pseudogrupo. Es decir, la estructura de grafo de las \mathcal{R} -clases coincide con la de un pseudogrupo grafado. En efecto, cada elemento $g \in G$ define una traslación

$$\begin{aligned} \tau_g : \{\mathbb{H} \in \mathcal{G} : g^{-1} \in \mathbb{H}\} &\longrightarrow \{g^{-1}\mathbb{H} \in \mathcal{G} : g^{-1} \in \mathbb{H}\} \\ \mathbb{H} &\longmapsto g^{-1}\mathbb{H}, \end{aligned}$$

cuyo dominio e imagen son abiertos cerrados de \mathcal{G} . Además cada una de estas aplicaciones es un homeomorfismo y la familia formada por todas estas traslaciones $\{\tau_g : g \in G\}$ genera un pseudogrupo de transformaciones Γ sobre \mathcal{G} . Basta observar para concluir que la relación orbital inducida por la acción de Γ sobre el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} es precisamente la relación \mathcal{R} .

Para dotar a este pseudogrupo de una estructura grafada congruente con la definida en \mathcal{R} hacemos lo siguiente: consideramos el sistema de generadores S de G que determina el espacio de Gromov-Hausdorff, es decir, el conjunto de generadores S tal que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$. A partir de este conjunto definimos la familia $\Sigma = \{\tau_s \in \Gamma : s \in S\}$ y el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) define la misma estructura de grafo que la dada en las clases de \mathcal{R} .

El lema 6.15 nos dice que la estructura de grafo es continua, luego podemos aplicar el teorema de realización geométrica 5.1 al pseudogrupo grafado (Γ, Σ) :

Definición 6.16. El espacio foliado de Cayley de (Γ, Σ) , denotado por $(\mathbb{G}, \mathcal{F})$, se denomina *espacio foliado por grafos de Gromov-Hausdorff*.

Por construcción, el espacio $(\mathbb{G}, \mathcal{F})$ presenta las siguientes propiedades:

- el espacio topológico \mathbb{G} es compacto,
- la foliación por grafos \mathcal{F} está transversalmente modelada por el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} ,

- \mathcal{G} es una transversal cerrada completa y el pseudogrupo de holonomía transverso para la transversal \mathcal{G} es Γ , en particular $\mathcal{F}|_{\mathcal{G}} = \mathcal{R}$,
- la función valencia está acotada por $2\#S$,
- la hoja $L_{\mathbb{H}} \in \mathcal{F}$ a través de $\mathbb{H} \in \mathcal{F}$ es isomorfa de forma natural a $\overline{\mathcal{R}}[\mathbb{H}]$.

6.3. Dependencia del sistema de generadores

Cabe ahora preguntarse qué es lo que ocurre con la estructura grafada del pseudogrupo cuando cambiamos el sistema de generadores del espacio de Gromov-Hausdorff asociado a un grupo fijado, esto es, la relación entre $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ y $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(G, S')$. De hecho, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S \subset S'$ por la propiedad transitiva, ya que lo que nos va a interesar es estudiar si los pseudogrupos son Haefliger equivalentes o Kakutani equivalentes.

En primer lugar observamos que dados S y S' ($S \subset S'$) dos sistemas de generadores de un mismo grupo G (finitamente generado), el grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ es un subgrafo recubridor del grafo de Cayley $\mathbb{G}' = \mathbb{G}(G, S')$, ya que el conjunto de vértices es el mismo.

Proposición 6.17. *El espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} es un subespacio métrico de \mathcal{G}' abierto y cerrado.*

Demostración. Recordemos que la métrica en este espacio estaba dada a partir del radio (de coincidencia) de la siguiente manera

$$R(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2) = \sup\{n \in \mathbb{N} : B_{\mathbb{H}_1}(1_G, n) = B_{\mathbb{H}_2}(1_G, n)\},$$

y

$$d(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2) = \exp(-R(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)) \in [0, 1].$$

Veamos entonces que $(\mathcal{G}, d) = (\mathcal{G}, d|_{\mathcal{G}})$ es un abierto cerrado. Para ver que \mathcal{G} es abierto basta observar que para todo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ la bola $B_{\mathbb{G}'}(\mathbb{H}, e^{-2}) \subset \mathcal{G}$ puesto que si $\mathbb{H}' \in \mathcal{G}' - \mathcal{G}$, entonces del origen sale una arista correspondiente a un generador de $S - S'$, de manera que $R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = 0$ lo que quiere decir que $d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = 1$, y así $\mathbb{H}' \notin B_{\mathbb{G}'}(\mathbb{H}, e^{-2})$. El mismo argumento sirve para probar que $\mathcal{G}' - \mathcal{G}$ es un abierto, luego \mathcal{G} es un subespacio métrico abierto y cerrado de \mathcal{G}' como queríamos probar. \square

Así, es claro que el subespacio \mathcal{G} es saturado por la relación de equivalencia \mathcal{R} definida sobre \mathcal{G}' , o, equivalentemente, por la acción del pseudogrupo Γ' generado por la traslación de los elementos de S' . Esto se debe a que la órbita

$$\Gamma'(\mathbb{H}) = \{g\mathbb{H} : g^{-1} \in \mathbb{H}\} \subset \mathcal{G}$$

puesto que desplazar los elementos de \mathbb{H} no añade aristas que no estuviesen en S . Por consiguiente, \mathcal{G} no corta a las órbitas del complementario $\mathcal{G}' - \mathcal{G}$ y los pseudogrupos Γ y Γ' no son equivalentes en el sentido de Haefliger (luego tampoco en el de Kakutani). Sin embargo, tenemos que $\Gamma'|_{\mathcal{G}} = \Gamma$ ya que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ y

$$\Gamma = \{\tau_g : \text{dom } \tau_g \subset \mathcal{G} \rightarrow \text{im } \tau_g \subset \mathcal{G} : g \in G\}$$

y

$$\Gamma' = \{\tau_g : \text{dom } \tau_g \subset \mathcal{G}' \rightarrow \text{im } \tau_g \subset \mathcal{G}' : g \in G\}.$$

Ejemplo 6.18. Consideremos los espacios de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{Z}, \{1, 2\})$ y $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(\mathbb{Z}, \{1, 2, 3\})$. Sean Γ y Γ' los pseudogrupos de transformaciones que inducen las relación de equivalencia de cambio de punto base en \mathcal{G} y \mathcal{G}' respectivamente. Sea $\mathbb{H} \subset \mathbb{Z}$ el subgrafo inducido en el conjunto $2\mathbb{Z}$, y consideramos la órbita $\Gamma'(\mathbb{H})$. Obviamente $\Gamma'(\mathbb{H}) = \Gamma(\mathbb{H})$, ya que sobre este grafo solamente actúa el generador 2 (que además está en la isotropía). Sea ahora $\mathbb{H}' \subset \mathbb{Z}, \{1, 2, 3\}$ el subgrafo formado por los múltiplos de 3 (ver figura 6.3). Ahora es claro que $\Gamma'(\mathbb{H}')$ (que de nuevo se reduce al propio grafo \mathbb{H}') no corta a \mathcal{G} , luego \mathcal{G} no corta a todas las órbitas.

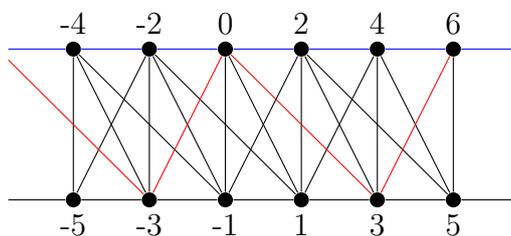


Figura 6.3: Los subgrafos $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ en azul y $\mathbb{H}' \in \mathcal{G}'$ en rojo del grafo de Cayley $\mathbb{G}(\mathbb{Z}, \{1, 2, 3\})$.

En realidad la observación anterior no es demasiado sorprendente si pensamos que el espacio de Gromov-Hausdorff de un grupo $G \not\cong \mathbb{Z}$ es enorme y contiene una infinidad no numerable de conjuntos saturados interesantes con dinámicas idénticas o diferentes. Sin ir más lejos, si dotamos a $G = \mathbb{Z}^2$ del sistema de generadores habitual $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ (véase la figura 1.4), los árboles obtenidos añadiéndole al eje horizontal aristas etiquetadas por $(0, 1)$ o $(0, -1)$ (como el descrito en la figura 6.3) forman un cerrado saturado orbitalmente equivalente al shift de Bernoulli. De hecho, podemos construir una infinidad no numerable de tales ejemplos disjuntos dos a dos.

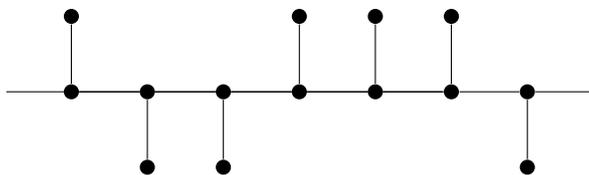


Figura 6.4: Árbol contenido en el grafo de Cayley $\mathbb{G}(\mathbb{Z}, \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\})$ codificado por la sucesión $\dots 0110001 \dots$

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, *Topología*. Santiago de Compostela, 2021.
- [2] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics **184**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] A. Carballido, *Acciones propiamente discontinuas de grupos discretos*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Santiago de Compostela, 2018.
- [4] J. Cannizzo, *Schreier Graphs and ergodic properties of boundary actions*. PhD Thesis, University of Ottawa, 2014.
- [5] R. Diestel, *Graph theory (4 ed.)*. Graduate Texts in Mathematics **173**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
- [6] J. Feldman, C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I. *Transactions of the American Mathematical Society*, **234** (1977), 289-324.
- [7] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Inventiones Mathematicae*. **139** (2000), 41-98.
- [8] É. Ghys, Topologie des feuilles génériques. *Annals of Mathematics*, **141**, (1995), 387-422.
- [9] É. Ghys, Lamination par surfaces de Riemann. *Panoramas & Synthèses*, **8**, (1999), 49-95.
- [10] T. Giordano, I. Putnam, C. Skau, Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **24** (2004), 441-475.
- [11] M. Gromov, *Structure métrique pour les variétés riemanniennes*. Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [12] M. Gromov, Asymtotic Invariants of Infinite Groups, in *Geometric Group Theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. London Mathematical Society Lecture Note Series 182, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

-
- [13] J. Gross, Every connected regular graph of even degree is a Schreier coset graph. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **22** (1977), 227-232.
- [14] A. Haefliger, Pseudogroups of local isometries. En *Differential Geometry* (Santiago de Compostela, 1984), n°131 en Research Notes in Math. Pitman (1985), 174-197.
- [15] A. Haefliger, Foliations and compactly generated pseudogroups. En *Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*. World Scientific (2002), 275-295.
- [16] F. Harary, *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, 1972.
- [17] G. Hector, U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations. Part A*. Vieweg & Sohn, 1981.
- [18] G. Hector, U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations, Part B*. Vieweg & Sohn, 1987.
- [19] S. Herrero, *Espacios de grafos y grafos aleatorios*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Santiago de Compostela, 2020.
- [20] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable, in *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry: Rokhlin's memorial (V. Turaev and A. Vershik editors)*. American Mathematical Society Translations 202, pp.151-166, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [21] Á. Lozano Rojo, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. *Proceedings of the XIV Fall Workshop on Geometry and Physics, Publi. de la RSME* tomo 10. RSME (2006), 267-272.
- [22] A. Lozano Rojo, *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tesis, Universidad del País Vasco, 2008.
- [23] E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3, GTM*, tomo 47. Springer, 1977.
- [24] M. Pérez Fernández de Córdoba, *Número de ramificación y percolación de un pseudogruppo*. Tesis, Universidad de Santiago de Compostela, 2012.
- [25] J. Renault, *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [26] A. C. Vázquez, *Geometría ergódica y asintótica de grafos aleatorios*. Tesis, Universidad de Santiago de Compostela, 2018.