

JUAN MANUEL LORENZO NAVEIRO

**FOLIACIONES POLARES
HOMOGÉNEAS EN ESPACIOS
SIMÉTRICOS**

149b
2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

JUAN MANUEL LORENZO NAVEIRO

**FOLIACIONES POLARES HOMOGÉNEAS EN
ESPACIOS SIMÉTRICOS**

149b

2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2022



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Foliaciones polares homogéneas en espacios simétricos

Juan Manuel Lorenzo Naveiro

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen/Abstract	5
Introducción	7
1. Preliminares	11
1.1. Variedades de Riemann	11
1.1.1. Geometría de subvariedades	14
1.2. Grupos y álgebras de Lie	15
1.2.1. Álgebras de Lie	16
1.2.2. Grupos de Lie	17
1.2.3. Descomposición de Iwasawa	19
1.3. Grupos de transformaciones	21
1.3.1. Acciones propias	23
2. Espacios simétricos	27
2.1. Espacios simétricos. Pares simétricos	27
2.2. La curvatura de un espacio simétrico	33
2.3. Subvariedades totalmente geodésicas	35
2.4. Tipo de un espacio simétrico	36
2.5. Espacios simétricos de tipo no compacto	39
3. Foliaciones polares homogéneas	43
3.1. Acciones polares	43
3.2. Foliaciones en variedades diferenciables	45
3.2.1. El Teorema de Frobenius	45
3.3. Foliaciones polares homogéneas	47
4. Foliaciones polares en $\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(3)$	53
4.1. Los espacios $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(n)$	53
4.1.1. Descomposición de Iwasawa de $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$	55
4.2. Subálgebras de Borel	57
4.3. Foliaciones de cohomogeneidad 1	60
4.4. Foliaciones de cohomogeneidad 2	61

4.5. Foliaciones de cohomogeneidad 3	74
4.6. Foliaciones de cohomogeneidad 4. Conclusión	80
Bibliografía	83

Resumen

Una acción isométrica de un grupo de Lie sobre una variedad de Riemann se dice polar si existe una subvariedad que corta ortogonalmente a todas las órbitas. Desde la aparición de estas acciones en los trabajos de Conlon, se han buscado maneras de clasificarlas en distintas familias de variedades ambiente, siendo de especial interés los espacios simétricos. En este trabajo haremos una introducción a los espacios simétricos y las acciones polares, centrándonos sobre todo en aquellas que no presentan órbitas singulares y donde el espacio ambiente es un espacio simétrico de tipo no compacto. Más adelante, clasificaremos todas las foliaciones polares homogéneas en $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$, el espacio de todas las transformaciones lineales autoadjuntas y definidas positivas de \mathbb{R}^3 que preservan el volumen.

Abstract

An isometric action of a Lie group on a Riemannian manifold is said to be polar if there exists a submanifold that meets all orbits perpendicularly. Since their first appearance in Conlon's work, it has been an open problem to classify such actions in several families of ambient manifolds, most notably symmetric spaces. In this work we will give an introduction to both symmetric spaces and polar actions, focusing on those without singular orbits and where the ambient space is a symmetric space of noncompact type. Furthermore, we will classify all homogeneous polar foliations on $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$, the space of all volume-preserving, self-adjoint and positive definite linear transformations of \mathbb{R}^3 .

Introducción

Desde los inicios de la Teoría de Superficies hasta el presente, un tema de interés recurrente ha sido la búsqueda de objetos geométricos que posean un grado alto de *simetría*. Si bien la noción de simetría suele estar vinculada a las ideas de belleza, proporción u otras de carácter visual, en Matemáticas tenemos una concepción de esta debida principalmente a Felix Klein. Podríamos decir que las simetrías de un objeto son aquellas transformaciones que preservan sus propiedades (por ejemplo, las simetrías de un espacio topológico son los homeomorfismos, mientras que las de una superficie regular son las isometrías), y la propiedad fundamental de estas transformaciones es el hecho de que forman un grupo. Con esta idea en mente, el propio Klein afirma en el *Programa de Erlangen* (1872) que el problema fundamental de la Geometría es el siguiente:

*Dado un espacio y un grupo de transformaciones del mismo;
desarrollar la teoría de los invariantes relativos al grupo.*

En nuestro caso, consideramos una variedad (de Riemann) ambiente, y dentro de esta buscamos estudiar las subvariedades extrínsecamente homogéneas. Una subvariedad extrínsecamente homogénea se caracteriza por que, dados dos puntos de ella, existe una isometría de la variedad ambiente que preserva la subvariedad y lleva un punto en otro. Esto permite realizar la subvariedad como una órbita inducida por cierto subgrupo del grupo de isometrías del ambiente, lo cual nos lleva a explorar acciones isométricas de grupos de Lie sobre variedades riemannianas.

Así pues, en este trabajo escogemos como variedades ambiente los llamados *espacios simétricos*, y las acciones isométricas a considerar se conocen como *acciones polares*.

La noción de espacio simétrico tiene su origen a finales de los años 20 del siglo pasado, de la mano de Élie Cartan, encontrándose a medio camino entre los espacios modelo (espacios euclídeos, esferas, espacios hiperbólicos) y la clase más general de espacios homogéneos. Cartan, más allá de definir los espacios simétricos, fue capaz de obtener una clasificación completa de todos ellos en 1926 [8].

Se puede pensar la condición de simetría de modo local o global. Por un lado, los espacios *localmente simétricos* se caracterizan por la siguiente propiedad: para cualquier punto existe una isometría, definida en una bola geodésica suficientemente pequeña y centrada en dicho punto, que invierte las geodésicas radiales que emanan de él. De hecho, esta condición es equivalente a que su tensor de curvatura sea paralelo:

$$\nabla R = 0.$$

Por otro lado, los espacios *globalmente simétricos* (en los cuales centraremos nuestra atención) son aquellos en los que cada punto admite una isometría global que invierte las geodésicas radiales partiendo de este. Estos últimos presentan una gran cantidad de buenas propiedades y tienen la ventaja de que se pueden describir de un modo puramente algebraico mediante los *pares simétricos*, hecho que justifica que adoptemos los espacios simétricos como nuestro marco de trabajo.

Una acción de un grupo de Lie sobre una variedad (completa) se dice polar si existe una subvariedad (llamada sección) que corta a todas las órbitas, y en todos los puntos de ella el corte es ortogonal. Se definen además las acciones hiperpolares como aquellas que admiten secciones llanas. Este concepto aparece por primera vez en los trabajos de Lawrence Conlon [9], quien solo consideraba acciones hiperpolares, llamando a sus secciones *dominios transversales*.

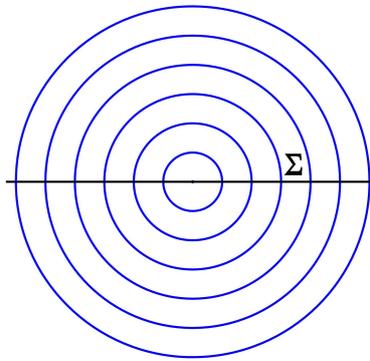


Figura 1: Acción estándar de $\text{SO}(2)$ sobre \mathbb{R}^2 , con sección el eje x .

Jiri Dadok acuña el adjetivo “polar” para esta clase de acciones en [10]. El motivo detrás de esta terminología se hace aparente si consideramos las coordenadas polares en el plano. El grupo $\text{SO}(2)$ de todas las rotaciones de \mathbb{R}^2 actúa sobre el plano, siendo sus órbitas las circunferencias centradas en el origen (más este último como órbita singular), y una posible sección para esta acción es el eje x . Si (r, θ) denotan las coordenadas polares de \mathbb{R}^2 , entonces la sección está formada por los puntos que verifican $\theta = 0$. Además, los conjuntos de nivel de r son las distintas órbitas para la acción. Podemos emular este proceso a partir de cualquier acción polar: elegida una parametrización del grupo que actúa, junto con una de cualquier sección, podemos obtener sistemas de coordenadas adaptados a la acción sobre nuestra variedad. Como consecuencia, surge el *método de cohomogeneidad*: si tenemos una ecuación en derivadas parciales para la que buscamos una solución $u(x)$ invariante bajo la acción del grupo, escribiendo la solución u en términos de estas nuevas coordenadas siempre se reduce el número de variables independientes en juego, lo que facilita considerablemente el cálculo de u .

Otra manera de introducir este tipo de acciones viene del *Teorema Espectral Real*, que afirma que toda transformación lineal autoadjunta en un espacio euclídeo admite una base ortonormal formada por autovectores. Podemos dar una interpretación geométrica de

este teorema como sigue: el grupo $O(n)$ de todas las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^n actúa sobre el espacio de todas las matrices simétricas $n \times n$ por conjugaciones (es decir, cambios de base), siendo el subconjunto de todas las matrices diagonales una sección para la acción. En cierto sentido, las matrices diagonales representan una forma canónica de las matrices simétricas, hecho que motivó a Richard Palais y a Chuu-Lian Terng en los años 80 a considerar el estudio de acciones que admiten secciones como una teoría de *formas canónicas* (véase [30]).

Situándonos de nuevo sobre espacios simétricos, tratamos de clasificar las acciones polares sobre estas variedades salvo por equivalencia de órbitas. Aquí, entendemos que dos acciones son equivalentes si existe una isometría del ambiente que lleva las órbitas de la primera en las de la segunda.

El caso compacto ha sido trabajado en gran medida por Andreas Kollross, quien clasificó las acciones hiperpolares en espacios simétricos indescomponibles de tipo compacto [21]. Como corolario, se consigue en el mismo artículo una clasificación de todas las acciones de cohomogeneidad uno en dichos espacios. Otros resultados a destacar son la clasificación de acciones polares sobre espacios simétricos de tipo compacto y rango uno, debidas al trabajo de Dadok junto con el de Podestà y Thorbergsson [3, Sección 12.1], y el hecho de que toda acción polar en un espacio simétrico indescomponible, de tipo compacto y de rango superior a uno es hiperpolar, cuya prueba es fruto del trabajo de Kollross y Lytchak [3, Sección 12.2].

En espacios simétricos de tipo no compacto, este problema se vuelve más complicado, siendo muchos de los resultados enunciados para el caso anterior falsos cuando pasamos a este nuevo contexto. Sin embargo, se sabe que el grupo de isometrías de un espacio simétrico de tipo no compacto es un grupo de Lie semisimple y no compacto. Por lo tanto, tenemos un nexo entre esta área de investigación y la (más desarrollada) teoría de álgebras de Lie reales semisimples. Algunos avances vienen dados por la clasificación de las acciones polares sobre espacios hiperbólicos reales, realizada por Bingle Wu [34], y sobre espacios hiperbólicos complejos, hecha por Kollross, Díaz Ramos y Domínguez Vázquez [12]. A día de hoy, el caso cuaterniónico permanece como un problema abierto.

Nosotros nos centraremos en este último caso, exigiendo además que las acciones polares que utilicemos no posean órbitas singulares. La última condición se puede reformular como que todas las órbitas tengan la misma dimensión, e implica que estas forman una *foliación*. Se habla entonces de *foliaciones polares homogéneas*, y serán el objeto de estudio de este trabajo.

Como aportación original, obtendremos la clasificación de todas las foliaciones polares homogéneas en el espacio simétrico $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$. Aquellas de dimensión máxima y mínima son ya conocidas, con lo que centraremos nuestros esfuerzos en hallar las foliaciones de dimensión intermedia. La clave detrás de este proceso bebe de dos vertientes. Por una parte, para determinar todas las posibles foliaciones, se emplearán resultados conocidos de álgebras de Lie resolubles, así como una caracterización algebraica de la polaridad. Esto nos permitirá reducir la búsqueda a un problema de Álgebra Lineal, cuya resolución nos conducirá a las foliaciones deseadas. Por otra parte, con el fin de averiguar cuáles de estas foliaciones son equivalentes, nos valdremos de dos invariantes geométricos en subvarieda-

des: el tensor de curvatura y la curvatura media. En definitiva, el resultado a demostrar será el siguiente:

Teorema Principal. *Sea \mathcal{F} una foliación polar homogénea sobre el espacio simétrico de tipo no compacto $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$. Entonces \mathcal{F} es equivalente a la foliación inducida por una, y solamente una, de las siguientes subálgebras de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$:*

$$(1.1) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\ell = (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n}, \text{ donde } \ell \text{ es una recta vectorial en } \mathfrak{a} \text{ (módulo la isometría } s: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}).$$

$$(1.2) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(2.1) \quad \mathfrak{h} = \mathbb{R}H_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathbb{R}H_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(2.2) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(2.3) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathbb{R}(H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(3) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Además, \mathcal{F} es hiperpolar si y solamente si es equivalente a la inducida por una de las siguientes subálgebras: (1.1), (1.2), (2.1) y (2.2).

Se introducirá la notación necesaria para entender el enunciado del Teorema Principal, aunque podemos dar aquí una idea de este describiendo las subálgebras de la lista anterior de modo matricial. El espacio M se interpreta como el conjunto de todas las transformaciones lineales autoadjuntas y definidas positivas de \mathbb{R}^3 que preservan el volumen. El álgebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ consta de todas las matrices 3×3 de traza cero, siendo además \mathfrak{a} y \mathfrak{n} las subálgebras de todas las matrices diagonales y estrictamente triangulares superiores, respectivamente. Por otra parte, los espacios \mathfrak{g}_{α_1} , \mathfrak{g}_{α_2} y $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ son correspondientemente los formados por las matrices cuya única entrada no nula es la entrada (1, 2), (2, 3) y (1, 3). Además, los vectores H_{α_1} y H_{α_2} son respectivamente las matrices diagonales $\mathrm{diag}(1, -1, 0)$ y $\mathrm{diag}(0, 1, -1)$ (divididas por 6, hecho que no afecta a los subespacios que generan). El teorema esgrime que cualquier foliación polar en M tiene que venir dada, salvo por equivalencia de órbitas, como la inducida por exactamente una de las subálgebras que aparecen en la lista.

Dividimos este trabajo en cuatro capítulos.

En el primer capítulo, se hará un recordatorio de los conceptos previos que necesitaremos para el trabajo. Estos son las variedades de Riemann, los grupos de Lie y las acciones isométricas.

El segundo capítulo trata de dar una introducción a los espacios simétricos, que como ya mencionamos anteriormente serán la clase de espacios ambiente que manejaremos a lo largo del trabajo. Expondremos las propiedades topológicas y geométricas más relevantes de estas variedades, prestando especial atención a los espacios simétricos de tipo no compacto.

El objetivo del tercer capítulo será iniciar el estudio de las acciones polares, con especial interés en aquellas que inducen foliaciones. El resultado principal a entender será el Criterio de Polaridad para acciones sin órbitas singulares en espacios simétricos de tipo no compacto.

En el último capítulo, introduciremos el espacio simétrico $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$, para después exponer la demostración de nuestro resultado original.

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es dar un repaso general de todas las nociones previas que necesitaremos, así como fijar toda la notación que emplearemos a lo largo de este trabajo. En primer lugar, recordaremos los conceptos esenciales relativos a la Geometría de Riemann. Más adelante, introduciremos los grupos y álgebras de Lie, enunciando sus características más relevantes. Por último, se explorarán las acciones de grupos de Lie sobre variedades, haciendo hincapié en aquellas que son propias e isométricas.

1.1. Variedades de Riemann

La Geometría de Riemann permite extender la teoría de superficies en \mathbb{R}^3 a objetos de dimensión superior, sin necesidad de que estos estén contenidos en un espacio euclidiano. Esta nace parcialmente motivada por el deseo de estudiar geometrías no euclidianas, siendo sus principales impulsores Karl Gauss y Bernhard Riemann. Comenzaremos recordando los aspectos fundamentales de las variedades diferenciables y riemannianas. Nos basaremos en [23], [27] y [15].

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Utilizaremos la notación $\mathfrak{F}(M)$ para referirnos al conjunto de funciones diferenciables de M en \mathbb{R} . Para cada punto $p \in M$, denotaremos el espacio tangente a M en p como $T_p(M)$. Cualquier sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) definido en un entorno de p induce una base $\{(\partial_{x^1}), \dots, (\partial_{x^n})_p\}$ de $T_p(M)$ dada por las derivadas parciales en p . Además, si N es otra variedad y $f: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, denotamos la diferencial de f en p como $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$.

La unión disjunta de los espacios tangentes a M en todos sus puntos recibe el nombre de fibrado tangente de M , al que nos referiremos como $T(M)$. Este recibe de modo natural una estructura de variedad diferenciable, con lo que tiene sentido hablar de las secciones diferenciables de $T(M)$, llamadas campos de vectores en M . El conjunto de todos los campos de vectores en M se denota como $\mathfrak{X}(M)$, y tiene una estructura de álgebra de Lie sobre \mathbb{R} cuando se le dota del corchete de Lie, dado por la asignación $[X, Y] = XY - YX$ (recordaremos más adelante este concepto). Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, escribimos como X_p o $X(p) \in T_p(M)$ el valor de X en p .

Dado un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe una aplicación $\phi^X: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ diferenciable, definida en un abierto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ estrellado con respecto a $\{0\} \times M$ verificando que, fijado $p \in M$, $\phi^X(t, p)$ es la curva integral maximal de X pasando por p en tiempo cero. Se dice que ϕ^X es el flujo de X . Además, dado $t \in \mathbb{R}$, el subconjunto $M_t = \{p \in M: (t, p) \in \mathcal{D}\} \subseteq M$ es un abierto, y la aplicación $X_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ definida mediante $X_t(p) = \phi^X(t, p)$ es un difeomorfismo.

Se puede demostrar que el corchete de Lie verifica la siguiente identidad, basada en la noción de derivada de Lie:

$$[X, Y](p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_{-t})_* X_t(p) [Y(X_t(p))], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), p \in M.$$

Del mismo modo que se define el fibrado tangente, para cualesquiera enteros $r, s \geq 0$ se puede construir el fibrado tensorial de tipo (r, s) como $T^{(r,s)}T(M) = \coprod_{p \in M} T^{(r,s)}(T_p(M))$, donde para cada \mathbb{R} -espacio vectorial V entendemos $T^{(r,s)}(V)$ como el espacio de tensores de tipo (r, s) definidos sobre V (esto es, las formas multilineales de $(V^*)^r \times V^s$ en \mathbb{R}). Este conjunto también posee una estructura de variedad diferenciable inducida por la de M , y las secciones de este fibrado se conocen como los tensores de tipo (r, s) en M .

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Decimos que un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ en M es una **métrica de Riemann** si su restricción a cada espacio tangente es un producto escalar. Una **variedad de Riemann** es un par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde M es una variedad diferenciable y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica de Riemann definida en M (por simplicidad, seguiremos denotando a las variedades de Riemann con M).

Si (M, g) y (N, g') son dos variedades de Riemann, una **isometría** entre M y N es un difeomorfismo $f: M \rightarrow N$ tal que f_{*p} es una isometría lineal para todo $p \in M$. Equivalentemente, f es una isometría si $g = f^*g'$ (siendo f^*g' el pullback de g' por f). Análogamente, se tiene la noción de **isometría local** reemplazando la condición “ser un difeomorfismo” por “ser un difeomorfismo local”. Utilizaremos la notación $I(M)$ para referirnos al conjunto de todas las isometrías de M . Este conjunto recibe una estructura de grupo con la composición de aplicaciones, así como de espacio topológico cuando se le dota de la topología compactoabierto.

Dada una variedad de Riemann M , el Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann nos garantiza la existencia de una única conexión afín $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, llamada **conexión de Levi-Civita**, cumpliendo las dos siguientes ecuaciones:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Cabe destacar que la conexión de Levi-Civita es invariante por isometrías. Además, dados campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el valor de $\nabla_X Y$ en un punto $p \in M$ depende solamente de X_p y de los valores de Y a lo largo de una curva tangente a X_p . Por lo tanto, dado un vector $v \in T_p(M)$, tiene sentido definir el vector $\nabla_v Y \in T_p(M)$. Esto nos determina un endomorfismo ∇Y de $T_p(M)$ dado por la asignación $v \in T_p(M) \mapsto \nabla_v Y$.

Un **campo de vectores a lo largo de γ** es una aplicación diferenciable $X: I \rightarrow T(M)$ cumpliendo que $X(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$ para todo $t \in I$. Denotamos con $\mathfrak{X}(\gamma)$ al espacio vectorial

de todos los campos de vectores tangentes a lo largo de γ . El operador $D_t: \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ dado por $D_t X(t) = \nabla_{\gamma'(t)} X$ se conoce como la **derivada covariante** a lo largo de γ .

Un campo $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se dice **paralelo** si $D_t X = 0$. Para cada $t \in I$ y $v \in T_{\gamma(t)}(M)$, se puede comprobar que existe un único campo de vectores paralelo que vale v en tiempo t . Esto nos permite construir para $a, b \in I$ una isometría lineal $P_a^b: T_{\gamma(a)}(M) \rightarrow T_{\gamma(b)}(M)$ dada del siguiente modo: para un $v \in T_{\gamma(a)}(M)$, se toma $P_a^b(v) = X(b)$, donde $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $X(a) = v$. Esta aplicación recibe el nombre de **transporte paralelo** a lo largo de γ . Es posible recuperar la derivada covariante de una variedad a partir del transporte paralelo. En efecto, si $\gamma: I \rightarrow M$ es una curva cualquiera, y $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$, se cumple que

$$D_t X(\gamma(t_0)) = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} P_{t_0+h}^{t_0}(X(t_0 + h)), \quad t_0 \in I.$$

En el caso de que γ' sea un campo paralelo, decimos que γ es una **geodésica** de M . Utilizando teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se demuestra que para todo $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ existe una única geodésica maximal $\gamma_v: I_v \rightarrow M$ de M cumpliendo que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$.

Podemos englobar todas las geodésicas de M en una única aplicación, llamada **aplicación exponencial**. Para ello, se toma el conjunto abierto $\mathcal{E} = \{v \in T(M): 1 \in I_v\}$ y se define $\exp: \mathcal{E} \rightarrow M$ mediante $\exp(v) = \gamma_v(1)$. Escribiendo $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_p(M)$, la restricción de \exp a \mathcal{E}_p se denota con \exp_p . Fijémonos en que, en general, la exponencial \exp_p no está definida en todo $T_p(M)$, sino en un entorno abierto del origen. Además, \exp_p es un difeomorfismo local en el origen, cuya diferencial es la identidad. Tenemos por otra parte una propiedad de naturalidad para la exponencial que afirma que dada cualquier isometría local $f: M \rightarrow \widetilde{M}$ se verifica que $\widetilde{\exp}_{f(p)} \circ f_{*p} = f \circ \exp_p$ en \mathcal{E}_p .

A cualquier variedad de Riemann conexa M se le puede dar una estructura de espacio métrico de la siguiente manera: dados dos puntos $p, q \in M$, se define $d(p, q)$ como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas diferenciables a trozos en M uniendo p y q . La aplicación $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ así definida es una distancia, llamada la **distancia de Riemann** de M , y la topología inducida por esta coincide con la topología que tiene M como variedad. El siguiente teorema nos da una caracterización de la completitud del espacio métrico M según la posibilidad de extender las geodésicas de M a todo \mathbb{R} :

Teorema 1.1 (de Hopf-Rinow, [15, Teorema 2.8]). *Sea M una variedad de Riemann conexa y $p \in M$. Entonces M es un espacio métrico completo si y solamente si \exp_p está definida en todo $T_p(M)$ (es decir, si toda geodésica puede ser prolongada a la recta real). Además, si M es completa, entonces p se puede unir con cualquier otro punto $q \in M$ mediante una geodésica minimizante.*

Sea M una variedad de Riemann. El **tensor de curvatura** de tipo $(1, 3)$ se define como la aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Por otro lado, el **tensor de curvatura** de tipo $(0, 4)$ es la aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ tal que

$$R(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle, \quad X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M).$$

Fijado $p \in M$ y $\Sigma \subseteq T_p(M)$ un plano vectorial, se define la **curvatura seccional** de Σ como

$$\text{Sec}(\Sigma) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

donde $\{X, Y\}$ es cualquier base de Σ . Diremos que una variedad de Riemann M es **llana** cuando $R = 0$ (equivalentemente, cuando $\text{Sec} = 0$ en todos los puntos de M). También diremos que M **tiene curvatura seccional no positiva** (respectivamente, **no negativa**) cuando $\text{Sec}(\Sigma)$ es menor o igual (respectivamente, mayor o igual) que cero para todo $\Sigma \subseteq T_p(M)$ y $p \in M$.

Enunciamos el Teorema de Cartan-Hadamard para finalizar este apartado sobre curvatura. Este nos proporciona información sobre la topología de una variedad completa de curvatura negativa:

Teorema 1.2 (de Cartan-Hadamard, [23, Teorema 12.8]). *Si M es una variedad de Riemann completa de curvatura seccional no positiva, entonces para cualquier punto $p \in M$, la aplicación exponencial $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$ es un revestimiento diferenciable. En particular, si M es simplemente conexa, \exp_p es un difeomorfismo.*

En base a este resultado, diremos que M es una **variedad de Hadamard** si es completa, simplemente conexa y de curvatura seccional no positiva.

1.1.1. Geometría de subvariedades

Supongamos que $(\widetilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una variedad de Riemann y $M \subseteq \widetilde{M}$ es una subvariedad inmersa. Por definición, sabemos que la inclusión $i: M \hookrightarrow \widetilde{M}$ es una inmersión inyectiva, de manera que el pullback de la métrica de \widetilde{M} a M vuelve a ser una métrica de Riemann. Por lo tanto, M hereda una estructura de variedad de Riemann. Denotaremos la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura de \widetilde{M} mediante $\widetilde{\nabla}$ y \widetilde{R} . Por otra parte, nos referiremos a las de M con ∇ y R .

La inclusión de M en \widetilde{M} nos permite identificar $T_p(M)$ como un subespacio vectorial de $T_p(\widetilde{M})$ para cada $p \in M$, de manera que tiene sentido considerar su complemento ortogonal. Dado un espacio euclídeo V y un subespacio $W \subseteq V$, emplearemos la notación $V \ominus W$ para referirnos al complemento ortogonal de W en V . En este caso, definimos el **espacio normal** a M en p como $\nu_p(M) = T_p(\widetilde{M}) \ominus T_p(M)$. La unión disjunta de los espacios normales a M en todos sus puntos se conoce como el **fibrado normal** $\nu(M)$ de la subvariedad M y tiene una estructura de variedad diferenciable. Un **campo de vectores normal** a M es una sección de $\nu(M)$. Además, escribiremos $\mathfrak{X}^\perp(M)$ para referirnos al espacio vectorial de los campos de vectores normales a M .

Conviene darse cuenta de que, dado un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un campo de vectores $Y: M \rightarrow T(\widetilde{M})$ (tangente o no a M), tiene sentido hallar la derivada covariante $\widetilde{\nabla}_X Y$, que toma valores en el fibrado tangente a \widetilde{M} . Al ser M una subvariedad de \widetilde{M} , podemos dar una descomposición ortogonal $\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp$, donde $(\widetilde{\nabla}_X Y)^\top$ es la parte tangente a M y $(\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp$, la parte normal a M .

Se define la **segunda forma fundamental** $\mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$ de M como la aplicación dada por

$$\mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

La segunda forma fundamental es $\mathfrak{F}(M)$ -bilineal y simétrica. Además, esta nos permite dar relaciones entre la conexión y la curvatura de M con las de \widetilde{M} . Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Sea \widetilde{M} una variedad de Riemann y $M \subseteq \widetilde{M}$ una subvariedad. Se tienen las siguientes identidades para $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$:*

(i) **Ecuación de Gauss:**

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) + \langle \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(X, Z), \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(Y, T) \rangle - \langle \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(X, T), \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(Y, Z) \rangle.$$

(ii) **Ecuación de Codazzi:** $(\widetilde{R}(Z, X)Y)^\perp = (\nabla_Z^\perp \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I})(X, Y) - (\nabla_X^\perp \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I})(Z, Y)$, donde $\nabla_X^\perp \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}$ es el tensor definido mediante la identidad

$$(\nabla_X^\perp \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I})(Y, Z) = [\widetilde{\nabla}_X \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(Y, Z)]^\perp - \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(\nabla_X Y, Z) - \mathbb{I}\!\!\!\text{I}\text{I}(Y, \nabla_X Z).$$

Por otro lado, dado un punto $p \in M$ y un vector normal $\xi \in \nu_p(M)$, se define el **operador forma** de M en la dirección de ξ como la aplicación lineal $A_\xi: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ dada por

$$A_\xi X = -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^\top, \quad X \in T_p(M).$$

Ya que la segunda forma fundamental es simétrica, se sigue que A_ξ es un operador autoadjunto.

Para este trabajo, serán de especial interés las subvariedades totalmente geodésicas. Diremos que $M \subseteq \widetilde{M}$ es **totalmente geodésica** si su segunda forma fundamental es idénticamente nula. Esto es equivalente a que para cualquier $\xi \in \nu_p(M)$, el operador A_ξ se anule. En tal caso, la conexión y la curvatura de M y \widetilde{M} coinciden.

1.2. Grupos y álgebras de Lie

Los grupos de Lie forman un puente entre el Álgebra y la Geometría, llegando a permear distintas áreas de las Matemáticas y la Física. Presentamos aquí los conceptos principales de los grupos de Lie y las álgebras de Lie. Aparte de tener interés propio, las álgebras de Lie permiten *linealizar* los grupos, lo cual permite simplificar su estudio en muchas ocasiones. Seguiremos la exposición de [20] para presentar los rudimentos de los grupos y álgebras de Lie.

1.2.1. Álgebras de Lie

Sea \mathbb{F} un cuerpo. Un **álgebra de Lie** sobre \mathbb{F} es un \mathbb{F} -espacio vectorial \mathfrak{g} (que en general supondremos de dimensión finita) dotado de una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (llamada **corchete de Lie**) que verifica las dos siguientes propiedades:

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$ para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$.
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Dados subespacios vectoriales $V, W \subseteq \mathfrak{g}$, podemos definir un nuevo subespacio $[V, W] = \text{Span}\{[X, Y]: X \in V, Y \in W\}$. Diremos que un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es una **subálgebra de Lie** de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, y un **ideal** de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. También diremos que \mathfrak{g} es **abeliana** si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice **simple** si sus únicos ideales son 0 y \mathfrak{g} . Se dice que es **semisimple** si no es abeliana y su único ideal abeliano es 0 .

El **centro** de un álgebra de Lie \mathfrak{g} se define como

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}: [X, Y] = 0 \text{ para cada } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Por otro lado, el **normalizador** de un subconjunto $A \subseteq \mathfrak{g}$ es el conjunto

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(A) = \{X \in \mathfrak{g}: [X, Y] \in A \text{ para cada } Y \in A\}.$$

Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} álgebras de Lie. Un **homomorfismo de álgebras de Lie** es una aplicación \mathbb{F} -lineal $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ verificando además que $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Si existe otro homomorfismo $\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que ϕ y ψ son mutuamente inversos, entonces diremos que ϕ es un **isomorfismo de álgebras de Lie**.

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie sobre \mathbb{F} , definimos de modo recursivo los ideales $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$ ($k \geq 0$). La cadena $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{g}'' \supseteq \mathfrak{g}^{(3)} \supseteq \dots$ se conoce como la **serie derivada** de \mathfrak{g} . De modo similar, se pueden definir los ideales $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k]$, para $k \geq 0$. Tenemos así otra cadena $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \mathfrak{g}_3 \supseteq \dots$, llamada la **serie central** de \mathfrak{g} . Observemos que cuando \mathfrak{g} tiene dimensión finita, ambas series se estabilizan a partir de cierto índice. Se dice que \mathfrak{g} es **resoluble** si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y **nilpotente** si $\mathfrak{g}_k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Cabe destacar que para cualquier \mathbb{F} -espacio vectorial V , el conjunto $\text{End}(V)$ de todos los endomorfismos lineales de V admite una estructura de álgebra de Lie con el corchete definido mediante $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. Llamaremos $\mathfrak{gl}(V)$ a esta álgebra de Lie (en particular, utilizaremos la notación $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ para referirnos al álgebra de Lie de todas las matrices $n \times n$ sobre \mathbb{F}). Por otra parte, si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, el corchete $[\cdot, \cdot]$ nos permite definir un homomorfismo de álgebras de Lie $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, conocido como la **representación adjunta** de \mathfrak{g} , mediante $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$ para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$. A partir de esta, podemos construir una forma bilineal y simétrica $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ exigiendo que

$$B(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Aquí, Tr denota la traza de una aplicación lineal. Esta forma bilineal se denomina la **forma de Killing** de \mathfrak{g} . Es sencillo comprobar que B es simétrica, así como que los isomorfismos de \mathfrak{g} preservan la forma de Killing. Además, el criterio de Cartan de Semisimplicidad afirma que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie semisimple si y solamente si B es no degenerada.

1.2.2. Grupos de Lie

Un **grupo de Lie** G es un grupo (cuyo neutro denotaremos con e) dotado de una estructura diferenciable tal que las aplicaciones de multiplicación e inversión son diferenciables. En este caso, para cada $g \in G$ las aplicaciones $L_g, R_g: G \rightarrow G$, definidas mediante las identidades $L_g(x) = gx$, $R_g(x) = xg$ para todo $x \in G$, son difeomorfismos de G .

Sea G un grupo de Lie. Dado un campo de vectores X definido sobre G , diremos que X es **invariante** (por la izquierda) si para cada $g, h \in G$ se verifica que $(L_g)_*h(X_h) = X_{gh}$. Sea ahora $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}(G)$ el conjunto de todos los campos de vectores invariantes en G . Este subconjunto es en realidad una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$, y como un campo de vectores invariante está determinado de modo único por su valor en e , tenemos que \mathfrak{g} es isomorfo como espacio vectorial a $T_e(G)$. En consecuencia, \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{R} , conocida como el **álgebra de Lie de G** . Generalmente, utilizaremos la notación \mathfrak{g} o $\text{Lie}(G)$ para referirnos al álgebra de Lie de un grupo G .

Se puede demostrar que todo campo de vectores invariante es completo. Esto nos permite definir una aplicación $\text{Exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G$ mediante la asignación $X \mapsto X_1(e)$. La aplicación así construida es diferenciable, siendo Exp_{*0} la identidad de \mathfrak{g} , de modo que Exp define un difeomorfismo local en un entorno de 0. Diremos que Exp es la **aplicación exponencial** de G .

Motivados por la relación que acabamos de ver entre grupos y álgebras de Lie, damos las siguientes definiciones. Decimos que un grupo de Lie G es **resoluble** (respectivamente, **nilpotente**, **simple**, **semisimple**) precisamente cuando es conexo y su álgebra de Lie \mathfrak{g} es resoluble (nilpotente, simple, semisimple).

El ejemplo prototípico de grupo de Lie viene dado por el **grupo lineal general**: si V es un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ sobre \mathbb{R} , el conjunto $\text{GL}(V)$ de todos los automorfismos lineales de V tiene una estructura de grupo. Al ser además un abierto del espacio vectorial $\text{End}(V)$, este recibe una estructura de variedad diferenciable de dimensión n^2 , que hace de $\text{GL}(V)$ un grupo de Lie. Su álgebra de Lie se identifica con $\mathfrak{gl}(V)$, y la exponencial $\text{Exp}: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \text{GL}(V)$ es precisamente la exponencial de endomorfismos lineales. En particular, el grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ no singulares es un grupo de Lie cuya álgebra es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Aquí, la exponencial se corresponde con la exponencial de matrices.

Sean G y H dos grupos de Lie. Diremos que $\varphi: G \rightarrow H$ es un **homomorfismo de grupos de Lie** si es a la vez un homomorfismo de grupos y una aplicación diferenciable. Los homomorfismos tienen rango constante, así que el Teorema del Rango nos permite afirmar que un homomorfismo inyectivo (respectivamente sobreyectivo, biyectivo) es una inmersión (respectivamente sumersión, difeomorfismo). Por otra parte, al ser $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$ y $\mathfrak{h} \cong T_e(H)$, la diferencial de φ en e induce una aplicación lineal $\varphi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que es de hecho un homomorfismo de álgebras de Lie. Además, la aplicación exponencial anteriormente definida verifica la propiedad de naturalidad, en el sentido de $\varphi \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \varphi_*$.

Describamos ahora la representación adjunta de un grupo de Lie G : observemos que cada elemento $g \in G$ define una **conjugación** $I_g: G \rightarrow G$ dada por $I_g(x) = gxg^{-1}$. Se verifica que I_g es un homomorfismo de grupos de Lie, así como que $I_g \circ I_h = I_{gh}$, de manera

que I_g es en realidad un isomorfismo para cada g . Si definimos ahora $\text{Ad}(g) = (I_g)_*$ para todo $g \in G$, tenemos que $\text{Ad}(g)$ es un isomorfismo de \mathfrak{g} , con lo que la asignación anterior induce una aplicación $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$. En virtud de la Regla de la Cadena, Ad es un homomorfismo de grupos de Lie, conocido como la **representación adjunta** de G . Su derivada coincide precisamente con la representación adjunta del álgebra de Lie \mathfrak{g} . Es decir, $(\text{Ad})_* = \text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Si G es un grupo de Lie, diremos que $H \leq G$ es un **subgrupo de Lie** de G si H es un subgrupo (abstracto) de G y tiene una estructura de grupo de Lie tal que H es una subvariedad inmersa de G . La condición “ser subgrupo de Lie” implica que H es una **subvariedad débilmente embebida** de G , es decir, que cualquier aplicación diferenciable $f: M \rightarrow G$ (siendo M una variedad arbitraria) verificando que $f(M) \subseteq H$ es a su vez una aplicación diferenciable de M en H . Observemos que la inclusión de H en G nos permite identificar \mathfrak{h} como una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Concretamente, se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}: \text{Exp}(tX) \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Además, la exponencial de H coincide con la restricción de la exponencial de G a \mathfrak{h} . Tenemos también un recíproco parcial de esta situación: dada una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, existe un único subgrupo de Lie conexo $H \leq G$ cuya álgebra de Lie es \mathfrak{h} .

Como caso particular de lo anterior, podemos considerar la componente conexa G_0 de G que contiene a e . Se verifica que G_0 es un subgrupo de Lie normal y cerrado de G , cuya álgebra de Lie coincide con \mathfrak{g} .

En general, los subgrupos abstractos de un grupo de Lie no tienen por que ser subgrupos de Lie. No obstante, el Teorema de Cartan nos proporciona una condición suficiente para que un subgrupo abstracto de G sea subgrupo de Lie: todo subgrupo cerrado de G es un subgrupo de Lie embebido.

Dos subgrupos de Lie $H, K \leq G$ son **conjugados** si existe un elemento $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$. La relación “ser conjugados” es de equivalencia, con lo que tiene sentido considerar las clases de equivalencia de esta. Dado un subgrupo $H \leq G$, su clase de conjugación la denotaremos con (H) .

Si $H \leq G$ es un subgrupo abstracto de G , podemos considerar el conjunto G/H de cosets (por la derecha) de H . La proyección canónica $\pi: g \in G \mapsto gH$ da a G/H una estructura de espacio topológico mediante la topología de identificación. Más aún, cuando H es cerrado, G/H posee una única estructura diferenciable que hace de esta proyección una sumersión (de hecho, es un fibrado localmente trivial de fibra H). La dimensión de este espacio es $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$. Si además H es normal en G , el cociente G/H es nuevamente un grupo de Lie.

Aportamos aquí algunos ejemplos de grupos de Lie matriciales, que manejaremos a lo largo del trabajo, junto con sus álgebras de Lie.

Aparte de estos grupos, nos va a ser de gran importancia el grupo de isometrías de una variedad de Riemann. El siguiente teorema (de difícil demostración) nos garantiza que este siempre es un grupo de Lie.

G	\mathfrak{g}
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : \det(A) \neq 0\}$	$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) : \det(A) = 1\}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : \mathrm{Tr}(X) = 0\}$
$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^T = I_n\}$	$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X^T + X = 0\}$
$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X^T + X = 0\}$
$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : AA^* = I_n\}$	$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X^* + X = 0\}$
$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$

Teorema 1.4 (de Myers-Steenrod, [26, Teorema 10], [2, Sección 3]). *Sea M una variedad de Riemann conexa. El grupo de isometrías $I(M)$ es un grupo de Lie cuando se le dota de la topología compacto-abierto.*

Una **representación** de un grupo de Lie G es un homomorfismo $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, siendo V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} de dimensión finita. Análogamente, se dice que un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una **representación** del álgebra de Lie \mathfrak{g} . De ese modo, para cada $g \in G$, $\rho(g)$ es un isomorfismo lineal de V . Por comodidad, solemos decir que V es una representación de G (o de \mathfrak{g}).

Sea $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación. Un subespacio vectorial $W \subseteq V$ se dice **G -invariante** si $\rho(g)(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. Si los únicos subespacios invariantes que admite V son $\{0\}$ y V , diremos que V es una representación **irreducible** de G . En caso contrario, diremos que V es **reducible**. Se tienen definiciones análogas para el caso de representaciones de álgebras de Lie.

1.2.3. Descomposición de Iwasawa

Sea G un grupo de Lie semisimple con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Una **involución de Cartan** en \mathfrak{g} es un homomorfismo de álgebras de Lie $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ verificando que es una **involución** (es decir, $\theta^2 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$), así como que la forma bilineal $B_{\theta}: (X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto -B(X, \theta Y)$ es definida positiva en \mathfrak{g} . Toda álgebra de Lie semisimple admite al menos una involución de Cartan. Además, dadas dos involuciones de Cartan $\theta, \tilde{\theta}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, existe un elemento ϕ de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ad}(G)$ (el subgrupo conexo de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ con álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$) tal que $\tilde{\theta} = \phi \circ \theta \circ \phi^{-1}$.

Una involución de Cartan θ determina una descomposición en suma directa (conocida como **descomposición de Cartan**) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, siendo \mathfrak{k} el autoespacio de θ asociado a 1 y \mathfrak{p} el autoespacio asociado a -1 . También se verifica que los elementos de $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$ son transformaciones antisimétricas del espacio euclídeo $(\mathfrak{g}, B_{\theta})$, mientras que los elementos de $\mathrm{ad}(\mathfrak{p})$ son simétricos. Por otra parte, se tienen las siguientes inclusiones:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k},$$

de modo que \mathfrak{k} es en realidad una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Denotemos con K al subgrupo conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{k} .

Al ser \mathfrak{p} un espacio vectorial de dimensión finita, es inmediato comprobar que existe un subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Más aún, si $\tilde{\mathfrak{a}}$ es otro subespacio abeliano maximal de \mathfrak{p} , existe un elemento $k \in K$ tal que $\text{Ad}(k)(\mathfrak{a}) = \tilde{\mathfrak{a}}$, así que todos los subespacios abelianos maximales son conjugados.

El producto escalar B_θ que tenemos en \mathfrak{g} nos permite identificar el subespacio abeliano \mathfrak{a} con su dual \mathfrak{a}^* . Para ello, definimos una aplicación \mathbb{R} -lineal $\Phi: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}^*$ exigiendo que $\Phi(H)(H') = B_\theta(H, H')$ para cada $H, H' \in \mathfrak{a}$. Puesto que B_θ es una forma bilineal no degenerada, Φ define un isomorfismo de espacios vectoriales, y podemos dotar a \mathfrak{a}^* de un producto escalar exigiendo que Φ sea una isometría. Para cada $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, escribimos $H_\lambda = \Phi^{-1}(\lambda)$.

Fijémonos ahora en el conjunto $\text{ad}(\mathfrak{a})$. Al ser \mathfrak{a} abeliano y $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, los elementos de $\text{ad}(\mathfrak{a})$ son transformaciones lineales autoadjuntas de \mathfrak{g} que conmutan. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema Espectral Real y diagonalización simultánea para deducir que los autovalores de estas transformaciones son reales, junto con que \mathfrak{g} es suma directa de autoespacios comunes a todas ellas.

Más concretamente, consideremos para cada $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ el subespacio

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = [H, X] = \lambda(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Si $\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ y $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$, decimos que λ es una **raíz** (restringida) de \mathfrak{g} . Utilizaremos el símbolo Δ para referirnos al conjunto de todas las raíces restringidas. Tenemos entonces la siguiente descomposición ortogonal, conocida como la **descomposición en espacios de raíces** de \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda.$$

Por otra parte, se pueden comprobar las siguientes afirmaciones:

- $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ para cada $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$.
- $\theta(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda}$ (así, λ es una raíz si y solo si lo es $-\lambda$).

Sobre el conjunto de las raíces Δ podemos dar una noción de positividad. Una manera de hacerlo consiste en tomar un elemento $H_0 \in \mathfrak{a}$ tal que $\lambda(H_0) \neq 0$ para todo $\lambda \in \Delta$. Esta elección siempre es posible, ya que el conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Delta} \ker \lambda$ es una unión finita de hiperplanos vectoriales, con lo que su complementario es un abierto no vacío y denso de \mathfrak{a} , cuyos elementos se dicen **regulares**. Fijado un elemento regular H_0 , diremos que $\lambda \in \Delta$ es **positiva** si $\lambda(H_0) > 0$. También diremos que una raíz positiva λ es **simple** si no se puede escribir como la suma de dos raíces positivas. Llamamos Δ^+ al conjunto de todas las raíces positivas, y definimos $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\lambda$. Se verifica que \mathfrak{n} es una subálgebra de Lie nilpotente de \mathfrak{g} . Se puede comprobar que dos criterios de positividad difieren en la conjugación por un elemento del normalizador $N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : \text{Ad}(k)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$, con lo cual si $\tilde{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\lambda \in \tilde{\Delta}^+} \mathfrak{g}_\lambda$ se obtiene a partir de otro elemento regular, existe un elemento $k \in N_K(\mathfrak{a})$ tal que $\text{Ad}(k)(\mathfrak{n}) = \tilde{\mathfrak{n}}$.

Estamos ya en condiciones de enunciar el teorema central de esta sección:

Teorema 1.5 (Descomposición de Iwasawa para álgebras de Lie, [20, Proposición 6.43]). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real semisimple. Escogida una involución de Cartan $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, un subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ y un criterio de positividad sobre las raíces, se cumple que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Además, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ es una subálgebra de Lie resoluble de \mathfrak{g} , con $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$.*

La descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ se conoce como la **descomposición de Iwasawa** del álgebra de Lie \mathfrak{g} . Además, podemos subir esta descomposición al nivel de grupos de Lie, tal y como afirma el siguiente resultado:

Teorema 1.6 (Descomposición de Iwasawa para grupos de Lie, [20, Teorema 6.46]). *Sea G un grupo de Lie semisimple y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ una descomposición de Iwasawa de su álgebra de Lie \mathfrak{g} . Si K , A y N son los subgrupos de Lie conexos de G con álgebras de Lie \mathfrak{k} , \mathfrak{a} y \mathfrak{n} respectivamente, entonces A y N son simplemente conexos. La aplicación de multiplicación*

$$m: K \times A \times N \rightarrow G \\ (k, a, n) \mapsto kan$$

es un difeomorfismo.

Las aplicaciones exponenciales de A y N (que son las restricciones de $\text{Exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G$ a \mathfrak{a} y \mathfrak{n} respectivamente) son difeomorfismos. Por otra parte, si AN es el subgrupo conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, la aplicación

$$A \times N \rightarrow AN \\ (a, n) \mapsto an$$

es un difeomorfismo. La exponencial de AN también es un difeomorfismo.

1.3. Grupos de transformaciones

Los grupos de transformaciones logran plasmar en lenguaje matemático la filosofía del *Programa de Erlangen*. Estos han permitido grandes avances, entre otros, en la teoría de ecuaciones algebraicas (atribuidos a Galois) y en menor medida en ecuaciones diferenciales (debido a los trabajos de Sophus Lie). Exponemos en este apartado las nociones básicas de acciones de grupos desde el punto de vista de la Geometría Diferencial. Nos apoyaremos en las referencias [1], [3] y [24].

Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Una **acción** (diferenciable) $\varphi: G \curvearrowright M$ de G sobre M es una aplicación diferenciable $\varphi: G \times M \rightarrow M$ verificando las siguientes identidades:

$$\varphi(g, \varphi(h, p)) = \varphi(gh, p), \quad \varphi(e, p) = p, \quad g, h \in G, p \in M.$$

Generalmente, escribiremos $g \cdot p$ en vez de $\varphi(g, p)$ y emplearemos la notación $G \curvearrowright M$ para referirnos a una acción de G sobre M . Se dice además que (G, M, φ) es un **grupo de**

Lie de transformaciones. Dada una acción $\varphi: G \curvearrowright M$, definimos para cada $g \in G$ y $p \in M$ las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_g: M &\rightarrow M & \varphi^p: G &\rightarrow M \\ q &\mapsto g \cdot q, & h &\mapsto h \cdot p. \end{aligned}$$

Se verifica que φ_g es un difeomorfismo de M (cuya inversa es $\varphi_{g^{-1}}$) para todo $g \in G$. Si M es una variedad de Riemann, se dice que la acción es **isométrica** cuando φ_g es una isometría para todo $g \in G$. También se dice en este caso que la métrica de M es **G -invariante**. Cabe destacar que si un grupo de Lie G es compacto, entonces toda acción de G sobre una variedad diferenciable M admite métricas G -invariantes. Esto es consecuencia de que toda variedad diferenciable admite una métrica de Riemann y de que en un grupo de Lie compacto es posible “promediar” funciones de modo invariante por traslaciones empleando la **medida de Haar** (véase [32, Sección 1.4]).

Sea $G \curvearrowright M$ una acción. Para cada $p \in M$, definimos la **órbita** de p como el conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p: g \in G\}$, asimismo, el **subgrupo de isotropía** de p es $G_p = \{g \in G: g \cdot p = p\}$. Más generalmente, se define para dos subconjuntos $A \subseteq G$, $B \subseteq X$, su producto como $A \cdot B = \{g \cdot p: g \in A, p \in B\}$. Diremos que B es **G -invariante** si $G \cdot B = B$.

Se comprueba de modo elemental que cada subgrupo de isotropía es un subgrupo cerrado de G (luego un subgrupo de Lie). Más aún, si $p \in M$ y $g \in G$, se tiene que $G_{g \cdot p} = gG_p g^{-1}$, lo que implica que a cada órbita de la acción le corresponde una única clase de conjugación de subgrupos de G . Podemos considerar para cada punto $p \in M$ la aplicación $\psi: G/G_p \rightarrow G \cdot p$ dada por $\psi(gG_p) = g \cdot p$. Dicha aplicación está bien definida, es diferenciable como aplicación de G/G_p en M , y nos proporciona una biyección entre la variedad G/G_p y el conjunto $G \cdot p$, de manera que las órbitas de cualquier acción reciben una estructura de variedad diferenciable tal que

$$\dim G \cdot p = \dim G - \dim G_p, \quad p \in M.$$

Por otra parte, tenemos que el subgrupo de isotropía G_p deja fijo el espacio $T_p(M)$. Esto induce una representación de G_p en $T_p(M)$, conocida como la **representación de isotropía** en p , definida mediante la asignación $g \mapsto (\varphi_g)_{*p}$.

Una acción $G \curvearrowright M$ se dice **libre** si $G_p = \{e\}$ para todo $p \in M$, y **transitiva** si $G \cdot p = M$ para algún (luego, para todo) $p \in M$. En este último caso también se suele decir que M es un **G -espacio homogéneo**. Por otra parte, diremos que la acción es **efectiva** si el **núcleo de ineffectividad** $N = \bigcap_{p \in M} G_p$ es trivial. Si N es finito, entonces la acción es **casi efectiva**.

Más generalmente, diremos que una variedad de Riemann M es **homogénea** si el grupo de isometrías $I(M)$ actúa transitivamente sobre M .

Dos acciones $G \curvearrowright M$ y $\tilde{G} \curvearrowright \tilde{M}$ se dicen **equivalentes** (por órbitas) si existe un difeomorfismo $f: M \rightarrow \tilde{M}$ tal que $f(G \cdot p) = \tilde{G} \cdot f(p)$ para todo $p \in M$. En el caso de que ambas acciones sean isométricas, exigiremos además que f sea una isometría. Por otra parte, si $G \curvearrowright M$ y $\tilde{G} \curvearrowright \tilde{M}$ son dos acciones de un mismo grupo de Lie, entonces una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow \tilde{M}$ se dice **equivariante** si $f(g \cdot p) = g \cdot f(p)$ para cada $g \in G$ y $p \in M$.

Si $f: M \rightarrow N$ es equivariante, necesariamente su rango es constante en las órbitas. Por lo tanto, si M es homogénea, f tiene rango constante, así que en el caso de que sea inyectiva (respectivamente, sobreyectiva, biyectiva), se verifica que f es una inmersión (respectivamente, sumersión, difeomorfismo).

Como caso particular, dado $p \in M$ podemos considerar $\psi: gG_p \in G/G_p \mapsto g \cdot p \in M$. Claramente, ψ es una aplicación equivariante e inyectiva, así que es una inmersión. En consecuencia, deducimos que la órbita $G \cdot p = \psi(G/G_p)$ es una subvariedad inmersa de M difeomorfa a G/G_p (en el caso de que M sea una G -variedad homogénea, concluimos que para cualquier $p \in M$, $M \cong G/G_p$). Más aún, la aplicación $\varphi^p: G \rightarrow G \cdot p$ es una sumersión sobreyectiva, con lo que

$$T_p(G \cdot p) = \{(\varphi^p)_*(v) : v \in T_e(G)\} = \{(\varphi^p)_*(X_e) : X \in \mathfrak{g}\}.$$

De ese modo, a partir de los elementos del álgebra de Lie \mathfrak{g} podemos generar en cada punto el espacio tangente a su órbita correspondiente. Motivados por este hecho, definimos a partir de cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ un campo de vectores $X^* \in \mathfrak{X}(M)$ mediante

$$X^*(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}(tX) \cdot p = (\varphi^p)_*(X_e), \quad p \in M.$$

Por construcción, X^* es completo y su flujo es $X_t^* = \varphi_{\text{Exp}(tX)}$. En particular, si la acción de G es isométrica, X es un **campo de vectores de Killing** (es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$, $X_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ es una isometría, siendo M_t el dominio de definición de X_t). La asignación $*$: $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que lleva $X \in \mathfrak{g}$ en $X^* \in \mathfrak{X}(M)$ es una aplicación \mathbb{R} -lineal verificando que $[X, Y]^* = -[X^*, Y^*]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ (se dice que $*$ es un **antihomomorfismo de álgebras de Lie**).

1.3.1. Acciones propias

Una acción $G \curvearrowright M$ de un grupo de Lie sobre una variedad se dice **propia** si la aplicación $\theta: (g, p) \in G \times M \mapsto (g \cdot p, p) \in M \times M$ es propia (es decir, si $\theta^{-1}(K)$ es compacto para cualquier subconjunto compacto $K \subseteq M \times M$). En tal caso, se cumple que todos los subgrupos de isotropía son compactos, así como que las órbitas de la acción son subvariedades cerradas y embebidas de M .

Dada una acción propia $G \curvearrowright M$ de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable, diremos que dos órbitas $G \cdot p$ y $G \cdot q$ **tienen el mismo tipo** si $(G_p) = (G_q)$. Esta relación es de equivalencia, y denotaremos la clase de equivalencia de la órbita $G \cdot p$ con $[G \cdot p]$. Esta última se conoce como el **tipo** de la órbita $G \cdot p$.

Asimismo, definimos una relación de orden parcial " \leq " sobre el conjunto de los tipos de órbitas dada por

$$[G \cdot p] \leq [G \cdot q] : \iff (G_q) \leq (G_p), \quad p, q \in M.$$

Nos resultarán de especial interés las órbitas que son localmente de tipo máximo, conocidas como órbitas principales. Más concretamente, dada una acción propia e isométrica

$G \curvearrowright M$, una órbita $G \cdot p$ se dice **principal** si existe un abierto G -invariante $U \subseteq M$ conteniendo a $G \cdot p$ y de modo que $[G \cdot q] \leq [G \cdot p]$ para todo $q \in U$. Todas las órbitas principales tienen la misma dimensión, tal y como se verá a continuación. Las órbitas que tienen dimensión inferior a las principales se conocen como **órbitas singulares**, mientras que las órbitas no principales que tienen la dimensión de una órbita principal se dicen **órbitas excepcionales**. Por otra parte, los puntos pertenecientes a una órbita principal se dicen **regulares**. Denotaremos con M_R al conjunto de todos los puntos regulares para la acción. Finalmente, diremos que la **cohomogeneidad** de la acción es la codimensión de cualquier órbita principal.

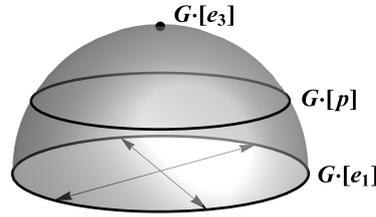


Figura 1.1: Órbitas para la acción de $SO(2)$ sobre el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ dada por $A \cdot [x, y, z] = [A(x, y), z]$. Las órbitas principales son los paralelos distintos del Ecuador, la única órbita singular es el Polo Norte, y el Ecuador es la única órbita excepcional.

El siguiente resultado nos proporciona las características más relevantes de las órbitas principales.

Teorema 1.7 (de la Órbita Principal, [24, Páginas 51-53]). *Si $G \curvearrowright M$ es una acción propia e isométrica de un grupo de Lie sobre una variedad de Riemann completa, entonces:*

- (i) *Todas las órbitas principales tienen el mismo tipo, que es además el máximo entre los tipos de órbitas de $G \curvearrowright M$.*
- (ii) *M_R , la unión de todas las órbitas principales, es un abierto denso de M .*

La demostración del Teorema de la Órbita Principal consiste en aplicar el *Slice Theorem* (véase [29]), el cual nos permite estudiar la acción $G \curvearrowright M$ localmente a partir de las representaciones

$$g \in G_p \mapsto (\varphi_g)_{*p} \in \mathcal{O}(\nu_p(G \cdot p)), \quad p \in M.$$

Para cada $p \in M$, la representación anterior se conoce como la **representación slice** en p (observemos que la representación slice se puede ver como la restricción de la representación de isotropía a $\nu_p(G \cdot p)$). Usando el *Slice Theorem*, es posible comprobar que p es un punto regular si y solamente si la representación slice en p es trivial. Además, la cohomogeneidad de la representación slice en cualquier punto coincide con la cohomogeneidad de la acción.

Sea $\varphi: G \curvearrowright M$ una acción propia e isométrica de un grupo de Lie sobre una variedad completa, y $p \in M$. Si $\xi_p \in \nu_p(G \cdot p)$ es un vector fijo para la representación slice, podemos extenderlo a un campo de vectores normal a lo largo de la órbita $G \cdot p$ exigiendo que $\xi_{g \cdot p} = (\varphi_g)_* \xi_p$ para todo $g \in G$. Se dice que un campo de vectores $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(G \cdot p)$ construido de esta manera es un **campo normal equivariante**. En el caso de que $G \cdot p$ sea una órbita principal, todo vector de $\nu_p(G \cdot p)$ se extiende a un campo normal equivariante.

La construcción anterior nos permite recuperar todas las órbitas de una acción a partir de una órbita principal. En efecto, si $G \cdot p$ es una órbita principal para la acción, y $A \subseteq M$ es cualquier otra órbita, siempre podemos encontrar un vector $\xi_p \in \nu_p(G \cdot p)$ tal que $q = \exp_p(\xi_p) \in A$. En tal caso, se verifica que $A = G \cdot q = \{\exp_x(\xi_x) : x \in G \cdot p\}$.

Terminamos este capítulo enunciando dos resultados conocidos sobre acciones isométricas que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo. En primer lugar, aportamos aquí una caracterización de las acciones propias, en el caso de que el grupo que actúa sea un subgrupo del grupo de isometrías.

Teorema 1.8 ([11]). *Sea M una variedad de Riemann completa. Un subgrupo $H \leq I(M)$ actúa propiamente sobre M si y solamente si H es cerrado en $I(M)$.*

En segundo lugar, enunciamos el Teorema del Punto Fijo de Cartan, que nos proporciona una condición suficiente para que una acción isométrica tenga puntos G -invariantes.

Teorema 1.9 (del Punto Fijo de Cartan, [16, Teorema 1.4.6]). *Sea M una variedad de Hadamard y $G \curvearrowright M$ una acción isométrica. Si existe un punto $p \in M$ tal que $G \cdot p$ está acotado, entonces existe $q \in M$ de modo que $G \cdot q = \{q\}$.*

Capítulo 2

Espacios simétricos

En este capítulo haremos una introducción a los espacios simétricos y sus características fundamentales. Más adelante, obtendremos fórmulas para la curvatura de un espacio simétrico, que servirán para caracterizar sus subvariedades totalmente geodésicas. Finalmente, describiremos el tipo de un espacio simétrico, prestando especial atención a los espacios simétricos de tipo no compacto, con el objetivo de explorar su relación con la teoría de grupos semisimples. Seguiremos la exposición de [35], [19] y [17].

2.1. Espacios simétricos. Pares simétricos

Empezaremos formalizando la definición de espacio simétrico. Antes de esto, conviene enunciar el siguiente lema, que aparte de ser de utilidad para nuestros propósitos ilustra la rigidez de las isometrías entre variedades:

Lema 2.1. *Sean M y N variedades de Riemann, con M conexa. Dadas dos isometrías locales $f, g: M \rightarrow N$, si existe un $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ y $f_{*p} = g_{*p}$, entonces $f = g$.*

Definición 2.2. Sea M una variedad de Riemann conexa. Decimos que M es un **espacio simétrico** si para cualquier punto $p \in M$ existe una isometría $s_p: M \rightarrow M$ de manera que $s_p(p) = p$ y $(s_p)_{*p} = -\text{Id}_{T_p(M)}$. En tal caso, diremos que s_p es la **reflexión en p** .

Observemos que en las condiciones anteriores, si existe s_p entonces debe ser única, debido al Lema 2.1. Además, s_p es necesariamente un elemento de orden dos, puesto que $s_p^2 = \text{Id}_M$.

Proposición 2.3. *Sea M un espacio simétrico. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

- (i) M es una variedad completa.
- (ii) Si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ es una geodésica de M , y $t, s \in \mathbb{R}$, se tiene que $s_{\gamma(t)}(\gamma(t+s)) = \gamma(t-s)$.
- (iii) M es homogénea.

(iv) Si N es una variedad conexa, homogénea, y existe s_p para algún $p \in N$, entonces N es un espacio simétrico.

Demostración. Comencemos demostrando (i): si M no fuese completa, habría una geodésica $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ de manera que $0 \in (a, b)$, $b < \infty$ y (a, b) es el intervalo maximal de definición de γ . Escogemos un $c \in (\frac{b}{2}, b)$, y consideramos la curva $\beta: (2c - b, 2c - a) \rightarrow M$ definida mediante $\beta(t) = s_{\gamma(c)}(\gamma(2c - t))$. Se verifica que $\beta(c) = \gamma(c)$, así como que $\beta'(c) = (s_{\gamma(c)})_{*\gamma(c)}(-\gamma'(c)) = \gamma'(c)$. Por lo tanto, de la maximalidad de γ deducimos que $(2c - b, 2c - a) \subseteq (a, b)$, y $\beta(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in (a, b)$. No obstante, $b \in (2c - b, 2c - a)$, que está contenido en (a, b) , lo que es una contradicción. Así, concluimos que M es completa.

Justifiquemos ahora la segunda afirmación: se consideran las curvas $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow M$ dadas por $\alpha(s) = s_{\gamma(t)}(\gamma(t + s))$ y $\beta(t) = \gamma(t - s)$. Ambas son geodésicas de M , y un cálculo análogo al hecho en el apartado (i) nos lleva a deducir que tienen las mismas condiciones iniciales. Por consiguiente, $\alpha = \beta$, de donde se tiene la ecuación buscada.

Ahora, veamos que M es homogénea. Puesto que M es una variedad completa, en virtud del Teorema de Hopf-Rinow 1.1, dados cualesquiera $p, q \in M$ existe un segmento de geodésica $\gamma: [0, 2] \rightarrow M$ tal que $p = \gamma(0)$ y $q = \gamma(2)$. De ese modo, $s_{\gamma(1)}: M \rightarrow M$ es una isometría verificando que $s_{\gamma(1)}(p) = s_{\gamma(1)}(\gamma(0)) = \gamma(2) = q$, como queríamos demostrar.

Finalmente, supongamos que N es una variedad en las condiciones del apartado (iv). Para cualquier punto $q \in N$, existe una isometría $g: N \rightarrow N$ tal que $g(p) = q$, con lo cual $f = g \circ s_p \circ g^{-1}$ es una isometría de N cumpliendo que $f(q) = q$, $f_{*q} = -\text{Id}_{T_q(N)}$. En consecuencia, N es un espacio simétrico. \square

Definición 2.4. Sea M un espacio simétrico y $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ una geodésica. Se define, para cada $t \in \mathbb{R}$, la **transvección**:

$$T_t = s_{\gamma(\frac{t}{2})} \circ s_{\gamma(0)}. \quad (2.1)$$

Proposición 2.5. Sean M un espacio simétrico y $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ una geodésica. Entonces:

- (i) $T_t(\gamma(s)) = \gamma(t + s)$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.
- (ii) $(T_t)_{*\gamma(s)}: T_{\gamma(s)}(M) \rightarrow T_{\gamma(t+s)}(M)$ es el transporte paralelo P_s^{t+s} a lo largo de γ .
- (iii) La aplicación $\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow I(M)$ dada por $\Gamma(t) = T_t$ es un subgrupo uniparamétrico de $I(M)$ (es decir, un homomorfismo de grupos de Lie).

Demostración. Para probar el primer apartado, podemos aplicar que

$$\begin{aligned} T_t(\gamma(s)) &= s_{\gamma(\frac{t}{2})}(s_{\gamma(0)}(\gamma(s))) = s_{\gamma(\frac{t}{2})}(\gamma(-s)) = s_{\gamma(\frac{t}{2})}\left(\gamma\left(\frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2} + s\right)\right)\right) \\ &= \gamma\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2} + s\right) = \gamma(t + s). \end{aligned}$$

Ahora, sean $t, s \in \mathbb{R}$ y $v \in T_{\gamma(t)}(M)$. Escogemos el único campo paralelo $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que $X(s) = v$, y tenemos que verificar que $(T_t)_{*\gamma(s)}(v) = X(t + s)$. Por un lado, ya

que X es paralelo y $s_{\gamma(0)}$ es una isometría, el campo $Y(\tau) = (s_{\gamma(0)})_{*\gamma(\tau)}(X(\tau))$ es paralelo a lo largo de $\alpha(\tau) = \gamma(-\tau)$. Como $Y(0) = (s_{\gamma(0)})_{*\gamma(0)}(X(0)) = -X(0)$, deducimos que $Y(\tau) = -X(-\tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Del mismo modo, el campo $Z(\theta) = (s_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*\alpha(\theta)}(Y(\theta))$ es paralelo a lo largo de $\beta(\theta) = \gamma(t + \theta)$, verificando que $Z(\frac{-t}{2}) = -Y(\frac{-t}{2}) = X(\frac{t}{2})$. En consecuencia, $Z(\theta) = X(t + \theta)$, y escogiendo $\theta = s$, se obtiene lo siguiente:

$$(T_t)_{*\gamma(s)}(v) = (s_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*\gamma(-s)}(s_{\gamma(0)})_{*\gamma(s)}(X(s)) = (s_{\gamma(\frac{t}{2})})_{*\gamma(-s)}(Y(s)) = Z(s) = X(t + s).$$

Por último, veamos que $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Si definimos $p = \gamma(0)$, entonces $T_{t+s}(p) = T_t(T_s(p)) = \gamma(t+s)$, en virtud del apartado (i). Por otra parte, $(T_{t+s})_{*p} = P_0^{t+s} = P_s^{t+s} \circ P_0^s = (T_t)_{*\gamma(s)} \circ (T_s)_{*p} = (T_t \circ T_s)_{*p}$. Aplicando el Lema 2.1, podemos concluir que $T_{t+s} = T_t \circ T_s$, lo que termina la demostración. \square

De la proposición anterior, así como del hecho de que los subgrupos uniparamétricos de un grupo de Lie sean curvas integrales de campos invariantes, se sigue que todo espacio simétrico M es homogéneo con respecto de $I_0(M)$ (la componente conexa de $I(M)$ que contiene a la identidad). Además, la acción de $I_0(M)$ es propia, debido al Teorema 1.8. En resumen, podemos concluir lo siguiente:

Corolario 2.6. *Sea M un espacio simétrico, $p \in M$ y $\mathfrak{g} = \text{Lie}(I(M))$. Para cualquier geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ existe un $X \in \mathfrak{g}$ de manera que $\gamma(t) = \text{Exp}(tX) \cdot p$. Además, $G = I_0(M)$ actúa de modo propio y transitivo sobre M . Si $K = G_p$, entonces K es compacto y $M \cong G/K$.*

Definición 2.7. Sea M un espacio simétrico, $G = I_0(M)$ y $K = G_p$. Decimos que M es **irreducible** si la representación de isotropía de K_0 sobre $T_p(M)$ es irreducible.

Lema 2.8 (de Schur, [35, Lema 6.15]). *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y ϕ una forma bilineal simétrica sobre V . Supongamos que un grupo de Lie G actúa irreduciblemente sobre V dejando ϕ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariantes. Entonces, existe una constante real λ tal que $\phi = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Corolario 2.9. *Si M es un espacio simétrico irreducible, la métrica de Riemann de M es única salvo multiplicación por constantes.*

Proposición 2.10. *Sea M un espacio simétrico, $G = I_0(M)$ y $K = G_p$. La conjugación por s_p , $\sigma: G \rightarrow G$, definida mediante $\sigma(g) = s_p g s_p$, es una involución de G (es decir, un homomorfismo de grupos de Lie cuyo cuadrado es la identidad). Además, si G^σ es el subgrupo de puntos fijos de σ , entonces $G_0^\sigma \subseteq K \subseteq G^\sigma$, de manera que $\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{k}$.*

Demostración. Por un lado, es sencillo comprobar que la aplicación $\sigma: I(M) \rightarrow I(M)$ definida mediante $\sigma(g) = s_p g s_p$ es una involución de $I(M)$ a partir de que $s_p^2 = \text{Id}_M$. Además, ya que σ es un homeomorfismo, lleva componentes conexas de $I(M)$ en componentes conexas de $I(M)$. Puesto que $\sigma(\text{Id}_M) = \text{Id}_M$, se deduce que $\sigma(I_0(M)) = I_0(M)$, lo que prueba la primera parte del enunciado.

Ahora, comencemos viendo que $K \subseteq G^\sigma$: dado un elemento $g \in K$, tenemos que $\sigma(g)(p) = (s_p \circ g \circ s_p)(p) = p = g(p)$, así como que $(\sigma(g))_{*p} = (s_p \circ g \circ s_p)_{*p} = (s_p)_{*p} \circ g_{*p} \circ (s_p)_{*p} = (-\text{Id}_{T_p(M)}) \circ g_{*p} \circ (-\text{Id}_{T_p(M)}) = g_{*p}$. En virtud del Lema 2.1, obtenemos que $\sigma(g) = g$, con lo que $g \in G^\sigma$ (en particular, hemos obtenido que $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}^\sigma$).

Finalmente, probaremos que $G_0^\sigma \subseteq K$. Para ello, tomamos un elemento $X \in \mathfrak{g}^\sigma$, de manera que $\text{Exp}(tX) \in G^\sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, obtenemos que $\text{Exp}(tX)(p) = \sigma(\text{Exp}(tX))(p) = s_p(\text{Exp}(tX)(s_p(p))) = s_p(\text{Exp}(tX)(p))$. Esto significa que $\text{Exp}(tX)(p)$ es un punto fijo de s_p para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora bien, escogiendo un entorno normal V de p , podemos dar un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) en dicho entorno de manera que $x^i(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y s_p se expresa en coordenadas como la aplicación $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (-x^1, \dots, -x^n)$. El único punto fijo de s_p en V es, por lo tanto, p , y como $\text{Exp}(tX)(p)$ converge a p cuando $t \rightarrow 0$, existirá un $\varepsilon > 0$ de manera que $\text{Exp}(tX)(p) = p$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Así, $\text{Exp}(tX) \in K$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con lo que derivando en $t = 0$ deducimos que $X \in \mathfrak{k}$. Llegamos así a que $\mathfrak{g}^\sigma \subseteq \mathfrak{k}$, y aplicando la aplicación exponencial tenemos que $\text{Exp}(\mathfrak{g}^\sigma) \subseteq K$. Como K es subgrupo, y $\text{Exp}(\mathfrak{g}^\sigma)$ genera G_0^σ , tenemos garantizado que $G_0^\sigma \subseteq K$. \square

Nos planteamos ahora si es posible dar algún tipo de recíproco para la Proposición 2.10. Es decir, dado un grupo de Lie G , un subgrupo compacto $K \leq G$, y una involución $\sigma: G \rightarrow G$ tal que $G_0^\sigma \subseteq K \subseteq G^\sigma$, ¿es posible dotar a la variedad G/K de una estructura de espacio simétrico? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y nos lleva a la idea de par simétrico. Para poder comprobar la veracidad de esta afirmación, necesitaremos hacer un inciso sobre espacios homogéneos reductivos.

Definición 2.11. Sea $M = G/H$ un espacio homogéneo, con $H = G_p$. Decimos que el par (G, H) es **reductivo** si existe un subespacio vectorial $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ y \mathfrak{p} es $\text{Ad}(H)$ -invariante.

Observación 2.12. Dada una descomposición reductiva (o en general una suma directa) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, podemos considerar la aplicación sobreyectiva

$$\begin{aligned} \psi: \mathfrak{g} &\rightarrow T_p(M) \\ X &\mapsto X^*(p). \end{aligned}$$

Es inmediato que \mathfrak{h} es el núcleo de ψ . Por lo tanto, podemos identificar \mathfrak{p} con $T_p(M)$ mediante la restricción $\psi: \mathfrak{p} \rightarrow T_p(M)$, que es un isomorfismo lineal. Más aún, si K es un subgrupo de Lie de G , el isomorfismo ψ nos permite identificar el espacio tangente $T_p(K \cdot p)$ con \mathfrak{k}_p , la proyección de \mathfrak{k} sobre \mathfrak{p} relativa a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$.

Resumimos las propiedades principales de una descomposición reductiva en el siguiente lema:

Lema 2.13 ([35, Lema 6.22]). *Sea $M = G/H$ un espacio homogéneo que posee una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, y $p = eH$.*

- (i) Si $\sigma: G \rightarrow G$ es un automorfismo con $\sigma(H) = H$ y $\sigma_*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, entonces la diferencial en p de la aplicación $\varphi: xH \in M \mapsto \sigma(x)H \in M$ se identifica a través de ψ con $\sigma_*: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$.
- (ii) La representación de isotropía de M se identifica a través de ψ con la representación adjunta $h \in H \mapsto \text{Ad}(h)|_{\mathfrak{p}}$.
- (iii) La aplicación “restricción a $\mathfrak{p} \equiv T_p(M)$ ” establece una correspondencia biyectiva entre las métricas G -invariantes en M y los productos interiores $\text{Ad}(H)$ -invariantes en \mathfrak{p} .

Proposición 2.14. Sea $M = G/H$ un espacio homogéneo, y σ una involución de G tal que $G_0^\sigma \subseteq H \subseteq G^\sigma$. Si $\theta = \sigma_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ y escribimos $\mathfrak{h} = \ker(\theta - \text{Id}_{\mathfrak{g}})$, $\mathfrak{p} = \ker(\theta + \text{Id}_{\mathfrak{g}})$, entonces $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ y se tienen los siguientes contenidos:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}. \quad (2.2)$$

Además, la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ es reductiva, y es conocida como la **descomposición de Cartan**.

Demostración. En primer lugar, se deduce que $\theta^2 = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ a partir de que $\sigma^2 = \text{Id}_G$. Así, tenemos en particular que θ es una involución de espacios vectoriales, y es sabido que en este caso se tiene $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Además, las proyecciones asociadas a esta descomposición son precisamente

$$\frac{1 + \theta}{2}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad \frac{1 - \theta}{2}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{p}.$$

Por otro lado, ya que $G_0^\sigma \subseteq H \subseteq G^\sigma$ vemos que $\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{h}$, y además

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \{X \in \mathfrak{g}: \sigma(\text{Exp}(tX)) = \text{Exp}(tX) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g}: \text{Exp}(t\theta X) = \text{Exp}(tX) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g}: \theta X = X\} = \ker(\theta - \text{Id}_{\mathfrak{g}}). \end{aligned}$$

Los tres contenidos (2.2) se demuestran del mismo modo, así que solamente demostraremos que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$. En efecto, si $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{p}$, vemos que $\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y] = [X, -Y] = -[X, Y]$, de donde $[X, Y] \in \mathfrak{p}$.

Ahora, veamos que $\text{Ad}(H)(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$. Con ese fin, tomamos $X \in \mathfrak{p}$, $h \in H$. Se puede comprobar con facilidad que $\sigma \circ I_h = I_{\sigma(h)} \circ \sigma$, y derivando se obtiene que $\theta \circ \text{Ad}(h) = \text{Ad}(\sigma(h)) \circ \theta$. Entonces, $\theta(\text{Ad}(h)X) = \text{Ad}(\sigma(h))(\theta X) = -\text{Ad}(\sigma(h))(X) = -\text{Ad}(h)(X)$, de donde $\text{Ad}(h)(X) \in \mathfrak{p}$. \square

Observación 2.15. En la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, los subespacios \mathfrak{h} y \mathfrak{p} son ortogonales con respecto de la forma de Killing, ya que dados $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{p}$, se tiene que $B(X, Y) = B(\theta X, \theta Y) = B(X, -Y) = -B(X, Y)$, luego $B(X, Y) = 0$.

Estamos ya en condiciones de describir la construcción de un espacio simétrico mediante grupos de Lie. Lo haremos por medio del siguiente teorema:

Teorema 2.16. *Sea G un grupo de Lie conexo, σ una involución de G y K un subgrupo compacto de G tal que $G_0^\sigma \subseteq K \subseteq G^\sigma$ (en particular, G_0^σ debe ser un subgrupo compacto). Entonces el espacio homogéneo $M = G/K$, dotado de cualquier métrica G -invariante, es un espacio simétrico.*

Observación 2.17. Fijémonos en que el carácter compacto de K implica que la representación de isotropía de G/K admite al menos un producto interior K -invariante, de manera que G/K siempre va a admitir métricas G -invariantes.

Demostración. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica G -invariante sobre M . Puesto que M es homogénea, nos basta encontrar para $p = eK$ una isometría $s: M \rightarrow M$ tal que $s(p) = p$ y s_{*p} coincide con $-\text{Id}_{T_p(M)}$ en virtud de la Proposición 2.3.

Tenemos que $\sigma(K) = K$ por hipótesis, de manera que σ pasa al cociente como una aplicación diferenciable $s: M \rightarrow M$ definida mediante $s(xK) = \sigma(x)K$. Además, $s^2 = \text{Id}_M$, con lo que s es un difeomorfismo.

Se verifica que $s(p) = s(eK) = \sigma(e)K = eK = p$. Además, utilizando la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ proporcionada por la Proposición 2.14, podemos identificar $T_p(M)$ con \mathfrak{p} y s_{*p} con $\theta = \sigma_*: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$. Pero \mathfrak{p} es el autoespacio de θ asociado a -1 , de manera que σ_* coincide con $-\text{Id}_{\mathfrak{p}}$ en \mathfrak{p} .

Por último, tenemos que verificar que s es en efecto una isometría. Para cualquier $xK \in M$, se cumple que $s \circ \varphi_x = \varphi_{\sigma(x)} \circ s$, siendo $\varphi: G \curvearrowright M$ la acción natural. Derivando en p , obtenemos que $s_{*xK} \circ (\varphi_x)_{*p} = (\varphi_{\sigma(x)})_{*p} \circ s_{*p} = (\varphi_{\sigma(x)})_{*p} \circ (-\text{Id}_{T_p(M)})$. Se deduce que s_{*xK} es una isometría ya que lo son $(\varphi_x)_{*p}$, $(\varphi_{\sigma(x)})_{*p}$ y $(-\text{Id}_{T_p(M)})$. Así, s es una isometría global. \square

Motivados por el Teorema 2.16, introducimos la noción de *par simétrico*.

Definición 2.18. Un **par simétrico** es una terna (G, K, σ) en la cual G es un grupo de Lie conexo con una involución σ , K es un subgrupo compacto, $G_0^\sigma \subseteq K \subseteq G^\sigma$ y la acción natural de G sobre G/K es casi efectiva (equivalentemente, \mathfrak{g} y \mathfrak{k} no tienen ideales en común). Por motivos de brevedad, denotaremos un par simétrico con (G, K) .

A primera vista, se podría pensar que si M es un espacio simétrico obtenido a partir de un par simétrico (G, K) , entonces $G = I_0(M)$. No obstante, en general la igualdad anterior no se verifica, ya que hay ejemplos de pares simétricos (G, K) en los que $G \subsetneq I_0(G/K)$. De todos modos, el siguiente resultado nos da condiciones suficientes para que se tenga la igualdad anteriormente mencionada.

Teorema 2.19 ([19, Teorema 4.1]). *Sea (G, K) un par simétrico en el que G es semisimple y la acción de G sobre $M = G/K$ es efectiva. Entonces $G = I_0(M)$ en el sentido de que la aplicación $\Phi: g \in G \rightarrow \varphi_g \in I_0(M)$ es un isomorfismo de grupos de Lie.*

Como consecuencia de la definición de par simétrico, así como del Teorema 2.19, obtenemos que para cualquier par simétrico (G, K) en el que G es semisimple el grupo $I_0(G/K)$ se realiza como un cociente de G por un subgrupo finito (el núcleo de ineffectividad). En particular, el álgebra de Lie de $I_0(G/K)$ coincide con \mathfrak{g} .

2.2. La curvatura de un espacio simétrico

En esta sección, calcularemos fórmulas explícitas para la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura de un espacio simétrico. Estas se obtendrán utilizando solamente un par simétrico que lo represente, de modo que serán independientes de la métrica invariante que se esté empleando.

Teorema 2.20. *Sea (G, K) un par simétrico y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan asociada. Si $p = eK$ y $X \in \mathfrak{p} \equiv T_p(M)$, entonces la geodésica maximal de $M = G/K$ con condiciones iniciales p y $X^*(p)$ está dada por $\gamma(t) = \text{Exp}(tX) \cdot p$.*

Demostración. En primer lugar, consideremos $G' = I_0(M)$, $K' = G'_p$ y $\sigma': G' \rightarrow G'$ la involución dada por $\sigma'(g) = sgs$ (con $s(gK) = \sigma(g)K$), cuya derivada denotamos por θ' . En este caso, tenemos una descomposición reductiva $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$, y sabemos que para cualquier $v \in T_p(M) \equiv \mathfrak{p}'$, la geodésica maximal de M con condiciones iniciales p y v debe ser de la forma $\gamma(t) = \text{Exp}(tZ)(p)$ para algún $Z \in \mathfrak{g}'$, debido al Corolario 2.6. Ya que $\sigma'(\text{Exp}(tZ)) = \sigma'(T_t) = s_{\gamma(0)}s_{\gamma(\frac{t}{2})}s_{\gamma(0)}s_{\gamma(0)} = T_t^{-1} = T_{-t} = \text{Exp}(-tZ)$, obtenemos derivando en $t = 0$ que $\theta'Z = -Z$, de donde $Z \in \mathfrak{p}'$.

Observemos que

$$v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}(tZ)(p) = Z^*(p)$$

de modo que Z se corresponde con v en la identificación $\mathfrak{p}' \equiv T_p(M)$.

Ahora, pensemos en el par simétrico dado. Si $\varphi: G \curvearrowright M$ es la acción natural, el carácter isométrico de la acción, junto con la conexidad de G , nos proporciona un homomorfismo de grupos de Lie $\Lambda: G \rightarrow I_0(M)$, dado por $\Lambda(g) = \varphi_g$. El núcleo de Λ es precisamente el núcleo de inefectividad N de la acción, que suponemos finito. Así, $\ker \Lambda_* = \text{Lie}(N) = 0$, de modo que Λ_* es inyectiva. Más aún, tenemos que θ es la restricción de θ' a \mathfrak{g} . En efecto, dado cualquier $g \in G$, se satisfacen las siguientes igualdades para todo $q = xK \in M$:

$$\begin{aligned} \sigma'(\Lambda(g))(q) &= (s \circ \Lambda(g) \circ s)(q) = s(\Lambda(g)(s(xK))) \\ &= s(\Lambda(g)(\sigma(x)K)) = s(g\sigma(x)K) = \sigma(g)xK \\ &= \sigma(g) \cdot q = \Lambda(\sigma(g))(q). \end{aligned}$$

Luego, $\sigma' \circ \Lambda = \Lambda \circ \sigma$, y obtenemos por derivación que la restricción de θ' a \mathfrak{g} es θ .

Veamos que $\Lambda_*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$. Dado $X \in \mathfrak{p}$, tenemos que $\theta'(\Lambda_*(X)) = \Lambda_*(\theta X) = -\Lambda_*(X)$, de manera que $\Lambda_*(X) \in \mathfrak{p}'$. Ya que $\dim \Lambda_*(\mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{p} = \dim T_p(M) = \dim \mathfrak{p}'$, deducimos a partir de que $\Lambda_*(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}'$ que en realidad son iguales.

Para concluir, tomemos ahora $X \in \mathfrak{p}$, y sea $X' = \Lambda_*(X) \in \mathfrak{p}'$, puesto que

$$\begin{aligned} [\Lambda_*(X)]^*(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}(\Lambda_*(tX))(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Lambda(\text{Exp}(tX))(p) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}(tX) \cdot p = X^*(p), \end{aligned}$$

llegamos a que la geodésica maximal de M con condiciones iniciales p y $X^*(p)$ es

$$\gamma(t) = \text{Exp}(t\Lambda_*(X))(p) = \text{Exp}(\Lambda_*(tX))(p) = \Lambda(\text{Exp}(tX))(p) = \text{Exp}(tX) \cdot p,$$

como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.21. *Sea (G, K) un par simétrico con involución $\sigma: G \rightarrow G$ y descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Para $M = G/K$ y $p = eK \in M$, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) *Si $X \in \mathfrak{p}$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\nabla_{X^*(p)}Y = [X^*, Y]_p$.*

(ii) *Si $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$, se verifica que $(R(X^*, Y^*)Z^*)_p = -[[X, Y], Z]_p^*$.*

En particular, la conexión de Levi-Civita y la curvatura de M no dependen de la métrica.

Demostración. Para probar la primera ecuación, recordemos que el flujo de X^* venía dado por $X_t^* = \varphi_{\text{Exp}(tX)}$. Ahora bien, si definimos $\gamma(t) = \text{Exp}(tX) \cdot p$, el Teorema 2.20 nos garantiza que $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ es la geodésica maximal de M con condiciones iniciales p y $X^*(p)$. Además, si T_t denota las transvecciones asociadas, tenemos que $\varphi_{\text{Exp}(tX)} = T_t$ para todo t . En efecto, ambas aplicaciones son isometrías, se tiene que $\varphi_{\text{Exp}(tX)}(p) = \text{Exp}(tX) \cdot p = \gamma(t) = T_t(p)$, y tanto $(\varphi_{\text{Exp}(tX)})_{*p}$ como $(T_t)_{*p}$ son el transporte paralelo de p a $\gamma(t)$ a lo largo de γ . El Lema 2.1 nos garantiza entonces que $\varphi_{\text{Exp}(tX)} = T_t$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} [X^*, Y](p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_{-t}^*)_{*X_t(p)}(Y(X_t(p))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_t)_{*p}^{-1}(Y(\gamma(t))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P_0^t)^{-1}(Y(\gamma(t))) = D_t Y(0) = \nabla_{\gamma'(0)} Y = \nabla_{X^*(p)} Y. \end{aligned}$$

Veamos ahora la segunda fórmula: por un lado, aprovechando que X_t es una isometría para todo t y la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} (\nabla_{X^*} \nabla_{Y^*} Z^*)_p &= \nabla_{X^*(p)} \nabla_{Y^*} Z^* = [X^*, \nabla_{Y^*} Z^*]_p \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_{-t}^*)_{*X_t(p)}(\nabla_{Y^*} Z^*(X_t(p))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_{-t}^*)_{*}(\nabla_{Y^*} Z^*)(p) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nabla_{(X_{-t}^*)_{*} Y^*} (X_{-t}^*)_{*} Z^*(p) = \nabla_{[X^*, Y^*]} Z^*(p) + \nabla_{Y^*} [X^*, Z^*](p) \\ &= \nabla_{-[X, Y]^*} Z^*(p) - \nabla_{Y^*} [X, Z]^*(p) = -[Y^*, [X, Z]^*]_p = [Y, [X, Z]]_p^*, \end{aligned}$$

donde se utilizó que $[X, Y]^*(p) = 0$, ya que $[X, Y] \in \mathfrak{k}$. Obtenemos entonces que

$$\begin{aligned} (R(X^*, Y^*)Z^*)_p &= \nabla_{X^*(p)} \nabla_{Y^*} Z^* - \nabla_{Y^*(p)} \nabla_{X^*} Z^* - \nabla_{[X^*, Y^*(p)]} Z^* \\ &= [Y, [X, Z]]_p^* - [X, [Y, Z]]_p^* = [[Z, X], Y]_p^* + [[Y, Z], X]_p^* \\ &= -[[X, Y], Z]_p^*, \end{aligned}$$

lo que demuestra la ecuación. Tenemos así la conexión y la curvatura determinadas en p , y el carácter homogéneo de M implica que ambas están unívocamente determinadas en todo M . \square

2.3. Subvariedades totalmente geodésicas

El objetivo de este apartado es detallar dos formas de construir subvariedades totalmente geodésicas en un espacio simétrico representado por un par (G, K) . La primera de estas nos proporcionará una correspondencia biunívoca entre las subvariedades totalmente geodésicas (pasando por $eK \in G/K$) y los triples de Lie en $\mathfrak{p} \equiv T_{eK}(G/K)$, transformando la búsqueda de estas subvariedades en un problema algebraico.

Lema 2.22. *Sea \widetilde{M} una variedad de Riemann y $M \subseteq \widetilde{M}$ una subvariedad totalmente geodésica. Dado cualquier $p \in M$, el subespacio vectorial $V = T_p(M) \subseteq T_p(\widetilde{M})$ es invariante por el tensor de curvatura de \widetilde{M} . Es decir, $\widetilde{R}(V, V)V \subseteq V$.*

Demostración. Sean $u, v, w \in V$. Ya que la segunda forma fundamental de M es idénticamente nula, la Ecuación de Gauss y la Ecuación de Codazzi implican que $\widetilde{R}(u, v)w \in V$ y $\widetilde{R}(u, v, w, x) = R(u, v, w, x)$ para todo $x \in V$. En consecuencia, $\widetilde{R}(u, v)w = R(u, v)w \in V$, lo que concluye la prueba. \square

Definición 2.23. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ se dice un **triple de Lie** si $[[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Corolario 2.24. *Si $M = G/K$ es un espacio simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, y $N \subseteq M$ es una subvariedad totalmente geodésica de M pasando por $p = eK$, entonces el subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}$ identificado con $T_p(N)$ es un triple de Lie.*

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$. Entonces como $[[X, Y], Z]_p^* = -R(X_p^*, Y_p^*)Z_p^* \in T_p(N)$, en virtud del Lema 2.22, deducimos que $[[X, Y], Z] \in \mathfrak{h}$. \square

Proposición 2.25. *Sea \widetilde{M} una variedad de Riemann completa y $M \subseteq \widetilde{M}$ una subvariedad totalmente geodésica y completa de M . Entonces, si $p \in M$ y $V = T_p(M) \subseteq T_p(\widetilde{M})$, se cumple que $M = \widetilde{\exp}_p(V)$. En consecuencia, si V es un subespacio vectorial de $T_p(\widetilde{M})$, existe a lo sumo una subvariedad completa y totalmente geodésica de \widetilde{M} pasando por p y cuyo espacio tangente en p es V .*

Demostración. En virtud del Teorema de Hopf-Rinow 1.1, sabemos que $M = \exp_p(V)$, con lo que basta comprobar que $\exp_p: V \rightarrow M$ es la restricción a V de $\widetilde{\exp}_p: T_p(\widetilde{M}) \rightarrow \widetilde{M}$.

Escogemos $v \in V$, y sea $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ la geodésica maximal de M con condiciones iniciales p y v . Ya que $\text{III} = 0$, se sigue que $\widetilde{D}_t \gamma'(t) = D_t \gamma'(t) + \text{III}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$, de modo que $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{M}$ es la geodésica maximal de \widetilde{M} con condiciones iniciales p y v . Así, $\gamma(t) = \widetilde{\exp}_p(tv)$, y tenemos que $\exp_p(v) = \widetilde{\exp}_p(v)$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.26. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}$ es un triple de Lie, entonces existe una única subvariedad totalmente geodésica y completa de M pasando por $p = eK$ cuyo espacio tangente en p es \mathfrak{h} . Dicha subvariedad es un espacio simétrico.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{h}$ (observemos que la suma es directa ya que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}$ y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{k}$). Resulta sencillo verificar que \mathfrak{g}' es una subálgebra a partir de que \mathfrak{h} es un triple de Lie, con lo que podemos considerar el subgrupo conexo $G' \leq G$ con álgebra de Lie \mathfrak{g}' . Veremos que la órbita $G' \cdot p$ es la subvariedad buscada.

Para empezar, fijémonos en que $T_p(G' \cdot p)$ se identifica con la proyección de \mathfrak{g}' sobre \mathfrak{p} , que es $([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{h})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{h}$. Ahora, sea $v = X^*(p) \in T_p(G' \cdot p)$, siendo $X \in \mathfrak{h}$. Sabemos que la geodésica maximal de M con condiciones iniciales p y X es $\gamma(t) = \text{Exp}(tX) \cdot p \in G' \cdot p$. Más aún, se verifica que $0 = D_t \gamma'(t)^\perp = \text{III}(\gamma'(t), \gamma'(t))$. Así, $\text{III}(v, v) = 0$ para todo $v \in T_p(G' \cdot p)$, y obtenemos por polarización que $\text{III}_p = 0$. Puesto que G' actúa de modo transitivo sobre la órbita, concluimos que $\text{III} = 0$ en todo $G' \cdot p$, con lo cual $G' \cdot p$ es una subvariedad totalmente geodésica tal que $T_p(G' \cdot p) \equiv \mathfrak{h}$.

Probaremos ahora que $G' \cdot p \equiv G'/(G' \cap K)$ es un espacio simétrico. Si $\sigma: G \rightarrow G$ es la involución asociada a nuestro par simétrico, tenemos que $\sigma(G') = G'$, ya que $\theta(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}'$ (donde $\theta = \sigma_*$). En particular, se induce un difeomorfismo $s: G'/(G' \cap K) \rightarrow G'/(G' \cap K)$, definido mediante $s(x(G' \cap K)) = \sigma(x)(G' \cap K)$. Observemos que esta es precisamente la restricción a $G' \cdot p$ de la reflexión $s_p: M \rightarrow M$, con lo que $s_p: G' \cdot p \rightarrow G' \cdot p$ es diferenciable. De esa manera, es una isometría de $G' \cdot p$ tal que $s_p(p) = p$ y $(s_p)_{*p} = -\text{Id}_{T_p(G' \cdot p)}$. Así, en virtud de la Proposición 2.3, deducimos que $G' \cdot p$ es un espacio simétrico, y por lo tanto completo. \square

Corolario 2.27. *Sea (G, K) un par simétrico con involución asociada σ . Si G' es un subgrupo de Lie conexo de G tal que $\sigma(G') = G'$, entonces $G' \cdot p$ es una subvariedad totalmente geodésica de $M = G/K$ y un espacio simétrico.*

Demostración. Ya que $\sigma(G') = G'$, tenemos que $\theta(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}'$, de manera que podemos escribir $\mathfrak{g}' = (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p})$. Sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}$. Se tiene que \mathfrak{a} es un triple de Lie en \mathfrak{g} . En efecto, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$, tenemos que $[[X, Y], Z] \in \mathfrak{g}'$, pues \mathfrak{g}' es subálgebra. Además, $[[X, Y], Z] \in [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] \subseteq [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, con lo que $[[X, Y], Z] \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}$. Entonces, en virtud del Teorema 2.26, $\mathfrak{h} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{a}$ es una subálgebra de \mathfrak{g} , y si H es el subgrupo conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{h} , entonces $H \cdot p$ es la subvariedad totalmente geodésica y completa de M pasando por p con espacio tangente \mathfrak{a} . Observemos que

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{a} = [\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}, \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}] \oplus (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}) \subseteq (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}) = \mathfrak{g}'.$$

de manera que $H \subseteq G'$, y $H \cdot p \subseteq G' \cdot p$. Ahora bien, $\dim G' \cdot p = \dim G' - \dim G' \cap K = \dim \mathfrak{g}' - \dim \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{a} = \dim H \cdot p$, de modo que $G' \cdot p = H \cdot p$ por completitud, lo que prueba que $G' \cdot p$ es totalmente geodésica y un espacio simétrico. \square

2.4. Tipo de un espacio simétrico

Sea $M = G/K$ un espacio simétrico obtenido a partir de un par simétrico (G, K) , $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan asociada, y B la forma de Killing del álgebra de Lie \mathfrak{g} . La restricción de B a $\mathfrak{p} \equiv T_{eK}(M)$ es una forma bilineal simétrica, que en principio

no tiene por que ser definida positiva ni definida negativa. Según el signo que tenga esta restricción, distinguimos los tres siguientes tipos de pares simétricos:

Definición 2.28. Sea (G, K) un par simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y B la forma de Killing de \mathfrak{g} . Decimos que el par es:

- **De tipo compacto** si B es definida negativa en \mathfrak{p} .
- **De tipo no compacto** si B es definida positiva en \mathfrak{p} .
- **De tipo euclídeo** si $B = 0$ en \mathfrak{p} .

Diremos que el espacio simétrico $M = G/K$ es **de tipo compacto**, **de tipo no compacto** o **de tipo euclídeo**, respectivamente.

Si bien la definición de tipo que acabamos de dar se formula en términos de un par simétrico, se puede dar una versión alternativa de esta que solo involucra al propio espacio. En efecto, si M es un espacio simétrico, el Teorema de de Rham [7, 10.43] nos permite descomponer (de modo único salvo permutaciones) su revestimiento universal \widetilde{M} como un producto de la forma

$$\widetilde{M} = \widetilde{M}_0 \times \widetilde{M}_1 \times \dots \times \widetilde{M}_k,$$

siendo \widetilde{M}_0 isométrico a un espacio euclídeo, y \widetilde{M}_i espacios simétricos *indescomponibles* (es decir, que no se pueden escribir como un producto de variedades de Riemann) para $i > 0$. En tal caso, M es de tipo euclídeo si y solamente si $\widetilde{M} = \widetilde{M}_0$, de tipo compacto si y solo si todos los factores que aparecen en la descomposición de \widetilde{M} son compactos, y de tipo no compacto precisamente cuando todos los factores que aparecen son no compactos. La equivalencia entre ambas nociones se puede ver a partir de [17, Sección 6].

Proposición 2.29. Sea (G, K) un par simétrico y $M = G/K$.

- (i) Si M es irreducible, entonces (G, K) es de tipo euclídeo, compacto o no compacto.
- (ii) Si (G, K) es de tipo compacto, o no compacto, entonces \mathfrak{g} es semisimple.
- (iii) (G, K) es de tipo euclídeo si y solo si \mathfrak{p} es un subespacio abeliano de \mathfrak{g} .

Demostración. Supongamos que M es irreducible, de manera que la representación de K_0 es irreducible. Basándonos en el Lema 2.13, esto es lo mismo que decir que la representación que lleva $k \in K_0$ en $\text{Ad}(k): \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ es irreducible. Identificando \mathfrak{p} con $T_{eK}(M)$, tenemos un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\text{Ad}(K)$ -invariante en \mathfrak{p} dado por $\langle X, Y \rangle = \langle X^*(eK), Y^*(eK) \rangle$. Por otra parte, la forma de Killing $B = B_{\mathfrak{g}}$ restringida a \mathfrak{p} también es una forma bilineal simétrica invariante sobre \mathfrak{p} , ya que los elementos de $\text{Ad}(K)$ son automorfismos de \mathfrak{g} . Entonces, el Lema 2.8 nos garantiza que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $B = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{p} . En tal caso, si $\lambda > 0$, (G, K) es de tipo no compacto, si $\lambda = 0$, es de tipo euclídeo, y si $\lambda < 0$ es de tipo compacto. Esto prueba la afirmación (i).

Para justificar la afirmación (ii), probaremos que B es no degenerada. Será suficiente comprobar que $B|_{\mathfrak{k}}$ es definida negativa (pues en ambos casos, podemos tomar bases ortogonales de \mathfrak{k} y \mathfrak{p} y unir las para llegar a una base ortogonal de \mathfrak{g} en la cual B tiene una matriz asociada no singular). Ya que K es compacto, podemos encontrar un producto interior (\cdot, \cdot) K -invariante en \mathfrak{g} . En tal caso, dado $g \in K$, tenemos que $(\text{Ad}(g)Y, \text{Ad}(g)Z) = (Y, Z)$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{g}$. De ese modo, fijado $X \in \mathfrak{k}$, se cumple que

$$(Y, Z) = (\text{Ad}(\text{Exp}(tX))Y, \text{Ad}(\text{Exp}(tX))Z) = (e^{t\text{ad}(X)}Y, e^{t\text{ad}(X)}Z), \quad t \in \mathbb{R},$$

y obtenemos derivando en $t = 0$ que $(\text{ad}(X)Y, Z) = -(Y, \text{ad}(X)Z)$. Tenemos entonces que $\text{ad}(X)$ es una transformación lineal antisimétrica de \mathfrak{g} , con lo cual el Teorema Espectral nos garantiza que todos los autovalores de $\text{ad}(X)$ son imaginarios puros. En consecuencia, los autovalores de $\text{ad}(X)^2$ son no positivos, de donde $B(X, X) = \text{Tr}(\text{ad}(X)^2) \leq 0$. Además, $B(X, X) = 0$ si y solamente si todos los autovalores de $\text{ad}(X)$ son cero, lo cual implica (de nuevo gracias al Teorema Espectral) que $\text{ad}(X) = 0$, es decir, que $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k}$. Pero $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} = 0$ ya que es un ideal común a \mathfrak{g} y \mathfrak{k} . Esto implica que, en efecto, $B|_{\mathfrak{k}}$ es definida negativa, con lo cual \mathfrak{g} es semisimple.

Veamos ahora la última afirmación: si $B|_{\mathfrak{p}} = 0$, por ser $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ y $B|_{\mathfrak{k}}$ definida negativa, se deduce que $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^\perp$ es un ideal de \mathfrak{g} . En consecuencia, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k} = 0$. Recíprocamente, si $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0$, tomemos una base $\{A_1, \dots, A_r\}$ de \mathfrak{k} y una base $\{C_1, \dots, C_s\}$ de \mathfrak{p} . Fijados $X, Y \in \mathfrak{p}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)\text{ad}(Y)A_i &= [X, [Y, A_i]] \in [\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}]] \subseteq [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0, \quad 1 \leq i \leq r \\ \text{ad}(X)\text{ad}(Y)C_j &= [X, [Y, C_j]] \in [\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]] = 0, \quad 1 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

Puesto que $\{A_1, \dots, A_r, C_1, \dots, C_s\}$ es una base de \mathfrak{g} , obtenemos que $B(X, Y) = 0$. En consecuencia, $B|_{\mathfrak{p}} = 0$. \square

El tipo de un espacio simétrico nos permite determinar el signo de su curvatura seccional. Concretamente, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración omitimos por motivos de brevedad:

Teorema 2.30 ([19, Teorema 3.1, Página 241]). *Sea (G, K) un par simétrico y $M = G/K$. La curvatura seccional Sec de M es:*

- *No negativa si (G, K) es de tipo compacto.*
- *No positiva si (G, K) es de tipo no compacto.*
- *Nula si (G, K) es de tipo euclídeo.*

Observación 2.31. A raíz de la demostración aportada en [19], se tiene como corolario que, para un espacio simétrico de tipo compacto o no compacto, un plano $\Sigma \subseteq \mathfrak{p}$ tiene curvatura seccional cero si y solamente si es abeliano [19, Observación 2, Página 242].

2.5. Espacios simétricos de tipo no compacto

Si (G, K, σ) es un par simétrico de tipo no compacto, y $M = G/K$, la propia definición implica que la forma de Killing B induce un producto escalar $\text{Ad}(K)$ -invariante en \mathfrak{p} (donde $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es la descomposición de Cartan), así que lo podemos extender a una métrica de Riemann G -invariante en todo M gracias al Lema 2.13. De aquí en adelante, todos los espacios simétricos de tipo no compacto estarán dotados precisamente de esa métrica.

Veremos en este apartado que $\theta = \sigma_*$ es una involución de Cartan en el álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} , con lo que las dos nociones de descomposición de Cartan que vimos para espacios simétricos de tipo no compacto y álgebras de Lie semisimples coinciden. Después, estudiaremos el efecto que tiene considerar una descomposición de Iwasawa en \mathfrak{g} construida a partir de la involución θ . Tomaremos como referencia principal [13].

Proposición 2.32. *Sea (G, K) un par simétrico de tipo no compacto con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Entonces la forma bilineal*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = B_\theta: (X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto -B(\theta X, Y) \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

es un producto escalar en \mathfrak{g} , de modo que θ es una involución de Cartan.

Demostración. En primer lugar, es claro que B_θ es bilineal y simétrica, como consecuencia de que B es simétrica y θ es una involución de álgebras de Lie. Ya que \mathfrak{k} y \mathfrak{p} son θ -invariantes, es claro que $B_\theta(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Además, la restricción de B_θ a \mathfrak{k} es $-B|_{\mathfrak{k}}$, que es definida positiva. Del mismo modo, tenemos que $B_\theta|_{\mathfrak{p}} = B|_{\mathfrak{p}}$, que es definida positiva por definición. En definitiva, B_θ es un producto escalar en \mathfrak{g} . \square

Sea (G, K, σ) un par simétrico de tipo no compacto, y $M = G/K$ el espacio simétrico resultante de considerar la métrica invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inducida por $B: \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$. Tal y como habíamos visto en la Proposición 2.29, el grupo G es semisimple, y sabemos también que $\theta = \sigma_*$ es una involución de Cartan. Por lo tanto, tiene sentido considerar descomposiciones de Iwasawa de G y de su álgebra de Lie \mathfrak{g} . Más aún, es sencillo comprobar a partir del Teorema de Descomposición Polar [35, Proposición 2.2] y el Teorema de Cartan-Hadamard 1.2 que la aplicación exponencial de M en $p = eK$ es un difeomorfismo. Combinando esto con un resultado conocido sobre cocientes simplemente conexos de grupos de Lie [20, Proposición 1.94], se obtiene lo siguiente:

Teorema 2.33. *Sea (G, K) un par simétrico de tipo no compacto y $M = G/K$. Entonces M es difeomorfo a $\mathbb{R}^{\dim M}$. En particular, M es una variedad no compacta y simplemente conexa, K es conexo y G es un grupo no compacto. Además, todas las subvariedades completas y totalmente geodésicas de M son cerradas y embebidas.*

Esto nos garantiza que K es el subgrupo conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{k} .

Fijemos un subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, y sea Δ el conjunto de raíces asociadas. Sobre este damos un criterio de positividad, y obtenemos la descomposición en suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\lambda.$$

En analogía con la notación empleada en el primer capítulo, llamemos A , N y AN a los subgrupos conexos de G cuyas álgebras de Lie son \mathfrak{a} , \mathfrak{n} y $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, respectivamente. En virtud del Teorema 1.6, tenemos que A , N y AN son subgrupos cerrados de G .

Proposición 2.34. *La acción de AN sobre M es libre y transitiva, de manera que M es difeomorfo a AN . Se dice en este caso que AN actúa **simple transitivamente** sobre M .*

Demostración. Comencemos viendo que la acción es transitiva: dado un elemento $q \in M$, sabemos que $q = g \cdot p$ para algún $g \in G$, siendo $p = eK$. La Descomposición de Iwasawa nos permite dar una factorización $g^{-1} = kan$, con $k \in K$, $a \in A$ y $n \in N$, así que

$$q = (n^{-1}a^{-1}k^{-1}) \cdot p = (n^{-1}a^{-1}) \cdot p.$$

Como $n^{-1}a^{-1} = (an)^{-1} \in AN$, se sigue que $q \in AN \cdot p$, así que $M = AN \cdot p$.

Ahora, veamos que la acción es libre. Puesto que ya sabemos que la acción es transitiva, todos los subgrupos de isotropía son conjugados. Por lo tanto, nos llega comprobar que $AN_p = AN \cap K = \{e\}$. Dado un elemento $g \in AN \cap K$, tenemos que g admite una factorización única de la forma $g = kan$, donde $k \in K$, $a \in A$ y $n \in N$. Ahora bien, por ser $g \in AN$, necesariamente $k = e$. Además, al ser $g \in K$, deducimos que $a = n = e$. Por consiguiente, $g = e^3 = e$, como queríamos demostrar. \square

En virtud de la proposición anterior, sabemos que la aplicación $\phi: AN \rightarrow M$ definida mediante $\phi(g) = gK = g \cdot p$ es un difeomorfismo de AN en M . De ese modo, podemos transformar AN en una variedad de Riemann isométrica a M considerando sobre esta la métrica pullback $\phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$. De hecho, esta métrica es invariante por la izquierda (es decir, los difeomorfismos $L_g: AN \rightarrow AN$ son isometrías). En efecto, si denotamos con φ a la acción de G sobre M , es inmediato comprobar que para cada $h \in AN$ se cumple que $\varphi_{h^{-1}} \circ \phi \circ L_h = \phi$. Por lo tanto, vemos que

$$\phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle = (\varphi_{h^{-1}} \circ \phi \circ L_h)^*\langle \cdot, \cdot \rangle = (L_h)^*\phi^*(\varphi_{h^{-1}})^*\langle \cdot, \cdot \rangle = (L_h)^*\phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde se utilizó en la última igualdad que $\varphi_{h^{-1}}$ es una isometría. Utilizaremos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ para referirnos a la métrica obtenida en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ a partir de $\phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Podemos dar una expresión explícita de esta última métrica. Para ello, tomemos vectores $X, Y \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, y consideramos sus descomposiciones ortogonales $X = X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}}$, $Y = Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}$ (con $X_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$, $X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$). Empleando que $\mathfrak{k} \subseteq \ker(\varphi^p)_{*e}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_{AN} &= \langle \phi_*(X), \phi_*(Y) \rangle = \langle \phi_*(X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}}), \phi_*(Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}) \rangle = \langle X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}} \rangle \\ &= \left\langle \frac{(1-\theta)}{2}X, \frac{(1-\theta)}{2}Y \right\rangle = \frac{1}{4} \langle X - \theta X, Y - \theta Y \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 2X_{\mathfrak{a}} + X_{\mathfrak{n}} - \theta X_{\mathfrak{n}}, 2Y_{\mathfrak{a}} + Y_{\mathfrak{n}} - \theta Y_{\mathfrak{n}} \rangle = \frac{1}{4} (4 \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \rangle + \langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}} \rangle + \langle \theta X_{\mathfrak{n}}, \theta Y_{\mathfrak{n}} \rangle) \\ &= \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \rangle + \frac{1}{2} \langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}} \rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Proposición 2.35. *La conexión de Levi-Civita de AN está caracterizada por la siguiente igualdad:*

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} = \frac{1}{4} \langle [X, Y] + (1 - \theta)[\theta X, Y], Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}. \quad (2.5)$$

Demostración. En virtud de la Fórmula de Koszul [23, Corolario 5.11], tenemos que para cualesquiera campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(AN)$, se verifica la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} &= X\langle Y, Z \rangle_{AN} + Y\langle Z, X \rangle_{AN} - Z\langle X, Y \rangle_{AN} \\ &\quad - \langle Y, [X, Z] \rangle_{AN} - \langle Z, [Y, X] \rangle_{AN} + \langle X, [Z, Y] \rangle_{AN}. \end{aligned}$$

Si particularizamos a campos $X, Y, Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, sabemos que los productos escalares de ellos son constantes, así que los tres primeros términos de la fórmula anterior se anulan. Además, puesto que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$, deducimos de la expresión que tenemos para la métrica que

$$4\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} = -\langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Por otro lado, dados elementos $U, V, W \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, observemos que

$$\langle [U, V], W \rangle = -B([U, V], \theta W) = B(V, [U, \theta W]) = -\langle V, [\theta U, W] \rangle,$$

así que podemos reescribir nuestra expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 4\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} &= \langle [\theta X, Y], Z \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle [X, \theta Y], Z \rangle \\ &= \langle [X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y], Z \rangle \\ &= \langle [X, Y] + (1 - \theta)[\theta X, Y], Z \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

El interés que tiene utilizar la descomposición de Iwasawa en este contexto es que nos permite construir de modo sencillo ejemplos de acciones propias e isométricas. En realidad, cualquier subgrupo conexo de AN actúa sobre M con esas características. Esto se debe a que si $H \leq AN$ es un subgrupo conexo cualquiera, el hecho de que la exponencial de AN sea un difeomorfismo implica que $\text{Exp}(\mathfrak{h})$ es un subconjunto abierto y cerrado de H . Por consiguiente, necesariamente $\text{Exp}(\mathfrak{h}) = H$ debe ser cerrado, ya que la aplicación $\text{Exp}: \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow AN$ es un difeomorfismo. Ya que la acción de AN sobre M es propia e isométrica (pues coincide con la acción natural $AN \curvearrowright AN$), también lo es la restricción de ella a H . Finalmente, la acción $H \curvearrowright M$ es libre, de modo que todas las órbitas inducidas por H tienen la misma dimensión, y coincide con la de H .

Capítulo 3

Foliaciones polares homogéneas

El objetivo de este capítulo es estudiar las propiedades de las acciones polares sobre variedades de Riemann, centrándonos especialmente en aquellas sin órbitas singulares.

Por otra parte, introducimos las foliaciones homogéneas en variedades, particiones de una variedad ambiente en órbitas de una acción que se pueden ver localmente como uniones de k -planos. Si bien la condición de foliación no es sencilla de comprobar en general, veremos mediante el *Teorema de Frobenius* que en el caso homogéneo esta se reduce a que la acción en cuestión no posea órbitas singulares.

Existen diversas caracterizaciones de la polaridad para acciones isométricas que inducen foliaciones. Para acabar este capítulo, probaremos un criterio algebraico de esta cuando la variedad ambiente es un espacio simétrico de tipo no compacto.

3.1. Acciones polares

En primer lugar, damos la definición de acción polar, para después probar la propiedad más importante de las secciones: su carácter totalmente geodésico.

Definición 3.1. Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia e isométrica de un grupo de Lie conexo sobre una variedad de Riemann completa. Una **sección** para la acción es una subvariedad cerrada, completa y embebida $\Sigma \subseteq M$ verificando las siguientes propiedades:

- (i) Σ interseca a todas las órbitas de la acción.
- (ii) Para cada $p \in \Sigma$, los subespacios $T_p(G \cdot p)$ y $T_p(\Sigma)$ son ortogonales.

Se dice que la acción $G \curvearrowright M$ es **polar** si admite por lo menos una sección, e **hiperpolar** si admite una sección llana.

Es conveniente hacer algunos comentarios sobre la definición anterior. En primer lugar, dada cualquier sección Σ de una acción polar $G \curvearrowright M$ y un elemento $g \in G$, es sencillo comprobar que $g \cdot \Sigma$ también es una sección para la acción. De aquí se deduce que para cualquier punto $p \in M$ existe una sección pasando por p . En segundo lugar, la dimensión

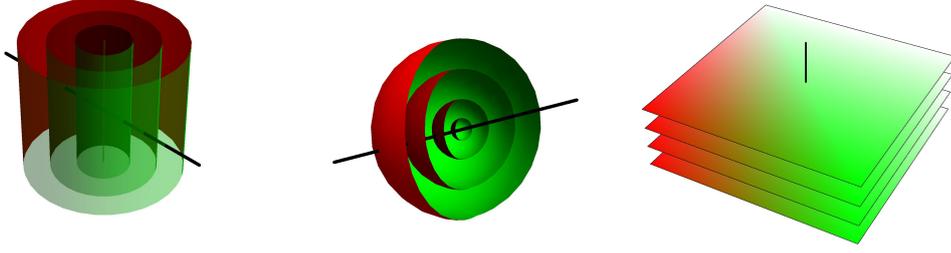


Figura 3.1: De izquierda a derecha: órbitas para la acción natural de $\text{SO}(2) \times \mathbb{R}$, $\text{SO}(3)$ y \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R}^3 . En todos los casos, la sección por 0 es una recta vectorial.

de cualquier sección coincide con la cohomogeneidad de la acción. En efecto, tomada una sección Σ para la acción, la condición (i) en la Definición 3.1 implica que la aplicación diferenciable $F: G \times \Sigma \rightarrow M$ dada por $F(g, p) = g \cdot p$ es sobreyectiva. Aplicando el Teorema de Sard [22, Teorema 6.10], obtenemos que existe un punto $(g_0, p_0) \in G \times \Sigma$ para el que $F_{*(g_0, p_0)}$ es sobreyectiva (de hecho, por el carácter equivariante de la acción, podemos suponer que $g_0 = e$). Por lo tanto,

$$T_{p_0}(M) = F_{*(e, p_0)}(T_{(e, p_0)}(G \times \Sigma)) = T_{p_0}(G \cdot p_0) \oplus T_{p_0}(\Sigma).$$

Así, $G \cdot p_0$ tiene dimensión máxima (con lo que puede ser principal o excepcional), y $\dim \Sigma = \dim M - \dim G \cdot p_0$ es necesariamente la cohomogeneidad de la acción.

Teorema 3.2. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción polar en la que todas las órbitas tienen la misma dimensión. Cualquier sección $\Sigma \subseteq M$ para la acción es una subvariedad totalmente geodésica.*

Demostración. Probaremos que la segunda forma fundamental de Σ es idénticamente nula. Tomado $p \in \Sigma$ y $\xi \in T_p(\Sigma) = \nu_p(G \cdot p)$, tenemos que $\mathbb{I}\mathbb{I}_p(\xi, \xi) \in T_p(G \cdot p)$. Además, para cualquier $v \in T_p(G \cdot p)$, podemos escoger un campo de vectores $X \in \mathfrak{g}$ de manera que $v = X^*(p)$. Aplicando ahora que ∇X^* es antisimétrico (ya que X es un campo de vectores de Killing), obtenemos que

$$\langle \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\xi, \xi), v \rangle = \langle \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\xi, \xi), X^*(p) \rangle = -\langle \xi, \nabla_\xi X^* \rangle = 0.$$

Como la elección de v fue arbitraria, concluimos que $\mathbb{I}\mathbb{I}_p(\xi, \xi) = 0$ para cualquier $\xi \in T_p(\Sigma)$. Basta polarizar para obtener que $\mathbb{I}\mathbb{I} = 0$ en todos los puntos de Σ , de manera que Σ es totalmente geodésica. \square

Observación 3.3. En el Teorema 3.2, la hipótesis de que todas las órbitas tengan la misma dimensión es clave para poder garantizar que $T_p(G \cdot p) = \nu_p(\Sigma)$ en cada punto $p \in \Sigma$. Si bien imponer esta condición será suficiente para el propósito de este trabajo, es posible demostrar que las secciones siempre son totalmente geodésicas, incluso si hay órbitas singulares. Para una prueba en el caso general, véase [31, Teorema 5.6.7].

El carácter totalmente geodésico de las secciones nos proporciona una restricción fuerte a la hora de buscar subvariedades candidatas a sección de una acción. Concretamente, dada una acción polar $G \curvearrowright M$ y $p \in M$ un punto tal que $G \cdot p$ tiene dimensión máxima, solo puede haber una sección $\Sigma \subseteq M$ pasando por p , y está caracterizada por $T_p(\Sigma) = \nu_p(G \cdot p)$.

3.2. Foliaciones en variedades diferenciables

Introducimos aquí la definición de foliación, con el fin de demostrar que las órbitas de una acción propia (sin órbitas singulares) conforman un ejemplo de ellas.

Definición 3.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $0 \leq k \leq n$ un número entero. Una **foliación de dimensión k** en M es una partición \mathcal{F} de M en subvariedades inmersas y conexas verificando la siguiente propiedad: para todo punto $p \in M$ existe una carta $(U, (x^1, \dots, x^k, y^{k+1}, \dots, y^n)) = (U, (x, y))$ centrada en p , tal que U se corresponde con un cubo de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$ mediante (x, y) , y la intersección de cualquier $A \in \mathcal{F}$ con U es una unión numerable de conjuntos de nivel de la función $y: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

Los elementos de \mathcal{F} se llaman las **hojas** de la foliación.

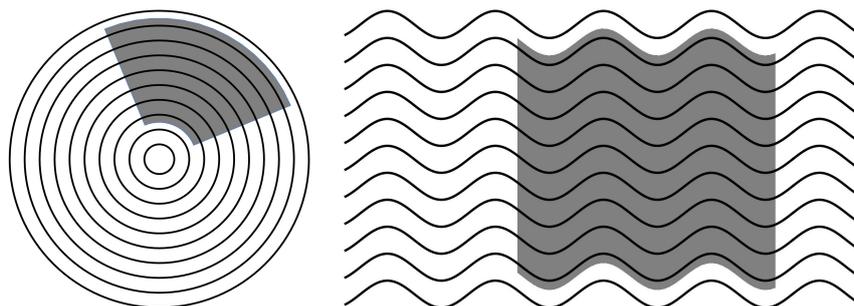


Figura 3.2: Izquierda: foliación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ formada por las circunferencias de centro el origen. Derecha: foliación de \mathbb{R}^2 formada por las gráficas de las funciones $f_t(x) = \cos(x) + t$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

3.2.1. El Teorema de Frobenius

Las nociones de distribución y variedad integral suponen una generalización de los campos de vectores y curvas integrales. *Grosso modo*, una distribución asigna a cada punto p de una variedad M un subespacio $\Delta_p \subseteq T_p(M)$, y una subvariedad de M se dice una variedad integral de la distribución si es tangente a ella en todos sus puntos. Si por cualquier punto de M pasa una variedad integral de Δ , entonces el Teorema de Frobenius Global nos permite deducir que las variedades integrales maximales forman una foliación de M . Exponemos aquí cómo es posible valernos de este resultado para probar que toda acción propia sin órbitas singulares induce una foliación. Nos apoyaremos en [33].

Definición 3.5. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $k \in \{0, \dots, n\}$. Una **distribución de rango k** es un subconjunto $\Delta \subseteq T(M)$ de la forma $\Delta = \coprod_{p \in M} \Delta_p$, siendo $\Delta_p \subseteq T_p(M)$ un subespacio vectorial de dimensión k para cada $p \in M$. Además, la asignación $p \mapsto \Delta_p$ debe ser diferenciable en el siguiente sentido: para todo $p \in M$ existen campos de vectores X_1, \dots, X_k definidos en un entorno U de p verificando que $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ es una base de Δ_q para todo $q \in U$.

La distribución Δ se dice **integrable** si para cada punto $p \in M$ existe una subvariedad inmersa $A \subseteq M$ pasando por p y cumpliendo que $T_q(A) = \Delta_q$. Diremos además que A es una **variedad integral** de la distribución Δ . En virtud de [33, Teorema 1.62], toda variedad integral de Δ está débilmente embebida en M .

Con estos términos, podemos enunciar el Teorema de Frobenius Global como sigue:

Teorema 3.6 (de Frobenius, versión global [33, Teorema 1.64], [22, Teorema 19.21]). *Sea Δ una distribución integrable de rango k sobre una variedad diferenciable M . Para todo $p \in M$, existe una única variedad integral conexa maximal $A_p \subseteq M$ de Δ pasando por p , y cualquier variedad integral conexa pasando por p está contenida en A_p . Finalmente, la familia $\mathcal{F} = \{A_p : p \in M\}$ es una foliación de dimensión k de M .*

Ahora, supongamos que $G \curvearrowright M$ es una acción propia de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable que no posee órbitas singulares, y sea k la dimensión de cualquiera de sus órbitas. A la acción se le puede asignar el subconjunto $\Delta \subseteq T(M)$ dado por $\Delta_p = T_p(G \cdot p)$ para cada $p \in M$. Por un lado, es claro que $\Delta_p = T_p(G \cdot p)$ es un subespacio k -dimensional de $T_p(M)$ para todo $p \in M$. Además, recordemos que para cualquier $p \in M$, todo vector de $T_p(M)$ es de la forma $X^*(p)$, con $X \in \mathfrak{g}$, de donde se obtiene que Δ es una distribución de rango k sobre M . Esta distribución es integrable, pues las órbitas forman una partición de M en variedades integrales de Δ . Recordemos que en este caso las órbitas de la acción son cerradas en M . Este hecho, junto con el carácter conexo y débilmente embebido de las variedades integrales maximales, implica que para cada $p \in M$ la variedad integral maximal de M pasando por p es precisamente $A_p = G \cdot p$. En definitiva, llegamos al siguiente resultado:

Teorema 3.7. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia de un grupo de Lie conexo sobre una variedad diferenciable. Si todas las órbitas de la acción tienen dimensión k , entonces la familia $\mathcal{F} = \{G \cdot p : p \in M\}$ es una foliación k -dimensional en M .*

Motivados por el teorema anterior, diremos que \mathcal{F} es una **foliación homogénea** en M . Por otra parte, si la acción $G \curvearrowright M$ es polar, entonces se dice que \mathcal{F} es una **foliación polar homogénea** (o foliación polar) en M . Siempre que no haya ambigüedad, identificaremos la acción de G con la foliación que esta induce en M .

Considerando por otra parte acciones polares sin órbitas singulares, argumentando de modo similar se puede demostrar lo siguiente:

Proposición 3.8. *Sea G un grupo de Lie que actúa polarmente sobre una variedad completa M de dimensión n induciendo una foliación de dimensión k . Entonces la familia de todas las secciones de la acción forma una foliación $(n - k)$ -dimensional de M .*

3.3. Foliaciones polares homogéneas

En este último apartado, demostraremos dos resultados orientados hacia el caso de espacios simétricos de tipo no compacto. En primer lugar, probaremos que todas las hojas de una foliación (isométricamente) homogénea son órbitas principales, lo que nos permitirá además determinar todas las foliaciones polares en espacios euclídeos. En segundo lugar, enunciaremos y demostramos el Criterio de Polaridad para foliaciones homogéneas en espacios simétricos de tipo no compacto.

Teorema 3.9. *Sea M una variedad de Hadamard y $G \curvearrowright M$ una acción propia e isométrica (con G conexo) cuyas órbitas forman una foliación homogénea. Entonces, todas las órbitas son principales.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que el resultado no es cierto (es decir, que existen órbitas excepcionales para la acción). En virtud de [28, Teorema 3.4, Página 148], podemos escoger un subgrupo compacto maximal $K \leq G$. Las órbitas inducidas por K son compactas, de modo que podemos utilizar el Teorema del Punto Fijo de Cartan 1.9 para encontrar un punto $p \in M$ con $K \cdot p = \{p\}$. En consecuencia, $K \subseteq G_p$, de donde $K = G_p$ por maximalidad.

Por un lado, necesariamente $G \cdot p$ es excepcional. En efecto, si $G \cdot p$ fuese principal, entonces para cualquier órbita $G \cdot q$, tendríamos que $[G \cdot q] \leq [G \cdot p]$. De ese modo, existe un $g \in G$ verificando que $gKg^{-1} \subseteq G_q$, lo que implica que $gKg^{-1} = G_q$ por maximalidad. Tenemos así que si $G \cdot p$ es principal, entonces todas las órbitas lo son, contradiciendo nuestra hipótesis.

Por otro lado, sabemos que $G \cdot p = G/G_p = G/K$. Más aún, gracias a [28, Teorema 3.4, Página 148], necesariamente $G \cdot p \cong \mathbb{R}^k$, siendo k la dimensión de las órbitas. Así, $G \cdot p$ es simplemente conexo, con lo que K es conexo (véase [20, Proposición 1.94]).

Fijémonos ahora en la representación slice $K \curvearrowright \nu_p(G \cdot p)$. La cohomogeneidad de esta representación es $n - k$, que coincide con la dimensión de $\nu_p(G \cdot p)$. En consecuencia, las órbitas de esta representación son discretas (y conexas, por serlo K), de manera que deben ser puntos. Esto significa que la representación slice es trivial, lo que nos lleva a una contradicción con que $G \cdot p$ sea excepcional. Concluimos entonces que todas las órbitas son principales. \square

Ejemplo 3.10 (Foliaciones polares homogéneas en espacios euclidianos). Sea $n \geq 1$ un entero arbitrario. Nos proponemos hallar todas las foliaciones polares homogéneas en el espacio \mathbb{R}^n .

Dado un subespacio V de dimensión $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ de \mathbb{R}^n , definimos una acción isométrica por traslaciones $V \curvearrowright \mathbb{R}^n$ mediante $v \cdot p = p + v$ para $v \in V$, $p \in \mathbb{R}^n$. Es inmediato comprobar que esta acción es libre y propia, ya que V es cerrado en \mathbb{R}^n . Las órbitas de la acción son precisamente las variedades afines de \mathbb{R}^n paralelas a V , y en virtud del Teorema 3.7, obtenemos que la familia \mathcal{F}_V de todas las variedades afines paralelas a V forma una foliación homogénea de \mathbb{R}^n . El subespacio vectorial V^\perp es una sección llana de la acción, con lo que \mathcal{F}_V es una foliación hiperpolar y homogénea de \mathbb{R}^n . Veremos que si W es

otro subespacio k -dimensional de \mathbb{R}^n , entonces las foliaciones \mathcal{F}_V y \mathcal{F}_W son equivalentes, así como que toda foliación polar homogénea en \mathbb{R}^n es equivalente a \mathcal{F}_V para algún subespacio $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

En primer lugar, veamos que \mathcal{F}_V es equivalente a \mathcal{F}_W si $\dim V = \dim W$. Para ello, observemos que el hecho de que V y W tengan la misma dimensión implica que existe una transformación ortogonal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(V) = W$. La aplicación f es una isometría de la variedad \mathbb{R}^n , y es sencillo comprobar que $f(p + V) = f(p) + W$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$. Deducimos entonces que las foliaciones inducidas por V y W son equivalentes.

Ahora, supongamos que tenemos una acción propia e isométrica $\varphi: H \curvearrowright \mathbb{R}^n$ (siendo H un grupo de Lie conexo) cuyas órbitas forman una foliación polar homogénea en \mathbb{R}^n . Las órbitas de H son cerradas, y por lo tanto son subvariedades completas de \mathbb{R}^n . Si probamos que son totalmente geodésicas, podemos concluir que estas son variedades afines.

Supongamos que existe un punto $o \in \mathbb{R}^n$ tal que la órbita $H \cdot o$ no es totalmente geodésica. Entonces, existe un vector unitario $\xi_o \in \nu_o(H \cdot o)$ en que el operador forma A_{ξ_o} de $H \cdot o$ con respecto a ξ_o no es idénticamente nulo. Más aún, el operador A_{ξ_o} es autoadjunto, así que el Teorema Espectral nos garantiza la existencia de un vector tangente no nulo $v \in T_o(H \cdot o)$ tal que $A_{\xi_o} v = \lambda v$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor del operador forma distinto de cero. Al ser la órbita $H \cdot o$ principal en base al Teorema 3.9, podemos encontrar un campo normal equivariante ξ a lo largo de $H \cdot o$ extendiendo ξ_o .

Tomemos el punto $p = \exp_o\left(\frac{1}{\lambda}\xi_o\right) = o + \frac{1}{\lambda}\xi_o \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que la órbita de p es el conjunto

$$H \cdot p = \left\{ \exp_q\left(\frac{1}{\lambda}\xi_q\right) : q \in H \cdot o \right\},$$

con lo que la aplicación

$$F: q \in H \cdot o \mapsto \exp_q\left(\frac{1}{\lambda}\xi_q\right) = q + \frac{1}{\lambda}\xi_q \in H \cdot p$$

es equivariante y sobreyectiva, así que es una sumersión.

Calculemos ahora $F_{*o}(v)$. Para ello, notemos que

$$F_{*o}(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(o + tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} o + tv + \frac{1}{\lambda}\xi_{o+tv} = v + \frac{1}{\lambda}\nabla_v \xi,$$

donde ∇ denota la conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}^n .

Sea $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ una extensión de ξ a un campo de vectores globalmente definido (notemos que esta existe ya que $H \cdot p$ es una subvariedad cerrada y embebida de \mathbb{R}^n). Podemos descomponer ortogonalmente (con respecto a $T_o(H \cdot o)$) el vector $\nabla_v \xi$ como

$$\nabla_v \xi = -A_\xi v + (\nabla_v Z)^\perp = -\lambda v + (\nabla_v Z)^\perp.$$

En realidad, la componente normal $(\nabla_v Z)^\perp$ se anula. Esto es debido a que los campos normales equivariantes son paralelos con respecto a la conexión normal [3, Corolario 2.3.7]. En consecuencia, tenemos que

$$F_{*o}(v) = v - \frac{1}{\lambda}\lambda v = v - v = 0,$$

lo que implica que F_{*o} no es inyectiva, y por lo tanto la órbita de p tiene dimensión inferior a la de o , que es una contradicción.

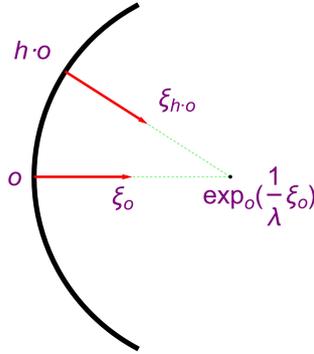


Figura 3.3: Demostración de que $\dim H \cdot p < \dim H \cdot o$.

Como esta contradicción viene de suponer que hay órbitas no totalmente geodésicas, llegamos a que $H \cdot o$ es una subvariedad totalmente geodésica para todo $o \in \mathbb{R}^n$. Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sección de la acción pasando por 0 , entonces ya vimos que debe ser un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, la órbita $H \cdot p$ es una subvariedad completa y totalmente geodésica cuyo espacio tangente en p es Σ^\perp , así que $H \cdot p = p + \Sigma^\perp$. Concluimos que la foliación \mathcal{F} formada por las órbitas de la acción $H \curvearrowright \mathbb{R}^n$ es exactamente la foliación hiperpolar $\mathcal{F}_{\Sigma^\perp}$, como queríamos demostrar.

El siguiente resultado es una aplicación directa de la Ecuación de Jacobi, así que omitimos su demostración por motivos de brevedad.

Lema 3.11 ([14, Lema 5]). *Sea M una variedad de Riemann completa y $\Sigma \subseteq M$ una subvariedad regular, completa y totalmente geodésica. Si $p \in \Sigma$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores de Killing, entonces X es normal a Σ en todo punto si y solamente si $X(p) \in \nu_p(\Sigma)$ y $\nabla_\xi X \in \nu_p(\Sigma)$ para todo $\xi \in T_p(\Sigma)$.*

Ahora, estamos en condiciones de probar el teorema central de este apartado.

Teorema 3.12 (Criterio de Polaridad, [4, Teorema 4.1]). *Sea (G, K) un par simétrico de tipo no compacto con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, y $M = G/K$. Supongamos que $H \leq G$ es un subgrupo que actúa propiamente induciendo una foliación homogénea en M . Definimos el subespacio*

$$\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp = \{\xi \in \mathfrak{p} : \langle \xi, X \rangle = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\} = \mathfrak{p} \ominus \mathfrak{h}_\mathfrak{p}, \quad (3.1)$$

donde $(\cdot)_\mathfrak{p}$ denota la proyección ortogonal sobre \mathfrak{p} . Entonces:

- (i) *La acción $H \curvearrowright M$ es polar si y solo si $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es un triple de Lie en \mathfrak{g} y \mathfrak{h} es ortogonal a $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] \oplus \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$.*

(ii) La acción es hiperpolar si y solamente si $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es un subespacio abeliano de \mathfrak{p} .

En ambos casos, sea $H_\mathfrak{p}^\perp$ el subgrupo conexo de G con álgebra de Lie $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] \oplus \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$. La subvariedad $\Sigma = H_\mathfrak{p}^\perp \cdot o$ es una sección para la acción pasando por $o = eK$.

Demostración. Antes de comenzar, recordemos que M tiene la métrica de Riemann inducida por la forma de Killing $B_\mathfrak{g}|_\mathfrak{p}: \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$. La polaridad de la acción es equivalente a que exista una sección pasando por o . Además, como todas las órbitas tienen la misma dimensión, esta sección es única y debe tener como espacio tangente $V = \nu_o(H \cdot o) = T_o(M) \ominus T_o(H \cdot o) \equiv \mathfrak{p} \ominus \mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$.

En primer lugar, supongamos que la acción $H \curvearrowright M$ es polar, de manera que existe una sección Σ para la acción verificando que $o \in \Sigma$. Esta subvariedad es totalmente geodésica gracias al Teorema 3.2, y $T_o(\Sigma) \equiv \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$. Deducimos que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es un triple de Lie en virtud del Corolario 2.24 (además, en vista del Teorema 2.26, debe ser $\Sigma = H_\mathfrak{p}^\perp \cdot o$). Nos queda así comprobar que $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] \oplus \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$.

Por un lado, \mathfrak{h} es ortogonal a $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ por la propia definición de este subespacio.

Por otro lado, sean $\xi, \eta \in \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ y $X \in \mathfrak{h}$. Probaremos que $\langle X, [\xi, \eta] \rangle = 0$ (donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota simultáneamente el producto escalar B_θ de \mathfrak{g} y la métrica de Riemann de M). Para ello, consideramos la geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = o$, $\gamma'(0) \equiv \xi$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, es sencillo comprobar que

$$T_{\gamma(t)}(H \cdot \gamma(t)) = \{Y^*(\gamma(t)): Y \in \mathfrak{h}\}, \quad T_{\gamma(t)}(\Sigma) = \{\zeta^*(\gamma(t)): \zeta \in \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp\},$$

de manera que la polaridad de la acción implica que $\langle X^*(\gamma(t)), \eta^*(\gamma(t)) \rangle = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando en $t = 0$ y recordando que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X^*(\gamma(t)), \eta^*(\gamma(t)) \rangle = \langle D_t|_{t=0} X^*(\gamma(t)), \eta^*(o) \rangle + \langle X^*(o), D_t|_{t=0} \eta^*(\gamma(t)) \rangle \\ &= \langle \nabla_{\xi^*(o)} X^*(o), \eta^*(o) \rangle + \langle X^*(o), \nabla_{\xi^*(o)} \eta^*(o) \rangle = \langle [\xi^*, X^*](o), \eta^*(o) \rangle + \langle X^*(o), [\xi^*, \eta^*](o) \rangle \\ &= \langle -[\xi, X]^*(o), \eta^*(o) \rangle + \langle X^*(o), -[\xi, \eta]^*(o) \rangle = -\langle [\xi, X]_\mathfrak{p}, \eta \rangle = -\langle X, [\xi, \eta] \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Puesto que $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] = \text{Span}\{[\xi, \eta]: \xi, \eta \in \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp\}$, concluimos que \mathfrak{h} es ortogonal a $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp]$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es un triple de Lie, así como que $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] \oplus \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es ortogonal a \mathfrak{h} . En consecuencia, $\Sigma = H_\mathfrak{p}^\perp \cdot o$ es una subvariedad totalmente geodésica de M . Probaremos que Σ es una sección.

Veamos que Σ corta a todas las órbitas: dada cualquier órbita $A \subseteq M$ distinta de $H \cdot o$, podemos encontrar un segmento de geodésica $\alpha: [0, T] \rightarrow M$ parametrizado por arco tal que $\alpha(0) = o$, $\alpha(T) = q \in A$ y α realiza la distancia entre A y $H \cdot o$. Además, como consecuencia de la Fórmula de la Primera Variación [27, Proposición 10.2], el carácter minimizante de α implica que $\alpha'(0) \in \nu_o(H \cdot o) = T_o(\Sigma)$. Ya que Σ es cerrada y totalmente geodésica, se deduce que $\alpha([0, T]) \subseteq \Sigma$, así que $q \in \Sigma \cap A$. Por consiguiente, $\Sigma \cap A \neq \emptyset$.

Ahora, veamos que Σ corta ortogonalmente a las órbitas. Ya que para cada punto q de Σ se tiene que $T_q(H \cdot q) = \{X^*(q): X \in \mathfrak{h}\}$, deducimos que $T_q(H \cdot q) \perp T_q(\Sigma)$ para

todo $q \in \Sigma$ si y solamente si para cada $X \in \mathfrak{h}$, el campo X^* es ortogonal a Σ en todos sus puntos.

Sea entonces $X \in \mathfrak{h}$ un elemento arbitrario. Sabemos que X^* es un campo de Killing, y $X^*(o) \in T_o(H \cdot o) = \nu_o(\Sigma)$. Además, para cada $\xi, \eta \in \mathfrak{h}_p^\perp \equiv T_o(\Sigma)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\xi^*(o)} X^*, \eta^*(o) \rangle &= \langle [\xi^*, X^*](o), \eta^*(o) \rangle = -\langle [\xi, X]^*(o), \eta^*(o) \rangle = -\langle [\xi, X], \eta \rangle \\ &= -\langle X, [\xi, \eta] \rangle = 0, \end{aligned}$$

pues $X \in \mathfrak{h}$ y $[\xi, \eta] \in [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$. Deducimos de aquí que $\nabla_\xi X^* \in \nu_o(\Sigma)$ para cada $\xi \in T_p(\Sigma)$, con lo que el Lema 3.11 nos garantiza que X^* es ortogonal a Σ en todos sus puntos.

Llegamos así a que $\Sigma = H_p^\perp$ es una sección para la acción, lo que termina el primer apartado.

El apartado (ii) es una consecuencia inmediata de lo ya visto y de la Observación 2.31. Si $H \curvearrowright M$ es hiperpolar, entonces Σ es llana, con lo que \mathfrak{h}_p^\perp debe ser abeliano. Del mismo modo, si \mathfrak{h}_p^\perp es abeliano, las condiciones del apartado (i) se satisfacen de modo trivial, y Σ es llana al tener curvatura seccional nula. \square

Capítulo 4

Foliaciones polares en $\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(3)$

En este último capítulo, trataremos de desarrollar el resultado original de este trabajo. Aquí, estudiaremos el espacio simétrico $M = \mathbf{SL}(3, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(3)$ (que se puede interpretar como un espacio de productos escalares en \mathbb{R}^3), con el propósito de dar una solución al siguiente problema:

Clasificar todas las foliaciones polares homogéneas sobre $\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(3)$ módulo equivalencia por órbitas.

Siendo este espacio de dimensión 5, las foliaciones que pueden aparecer tendrán cohomogeneidad entre 1 y 4. Si bien los casos extremos de cohomogeneidad 1 y 4 los podremos deducir a partir de resultados más generales (extraídos de [5] y [6]), para abordar los casos restantes nos basaremos en la teoría de subálgebras de Borel, así como el Criterio de Polaridad 3.12.

4.1. Los espacios $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(n)$

Sea $n \geq 2$ un entero arbitrario. Consideramos el conjunto \widetilde{M} de todos los productos escalares en \mathbb{R}^n :

$$\widetilde{M} = \{g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: g \text{ es un producto interior}\}.$$

Vamos a dotar a \widetilde{M} de una estructura de variedad de Riemann difeomorfa al cociente $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{O}(n)$.

Observemos que, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual de \mathbb{R}^n , entonces una forma bilineal g sobre \mathbb{R}^n es simétrica y definida positiva si y solamente si existe una transformación lineal autoadjunta y definida positiva $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (con respecto del producto escalar usual) tal que

$$g(x, y) = \langle x, By \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Esta transformación es única y caracteriza la métrica g . Por lo tanto, podemos identificar \widetilde{M} como el siguiente conjunto (el cual no estamos considerando como variedad diferenciable):

$$\widetilde{M} = \{B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}): B^T = B, B \text{ es definida positiva}\}.$$

Definimos una acción $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \widetilde{M}$ mediante la igualdad

$$A \cdot B = ABA^T, \quad A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), B \in \widetilde{M}.$$

Escogiendo $B = I_n$, es claro que el subgrupo de isotropía $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_{I_n}$ es $\mathrm{O}(n)$. Además, en virtud del Teorema Espectral se tiene que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot I_n = \widetilde{M}$. De ese modo, la aplicación

$$\phi: \mathrm{AO}(n) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n) \mapsto AA^T \in \widetilde{M}$$

nos proporciona una biyección equivariante entre \widetilde{M} y el cociente $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$. En consecuencia, podemos traspasar la estructura diferenciable de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ a \widetilde{M} exigiendo que ϕ sea un difeomorfismo.

El subgrupo $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices con determinante positivo también actúa transitivamente sobre \widetilde{M} . En efecto, dado $B \in \widetilde{M}$, existe una matriz $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que $B = AA^T$. En virtud del Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt, podemos dar una factorización $A^T = QR$, siendo $Q \in \mathrm{O}(n)$ y $R \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ una matriz triangular superior de determinante positivo. Así, $B = AA^T = R^T R = R^T (R^T)^T \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \cdot I_n$. Ya que la isotropía en I_n de la restricción $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \widetilde{M}$ es $\mathrm{SO}(n)$, concluimos que

$$\widetilde{M} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n) = \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n).$$

Sea $\sigma: \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ el homomorfismo de grupos dado por $\sigma(A) = (A^T)^{-1}$. Se verifica que σ^2 es la identidad, así como que el conjunto de puntos fijos de σ es $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})^\sigma = \mathrm{SO}(n)$. Por lo tanto, si la acción de $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ sobre \widetilde{M} es casi efectiva, concluimos que $(\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ es un par simétrico, hecho que daría a \widetilde{M} una estructura de espacio simétrico al dotarlo de una métrica invariante. Calcularemos entonces el núcleo de ineffectividad $N \leq \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Sea A un elemento del núcleo de ineffectividad de la acción $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \widetilde{M}$. Esto significa que para cualquier transformación lineal, autoadjunta y definida positiva B , se tiene que $B = ABA^T$. En particular, A es ortogonal, así que $AB = BA$ para toda transformación lineal B en las condiciones anteriores. Dado cualquier vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$, escogemos la transformación $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $B|_{\mathbb{R}x} = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}x}$ y $B|_{\{x\}^\perp} = \mathrm{Id}_{\{x\}^\perp}$. Se tiene que B es autoadjunta y definida positiva, así que $AB = BA$. Por consiguiente, $BAx = ABx = 2Ax$, con lo que $Ax \in \ker(B - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}x$. Como la elección de x fue arbitraria, se sigue que $Ax \in \mathbb{R}x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Es sabido de Álgebra Lineal que esto último implica que $A = \lambda I_n$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, y como $A \in \mathrm{SO}(n)$, necesariamente $\lambda = \pm 1$, y si n es impar, $\lambda = 1$. En consecuencia, $A \in \{\pm I_n\}$, con lo que el núcleo de ineffectividad es $\{I_n\}$, si n es impar, y $\mathbb{Z}_2 = \{\pm I_n\}$, si n es par. En todo caso, la acción es casi efectiva, así que $(\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ es un par simétrico, y cualquier métrica invariante en \widetilde{M} hace de este un espacio simétrico.

Veamos ahora cuál es la descomposición de Cartan asociada: si $\theta = \sigma_*$, tenemos que para cada $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$:

$$\theta X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\theta X} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma(e^{tX}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((e^{tX})^T)^{-1} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{-tX^T} = -X^T.$$

De aquí se sigue que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \tilde{\mathfrak{p}}$, donde $\mathfrak{k} = \ker(\theta - \mathrm{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})}) = \mathfrak{so}(n)$ y $\tilde{\mathfrak{p}} = \ker(\theta + \mathrm{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})})$ es el espacio vectorial de todas las matrices simétricas.

Consideremos ahora el subgrupo de Lie $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Es sencillo comprobar que $\sigma(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, así que el Corolario 2.27 implica que el subconjunto

$$M = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cdot I_n = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$$

es una subvariedad totalmente geodésica de \tilde{M} , así como un espacio simétrico venido del par $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$. La dimensión de este espacio es

$$\dim M = \dim \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) - \dim \mathrm{SO}(n) = (n^2 - 1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Por otra parte, la descomposición de Cartan asociada es $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, donde ahora \mathfrak{p} es el espacio vectorial de las matrices simétricas de traza cero. Es sabido que la representación de isotropía $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ es irreducible (aunque esto no será necesario para nuestros propósitos).

Es conocido que la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ viene dada por la siguiente expresión (véase [18, Sección 15.1] para su cálculo en $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$; el cálculo para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ es idéntico):

$$B(X, Y) = 2n \mathrm{Tr}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

Por consiguiente, vemos que todo elemento no nulo $X \in \mathfrak{p}$ satisface que $B(X, X) = 2n \mathrm{Tr}(X^2) = 2n \mathrm{Tr}(XX^T) = 2n \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 > 0$. Esto implica que la restricción de la forma de Killing a \mathfrak{p} es definida positiva, con lo que M es un espacio simétrico de tipo no compacto. Recordemos que en este caso, θ es una involución de Cartan, y B_θ es un producto interior en \mathfrak{g} , cuya expresión explícita viene dada por

$$B_\theta(X, Y) = -2n \mathrm{Tr}(X\theta Y) = 2n \mathrm{Tr}(XY^T) = 2n \sum_{i,j=1}^n x_{ij}y_{ij}, \quad X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}). \quad (4.1)$$

En lo que sigue, utilizaremos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para referirnos simultáneamente al producto interior B_θ y a la métrica de Riemann en M inducida por la forma de Killing en \mathfrak{p} . Por el Teorema 2.19, tenemos que $I_0(M) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ cuando n es impar.

4.1.1. Descomposición de Iwasawa de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$

Presentamos en esta sección la descomposición de Iwasawa de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ que utilizaremos a lo largo de este capítulo.

En primer lugar, tenemos que dar un subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Para ello, basta considerar el conjunto de todas las matrices diagonales de traza cero:

$$\mathfrak{a} = \{H = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Ya que dos matrices diagonales conmutan entre sí, tenemos que \mathfrak{a} es abeliano. Además, si $X \in \mathfrak{p}$ satisface que $[H, X] = 0$ para todo $H \in \mathfrak{a}$, tenemos que $X \in \mathfrak{a}$. En efecto, sea

$H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ un elemento de \mathfrak{a} tal que $a_i \neq a_j$ cuando $i \neq j$. Como $XH = HX$, entonces llamando $\{e_1, \dots, e_n\}$ a la base canónica de \mathbb{R}^n , se verifica que para cualquier i , $HXe_i = XHe_i = a_iXe_i$, con lo que $Xe_i \in \ker(H - a_iI_n) = \mathbb{R}e_i$. Llegamos así a que $X \in \mathfrak{a}$, lo que implica que \mathfrak{a} es abeliano maximal.

Sea, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, E_{ij} la matriz $n \times n$ cuyas entradas son 0 en todas las posiciones salvo en la posición (i, j) , donde vale 1. Podemos dar una descomposición ortogonal de \mathfrak{g} mediante

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{R}E_{ij} \oplus \bigoplus_{1 \leq j < i \leq n} \mathbb{R}E_{ij}.$$

Más aún, para cualquier $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{a}$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$ índices distintos, vemos que $[H, E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = (a_i - a_j)E_{ij}$. En consecuencia, deducimos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$ y las raíces restringidas son el conjunto

$$\Delta = \{\pi_i - \pi_j : i, j = 1, \dots, n, i \neq j\},$$

donde $\pi_k : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ denota la proyección ortogonal de \mathfrak{a} sobre $\mathbb{R}E_{kk}$. Además, $\mathfrak{g}_{\pi_i - \pi_j} = \mathbb{R}E_{ij}$ para cada par de índices $i \neq j$.

En vista de la expresión del conjunto de raíces, tenemos que un elemento regular de \mathfrak{a} es una matriz diagonal tal que todos sus elementos son distintos. Si escogemos, por ejemplo, un elemento $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{a}$ tal que la sucesión $(a_i)_{i=1}^n$ es estrictamente decreciente, entonces el criterio de positividad determinado a partir de H tiene por raíces positivas las siguientes:

$$\Delta^+ = \{\pi_i - \pi_j : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

El conjunto de raíces simples es en este caso

$$\Lambda = \{\alpha_i = \pi_i - \pi_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\}.$$

Para esta elección de raíces positivas, tenemos que la subálgebra $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\lambda$ es

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{R}E_{ij}$$

de todas las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal.

Damos aquí los subgrupos de Lie A , N y AN de $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ cuyas álgebras de Lie son \mathfrak{a} , \mathfrak{n} y $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ respectivamente. Por un lado, A es el subgrupo de todas las matrices diagonales de determinante uno. Por otro lado, N consta de todas las matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. Finalmente, AN es el grupo de todas las matrices triangulares superiores de determinante uno.

Para acabar, vamos a fijar la notación que emplearemos en el caso $n = 3$ a lo largo de este capítulo. Observemos que $\dim \mathbf{SL}(3, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(3) = 5$.

En la descomposición de Iwasawa de $\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})$, el conjunto de todas las raíces positivas es $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$, siendo las raíces simples α_1 y α_2 . Es inmediato comprobar que están representadas por los vectores

$$H_{\alpha_1} = \frac{1}{6} \text{diag}(1, -1, 0), \quad H_{\alpha_2} = \frac{1}{6} \text{diag}(0, 1, -1).$$

Sin embargo, por motivos de comodidad trabajaremos con los vectores (proporcionales a los anteriores):

$$T_{\alpha_1} = \text{diag}(1, -1, 0), \quad T_{\alpha_2} = \text{diag}(0, 1, -1).$$

Estos elementos forman una base de \mathfrak{a} y son de norma $\sqrt{12}$.

Por otra parte, los tres espacios de raíces que surgen son

$$\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{R}E_{12}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{R}E_{23}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{R}E_{13}.$$

En consecuencia, podemos dar generadores de estos espacios escogiendo

$$X_{\alpha_1} = E_{12}, \quad X_{\alpha_2} = E_{23}, \quad X_{\alpha_1+\alpha_2} = E_{13}.$$

Observemos que estos elementos tienen norma $\sqrt{6}$, así como que $[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = X_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Dado un elemento $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, llamaremos $\mathfrak{k}_\lambda = (1+\theta)\mathfrak{g}_\lambda$ y $\mathfrak{p}_\lambda = (1-\theta)\mathfrak{g}_\lambda$ a las proyecciones ortogonales de \mathfrak{g}_λ sobre \mathfrak{k} y \mathfrak{p} respectivamente. En particular, se tiene que $\mathfrak{k}_0 = 0$, así como que \mathfrak{k}_λ y \mathfrak{p}_λ son unidimensionales para cualquier raíz $\lambda \in \Delta$. Las notaciones $(\cdot)_\mathfrak{p}$ y $(\cdot)_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}}$ se referirán, respectivamente, a la proyección ortogonal sobre \mathfrak{p} y a la proyección sobre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ relativa a la descomposición $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. A modo de observación, enunciamos un lema que agilizará algunos de los cálculos que haremos.

Lema 4.1. *Si $X \in \mathfrak{p}$ e $Y \in \mathfrak{g}$, $[X, (1-\theta)Y] = (1+\theta)[X, Y]$ y $[X, (1+\theta)Y] = (1-\theta)[X, Y]$.*

Demostración. Probemos la primera identidad. Se tiene que

$$[X, (1-\theta)Y] = [X, Y] - [X, \theta Y] = [X, Y] - \theta[\theta X, Y] = [X, Y] + \theta[X, Y] = (1+\theta)[X, Y].$$

La otra igualdad se demuestra de modo análogo. \square

4.2. Subálgebras de Borel

En principio, hallar todos los subgrupos conexos de $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ (equivalentemente, subálgebras de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$) que inducen foliaciones polares en M no es una tarea factible, por lo menos si no imponemos ninguna condición sobre dónde están situados. No obstante, tenemos dos hechos que dan una primera restricción que deben satisfacer las subálgebras deseadas (como siempre, salvo equivalencia de órbitas).

Por un lado, es sencillo probar el siguiente lema:

Lema 4.2. *Sea $\varphi: G \curvearrowright M$ una acción isométrica de un grupo de Lie conexo sobre una variedad de Riemann. Supongamos que $H, H' \leq G$ son dos subgrupos de Lie conexos. Si H y H' son conjugados (equivalentemente, si lo son \mathfrak{h} y \mathfrak{h}'), entonces las acciones inducidas $H \curvearrowright M$ y $H' \curvearrowright M$ son equivalentes.*

En efecto, si $H' = gHg^{-1}$, entonces es inmediato comprobar que φ_g es una isometría que lleva las órbitas de H en las de H' .

Por otro lado, resulta que los subgrupos que inducen foliaciones se pueden suponer resolubles:

Teorema 4.3 ([4, Proposición 2.2]). *Sea M una variedad de Hadamard y $H \leq I(M)$ un subgrupo cerrado y conexo cuyas órbitas forman una foliación homogénea en M . Existe un subgrupo conexo, cerrado y resoluble $S \leq I(M)$ cuyas órbitas coinciden con las órbitas inducidas por H .*

En base al Teorema 4.3, cualquier subgrupo cerrado y conexo $H \leq \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ que induzca una foliación en $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ se puede suponer resoluble. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ tiene dimensión finita, es inmediato comprobar que la subálgebra \mathfrak{h} está contenida en una subálgebra resoluble maximal $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$. En este caso, se dice que \mathfrak{b} es una **subálgebra de Borel** de \mathfrak{g} . Así, de cara a intentar dar una clasificación de las foliaciones polares homogéneas en $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$, nos va a resultar de utilidad comprender la estructura de las subálgebras de Borel de \mathfrak{g} . Con esta motivación, presentamos aquí el material que vamos a necesitar de subálgebras de Borel. Nos basaremos principalmente en [20, Sección VI.6].

Sea $\bar{\mathfrak{g}}$ un álgebra de Lie compleja semisimple. Se dice que una subálgebra $\bar{\mathfrak{h}} \subseteq \bar{\mathfrak{g}}$ es una **subálgebra de Cartan** si es nilpotente y coincide con su normalizador $\mathfrak{n}_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{h}})$. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie real semisimple, diremos que una subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es una **subálgebra de Cartan** si la complexificación $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ (aquí, el producto tensor se está realizando con el cuerpo base \mathbb{R}). Se sabe que toda álgebra de Lie compleja semisimple admite subálgebras de Cartan [20, Teorema 2.9]. Además, dos subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ son conjugadas por un elemento de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ [20, Teorema 2.15]. En consecuencia, todas las subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} tienen la misma dimensión, llamada **rango** de \mathfrak{g} . En vista de [20, Proposición 2.10], las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie compleja semisimple son abelianas, así que \mathfrak{h} es abeliana.

Supongamos que $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es una involución de Cartan induciendo la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, y $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ es un subespacio abeliano maximal de \mathfrak{p} . Llamaremos Δ al conjunto de raíces restringidas asociadas. Toda subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} es conjugada por un elemento de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ a otra subálgebra de Cartan \mathfrak{h} tal que $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ [20, Proposición 6.59]. En tal caso, diremos que \mathfrak{h} es **θ -estable**, y podemos descomponer $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \tilde{\mathfrak{a}}$, siendo $\tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}$ y $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$. Por construcción, $\tilde{\mathfrak{a}}$ es un subespacio abeliano de \mathfrak{p} , y como los subespacios abelianos maximales de \mathfrak{p} son conjugados, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$.

Consideremos ahora $\Delta' = \{\lambda \in \Delta: \lambda(\tilde{\mathfrak{a}}) = 0\}$. Gracias a [20, Lema 6.63], se cumple que $\tilde{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\lambda \in \Delta'} \ker \lambda$. De modo similar a como sucedía en la descomposición de Iwasawa, por ser los elementos de $\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{a}})$ transformaciones simétricas que conmutan, es posible dar una diagonalización simultánea de todas ellas. Así, definiendo para cada $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{a}}^*$ el subespacio $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\lambda}} = \{X \in \mathfrak{g}: [H, X] = \lambda(X)$ para todo $H \in \tilde{\mathfrak{a}}\}$ y $\tilde{\Delta} \subseteq \Delta$ como el conjunto de elementos no nulos de $\tilde{\mathfrak{a}}^*$ tales que $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\lambda}} \neq 0$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Delta}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\lambda}}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Delta \\ \lambda|_{\tilde{\mathfrak{a}}} = 0}} \mathfrak{g}_{\lambda}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\lambda}} = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Delta \\ \lambda|_{\tilde{\mathfrak{a}}} = \tilde{\lambda}}} \mathfrak{g}_{\lambda}.$$

Obsérvese que $[\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{t}}] \subseteq [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, con lo que $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_0$. Por otro lado, manteniendo la analogía con la descomposición de Iwasawa, diremos que un elemento $\tilde{H}_0 \in \tilde{\mathfrak{a}}$ es **regular** si $\tilde{\lambda}(\tilde{H}_0)$

es no nulo para todo $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Delta}$. El conjunto de elementos regulares es abierto y denso en $\tilde{\mathfrak{a}}$. Introducimos a partir de un elemento regular $H_0 \in \tilde{\mathfrak{a}}$ fijado un criterio de positividad: diremos que $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Delta}$ es positiva si $\tilde{\lambda}(\tilde{H}_0) > 0$. Denotaremos con $\tilde{\Delta}^+ \subseteq \tilde{\Delta}$ al conjunto de elementos positivos, y definimos $\tilde{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Delta}^+} \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\lambda}}$.

Empleando la notación introducida, podemos enunciar el siguiente resultado debido a Mostow:

Teorema 4.4 ([25, Teorema 4.1]). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real semisimple. Toda subálgebra de Borel $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ contiene una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . Existe una involución de Cartan $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ para la que \mathfrak{h} es θ -estable, induciendo una descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Se cumple que $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \tilde{\mathfrak{a}}$, donde $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k}$ y $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}$ es abeliano. Por último, para un criterio de positividad adecuado sobre $\tilde{\Delta}$, la subálgebra de Borel \mathfrak{b} es $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \tilde{\mathfrak{a}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}$.*

Nuestro objetivo es reenunciar el Teorema 4.4 de un modo más favorable para nuestros propósitos. Para ello, pongámonos en las condiciones de dicho resultado. Podemos dar un criterio de positividad en Δ' dando un elemento no nulo $H' \in \mathfrak{a} \ominus \tilde{\mathfrak{a}}$. Tomamos ahora el vector $H = \tilde{H}_0 + \varepsilon H'$ para $\varepsilon > 0$ (donde $\tilde{H}_0 \in \tilde{\mathfrak{a}}$ nos proporciona el criterio de positividad en $\tilde{\Delta}$). Para cada $\lambda \in \Delta'$, tenemos que $\lambda(H) = \varepsilon \lambda(H')$ tiene el mismo signo que $\lambda(H')$. Por otro lado, si $\lambda \in \Delta \setminus \Delta'$, tenemos que $\tilde{\lambda} = \lambda|_{\tilde{\mathfrak{a}}} \in \tilde{\Delta}$, así como que $\lambda(H) = \tilde{\lambda}(\tilde{H}_0) + \varepsilon \lambda(H')$. Por ser Δ un conjunto finito, podemos escoger ε suficientemente próximo a cero como para que $\lambda(H)$ y $\tilde{\lambda}(\tilde{H}_0)$ tengan el mismo signo para todo $\lambda \in \Delta \setminus \Delta'$. El elemento H nos da un criterio de positividad sobre Δ compatible con los dados en Δ' y $\tilde{\Delta}$. De aquí surge un conjunto de raíces positivas Δ^+ junto con un subconjunto Λ de raíces simples.

Sea ahora $\Phi \subseteq \Delta'$ el conjunto de raíces simples en Δ' . Por construcción, se deduce que $\Phi \subseteq \Delta^+$. Veamos que en realidad $\Phi \subseteq \Lambda$.

Sea $\alpha \in \Phi$, y supongamos por reducción al absurdo que podemos escribir $\alpha = \lambda + \mu$ para ciertos $\lambda, \mu \in \Delta^+$. Como α es simple en Δ' , se sigue que λ y μ no pueden estar simultáneamente en Δ' . Además, $0 = \alpha(\tilde{H}_0) = \lambda(\tilde{H}_0) + \mu(\tilde{H}_0)$, así que los números $\lambda(\tilde{H}_0)$ y $\mu(\tilde{H}_0)$ son no nulos. No obstante, la igualdad anterior implica que las raíces inducidas $\tilde{\lambda} = \lambda|_{\tilde{\mathfrak{a}}}$ y $\tilde{\mu} = \mu|_{\tilde{\mathfrak{a}}}$ no pueden ser simultáneamente positivas en $\tilde{\Delta}$, contradiciendo la compatibilidad entre los criterios de positividad. Concluimos de aquí que α es una raíz simple.

En definitiva, acabamos de comprobar que bajo una elección de positividad adecuada en \mathfrak{a} el conjunto Δ' está generado por un subconjunto de raíces simples $\Phi \subseteq \Lambda$. En particular, deducimos las siguientes igualdades:

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\lambda \in \Phi} \ker \lambda, \quad \tilde{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\lambda \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\Phi}^+} \mathfrak{g}_{\lambda}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta_{\Phi}} \mathfrak{g}_{\lambda}$$

donde Δ_{Φ} (respectivamente, Δ_{Φ}^+) denota el conjunto de raíces (positivas) generadas por los elementos de Φ . Basándonos en la teoría de subálgebras parabólicas, introducimos la notación

$$\mathfrak{a}_{\Phi} = \bigcap_{\lambda \in \Phi} \ker \lambda, \quad \mathfrak{n}_{\Phi} = \bigoplus_{\lambda \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\Phi}^+} \mathfrak{g}_{\lambda}, \quad \mathfrak{l}_{\Phi} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta_{\Phi}} \mathfrak{g}_{\lambda}. \quad (4.2)$$

Es fácil comprobar que para cualquier subconjunto $\Phi \subseteq \Lambda$ de raíces simples el subespacio $\mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

Podemos entonces dar una segunda formulación del Teorema 4.4 como sigue:

Teorema 4.5. *Toda subálgebra de Borel \mathfrak{b} de un álgebra de Lie real semisimple \mathfrak{g} contiene una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . Existe además una involución de Cartan $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, para la que \mathfrak{h} es θ -estable. Finalmente, existe una noción de positividad en el conjunto de raíces Δ asociado y un conjunto de raíces simples $\Phi \subseteq \Delta^+$ para el que*

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$$

donde además $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}_\Phi$.

Supongamos ahora que (G, K, σ) es un par simétrico de tipo no compacto. Recordemos que las elecciones de θ , \mathfrak{a} y Λ son únicas salvo conjugación por elementos de $\text{Int}(\mathfrak{g})$, K y $N_K(\mathfrak{a})$, respectivamente. Por lo tanto, si ya teníamos prefijada una descomposición de Iwasawa sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} , podemos suponer módulo conjugaciones que la involución de Cartan, el subespacio abeliano maximal y el criterio de positividad son los asociados a la descomposición de Iwasawa elegida *a priori*. Esta observación, junto con el Lema 4.2 y el Teorema 2.19, nos permite deducir el siguiente resultado:

Teorema 4.6. *Sean (G, K) un par simétrico efectivo de tipo no compacto, con descomposición de Cartan asociada $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ un subespacio abeliano maximal, y Λ el conjunto de raíces simples que provienen de dar un criterio de positividad sobre el conjunto de raíces Δ . Supongamos que $H \leq G$ es un subgrupo cerrado y conexo que actúa sobre $M = G/K$ induciendo una foliación polar homogénea. Entonces, la acción de H es equivalente a la acción de un subgrupo cerrado, conexo y resoluble cuya álgebra de Lie está contenida en la subálgebra de Borel*

$$\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi,$$

siendo $\Phi \subseteq \Lambda$ un conjunto de raíces simples y $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}_\Phi$.

Realmente, si un par simétrico (G, K) de tipo no compacto no es efectivo, sabemos que G y $I_0(G/K)$ se diferencian en un cociente finito, así que las tesis del Teorema 4.6 siguen siendo ciertas.

4.3. Foliaciones de cohomogeneidad 1

A día de hoy, ya existe una clasificación completa de las foliaciones polares homogéneas de cohomogeneidad uno en cualquier espacio simétrico indescomponible y de tipo no compacto, debida a J. Berndt y a H. Tamaru (véase [6]). Presentaremos aquí una adaptación de los resultados expuestos en este artículo para el espacio simétrico $M = SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$. Observemos que, al tener las secciones en este caso dimensión 1, cualquier foliación polar homogénea de cohomogeneidad 1 es automáticamente hiperpolar.

Consideremos las siguientes familias de subálgebras de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$:

(1.1) $\mathfrak{h}_\ell = (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n}$, siendo $\ell \subseteq \mathfrak{a}$ una recta vectorial.

(1.2) $\mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{g}_\alpha)$, donde $\alpha \in \Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ es una raíz simple.

Si H_ℓ y H_α denotan los subgrupos conexos de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ cuyas álgebras de Lie son \mathfrak{h}_ℓ y \mathfrak{h}_α , respectivamente, entonces ambos actúan polarmente induciendo foliaciones homogéneas sobre M [6, Secciones 3 y 4]. De hecho, no hay más ejemplos posibles de foliaciones polares homogéneas, como se ve en este teorema:

Teorema 4.7 ([6, Teorema 5.5]). *Toda foliación polar homogénea de cohomogeneidad uno sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ es equivalente a la inducida por un subgrupo de la forma H_ℓ o H_α .*

Nos queda entonces determinar cuáles de las foliaciones inducidas por estos subgrupos son equivalentes.

Por un lado, se sigue inmediatamente de [6, Teorema 4.8] que las acciones de H_{α_1} y H_{α_2} son equivalentes.

Por otro lado, en virtud de [6, Teorema 3.5], hay una isometría lineal $s: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$, que proviene de intercambiar las raíces α_1 y α_2 en \mathfrak{a}^* , verificando la siguiente propiedad: dos subgrupos H_ℓ y $H_{\ell'}$ inducen foliaciones equivalentes si y solamente si $s(\ell) = \ell'$. Esto nos proporciona una familia infinita de ejemplos distintos de foliaciones polares homogéneas de cohomogeneidad uno.

Finalmente, las foliaciones inducidas por H_ℓ y H_α nunca son equivalentes, independientemente de ℓ y α . Esto se debe a que todas las hojas de la primera foliación son congruentes [6, Proposición 3.1 (a)], mientras que la segunda presenta órbitas que no son congruentes entre sí (por ejemplo, la órbita por $o = I_3\mathrm{SO}(3)$ es la única órbita minimal [6, Corolario 4.5]).

4.4. Foliaciones de cohomogeneidad 2

En esta sección, determinaremos todas las posibles foliaciones polares de cohomogeneidad dos sobre M .

Proposición 4.8. *Las siguientes subálgebras de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ inducen foliaciones polares homogéneas de cohomogeneidad 2 sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$:*

(2.1) $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha\}} = \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, siendo $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ una de las dos raíces simples y β la otra raíz simple.

(2.2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$.

(2.3) $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{\{\alpha\}} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha\}} = \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, siendo α una de las dos raíces simples y β la otra raíz.

Además, la subálgebra dada en (2.3) es la única que induce una foliación no hiperpolar.

Demostración. Comencemos viendo que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha\}}$ es una subálgebra que induce una foliación polar homogénea. En primer lugar, \mathfrak{h} es una subálgebra: aplicando que 2β y $\alpha+2\beta$ no son raíces, vemos que

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] &= [\mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}] \subseteq [\mathbb{R}T_\alpha, \mathbb{R}T_\alpha] + [\mathbb{R}T_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] + [\mathbb{R}T_\alpha, \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}] \\ &\subseteq \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subseteq \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ y tiene dimensión 3. Por lo tanto, las órbitas que induce forman una foliación homogénea de cohomogeneidad 2.

La proyección de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{p} es $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{p}_\beta \oplus \mathfrak{p}_{\alpha+\beta}$. Así, $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp = \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{p}_\beta$. Al ser

$$[2T_\alpha + T_\beta, (1 - \theta)X_\beta] = (1 + \theta)\beta(2T_\alpha + T_\beta)X_\beta = 0,$$

concluimos que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es abeliano. Se sigue del Teorema 3.12 que \mathfrak{h} induce una foliación hiperpolar.

Pasemos al segundo apartado: ya sabemos que \mathfrak{n} es una subálgebra de \mathfrak{g} , y al estar contenida en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, induce una foliación de cohomogeneidad 2 en M . Por ser $\mathfrak{n}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \ominus \mathfrak{a}$, deducimos que $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{a}$, que es abeliano en \mathfrak{p} . De nuevo, el Teorema 3.12 nos garantiza que \mathfrak{n} induce una foliación hiperpolar.

Finalmente, consideremos $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, que ya sabemos que es una subálgebra. Por el mismo motivo que en los casos anteriores, \mathfrak{h} induce una foliación homogénea de cohomogeneidad 2. Aquí, $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{p}_\beta \oplus \mathfrak{p}_{\alpha+\beta}$, con lo que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp = \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{p}_\alpha$. Vemos que

$$[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] = \mathbb{R}[T_\alpha, (1 - \theta)X_\alpha] = \mathbb{R}(1 + \theta)[T_\alpha, X_\alpha] = \mathbb{R}(1 + \theta)X_\alpha = \mathfrak{k}_\alpha \neq 0,$$

de modo que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ no es abeliano, y

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, [\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp]] &= [\mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{p}_\alpha, \mathbb{R}(1 + \theta)X_\alpha] = \mathbb{R}[T_\alpha, (1 + \theta)X_\alpha] + \mathbb{R}[(1 - \theta)X_\alpha, (1 + \theta)X_\alpha] \\ &= \mathbb{R}(1 - \theta)[T_\alpha, X_\alpha] + \mathbb{R}(1 - \theta)[(1 - \theta)X_\alpha, X_\alpha] \subseteq \mathfrak{p}_\alpha \oplus \mathbb{R}T_\alpha = \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp. \end{aligned}$$

Así, $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es un triple de Lie. Por último, como \mathfrak{k}_α es ortogonal a \mathfrak{a} , a \mathfrak{p}_β y a $\mathfrak{p}_{\alpha+\beta}$, se sigue que \mathfrak{h} y $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp]$ son ortogonales. En virtud del Teorema 3.12, esta subálgebra induce una foliación no hiperpolar de cohomogeneidad 2 sobre M . \square

Proposición 4.9. *Si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ es una subálgebra cuyo subgrupo conexo H asociado induce una foliación polar homogénea de cohomogeneidad dos, entonces existe otra subálgebra $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ de dimensión 3 cuyas órbitas forman una foliación equivalente a la obtenida a partir de \mathfrak{h} .*

Demostración. En virtud del Teorema 4.6, podemos suponer (salvo por equivalencia de órbitas) que existe un conjunto de raíces simples $\Phi \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2\}$ tal que \mathfrak{h} está contenida en la subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$, con $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}_\Phi$. Denotemos con B al subgrupo conexo de $SL(3, \mathbb{R})$ cuya álgebra de Lie es \mathfrak{b} .

Supongamos en primer lugar que Φ tiene dos elementos, de modo que $\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Como $H \leq B$, tenemos que para $o = I_3 \mathbf{SL}(3, \mathbb{R})$, $H \cdot o \subseteq B \cdot o$ (y el carácter débilmente embebido de B implica que la inclusión de $H \cdot o$ en $B \cdot o$ es una inmersión). En particular, $\dim B \cdot o \geq 3$. Sin embargo, el espacio tangente a $B \cdot o$ en o se identifica con $(1 - \theta)\mathfrak{b} = 0$, pues $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k}$, lo que nos lleva a una contradicción.

Ahora, pongamos que $\Phi = \{\alpha\}$, siendo α una raíz simple, y sea β la otra. En este caso, vemos que

$$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus (\mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}T_\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \quad \mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k}_\alpha.$$

Al ser $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}T_\alpha) \oplus \mathfrak{p}_\beta \oplus \mathfrak{p}_{\alpha+\beta}$, deducimos que los vectores T_α y $(1 - \theta)X_\alpha$ pertenecen a $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$. Por lo tanto, necesariamente $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp = \mathbb{R}T_\alpha \oplus \mathfrak{p}_\alpha$, y así $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{p}_\beta \oplus \mathfrak{p}_{\alpha+\beta}$. Obtenemos de aquí que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}} = \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, con lo que existen elementos $uX_\alpha, vX_\alpha, wX_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tales que

$$T_\alpha + 2T_\beta + (1 + \theta)(uX_\alpha) \in \mathfrak{h}, \quad X_\beta + (1 + \theta)(vX_\alpha) \in \mathfrak{h}, \quad X_{\alpha+\beta} + (1 + \theta)(wX_\alpha) \in \mathfrak{h}.$$

Por consiguiente, el Criterio de Polaridad 3.12 nos garantiza que estos elementos son ortogonales a $[T_\alpha, (1 - \theta)X_\alpha] = 2(1 + \theta)X_\alpha$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T_\alpha + 2T_\beta + (1 + \theta)(uX_\alpha), 2(1 + \theta)X_\alpha \rangle = 24u, \\ 0 &= \langle X_\beta + (1 + \theta)(vX_\alpha), 2(1 + \theta)X_\alpha \rangle = 24v, \\ 0 &= \langle X_{\alpha+\beta} + (1 + \theta)(wX_\alpha), 2(1 + \theta)X_\alpha \rangle = 24w. \end{aligned}$$

De ese modo, $u = v = w = 0$, y tenemos la cadena de inclusiones

$$\mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{k}_\alpha \oplus \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

Al ser \mathfrak{k}_α unidimensional, nos basta probar que $\mathfrak{k}_\alpha \oplus \mathbb{R}(T_\alpha + 2T_\beta) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ no puede inducir una foliación polar homogénea. En efecto, de inducirse tal foliación, debería cumplirse que $(1 + \theta)X_\alpha$ es ortogonal a $2(1 + \theta)X_\alpha$, lo cual es claramente falso. Por lo tanto, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{\{\alpha\}} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha\}} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, como queríamos demostrar.

Finalmente, observemos que si $\Phi = \emptyset$ tenemos que $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, siendo $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0 = 0$. Concluimos que en cualquier caso $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

El hecho de que \mathfrak{h} tenga dimensión tres se sigue ahora de que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. \square

Teorema 4.10. *Sea $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ cuyo subgrupo conexo asociado H induce una foliación polar homogénea de cohomogeneidad dos. Entonces, salvo por equivalencia de órbitas, \mathfrak{h} es necesariamente una de las subálgebras (2.1), (2.2) o (2.3) dadas en la Proposición 4.8.*

Demostración. La prueba de este resultado se basa en estudiar todas las posibilidades para \mathfrak{h} y aplicar el Criterio de Polaridad 3.12.

Caso 1: $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \neq 0$. Aquí, podemos encontrar un vector no nulo $A = uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}$ en $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$. Por otra parte, la Fórmula de Grassmann implica que $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \geq 1$, de modo que podemos escoger un elemento $X = c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$ en \mathfrak{h} . Como $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{n}$

y $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ tiene dimensión a lo sumo 2 en este caso, se deduce que los vectores X , $[A, X]$ y $[A, [A, X]]$ son elementos linealmente dependientes de \mathfrak{h} contenidos en \mathfrak{n} . Tomando entonces sus coordenadas con respecto de la base $\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1+\alpha_2}\}$, se tiene que el siguiente determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha_1} & c_{\alpha_2} & c_{\alpha_1+\alpha_2} \\ (2u-v)c_{\alpha_1} & (2v-u)c_{\alpha_2} & (u+v)c_{\alpha_1+\alpha_2} \\ (2u-v)^2c_{\alpha_1} & (2v-u)^2c_{\alpha_2} & (u+v)^2c_{\alpha_1+\alpha_2} \end{vmatrix} = 3c_{\alpha_1}c_{\alpha_2}c_{\alpha_1+\alpha_2}(u-2v)(u-v)(2u-v).$$

Por lo tanto, alguno de los seis factores que aparecen debe ser nulo. Esto nos abre seis casos distintos (que en realidad se pueden reducir a menos).

Caso 1.1: $A \in \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2})$ (es decir, $u = 2v$; el caso $v = 2u$ es análogo). Podemos suponer entonces que $A = 2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}$. Fijémonos en que $[A, X] = 3c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + 3c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$, que es linealmente independiente respecto de A y X si y solamente si $c_{\alpha_2} \neq 0$ y $(c_{\alpha_1}, c_{\alpha_1+\alpha_2}) \neq (0, 0)$.

Caso 1.1.1: $c_{\alpha_2} \neq 0$ y $(c_{\alpha_1}, c_{\alpha_1+\alpha_2}) \neq (0, 0)$. Una base de \mathfrak{h} viene dada por el conjunto $\{A, X, [A, X]\} = \{2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}, c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}, 3c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + 3c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}\}$. Aplicando operaciones elementales sobre la base, podemos ver que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2})$$

para cierto $\phi \in [0, \pi)$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}T_{\alpha_2} \oplus (1 - \theta)\mathbb{R}(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}).$$

Por ser $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$, definiendo los vectores

$$\begin{aligned} U &= [X_{\alpha_2}, [2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}, \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}]] \in \mathfrak{h}, \\ V &= [T_{\alpha_2}, (1 - \theta)\mathbb{R}(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2})] \in [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp], \end{aligned}$$

debe cumplirse que $0 = \langle U, V \rangle = -18 \cos(\phi)^2$. Esto implica que $\phi = \pi/2$, de modo que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$. Aquí, vemos que $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}T_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1}$ no es un triple de Lie, pues

$$[(1 - \theta)X_{\alpha_1}, [T_{\alpha_2}, (1 - \theta)X_{\alpha_1}]] = 2T_{\alpha_1} \notin \mathfrak{h}_p^\perp.$$

En resumen, este caso nos lleva a una contradicción.

Caso 1.1.2: $c_{\alpha_2} = 0$. Así, podemos suponer que existe un ángulo $\phi \in [0, \pi/2)$ tal que $X = \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Completamos $\{A, X\}$ a una base de \mathfrak{h} añadiendo un elemento $Y = Y_a + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$, siendo $Y_a \in \mathfrak{a}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X e Y son ortogonales. Observemos que $[A, Y] = 3d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + 3d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$, que es un vector ortogonal a X .

Si $[A, Y] \neq 0$ (esto es, si $(d_{\alpha_1}, d_{\alpha_1+\alpha_2}) \neq (0, 0)$), entonces los vectores A , X y $[A, Y]$ forman una base de \mathfrak{h} . Mediante operaciones elementales, llegamos a

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}X_{\alpha_1} \oplus \mathbb{R}X_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathfrak{a}_{\{\alpha_2\}} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_2\}},$$

que se corresponde con una subálgebra del tipo (2.3).

Si $[A, Y] = 0$ (es decir, si $d_{\alpha_1} = d_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$), entonces $Y = Y_{\mathfrak{a}} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2}$. De hecho, como $A = 2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} \in \mathfrak{h}$, podemos suponer que $Y_{\mathfrak{a}} = zT_{\alpha_1}$ para algún coeficiente z . Obtenemos así que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(zT_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2}).$$

En consecuencia:

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp} = \mathbb{R}(1 - \theta)(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(d_{\alpha_2}T_{\alpha_2} + z(1 - \theta)X_{\alpha_2}).$$

Por consiguiente, como

$$U = [(1 - \theta)(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}), d_{\alpha_2}T_{\alpha_2} + z(1 - \theta)X_{\alpha_2}] \in [\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}],$$

debe cumplirse que $0 = \langle \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}, U \rangle = 6(z \cos(2\phi) - d_{\alpha_2} \sin(2\phi))$, de modo que podemos suponer que $Y = \sin(2\phi)T_{\alpha_1} + \cos(2\phi)X_{\alpha_2}$, quedando así

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\sin(2\phi)T_{\alpha_1} + \cos(2\phi)X_{\alpha_2}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} & [\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}, \sin(2\phi)T_{\alpha_1} + \cos(2\phi)X_{\alpha_2}] \\ &= -4 \sin(\phi) \cos(\phi)^2 X_{\alpha_1} + \cos(3\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Para que esto sea posible, este último vector tiene que ser proporcional a X , lo que implica que el siguiente determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -4 \sin(\phi) \cos(\phi)^2 & \cos(3\phi) \end{vmatrix} = \cos(\phi)^2.$$

Por lo tanto, $\phi = \pi/2$, y llegamos a que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}X_{\alpha_2} \oplus \mathbb{R}X_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2},$$

lo cual es una contradicción (como ya vimos en el caso 1.1.1).

Caso 1.1.3: $c_{\alpha_1} = c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, con lo que podemos suponer $X = X_{\alpha_2}$. De nuevo, ampliamos $\{A, X\}$ a una nueva base $\{2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}, X_{\alpha_2}, Y\}$, con $Y = Y_{\mathfrak{a}} + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Aquí, podemos escoger que $d_{\alpha_2} = 0$ e $Y_{\mathfrak{a}} = zT_{\alpha_1}$. Observemos que

$$[2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}, Y] = 3d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + 3d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}.$$

Si $(d_{\alpha_1}, d_{\alpha_1+\alpha_2}) \neq (0, 0)$, entonces $\{A, X, [A, Y]\}$ es una base de \mathfrak{h} , y existe un $\phi \in [0, \pi)$ para el que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}).$$

Este tipo de subálgebras ya fue estudiado en el caso 1.1.1.

Si $d_{\alpha_1} = d_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, tenemos que $Y = zT_{\alpha_1}$, con lo que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}, \quad \mathfrak{h}_p^\perp = \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

No obstante, tenemos que

$$\langle X_{\alpha_2}, [(1-\theta)X_{\alpha_1}, (1-\theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}] \rangle = 6 \neq 0$$

así que llegamos a una contradicción.

Caso 1.2: $A \in \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2})$ (es decir, $u = v$). Podemos suponer que $A = T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}$. Fijémonos en que

$$[A, X] = c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + 2c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2},$$

que es linealmente independiente respecto de A y X si y solo si $c_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$ y $(c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}) \neq (0, 0)$.

Caso 1.2.1: $c_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$ y $(c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}) \neq (0, 0)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ para cierto $\phi \in [0, \pi)$. Tras realizar operaciones elementales sobre la base $\{A, X, [A, X]\}$, vemos que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

En tal caso, $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}(T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(1-\theta)(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_2})$. Como \mathfrak{h}_p^\perp es un triple de Lie y es ortogonal a \mathfrak{h} , se sigue que el vector

$$[(1-\theta)(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_2}), [(1-\theta)(-\sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_2}), T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}]] \in \mathfrak{h}_p^\perp$$

es ortogonal a $T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}$ y a $X_{\alpha_1+\alpha_2}$. La ortogonalidad aquí implica que $-36 \cos(2\phi)$ y $-18 \sin(2\phi)$ se anulan simultáneamente, lo que nos lleva a una contradicción.

Caso 1.2.2: $c_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$ pero $c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} = 0$. Así, escogemos $X = X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Completamos $\{A, X\}$ a una base de \mathfrak{h} añadiendo un vector de la forma $Y = zT_{\alpha_2} + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2}$. Ya estudiamos la posibilidad de que $z = 0$ en el caso 1.2.1, así que podemos suponer $z \neq 0$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{R}(zT_{\alpha_2} + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2}), \\ \mathfrak{h}_p^\perp &= \mathbb{R}(d_{\alpha_1}(T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) + 3z(1-\theta)X_{\alpha_1}) \oplus \mathbb{R}(d_{\alpha_2}(T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) + 3z(1-\theta)X_{\alpha_2}). \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\langle X_{\alpha_1+\alpha_2}, [d_{\alpha_1}(T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) + 3z(1-\theta)X_{\alpha_1}, d_{\alpha_2}(T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) + 3z(1-\theta)X_{\alpha_2}] \rangle = 54z^2 \neq 0,$$

lo que nos lleva a una contradicción.

Caso 1.2.3: $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$. Podemos asumir que existe un $\phi \in [0, \pi)$ de modo que $X = \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}$. Ampliamos $\{A, X\}$ a una base tomando un elemento de la forma $Y = zT_{\alpha_2} + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$ que sea ortogonal a X .

Si $(d_{\alpha_1}, d_{\alpha_2}) \neq (0, 0)$, entonces el corchete $[X, [A, Y]] = (\cos(\phi)d_{\alpha_2} - \sin(\phi)d_{\alpha_1})X_{\alpha_1+\alpha_2}$ es no nulo y ortogonal a A y X . De ese modo:

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2},$$

caso que ya fue estudiado en el apartado 1.2.1.

Si $d_{\alpha_1} = d_{\alpha_2} = 0$, entonces $Y = zT_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Suponemos $z \neq 0$ (si no, estaríamos en el caso 1.2.1). Puesto que $[A, Y] = 2d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$ tiene que ser múltiplo de Y , necesariamente $d_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, de modo que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}).$$

Ya que $[T_{\alpha_2}, \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}] = -\cos(\phi)X_{\alpha_1} + 2\sin(\phi)X_{\alpha_2} \in \mathfrak{h}$, se sigue que

$$0 = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\cos(\phi) & 2\sin(\phi) \end{vmatrix} = 3\cos(\phi)\sin(\phi).$$

Esto nos lleva a que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ para algún i , que ya fue estudiada en el caso 1.1.3.

Caso 1.3: $X = c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$ (esto es, $c_{\alpha_1} = 0$; el caso $c_{\alpha_2} = 0$ se estudia del mismo modo). Entonces, tenemos que $A = uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}$, y para evitar caer en un caso anterior, podemos suponer que $u - 2v, u - v$ y $2v - u$ son no nulos. Observemos que $[A, X] = (2v - u)c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + (u + v)c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Caso 1.3.1: $[A, X]$ no es un múltiplo de X . Entonces, tras aplicar operaciones elementales, llegamos a que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Aquí, $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}((2v - u)T_{\alpha_1} + (v - 2u)T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1}$, y como es un triple de Lie ortogonal a \mathfrak{h} , necesariamente

$$0 = \langle uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}, [(1 - \theta)X_{\alpha_1}, [(2v - u)T_{\alpha_1} + (v - 2u)T_{\alpha_2}, (1 - \theta)X_{\alpha_1}]] \rangle = 36v(v - 2u),$$

de manera que $v = 0$. Así, $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$, que es el ejemplo (2.1).

Caso 1.3.2: $[A, X]$ es múltiplo de X . El siguiente determinante se debe anular:

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha_2} & c_{\alpha_1+\alpha_2} \\ (2v - u)c_{\alpha_2} & (u + v)c_{\alpha_1+\alpha_2} \end{vmatrix} = c_{\alpha_2}c_{\alpha_1+\alpha_2}(2u - v),$$

lo que implica que $c_{\alpha_2} = 0$ o $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$.

Caso 1.3.2.1: $c_{\alpha_2} = 0$. Entonces, podemos suponer que $X = X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Ampliamos $\{A, X\}$ a una base añadiendo un vector de la forma $Y = Y_a + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2}$, con $Y_a \in \mathfrak{a}$ ortogonal a A . Fijémonos en que $[A, Y] = (2u - v)d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + (2v - u)d_{\alpha_2}X_{\alpha_2}$.

Si $(d_{\alpha_1}, d_{\alpha_2}) \neq (0, 0)$, entonces $[A, Y]$ es linealmente independiente respecto de A y X . En consecuencia, hay un $\phi \in [0, \pi)$ para el que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Como $[uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}, \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}] = (2u - v)\cos(\phi)X_{\alpha_1} + (2v - u)\sin(\phi)X_{\alpha_2}$ está en \mathfrak{h} , el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ (2u - v)\cos(\phi) & (2v - u)\sin(\phi) \end{vmatrix} = 3(v - u)\cos(\phi)\sin(\phi)$$

Pongamos que $\cos(\phi) = 0$ (el caso $\sin(\phi) = 0$ es análogo), de modo que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad \mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}((2v - u)T_{\alpha_1} + (v - 2u)T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1}.$$

para que \mathfrak{h}_p^\perp sea un triple de Lie ortogonal a \mathfrak{h} , necesariamente

$$0 = \langle uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}, [(1 - \theta)X_{\alpha_1}, [(2v - u)T_{\alpha_1} + (v - 2u)T_{\alpha_2}, (1 - \theta)X_{\alpha_1}]] \rangle = 36v(v - 2u).$$

Deducimos de aquí que $v = 0$, y $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$, que es un ejemplo del tipo (2.1).

Si $d_{\alpha_1} = d_{\alpha_2} = 0$, entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ y $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2}$. Sin embargo,

$$\langle X_{\alpha_1+\alpha_2}, [(1 - \theta)X_{\alpha_1}, (1 - \theta)X_{\alpha_2}] \rangle = 6 \neq 0,$$

contradiciendo la polaridad de la acción.

Caso 1.3.2.2: $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, con lo que escogemos $X = X_{\alpha_2}$. Ampliamos $\{A, X\}$ a una base añadiendo un vector $Y = Y_{\mathfrak{a}} + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$, siendo $Y_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$ ortogonal a A . Vemos que $[X, [A, Y]] = (v - 2u)d_{\alpha_1}X_{\alpha_1+\alpha_2}$ es no nulo si y solo si $d_{\alpha_1} \neq 0$.

Si $d_{\alpha_1} \neq 0$, entonces $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$, que estudiamos en el caso anterior.

De ser $d_{\alpha_1} = 0$ e $Y_{\mathfrak{a}} = 0$, volvemos a obtener que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$. Suponemos entonces que $Y_{\mathfrak{a}} \neq 0$, $d_{\alpha_1} = 0$. Por otra parte, $[A, Y] = d_{\alpha_1+\alpha_2}(u+v)X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$. Si $d_{\alpha_1+\alpha_2}(u+v) \neq 0$, volvemos al caso anterior, mientras que si $d_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, llegamos a que $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}$, que ya fue visto. Por consiguiente, asumimos que $v = -u$. Mediante operaciones elementales, podemos escribir

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathbb{R}(T_{\alpha_2} + zX_{\alpha_1+\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}.$$

Puesto que $[T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2} + zX_{\alpha_1+\alpha_2}] = zX_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$, se sigue que $z = 0$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}$, ya visto en el caso 1.1.3.

Caso 1.4: $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, de modo que $A = uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}$ y $X = c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}X_{\alpha_2}$. Podemos suponer que $u - 2v$, $u - v$ y $2v - u$ son distintos de cero, así como que $c_{\alpha_1} \neq 0 \neq c_{\alpha_2}$. Vemos que $[A, X] = (2u - v)c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + (2v - u)c_{\alpha_2}X_{\alpha_2}$, y es linealmente independiente con respecto a A y X ya que

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha_1} & c_{\alpha_2} \\ (2u - v)c_{\alpha_1} & (2v - u)c_{\alpha_2} \end{vmatrix} = 3c_{\alpha_1}c_{\alpha_2}(v - u) \neq 0.$$

Deducimos de aquí que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}$, que no es una subálgebra puesto que $[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = X_{\alpha_1+\alpha_2} \notin \mathfrak{h}$.

Caso 2: $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$. Exploramos todas las posibilidades en función de la dimensión de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ (que está acotada inferiormente por 1).

Caso 2.1: $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = 3$. Esto implica que $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, que es el ejemplo (2.2).

Caso 2.2: $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = 2$. Tomados elementos $U = u_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + u_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + u_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$ y $V = v_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + v_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + v_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$ linealmente independientes en $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, tenemos que su corchete $[U, V] = (u_{\alpha_1}v_{\alpha_2} - u_{\alpha_2}v_{\alpha_1})X_{\alpha_1+\alpha_2}$ pertenece a \mathfrak{h} . Si $[U, V] = 0$, entonces las proyecciones de U y V sobre $\mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}$ son proporcionales, de modo que $X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$. Si $[U, V] \neq 0$, obtenemos directamente que $X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$. Así, podemos dar una base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, donde $X = X_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $Y = \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}$ para cierto $\phi \in [0, \pi)$.

Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$, podemos ampliar $\{X, Y\}$ a una base de \mathfrak{h} añadiendo un elemento de la forma $Z = uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2} - \sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_2}$. Observemos que

$$[Y, Z] = (v - 2u) \cos(\phi)X_{\alpha_1} + (u - 2v) \sin(\phi)X_{\alpha_2} + X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n},$$

lo que implica que

$$0 = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ (v - 2u) \cos(\phi) & (u - 2v) \sin(\phi) \end{vmatrix} = 3(u - v) \cos(\phi) \sin(\phi).$$

Caso 2.2.1: $u = v$. Al ser $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ bidimensional, necesariamente $u = v \neq 0$. Tenemos entonces que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + uT_{\alpha_2} - \sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(\cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}(T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2} + 3u \sin(\phi)(1 - \theta)X_{\alpha_1} - 3u \cos(\phi)(1 - \theta)X_{\alpha_2}).$$

Escribiendo $T = T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}$ y $S = T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2} + 3u \sin(\phi)(1 - \theta)X_{\alpha_1} - 3u \cos(\phi)(1 - \theta)X_{\alpha_2}$, se tiene que

$$\langle uT_{\alpha_1} + uT_{\alpha_2} - \sin(\phi)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)X_{\alpha_2}, [T, [T, S]] \rangle = -162u \neq 0,$$

contradiciendo que $\mathfrak{h}_p^\perp \perp \mathfrak{h}$ es un triple de Lie.

Caso 2.2.2: $\cos(\phi) = 0$ (el caso $\sin(\phi) = 0$ es análogo). Aquí, $Y = X_{\alpha_2}$ y $Z = uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2} - X_{\alpha_1}$.

Si $v \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathbb{R}(uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2} - X_{\alpha_1}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ \mathfrak{h}_p^\perp &= \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2} + 3v(1 - \theta)X_{\alpha_1}) \oplus \mathbb{R}((2v - u)T_{\alpha_1} + (v - 2u)T_{\alpha_2}). \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\langle uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2} - X_{\alpha_1}, [T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2} + 3v(1 - \theta)X_{\alpha_1}, (2v - u)T_{\alpha_1} + (v - 2u)T_{\alpha_2}] \rangle = 54v^2 \neq 0,$$

llevándonos a una contradicción.

Si $v = 0$, podemos reescribir \mathfrak{h} como

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}(zT_{\alpha_1} + X_{\alpha_1}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2},$$

con $z \neq 0$. En este caso, se verifica que

$$\text{Ad} \left(\text{Exp} \left(\frac{1}{2z} X_{\alpha_1} \right) \right) (\mathfrak{h}) = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2},$$

así que la acción inducida por \mathfrak{h} es equivalente a la inducida por una subálgebra del ejemplo (2.1).

Caso 2.3: $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = 1$. Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ es el núcleo de la proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} , se sigue que esta proyección es sobreyectiva. Así, podemos dar una base de \mathfrak{h} con elementos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X &= a_{\alpha_1} X_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} X_{\alpha_2} + a_{\alpha_1+\alpha_2} X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Y &= T_{\alpha_1} + b_{\alpha_1} X_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} X_{\alpha_2} + b_{\alpha_1+\alpha_2} X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Z &= T_{\alpha_2} + c_{\alpha_1} X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2} X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2} X_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Como $[X, Z] = a_{\alpha_1} X_{\alpha_1} - 2a_{\alpha_2} X_{\alpha_2} + U$ con $U \in \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$, se sigue que

$$0 = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1} & a_{\alpha_2} \\ a_{\alpha_1} & -2a_{\alpha_2} \end{vmatrix} = -3a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}.$$

Así, podemos suponer que $a_{\alpha_2} = 0$ (el caso $a_{\alpha_1} = 0$ se realiza de modo idéntico). Reescalando, podemos asumir que existe $\phi \in [0, \pi)$ tal que $X = \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}$. En tal caso, $[X, Y] = -2\cos(\phi)X_{\alpha_1} + (b_{\alpha_2}\cos(\phi) - \sin(\phi))X_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Si $\phi \neq \pi/2$, se sigue que $[X, Y] = -2X$, lo que implica mirando componentes en $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ que $b_{\alpha_2} = -\tan(\phi)$. Además, $[Z, X] = -\cos(\phi)X_{\alpha_1} + (\sin(\phi) - c_{\alpha_2}\cos(\phi))X_{\alpha_1+\alpha_2} = -X$, de donde $c_{\alpha_2} = 2\tan(\phi)$. Definiendo

$$\begin{aligned} S &= -\tan(\phi)T_{\alpha_2} + (1 - \theta)X_{\alpha_2}, \\ T &= ((2b_{\alpha_1} + c_{\alpha_1})\tan(\phi) - 2b_{\alpha_1+\alpha_2} - c_{\alpha_1+\alpha_2})T_{\alpha_1} \\ &\quad - (b_{\alpha_1+\alpha_2} + 2c_{\alpha_1+\alpha_2} - (b_{\alpha_1} + 2c_{\alpha_1})\tan(\phi))T_{\alpha_2} \\ &\quad - 3\tan(\phi)(1 - \theta)X_{\alpha_1} + 3(1 - \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}, \end{aligned}$$

se tiene que $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}S \oplus \mathbb{R}T$. Como $\langle X, [S, T] \rangle = -18\sec(\phi) \neq 0$, llegamos a una contradicción.

Si $\phi = \pi/2$, tenemos que $X = X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Por ser

$$[Y, Z] = (b_{\alpha_1} + 2c_{\alpha_1})X_{\alpha_1} - (2b_{\alpha_2} + c_{\alpha_2})X_{\alpha_2} + U,$$

con $U \in \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$, se sigue que $b_{\alpha_1} = -2c_{\alpha_1}$, así como que $c_{\alpha_2} = -2b_{\alpha_2}$. Tomando ahora $S = b_{\alpha_2}T_{\alpha_2} + (1 - \theta)X_{\alpha_2}$ y $T = c_{\alpha_1}T_{\alpha_1} + (1 - \theta)X_{\alpha_1}$, se verifica que $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}S \oplus \mathbb{R}T$. Sin embargo,

$$\langle X, [S, T] \rangle = -6 \neq 0,$$

lo que impide que se induzca una foliación polar.

Hemos estudiado ya todos los casos posibles, con lo que concluimos la demostración del Teorema. \square

Proposición 4.11. *Los siguientes pares de subálgebras de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ inducen foliaciones equivalentes sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$:*

$$(a) \quad \mathfrak{h} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \quad y \quad \mathfrak{h}' = \mathbb{R}T_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(b) \quad \mathfrak{h} = \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \quad y \quad \mathfrak{h}' = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Demostración. Empecemos estudiando el par del apartado (a). Sean $H, H' \leq \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ los subgrupos conexos de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ cuyas álgebras de Lie son \mathfrak{h} y \mathfrak{h}' , respectivamente. Escogiendo el elemento

$$g = \mathrm{Exp} \left(\frac{\pi}{2}(1 + \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}),$$

un cálculo directo nos indica que $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}T_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2}$. Así, $(\theta \circ \mathrm{Ad}(g))(\mathfrak{h})$ coincide con \mathfrak{h}' . Como H y H' son conexos, esto implica que $\sigma(gHg^{-1}) = H'$. Si φ denota la acción natural de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ sobre M , y $s: M \rightarrow M$ es la reflexión en $I_3\mathrm{SO}(3)$, veremos que $s \circ \varphi_g \in I(M)$ lleva las órbitas de H en las de H' .

Dado $p = \mathrm{ASO}(3) \in M$ y $h \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned} (s \circ \varphi_g)(h \cdot \mathrm{ASO}(3)) &= s(gh\mathrm{ASO}(3)) = \sigma(ghA)\mathrm{SO}(3) = \sigma(ghg^{-1})\sigma(gA)\mathrm{SO}(3) \\ &= \sigma(ghg^{-1}) \cdot (s \circ \varphi_g)(\mathrm{ASO}(3)) \in H' \cdot (s \circ \varphi_g)(\mathrm{ASO}(3)), \end{aligned}$$

de donde deducimos que $(s \circ \varphi_g)(H \cdot p) \subseteq H' \cdot (s \circ \varphi_g)(p)$. De modo similar, tomado $h' \in H'$, se verifica que

$$\begin{aligned} h' \cdot (s \circ \varphi_g)(p) &= h' \cdot s(g\mathrm{ASO}(3)) = h'\sigma(g)\sigma(A)\mathrm{SO}(3) = \sigma(g)\sigma(g^{-1}\sigma(h')g)\sigma(A)\mathrm{SO}(3) \\ &= \sigma(gg^{-1}\sigma(h')gA)\mathrm{SO}(3) = (s \circ \varphi_g)(g^{-1}\sigma(h')g\mathrm{ASO}(3)) \in (s \circ \varphi_g)(H \cdot p), \end{aligned}$$

con lo que $H' \cdot (s \circ \varphi_g)(p) \subseteq (s \circ \varphi_g)(H \cdot p)$, probando así la igualdad. Por lo tanto, las foliaciones del apartado (a) son equivalentes.

Ahora, tratemos las del apartado (b). En este caso, se comprueba de modo inmediato que $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}(2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2}$, con lo que $(\theta \circ \mathrm{Ad}(g))(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Un argumento idéntico al realizado en el caso anterior nos permite concluir que $s \circ \varphi_g$ es una isometría que lleva la foliación inducida por \mathfrak{h} en la inducida por \mathfrak{h}' , como queríamos demostrar. \square

Nos queda justificar que los ejemplos (2.1), (2.2) y (2.3) no son equivalentes. Es claro que una foliación hiperpolar no puede ser equivalente a una no hiperpolar, así que el último ejemplo tiene que ser distinto de los dos primeros. Para comprobar que (2.1) y (2.2) tampoco son equivalentes, nos bastará comparar la curvatura media de sus órbitas.

Definición 4.12. Sea \widetilde{M} una variedad de Riemann y $M \subseteq \widetilde{M}$ una subvariedad regular de dimensión k . Llamamos **vector curvatura media** de M al campo de vectores normal dado por

$$\mathcal{H}_p = \sum_{i=1}^k \mathbb{I}\mathbb{I}_p(e_i, e_i), \quad p \in M, \quad (4.3)$$

siendo $\{e_1, \dots, e_k\}$ cualquier base ortonormal de $T_p(M)$.

Proposición 4.13. *Consideremos sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ la foliación inducida por el subgrupo N (equivalentemente, por la subálgebra \mathfrak{n}). Todas las órbitas de la acción de N son congruentes, y el vector curvatura media de cualquiera de ellas tiene norma constante igual a $\frac{2}{\sqrt{3}}$.*

Demostración. En primer lugar, veamos que toda órbita es congruente a la órbita de $o = I_3\mathrm{SO}(3)$. Esto es que para cualquier $p \in M$ exista una isometría $f: M \rightarrow M$ tal que $f(N \cdot o) = N \cdot p$.

Al ser $\mathfrak{n}_p^\perp = \mathfrak{a}$, el Criterio de Polaridad 3.12 nos garantiza que $A \cdot o$ es una sección para la acción de N . Por lo tanto, dada cualquier órbita, esta se puede escribir como $N \cdot (a \cdot o)$ para cierto elemento $a \in A$. Además, dado cualquier elemento $a \in A$, se deduce a partir de que $\mathrm{Ad}(a)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ que $aNa^{-1} = N$. Del Lema 4.2 podemos concluir que $a \cdot (N \cdot o) = N \cdot (a \cdot o)$ para todo $a \in A$. De ese modo, si $\varphi: \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \curvearrowright M$ denota la acción natural, tenemos que para cada $a \in A$, φ_a es una isometría de M que lleva $N \cdot o$ en $N \cdot (a \cdot o)$. Puesto que $A \cdot o$ es una sección, esto implica que todas las órbitas son congruentes a $N \cdot o$, como queríamos demostrar.

Ahora, calcularemos la norma del vector curvatura media. Puesto que las órbitas son extrínsecamente homogéneas y congruentes entre sí, nos bastará calcular el vector curvatura media de $N \cdot o$ en $p = o$.

Recordemos que hay una biyección equivariante e isométrica $\phi: AN \rightarrow M$ dada por $\phi(g) = g \cdot o$, y su diferencial en el neutro es $(1 - \theta)/2$, la proyección ortogonal sobre \mathfrak{p} (respecto de B_θ). Por lo tanto, pensando en la acción $N \curvearrowright AN$, $T_e(N \cdot e)$ se identifica en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ con \mathfrak{n} , y $\nu_e(N \cdot e)$ con \mathfrak{a} . Recordemos además que el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ venía dado por la expresión (2.4). Por lo tanto, una posible base ortonormal de \mathfrak{n} es la base ordenada

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}X_{\alpha_1}, \frac{1}{\sqrt{3}}X_{\alpha_2}, \frac{1}{\sqrt{3}}X_{\alpha_1+\alpha_2} \right\},$$

mientras que una base ortonormal de \mathfrak{a} sería

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{12}}T_{\alpha_1}, \frac{1}{6}(T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}) \right\}.$$

Llegamos así a que la curvatura media en e se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_e &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{I}\mathbb{I}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \langle \mathbb{I}\mathbb{I}(e_i, e_i), u_j \rangle_{AN} u_j = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \langle \nabla_{e_i} e_i, u_j \rangle_{AN} u_j \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \langle (1 - \theta)[\theta e_i, e_i], u_j \rangle u_j.\end{aligned}$$

A partir de esta fórmula, un cálculo directo nos lleva a que

$$\mathcal{H}_e = \frac{1}{\sqrt{3}} u_1 + u_2,$$

que tiene norma $\frac{2}{\sqrt{3}}$, como queríamos demostrar. \square

Proposición 4.14. *Sea $H \leq \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ el subgrupo conexo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2}$. El vector curvatura media en $o = I_3 \mathrm{SO}(3)$ de $H \cdot o$ es unitario.*

Demostración. La estrategia es idéntica a la utilizada en la Proposición 4.13: pasando a AN mediante la isometría equivariante $\phi: AN \rightarrow M$, nos es suficiente calcular la curvatura media en e de $H \cdot e \subseteq AN$. Aquí, vemos que $T_e(H \cdot e) \equiv \mathfrak{h}$, mientras que $\nu_e(H \cdot e)$ se corresponde con $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus_{AN} \mathfrak{h} = \mathbb{R}(T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1}$ (aquí, \ominus_{AN} denota el complemento ortogonal con respecto a la métrica de AN).

Damos entonces la base ortonormal de \mathfrak{h}

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{12}} T_{\alpha_1}, \frac{1}{\sqrt{3}} X_{\alpha_2}, \frac{1}{\sqrt{3}} X_{\alpha_1 + \alpha_2} \right\}$$

y la base ortonormal de $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus_{AN} \mathfrak{h}$

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \frac{1}{6} (T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}), \frac{1}{\sqrt{3}} X_{\alpha_1} \right\}.$$

Mediante estas bases ortonormales, obtenemos que el vector curvatura media buscado es

$$\mathcal{H}_e = u_1.$$

Este vector tiene norma 1, lo que termina la prueba. \square

Corolario 4.15. *Las foliaciones inducidas en $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ por las subálgebras \mathfrak{n} y $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2}$ no son equivalentes.*

En definitiva, hay tres foliaciones polares distintas en este caso, y son las dadas en la Proposición 4.8.

4.5. Folioaciones de cohomogeneidad 3

Con un procedimiento análogo al utilizado en el apartado anterior, calcularemos todas las folioaciones polares de cohomogeneidad 3 en M .

Proposición 4.16. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Dada cualquier raíz simple $\alpha \in \Lambda$, la subálgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (siendo β la otra raíz simple) induce una foliación polar homogénea de cohomogeneidad 3 sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$. Esta foliación no es hiperpolar.*

Demostración. En primer lugar, es claro que \mathfrak{h} es una subálgebra de dimensión 2, pues

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subseteq \mathfrak{h}.$$

Así, al ser $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, sabemos que esta induce una foliación homogénea.

Por otro lado, como $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\alpha \oplus \mathfrak{p}_{\alpha+\beta}$, se deduce que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\beta$. Además, para cualquier $A \in \mathfrak{h}$, vemos que $[A, (1-\theta)X_\beta] = \beta(A)(1+\theta)X_\beta \in \mathfrak{k}_\beta$, lo que implica que $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp] = \mathfrak{k}_\beta \neq 0$. Aparte de eso, se tiene que

$$[A, (1+\theta)X_\beta] = (1-\theta)\beta(A)X_\beta \in \mathfrak{p}_\beta \subseteq \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp,$$

así como que

$$[(1-\theta)X_\beta, (1+\theta)X_\beta] = (1-\theta)[X_\beta - \theta X_\beta, X_\beta] = -(1-\theta)[\theta X_\beta, X_\beta] \in \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp.$$

En consecuencia, $[\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, [\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp]] \subseteq \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$, de modo que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ es un triple de Lie. Finalmente, es claro que \mathfrak{k}_β es ortogonal a $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, lo que implica que $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp]$. El Criterio de Polaridad 3.12 nos permite concluir que \mathfrak{h} induce una foliación polar homogénea, que no es hiperpolar ya que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ no es abeliano. \square

Proposición 4.17. *Sea $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ una subálgebra de Lie que induce una foliación polar homogénea sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ de cohomogeneidad 3. Entonces existe una subálgebra $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ de dimensión 2 cuyas órbitas forman una foliación equivalente a la dada por \mathfrak{h} .*

Demostración. Aplicando el Teorema 4.6, podemos suponer que existe un conjunto de raíces simples $\Phi \subseteq \Lambda$ tal que \mathfrak{h} está contenida en la subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$, con $\tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}_\Phi$. El mismo argumento que empleamos para probar la Proposición 4.9 nos permite deducir que $\Phi \neq \Lambda$, así que tiene a lo sumo un elemento.

Si $\Phi = \{\alpha_1\}$ (el caso $\Phi = \{\alpha_2\}$ se realiza de modo idéntico), obtenemos que

$$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{t}} \oplus (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}T_{\alpha_1}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad \tilde{\mathfrak{t}} \subseteq \mathfrak{k}_{\alpha_1}.$$

Proyectando sobre \mathfrak{p} , vemos que $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}T_{\alpha_1}) \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}$, con lo que $\mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1} \subseteq \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$. Completamos $\{T_{\alpha_1}, (1-\theta)X_{\alpha_1}\}$ a una base de $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp$ añadiendo un elemento de la forma $Y = Y_\mathfrak{a} + (1-\theta)(c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2})$, con $Y_\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}$. Se verifica que

$$[T_{\alpha_1}, [T_{\alpha_1}, Y]] = (1-\theta)(c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}) \in \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^\perp,$$

así que necesariamente este producto es un múltiplo de Y . Esto solo es posible si $Y_{\mathfrak{a}} = 0$ o $[T_{\alpha_1}, [T_{\alpha_1}, Y]] = 0$.

Supongamos primero que $Y_{\mathfrak{a}} = 0$, de modo que $Y = (1 - \theta)(c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2})$. El vector $T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}$ es ortogonal a nuestra base de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, así que $T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2} \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$. Por el mismo motivo, se sigue que $(1 - \theta)(c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_2} - c_{\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}) \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$. Como la proyección ortogonal de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ sobre \mathfrak{p} es un isomorfismo, esto implica que $T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}$ y $c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_2} - c_{\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}$ están en $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}}$. Por lo tanto, al ser $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b}$, existen elementos $u, v \in \mathbb{R}$ tales que

$$T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2} + (1 + \theta)(uX_{\alpha_1}), \quad c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_2} - c_{\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2} + (1 + \theta)(vX_{\alpha_1}) \in \mathfrak{h},$$

de ese modo, su corchete $(3c_{\alpha_1+\alpha_2} + uc_{\alpha_2})X_{\alpha_2} + (uc_{\alpha_1+\alpha_2} - 3c_{\alpha_2})X_{\alpha_1+\alpha_2}$ también pertenece a \mathfrak{h} . Ya que $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, deducimos que

$$0 = \langle (3c_{\alpha_1+\alpha_2} + uc_{\alpha_2})X_{\alpha_2} + (uc_{\alpha_1+\alpha_2} - 3c_{\alpha_2})X_{\alpha_1+\alpha_2}, Y \rangle = 6u(c_{\alpha_2}^2 + c_{\alpha_1+\alpha_2}^2).$$

Por consiguiente, $u = 0$. Además, como $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}]$,

$$0 = \langle 3c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_2} - 3c_{\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}, [T_{\alpha_1}, Y] \rangle = -36c_{\alpha_2}c_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Esto significa que c_{α_2} o $c_{\alpha_1+\alpha_2}$ se anula, así que o bien $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}$, o bien $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp} = \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2}$. Sin embargo, ninguno de estos subespacios es un triple de Lie, debido a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} [T_{\alpha_1}, [(1 - \theta)X_{\alpha_1}, (1 - \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}]] &= -(1 - \theta)X_{\alpha_2} \notin \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ [T_{\alpha_1}, [(1 - \theta)X_{\alpha_1}, (1 - \theta)X_{\alpha_2}]] &= (1 - \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2} \notin \mathbb{R}T_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Así, la suposición de que $Y_{\mathfrak{a}} = 0$ nos lleva a una contradicción.

Pongamos entonces que $Y_{\mathfrak{a}} \neq 0$. Entonces, $[T_{\alpha_1}, [T_{\alpha_1}, Y]] = 0$, así que $c_{\alpha_2} = c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$. Deducimos de aquí que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1}$ y $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}} = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$. Esta última igualdad nos garantiza la existencia de elementos $y, z \in \mathbb{R}$ tales que $X_{\alpha_2} + (1 + \theta)(yX_{\alpha_1})$ y $X_{\alpha_1+\alpha_2} + (1 + \theta)(zX_{\alpha_1+\alpha_2})$ pertenecen a \mathfrak{h} . En consecuencia, para cualquier $A \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$,

$$0 = \langle X_{\alpha_2} + (1 + \theta)(yX_{\alpha_1}), [A, (1 - \theta)X_{\alpha_1}] \rangle = 12y\alpha_1(A),$$

con lo que $y = 0$ (pues podemos escoger A de modo que $\alpha_1(A) \neq 0$). Análogamente se comprueba que $z = 0$, y llegamos a que

$$\mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{k}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Por cuestiones de dimensión, \mathfrak{h} tiene que ser una de esas dos subálgebras. Nos llega ver que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ no induce una foliación polar homogénea. Basta tomar cualquier $A \in \mathfrak{a}$ y observar que

$$\langle (1 + \theta)X_{\alpha_1}, [A, (1 - \theta)X_{\alpha_1}] \rangle = 12\alpha_1(A).$$

Como podemos encontrar A de modo que $\alpha_1(A) \neq 0$, vemos que $\mathfrak{k}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ no es ortogonal a $[\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^{\perp}]$, impidiendo que se induzca una foliación polar homogénea.

Concluimos que, si $\Phi = \{\alpha_1\}$, entonces necesariamente $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

Finalmente, observemos que el caso $\Phi = \emptyset$ nos lleva directamente a que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 4.18. *Supongamos que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ es una subálgebra de Lie bidimensional de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ cuyo subgrupo conexo asociado induce una foliación polar homogénea de cohomogeneidad tres. Entonces, \mathfrak{h} es necesariamente una de las subálgebras que aparecen en la Proposición 4.16.*

Demostración. Sea \mathfrak{h} una subálgebra en las condiciones del enunciado. Estudiaremos todas las situaciones en las que se puede encontrar según la dimensión de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$.

Caso 1: $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 2$, de manera que $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$. Aquí, $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}$, que no es un triple de Lie, pues

$$[(1-\theta)X_{\alpha_1}, [(1-\theta)X_{\alpha_2}, (1-\theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}]] = 2T_{\alpha_1} \notin \mathfrak{h}_p^\perp.$$

Así, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ no cumple las propiedades buscadas.

Caso 2: $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$. Sea $A = uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2}$ un generador de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$, y completamos $\{A\}$ a una base de \mathfrak{h} añadiendo un vector $Y = Y_{\mathfrak{a}} + c_{\alpha_1}Y_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}Y_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}Y_{\alpha_1+\alpha_2}$, siendo $Y_{\mathfrak{a}} = u'T_{\alpha_1} + v'T_{\alpha_2} \in \mathfrak{a}$. Fijémonos que alguno de los c_λ tiene que ser no nulo, ya que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{a}$. Demostraremos en primer lugar que $c_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$.

Supongamos por reducción al absurdo que $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$, de modo que podemos escribir $Y = Y_{\mathfrak{a}} + \cos(\phi)Y_{\alpha_1} + \sin(\phi)Y_{\alpha_2}$ para cierto $\phi \in [0, \pi)$.

Si la proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} es \mathfrak{a} , entonces A e $Y_{\mathfrak{a}}$ no son paralelos, lo que se traduce en que $uv' - vu' \neq 0$. Una base de \mathfrak{h}_p^\perp viene dada por los vectores

$$\begin{aligned} Z_1 &= (1-\theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Z_2 &= (u-2v)\cos(\phi)T_{\alpha_1} + (2u-v)\cos(\phi)T_{\alpha_2} + 3(vu' - uv')(1-\theta)X_{\alpha_1}, \\ Z_3 &= (u-2v)\sin(\phi)T_{\alpha_1} + (2u-v)\sin(\phi)T_{\alpha_2} + 3(vu' - uv')(1-\theta)X_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Tenemos en este caso que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Y, [Z_1, Z_2] \rangle = -18\sin(\phi)(vu' - uv'), \\ 0 &= \langle Y, [Z_1, Z_3] \rangle = 18\cos(\phi)(vu' - uv'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sin(\phi) = \cos(\phi) = 0$, que es una contradicción.

Si la proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} es unidimensional, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Y_{\mathfrak{a}} = 0$. Aquí, obtenemos que

$$\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}((2v-u)T_{\alpha_1} + (v-2u)T_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{R}(1-\theta)(\cos(\phi)X_{\alpha_2} - \sin(\phi)X_{\alpha_1}) \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Sin embargo, no se induce una foliación polar, puesto que

$$\langle Y, [(1-\theta)(\cos(\phi)X_{\alpha_2} - \sin(\phi)X_{\alpha_1}), (1-\theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}] \rangle = -6 \neq 0.$$

Como ambos casos nos llevan a una contradicción, concluimos que $c_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$. Por lo tanto, podemos asumir que $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 1$. Además, \mathfrak{h} es una subálgebra, así que el siguiente vector pertenece a \mathfrak{h} :

$$[A, Y] = c_{\alpha_1}(2u-v)X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}(2v-u)X_{\alpha_2} + (u+v)X_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Escribiendo entonces $[A, Y] = pA + qY$, se debe satisfacer que

$$[A, Y] = (pu + qu')T_{\alpha_1} + (pv + qv')T_{\alpha_2} + qc_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + qc_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + qX_{\alpha_1+\alpha_2},$$

y por lo tanto $q = u + v$. Igualando ahora componentes en \mathfrak{g}_{α_1} y \mathfrak{g}_{α_2} , deducimos que $c_{\alpha_1}(u - 2v) = 0$ y $c_{\alpha_2}(v - 2u) = 0$.

Caso 2.1: $u = 2v$ (el caso $v = 2u$ se realiza de modo idéntico). Como $u \neq 0$, esto implica que $c_{\alpha_2} = 0$. Además, podemos suponer que $u = 1$, llegando a que $A = 2T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2}$, $Y = u'T_{\alpha_1} + v'T_{\alpha_2} + c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Fijémonos en que la proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} debe tener como mínimo dimensión 1.

Si la proyección de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} tiene dimensión 2, entonces $u' \neq 2v'$. Así, una base de \mathfrak{h}_p^\perp viene dada mediante

$$\begin{aligned} Z_1 &= (1 - \theta)X_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= T_{\alpha_2} + (u' - 2v')(1 - \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Z_3 &= c_{\alpha_1}T_{\alpha_2} + (u' - 2v')(1 - \theta)X_{\alpha_1}. \end{aligned}$$

No obstante, $\langle Y, [Z_1, Z_3] \rangle = -6(u' - 2v') \neq 0$, así que \mathfrak{h} no es ortogonal a $[\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$.

Si la proyección de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} tiene dimensión 1, podemos suponer tras hacer operaciones elementales que $u' = v' = 0$. En tal caso, vemos que

$$\mathfrak{h}_p^\perp = \mathbb{R}T_{\alpha_2} \oplus \mathbb{R}(1 - \theta)(X_{\alpha_1} - c_{\alpha_1}X_{\alpha_1+\alpha_2}) \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2}.$$

No obstante, para que \mathfrak{h}_p^\perp sea un triple de Lie, se tiene que cumplir en particular que

$$0 = \langle Y, [(1 - \theta)X_{\alpha_2}, [(1 - \theta)(X_{\alpha_1} - c_{\alpha_1}X_{\alpha_1+\alpha_2}), T_{\alpha_2}]] \rangle = -6(1 + c_{\alpha_1}^2),$$

lo cual es imposible.

Caso 2.2: $u \neq 2v$ y $v \neq 2u$. En este caso, necesariamente $c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} = 0$, con lo que $Y = u'T_{\alpha_1} + v'T_{\alpha_2} + X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Aquí, obtenemos que $\mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2} \subseteq \mathfrak{h}_p^\perp$. Sin embargo, $\langle Y, [(1 - \theta)X_{\alpha_1}, (1 - \theta)X_{\alpha_2}] \rangle = 6 \neq 0$, impidiendo que $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$.

En definitiva, si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ tiene dimensión 1, \mathfrak{h} nunca induce una foliación polar homogénea.

Caso 3: $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$. En particular, la proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{n} es una aplicación lineal inyectiva.

Caso 3.1: La proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} es \mathfrak{a} , de modo que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = 0$. En tal caso, podemos dar una base de \mathfrak{h} con elementos de la forma

$$\begin{aligned} X &= T_{\alpha_1} + c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Y &= T_{\alpha_2} + d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

En consecuencia, deducimos que

$$\begin{aligned} 0 = [X, Y] &= (c_{\alpha_1} + 2d_{\alpha_1})X_{\alpha_1} - (2c_{\alpha_2} + d_{\alpha_2})X_{\alpha_2} \\ &\quad + (c_{\alpha_1}d_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2} - c_{\alpha_1+\alpha_2} - c_{\alpha_2}d_{\alpha_1})X_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Esto significa que $c_{\alpha_1} = -2d_{\alpha_1}$, $d_{\alpha_2} = -2c_{\alpha_2}$ y $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 3c_{\alpha_2}d_{\alpha_1} + d_{\alpha_1+\alpha_2}$. En este caso, una base de \mathfrak{h}_p^\perp viene dada por los vectores

$$\begin{aligned} Z_1 &= c_{\alpha_2}T_{\alpha_2} + (1 - \theta)X_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= -(2c_{\alpha_2}d_{\alpha_1} + d_{\alpha_1+\alpha_2})T_{\alpha_1} - (c_{\alpha_2}d_{\alpha_1} + d_{\alpha_1+\alpha_2})T_{\alpha_2} + (1 - \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Z_3 &= d_{\alpha_1}T_{\alpha_1} + (1 - \theta)X_{\alpha_1}. \end{aligned}$$

La polaridad de la acción implica que $0 = \langle X, [Z_1, Z_3] \rangle = -6d_{\alpha_1+\alpha_2}$, así que $d_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$. Hecho esto, vemos que también debe ser $0 = \langle Y, [Z_1, Z_2] \rangle = -6d_{\alpha_1}$, así que $d_{\alpha_1} = 0$. Más aún, también se anula el producto escalar $\langle Y, [Z_2, Z_3] \rangle = 12c_{\alpha_2}$, con lo que $c_{\alpha_2} = 0$. Estas identidades nos llevan a que $X = T_{\alpha_1}$, contradiciendo que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$.

Caso 3.2: La proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} tiene dimensión 1. Podemos construir una base de \mathfrak{h} con

$$\begin{aligned} X &= uT_{\alpha_1} + vT_{\alpha_2} + c_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ Y &= d_{\alpha_1}X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}X_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}X_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$[X, Y] = d_{\alpha_1}(2u - v)X_{\alpha_1} + d_{\alpha_2}(2v - u)X_{\alpha_2} + (c_{\alpha_1}d_{\alpha_2} + d_{\alpha_1+\alpha_2}(u + v) - c_{\alpha_2}d_{\alpha_1})X_{\alpha_1+\alpha_2} \in \mathfrak{h}$$

es un múltiplo de Y . En particular, el siguiente determinante se debe anular:

$$\begin{vmatrix} d_{\alpha_1} & d_{\alpha_2} \\ d_{\alpha_1}(2u - v) & d_{\alpha_2}(2v - u) \end{vmatrix} = -3d_{\alpha_1}d_{\alpha_2}(u - v).$$

Caso 3.2.1: $u = v$. Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \neq 0$, necesariamente $u \neq 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u = 1$.

Si $d_{\alpha_1} \neq 0$, los siguientes vectores forman una base de \mathfrak{h}_p^\perp :

$$\begin{aligned} Z_1 &= T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= (c_{\alpha_1}d_{\alpha_2} - c_{\alpha_2}d_{\alpha_1})T_{\alpha_1} + 2(c_{\alpha_1}d_{\alpha_2} - c_{\alpha_2}d_{\alpha_1})T_{\alpha_2} \\ &\quad + 3d_{\alpha_1}(1 - \theta)X_{\alpha_2} - 3d_{\alpha_2}(1 - \theta)X_{\alpha_1}, \\ Z_3 &= (c_{\alpha_1}d_{\alpha_1+\alpha_2} - c_{\alpha_1+\alpha_2}d_{\alpha_1})T_{\alpha_1} + 2(c_{\alpha_1}d_{\alpha_1+\alpha_2} - c_{\alpha_1+\alpha_2}d_{\alpha_1})T_{\alpha_2} \\ &\quad - 3d_{\alpha_1+\alpha_2}(1 - \theta)X_{\alpha_1} + 3d_{\alpha_1}(1 - \theta)X_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Por ser $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$, debe verificarse que $0 = \langle Y, [Z_1, Z_3] \rangle = -54d_{\alpha_1}d_{\alpha_1+\alpha_2}$, con lo que $d_{\alpha_1+\alpha_2} = 0$. Por lo tanto, también debe valer cero el producto $\langle Y, [Z_1, Z_2] \rangle = -108d_{\alpha_1}d_{\alpha_2}$, de modo que $d_{\alpha_2} = 0$. No obstante, tenemos que $\langle Y, [Z_2, Z_3] \rangle = -54d_{\alpha_1}^3 \neq 0$, lo que nos lleva a una contradicción.

Supongamos ahora que $d_{\alpha_1} = 0$, con lo que para cierto $\phi \in [0, \pi)$, se tiene que $Y = \cos(\phi)X_{\alpha_2} + \sin(\phi)X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Entonces podemos construir una base de \mathfrak{h}_p^\perp a partir de los

elementos

$$\begin{aligned} Z_1 &= T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= c_{\alpha_1} T_{\alpha_1} + 2c_{\alpha_1} T_{\alpha_2} - 3(1 - \theta) X_{\alpha_1}, \\ Z_3 &= (c_{\alpha_1 + \alpha_2} \cos(\phi) - c_{\alpha_2} \sin(\phi)) T_{\alpha_1} + 2(c_{\alpha_1 + \alpha_2} \cos(\phi) - c_{\alpha_2} \sin(\phi)) T_{\alpha_2} \\ &\quad + 3 \sin(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_2} - 3 \cos(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

La polaridad de la acción implica que $0 = \langle X, [Z_1, Z_2] \rangle = -54c_{\alpha_1}$, con lo que $c_{\alpha_1} = 0$. Por otro lado, tenemos que los números $\langle Y, [Z_2, Z_3] \rangle = 54 \cos(2\phi)$ y $\langle Y, [Z_1, Z_3] \rangle = -27 \sin(2\phi)$ se deben anular simultáneamente, hecho que es imposible.

Caso 3.2.2: $d_{\alpha_1} = 0$ (el caso $d_{\alpha_2} = 0$ se estudiaría de modo análogo). Podemos asumir que existe un $\phi \in [0, \pi)$ verificando que $Y = \cos(\phi) X_{\alpha_2} + \sin(\phi) X_{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Si $v \neq 0$, entonces una base de \mathfrak{h}_p^\perp se obtiene a partir de los vectores

$$\begin{aligned} Z_1 &= (2v - u) T_{\alpha_1} + (v - 2u) T_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= c_{\alpha_1} T_{\alpha_1} + 2c_{\alpha_1} T_{\alpha_2} - 3v(1 - \theta) X_{\alpha_1}, \\ Z_3 &= (c_{\alpha_1 + \alpha_2} \cos(\phi) - c_{\alpha_2} \sin(\phi)) T_{\alpha_1} + 2(c_{\alpha_1 + \alpha_2} \cos(\phi) - c_{\alpha_2} \sin(\phi)) T_{\alpha_2} \\ &\quad + 3v \sin(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_2} - 3v \cos(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Al ser $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$, tenemos que $0 = \langle X, [Z_1, Z_2] \rangle = -54c_{\alpha_1} v^2$, de donde $c_{\alpha_1} = 0$. Por otro lado, $\langle Y, [Z_2, Z_3] \rangle = 54v^2 \cos(2\phi)$ y $\langle Y, [Z_1, Z_3] \rangle = -27v^2 \sin(2\phi)$ deben anularse, lo cual no es posible.

Supongamos que $v = 0$. Entonces $u \neq 0$, de modo que asumimos que $u = 1$. Por consiguiente, $X = T_{\alpha_1} + c_{\alpha_1} X_{\alpha_1} + c_{\alpha_2} X_{\alpha_2} + c_{\alpha_1 + \alpha_2} X_{\alpha_1 + \alpha_2}$. Observemos que $[X, Y] = -\cos(\phi) X_{\alpha_2} + (\sin(\phi) + c_{\alpha_1} \cos(\phi)) X_{\alpha_1 + \alpha_2}$ debe ser un múltiplo de Y .

Si $\phi = \pi/2$, deducimos que $Y = X_{\alpha_1 + \alpha_2}$. Construimos entonces una base de \mathfrak{h}_p^\perp con

$$\begin{aligned} Z_1 &= T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= c_{\alpha_1} T_{\alpha_1} - 2(1 - \theta) X_{\alpha_1}, \\ Z_3 &= c_{\alpha_2} T_{\alpha_1} - 2(1 - \theta) X_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

No obstante, tenemos que $\langle Y, [Z_2, Z_3] \rangle = 24 \neq 0$, contradiciendo que $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$.

Si $\phi \neq \pi/2$, entonces $\cos(\phi) \neq 0$. En consecuencia $[X, Y] = -Y$, de donde deducimos que $c_{\alpha_1} = -2 \tan(\phi)$. Obtenemos una base de \mathfrak{h}_p^\perp mediante los elementos

$$\begin{aligned} Z_1 &= T_{\alpha_1} + 2T_{\alpha_2}, \\ Z_2 &= \sin(\phi) T_{\alpha_1} + \cos(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_1}, \\ Z_3 &= (c_{\alpha_1 + \alpha_2} \cos(\phi) - c_{\alpha_2} \sin(\phi)) T_{\alpha_1} + 2 \sin(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_2} - 2 \cos(\phi)(1 - \theta) X_{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Sin embargo, $\langle Y, [Z_2, Z_3] \rangle = -12 \cos(\phi) \neq 0$, con lo que \mathfrak{h} no es ortogonal a $[\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$.

Caso 3.3: La proyección ortogonal de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{a} es nula, lo que significa que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{n}$. En el caso 2.2 de la demostración del Teorema 4.10, habíamos demostrado implícitamente que

toda subálgebra bidimensional de \mathfrak{n} contiene a $X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Por consiguiente, podemos dar una base de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ con vectores de la forma

$$\begin{aligned} X &= \cos(\phi)X_{\alpha_1} + \sin(\phi)X_{\alpha_2}, \\ Y &= X_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{h}_p^\perp = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(-\sin(\phi)(1-\theta)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)(1-\theta)X_{\alpha_2})$. Como $\mathfrak{h} \perp [\mathfrak{h}_p^\perp, \mathfrak{h}_p^\perp]$, se deduce que

$$0 = \langle X, [T_{\alpha_1}, -\sin(\phi)(1-\theta)X_{\alpha_1} + \cos(\phi)(1-\theta)X_{\alpha_2}] \rangle = -18 \cos(\phi) \sin(\phi),$$

de modo que o bien $\cos(\phi) = 0$ o bien $\sin(\phi) = 0$. Esto nos lleva a que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ o $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ respectivamente, que son precisamente las subálgebras dadas en la Proposición 4.16.

Ya hemos explorado todas las situaciones que se podían dar, y concluimos la veracidad de este resultado. \square

Proposición 4.19. *Las subálgebras de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ y $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$ inducen foliaciones polares homogéneas equivalentes sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$.*

Demostración. Basta considerar el elemento

$$g = \mathrm{Exp} \left(\frac{\pi}{2} (1 + \theta) X_{\alpha_1+\alpha_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}),$$

Tenemos que $(\theta \circ \mathrm{Ad}(g))(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$, así que si H y H' son los subgrupos conexos de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ con álgebras de Lie \mathfrak{h} y \mathfrak{h}' respectivamente, se cumple que $\sigma(gHg^{-1}) = H'$. El mismo razonamiento que empleamos para probar la Proposición 4.11 nos permite concluir de la igualdad anterior que las foliaciones inducidas por H y H' son equivalentes. \square

Concluimos entonces que en $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ hay una única foliación polar homogénea de cohomogeneidad tres módulo equivalencia de órbitas, y es la inducida por la subálgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}$.

4.6. Foliaciones de cohomogeneidad 4. Conclusión

En este apartado, daremos una justificación breve de la inexistencia de foliaciones polares homogéneas de cohomogeneidad 4 en nuestro espacio de estudio. Para ello, nos basaremos en el concepto de índice para un espacio simétrico, el cual fue introducido por Onishchik en 1980.

Definición 4.20. Sea M un espacio simétrico; se define el **índice** de M como la codimensión mínima que puede tener una subvariedad conexa y totalmente geodésica de M . Denotaremos con $i(M)$ a este número.

En [5], se demuestra la *Conjetura del Índice para Espacios Simétricos*, que permite calcular el índice de espacios simétricos indescomponibles. Este resultado generaliza el conocido *Teorema de Iwahori*, el cual afirma que un espacio simétrico indescomponible admite hipersuperficies totalmente geodésicas si y solamente si tiene curvatura seccional constante [3, Teorema 11.1.6]. Recurriendo a [5, Tabla 1], tenemos que el índice del espacio $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ es 2.

Observemos que encontrar una foliación polar homogénea de cohomogeneidad cuatro sobre $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ implicaría hallar una hipersuperficie totalmente geodésica de M (cualquier sección de la foliación nos proporcionaría un ejemplo de estas), contradiciendo que el índice esta variedad sea 2. En consecuencia, deducimos que M no admite foliaciones polares homogéneas de cohomogeneidad cuatro.

Esto termina el estudio del espacio simétrico $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$. Reuniendo lo visto en todos estos apartados, obtenemos la clasificación de todas las foliaciones polares homogéneas en M :

Teorema Principal. *Sea \mathcal{F} una foliación polar homogénea sobre el espacio simétrico de tipo no compacto $M = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$. Entonces \mathcal{F} es equivalente a la foliación inducida por una, y solamente una, de las siguientes subálgebras de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$:*

$$(1.1) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\ell = (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n}, \text{ donde } \ell \text{ es una recta vectorial en } \mathfrak{a} \text{ (módulo la isometría } s: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}).$$

$$(1.2) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(2.1) \quad \mathfrak{h} = \mathbb{R}H_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathbb{R}H_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(2.2) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(2.3) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}} \oplus \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathbb{R}(H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

$$(3) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\{\alpha_1\}} = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Además, \mathcal{F} es hiperpolar si y solamente si es equivalente a la inducida por una de las siguientes subálgebras: (1.1), (1.2), (2.1) y (2.2).

Bibliografía

- [1] ALEXANDRINO, M. M., BETTIOL, R.G., *Lie groups and geometric aspects of group actions*, Springer, Cham, 2015.
- [2] BALLMANN, W., *Automorphism groups*, <https://www2.math.upenn.edu/~wziller/math650/AutomorphismGroups.pdf> (Notas). Consultado por última vez: julio, 2021.
- [3] BERNDT, J., CONSOLE, S., OLMOS, C. E., *Submanifolds and holonomy*, CRC Press, Boca Raton, 2016.
- [4] BERNDT, J., DÍAZ-RAMOS, J. C., TAMARU, H., Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type, *J. Differential Geom.* **86** (2010), no. 2, 191–235.
- [5] BERNDT, J., OLMOS, C., The index conjecture for symmetric spaces, *J. Reine Angew. Math.* **772** (2021), 187–222.
- [6] BERNDT, J., TAMARU, H., Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **63** (2003), no. 1, 1–40.
- [7] BESSE, A. L., *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] CARTAN, É., Sur une classe remarquable d’espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France* **54** (1926), 214–264.
- [9] CONLON, L., Variational completeness and K -transversal domains, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 135–147.
- [10] DADOK, J., Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **288** (1985), no. 1, 125–137.
- [11] DÍAZ-RAMOS, J. C., Proper isometric actions, [arXiv:0811.0547](https://arxiv.org/abs/0811.0547) [math.DG].
- [12] DÍAZ-RAMOS, J. C., DOMÍNGUEZ-VÁZQUEZ, M., KOLLROSS, A., Polar actions on complex hyperbolic spaces, *Math. Z.* **287** (2017), 1183–1213.
- [13] DÍAZ-RAMOS, J. C., DOMÍNGUEZ-VÁZQUEZ, M., SANMARTÍN-LÓPEZ, V., Submanifold geometry in symmetric spaces of noncompact type, *São Paulo J. Math. Sci.* **15** (2021), no. 1, 75–110.

-
- [14] DÍAZ-RAMOS, J.C., KOLLROSS, A., Polar actions with a fixed point, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), no. 1, 20–25.
- [15] DO CARMO, M. P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [16] EBERLEIN, P., *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, Chicago, 1996.
- [17] ESCHENBURG, J.-H., *Lecture Notes on Symmetric Spaces*, <https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eschenbu/symspace.pdf> (Notas). Consultado por última vez: julio, 2021.
- [18] FULTON, W., HARRIS, J., *Representation theory: a first course*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [19] HELGASON, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York-London, 1978.
- [20] KNAPP, A. W., *Lie groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [21] KOLLROSS, A., A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no. 2, 571–612.
- [22] LEE, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 2013.
- [23] LEE, J. M., *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer, Cham, 2018.
- [24] MICHOR, P. W., *Isometric Actions of Lie Groups and Invariants*, <https://www.mat.univie.ac.at/~michor/tgbook.pdf> (Notas). Consultado por última vez: julio, 2021.
- [25] MOSTOW, G. D., On maximal subgroups of real Lie groups, *Ann. of Math. (2)* **74** (1961) 503–517.
- [26] MYERS, S. B., STEENROD, N. E., The group of isometries of a riemannian manifold, *Ann. of Math. (2)* **40** (1939), no. 2, 400–416.
- [27] O’NEILL, B., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [28] ONISHCHIK, A. L., VINBERG, E. B., *Lie Groups and Lie Algebras III: Structure of Lie Groups and Lie Algebras*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [29] PALAIS, R.S., On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Ann. of Math. (2)* **73** (1961), 295–323.
- [30] PALAIS, R.S., TERNG, C.-L., A general theory of canonical forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **300** (1987), no. 2, 771–789.

-
- [31] PALAIS, R.S., TERNG, C.-L., *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [32] SEPANSKI, M. R., *Compact Lie groups*, Springer, New York, 2007.
- [33] WARNER, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [34] WU, B., Isoparametric submanifolds of hyperbolic spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), no. 2, 609–626.
- [35] ZILLER, W. *Lie Groups. Representation Theory and Symmetric Spaces*, <https://www.math.upenn.edu/~wziller/math650/LieGroupsReps.pdf> (Notas). Consultado por última vez: julio, 2021.

