Fernando Peñate Moreno

TEOREMAS DE CARTAN Y MÜNZNER PARA HIPERSUPERFICIES ISOPARAMÉTRICAS EN ESFERAS

150a
2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FERNANDO PEÑATE MORENO

TEOREMAS DE CARTAN Y MÜNZNER PARA HIPERSUPERFICIES ISOPARAMÉTRICAS EN ESFERAS

150a

2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Teoremas de Cartan y Münzner para hipersuperficies isoparamétricas en esferas

Fernando Peñate Moreno

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Agradecimientos

Estoy enormemente agradecido a mis directores, Miguel y Víctor, los cuales se volcaron desde el primer día en ayudarme y transmitirme todo su conocimiento y rigurosidad a partes iguales durante todo el tiempo dedicado. Por todo ello, muchas gracias.

Mi agradecimiento a Oubiña, que con las horas impagables que pasó conmigo tanto en el despacho como al otro lado del ordenador durante la realización de mi TFG, fue el eslabón para que continuase con las matemáticas.

No quiero olvidar a los compañeros que me han acogido desde mi llegada a Santiago, en particular al que un día me preguntó si un asiento estaba ocupado y acabó siendo como mi hermano, y a su familia, que para mí son mi familia gallega, gracias.

Por último, agradecer al que considero mi padre en lo que a ciencia se refiere, Antonio Ramirez, mi profesor desde primaria hasta el bachillerato, el cual me inculcó el amor por la ciencia y apostó siempre por mí. Y por supuesto, gracias a mi familia, y muy especialmente a mi madre, por ser mi gran apoyo sin el cual nada de esto sería posible.

A todos y cada uno de ellos, va dedicado este trabajo.

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de las hipersuperficies isoparamétricas en las esferas. Para ello, comenzamos introduciendo el concepto de hipersuperficie isoparamétrica, para analizar después su relación con la noción de hipersuperficie homogénea. Además, incluimos resultados de caracterización de hipersuperficies isoparamétricas en espacios de curvatura constante. A continuación, pasamos a estudiar estos objetos geométricos en los espacios esféricos. Presentamos la teoría de estructura de Münzner para hipersuperficies isoparamétricas en las esferas, probando su importante resultado de algebraicidad, que afirma que dichos objetos se pueden obtener a partir de cierto tipo de polinomios homogéneos, denominados polinomios de Cartan-Münzner. Comentamos el problema de clasificación en las esferas, describiendo algunos ejemplos y resultados importantes. Finalmente, presentamos una prueba parcialmente original del resultado de Cartan de homogeneidad y clasificación de hipersuperficies isoparamétricas con tres curvaturas principales en las esferas.

Abstract

This work focuses on the study of isoparametric hypersurfaces in spheres. We begin by introducing the concept of isoparametric hypersurface, and we analyze its relation with the notion of homogeneous hypersurface. Moreover, we include some results characterizing isoparametric hypersurfaces in spaces of constant curvature. Then, we study these geometric objects in spherical spaces. We introduce Münzner's structure theory for isoparametric hypersurfaces in spheres, proving his remarkable algebraicity result, which states that these objects can be obtained from a certain kind of homogeneous polynomials, the so-called Cartan-Münzner polynomials. We discuss the classification problem in spheres, describing some examples and important results. Finally, we include a partially original proof of Cartan's homogeneity and classification result of isoparametric hypersurfaces with three principal curvatures in spheres.

Introducción

En 1918, los matemáticos italianos E. Laura [30] y C. Somigliana [50] se preguntaron desde el punto de vista de la óptica geométrica cómo deberían ser, para una onda en el espacio euclídeo tridimensional bajo ciertas hipótesis naturales, sus posibles frentes de onda. Laura [30] argumentó que la ecuación de ondas y el Principio de Huygens son suficientes para restringir de manera muy importante aquellas familias de frentes de onda que son paralelos entre sí. Tanto es así que Somigliana [50], continuando con las ideas propuestas por Laura, caracterizó estas familias de frentes de onda en términos de conjuntos de nivel de cierto tipo de funciones f reales definidas en el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$, probando que sus superficies de nivel regulares tienen curvatura media constante, además de ser paralelas entre sí. Esto le permitió obtener la clasificación completa de las familias de frentes de onda consideradas por Laura inicialmente, llegando a que las únicas posibilidades son planos paralelos, esferas concéntricas o cilindros coaxiales. El último de los trabajos de esta primera etapa en la historia de este campo de estudio data de 1924, trabajo debido a B. Segre [46]. En él, Segre propone una variante del resultado de Somigliana, obteniendo exactamente las mismas tres familias de ejemplos, pero partiendo de una familia de superficies en $\mathbb{R}^3$, no necesariamente paralelas, para la cual toda función f que es constante en cada una de esas superficies tiene laplaciano Δf constante en cada superficie.

Más adelante, en un artículo de Levi-Civita [34] de 1937, que da comienzo a una segunda etapa de estudio, se acuña por primera vez el término *familia de hipersuperficies isoparamétricas*. Levi-Civita define este concepto como la familia de conjuntos de nivel de una función no constante $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a lo largo de cada uno de los cuales tanto la norma al cuadrado del gradiente de f como su laplaciano, llamados primer y segundo parámetro diferencial respectivamente, son constantes. Dicho de otra forma, una función no constante f se dice *función isoparamétrica* si existen dos funciones reales de variable real Φ y Ψ tales que $\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Phi(f)$ y $\Delta f = \Psi(f)$. Se sabía desde antes de este artículo [34] que la constancia del primer parámetro diferencial a lo largo de los conjuntos de nivel de f implica que $\{f^{-1}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ es una familia paralela. Levi-Civita prueba, estando f definida en $\mathbb{R}^3$, que si además el segundo parámetro diferencial de f es también constante a lo largo de los conjuntos de nivel, entonces las curvaturas principales de dichas superficies de nivel regulares son constantes a lo largo de las mismas. El objetivo final de Levi-Civita fue clasificar las familias de hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{R}^3$, llegando a la misma conclusión que Laura, Somigliana y Segre años antes, pero sin conocer el trabajo de estos. El resultado de Levi-Civita fue generalizado posteriormente por Segre [47] para una función f definida en cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Es interesante observar que tanto Levi-Civita como Segre prueban que las hipersuperficies isoparamétricas en espacios euclídeos pueden tener como mucho dos curvaturas principales diferentes.

De esta misma época datan los trabajos de Cartan [9]–[12], en los que estudia las hipersuperficies isoparamétricas en espacios euclídeos, esféricos, hiperbólicos y proyectivos reales. En su primer artículo, [9], da como condición necesaria y suficiente para que una hipersuperficie pertenezca a una familia isoparamétrica en estos espacios que sus curvaturas principales sean constantes. Posteriormente, en [11], da otra condición necesaria y suficiente, a saber, que la curvatura media de cada hipersuperficie de una familia paralela sea constante, equivalencia válida para hipersuperficies de cualquier variedad riemanniana. El trabajo [9] es de hecho un extracto de una carta que Cartan escribe a Segre para informarle de que sus resultados sobre familias isoparamétricas en $\mathbb{R}^n$ pueden ser extendidos a espacios de curvatura negativa, deduciéndose en particular que el número de curvaturas principales distintas de una hipersuperficie isoparamétrica, número que denotaremos por g en lo que sigue, satisface $g \in \{1, 2\}$ en espacios ambiente de curvatura constante no positiva. Esto lo deduce de la que llama *fórmula fundamental* [11], también conocida actualmente como *fórmula de Cartan*, con la siguiente expresión:

$$\sum_{i \neq j} m_j \frac{\kappa - \lambda_j \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} = 0,$$

siendo κ la curvatura del espacio ambiente, $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ las g curvaturas principales diferentes y $m_1, \ldots, m_g$ sus respectivas multiplicidades. Con esto, Cartan es capaz de clasificar completamente las familias de hipersuperficies isoparamétricas en espacios de curvatura no positiva, sumando una clasificación en los espacios hiperbólicos a la hecha por Segre para los espacios euclídeos. Además, logró probar que, en un espacio de curvatura constante, la distancia entre una hipersuperficie y sus puntos focales está determinada por las curvaturas principales. Para los espacios de curvatura positiva no pudo dar una clasificación completa, obteniéndola únicamente para $g \leq 3$, pero sí que pudo deducir cierta relación entre las g curvaturas principales distintas gracias a su fórmula fundamental.

Cartan concluye [9] demostrando que, salvo congruencia, existe una única familia isoparamétrica de $\mathbb{S}^4$, la cual es homogénea, con $g = 3$ curvaturas principales distintas, y da un polinomio de tercer grado en cinco variables que la caracteriza. Este estudio continúa en [10]. En primer lugar, estudia polinomios homogéneos F de grado 3 sobre $\mathbb{R}^{n+2}$ tales que su primer parámetro diferencial es constante en $\mathbb{S}^{n+1}$ y el segundo es nulo. Bajo estas hipótesis, relaciona la existencia de estos polinomios con las álgebras normadas de división clasificadas por el Teorema de Hurwitz, las cuales tienen dimensión 1, 2, 4 u 8, obteniendo que la dimensión de las hipersuperficies de la familia isoparamétrica, dadas como conjuntos de nivel regulares de la restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$ de los posibles polinomios F, es 3, 6, 12 o 24, respectivamente. En este punto, para cada uno de los casos anteriores, obtiene un único polinomio, módulo transformación ortogonal, involucrando los números reales $\mathbb{R}$, los complejos $\mathbb{C}$, los cuaternios $\mathbb{H}$ o los octonios $\mathbb{O}$, respectivamente.

Por otra parte, al final de [11] y con más detalles en [12], estudia las hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{S}^{n+1}$ con $g = 4$ curvaturas principales, asumiendo que todas tienen la misma multiplicidad. Así, obtiene únicamente dos ejemplos, uno en $\mathbb{S}^5$ y otro en $\mathbb{S}^9$. Además, al final de [11] propone tres preguntas, las cuales solo serían respondidas a partir de los años setenta:

1. ¿Existe para todo g una familia isoparamétrica en la esfera con g curvaturas principales diferentes, las cuales tienen todas la misma multiplicidad?

2. ¿Existe una familia isoparamétrica con más de tres curvaturas principales diferentes de forma que no todas tengan la misma multiplicidad?

3. ¿Son todas las familias isoparamétricas homogéneas bajo la acción de un grupo de isometrías?

Tomando el relevo de Cartan, pero después de más de treinta años de letargo, este campo de estudio vuelve a sufrir una revolución de la mano de Münzner, con los trabajos [39] y [40], escritos en 1973 y publicados en 1980 y 1981, respectivamente, en los que se centra en los espacios esféricos. Por una parte prueba, con argumentos geométricos, que los puntos focales de una hipersuperficie isoparamétrica de una esfera se reparten a lo largo de una geodésica normal en intervalos de longitud π/g. Además, demuestra que las multiplicidades de las g curvaturas principales toman todas el mismo valor m_1, o dos diferentes, m_1 y m_2, como mucho. Pero sus mayores aportaciones fueron, por un lado, un teorema de algebraicidad para familias isoparamétricas en esferas en términos de lo que Münzner denominó *polinomios de Cartan*, actualmente llamados *polinomios de Cartan-Münzner*, y por otro lado, una importante restricción para el número g de curvaturas principales. Un polinomio de Cartan-Münzner es una función polinómica homogénea de grado g definida sobre el espacio euclídeo que cumple las conocidas como ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner,

$$\|\operatorname{grad} F\|^2 = g^2 r^{2g-2},$$
$$\Delta F = c r^{g-2},$$

donde $r(x) = \|x\|$ y $c = g^2(m_2 - m_1)/2$, siendo m_1 y m_2 las multiplicidades de las curvaturas, que pueden coincidir. Tomando la restricción de un polinomio de Cartan-Münzner a la esfera unidad, sus conjuntos de nivel constituyen una familia de hipersuperficies isoparamétricas. Aplicando esto y argumentos de cohomología, pudo demostrar que una hipersuperficie isoparamétrica de un espacio esférico cumple que $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Gracias a los resultados de Münzner, y al trabajo ya hecho por Cartan décadas antes, el problema de clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en las esferas se reducía a determinar dichas hipersuperficies con 4 y 6 curvaturas principales. Se inicia así un nuevo período en la historia de este campo, con novedosas aportaciones de distintos matemáticos. En primer lugar, sin trabajar directamente con hipersuperficies isoparamétricas, del artículo de Hsiang y Lawson [27] se sigue una clasificación para aquellas familias isoparamétricas que son homogéneas, es decir, que vienen dadas como familias de órbitas de acciones isométricas, a partir de clasificar todos los subgrupos de $SO(n+2)$ que dan lugar a órbitas de codimensión uno dentro de $\mathbb{S}^{n+1}$. En 1972, Takagi y Takahashi [52] calculan el número de curvaturas principales de los ejemplos homogéneos dados por Hsiang y Lawson, además de sus multiplicidades. Tengamos en cuenta que obtienen los mismos valores de g dados por Münzner, además de responder de forma afirmativa a la segunda pregunta de Cartan. Años más tarde, en 1976, Ozeki y Takeuchi [42], [43] dan los primeros ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas, con $g = 4$, para las cuales Ferus, Karcher y el propio Münzner obtendrán una importante generalización, dando lugar a las conocidas como hipersuperficies isoparamétricas de tipo FKM. Posteriormente, Dorfmeister y Neher [21] prueban que todas las hipersuperficies isoparamétricas con $g = 6$ y $m_1 = m_2 = 1$ son homogéneas. Además, en 1999, Stolz [51] da todos los posibles pares de multiplicidades para $g = 4$, que resultan coincidir exactamente con los posibles pares de los ejemplos homogéneos y no homogéneos conocidos.

Mucho más recientemente, el problema de clasificación en las esferas ha sufrido avances muy considerables. En primera instancia, en 2007, Cecil, Chi y Jensen [13] abordan el problema para $g = 4$, obteniendo, a partir de métodos de álgebra conmutativa, una clasificación para casi todas las posibles multiplicidades, con únicamente cuatro excepciones. Por otra parte, Immervoll [29] da una prueba alternativa del resultado anterior, basada en argumentos más geométricos. En los años siguientes, Chi estudió esos casos excepcionales pendientes para $g = 4$, ahondando en las técnicas algebraicas desarrolladas en [13], y concluyendo la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas en las esferas con 4 curvaturas principales [15], [16], [17]. Esencialmente en paralelo, Miyaoka estudió el caso de $g = 6$ y, en concreto, el correspondiente a multiplicidades $m_1 = m_2 = 2$, que constituye el único subcaso abierto tras el trabajo de Dorfmeister y Neher. A día de hoy, no parece haber acuerdo, entre la comunidad especialista en este campo, en si los trabajos de Miyaoka permiten concluir el problema de clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en esferas, en vista de algunos errores detectados por Siffert [48], [49].

En este trabajo nos centraremos en estudiar algunos de los resultados fundamentales de Münzner y Cartan, luego de exponer los necesarios preliminares y algunos de los resultados generales sobre hipersuperficies isoparamétricas en variedades riemannianas y, en concreto, en los espacios de curvatura constante. El núcleo central de este trabajo consistirá, por un lado, en la demostración del Teorema de Münzner de algebraicidad de las familias isoparamétricas de hipersuperficies en las esferas, y por otro lado, en la clasificación, debida a Cartan, de aquellas familias con $g = 3$ curvaturas principales.

El primero de estos objetivos, consistente en estudiar y presentar la prueba del Teorema de algebraicidad de Münzner, llevará consigo, asimismo, el estudio de diversas propiedades de la estructura de las familias isoparamétricas en las esferas, como pueden ser la minimalidad de las subvariedades focales (y más aun, la isoespectralidad de los operadores de configuración para normales unitarios) o la equidistribución de puntos focales a lo largo de geodésicas normales a la familia. Para ello, seguiremos esencialmente el libro de Cecil y Ryan [14], cuyo enfoque es muy próximo, en lo que a estos resultados se refiere, al del artículo original de Münzner, si bien en algunos puntos utilizaremos el lenguaje de campos de vectores de Jacobi, a diferencia de [14].

En cuanto al segundo de nuestros objetivos centrales, es decir, la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas en esferas con $g = 3$, nuestro propósito es presentar una demostración, parcialmente original hasta donde sabemos, de dicho resultado de clasificación. Para ello, nuestro punto de partida será el Teorema de algebraicidad de Münzner, lo que nos permitirá plantear el problema, inicialmente, en términos de la determinación del correspondiente polinomio de Cartan-Münzner para $g = 3$. En este punto, se podría seguir directamente la argumentación dada en la primera parte del artículo original de Cartan [10], en donde se sigue un enfoque analítico, estudiando las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner. Sin embargo, sin renunciar a algunos de los argumentos de Cartan, nosotros seguiremos un enfoque más geométrico, por el cual podemos ir determinando las distintas componentes del polinomio mediante consideraciones geométricas relativas a la familia isoparamétrica. En este sentido, será de particular importancia la propiedad de que las subvariedades focales de una familia isoparamétrica en una esfera tienen operadores de configuración isoespectrales (para vectores normales unitarios). Probaremos, de modo teórico y previo a la obtención del resultado de clasificación, que todo ejemplo con $g = 3$ tiene que ser homogéneo, siguiendo y expandiendo el argumento original de Cartan. Y finalmente, de un modo formalmente diferente, pero equivalente a como lo hizo Cartan, obtendremos una expresión explícita para los posibles polinomios de Cartan-Münzner con $g = 3$ en términos de las álgebras de división normadas, lo que en particular implica que dichos ejemplos solo pueden aparecer en cuatro posibles dimensiones. Aquí hay que mencionar que, debido a su homogeneidad, es posible presentar estos ejemplos en términos de acciones isométricas en las esferas. En este trabajo también incluimos esta descripción, la cual tiene interés independiente, en parte porque proporciona un modelo explícito para el grupo compacto excepcional F_4, así como para el plano proyectivo de Cayley.

Explicamos a continuación la estructura de este trabajo.

En el Capítulo 1 se recogen conceptos básicos y se fija la notación en lo relativo a variedades riemannianas, geometría de subvariedades, un tipo muy concreto de campos de Jacobi de gran utilidad para el desarrollo del resto del trabajo y conceptos básicos de grupos y álgebras de Lie, además de acciones isométricas, necesarias para estudiar aquellas hipersuperficies con una naturaleza homogénea.

En el Capítulo 2 partiremos desde el punto de vista de la óptica geométrica, al igual que hicieron Laura y Somigliana, ampliando a dimensión mayor, para a continuación presentar varios aspectos generales sobre las hipersuperficies isoparamétricas, como pueden ser su relación con las funciones isoparamétricas, o su homogeneidad, para después centrarnos en espacios ambiente de curvatura constante y llegar a dar una clasificación para las hipersuperficies isoparamétricas en los espacios euclídeos.

Debido a que el caso de los espacios esféricos tiene mayor complejidad y además constituye el marco en el que se encuadran los objetivos centrales de nuestro trabajo, dedicaremos el Capítulo 3 a presentar el problema de clasificación en las esferas, centrándonos en los resultados de Münzner. Así, por ejemplo, podremos describir todas las curvaturas principales de una hipersuperficie isoparamétrica en función de una de ellas, al igual que las curvaturas principales de una subvariedad focal. El resultado central de este capítulo es el Teorema 3.11 de algebraicidad de Münzner, que nos permite obtener cualquier hipersuperficie isoparamétrica en una esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ como conjunto de nivel de la restricción a la esfera de cierto tipo polinomios homogéneos sobre $\mathbb{R}^{n+2}$ que cumplan las denominadas ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner. Además, también discutiremos brevemente distintos trabajos de clasificación y ejemplos, centrándonos en los casos de $g = 1$, 2 y 3. Para el caso de $g = 3$ daremos una descripción de todos los ejemplos como hipersuperficies homogéneas, para lo cual hablaremos de álgebras de división normadas y, en particular, veremos un modelo del grupo excepcional F_4.

Finalmente, en el Capítulo 4 nos centraremos en estudiar más en profundidad las hipersuperficies isoparamétricas en las esferas con $g = 3$, con el objetivo de determinarlas completamente. Para ello, partiremos del trabajo original de Cartan, pero reenfocaremos sus argumentos en vista de los resultados de Münzner, y siguiendo una perspectiva más geométrica, llegaremos a la misma expresión para los polinomios de Cartan-Münzner de estas hipersuperficies que obtuvo Cartan hace ochenta años.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, se recopilan definiciones, notación y resultados relativos a la teoría de subvariedades, campos de Jacobi y acciones isométricas necesarios para el desarrollo del trabajo. Hay numerosas referencias para profundizar en estos conceptos. Algunas de ellas son [5], [20], [31] y [33].

Una *variedad riemanniana* es un par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde M es una variedad diferenciable, que supondremos de clase C^∞ y dimensión n, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota una métrica riemanniana, es decir, un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo. También denotaremos por T_pM al espacio tangente a M en el punto $p \in M$, por TM al fibrado tangente de M y por $\Gamma(TM)$ al conjunto de campos de vectores diferenciables sobre M. Si $\mathcal{D}$ es una distribución a lo largo de M, $\Gamma(\mathcal{D})$ denota el módulo de las secciones diferenciables de dicha distribución, es decir, aquellos $X \in \Gamma(TM)$ tales que $X_p \in \mathcal{D}_p$ para todo $p \in M$. Además, salvo que se indique lo contrario, se entenderá siempre que los campos de vectores son diferenciables.

Como es usual, denotamos por ∇ la *conexión de Levi-Civita* de M, la cual es la única conexión adaptada a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y simétrica sobre M. Además, esta viene dada por la fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = {} & X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ & + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle, \end{aligned}$$

con $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Se llama *tensor de curvatura* de M al tensor R de tipo $(1, 3)$ definido como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Se usará este tensor R para obtener información sobre la curvatura de la variedad M.

Se dice que una variedad riemanniana M tiene curvatura constante κ si su tensor de curvatura se puede expresar como

$$R(X, Y)Z = \kappa(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Es bien sabido que las únicas variedades riemannianas completas simplemente conexas y con curvatura constante son los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, las esferas $\mathbb{S}^n$ y los espacios hiperbólicos reales $\mathbb{R}H^n$, en los que κ es igual, mayor y menor que 0 respectivamente. Estos tres tipos de variedades riemannianas serán las usadas durante el trabajo como variedades ambiente, considerando, por simplicidad, $\kappa = 1$ y $\kappa = -1$ en las esferas y los espacios hiperbólicos, respectivamente.

1.1. Geometría de subvariedades

Sea M una subvariedad embebida en una variedad riemanniana $(\bar{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. El par $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde también denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la restricción de la métrica de $\bar{M}$ a M, es una variedad riemanniana, la cual se dice que es *subvariedad riemanniana* de $\bar{M}$. Recordemos que, localmente, toda subvariedad inmersa puede ser vista como una subvariedad embebida. Así pues, al consistir en conceptos y argumentos locales, todo lo que sigue también es aplicable a subvariedades inmersas. Tengamos en cuenta que podemos descomponer el espacio tangente a $\bar{M}$ en un punto $p \in M$ como $T_p\bar{M} = T_pM \oplus \nu_pM$, donde $\oplus$ denota una suma directa (ortogonal en este caso) y ν_pM es el espacio normal a M en p. Definimos el fibrado normal νM como la unión de los espacios normales en cada punto, y los campos de vectores normales como las secciones de este fibrado normal, denotando dicho conjunto por $\Gamma(\nu M)$.

En adelante, y salvo que se especifique lo contrario, todo lo relativo a la variedad $\bar{M}$, que llamaremos variedad ambiente, llevará una barra, mientras que todo lo relativo a la subvariedad M, no. En el caso de subvariedades riemannianas, la *segunda forma fundamental*, $I\!I$, útil para obtener información sobre la geometría extrínseca de M, viene determinada por la fórmula de Gauss

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + I\!I(X,Y),$$

para cualesquiera $X, Y \in \Gamma(TM)$, donde $\nabla_X Y$ es precisamente la componente tangente de $\bar{\nabla}_X Y$.

Tomando ahora un campo de vectores $\xi \in \Gamma(\nu M)$, podemos definir el *operador de configuración* u *operador de forma* de M asociado a ξ como el operador autoadjunto $\mathcal{S}_\xi$ de TM definido por

$$\langle \mathcal{S}_\xi X, Y\rangle = \langle I\!I(X,Y), \xi\rangle,$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$.

El campo ξ no tiene por que estar definido globalmente sobre M, basta con que lo esté sobre un abierto de M, y en este caso las consideraciones que siguen se entenderán válidas sobre dicho abierto. Denotemos por $\nabla^\perp$ a la conexión normal de M, definida mediante $\nabla^\perp_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$, con X y ξ campos de vectores tangente y normal respectivamente, donde $(\cdot)^\perp$ denota la proyección ortogonal sobre νM. Con esto, tenemos que la fórmula de Weingarten se expresa como

$$\bar{\nabla}_X \xi = -\mathcal{S}_\xi X + \nabla^\perp_X \xi.$$

Recordemos también dos de las fórmulas fundamentales de segundo orden en geometría de subvariedades, como son la fórmula de Gauss

$$\langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle II(Y,Z), II(X,W)\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle, \quad (1.1)$$

y la fórmula de Codazzi

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X II)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y II)(X,Z), \quad (1.2)$$

donde la derivada covariante de la segunda forma fundamental viene dada por

$$(\nabla^{\perp}_X II)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X II(Y,Z) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z),$$

con $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$.

Sea U un abierto de la subvariedad M y ξ un campo de vectores normal a M definido en U. Diremos que $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$ es una *curvatura principal* de M asociada a ξ si existe un campo de vectores X tangente a M en U tal que $\mathcal{S}_\xi X = \lambda X$. Dado que $\mathcal{S}_\xi$ es autoadjunto y la métrica es definida positiva, al ser $\bar{M}$ una variedad riemanniana, el operador $\mathcal{S}_\xi$ es diagonalizable en cada punto con autovalores reales. Al diagonalizar, obtenemos los autovalores de $\mathcal{S}_\xi$, que, por definición, son las curvaturas principales de M.

Si λ es una curvatura principal, denotamos por $T_\lambda(p)$ al autoespacio de $\lambda(p)$, llamado *espacio de curvatura principal* asociado a $\lambda(p)$, y si $X \in T_\lambda(p)$ diremos que es un vector de curvatura principal asociado a $\lambda(p)$ en $p \in M$. Sabemos que cada curvatura principal tendrá una multiplicidad algebraica y una multiplicidad geométrica, pero al estar en una variedad riemanniana ambas coinciden, por lo que diremos que la curvatura principal λ tiene multiplicidad m_λ. Las curvaturas principales son, en principio, funciones sobre (un abierto de) la subvariedad, y por tanto sus multiplicidades pueden variar de punto a punto, si bien esto no sucede en el caso de hipersuperficies cuyas curvaturas principales sean funciones constantes.

El *vector curvatura media* H de M se define como la traza de la segunda forma fundamental, es decir, tomando una referencia ortonormal $\{E_i\}$ de TM, $H = \sum_i II(E_i, E_i)$. En el caso de hipersuperficies, se habla a menudo de la *función curvatura media* de M, obtenida como la traza del operador de configuración $\mathcal{S}_\xi$, para un campo de vectores normal unitario ξ. Además, diremos que una subvariedad M es *minimal* si y solo si su vector curvatura media es nulo.

Una subvariedad M de una variedad riemanniana $\bar{M}$ se dice *totalmente geodésica* si su segunda forma fundamental II se anula idénticamente o, equivalentemente, si todos sus operadores de configuración $\mathcal{S}_\xi$, para cualquier normal ξ, se anulan, es decir, todas las curvaturas principales son cero. Esta propiedad es equivalente a que toda geodésica de M sea también una geodésica de $\bar{M}$. Una subvariedad M se dice *totalmente umbílica* si $II = \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle H$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, que necesariamente debe ser $\lambda = 1/\dim M$. En caso de que M sea una hipersuperficie, M es totalmente umbílica si y solo si tiene una única curvatura principal, para un normal unitario fijado. Claramente, toda subvariedad totalmente geodésica es minimal, y toda subvariedad totalmente geodésica es totalmente umbílica.

1.2. Campos de vectores de Jacobi

A continuación, introduciremos la teoría básica de los M-campos de Jacobi, útil para estudiar la geometría de subvariedades obtenidas a partir del desplazamiento normal de otras.

Sea $\bar{M}$ una variedad riemanniana que vamos a suponer completa por simplicidad, si bien los resultados que siguen se pueden adaptar fácilmente al caso general. Sea M una hipersuperficie de $\bar{M}$, ξ un campo de vectores unitario normal a M, y $p \in M$ un punto fijado. Al igual que antes, entenderemos que el campo ξ no tiene por que estar definido globalmente en M, basta con que lo esté en un abierto, en cuyo caso muchas de las consideraciones siguientes se interpretarán desde la perspectiva local. Consideremos el segmento geodésico $\gamma\colon [0,r] \to \bar{M}$ normal a M con condiciones iniciales $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi_p$, de modo que interpretaremos el punto final $\gamma(r)$ como el desplazamiento normal a M del punto p a distancia $r \in \mathbb{R}$. Si ahora permitimos variar al punto p, obtenemos el desplazamiento de toda la hipersuperficie M, o de un abierto contenido en ella, a distancia r en la dirección de ξ. Esto determina un subconjunto M^r de $\bar{M}$.

Para r suficientemente próximo a 0, y restringiéndonos a un abierto en caso de ser necesario, M^r resulta ser una hipersuperficie embebida de $\bar{M}$. Así, si M^r es una hipersuperficie, esta se denomina *hipersuperficie paralela* a M a distancia r. Para valores de r más alejados de cero, M^r puede dejar de ser incluso una subvariedad. En caso de que M^r sea una subvariedad de codimensión mayor que 1, esta se denomina *subvariedad focal* de M, y sus puntos se llaman *puntos focales* de M. En esa situación, M se dice que es un *tubo* alrededor de la subvariedad focal M^r. De un modo más preciso, cada uno de los conjuntos M^r se puede ver como la imagen de M por la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi^r\colon M &\to \bar{M} \\ p &\mapsto \Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p), \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $\exp_p$ denota la aplicación exponencial $\exp_p\colon T_p\bar{M} \to \bar{M}$. Es decir, M^r no es más que $\Phi^r(M)$.

Para un vector $v \in T_pM$, consideremos una curva $c\colon I \to M$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con $0 \in I$, tal que $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = v$. Esta curva, al igual que cualquier otra en M, será desplazada por Φ^r a una curva $\Phi^r(c(s))$ en M^r, que además cumple que $\Phi^r(c(0)) = \Phi^r(p)$ y $(\Phi^r)_*(\dot{c}(0)) = (\Phi^r)_*(v)$.

Recordemos que un campo de vectores J a lo largo de una geodésica γ se dice que es de Jacobi si es solución de la ecuación diferencial $J'' + \bar{R}(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$, o equivalentemente, si es campo variacional de una variación por geodésicas $V\colon (s,t) \mapsto \bar{M}$, donde $t \mapsto V(s,t)$ es una geodésica para cada s fijado, es decir, $J(t) = \frac{\partial V}{\partial s}_{|s=0}(s,t)$ a lo largo de la geodésica $\gamma\colon t \mapsto \gamma(t) = V(0,t)$.

Con esto, y tomando la geodésica γ normal a M y la curva c ya definidas, podemos definir una variación V dada por geodésicas normales a M, tomándola tal que $V(0,t) = \gamma(t)$ y $V(s,0) = c(s)$, llegando a

$$V(s,t) = \exp_{c(s)}(t\xi_{c(s)}).$$

Definiendo el campo de vectores J como $J(t) = \frac{\partial V}{\partial s}_{|s=0}(s,t)$ tenemos garantizado que es un campo de vectores de Jacobi.

Por último, como el campo J cumple una ecuación diferencial de segundo orden, sabemos que viene determinado por $J(0)$ y $J'(0)$. Calculemos estas condiciones en el caso que nos ocupa, aplicando el Lema de simetría que permite intercambiar las derivadas en la segunda igualdad:

$$\begin{aligned} J(0) &= \frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} V(s,0) = \frac{d}{ds}_{|s=0} c(s) = v, \\ J'(0) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} (\exp_{c(s)})_{*0}(\xi_{c(s)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \xi_{c(s)} = \bar{\nabla}_v \xi = -\mathcal{S}v, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\xi$ denota el operador de configuración de M. Los campos de Jacobi particulares que hemos considerado vienen determinados por el vector tangente v elegido. Por tanto, a veces denotaremos por J_v el campo de Jacobi a lo largo de la geodésica normal γ con condiciones iniciales $J_v(0) = v$ y $J_v'(0) = -\mathcal{S}v$. Dichos campos de Jacobi J_v se denominan *M-campos de Jacobi.*

Por el Teorema del rango, sabremos que M^r es una subvariedad inmersa si Φ^r tiene rango constante o, equivalentemente, si $\dim\ker(\Phi^r)_{*p}$ es independiente de p. En este caso, $\operatorname{codim} M^r = \dim\ker(\Phi^r)_* + 1$. Esto sucede si r es suficientemente próximo a 0, en cuyo caso es conocido que Φ^r es de hecho una inmersión, y por tanto M^r es una hipersuperficie. Para valores arbitrarios de r, es importante poder manejar eficientemente la diferencial de Φ^r. Esto es posible gracias a los M-campos de Jacobi, ya que:

$$(\Phi^r)_{*p}(v) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \Phi^r(c(s)) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \exp_{c(s)}(r\xi_{c(s)}) = \frac{d}{ds}_{|s=0} V(r,s) = J_v(r).$$

De esta forma, si encontramos un $v \in T_pM$ no nulo tal que $(\Phi^r)_{*p}(v) = 0$, estaremos ante una curva en M que al desplazarla en la dirección del campo normal ξ una distancia r colapsa, por lo que M^r deja de ser una hipersuperficie. Por tanto, en vista de la correspondencia entre vectores de T_pM y M-campos de Jacobi, se tiene que $T_{\Phi^r(p)}M^r = \{J_v(r) : v \in T_pM\}$.

El operador de configuración de una subvariedad paralela $\Phi^r(M)$ respecto a η^r, denotado por $\mathcal{S}^r$, donde $\eta^r_{\Phi^r(p)} = (\exp_p)_{*r\xi_p}(\xi_p)$ es un campo unitario normal a M^r, para $p \in M$, viene dado por

$$\mathcal{S}^r J_v(r) = -(J_v'(r))^\top, \tag{1.4}$$

como veremos a continuación, donde J_v es el M-campo de vectores de Jacobi a lo largo de la geodésica normal γ con vector director ξ con condiciones iniciales dependientes de v. Tengamos en cuenta que basta dar como actúa $\mathcal{S}^r$ sobre los M-campos de Jacobi ya que estos generan todo $T_{\Phi^r(p)}\Phi^r(M)$. Anteriormente calculamos $J_v'(0)$, pero con un t arbitrario se tiene de modo similar

$$\begin{aligned} J_v'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} V(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\frac{\partial}{\partial t}\exp_{c(s)}(t\xi_{c(s)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}(\exp_{c(s)})_{*t\xi_{c(s)}}(\xi_{c(s)}) = \frac{D\eta^t_{c(s)}}{ds} = \bar{\nabla}_{(\Phi^t)_* v}\eta^t. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la definición del operador de configuración sobre J_v,

$$\mathcal{S}^r J_v(r) = \mathcal{S}^r(\Phi^r)_* v = -(\bar{\nabla}_{(\Phi^r)_* v}\eta^r)^\top = -(J_v'(r))^\top,$$

obteniendo la igualdad deseada.

La técnica explicada en esta sección será de utilidad más adelante para estudiar familias de hipersuperficies isoparamétricas, en lo que respecta tanto a su geometría como a la dimensión de sus correspondientes subvariedades focales.

1.3. Grupos de Lie, álgebras de Lie y acciones isométricas

Daremos ahora algunos de los conceptos básicos de grupos y subgrupos de Lie, junto con sus álgebras de Lie, los cuales son necesarios para introducir las acciones de grupos de Lie sobre variedades, y en particular, las acciones isométricas.

Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable con estructura de grupo, de forma que las operaciones producto e inversión son diferenciables. Diremos que un subgrupo H de un grupo de Lie G es un *subgrupo de Lie* si el par (H,ρ) verifica las siguientes condiciones:

(a) H es un grupo de Lie,

(b) $\rho\colon H \to G$ es una inmersión inyectiva,

(c) $\rho\colon H \to G$ es un homomorfismo de grupos.

Si G y G' son grupos de Lie, se dice que $f\colon G \to G'$ es un *homomorfismo de grupos de Lie* si es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables que también es un homomorfismo de grupos. Si, además, f es un difeomorfismo, se dice que f es un *isomorfismo de grupos de Lie.*

Algunos ejemplos de grupos de Lie son los conocidos como grupos matriciales clásicos, entre los que se encuentran

$$\begin{aligned} O(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{R})\colon A^t A = I_n\}, \\ SO(n) &= \{A \in O(n)\colon \det A = 1\}, \\ U(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C})\colon \bar{A}^t A = I_n\}, \\ SU(n) &= \{A \in U(n)\colon \det A = 1\}, \\ Sp(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{H})\colon A^* A = I_n\}, \end{aligned}$$

donde I_n denota la matriz identidad de orden n.

Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial junto con una aplicación bilineal $[\cdot,\cdot]$, llamada corchete de Lie, que cumple anticonmutatividad y la identidad de Jacobi. Diremos que un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ si $[X,Y]\in\mathfrak{h}$ para todo $X,Y\in\mathfrak{h}$. Tengamos en cuenta que el corchete de Lie de $\mathfrak{h}$ es el inducido por el de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son álgebras de Lie con corchetes de Lie $[\cdot,\cdot]$ y $[\cdot,\cdot]'$ respectivamente, una aplicación $\gamma\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ se dice *homomorfismo de álgebras de Lie* si es lineal y conserva el producto corchete, es decir $\gamma([X,Y])=[\gamma(X),\gamma(Y)]'$ para todo $X,Y\in\mathfrak{g}$. Si además γ es biyectiva, γ se dice *isomorfismo de álgebras de Lie*. El conjunto de los campos de vectores invariantes a la izquierda de un grupo de Lie G tiene estructura de álgebra de Lie, y se denomina *el álgebra de Lie del grupo de Lie G*.

Se define un *subgrupo uniparamétrico* de un grupo de Lie G como un homomorfismo de grupos de Lie del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en G. En particular, un subgrupo uniparamétrico de G es una curva diferenciable α en G cuyo punto inicial $\alpha(0)$ es el elemento neutro $e\in G$. Además, los subgrupos uniparamétricos de un grupo de Lie se encuentran en correspondencia biyectiva con curvas integrales de elementos del álgebra de Lie de G, $\mathfrak{g}$. Si denotamos por Exp_X al subgrupo uniparamétrico asociado a un elemento $X\in\mathfrak{g}$, se define la *aplicación exponencial* del grupo de Lie G como

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}\colon \mathfrak{g}&\to G\\ X&\mapsto \mathrm{Exp}(X)=\mathrm{Exp}_X(1).\end{aligned}$$

Se dice que un grupo de Lie G actúa diferenciablemente sobre una variedad M cuando existe una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned}\varphi\colon G\times M&\to M\\ (g,p)&\mapsto gp,\end{aligned}$$

tal que $(gg')p=g(g'p)$ y $ep=p$ para todo $g,g'\in G$, todo $p\in M$ y siendo e el elemento neutro de G. La aplicación φ se llama *acción diferenciable* de G sobre M. Para cada $p\in M$ se define la *órbita de la acción* de G por p como el subconjunto de M dado por

$$G\cdot p=\{gp\colon g\in G\},$$

y el *grupo de isotropía* en p como el subgrupo de G dado por

$$G_p=\{g\in G\colon gp=p\}.$$

Si $G\cdot p=M$ para algún $p\in M$, y por lo tanto para todo $q\in M$, se dice que G actúa transitivamente sobre M y que M es un *G-espacio homogéneo* o una *variedad homogénea*. Todo G-espacio homogéneo M es difeomorfo a un espacio cociente $G/H=\{gH : g\in G\}$, cuyos elementos son las clases a la izquierda definidas por un cierto subgrupo de Lie H de G. Dicho subgrupo H no es más que el grupo de isotropía G_p de algún punto p de la variedad homogénea, punto que queda identificado con la clase eH bajo el difeomorfismo $M\cong G/H$.

Por otra parte, consideremos dos variedades riemannianas M y M' con métricas $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle'$, respectivamente. Si f es un difeomorfismo, se dice que f es una *isometría* si $\langle f_{*p}v, f_{*p}w\rangle' = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in T_pM$ y para todo $p \in M$. Denotaremos por $\mathrm{Isom}(M) = \{f\colon M \to M\colon f \text{ isometría}\}$ al conjunto de isometrías de M, el cual es un grupo de Lie con la composición de aplicaciones como operación [41].

A partir de una acción φ se puede definir, para cada $g \in G$, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_g\colon M &\to M \\ p &\mapsto \varphi_g(p) = gp. \end{aligned}$$

Si φ_g es una isometría sobre M para cada $g \in G$, decimos que G actúa sobre M por isometrías o que φ es una *acción isométrica*. Además, se puede definir el homomorfismo de grupos de Lie $\rho\colon G \to \mathrm{Isom}(M)$ dado por $g \mapsto \rho(g) = \varphi_g$. Una acción se dice *efectiva* si la aplicación ρ asociada es inyectiva, con lo que G es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Isom}(M)$.

Diremos que una subvariedad M de una variedad riemanniana $\bar{M}$ es una *subvariedad homogénea* si $M = G \cdot p$, con $p \in M$, siendo G un subgrupo de Lie de $\mathrm{Isom}(\bar{M})$, o equivalentemente, si para todo $p, q \in M$, existe $f \in \mathrm{Isom}(\bar{M})$ tal que $f(M) = M$ y $f(p) = q$. Dada una acción isométrica, todas sus órbitas son subvariedades homogéneas. La menor codimensión de las órbitas de una acción isométrica se denomina *cohomogeneidad* de la acción. Las órbitas de mayor dimensión de una acción, es decir, aquellas cuya codimensión coincide con la cohomogeneidad, se llaman *órbitas regulares*, mientras que aquellas de mayor codimensión se denominan *órbitas singulares*. En el caso de acciones de cohomogeneidad uno, las órbitas de codimensión uno se llaman *hipersuperficies homogéneas*. Considerando la métrica inducida, $G \cdot p$ con $p \in \bar{M}$ es una subvariedad riemanniana homogénea de $\bar{M}$, $G \cdot p = G/G_p$, sobre la que G actúa transitivamente y por isometrías.

Recordemos que una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V es una acción dada por automorfismos lineales de V. Equivalentemente, se trata de un homomorfismo de grupos de Lie de la forma $\rho\colon G \to GL(V)$, donde $GL(V)$ denota el grupo de transformaciones lineales invertibles de V. Si sobre V tenemos definido un producto escalar, y la acción viene dada por transformaciones ortogonales para ese producto escalar, es decir, $\rho\colon G \to O(V)$, donde $O(V)$ es el grupo de isometrías lineales de V, entonces hablamos de una representación ortogonal.

Tomemos una acción isométrica $\varphi\colon G \times \bar{M} \to \bar{M}$, para una variedad riemanniana $\bar{M}$, y un $p \in \bar{M}$. Dado que el grupo de isotropía G_p fija p y deja invariante la órbita $G \cdot p$, la diferencial de cada isometría $\varphi_g\colon \bar{M} \to \bar{M}$, $p \mapsto gp$, con $g \in G_p$, deja invariante el espacio tangente $T_p(G \cdot p)$. De esta forma, se puede considerar la acción

$$\begin{aligned} G_p \times T_p(G \cdot p) &\to T_p(G \cdot p) \\ (g, X) &\mapsto (\varphi_g)_{*p}X, \end{aligned}$$

llamada *representación de isotropía* de la acción φ en p. Un caso particularmente importante aparece al considerar la representación de isotropía de un espacio homogéneo G/H, que no es más que la representación de isotropía $G \times T_{eH}G/H \to T_{eH}G/H$ de la acción natural de G sobre G/H.

Sea X un campo de vectores sobre una variedad riemanniana $\bar{M}$. Se dice que X es un *campo de vectores de Killing* si el endomorfismo $\bar{\nabla}X$ de $T\bar{M}$ cumple

$$\langle \bar{\nabla}_v X, w \rangle = -\langle \bar{\nabla}_w X, v \rangle$$

para todo $v, w \in T_p\bar{M}$ y para todo $p \in \bar{M}$. Denotaremos el conjunto de campos de vectores de Killing de $\bar{M}$ por $\mathrm{Kill}(\bar{M})$.

Sea $G = \mathrm{Isom}(\bar{M})$ el grupo de Lie de isometrías de $\bar{M}$. Denotemos por $\mathfrak{g}$ al álgebra de Lie del grupo de Lie G y sea $X \in \mathfrak{g}$. Hemos visto que Exp_X es el subgrupo uniparamétrico de X dado por la aplicación exponencial de grupos de Lie. Por lo tanto, $\mathrm{Exp}_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, es una curva diferenciable en G con condiciones iniciales $\mathrm{Exp}_X(0) = e$ y $\frac{d}{dt}(\mathrm{Exp}_X)(t)|_{t=0} = X_e$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, definimos el campo de vectores $X^* \in \Gamma(T\bar{M})$ en cada $p \in \bar{M}$ como

$$X_p^* = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\mathrm{Exp}_X(t))(p) \in T_p\bar{M}.$$

Aplicando la fórmula de Koszul y la anticonmutatividad del corchete de Lie, se puede ver que este campo de vectores $X^* \in \mathrm{Kill}(\bar{M})$. De hecho, se puede demostrar que todos los campos de Killing sobre $\bar{M}$ se obtienen de esta forma, a partir de elementos del álgebra de Lie de $\mathrm{Isom}(\bar{M})$.

Sea $G \cdot p$ una órbita de una acción isométrica de un grupo de Lie G sobre $\bar{M}$ y $p \in \bar{M}$. El espacio tangente a dicha órbita $G \cdot p$ en el punto p viene dado por:

$$T_p(G \cdot p) = \left\{ \frac{d}{dt} \mathrm{Exp}_X(t)(p) \colon X \in \mathfrak{g} \right\} = \mathrm{Kill}_p(\bar{M}),$$

donde $\mathrm{Kill}_p(M)$ denota el conjunto de valores en p de los campos de vectores de Killing de $\bar{M}$. Por lo tanto, los campos de vectores de Killing sobre $\bar{M}$ generan el espacio tangente a las órbitas de las acciones isométricas.

Capítulo 2

Hipersuperficies y funciones isoparamétricas. Fórmula de Cartan

En este capítulo presentamos algunos de los resultados fundamentales de la teoría de hipersuperficies isoparamétricas en variedades riemannianas y, principalmente, en espacios de curvatura constante. Hablaremos sobre la relación entre hipersuperficies y funciones isoparamétricas, probando la equivalencia de estas dos aproximaciones a este campo de estudio, las cuales son de una naturaleza más geométrica o más analítica, respectivamente. Comentaremos también brevemente el problema de óptica geométrica que motivó inicialmente el estudio de estos conceptos, problema que, podríamos decir, proporciona una tercera vía de aproximación a este campo, desde la perspectiva de la física matemática. Veremos también que la hipersuperficies homogéneas constituyen ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas con curvaturas principales constantes. A continuación nos centraremos en los espacios ambiente de curvatura constante, caracterizando las hipersuperficies isoparamétricas por la propiedad de tener curvaturas principales constantes, analizando la geometría de las posibles subvariedades focales, probando la fórmula fundamental de Cartan y, finalmente, obteniendo la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas en los espacios euclídeos. En este capítulo seguiremos principalmente las referencias [19] y [14].

2.1. Hipersuperficies y funciones isoparamétricas

En primer lugar, introduzcamos las nociones de hipersuperficie y función isoparamétrica, incluyendo ejemplos explícitos, así como la relación entre ambos conceptos, incluida en el Teorema 2.4.

Consideremos una hipersuperficie inmersa M dentro de una variedad riemanniana $\bar{M}$. En esta sección veremos que existen distintas formas equivalentes para obtener una definición de hipersuperficie isoparamétrica. En primer lugar, nos acercaremos a este concepto desde una perspectiva geométrica. Tomemos un punto $p \in M$ y un entorno U en M de p en el que podamos definir un campo de vectores normal unitario. Ahora, podemos trasladarnos en la dirección de este campo una distancia r, suficientemente pequeña para conservar la codimensión uno, a lo largo de geodésicas normales desde todos los puntos de U. Entonces, si la hipersuperficie obtenida tiene curvatura media constante para todo r próximo a cero, diremos que M es isoparamétrica.

Definición 2.1. Una hipersuperficie inmersa M en una variedad riemanniana $\bar{M}$ es *isoparamétrica* si, para todo punto $p \in M$, existe un entorno U de p en M tal que las hipersuperficies paralelas a U suficientemente próximas tienen curvatura media constante.

Observación 2.2. Como se comentó en la Sección 1.2, en cada hipersuperficie M de $\bar{M}$ y para cada punto $p \in M$, siempre se puede encontrar un entorno U de p en M con campo de vectores normal unitario ξ. Las hipersuperficies paralelas a U se obtienen por traslación a lo largo de geodésicas normales. Más concretamente, para $r \in (-\epsilon, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$, y para U suficientemente pequeño, la hipersuperficie paralela a U a distancia r en la dirección del campo normal ξ es $U^r = \Phi^r(U) = \{\exp_q(r\xi_q) \colon q \in U\}$, véase (1.3). Además, $\{U^r : r \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ constituye una familia de hipersuperficies paralelas entre sí, que definen una foliación del abierto $V = \cup_{r \in (-\epsilon,\epsilon)} U_r$ de $\bar{M}$.

Establecido el concepto en términos geométricos, discutiremos ahora brevemente el problema de física matemática, en concreto, de óptica geométrica, que históricamente motivó el inicio de esta área de la geometría. Como ya comentamos en la introducción, fue a partir del estudio de los frentes de onda en la propagación de una onda en el espacio como se empezaron a estudiar las hipersuperficies isoparamétricas. En 1918, Laura [30] y Somigliana [50] comenzaron a desarrollar su estudio desde el punto de vista de la óptica geométrica clásica en $\mathbb{R}^3$, pero en nuestro caso, siguiendo [19], presentamos una generalización a una variedad riemanniana cualquiera, asumiendo suficiente regularidad cuando sea necesario.

Comencemos considerando una onda en la variedad riemanniana $\bar{M}$, que suponemos completa, dada por una función $\varphi \colon \bar{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la bien conocida ecuación de ondas

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

donde Δ denota el laplaciano “espacial”, es decir, el operador de Laplace-Beltrami de $\bar{M}$.

Los frentes de onda de esta solución φ son los puntos de la variedad ambiente $\bar{M}$ que tienen la misma fase en un instante t_0, por ejemplo, las crestas o los valles de una onda plana. Al fijar t_0 podemos definir una función $f \colon \bar{M} \to \mathbb{R}, f(x) = \varphi(x, t_0)$, de forma que esos frentes de onda son los conjuntos de nivel de f. Para que esta función f sea útil para el propósito del estudio necesitamos ciertas propiedades que equivalen a que los frentes de onda no dependan del tiempo, y que sean paralelos entre sí.

En primer lugar, tomemos un frente de onda M y definamos $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $c(t) = \varphi(x_0, t)$ con $x_0 \in M$. Si suponemos que φ es estacionaria, en el sentido que la familia de frentes de onda no depende de t, tenemos que esta función c no depende del elemento x_0 de M escogido. Así

$$\Delta f(x) = \Delta\varphi(x, t_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t_0) = c''(t_0)$$

para todo $x \in M \subset f^{-1}(c(t_0))$, con lo que la independencia del tiempo de los frentes de onda de φ equivale a que el laplaciano de f es constante en cada frente de onda M.

Por otra parte, bajo la hipótesis previa, que los frentes de onda sean paralelos entre sí es equivalente a que f sea constante a lo largo de cada hipersuperficie M^r paralela a un conjunto de nivel fijado $M = f^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Así pues, $f(\Phi^r(M))$ es un valor constante, siendo Φ^r la aplicación desplazamiento normal asociada a un campo unitario ξ normal a M. Tomando una curva $c(s)$ en M con $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = v \in T_pM$, y derivando $f(\Phi^r(c(s)))$ con respecto a s, teniendo en cuenta que es constante, se tiene que $\langle \operatorname{grad} f(\Phi^r(p)), (\Phi^r)_{*p}v\rangle = 0$. Como, variando $v \in T_pM$, los vectores de la forma $(\Phi^r)_{*p}v$ generan todo $T_{\Phi^r(p)}M^r$, véase Sección 1.2, deducimos que $\operatorname{grad} f$ es ortogonal a cada hipersuperficie paralela M^r próxima a M. Lo mismo sucede por tanto con el campo unitario $\operatorname{grad} f/\|\operatorname{grad} f\|$ definido en un entorno de M. Sus curvas integrales son entonces perpendiculares a M y a todas sus hipersuperficies paralelas próximas. Pero las únicas curvas de velocidad constante con esta propiedad son las geodésicas normales a M. Concretamente, obtenemos que para todo $p \in M$, $\frac{d}{dt}\Phi^t(p) = \frac{d}{dt}\exp_p(t\xi_p) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$. Pero entonces, para toda curva $c(s)$ en M con $\dot{c}(0) = v \in T_pM$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t\partial_s f(\Phi^t(c(s))) = \partial_s\partial_t f(\Phi^t(c(s))) &= \partial_s f_*\left(\frac{d}{dt}\Phi^t(c(s))\right) \\ &= \partial_s f_*\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}\right) = \partial_s\langle \operatorname{grad} f, \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}\rangle = \partial_s\|\operatorname{grad} f\|, \end{aligned} \tag{2.1}$$

lo cual demuestra que $\|\operatorname{grad} f\|$ es constante a lo largo de cualquier conjunto de nivel de f.

En resumen, hemos comprobado que las ondas estacionarias con frentes de onda paralelos determinan funciones que, a lo largo de sus conjuntos de nivel, tienen laplaciano y norma de gradiente constantes.

Definición 2.3. Una función diferenciable $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ no constante en ningún abierto se dice que es *isoparamétrica* si existen funciones Φ y Ψ reales de variable real tales que

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Phi \circ f, \qquad \Delta f = \Psi \circ f. \tag{2.2}$$

Diremos que una descomposición $\{f^{-1}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ de $\bar{M}$ en subvariedades, donde f es una función isoparamétrica, es una *familia de hipersuperficies isoparamétricas.*

Respecto a la regularidad de estas funciones Φ y Ψ, se suele pedir como mínimo C^2 y continua respectivamente. De hecho, fue probado por Wang en [55] que si asumimos clase C^2 para Φ junto con la primera igualdad de (2.2), siendo $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ o $\mathbb{S}^{n+1}$, las componentes conexas de los conjuntos de nivel de f forman una familia isoparamétrica, sin necesidad de suponer la segunda ecuación en (2.2).

Ahora que hemos definido lo necesario, veamos el teorema que relaciona las hipersuperficies isoparamétricas con las funciones isoparamétricas [19, Theorem 2.1].

Teorema 2.4. *Dados una función isoparamétrica $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ y un valor regular $c \in \mathbb{R}$ de f, entonces el conjunto de nivel $M = f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie isoparamétrica.*

Recíprocamente, dada una hipersuperficie isoparamétrica M de una variedad riemanniana $\bar{M}$, para cada punto $p \in M$, existe un entorno abierto U de p en M tal que U es un conjunto de nivel de una función isoparamétrica $f\colon V \to \mathbb{R}$, para algún subconjunto abierto $V \subset \bar{M}$.

Demostración. Sea $\xi = \operatorname{grad} f / \| \operatorname{grad} f \|$ un campo de vectores unitario normal a la hipersuperficie $M = f^{-1}(c)$. Entonces, el operador de configuración de M respecto a este campo de vectores viene dado por

$$\langle \mathcal{S}X, Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle = -\frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} \langle \bar{\nabla}_X \operatorname{grad} f, Y \rangle = -\frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} \operatorname{Hess}(X, Y), \tag{2.3}$$

donde Hess denota el tensor hessiano de tipo $(0, 2)$ de f.

Considerando una referencia ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ de TM y esta igualdad, la curvatura media de M viene dada por

$$\begin{aligned} H = \operatorname{tr} \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{S}E_i, E_i \rangle &= -\frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess}_f(E_i, E_i) \\ &= -\frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} (\Delta f - \operatorname{Hess}_f(\xi, \xi)) \\ &= -\frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} (\Delta f - \frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|^2} \langle \bar{\nabla}_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle) \\ &= -\frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} (\Delta f - \frac{1}{2\| \operatorname{grad} f \|^2} \operatorname{grad} f (\| \operatorname{grad} f \|^2)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\Phi \circ f}} (\Psi \circ f - \frac{1}{2\Phi \circ f} \langle \operatorname{grad}(\Phi \circ f), \operatorname{grad} f \rangle) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\Phi \circ f}} (\Psi \circ f - \frac{1}{2} \Phi' \circ f). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = c$ para todo $x \in M$, se tiene que H es constante a lo largo de M.

Para concluir esta parte de la demostración, comprobemos que para cualesquiera c y c' valores regulares de f, las correspondientes hipersuperficies $M = f^{-1}(c)$ y $M' = f^{-1}(c')$ son paralelas. Para ello basta ver que las curvas integrales del campo ξ son geodésicas en $\bar{M}$, es decir, $\bar{\nabla}_\xi \xi = 0$. Sea X un campo de vectores de $\bar{M}$ tangente a los conjuntos de nivel de f. Por como se define ξ, sabemos que la función

$$\xi(f) = \langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = \langle \operatorname{grad} f, \frac{\operatorname{grad} f}{\| \operatorname{grad} f \|} \rangle = \| \operatorname{grad} f \|$$

es constante en cada conjunto de nivel, con lo que $X(\xi(f)) = 0$. Además, $X(f) = 0$, luego $\xi(X(f)) = 0$. Por otra parte, $\langle \bar{\nabla}_Y \xi, \xi \rangle = 0$, para cualquier campo de vectores Y tangente a $\bar{M}$, en particular, $\langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$, pues ξ es un campo unitario. Entonces

$$0 = \frac{1}{\| \operatorname{grad} f \|} [X, \xi](f) = \langle \xi, [X, \xi] \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle - \langle \bar{\nabla}_\xi X, \xi \rangle = -\langle \bar{\nabla}_\xi X, \xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_\xi \xi, X \rangle,$$

con lo que podemos concluir que las curvas integrales de ξ son geodésicas y, por tanto, que los conjuntos de nivel de f son paralelos, argumentando de modo similar a (2.1).

Recíprocamente, fijemos un punto $p \in M$. Puesto que M es isoparamétrica, existen un entorno abierto U de p en M, un campo de vectores unitario ξ normal a U, y $\epsilon > 0$ tales que las hipersuperficies paralelas $U^r = \{\exp_q(r\xi_p) : q \in U\}$ con $r \in (-\epsilon, \epsilon)$ son embebidas y de curvatura media constante. Consideremos el abierto $V = \bigcup_{r\in(-\epsilon,\epsilon)} U^r \subset \bar{M}$ y definamos la función $f\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $f(q) = r$, si $q \in U^r$. De esta forma se obtiene una función tal que $\|\operatorname{grad} f\| = 1$ es constante, y usando la expresión (2.4) y el hecho de que cada $U^r = f^{-1}(r)$ tiene curvatura media constante, se obtiene que Δf también es constante a lo largo de U^r. En conclusión, la función f definida es una función isoparamétrica. $\square$

Ejemplo 2.5. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x_{n+1}, \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ en coordenadas cartesianas. Si calculamos su gradiente y su laplaciano obtenemos $\operatorname{grad} f = (0, \ldots, 0, 1)$ y $\Delta f = 0$, respectivamente. Por tanto, se sigue que f es isoparamétrica, tomando $\Phi \equiv 1$ y $\Psi \equiv 0$ en la Definición 2.3. Los conjuntos de nivel de f son hiperplanos paralelos de $\mathbb{R}^{n+1}$, que son hipersuperficies isoparamétricas, pues tienen curvatura media nula en todo punto.

Ejemplo 2.6. Definamos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2. \end{aligned}$$

El gradiente y el laplaciano de esta función f son $\operatorname{grad} f = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1})$ y $\Delta f = 2n+2$ respectivamente, luego tomando las funciones $\Phi(t) = 4t$ y $\Psi = 2n+2$, llegamos a que f es isoparamétrica. En este caso, los conjuntos de nivel de f forman una familia de esferas concéntricas, junto con su centro común, $\{f^{-1}(r)\}_{r\geq 0}$. La curvatura media de cada esfera $f^{-1}(r)$, $r > 0$, es n/r y por tanto constante, con lo que los conjuntos de nivel de f forman una familia de hipersuperficies isoparamétricas.

Ejemplo 2.7. Sea

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2, \end{aligned}$$

para $2 \leq k \leq n$. Esta función f tiene por gradiente $\operatorname{grad} f = (2x_1, \ldots, 2x_k, 0, \ldots, 0)$, y por laplaciano $\Delta f = 2k$, con lo que tomando $\Phi(t) = 4t$ y $\Psi = 2k$ llegamos a que f es isoparamétrica. Ahora los conjuntos de nivel son cilindros generalizados $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+1}$, alrededor del mismo espacio afín, los cuales tienen curvatura media no nula constante. Así se obtiene una familia de hipersuperficies isoparamétricas.

2.2. Hipersuperficies homogéneas y con curvaturas principales constantes

A continuación, veremos que las hipersuperficies homogéneas proporcionan ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas que, además, tienen la propiedad de que sus curvaturas principales son todas ellas constantes. Comentaremos también una importante propiedad de isoespectralidad, denominada propiedad CPC, de las subvariedades focales de las hipersuperficies isoparamétricas con curvaturas principales constantes.

Definición 2.8. Diremos que una hipersuperficie M de una variedad riemanniana $\bar{M}$ tiene *curvaturas principales constantes* si para cualquier subconjunto abierto U de M con campo de vectores normal unitario ξ, los autovalores del operador de configuración de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\xi$ en U, y sus multiplicidades, son independientes del punto $p \in U$.

Proposición 2.9. *Toda hipersuperficie homogénea es isoparamétrica y tiene curvaturas principales constantes.*

Demostración. Sea $G\times\bar{M} \to \bar{M}$ la acción isométrica cuya órbita de codimensión uno es una hipersuperficie $M = G\cdot p$ homogénea, para un $p \in \bar{M}$. Para todo $q, q' \in M$ existe un $g \in G$ tal que $g(M) = M$ y $g(q) = q'$, luego los operadores de configuración en q y q' cumplen $\mathcal{S}_{q'} = g_*\mathcal{S}_q g_*^{-1}$, con lo que tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades. Por lo tanto, en todo par de puntos, las curvaturas principales son iguales, obteniendo que son constantes en todo M. Como consecuencia, cada hipersuperficie homogénea tiene curvatura media constante.

Sea γ la geodésica normal a M en un punto p. Recordemos que el espacio tangente a una órbita de G está generado por campos de vectores de Killing inducidos por G. Sea X un campo de vectores de Killing inducido por G. Por ser campo de vectores de Killing, $\langle\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}X, \dot{\gamma}\rangle = 0$, luego $\langle X, \dot{\gamma}\rangle$ es constante a lo largo de γ. Además, $\langle X, \dot{\gamma}\rangle$ se anula en p. Como X es un campo arbitrario, tenemos que la geodésica γ es perpendicular a todas las órbitas de G a las que interseca. En conclusión, las órbitas cercanas a M son paralelas a esta. Como vimos antes, todas las órbitas de la acción de G de codimensión uno tienen curvatura media constante, y como son paralelas unas a otras, se concluye que todas ellas, y en particular M, son isoparamétricas. □

Ejemplo 2.10. Tomemos el grupo de Lie $G = \mathbb{R}^2$ y $\bar{M} = \mathbb{R}^3$. Definimos la acción isométrica

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3\\ (x, y) &\mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, y_3),\end{aligned}$$

de forma que $\varphi_x \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Para cada punto $y \in \mathbb{R}^3$, la órbita $\mathbb{R}^2 \cdot y$ es el plano horizontal a altura y_3. Por tanto, fijado $y \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $M = \mathbb{R}^2 \cdot y$ es una hipersuperficie homogénea.

Ejemplo 2.11. Consideremos como grupo de Lie $G = SO(2)$ y como variedad ambiente $\bar{M} = \mathbb{R}^2$. Definimos la acción isométrica

$$\begin{aligned} \varphi\colon SO(2) \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (A, x) &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

Recordemos que las matrices de $SO(2)$ son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$. Sabemos que esta acción da lugar a rotaciones en el plano, obteniendo que para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, la órbita $SO(2) \cdot x$ es una circunferencia centrada en el origen, salvo para el propio origen, cuya órbita es singular, formada por el propio punto. Luego, con $M = SO(2) \cdot x$, $x \neq 0$, M es una hipersuperficie homogénea.

Ejemplo 2.12. Tomamos $G = SO(2) \times \mathbb{R}$, $\bar{M} = \mathbb{R}^3$ y la acción isométrica

$$\begin{aligned} \varphi\colon (SO(2) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ ((A, t), x) &\mapsto (A, t) \cdot x = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos separar esta acción en la rotación en un plano horizontal y la traslación de forma paralela al eje x_3. Luego la órbita $(SO(2) \times \mathbb{R}) \cdot x$ es, o bien un cilindro, o bien el eje x_3 en caso de ser x de la forma $(0, 0, x_3)$. Por tanto considerando $M = (SO(2) \times \mathbb{R}) \cdot x$ para un punto x cuyas dos primeras coordenadas no son simultáneamente nulas, tenemos que M es una hipersuperficie homogénea.

Es conveniente destacar que estos ejemplos se pueden generalizar a dimensión mayor, obteniendo hipersuperficies homogéneas que coinciden con las hipersuperficies isoparamétricas que descritas en los Ejemplos 2.5, 2.6 y 2.7. Luego, en $\mathbb{R}^{n+1}$, los hiperplanos $\mathbb{R}^n$, las esferas $\mathbb{S}^n$ y los cilindros $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $1 \leq k \leq n-1$, son hipersuperficies homogéneas, isoparamétricas y con curvaturas principales constantes.

Ejemplo 2.13. Para $G = SO(2)$ y $\bar{M} = \mathbb{S}^2$ la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$, tomemos la acción isométrica

$$\begin{aligned} \varphi\colon SO(2) \times \mathbb{S}^2 &\to \mathbb{S}^2 \\ (A, x) &\mapsto Ax = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En este caso estamos ante una acción con dos órbitas singulares, el polo norte y el sur de la esfera $\mathbb{S}^2$, y para cualquier otro punto $x \in \mathbb{S}^2 \backslash \{\pm(0, 0, 1)\}$, $SO(2) \cdot x$ es el paralelo que pasa por x. Considerando $M = SO(2) \cdot x$, $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm(0, 0, 1)\}$, tenemos que M es una hipersuperficie homogénea. Además, esta M es una esfera (circunferencia) geodésica de cierto radio r en $\mathbb{S}^2$, luego se puede ver que su única curvatura principal, y por tanto su curvatura media, es $\cot(r)$. Finalmente, sabemos que los paralelos de una esfera forman una familia paralela, luego esta familia de órbitas es una familia de hipersuperficies homogéneas de $\mathbb{S}^2$ que, en concordancia con la Proposición 2.9, son isoparamétricas.

Introducimos ahora las subvariedades CPC, cuyo estudio resulta ser equivalente al de hipersuperficies isoparamétricas en espacios ambiente de curvatura constante.

Definición 2.14. Sea P una subvariedad de una variedad riemanniana $\bar{M}$. Se dice que P es *CPC* o con *operadores de configuración isoespectrales* si para todo par de campos de vectores unitarios ξ, η, normales a P, los operadores de configuración de P asociados tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades, es decir, $\mathrm{spec}(\mathcal{S}_\xi) = \mathrm{spec}(\mathcal{S}_\eta)$, donde spec denota el multiconjunto del espectro del operador.

Observación 2.15. El concepto CPC, introducido en [6], y cuya nomenclatura viene de curvaturas principales constantes, es distinto y más restrictivo que la noción clásica de curvaturas principales constantes [26]. El concepto CPC se refiere a la independencia del operador de configuración respecto al campo de vectores normal asociado. Para más información, véase [6].

Observación 2.16. Si una subvariedad P es CPC se tiene que es austera, es decir, que el conjunto de curvaturas principales, repetidas según su multiplicidad, es invariante respecto a multiplicar por -1. Esto se tiene gracias a que fijado un vector normal unitario ξ, el opuesto, $-\xi$, también es un vector normal unitario. Sabemos que $\mathrm{spec}(\mathcal{S}_\xi) = -\,\mathrm{spec}(\mathcal{S}_{-\xi})$, y por ser M CPC se cumple $\mathrm{spec}(\mathcal{S}_\xi) = \mathrm{spec}(\mathcal{S}_{-\xi})$, obteniendo la invariancia buscada.

Por otra parte, de su definición se deduce que las subvariedades austeras son también minimales, pues su curvatura media H es la suma de todas las curvaturas principales, las cuales se anularán por pares por la austeridad, dando lugar a $H = 0$. De este modo se deduce que todas las subvariedades CPC son minimales.

Concluimos esta sección enunciando dos resultados que vinculan los conceptos de isoparametricidad, curvaturas principales constantes y CPC. El primero de ellos fue probado por Ge y Tang [23]. El segundo se puede probar utilizando campos de vectores de Jacobi, y así lo haremos para el caso esférico en el Capítulo 3, Corolario 3.7.

Teorema 2.17. *Sea P una subvariedad de una variedad riemanniana con* $\operatorname{codim} P \geq 2$ *y tal que los tubos $P^r = \{\exp_p(r\xi_p) : \xi_p \in \nu_p P, \|\xi_p\| = 1, p \in P\}$ alrededor de P, para todo $r \in (0, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$, tienen curvaturas principales constantes. Entonces P es una subvariedad CPC.*

Teorema 2.18. *Sea P una subvariedad de una variedad riemanniana de curvatura constante con* $\operatorname{codim} P \geq 2$. *Entonces, equivalen:*

(a) P es una subvariedad CPC.

(b) Los tubos con radio suficientemente pequeño alrededor de P son subvariedades isoparamétricas.

2.3. Hipersuperficies isoparamétricas en espacios de curvatura constante

Veremos ahora que la noción de hipersuperficie con curvaturas principales constantes, en espacios ambiente de curvatura constante, equivale a la noción de hipersuperficie isoparamétrica. Además, daremos la expresión de los M-campos de Jacobi en espacios ambiente de curvatura constante, los cuales se pueden usar para obtener directamente las curvaturas principales de la hipersuperficie M y sus paralelas.

Teorema 2.19. *Sean M una hipersuperficie de una variedad ambiente $\bar{M}$ con curvatura constante κ, y ξ un campo de vectores unitario normal a un abierto de M. Consideramos la geodésica γ de $\bar{M}$ tal que $\gamma(0) = p \in M$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi_p$. Entonces un M-campo de Jacobi J_v a lo largo de γ se expresa como*

$$J_v(t) = \begin{cases} (1 - t\lambda)P_v(t) & si\ \bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}, \\ (\cos(t) - \sin(t)\lambda)P_v(t) & si\ \bar{M} = \mathbb{S}^{n+1}, \\ (\cosh(t) - \sinh(t)\lambda)P_v(t) & si\ \bar{M} = \mathbb{R}H^{n+1}, \end{cases}$$

donde $v \in T_\lambda(p)$, siendo λ una curvatura principal de M, y $P_v(t) \in T_{\gamma(t)}\bar{M}$ es el transportado paralelo de v a lo largo de γ.

Demostración. Recordemos que este campo de Jacobi J_v debe cumplir la ecuación diferencial $J_v'' + \bar{R}(J_v, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$ con condiciones iniciales $J_v(0) = v$ y $J_v'(0) = -\mathcal{S}v$. Sea $\{E_1(t), \ldots, E_n(t), \dot{\gamma}(t)\}$ una referencia ortonormal de campos paralelos a lo largo de la geodésica γ. Así, el M-campo de Jacobi J_v se expresa como combinación lineal de los E_i de esta referencia, $J_v(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)E_i(t)$, donde hemos tenido en cuenta que $J_v(t)$ es ortogonal a $\dot{\gamma}(t)$ para todo t, ya que las condiciones iniciales de J_v lo son, [32, Lemma 10.6]. Con lo cual se reescribe la ecuación diferencial como

$$\sum_{i=1}^n (a_i'' E_i + a_i \bar{R}(E_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^n (a_i'' + a_i\kappa)E_i = 0,$$

teniendo en cuenta a la hora de derivar que los campos E_i son paralelos a lo largo de la geodésica γ, la cual podemos suponer parametrizada por arco, junto a la linealidad de $\bar{R}$ y su fórmula para una variedad de curvatura constante. Consideremos que v es un autovector de $\mathcal{S}$ con autovalor λ asociado. Además, podemos escoger sin pérdida de generalidad E_1 de modo que $E_1(0) = v$. Ahora solo hay que resolver esta ecuación diferencial en función de la curvatura con las condiciones iniciales establecidas.

• Caso $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ ($\kappa = 0$): ya que los E_i son linealmente independientes, de la ecuación diferencial deducimos que $a_i'' = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, es decir, $a_i(t) = c_i t + b_i$ para ciertas constantes c_i, $b_i \in \mathbb{R}$. Aplicando las condiciones iniciales de J_v, se tiene que

$$J_v(0) = \sum_{i=1}^n a_i(0)E_i(0) = v, \qquad J_v'(0) = \sum_{i=1}^n a_i'(0)E_i(0) = -\mathcal{S}v = -\lambda v,$$

obteniendo así $a_1(0) = 1$, $a_1'(0) = -\lambda$ y $a_i(0) = a_i'(0) = 0$ para $i = 2, \ldots, n$, es decir, $a_1(t) = 1 - t\lambda$ y $a_i(t) = 0$ para $i = 2, \ldots, n$. Por lo tanto el campo de Jacobi es de la forma $J_v(t) = (1 - t\lambda)P_v(t)$, donde $P_v(t)$ es el transportado paralelo de v a distancia t a lo largo de γ.

• Caso $\bar{M} = \mathbb{S}^{n+1}$ ($\kappa = 1$): en este caso, la ecuación diferencial a resolver es

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i'' + a_i)E_i = 0,$$

lo que por independencia lineal se reduce a $a_i'' + a_i = 0$, es decir, $a_i(t) = c_i \cos(t) + b_i \sin(t)$ para $i = 1, \ldots, n$. Aplicando las condiciones iniciales, $a_1(t) = \cos(t) - \sin(t)\lambda$ y $a_i(t) = 0$ para $i = 2, \ldots, n$, y entonces $J_v(t) = (\cos(t) - \sin(t)\lambda)P_v(t)$ para v asociado a λ.

• Caso $\bar{M} = \mathbb{R}H^{n+1}$ ($\kappa = -1$): por último tenemos un caso muy similar al anterior, simplemente con un cambio de signo, deduciendo que los coeficientes tienen que cumplir $a_i'' - a_i = 0$, con lo que ahora son cosenos y senos hiperbólicos. Así, $a_1(t) = \cosh(t) - \sinh(t)\lambda$ y $a_i(t) = 0$ para $i = 2, \ldots, n$, y $J_v(t) = (\cosh(t) - \sinh(t)\lambda)P_v(t)$ con $v \in T_\lambda(p)$. □

Respecto a las curvaturas principales de las hipersuperficies M^r paralelas a M, estas podemos darlas en función del valor de r y las curvaturas principales de M.

Teorema 2.20. *Sea M una hipersuperficie de una variedad riemanniana $\bar{M}$ de curvatura constante κ y sea M^r una hipersuperficie resultante de desplazar M paralelamente a distancia r, en la dirección de un campo de vectores normal unitario ξ a M. Sea λ una curvatura principal de M en p con multiplicidad m_λ. Entonces*

$$\lambda' = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1 - r\lambda} & si\ \kappa = 0, \\ \cot(\theta - r) & si\ \kappa > 0\ con\ \lambda = \cot(\theta), \\ \coth(\theta - r) & si\ \kappa < 0\ con\ \lambda = \coth(\theta), \\ \lambda & si\ \kappa < 0\ con\ \lambda = \pm 1, \\ \tanh(\theta - r) & si\ \kappa < 0\ con\ \lambda = \tanh(\theta), \end{cases} \tag{2.5}$$

es una curvatura principal de M^r en $\Phi^r(p)$ de multiplicidad m_λ.

Demostración. Sea λ una curvatura principal de M en p, y sea $v \in T_\lambda(p)$. Dado que M^r es una hipersuperficie, por lo visto en la Sección 1.2, se tiene

$$(\Phi^r)_{*p} v = J_v(r) \neq 0,$$

y por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.19, obtenemos

$$1 - \lambda r \neq 0, \quad \cos(r) - \lambda \sin(r) \neq 0, \quad \cosh(r) - \lambda \sinh(r) \neq 0,$$

dependiendo de si κ es igual, mayor o menor que 0, respectivamente.

Probemos el caso $\kappa = 0$. Aplicando la igualdad (1.4), tenemos

$$\mathcal{S}^r J_v(r) = \mathcal{S}^r(1 - \lambda r)v = \lambda v,$$

donde tengamos en cuenta que el transportado paralelo de v coincide con el propio v. Por lo tanto, deducimos que

$$\mathcal{S}^r v = \frac{\lambda}{1 - r\lambda} v = \lambda' v,$$

finalizando el primer caso.

En el caso $\kappa > 0$, usando de nuevo la igualdad (1.4), se tiene

$$\mathcal{S}^r J_v(r) = \mathcal{S}^r(\cos(r) - \lambda \sin(r))v = (\sin(r) + \lambda \cos(r))v,$$

pensando el transporte paralelo a nivel del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+2}$ que contiene a la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Así, obtenemos

$$\mathcal{S}^t v = \frac{\sin(t) + \cos(t)\lambda}{\cos(t) - \sin(t)\lambda} v = \frac{\sin(t) + \cos(t)\cot(\theta)}{\cos(t) - \sin(t)\cot(\theta)} v = \frac{\cos(\theta - t)}{\sin(\theta - t)} v = \cot(\theta - t)v,$$

llegando al segundo caso.

Para los casos con $\kappa < 0$ basta tener en cuenta los cálculos hechos con funciones trigonométricas y sustituirlas por las funciones trigonométricas hiperbólicas correspondientes. Además, se tienen distintos subcasos debido a que la curvatura λ puede tomar en principio cualquier valor real. □

Teorema 2.21. *Sea una hipersuperficie M de una variedad ambiente $\bar{M}$ de curvatura constante κ. Entonces, M es isoparamétrica si y solo si tiene curvaturas principales constantes.*

Demostración. Para llegar al resultado, basta verlo localmente. Supongamos primero que M tiene g curvaturas principales constantes distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$. Por el Teorema 2.20, se tiene que la curvatura principal λ_i' (2.5) de la hipersuperficie M^r a distancia $r \in (-\epsilon, \epsilon)$ de M depende únicamente de r, que está fijo, y de λ_i, la cual es constante en M, para cada $i = 1, \ldots, g$. En conclusión, M^r tiene curvaturas principales constantes y por lo tanto, curvatura media constante, con lo que cada M^r, incluyendo a M, es isoparamétrica, pues las hipersuperficies M^r son mutuamente paralelas.

Recíprocamente, supongamos que la hipersuperficie M es isoparamétrica con curvaturas principales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y veamos que son independientes del punto $p \in M$.

• Caso $\kappa = 0$: las curvaturas principales de M^r en $\exp_p(r\xi_p)$ son de la forma $\frac{\lambda_i(p)}{1 - r\lambda_i(p)}$ para $i = 1, \ldots, n$. Así, la curvatura media de M^r en cualquier punto $\exp_p(r\xi_p)$, dado que $H = \operatorname{tr} \mathcal{S}$, es de la forma

$$H(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(p)}{1 - r\lambda_i(p)}.$$

Fijando un punto $p \in M$, se tiene que H es una función analítica en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Además, dado que las derivadas sucesivas también cumplen que

$$H^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j+1}(p), \qquad j = 0, \ldots, n-1,$$

se deduce que λ_i no depende del punto p tomado, con lo que M tiene curvaturas principales constantes.

- Caso $\kappa \neq 0$: Para el caso esférico, se puede escribir

$$H(r) = \sum_{i=1}^{n} \cot(\theta_i(p) - r),$$

de forma que es una función de r analítica. Los polos de esta función H se encuentran en los r tales que $\sin(\theta_i(p) - r) = 0$ para algún $i = 1, \ldots, n$, es decir, en $r = \arctan(1/\lambda_i(p))$ pensado en módulo π. Ya que H no depende del punto $p \in M$ por hipótesis, sus polos tampoco. Por tanto el conjunto de $\lambda_i(p)$, con $i = 1, \ldots, n$ son constantes en M. En el caso hiperbólico, se sigue el mismo razonamiento empleando funciones trigonométricas hiperbólicas y las distintas formas para λ'. □

2.4. Fórmula de Cartan

Por último, estudiamos la geometría de las hipersuperficies con curvaturas principales constantes en espacios de curvatura constante, determinando de manera explícita una relación existente entre ellas y sus multiplicidades.

Sea M una hipersuperficie isoparamétrica en un espacio ambiente $\bar{M}$ de curvatura constante κ. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ las g curvaturas principales diferentes de M, con multiplicidades $m_1, \ldots, m_g$ respectivamente. Entonces, para $i \in \{1, \ldots, g\}$ fijado, se tiene la relación

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{\kappa + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0,$$

conocida como fórmula de Cartan. Para demostrar esta igualdad necesitamos unos resultados previos.

Proposición 2.22. *Sea $\mathcal{S}$ el operador de configuración de la hipersuperficie isoparamétrica M. Dados X, Y campos de vectores sobre M:*

(a) El campo de tensores $\nabla_X \mathcal{S}$ de tipo $(1,1)$ definido como

$$(\nabla_X \mathcal{S})Y = \nabla_X(\mathcal{S}Y) - \mathcal{S}(\nabla_X Y),$$

es simétrico.

(b) La fórmula de Codazzi se puede reescribir como $(\nabla_X \mathcal{S})Y = (\nabla_Y \mathcal{S})X$.

(c) *Sean λ, μ dos curvaturas principales diferentes y T_λ, T_μ los espacios asociados correspondientes. Si $X \in T_\lambda$, $Y \in T_\mu$, entonces*

$$\langle(\nabla_Z \mathcal{S})X, Y\rangle = (\lambda - \mu)\langle\nabla_Z X, Y\rangle,$$

para todo campo de vectores tangente Z.

(d) *Para todo λ, si X, $Y \in T_\lambda$, entonces $\nabla_X Y \in T_\lambda$.*

(e) *Para todo par $\lambda \neq \mu$, si $X \in T_\lambda$, $Y \in T_\mu$, entonces, $\nabla_X Y$ es perpendicular a T_λ.*

Demostración. Considerando los campos de vectores X, Y, Z sobre M,

$$X\langle\mathcal{S}Y, Z\rangle = \langle\nabla_X(\mathcal{S}Y), Z\rangle + \langle\mathcal{S}Y, \nabla_X Z\rangle,$$

lo que, teniendo en cuenta la definición de $\nabla_X \mathcal{S}$ y la simetría de $\mathcal{S}$, da lugar a

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_X \mathcal{S})Y, Z\rangle &= \langle\nabla_X(\mathcal{S}Y), Z\rangle - \langle\mathcal{S}(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&= X\langle\mathcal{S}Y, Z\rangle - \langle\mathcal{S}Y, \nabla_X Z\rangle - \langle\nabla_X Y, \mathcal{S}Z\rangle \\
&= X\langle Y, \mathcal{S}Z\rangle - \langle\nabla_X Y, \mathcal{S}Z\rangle - \langle Y, \mathcal{S}(\nabla_X Z)\rangle \\
&= \langle Y, \nabla_X(\mathcal{S}Z) - \mathcal{S}(\nabla_X Z)\rangle \\
&= \langle Y, (\nabla_X \mathcal{S})Z\rangle,
\end{aligned}$$

obteniendo la simetría de $\nabla_X \mathcal{S}$ y concluyendo el punto (a).

Para (b), basta tener en cuenta que en el caso de una hipersuperficie $\bar{\nabla}_X \xi = 0$.

Si $X \in T_\lambda$ e $Y \in T_\mu$,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_Z \mathcal{S})X, Y\rangle &= \langle\nabla_Z \mathcal{S}X, Y\rangle - \langle\nabla_Z X, \mathcal{S}Y\rangle \\
&= \lambda\langle\nabla_Z X, Y\rangle - \mu\langle\nabla_Z X, Y\rangle = (\lambda - \mu)\langle\nabla_Z X, Y\rangle,
\end{aligned}$$

para cualquier campo de vectores Z, obteniendo (c).

Sean X, $Y \in T_\lambda$ y $Z \in T_\mu$ con $\mu \neq \lambda$. Mediante la fórmula de Codazzi y la igualdad anterior,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle(\nabla_X \mathcal{S})Z - (\nabla_Z \mathcal{S})X, Y\rangle \\
&= (\mu - \lambda)\langle\nabla_X Z, Y\rangle - \langle(\nabla_Z(\lambda X) - \mathcal{S}\nabla_Z X), Y\rangle \\
&= (\lambda - \mu)\langle\nabla_X Y, Z\rangle - (Z\lambda)\langle X, Y\rangle,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado $\langle\nabla_X Z, Y\rangle = -\langle\nabla_X Y, Z\rangle$. Ahora, teniendo en cuenta que $Z\lambda = 0$ se deduce que $\nabla_X Y \in T_\lambda$ y (d) queda probado.

Por último, para (e), basta tener en cuenta que, por (d), $0 = \langle\nabla_X Z, Y\rangle = -\langle\nabla_X Y, Z\rangle$, con X, $Z \in T_\lambda$ e $Y \in T_\mu$, concluyendo así la demostración. □

Con esto estamos en condiciones de demostrar la fórmula de Cartan.

Teorema 2.23. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica de una variedad riemanniana $\bar{M}$ con curvatura constante κ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus curvaturas principales sin contar multiplicidad. Entonces, dada una curvatura principal cualquiera λ de M, se tiene*

$$\sum_{\lambda_i \neq \lambda} \frac{\kappa + \lambda\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} = 0.$$

Demostración. Es fácil ver que esta igualdad es equivalente a la descrita anteriormente, basta no tener en cuenta la multiplicidad de cada curvatura principal. Sean X, Y campos de vectores principales sobre M asociados a λ y μ, respectivamente.

Usando la ecuación de Codazzi y la simetría de $\nabla_X \mathcal{S}$ obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{[X,Y]}\mathcal{S})X, Y\rangle &= \langle [X,Y], (\nabla_Y \mathcal{S})X\rangle, \\ \langle \nabla_X Y, (\nabla_Y \mathcal{S})X\rangle &= \langle (\lambda I - \mathcal{S})\nabla_Y X, \nabla_X Y\rangle, \\ \langle \nabla_Y X, (\nabla_Y \mathcal{S})X\rangle &= \langle (\mu I - \mathcal{S})\nabla_Y X, \nabla_X Y\rangle, \end{aligned}$$

con lo que

$$\langle [X,Y], (\nabla_Y \mathcal{S})X\rangle = (\lambda - \mu)\langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle. \tag{2.6}$$

Sustituyendo en las igualdades anteriores $[X, Y]$ por un campo de vectores Z asociado a una curvatura υ

$$(\mu - \upsilon)(\lambda - \upsilon)\langle \nabla_X Y, Z\rangle\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \langle (\nabla_Z \mathcal{S})X, Y\rangle^2 = \langle (\nabla_Z \mathcal{S})Y, X\rangle^2. \tag{2.7}$$

Por otra parte, considerando una referencia ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$, se tiene

$$\langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle = \sum_{\mu_i \neq \lambda, \mu} \langle \nabla_X Y, E_i\rangle\langle \nabla_Y X, E_i\rangle, \tag{2.8}$$

pues si μ_i coincide con μ o λ, el sumando correspondiente es nulo.

Veamos ahora como se comporta el tensor de curvatura.

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \kappa(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y) - (\langle \mathcal{S}X, Z\rangle \mathcal{S}Y - \langle \mathcal{S}Y, Z\rangle \mathcal{S}X) \\ &= \kappa + \lambda\mu. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Además, por la Proposición 2.22

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Y, X\rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]}Y, X\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle + \frac{1}{\lambda - \mu}\langle (\nabla_{[X,Y]}\mathcal{S})X, Y\rangle. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Uniendo ahora las igualdades (2.6), (2.9) y (2.10) se obtiene

$$2\langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle = \kappa + \lambda\mu,$$

que junto con (2.7) y (2.8) resulta en

$$2 \sum_{\lambda_i \neq \mu, \lambda} \frac{\langle (\nabla_{E_i} \mathcal{S}) Y, X \rangle^2}{(\mu - \mu_i)(\lambda - \mu_i)} = \kappa + \lambda\mu.$$

Para terminar, tomemos $Y = E_j$ y $\mu = \lambda_j$, dividamos la expresión anterior por $\lambda - \lambda_j$ y sumemos en j:

$$\sum_{\lambda_j \neq \lambda} \frac{\kappa + \lambda\lambda_j}{\lambda - \lambda_j} = \sum_{\lambda_j \neq \lambda} \sum_{\lambda_i \neq \lambda_j, \lambda} \frac{\langle (\nabla_{E_i} \mathcal{S}) E_j, X \rangle^2}{(\lambda - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda - \lambda_i)}.$$

Ya que el lado derecho de esta igualdad es antisimétrico respecto a $\{i, j\}$, gracias a la fórmula de Codazzi (b), se tiene el resultado deseado. □

2.5. Espacios ambiente euclídeo e hiperbólico

Como ya habíamos adelantado, la fórmula de Cartan es muy útil para entender la geometría de las hipersuperficies isoparamétricas dentro de espacios con curvatura constante no positiva, $\mathbb{R}^n$ [47] y $\mathbb{R}H^n$ [9], como veremos a continuación.

Teorema 2.24. *Una hipersuperficie isoparamétrica del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ tiene a lo sumo dos curvaturas principales diferentes, y es un subconjunto abierto de alguna de las siguientes hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$:*

(a) un hiperplano afín $\mathbb{R}^n$,

(b) una esfera $\mathbb{S}^n$,

(c) un cilindro, generalizado a dimensión superior, $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ para $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Demostración. Al estar en un espacio euclídeo, se tiene que $\kappa = 0$, y la fórmula de Cartan se expresa como

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g} m_j \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0,$$

para cualquier curvatura principal λ_i fijada de la hipersuperficie isoparamétrica M de $\mathbb{R}^{n+1}$, que es constante.

En caso de tener una única curvatura principal λ, si esta es nula, M es parte de un hiperplano totalmente geodésico, es decir, nos encontramos en el primer caso. Si esta es distinta de 0, M es una hipersuperficie totalmente umbílica y no totalmente geodésica, llegando al segundo caso.

Supongamos ahora que $g \geq 2$. Siempre se puede encontrar un vector normal unitario de forma que λ_1 es la menor curvatura principal positiva. Entonces, todos los términos de la fórmula de Cartan son negativos salvo cuando $\lambda_j = 0$. Como la suma de todos ellos debe ser nula, la única forma es que todos los λ_j sean nulos. Por lo tanto, las curvaturas principales distintas que hay en este caso son $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_j = 0$, de multiplicidad $m_1 = k$ y $m_2 = n - k$ respectivamente. Luego $g = 2$.

Sean γ una geodésica normal a M, $v \in T_{\lambda_1}$ y J_v un M-campo de Jacobi a lo largo de γ con condiciones iniciales $J_v(0) = v$ y $J_v'(0) = -\mathcal{S}v = -\lambda_1 v$. En virtud del Teorema 2.19, este campo J se expresa como $J_v(t) = (1 - \lambda_1 t)P_v(t)$, donde $P_v(t)$ es el transportado paralelo de v a distancia t a lo largo de γ, que en este caso, por estar trabajando en $\mathbb{R}^{n+1}$ coincide con v.

Con esta expresión de J_v es claro que se anulará en $t = 1/\lambda_1$, con lo que $\Phi^{1/\lambda_1}(M)$ es una subvariedad focal y para cada $p \in M$, $\Phi^{1/\lambda_1}(p)$ es un punto focal de multiplicidad m_1. Sea $w \in T_{\lambda_2}$. Es fácil ver que $J_w(t) = (1-\lambda_2 t)P_w(t) = P_w(t)$, por ser $\lambda_2 = 0$. Veamos cómo se comporta el operador de configuración de esta subvariedad focal con J_w. Se tiene que

$$0 = -(J_w'(1/\lambda_1))^\top = \mathcal{S}^{1/\lambda_1} J_w(1/\lambda_1) = \mathcal{S}^{1/\lambda_1} P_w(1/\lambda_1),$$

y por lo tanto $\mathcal{S}_\eta^{1/\lambda_1} = 0$ para el vector normal $\eta = \dot{\gamma}(1/\lambda_1)$. Como el argumento previo funciona para geodésicas γ partiendo de cualquier punto $p \in M$, se deduce que $\mathcal{S}_\eta^{1/\lambda_1} = 0$ para todo normal unitario η en un abierto del fibrado normal unitario a M^{1/λ_1}. Además, como $\mathcal{S}^{1/\lambda_1}$ es lineal respecto a estos vectores normales, se tiene que $\mathcal{S}^{1/\lambda_1} \equiv 0$, con lo que esta subvariedad focal es totalmente geodésica, es decir, un subespacio afín.

Recopilando todo, tenemos una hipersuperficie isoparamétrica M de dimensión n con $g = 2$, siendo sus curvaturas principales $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidades $m_1 = k$ y $m_2 = n - k$, que focaliza a distancia $1/\lambda_1$ en la dirección de T_{λ_1}en un subespacio afín. En conclusión, M es un abierto de un cilindro generalizado $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. □

Las hipersuperficies obtenidas en la clasificación dada por el Teorema 2.24 son, salvo congruencia en $\mathbb{R}^{n+1}$, las vistas en los Ejemplos 2.5, 2.6 y 2.7. Así, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.25. *Si M es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{n+1}$, equivalen:*

(a) M es un subconjunto abierto de una hipersuperficie homogénea.

(b) M es isoparamétrica.

(c) M tiene curvaturas principales constantes.

La equivalencia entre (b) y (c) ya la hemos visto en el Teorema 2.21, al igual que el hecho de que (a) implica (b), independientemente de la variedad ambiente, Teorema 2.9. El recíproco de esto último se tiene gracias al Teorema 2.24, pues solo hay que comprobar que estos tipos de hipersuperficies isoparamétricas son homogéneas, lo cual ya hemos hecho en los Ejemplos 2.10, 2.11 y 2.12.

La equivalencia entre estos tres enunciados también se tiene en caso de que la variedad ambiente sea un espacio hiperbólico $\mathbb{R}H^{n+1}$ gracias a que también se tiene una clasificación de hipersuperficies isoparamétricas. El único caso de curvatura constante en el que no se cumplen estas equivalencias es cuando la variedad ambiente es una esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, pues existen ejemplos de hipersuperfices isoparamétricas de $\mathbb{S}^{n+1}$ que no son homogéneas, como veremos más adelante.

Como acabamos de mencionar, teniendo como variedad ambiente $\mathbb{R}H^{n+1}$, también se tiene una clasificación para las hipersuperficies isoparamétricas. Concluimos este capítulo con el enunciado de dicho teorema de clasificación que, recordemos, es originariamente debido a Cartan [9]. Puede consultarse una prueba en [14, Theorem 3.14].

Teorema 2.26. *Una hipersuperficie isoparamétrica del espacio hiperbólico real $\mathbb{R}H^{n+1}$ tiene a lo sumo dos curvaturas principales diferentes, y es un subconjunto abierto de alguna de las siguientes hipersuperficies en $\mathbb{R}H^{n+1}$:*

(a) un hiperplano hiperbólico real totalmente geodésico $\mathbb{R}H^n$ o una de las hipersuperficies paralelas al mismo,

(b) una esfera geodésica,

(c) una horoesfera,

(d) un tubo alrededor de un subespacio hiperbólico real totalmente geodésico $\mathbb{R}H^k$, para $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Capítulo 3

Polinomios de Cartan-Münzner

En este capítulo abordaremos uno de los objetivos principales de este trabajo, la demostración del Teorema 3.11 de algebraicidad de Münzner, además de la obtención de propiedades de estructura de las familias isoparamétricas en esferas. Para ello, seguiremos como referencia [14], proponiendo argumentos en función de M-campos de Jacobi cuando sea posible. Además, comentaremos los ejemplos y resultados de clasificación conocidos de familias isoparamétricas para los posibles valores de g, explicando con cierto detalle los ejemplos con $g = 1$, 2 y 3.

A lo largo de este capítulo haremos a menudo identificaciones de vectores y subespacios vectoriales tangentes a la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ cuyos puntos base son diferentes. Dichas identificaciones deben interpretarse como el transporte paralelo en el ambiente euclídeo $\mathbb{R}^{n+2}$ sobre el que consideramos la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$.

3.1. Curvaturas principales en $\mathbb{S}^{n+1}$

Sean M una hipersuperficie isoparamétrica de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$ del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+2}$, que siempre supondremos conexa, y ξ un campo de vectores unitario normal a M. En esta sección supondremos que el campo ξ está globalmente definido sobre M, lo que equivale, al ser $\mathbb{S}^{n+1}$ una variedad orientable, a que M también sea orientable. De hecho, el campo ξ define una orientación sobre M. Más adelante, como consecuencia del Teorema de algebraicidad de Münzner, se verá que esta restricción no es tal. Recordemos también que, dado que el espacio ambiente $\mathbb{S}^{n+1}$ tiene curvatura constante, por el Teorema 2.21 el hecho de que M sea isoparamétrica equivale a que sus funciones de curvatura principal sean constantes. Dichas curvaturas principales distintas las denotaremos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$, con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_g$. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi^r \colon M &\to \mathbb{S}^{n+1} \\ p &\mapsto \Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p), \end{aligned}$$

con $r \in \mathbb{R}$, que nos da, como vimos en la Sección 1.2 de preliminares, el desplazamiento de la hipersuperficie M a distancia r en la dirección de ξ, $\Phi^r(M)$, en este caso, dentro de

$\mathbb{S}^{n+1}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\Phi^r(p) = \cos(r)p + \sin(r)\xi_p,$$

para $p \in M$. Sabemos además que, si calculamos la diferencial de esta aplicación sobre un vector principal $v \in T_\lambda$ asociado a una curvatura principal λ, obtenemos el M-campo de Jacobi asociado a v evaluado en r, y por el Teorema 2.19 deducimos que es de la forma

$$(\Phi^r)_{*p}(v) = (\cos(r) - \sin(r)\lambda)v, \tag{3.1}$$

donde hemos utilizado que el transportado paralelo de v a lo largo de la geodésica γ, con condiciones iniciales $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \xi_p$, no es más que el propio vector v en el correspondiente punto de la geodésica, pues v es ortogonal a dicha geodésica de la esfera. Tengamos en cuenta que este $(\Phi^r)_{*p}(v)$, con v no nulo, se anula si y solo si

$$\mathcal{S}v = \frac{\cos(r)}{\sin(r)}v = \cot(r)v,$$

es decir, si y solo si $\cot(r)$ es un autovalor de $\mathcal{S}$ asociado al autovector v. Dado que la función cotangente es periódica de periodo π, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Sea M una hipersuperficie orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con g curvaturas principales constantes diferentes $\lambda_1, \dots, \lambda_g$. Cada una de estas curvaturas principales es de la forma*

$$\lambda_i = \cot(\theta_i), \qquad \theta_i \in (0, \pi).$$

Por lo explicado en la Sección 1.2, y en vista de la ecuación (3.1) para la diferencial de Φ^r, la hipersuperficie M tendrá un punto focal a lo largo de la geodésica γ, precisamente en el punto $\gamma(r)$, para r de la forma $\arctan(1/\lambda_i) = \operatorname{arccot}(\lambda_i) = \theta_i$ (módulo π), para algún $i \in \{1, \dots, g\}$. Además, el hecho de que M tenga curvaturas principales constantes, y por tanto los valores θ_i sean constantes a lo largo de M, implica que si $r = \theta_i$ para algún i, entonces $\Phi^r(M)$ es una subvariedad focal de M, es decir, todos los puntos de M focalizan simultáneamente a esa distancia r. Además, dicha subvariedad tiene codimensión $m_i + 1$ en la esfera, donde m_i era la multiplicidad de λ_i como curvatura principal de M. Así, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con curvaturas principales constantes $\lambda_i = \cot(\theta_i)$ para $i = 1, \dots, g$. La subvariedad $\Phi^r(M)$ es una subvariedad focal si y solo si $r = \theta_i$ módulo π para algún $i \in \{1, \dots, g\}$.*

Observación 3.3. Considerando una geodésica γ normal a M, asociados a cada curvatura principal $\lambda = \cot(\theta)$ de M, hay dos puntos focales a lo largo de γ. Esto se debe a la periodicidad de la cotangente, $\cot(\theta) = \cot(\theta + \pi)$, por lo que $\Phi^\theta(p)$ y $\Phi^{\theta+\pi}(p)$ son dos puntos focales de $p \in M$ distintos. Además, estos puntos focales son antipodales dentro de $\mathbb{S}^{n+1}$.

En cuanto a las curvaturas principales de las hipersuperficies paralelas, tenemos el siguiente resultado que las relaciona con las de M, el cual es un caso particular del Teorema 2.20.

Teorema 3.4. *Sean M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ y $\lambda = \cot(\theta)$ una de sus curvaturas principales, con multiplicidad m. Supongamos que Φ^t es una inmersión en un entorno de un punto $p \in M$. Entonces una de las curvaturas principales de $\Phi^t(M)$ es de la forma $\lambda' = \cot(\theta - t)$ en $q = \Phi^t(p)$, también con multiplicidad m y $T_{\lambda'}(q) = T_\lambda(p)$.*

Directamente de este teorema se puede deducir el siguiente corolario para una familia de hipersuperficies isoparamétricas:

Corolario 3.5. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con g curvaturas principales diferentes $\lambda_i = \cot(\theta_i)$, $i = 1, \ldots, g$, con multiplicidades respectivas m_i. Si $t \in \mathbb{R}$ no es congruente con ningún θ_i módulo π, entonces Φ^t es una inmersión y $M^t = \Phi^t(M)$ es una hipersuperficie isoparamétrica con curvaturas principales $\lambda'_i = \cot(\theta_i - t)$, $i = 1, \ldots, g$, con las mismas multiplicidades respectivas m_i. Además, para cada i, $T_{\lambda'_i} = T_{\lambda_i}$.*

Pasamos ahora a estudiar la geometría de las subvariedades focales con los dos siguientes resultados.

Teorema 3.6. *Sean M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ y $V_i = \Phi^t(M)$ con $t = \theta_i$ una subvariedad focal de M. Sea η un vector unitario normal a V_i en un punto $q \in V_i$. Supongamos que $\eta = (\Phi^t)_{*p}(\xi_p)$ para algún $p \in (\Phi^t)^{-1}(q)$. Entonces el operador de configuración $\mathcal{S}^t_\eta$ de V_i en q con respecto a η viene determinado en función de sus vectores principales mediante*

$$\mathcal{S}^t_\eta v = \cot(\theta_j - \theta_i)v, \ \text{ para } v \in T_{\lambda_j}(p), j \neq i.$$

Demostración. En las condiciones mencionadas, se pueden realizar cálculos análogos a los hechos en la demostración del Teorema 3.4, teniendo en cuenta que ahora calculamos la geometría de la focal, no de una hipersuperficie, llegando al resultado enunciado. □

En vista del Teorema 3.6, del hecho de que los vectores normales en $q \in V_i$ a una focal V_i que son de la forma $\eta = (\Phi^t)_{*p}(\xi_p)$, con $p \in M$, conforman un abierto de la esfera unitaria del espacio normal $\nu_q V_i$, y del hecho de que el operador de configuración $\mathcal{S}^t_\eta$ de V_i en un punto q queda determinado por sus valores para un abierto de vectores normales unitarios debido la linealidad de $\mathcal{S}^t_\eta$ respecto de $\eta \in \nu_q V_i$, podemos deducir que las subvariedades focales de hipersuperficies isoparamétricas en las esferas son CPC, como ya adelantamos en el Teorema 2.18.

Corolario 3.7. *Sean M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de la variedad riemanniana $\mathbb{S}^{n+1}$ y $V_i = \Phi^t(M)$, con $t = \theta_i$, una subvariedad focal de M. Entonces, para todo vector unitario η normal a V_i, el operador de configuración $\mathcal{S}^t_\eta$ tiene curvaturas principales $\cot(\theta_j - \theta_i)$ con multiplicidades m_j, para $j \neq i$, $1 \leq j \leq g$, siendo estas m_j las multiplicidades de las curvaturas principales de M, es decir, V_i es una subvariedad CPC.*

El siguiente resultado de Münzner revela que las curvaturas principales de una hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ se expresan de una forma muy concreta.

Teorema 3.8. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con g curvaturas principales $\lambda_i = \cot(\theta_i)$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_g < \pi$, con multiplicidades m_i respectivamente. Entonces*

$$\theta_i = \theta_1 + (i-1)\frac{\pi}{g}, \qquad i = 1, \ldots, g,$$

y las multiplicidades cumplen $m_i = m_{i+2}$, con subíndices en módulo g. Además, para cada punto $x \in M$, hay $2g$ puntos focales a lo largo de la geodésica normal a M que pasa por x, los cuales están distribuidos uniformemente en intervalos de longitud $\frac{\pi}{g}$.

Demostración. Distingamos la prueba por casos según el valor de g. Claramente, si $g = 1$, el resultado se cumple trivialmente. Supongamos que $g = 2$. Sea $V_1 = \Phi^t(M)$ la subvariedad focal de M con $t = \theta_1$. Por el Corolario 3.7, el único autovalor $\cot(\theta_2 - \theta_1)$ de $\mathcal{S}_\eta$ es el mismo para cualquier elección de vector normal unitario η en cualquier punto $p \in V_1$. En particular, $\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}_{-\eta}$. Además, ya que siempre se tiene que $\mathcal{S}_{-\eta} = -\mathcal{S}_\eta$, deducimos que

$$\cot(\theta_2 - \theta_1) = -\cot(\theta_2 - \theta_1),$$

es decir, $\cot(\theta_2 - \theta_1) = 0$, con lo que $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, como queríamos demostrar. En este caso, no hay restricción para las multiplicidades.

Supongamos para terminar que $g \geq 3$. Para un i fijo, sea $V_i = \Phi^t(M)$ la subvariedad focal de M con $t = \theta_i$. Por el Corolario 3.7, para cualquier elección de η el conjunto de las curvaturas principales de V_i con respecto a η en cualquier punto es

$$\{\cot(\theta_j - \theta_i) \colon j \neq i\}.$$

Como al igual que en el caso anterior, $\mathcal{S}_{-\eta} = -\mathcal{S}_\eta$, tenemos que los conjuntos

$$\{\cot(\theta_j - \theta_i) \colon j \neq i\} \quad \text{y} \quad \{-\cot(\theta_j - \theta_i) \colon j \neq i\}$$

son iguales. Si $2 \leq i \leq g-1$, el mayor autovalor de $\mathcal{S}_\eta$ es $\cot(\theta_{i+1} - \theta_i)$ con multiplicidad m_{i+1}, y el mayor autovalor de $\mathcal{S}_{-\eta}$ es $\cot(\theta_i - \theta_{i-1})$ con multiplicidad m_{i-1}. Dado que estas dos curvaturas deben coincidir, deducimos que

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \theta_{i+1} - \theta_i, \qquad m_{i-1} = m_{i+1}. \tag{3.2}$$

Si $i = 1$, el mayor autovalor de $\mathcal{S}_\eta$ y $\mathcal{S}_{-\eta}$ son $\cot(\theta_2 - \theta_1)$ y $\cot(\theta_1 - \theta_g) = \cot(\theta_1 - (\theta_g - \pi))$ con multiplicidades m_2 y m_g respectivamente. Ya que deben coincidir, tenemos

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_1 - (\theta_g - \pi), \qquad m_2 = m_g.$$

Denotemos $\delta = \theta_2 - \theta_1$. Por recurrencia en la igualdad (3.2) se tiene, $\theta_g - \theta_1 = (g-1)\delta$, mientras que por lo visto en este caso deducimos $\theta_g - \theta_1 = \pi - \delta$. Combinando estas dos igualdades, se tiene que $\delta = \pi/g$, obteniendo así la expresión para θ_i buscada. Para las multiplicidades basta ver la relación ya obtenida entre ellas.

Además, en cada punto $x \in M$, cada curvatura principal $\cot(\theta_i)$ da lugar a dos puntos focales antipodales a lo largo de la geodésica normal a M que pasa por x, en virtud de la Observación 3.3. En conclusión, para cada punto de M, hay exactamente $2g$ puntos focales a lo largo de la geodésica normal distribuidos en intervalos de longitud π/g. $\square$

Como consecuencia directa del resultado anterior, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.9. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica orientada de $\mathbb{S}^{n+1}$ con g curvaturas principales diferentes. Si g es impar, todas las curvaturas principales tienen la misma multiplicidad. Si g es par, hay como mucho dos multiplicidades diferentes.*

3.2. Algebraicidad de las hipersuperficies isoparamétricas

Retomando las funciones isoparamétricas, Münzner demostró que, en el caso de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{S}^{n+1}$, se puede tomar una función isoparamétrica asociada $V\colon \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por la restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$ de una función polinómica homogénea $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ que cumple unas ciertas ecuaciones diferenciales. Este resultado es el ya mencionado Teorema de algebraicidad de Münzner, el cual demostraremos en esta sección. Con este fin, es útil relacionar los valores de $\operatorname{grad} F$, $\operatorname{Hess} F$ y ΔF en $\mathbb{R}^{n+2}$ con $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{Hess} V$ y ΔV en $\mathbb{S}^{n+1}$.

Este polinomio F resulta ser, gracias a la teoría de Münzner que presentamos en esta sección, homogéneo de grado g, donde g es el número de curvaturas principales de las hipersuperficies isoparamétricas correspondientes. Recordemos que este carácter homogéneo quiere decir que $F(tx) = t^g F(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^{n+2}$, de lo que, por el Teorema de Euler, podemos deducir

$$\langle \operatorname{grad}^E F, x\rangle = gF(x). \tag{3.3}$$

Este superíndice E indica que es el gradiente euclidiano, mientras que el gradiente de su restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$ se denotará por $\operatorname{grad}^S F$. De forma análoga, denotaremos el hessiano y laplaciano euclidiano y en $\mathbb{S}^{n+1}$ como $\operatorname{Hess}^E F$, $\operatorname{Hess}^S F$, $\Delta^E F$ y $\Delta^S F$, respectivamente. El siguiente teorema da una forma de relacionar estos elementos.

Teorema 3.10. *Sea $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado g. Entonces*

(a) $\|\operatorname{grad}^S F\|^2 = \|\operatorname{grad}^E F\|^2 - g^2F^2$,

(b) $\operatorname{Hess}^S F = \pi_{T\mathbb{S}^{n+1}} \circ \operatorname{Hess}^E F - gF\,\mathrm{Id}$, *donde $\pi_{T\mathbb{S}^{n+1}}$ es la proyección sobre $T\mathbb{S}^{n+1}$.*

(c) $\Delta^S F = \Delta^E F - gF(g+n)$.

Demostración. Para obtener $\operatorname{grad}^S F$ en un punto $x \in \mathbb{S}^{n+1}$ basta con restar a $\operatorname{grad}^E F$ su componente normal, es decir,

$$\operatorname{grad}^S F = \operatorname{grad}^E F - \langle \operatorname{grad}^E F, x \rangle x = \operatorname{grad}^E F - gF(x)x, \tag{3.4}$$

donde estamos identificando x con el vector unitario normal exterior a $\mathbb{S}^{n+1}$ en el punto x. Calculando su norma, se tiene

$$\begin{aligned} \| \operatorname{grad}^S F \|^2 &= \| \operatorname{grad}^E F \|^2 - 2gF(x) \langle \operatorname{grad}^E F, x \rangle + (gF(x))^2 \|x\|^2 \\ &= \| \operatorname{grad}^E F \|^2 - 2(gF(x))^2 + (gF(x))^2 = \| \operatorname{grad}^E F \|^2 - g^2 F^2, \end{aligned}$$

obteniendo la primera igualdad.

Denotemos por D y $\bar{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}$ y $\mathbb{S}^{n+1}$ respectivamente. El laplaciano $\Delta^S F$ lo obtenemos a partir de la traza del operador hessiano en $T\mathbb{S}^{n+1}$, dado por $X \mapsto \bar{\nabla}_X \operatorname{grad}^S F$, donde $X \in T\mathbb{S}^{n+1}$. De forma similar al caso anterior, sabemos que $\bar{\nabla}_X \operatorname{grad}^S F$ es la componente tangente de $D_X \operatorname{grad}^S F$, luego

$$\bar{\nabla}_X \operatorname{grad}^S F = D_X \operatorname{grad}^S F - \langle D_X \operatorname{grad}^S F, x \rangle x.$$

Para calcular la derivada covariante de $\operatorname{grad}^S F$ usamos (3.3), con lo que

$$\begin{aligned} D_X \operatorname{grad}^S F &= D_X \operatorname{grad}^E F - D_X(gF(x)x) \\ &= D_X \operatorname{grad}^E F - g(FX + (XF)x) \end{aligned}$$

y tomando la componente tangente a $\mathbb{S}^{n+1}$ en esto último obtenemos la expresión del operador

$$X \mapsto \bar{\nabla}_X \operatorname{grad}^S F = D_X \operatorname{grad}^E F - \langle D_X \operatorname{grad}^E F, x \rangle x - gFX,$$

y en consecuencia,

$$\operatorname{Hess}^S F = \pi_{T\mathbb{S}^{n+1}} \circ \operatorname{Hess}^E F - gF \operatorname{Id}.$$

Calculemos ahora la traza de este operador. Sea $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ una base ortonormal de $T_x\mathbb{S}^{n+1}$ con $x \in \mathbb{S}^{n+1}$. Tomando $\{e_1, \ldots, e_{n+1}, x\}$ tenemos una base ortonormal de $T_x\mathbb{R}^{n+2}$. Trabajemos con cada uno de los términos de la expresión del operador. En primer lugar,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \langle D_{e_i} \operatorname{grad}^E F, e_i \rangle = \Delta^E F - \langle D_x \operatorname{grad}^E F, x \rangle.$$

Además,

$$\begin{aligned} \langle D_x \operatorname{grad}^E F, x \rangle &= D_x \langle \operatorname{grad}^E F, x \rangle - \langle \operatorname{grad}^E F, D_x x \rangle = D_x(gF) - \langle \operatorname{grad}^E F, x \rangle \\ &= (g-1) \langle \operatorname{grad}^E F, x \rangle = (g-1) gF(x). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \langle D_{e_i} \operatorname{grad}^E F, x \rangle \langle x, e_i \rangle = 0,$$

y por último, es claro que la traza de la aplicación $X \mapsto -gFX$ en $T_x\mathbb{S}^{n+1}$ es $-g(n+1)F$. En conclusión, usando las expresiones previas, podemos calcular la traza de $X \mapsto \bar{\nabla}_X \operatorname{grad}^S F$, obteniendo

$$\Delta^S F = \Delta^E F - g(g-1)F - g(n+1)F = \Delta^E F - gF(g+n),$$

y concluyendo la prueba. □

A continuación, enunciamos el Teorema de algebraicidad de Münzner, el cual muestra la naturaleza algebraica de la hipersuperficies isoparamétricas de las esferas como sigue:

Teorema 3.11. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ con g curvaturas principales $\lambda_i = \cot(\theta_i)$, con $0 < \theta_i < \pi$ para $i = 1, \dots, g$, y con multiplicidades respectivas m_i. Entonces, M es un subconjunto abierto de un conjunto de nivel de la restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$ de un polinomio homogéneo F en $\mathbb{R}^{n+2}$ de grado g que cumple las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$\|\operatorname{grad}^E F\|^2 = g^2 r^{2g-2}, \tag{3.5}$$

$$\Delta^E F = c r^{g-2}, \tag{3.6}$$

donde $r(x) = \|x\|$ y $c = g^2(m_2 - m_1)/2$.

Recordemos que por el Corolario 3.9, como mucho tenemos dos multiplicidades diferentes, las cuales tomaremos como m_1 y m_2. Además, si g es impar, tenemos garantizado que estas dos multiplicidades coinciden, teniendo $c = 0$, y por lo tanto, $\Delta^E F = 0$ en el Teorema 3.11.

Münzner llamó *polinomio de Cartan* a este polinomio F, pero actualmente se le conoce por *polinomio de Cartan-Münzner*, y las ecuaciones (3.5) y (3.6) son conocidas como *ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner*.

Observación 3.12. Tengamos en cuenta que, denotando por V la restricción de F a $\mathbb{S}^{n+1}$, por el Teorema 3.10, se tiene

$$\|\operatorname{grad}^S V\|^2 = g^2(1 - V^2), \tag{3.7}$$

$$\Delta^S V = c - g(n+g)V, \tag{3.8}$$

con $c = g^2(m_2 - m_1)/2$, con lo que V es una función isoparamétrica en $\mathbb{S}^{n+1}$.

Para la demostración del Teorema 3.11 de algebraicidad, veamos la construcción de F dada por Münzner y unos resultados de utilidad para la prueba.

Sea M una hipersuperficie isoparamétrica orientada y conexa con g curvaturas principales diferentes $\lambda_i = \cot(\theta_i)$, con $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_g < \pi$, y multiplicidades m_i. Dado que M es orientada, su fibrado normal en $\mathbb{S}^{n+1}$ es trivial y difeomorfo a $M \times \mathbb{R}$. Así, consideremos la aplicación exponencial normal $E \colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^{n+1}$ dada por

$$E(x,t) = \Phi^t(x) = \cos(t)x + \sin(t)\xi_x,$$

siendo ξ el campo de vectores unitario normal a M en $\mathbb{S}^{n+1}$ que define la orientación de M, y que es usado para construir el desplazamiento normal Φ^t. Sabemos que esta aplicación tiene rango máximo $n+1$ siempre que $\cot(t)$ no sea curvatura principal de M en x. Luego, para cada punto regular (x,t) de E, existe un entorno abierto U en $M \times \mathbb{R}$ donde E es un difeomorfismo entre U y un subconjunto abierto $\bar{U} = E(U)$ de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Definimos la función $\tau \colon \bar{U} \to \mathbb{R}$ por

$$p \mapsto \tau(p) = \theta_1 - \pi_2(E^{-1}(p)), \tag{3.9}$$

donde π_2 es la proyección en la segunda coordenada, obteniendo que $\tau(p)$ es la distancia orientada desde p hasta el primer punto focal a lo largo de la geodésica normal a M que pasa por p, ya que θ_1 es la distancia a la que se encuentra M de su primera subvariedad focal. Definimos también la función $V \colon \bar{U} \to \mathbb{R}$ por

$$V(p) = \cos(g\tau(p)). \tag{3.10}$$

Observemos que si $p = E(x,t)$, con $x \in M$, $\tau(p) = \theta_1 - t$, luego las funciones τ y V son constantes en cada hipersuperficie paralela $M^t = \Phi^t(M)$ dentro de $\bar{U}$. Extendemos ahora V a una función homogénea F de grado g en el cono en $\mathbb{R}^{n+2}$ sobre $\bar{U}$ definida por

$$F(rp) = r^g \cos(g\tau(p)), \tag{3.11}$$

con $p \in \bar{U}$ y $r > 0$. La prueba del Teorema 3.11 consistirá en demostrar que esta función F cumple la ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner (3.5) y (3.6), y que es la restricción a $\bar{U}$ de un polinomio homogéneo de grado g.

Comencemos con la demostración del Teorema de Münzner, siguiendo [14], donde se hace una prueba cercana a la original dada por Münzner.

Sean $p = \cos(t)x + \sin(t)\xi_x$ un punto de $\bar{U}$ con $x \in M$ y

$$\eta_p^t = -\sin(t)x + \cos(t)\xi_x$$

el vector unitario normal a la hipersuperficie paralela M^t en p. Además,

$$\eta_p^t = E_{*(x,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\operatorname{grad}^S \tau, \tag{3.12}$$

ya que τ es la función distancia al primer punto focal de M a lo largo de la geodésica γ de $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi_p$.

Considerando un elemento z perteneciente al cono en $\mathbb{R}^{n+2}$ sobre $\bar{U}$, entonces por (3.11) tenemos

$$F(z) = \|z\|^g \cos(g\tau(z/\|z\|)),$$

con lo que si definimos la función $\sigma \colon \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n+1}$, $z \mapsto \sigma(z) = z/\|z\| = z/r$, podemos reescribir la función F como

$$F = r^g \cos(g(\tau \circ \sigma)). \tag{3.13}$$

Veamos que esta función F cumple las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner.

Fácilmente podemos ver que $\operatorname{grad}^E r = \sigma$. Además, si $Z \in T_z\mathbb{R}^{n+2}$, entonces

$$\langle Z, \operatorname{grad}^E(\tau \circ \sigma)\rangle = \tau_*\sigma_* Z = \langle (\operatorname{grad}^S \tau) \circ \sigma, \sigma_* Z\rangle.$$

Por otra parte, tenemos

$$\sigma_*(Z) = \frac{1}{r}(Z - \langle Z, \sigma\rangle \sigma). \tag{3.14}$$

Usando (3.12), (3.14) y $\langle \operatorname{grad}^S \tau, \sigma\rangle = 0$, obtenemos

$$\tau_*(\sigma_* Z) = -\frac{1}{r}\langle \eta^t \circ \sigma, Z\rangle,$$

es decir,

$$\operatorname{grad}^E(\tau \circ \sigma) = -\frac{1}{r}\eta^t \circ \sigma, \tag{3.15}$$

con lo que si ahora consideramos la expresión de F en (3.13), se tiene

$$\operatorname{grad}^E F = g r^{g-1} W, \tag{3.16}$$

con

$$W = \cos(g(\tau \circ \sigma))\sigma + \sin(g(\tau \circ \sigma))\eta^t \circ \sigma,$$

resultando así, gracias a que $\sigma(z)$ y $\eta^t \circ \sigma(z)$ son ortogonales y unitarios, en

$$\| \operatorname{grad}^E F\|^2 = g^2 r^{2g-2}, \tag{3.17}$$

por lo que F cumple la primera ecuación diferencial de Cartan-Münzner (3.5).

Veamos ahora la segunda ecuación diferencial de Cartan-Münzner, para la cual necesitamos calcular $\Delta^E F$. En esta parte de la demostración será de gran utilidad la fórmula para las curvaturas principales obtenida en el Teorema 3.8. En lo que resta de la demostración, todos los gradientes son respecto al espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+2}$, así que omitiremos el superíndice E en la notación. Haremos lo mismo para las divergencias euclídeas, aunque sí aparecerá la divergencia de funciones definidas en la esfera, en concreto, de η^t, la cual denotaremos div^S.

Por la igualdad (3.16) y la regla del producto para la divergencia, se obtiene que

$$\Delta^E F = \operatorname{div} \operatorname{grad} F = \langle \operatorname{grad}(g r^{g-1}), W\rangle + g r^{g-1} \operatorname{div} W. \tag{3.18}$$

Calculemos cada uno de los términos del lado derecho de esta igualdad. Para el primero, recordemos que $\operatorname{grad} r = \sigma$, y apliquemos la regla de la cadena, obteniendo

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}(g r^{g-1}), W\rangle &= g(g-1) r^{g-2}\langle \operatorname{grad} r, W\rangle = g(g-1) r^{g-2}\langle \sigma, W\rangle \\ &= g(g-1) r^{g-2} \cos(g(\tau \circ \sigma)), \end{aligned} \tag{3.19}$$

mientras que para el segundo basta aplicar la regla del producto,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} W = {} & \langle \operatorname{grad}(\cos(g(\tau\circ\sigma))), \sigma\rangle + \langle \operatorname{grad}(\sin(g(\tau\circ\sigma))), \eta^t\circ\sigma\rangle \\ & + \cos(g(\tau\circ\sigma)) \operatorname{div}\sigma + \sin(g(\tau\circ\sigma)) \operatorname{div}(\eta^t\circ\sigma).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Calculemos también cada término en esta última igualdad por separado. Usando la igualdad (3.15), tenemos

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad}(\cos(g(\tau\circ\sigma))), \sigma\rangle &= -g\sin(g(\tau\circ\sigma))\langle \operatorname{grad}(\tau\circ\sigma), \sigma\rangle \\ &= -g\sin(g(\tau\circ\sigma))\langle (-1/r)\eta^t\circ\sigma, \sigma\rangle = 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

y de forma análoga

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad}(\sin(g(\tau\circ\sigma))), \eta^t\circ\sigma\rangle &= g\cos(g(\tau\circ\sigma))\langle (-1/r)\eta^t\circ\sigma, \eta^t\circ\sigma\rangle \\ &= -\frac{g}{r}\cos(g(\tau\circ\sigma)).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Respecto al tercer término tenemos, recordando que $z\in\mathbb{R}^{n+2}$,

$$(\operatorname{div}\sigma)(z) = \operatorname{div}\frac{z}{r} = -\frac{1}{r^2}\langle \operatorname{grad} r, z\rangle + \frac{1}{r}\operatorname{div} z = -\frac{1}{r} + \frac{n+2}{r} = \frac{n+1}{r}, \tag{3.23}$$

y para el cuarto vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 3.13. *Se tiene que:*

(a) $\operatorname{div}^S(\eta^t\circ\sigma) = \frac{1}{r}(\operatorname{div}^S\eta^t)\circ\sigma$,

(b) $\operatorname{div}^S(\eta^t) = -\sum_{i=1}^{g} m_i \cot(\tau + \frac{i-1}{g}\pi)$,

(c) $\operatorname{div}^S(\eta^t) = -n\cot(g\tau) - \frac{(m_1-m_2)g}{2\sin(g\tau)}$.

Demostración. Sea Z un vector tangente a $\mathbb{R}^{n+2}$ en un punto z del cono sobre $\bar{U}$, y sea c una curva en $\mathbb{R}^{n+2}$ con condiciones iniciales $c(0)=z$ y $\dot{c}(0)=Z$. Entonces, tenemos una curva $\alpha=\eta^t\circ\sigma\circ c$ cuyo vector tangente inicial es $\dot\alpha(0) = D_Z(\eta^t\circ\sigma) = \eta^t_*\sigma_* Z = D_{\sigma_* Z}\eta^t$, donde D es la derivada covariante euclídea.

Recordemos la igualdad (3.14) calculada anteriormente,

$$\sigma_*(Z) = \frac{1}{r}(Z - \langle Z,\sigma\rangle\sigma),$$

en la cual, si $Z = z/r$, se tiene $\sigma_*(Z)=0$, mientras que si Z es tangente a alguna esfera de radio r centrada en el origen de $\mathbb{R}^{n+2}$, tenemos $\sigma_*(Z) = Z/r$, con lo que

$$\begin{aligned} D_Z(\eta^t\circ\sigma) &= 0, && \text{para } Z = \frac{z}{r}, \\ D_Z(\eta^t\circ\sigma) &= \frac{1}{r}(D_Z\eta^t)\circ\sigma, && \text{para } Z \text{ ortogonal a } \sigma.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\operatorname{div}(\eta^t \circ \sigma) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n+1}\langle (D_{e_i}\eta^t)\circ\sigma, e_i\rangle e_i, = \frac{1}{r}(\operatorname{div}^S \eta^t)\circ\sigma$$

donde $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ es una base ortonormal de $T_{\sigma(z)}\mathbb{S}^{n+1}$, obteniendo así (a).

Sean $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{S}^{n+1}$, $p = E(x,t)$ un punto de $\bar{U}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de T_pM^t. Entonces,

$$\operatorname{div}^S \eta^t = \sum_{i=1}^{n}\langle \bar{\nabla}_{e_i}\eta^t, e_i\rangle + \langle \bar{\nabla}_{\eta^t}\eta^t, \eta^t\rangle,$$

donde el último término es nulo, pues η^t tiene longitud constante. Esto nos permite relacionar $\operatorname{div}^S \eta^t$ con la traza del operador de configuración $\mathcal{S}^t$ de M^t:

$$\operatorname{div}^S \eta^t = -\sum_{i=1}^{n}\langle \mathcal{S}^t e_i, e_i\rangle = -\operatorname{tr}\mathcal{S}^t.$$

Recurriendo al Corolario 3.5 y a la fórmula para las curvaturas del Teorema 3.8 obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^S \eta^t &= -\sum_{i=1}^{g} m_i \cot(\theta_i - t) = -\sum_{i=1}^{g} m_i \cot((\theta_i - \theta_1) - (t - \theta_1))\\ &= -\sum_{i=1}^{g} m_i \cot\left(\tau + \frac{i-1}{g}\pi\right),\end{aligned}$$

terminando la prueba de (b).

Dividamos la demostración de (c) en dos casos, ya que sabemos que, como mucho, hay dos multiplicidades diferentes. Supongamos primero que todas son iguales, por lo cual se tiene que $gm_i = n$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, g\}$. Entonces, de la igualdad del apartado (b), y usando la relación trigonométrica [45, 4.4.7(1), p. 646]

$$\sum_{i=1}^{g} \cot\left(\tau + \frac{i-1}{g}\pi\right) = g\cot(g\tau),$$

deducimos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^S \eta^t &= -\sum_{i=1}^{g} m_i \cot\left(\tau + \frac{i-1}{g}\pi\right) = -\frac{n}{g}\sum_{i=1}^{g} \cot\left(\tau + \frac{i-1}{g}\pi\right)\\ &= -\frac{n}{g} g\cot(g\tau) = -n\cot(g\tau),\end{aligned}$$

lo que prueba este caso. Si hay dos multiplicidades diferentes, sabemos que g es un número par $2l$ y que $m_1 = m_3 = \cdots = m_{g-1}$, $m_2 = m_4 = \cdots = m_g$. En este caso, a partir de la fórmula para $\operatorname{div}^S \eta^t$ obtenemos, sin el signo negativo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{g} m_i \cot(\tau + \frac{i-1}{g}\pi) &= m_1 \sum_{j=1}^{l} \cot(\tau + \frac{j-1}{l}\pi) + m_2 \sum_{j=1}^{l} \cot(\tau + \frac{\pi}{2l} + \frac{j-1}{l}\pi) \\
&= m_1 l \cot(l\tau) + m_2 l \cot(l\tau + \frac{\pi}{2}) \\
&= m_1 l \cot(l\tau) - m_2 l \tan(l\tau),
\end{aligned}$$

con lo que existe un ω tal que

$$\cos^2(\omega) = m_1/(m_1+m_2), \qquad \sin^2(\omega) = m_2/(m_1+m_2).$$

Sabemos que M tiene dimensión $n = (m_1+m_2)g/2$, es decir, $n = (m_1+m_2)l$. Si seguimos desarrollando la igualdad anterior, y usando las fórmulas trigonométricas

$$\tan(x)\sin(2x) = 1 - \cos(2x), \quad \cot(x)\sin(2x) = 1 + \cos(2x),$$

se tiene,

$$\begin{aligned}
m_1 l \cot(l\tau) - m_2 l \tan(l\tau) &= n(\cos^2(\omega)\cot(l\tau) - \sin^2(\omega)\tan(l\tau)) \\
&= n\frac{\cos^2(\omega)(1+\cos(g\tau)) - \sin^2(\omega)(1-\cos(g\tau))}{\sin(g\tau)} \\
&= n\frac{\cos(2\omega) + \cos(g\tau)}{\sin(g\tau)} \\
&= n\cot(g\tau) + \frac{g(m_1-m_2)}{2\sin(g\tau)},
\end{aligned}$$

concluyendo la prueba del lema. □

Ya tenemos calculados todos los términos de $\Delta^E F$, así que, usando las igualdades (3.18)-(3.23) y el Lema 3.13, concluimos

$$\begin{aligned}
\Delta^E F &= g(g-1)r^{g-2}\cos(g(\tau\circ\sigma)) + gr^{g-1}\left(-\frac{g}{r}\cos(g(\tau\circ\sigma))\right) \\
&\quad + gr^{g-1}\cos(g(\tau\circ\sigma))\left(\frac{n+1}{r}\right) \\
&\quad + gr^{g-1}\sin(g(\tau\circ\sigma))\left(\frac{1}{r}\right)\left(-n\cot(g(\tau\circ\sigma)) - \frac{g(m_1-m_2)}{2\sin(g(\tau\circ\sigma))}\right) \\
&= gr^{g-2}\cos(g(\tau\circ\sigma))(g-1-g+n+1-n) + gr^{g-2}\frac{-g(m_1-m_2)}{2} \\
&= g^2 r^{g-2}\frac{(m_2-m_1)}{2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, F también cumple la segunda ecuación diferencial de Cartan-Münzner (3.6). Para completar la demostración del Teorema 3.11 de Münzner tenemos que comprobar que F es la restricción al cono sobre $\bar{U}$ de un polinomio homogéneo de grado g en $\mathbb{R}^{n+2}$. Comencemos viendo el siguiente lema.

Lema 3.14. *$\Delta r^k = k(k+n)r^{k-2}$ en $\mathbb{R}^{n+2}$ para un entero positivo k.*

Demostración. Tengamos en cuenta que $\operatorname{grad} r^k = kr^{k-1} \operatorname{grad} r = kr^{k-1}\sigma$ con $\sigma(z) = z/r$ como definimos anteriormente. Luego, usando también (3.23), se deduce que

$$\begin{aligned}\Delta r^k &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} r^k) = k\langle \operatorname{grad} r^{k-1}, \sigma\rangle + kr^{k-1} \operatorname{div} \sigma \\ &= k(k-1)r^{k-2}\langle \sigma, \sigma\rangle + kr^{k-1}\frac{n+1}{r} \\ &= k(k+n)r^{k-2}.\end{aligned}$$

□

Definamos una función G en el cono sobre $\bar{U}$ como $G = F - ar^g$, con

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{2(g+n)}.$$

Ya que F cumple la segunda ecuación diferencial de Cartan-Münzner (3.6), si aplicamos este Lema 3.14, podemos calcular

$$\begin{aligned}\Delta G &= \Delta F - a\Delta r^g = cr^{g-2} - ag(g+n)r^{g-2} \\ &= \frac{g^2(m_2 - m_1)}{2} r^{g-2} - \frac{g(m_2 - m_1)}{2(g+n)} g(g+n)r^{g-2} = 0,\end{aligned}$$

con lo que G y todas sus derivadas parciales de cualquier orden son funciones armónicas.

Lema 3.15. *$\Delta^g \| \operatorname{grad} G\|^2 = 0$, donde $\Delta^1 = \Delta$ y $\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}$.*

Demostración. Por la definición de G, calculamos $\operatorname{grad} G = \operatorname{grad} F - agr^{g-1}\sigma$, luego

$$\| \operatorname{grad} G\|^2 = \| \operatorname{grad} F\|^2 - 2agr^{g-1}\langle \operatorname{grad} F, \sigma\rangle + a^2 g^2 r^{2g-2}.$$

Usando las igualdades (3.13), (3.16) y (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned}\| \operatorname{grad} G\|^2 &= g^2 r^{2g-2}(1+a^2) - (2agr^{g-1})(gr^{g-1}\cos(g(\tau \circ \sigma))) \\ &= g^2 r^{2g-2}(1+a^2) - 2ag^2 r^{g-2} F,\end{aligned}$$

y sabemos que $F = G + ar^g$, con lo que sustituyendo esto y agrupando adecuadamente, se tiene

$$\| \operatorname{grad} G\|^2 + 2ag^2 r^{g-2} G = g^2 r^{2g-2}(1-a^2). \tag{3.24}$$

Si aplicamos el Lema 3.14, junto con la igualdad (3.16), y el hecho de que G es armónica, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(r^k G) &= \operatorname{div}(r^k \operatorname{grad} G) + \operatorname{div}(G \operatorname{grad} r^k) \\ &= 2\langle \operatorname{grad} r^k, \operatorname{grad} G\rangle + r^k \Delta G + G\Delta r^k \\ &= 2kr^{k-1}\langle \sigma, \operatorname{grad} F - agr^{g-1}\sigma\rangle + k(k+n)r^{k-2}G \\ &= 2kgr^{g+k-2}\cos(g(\tau \circ \sigma)) - 2kagr^{g+k-2} + k(k+n)r^{k-2}G \\ &= 2kgr^{k-2}(F - ar^g) + k(k+n)r^{k-2}G \\ &= 2kgr^{k-2}G + k(k+n)r^{k-2}G \\ &= k(2g+k+n)r^{k-2}G,\end{aligned}$$

con la cual deducimos que $\Delta^{k+1}(r^{2k}G) = 0$.

Recordemos la restricción existente para las multiplicidades. Si todas las multiplicidades son iguales, $m_1 = m_2$, con lo que a se anula, y en consecuencia, el término $2ag^2r^{g-2}G$ de (3.24) también. Si por el contrario m_1 y m_2 no coinciden, entonces g es par, y además, aplicando $g/2$ veces Δ, $2ag^2r^{g-2}G$ se reduce a cero. En cualquier caso, aplicando g veces Δ, el lado derecho de (3.24), $g^2r^{2g-2}(1-a^2)$, también se ve reducido a cero, obteniendo finalmente $\Delta^g\|\operatorname{grad} G\|^2 = 0$. □

Veamos que ahora una expresión explícita para $\Delta^g\|\operatorname{grad} G\|^2$.

Lema 3.16. *Para cualquier función armónica G,*

$$\Delta^g\|\operatorname{grad} G\|^2 = 2^g \sum \left(\frac{\partial^{g+1} G}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{g+1}}} \right)^2,$$

donde el sumatorio se realiza sobre todas las $(g+1)$-tuplas de la forma $(i_1, \dots, i_{g+1})$, con cada $i_j \in \{1, \dots, n+2\}$, admitiendo repeticiones.

Demostración. Sabemos, por definición, que $\|\operatorname{grad} G\|^2 = \sum_{i=1}^{n+2} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2$, y que para cualquier función $f\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$,

$$\Delta f^2 = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f^2) = \operatorname{div}(2f \operatorname{grad} f) = 2\|\operatorname{grad} f\|^2 + 2f\Delta f,$$

luego, usando que G es armónica, tenemos

$$\Delta\|\operatorname{grad} G\|^2 = \sum_{i=1}^{n+2} 2 \left\| \operatorname{grad} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right\|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2.$$

Dado que las derivadas parciales de G también son armónicas, podemos repetir el cálculo anterior,

$$\begin{aligned} \Delta^2\|\operatorname{grad} G\|^2 &= 2^2 \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} \left\| \operatorname{grad} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2 \\ &= 2^2 \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} \left(\frac{\partial^3 G}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2, \end{aligned}$$

Iterando este cálculo g veces, llegamos a

$$\Delta^g\|\operatorname{grad} G\|^2 = 2^g \sum \left(\frac{\partial^{g+1} G}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{g+1}}} \right)^2,$$

sumando sobre todas las $(g+1)$-tuplas $(i_1, \dots, i_{g+1})$ con cada $i_j \in \{1, \dots, n+2\}$. □

Como remate final a la prueba del Teorema 3.11, combinando los Lemas 3.15 y 3.16, tenemos que todas las derivadas parciales de G de orden $g+1$ son nulas. Además, veremos a continuación que $\Delta^{g-1}\|\operatorname{grad} G\|^2$ no se anula, y por tanto no todas las derivadas parciales de G de orden g se anulan.

Independientemente del valor de a, podemos olvidar el término $2ag^2r^{g-2}G$ de (3.24), ya que si $a=0$, se anula directamente, y si $a \neq 0$, entonces g es par, y se reduce a cero al aplicar $g/2$ veces Δ, con lo que es seguro que es nulo en la $(g-1)$-ésima aplicación, luego no va a influir en el cálculo de $\Delta^{g-1}\|\operatorname{grad} G\|^2$. En consecuencia, al aplicar Δ^{g-1} a (3.24), se tiene

$$\Delta^{g-1}\|\operatorname{grad} G\|^2 = \Delta^{g-1}(g^2r^{2g-2}(1-a^2)),$$

con lo que, utilizando el Lema 3.14 las veces necesarias, se tiene

$$\Delta^{g-1}\|\operatorname{grad} G\|^2 = (2g)^{g-1}(g-1)!(n+2(g-1))(n+2(g-2))\dots(n+2)(1-a^2),$$

deduciendo así que $\Delta^{g-1}\|\operatorname{grad} G\|^2$ es una constante no nula, ya que $|a|<1$.

En conclusión, G es una función polinómica homogénea de grado g en el cono en $\mathbb{R}^{n+2}$ sobre $\bar{U}$, completando la prueba del Teorema 3.11 de algebraicidad de Münzner.

Münzner también demostró el resultado recíproco y de caracterización, obteniendo que toda función polinómica homogénea en $\mathbb{R}^{n+2}$ que satisfaga las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner está relacionada con el polinomio de Cartan-Münzner de una hipersuperficie isoparamétrica. Así, enunciamos el siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar tanto en el artículo original [39, Satz 3] como en el libro [14, Theorem 3.41].

Teorema 3.17. *Sea $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ un polinomio homogéneo de grado $\tilde{g}$ que satisface las ecuaciones diferenciales* (3.5) *y* (3.6) *con parámetros $\tilde{g}$ y $\tilde{c}$, tal que la restricción $\tilde{V}$ de $\tilde{F}$ a $\mathbb{S}^{n+1}$ no es constante. Entonces, cero es un valor regular de $\tilde{V}$ y $\tilde{V}^{-1}(0)$ es una hipersuperficie isoparamétrica orientada con campo de vectores normal* $\operatorname{grad}^S \tilde{V}$.

Sea F el polinomio de Cartan-Münzner de una componente conexa de $\tilde{V}^{-1}(0)$. Entonces, $\tilde{F}=F$ o $\tilde{F}=\pm(2F^2-r^{2g})$. En este segundo caso, $c=0$, $\tilde{g}=2g$ y $\tilde{c}=\mp\tilde{g}n$.

Es fácil observar que la primera afirmación del Teorema 3.17 se sigue directamente del Teorema 3.11 y de la Observación 3.12, por lo que V es una función isoparamétrica de la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, cuyo gradiente define una orientación sobre sus conjuntos de nivel. Además, es claro que V solo puede tomar valores en el intervalo $[-1,1]$, teniendo en cuenta la ecuación (3.7). Luego, las subvariedades que forman parte de la correspondiente familia isoparamétrica de hipersuperficies son las hipersuperficies orientables $V^{-1}(t)$, $t \in (-1,1)$, junto con las subvariedades focales $V^{-1}(1)$ y $V^{-1}(-1)$. Además, por el Teorema 3.8, cada hipersuperficie isoparamétrica tiene $2g$ puntos focales a lo largo de una geodésica normal, manteniendo siempre la misma distancia entre dos consecutivos, los cuales caen de forma alterna en M_+ y M_-.

Observación 3.18. Existen polinomios, que no son polinomios de Cartan-Münzner, cuya restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$ tiene como conjuntos de nivel una familia de hipersuperficies isoparamétricas y sus subvariedades focales. Por ejemplo, si definimos el polinomio G sobre

$\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$, con $p + q = n$, por $G(x, y) = \|x\|^2$, entonces G tiene los mismos conjuntos de nivel en $\mathbb{S}^{n+1}$ que el polinomio de Cartan-Münzner $F(x, y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$, ya que en $\mathbb{S}^{n+1}$, $F = 2G - 1$. Sin embargo, G no cumple las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner.

Por otra parte, se puede probar, con argumentos de difeomorfía y usando la aplicación exponencial normal de M, que los elementos de una familia isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ son conexos, véase [14, Theorem 3.44].

Teorema 3.19. *Sea $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ un polinomio de Cartan-Münzner de grado g y V su restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces, cada hipersuperficie isoparamétrica*

$$M^t = V^{-1}(t), \quad -1 < t < 1,$$

es conexa. Además, las subvariedades focales $M_+ = V^{-1}(1)$ y $M_- = V^{-1}(-1)$ también son conexas.

Como consecuencia directa de este Teorema 3.19, se tiene que cualquier hipersuperficie isoparamétrica conexa M de $\mathbb{S}^{n+1}$ está contenida en una hipersuperficie isoparamétrica conexa y compacta de la forma $V^{-1}(t)$ con $-1 < t < 1$, donde V es la restricción a $\mathbb{S}^{n+1}$ del polinomio de Cartan-Münzner de M.

3.3. Restricción del número de curvaturas principales

Ya vimos en el capítulo anterior como Segre y Cartan fueron capaces de clasificar completamente las familias de hipersuperficies isoparamétricas en los casos euclídeo e hiperbólico. Sin embargo, en el caso esférico, Cartan solo las pudo clasificar con $g \leq 3$ curvaturas principales, sin siquiera saber si habría una cota para g. Es aquí donde entra una de las mayores aportaciones de Münzner a este campo de estudio. Usando principalmente el anillo de cohomología de la hipersuperficie M a estudiar y los de sus subvariedades focales M_+ y M_-, junto con el hecho de que una hipersuperficie isoparamétrica, compacta y conexa divide la esfera en dos fibrados por discos, cada uno sobre una focal, obtuvo el siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar en [40].

Teorema 3.20. *Sea M una hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ con g curvaturas principales diferentes. Entonces $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.*

Tengamos en cuenta que no es necesario asumir que M sea compacta, pues siempre estará contenida, gracias al Teorema de algebraicidad de Münzner, en una hipersuperficie isoparamétrica, conexa y compacta, para la cual se pueden aplicar los argumentos de la demostración.

Una vez se tiene cuantas curvaturas podemos encontrar, cabe preguntarse por las correspondientes multiplicidades. En cualquier caso, sabemos que como mucho hay dos multiplicidades diferentes (m_1, m_2). Para los casos con $g \leq 3$ basta recurrir al Corolario 3.9. Para $g = 4$, partiendo del hecho de que M separa $\mathbb{S}^{n+1}$ en dos fibrados por discos sobre las focales, varios matemáticos encontraron restricciones para (m_1, m_2), culminando en el siguiente resultado (véase [51]):

Teorema 3.21. *Las multiplicidades (m_1, m_2) de las curvaturas principales de una hipersuperficie isoparamétrica con $g = 4$ curvaturas principales coinciden con las de los ejemplos dados por Ferus, Karcher y Münzner, denominados ejemplos de tipo FKM, (véase Subsección 3.3.4), con las únicas excepciones de $(m_1, m_2) \in \{(2, 2), (4, 5)\}$, para las cuales existen ejemplos homogéneos que no son de tipo FKM.*

En el caso de $g = 6$, Münzner [40] probó que m_1 y m_2 coinciden, y Abresch [1] que solo pueden ser 1 o 2, dando lugar a:

Teorema 3.22. *Para una hipersuperficie isoparamétrica con $g = 6$ curvaturas principales, todas ellas tienen la misma multiplicidad $m \in \{1, 2\}$.*

En lo que resta de este capítulo, estudiaremos las familias isoparamétricas para cada uno de los valores de g obtenidos por Münzner. Para $g \leq 3$ presentaremos todos los posibles ejemplos, que resultan ser homogéneos. Respecto a $g = 4$ y 6, daremos una explicación de la evolución del estudio de cada caso.

3.3.1. Ejemplos homogéneos con $g = 1$

Consideremos un punto $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ y el subgrupo $G \cong SO(n+1)$ de $SO(n+2)$ de transformaciones que dejan fijos p y $-p$. Para $z \in \mathbb{S}^{n+1}$, $z \neq \pm p$, el subgrupo de isotropía

$$G_z = \{g \in G \colon gz = z\}$$

es una copia de $SO(n)$ embebida de modo estándar en $SO(n+1) \subset SO(n+2)$, con lo que la órbita $M = G \cdot z$ es una hipersuperficie de $\mathbb{S}^{n+1}$. En caso de tomar $z = \pm p$ se tiene la órbita singular $\{p\}$ o $\{-p\}$.

Tomemos una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$, de forma que $e_1 = p$ y tal que $z \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$. Respecto a esta base, sean A_0 una matriz antisimétrica $(n+1) \times (n+1)$ y A una matriz $(n+2) \times (n+2)$ de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right).$$

El conjunto de estas matrices es el álgebra de Lie de G, que denotamos por $\mathfrak{g}$. Entonces $g_t = \operatorname{Exp} tA$ es una curva en G con condiciones iniciales $g_0 = I$ y $(g_t)_{*0} = A$. Luego, sabemos que el espacio tangente a la órbita $M = G \cdot z$ es el conjunto de vectores de la forma

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(g_t z) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \operatorname{Exp}(tA)z = Az.$$

Consideremos el vector $\xi = \alpha p + \beta z + w$ con w ortogonal a p y z. Entonces $\langle Az, \xi\rangle = 0$, lo que equivale a $\langle z, A\xi\rangle = 0$, que a su vez equivale a $\langle z, Aw\rangle = 0$, ya que $Ap = 0$ y $\langle z, Az\rangle = 0$, por la definición y antisimetría de A.

Si además ξ es normal a M en z, se tiene que $\langle Az, \xi\rangle = \langle z, Aw\rangle = 0$ para cualquier matriz antisimétrica A con la forma ya descrita. Tomemos en particular una A que cumpla $A(e_j) = 0$ para $j \neq 2, k$, $A(e_2) = e_k$ y $A(e_k) = -e_2$, de forma que

$$Aw = A\left(\sum_{i=3}^{n+2} w_i e_i\right) = -w_k e_2.$$

Así,

$$0 = \langle z, Aw\rangle = \langle z_1 e_1 + z_2 e_2, -w_k e_2\rangle = -z_2 w_k,$$

con lo que $w_k = 0$ para todo k. Entonces, $\xi = \alpha p + \beta z$.

Por otra parte, ξ es tangente a $\mathbb{S}^{n+1}$ en z, por lo que si multiplicamos escalarmente la expresión de ξ por z obtenemos

$$0 = \alpha\langle z, p\rangle + \beta,$$

luego $\beta = -\alpha\langle z, p\rangle$. Sea $\langle z, p\rangle = \cos(s_0)$ con $0 < s_0 < \pi$. Entonces

$$\xi = \alpha(p - \langle z, p\rangle z),$$

$$\|\xi\|^2 = \alpha^2 \sin^2(s_0).$$

De esta forma, tomemos el vector unitario normal a M en z

$$\xi_0 = \frac{1}{\sin(s_0)}(p - \cos(s_0)z).$$

Para cada $A \in \mathfrak{g}$, tenemos la curva $\mathrm{Exp}(tA)$ en G, y por lo tanto, la curva en M

$$z_t = \mathrm{Exp}(tA)z_0$$

con condiciones iniciales z_0 y Az_0, y

$$\xi_0 = \frac{1}{\sin(s_0)}(p - \cos(s_0)z_0),$$

es el vector unitario normal a M en z_0, con $\cos(s_0) = \langle z_0, p\rangle$.

Si consideramos un $g \in G$, el espacio tangente a M en $z = gz_0$ es $T_zM = gT_{z_0}M$, y además $\xi_z = g\xi_0$. Entonces

$$D_{Az_0}\xi = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\mathrm{Exp}(tA))\xi_0 = A\xi_0 = A\left(\frac{p - \cos(s_0)z_0}{\sin(s_0)}\right) = -\cot(s_0)Az_0,$$

obteniendo que M es umbílica en z_0 con curvatura principal $\cot(s_0)$. Si por último consideramos un $z = gz_0$ arbitrario en M,

$$gAz_0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} g\,\mathrm{Exp}(tA)z_0,$$

y entonces

$$D_{gAz_0}\xi = \frac{d}{dt}_{|t=0} g\,\mathrm{Exp}(tA)\xi_0 = gA\xi_0 = -\cot(s_0)gAz_0,$$

obteniendo que M es totalmente umbílica con curvatura principal constante $\cot(s_0)$. En conclusión, las órbitas de la acción del subgrupo de transformaciones de $SO(n+2)$ que dejan fijo un punto p de $\mathbb{S}^{n+1}$ son hipersuperficies homogéneas. En consecuencia isoparamétricas, por la Proposición 2.9, con una curvatura principal constante $\cot(s)$, donde $\cos(s) = \langle z, p\rangle$ para cualquier $z \in M$.

Tomemos la función $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $F(z) = \langle z, p\rangle$, la cual cumple las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner, con parámetro $c = 0$, pues

$$\mathrm{grad}^E F = p, \qquad \|\mathrm{grad}^E F\|^2 = 1, \qquad \Delta^E F = 0.$$

Si además consideramos la restricción V de F a $\mathbb{S}^{n+1}$, esta es una función isoparamétrica, ya que por la Observación 3.12,

$$\|\mathrm{grad}^S V\|^2 = 1 - V^2, \qquad \Delta^S V = -(n+1)V.$$

Los conjuntos de nivel de V son hiperesferas que se pueden expresar como

$$M^s = \{z \in \mathbb{S}^{n+1} \colon \langle z, p\rangle = \cos(s)\}, \qquad 0 \le s \le \pi,$$

las cuales coinciden con las órbitas del grupo G ya mencionadas. Obtenemos entonces que F es el polinomio de Cartan-Münzner de estas hipersuperficies isoparamétricas.

Finalmente podemos concluir con el correspondiente resultado de clasificación.

Teorema 3.23. *Una hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}$ es isoparamétrica con $g = 1$ curvatura principal si y solo si es un subconjunto abierto de una esfera geodésica en $\mathbb{S}^{n+1}$ o, equivalentemente, de una órbita principal de la acción del subgrupo $SO(n)$ de $SO(n+2)$, embebido de modo estándar, salvo congruencia en $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Demostración. Arriba probamos la suficiencia. Para la otra implicación, sea M una hipersuperficie isoparamétrica con $g = 1$ en $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces, la única multiplicidad es $m = n$. Por la teoría general que hemos desarrollado en este capítulo, M focaliza en una subvariedad conexa M_+ de codimensión $m+1 = n+1$ en la esfera y, por lo tanto, M_+ es necesariamente un punto $\{p\}$ de $\mathbb{S}^{n+1}$. Así pues, M no es más que un tubo alrededor de dicho punto o, lo que es lo mismo, una esfera geodésica centrada en ese punto. La afirmación sobre la homogeneidad de estos ejemplos es clara en vista de la discusión en esta subsección. □

3.3.2. Ejemplos homogéneos con $g = 2$

Consideremos un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{S}^{n+1}$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^{p+1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{q+1}$, ambos no nulos, y $p + q = n$. Tomemos el subgrupo de Lie

$$G = SO(p+1) \times SO(q+1)$$

de $SO(n+2)$ embedido diagonalmente por bloques. Los elementos de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se pueden expresar como

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

donde A y B son matrices antisimétricas de orden $(p+1)\times(p+1)$ y $(q+1)\times(q+1)$ respectivamente, luego $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1)\oplus\mathfrak{so}(q+1)$. Se puede comprobar que el subgrupo de isotropía de z_0 es

$$G_{z_0} = SO(p)\times SO(q),$$

con lo que cada órbita de dimensión máxima tiene codimensión 2 en $\mathbb{R}^{n+2}$, es decir, que $M = G\cdot z_0$ es una hipersuperficie de $\mathbb{S}^{n+1}$, y por la Proposición 2.9 es isoparamétrica, con $g=2$ curvaturas principales constantes que calculamos más adelante.

Sea $F\colon \mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}^{q+1}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$F(z) = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

para $z=(x,y)$. Se tiene que la norma de su gradiente y su laplaciano son

$$\|\operatorname{grad}^E F\|^2 = 4r^2, \qquad \Delta^E F = 2(p-q),$$

con $r=\|z\|$, luego F cumple las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner con parámetros $g=2$ y $c=2(p-q)$. Recordemos que, en general, $c = g^2(m_2-m_1)/2$. Además, $m_1+m_2 = p+q = n$, con lo que deducimos

$$m_1 = q, \qquad m_2 = p.$$

Además, la restricción V de F a $\mathbb{S}^{n+1}$ cumple

$$\|\operatorname{grad}^S V\|^2 = 4(1-V^2), \qquad \Delta^S V = 2(p-q) - 2(n+2)V,$$

luego V es una función isoparamétrica, con conjuntos de nivel de la forma

$$M^s = \{z\in\mathbb{S}^{n+1}\colon F(z) = \cos(2s)\}, \qquad 0\le s\le \frac{\pi}{2},$$

que coinciden con las órbitas de la acción de G sobre $\mathbb{S}^{n+1}$. Tengamos en cuenta que M^0 y $M^{\pi/2}$ son subvariedades focales de M^s con $s\neq 0,\pi/2$, que se pueden expresar como

$$M^0 = \{(x,y)\in\mathbb{S}^{n+1}\colon y=0\} = \mathbb{S}^p\times\{0\},$$
$$M^{\frac{\pi}{2}} = \{(x,y)\in\mathbb{S}^{n+1}\colon x=0\} = \{0\}\times\mathbb{S}^q.$$

Tomemos un punto $z=(x,y)$. Viéndolo como punto de M^s, tenemos

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \cos(2s) = \cos^2(s) - \sin^2(s),$$

mientras que como punto de $\mathbb{S}^{n+1}$,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 = \cos^2(s) + \sin^2(s).$$

Si sumamos y restamos estas dos igualdades, obtenemos

$$\|x\|^2 = \cos^2(s) \quad \text{e} \quad \|y\|^2 = \sin^2(s),$$

respectivamente. En conclusión, cada hipersuperficie M^s es el producto de una p-esfera de radio $\cos(s)$ y una q-esfera de radio $\sin(s)$.

Si $X \in \mathbb{R}^{p+1} \cap T_z\mathbb{S}^{n+1}$ e $Y \in \mathbb{R}^{q+1} \cap T_z\mathbb{S}^{n+1}$, el espacio tangente en z a M^s expresado como,

$$T_zM^s = \{(X,Y) \colon \langle X, x\rangle = 0, \langle Y, y\rangle = 0\}$$

se puede descomponer en dos espacios principales correspondientes a cada una de las curvaturas principales. Tengamos en cuenta que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \operatorname{grad}^S V &= 2(1-\cos(2s))X, \\ \bar{\nabla}_Y \operatorname{grad}^S V &= -2(1+\cos(2s))Y, \end{aligned}$$

con lo que, calculando $\langle \mathcal{S}X, Y\rangle$ como en la igualdad (2.3), obtenemos las curvaturas principales

$$\frac{2(1+2\cos(2s))}{2\sqrt{1-\cos^2(2s)}} = \cot(s) = \lambda_1, \qquad \frac{-2(1-2\cos(2s))}{2\sqrt{1-\cos^2(2s)}} = \cot(s+\frac{\pi}{2}) = \lambda_2,$$

con multiplicidades $m_1 = q$ y $m_2 = p$, concordando con el Teorema 3.8.

Concluimos esta subsección con el correspondiente resultado de clasificación.

Teorema 3.24. *Una hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}$ es isoparamétrica con $g = 2$ curvaturas principales si y solo si es un subconjunto abierto del producto $\mathbb{S}^p(r) \times \mathbb{S}^q(s)$ de dos esferas de radios r y s, con $p + q = n$ y $r^2 + s^2 = 1$, en $\mathbb{S}^{n+1}$ dado como órbita principal de la acción del subgrupo $SO(p+1) \times SO(q+1)$ de $SO(n+2)$, embebido diagonalmente por bloques, salvo congruencia en $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Demostración. Ya vimos arriba una de las dos implicaciones. Para la otra, sea M una hipersuperficie isoparamétrica con $g = 2$ en $\mathbb{S}^{n+1}$, con curvaturas principales λ_1, λ_2 de multiplicidades respectivas m_1 y m_2. Definamos $p = m_1$ y $q = m_2$, por lo cual $p + q = n$. Consideremos M_+ una de las dos subvariedades focales de M, por ejemplo la correspondiente al colapso de la curvatura principal λ_1. Entonces, por la teoría general, M_+ es CPC con una única curvatura principal para cualquier normal unitario (Corolario 3.7), curvatura que necesariamente será 0. Por tanto, M_+ es una subvariedad totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$, de codimensión $m_1 + 1 = p + 1$. Por la clasificación de estas subvariedades en las esferas, deducimos que M_+ es una esfera $\mathbb{S}^q$ máxima, es decir, la intersección de $\mathbb{S}^{n+1}$ con un subespacio lineal $\mathbb{R}^{q+1}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$. Así pues, M es un tubo alrededor de dicha $\mathbb{S}^q$ totalmente geodésica. Pero por la discusión previa a este teorema, dichos tubos no son más que productos de esferas $\mathbb{S}^p(r)$ y $\mathbb{S}^q(s)$, con $r^2 + s^2 = 1$, dados por dados por la acción isométrica descrita en el enunciado. □

3.3.3. Ejemplos homogéneos con $g = 3$

Uno de los objetivos de este trabajo es clasificar las familias isoparamétricas de hipersuperficies con $g = 3$ curvaturas principales en las esferas. Así, en el Capítulo 4, abordaremos este problema y probaremos, basándonos en los resultados de Münzner, el resultado original de Cartan [10] y la propiedad de ser CPC de la que disfrutan las subvariedades focales, que solo las esferas $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^7$, $\mathbb{S}^{13}$ y $\mathbb{S}^{25}$ admiten tales familias isoparamétricas, véase el Teorema 4.3. Además, para cada uno de estos cuatro casos, solo hay un ejemplo, salvo congruencia por una isometría de la correspondiente esfera. Estas cuatro familias isoparamétricas con $g = 3$ resultan ser homogéneas, como también se verá en el Teorema 4.1.

La clasificación de las familias isoparamétricas en esferas que son homogéneas se debe a Hsiang y Lawson [27], y Takagi y Takahashi [52]. Dicha clasificación establece que toda familia isoparamétrica homogénea en una esfera es congruente con la familia de órbitas de la representación de isotropía de algún espacio simétrico riemanniano (que se puede suponer de tipo compacto) de rango 2, restringida a la esfera unidad. Recordemos que los espacios simétricos riemannianos son una clase particularmente importante de espacios homogéneos riemannianos, y que fueron clasificados también por Cartan [7], [8]. Puede encontrarse una lista completa de los espacios simétricos riemannianos (irreducibles, no llanos) en [25, pág. 516-518].

Si G/K es un espacio simétrico, el grupo G, y por tanto su subgrupo de Lie cerrado K, actúa transitivamente por isometrías sobre G/K. La representación de isotropía de G/K viene dada por la acción

$$K \times T_{eK}G/K \to T_{eK}G/K, \qquad (k, v) \mapsto k_{*eK}v.$$

Esta representación es ortogonal, es decir, para todo $k \in K$, k_{*eK} es una transformación ortogonal del espacio euclídeo $T_{eK}G/K$ dotado del producto escalar dado por la métrica riemanniana en G/K. Por tanto, se puede restringir a la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}$ de $T_{eK}G/K$, donde necesariamente $n = \dim G/K - 2$. Si G/K tiene rango 2, lo que significa que toda subvariedad llana y totalmente geodésica de G/K tiene dimensión a lo sumo 2, se tiene que la acción de K sobre $\mathbb{S}^{n+1}$ descrita es de cohomogeneidad uno, luego sus órbitas regulares son hipersuperficies en la esfera. Así pues, obtenemos una familia de hipersuperficies homogéneas en la esfera y, por tanto, una familia isoparamétrica. En [20, Table 2.1] puede consultarse la lista de espacios simétricos (de tipo compacto) de rango 2, así como el número de curvaturas principales y multiplicidades de las correspondientes familias isoparamétricas.

De entre los espacios simétricos (de tipo compacto) de rango 2, los únicos que producen una familia isoparamétrica con $g = 3$ son:

$$SU(3)/SO(3), \quad SU(3), \quad SU(6)/Sp(3), \quad E_6/F_4,$$

que dan lugar, precisamente, a los ejemplos mencionados anteriormente en las esferas $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^7$, $\mathbb{S}^{13}$ y $\mathbb{S}^{25}$. Por lo tanto, estos ejemplos se obtienen a partir de ciertas representaciones de los grupos $SO(3)$, $SU(3)$, $Sp(3)$ y F_4.

Explicaremos a continuación cómo son dichas representaciones. Para ello, conviene previamente recordar el concepto de álgebra de división normada; para más información, véase [4] o [24, Capítulo 6]. Un *álgebra normada* es un álgebra $\mathcal{A}$, no necesariamente asociativa, de dimensión finita n sobre $\mathbb{R}$ con unidad multiplicativa 1, y equipada con un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido positivo cuya norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ satisface la propiedad

$$\|xy\| = \|x\|\|y\|, \qquad \text{para todo } x, y \in \mathcal{A}.$$

Recordemos que un álgebra sobre $\mathbb{R}$ con 1 no es más que un espacio vectorial real $\mathcal{A}$ con una aplicación bilineal $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, denominada y denotada como una multiplicación, y tal que existe un elemento $1 \in \mathcal{A}$ cumpliendo que $1v = v1 = v$ para todo $v \in \mathcal{A}$. Finalmente, un *álgebra de división normada* es un álgebra normada $\mathcal{A}$ tal que si $xy = 0$ con $x, y \in \mathcal{A}$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.

En un álgebra de división normada $\mathcal{A}$ se puede definir una involución, denominada conjugación $\bar{\cdot}$, de la siguiente forma. Dado $x \in \mathcal{A}$, siempre se puede escribir de la forma $x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x$, donde $\operatorname{Re} x = \langle x, 1\rangle$ es la componente en 1 de x, e $\operatorname{Im} x$ es la componente en $1^\perp$ de x. Entonces, se define la conjugación de x mediante $\bar{x} = \operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x$. Se puede probar que cumple propiedades como $\bar{\bar{x}} = x$, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, $\langle x, y\rangle = \operatorname{Re} x\bar{y} = \operatorname{Re} \bar{x}y$, $x\bar{x} = \bar{x}x = \|x\|^2$, para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Es fácil ver que en un álgebra de división normada, cada elemento no nulo $x \in \mathcal{A}$ admite inverso, es decir, un elemento $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$: basta tomar $x^{-1} = \bar{x}/\|x\|$.

Las álgebras de división normadas están clasificadas. De un Teorema de Hurwitz [28] (cf. [4, Theorem 1], [24, Theorem 6.37]), se sigue que los reales $\mathbb{R}$, los complejos $\mathbb{C}$, los cuaternios $\mathbb{H}$ y los octonios $\mathbb{O}$ son las únicas álgebras de división normadas. Todas ellas, a partir de $\mathbb{C}$, se pueden construir recursivamente mediante el denominado procedimiento de Cayley-Dickson, que establece que, dada un álgebra de división normada $\mathcal{A}$, se puede construir otra del doble de dimensión, $\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}$, extendiendo el producto escalar de modo que ambas copias de $\mathcal{A}$ sean ortogonales, y estableciendo la multiplicación siguiente, aunque se pueden considerar varias fórmulas alternativas:

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}), \qquad \text{para todo } a, b, c, d \in \mathcal{A}.$$

Esta construcción nos permite ver las álgebras de división normadas contenidas en las de mayor dimensión, es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$. Además, nos permite tener una descripción de la multiplicación de los octonios en función de la multiplicación cuaterniónica. Para descripciones alternativas de la multiplicación octoniónica, puede verse el artículo de Baez [4]. Recordemos que, mientras que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son álgebras conmutativas y asociativas, $\mathbb{H}$ es solamente asociativa, y $\mathbb{O}$ no es conmutativa ni asociativa. La no asociatividad de $\mathbb{O}$ hace que muchas construcciones y argumentos válidos para $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ no se puedan aplicar al caso octoniónico. Por ejemplo, la construcción de los espacios proyectivos sobre estas álgebras es mucho más sutil en el caso octoniónico; y mientras que asociados a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ de modo natural están los grupos de Lie clásicos $SO(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$, no existe ningún grupo clásico similar asociado a $\mathbb{O}$.

Retomamos nuestro objetivo de describir las acciones isométricas en esferas que dan lugar a las familias isoparamétricas con $g = 3$. Para ello, seguiremos el enfoque que se incluye en las referencias [2, §3] y [24, pág. 289-292], ligeramente modificado tomando matrices de traza cero, como se indica en [5, pág. 86].

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de división normada, es decir, $\mathcal{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$. En lo que sigue, la norma en $\mathcal{A}$ será denotada por $|\cdot|$. Consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de matrices hermitianas 3×3 con coeficientes en $\mathcal{A}$

$$\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathcal{A}) : X^* = X\}.$$

Aquí, dada una matriz X, $X^* = \bar{X}^t$ denota su conjugada traspuesta. Es fácil observar que los elementos de $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ son matrices de la forma

$$X = \begin{pmatrix} r_1 & x_3 & x_2 \\ \bar{x}_3 & r_2 & x_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & r_3 \end{pmatrix},$$

con x_1, x_2, $x_3 \in \mathcal{A}$ y r_1, r_2, $r_3 \in \mathbb{R}$. Sea

$$\mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathcal{A}) : X^* = X, \mathrm{tr}\, X = 0\}$$

el conjunto de matrices hermitianas 3×3 de traza nula con coeficientes en el álgebra $\mathcal{A}$ contenido en $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$. Tengamos en cuenta que dicho espacio vectorial tiene dimensión $3m + 2$, siendo $m = \dim \mathcal{A} \in \{1, 2, 4, 8\}$. En $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$, y en particular en $\mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A})$, consideraremos el producto escalar

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}\, XY), \qquad X, Y \in \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}),$$

cuya norma asociada viene dada por

$$\|X\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2},$$

donde se utiliza la notación ya establecida para las entradas de una matriz de $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$. Nos interesará considerar la esfera unitaria sobre $\mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A})$

$$\mathbb{S}^{3m+1} = \{X \in \mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A}) : \|X\| = 1\},$$

donde $m = \dim \mathcal{A} \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Introducimos ahora sobre $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ una estructura algebraica adicional que convierte dicho espacio vectorial en un álgebra conmutativa, no necesariamente asociativa, con unidad. Así, definimos la multiplicación

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX), \qquad X, Y \in \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}). \tag{3.25}$$

Esto convierte a $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ en lo que se denomina un álgebra de Jordan real. Notese que la matriz identidad es la unidad de esta álgebra. También se tiene que el producto escalar que definimos sobre $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ se puede reescribir mediante $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}\, X \circ Y)$.

Consideraremos a continuación el grupo de automorfismos de esta álgebra. Un automorfismo del álgebra de Jordan $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ es una transformación lineal inversible $g \in GL(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$ tal que $g(X) \circ g(Y) = g(X \circ Y)$, para todo X, $Y \in \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$. Denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$ el grupo de estos automorfismos de $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$. Se puede probar que todo $g \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$ cumple que $\operatorname{tr} g(X) = \operatorname{tr} X$, para todo $X \in \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$, véase [24, Lemma 14.96]. De aquí se sigue que todo $g \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$ es una transformación ortogonal de $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$, ya que

$$\langle g(X), g(Y) \rangle = \mathrm{Re}(\operatorname{tr} g(X) \circ g(Y)) = \mathrm{Re}(\operatorname{tr} g(X \circ Y)) = \mathrm{Re}(\operatorname{tr} X \circ Y) = \langle X, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$. Así pues, este grupo $\mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$ es un subgrupo de $O(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})) = O(3m + 2)$. Como es cerrado por definición, se trata de un subgrupo de Lie compacto de $O(3m + 2)$.

Para $m \in \{1, 2, 4\}$, es decir, $\mathcal{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, el correspondiente grupo K dado por

$$SO(3), \quad SU(3), \quad Sp(3),$$

respectivamente, actúa sobre $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ por conjugación

$$A \cdot X = AXA^*, \qquad A \in K, \quad X \in \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}), \tag{3.26}$$

y preserva la multiplicación de Jordan (3.25). Cada uno de esos tres grupos es, por tanto, subgrupo del correspondiente $\mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$, salvo cociente por sus respectivos centros. De hecho, se puede probar que estos grupos proporcionan dicho grupo de automorfismos en su totalidad, salvo en el caso real $m = 1$, en el cual $SO(3)$ es la componente conexa del elemento neutro de $\mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathbb{R}))$.

Para $m = 8$, se tiene que $\mathcal{A} = \mathbb{O}$ es el álgebra de división de los octonios. En este caso, el *grupo compacto excepcional* F_4 se define, precisamente, como el grupo $\mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O}))$ de automorfismos del álgebra de Jordan $(\mathbb{O}, \circ)$.

La acción de (la componente conexa del neutro de) $\mathrm{Aut}(\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A}))$ sobre $\mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ deja el subespacio vectorial $\mathbb{R}\,\mathrm{Id} = \{\lambda\,\mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Herm}(3, \mathcal{A})$ invariante y, por tanto, al preservarse el producto escalar, también deja $\mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}\,\mathrm{Id})^\perp$ invariante. Tenemos por tanto una representación ortogonal de

$$SO(3), \quad SU(3), \quad Sp(3) \quad \text{o} \quad F_4 \tag{3.27}$$

en un espacio euclídeo de dimensión $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^8$, $\mathbb{R}^{14}$ o $\mathbb{R}^{26}$, respectivamente. Son precisamente estas representaciones las que, una vez restringidas a la esfera unitaria de $\mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A})$, es decir, $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^7$, $\mathbb{S}^{13}$ o $\mathbb{S}^{25}$, según el caso, proporcionan los ejemplos de familias isoparamétricas de hipersuperficies con $g = 3$ curvaturas principales en las esferas.

Concluimos esta sección con otra observación interesante. Se puede probar que las órbitas singulares de las acciones sobre las esferas definidas arriba son precisamente las que pasan por un punto de la esfera unidad de $\mathrm{Herm}_0(3, \mathcal{A})$ dado por una matriz diagonal con dos elementos en la diagonal iguales, es decir,

$$\operatorname{diag}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \operatorname{diag}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \operatorname{diag}\left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Además, como los autovalores, que son estos elementos de la diagonal, se preservan por conjugación, existen exactamente dos órbitas singulares, las dos subvariedades focales de la familia isoparamétrica. Observemos que los únicos puntos de la geodésica normal a las órbitas (definida por las matrices hermitianas diagonales de traza 0 y norma 1) que están en órbitas singulares son precisamente los 6 puntos (matrices) anteriores. Por tanto, del Teorema 3.8 deducimos que $2g = 6$, obteniendo $g = 3$.

Las órbitas singulares mencionadas son subvariedades de la correspondiente esfera que son, por construcción, espacios homogéneos para el correspondiente grupo en (3.27). Se puede probar que, de hecho, dichas subvariedades son difeomorfas a planos proyectivos sobre cada una de las álgebras de división $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$, según el caso. De hecho, calculando el grupo de isotropía en un punto dado por una de las matrices diagonales de arriba, se puede probar, en los tres primeros casos, que dichas subvariedades focales admiten descripciones homogéneas como

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^2 &= SO(3)/(SO(1) \times SO(2)),\\ \mathbb{C}P^2 &= SU(3)/(SU(1) \times SU(2)),\\ \mathbb{H}P^2 &= Sp(3)/(Sp(1) \times Sp(2)).\end{aligned}$$

El caso octoniónico es particularmente interesante, pues esta construcción proporciona un modelo para el espacio proyectivo octoniónico de mayor dimensión que se puede construir, es decir, para el plano proyectivo de Cayley $\mathbb{O}P^2 = F_4/Spin(9)$. Para más información, puede consultarse [2, §3], [4, §3] y [24, pág. 289 y siguientes].

3.3.4. El problema de clasificación para $g = 4$

El estudio de hipersuperficies isoparamétricas en esferas con $g = 4$ o $g = 6$ curvaturas principales se vuelve mucho más complejo. En esta sección pasamos a comentar, sin entrar en demostraciones o detalles técnicos, los principales resultados y las numerosas contribuciones para el caso $g = 4$.

En primer lugar, y como exponíamos anteriormente, la clasificación de hipersuperficies isoparamétricas homogéneas en las esferas se debe a Hsiang y Lawson [27] y a Takagi y Takahashi [52]. En este segundo trabajo, se obtiene además que el número de curvaturas principales g de una hipersuperficie isoparamétrica homogénea en la esfera cumple que $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Años después y como hemos visto en el Teorema 3.20, Münzner demostró que la condición $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ es válida para cualquier hipersuperficie isoparamétrica en la esfera (no necesariamente homogénea). Este hecho reforzó el interés por conocer si las nociones de hipersuperficie isoparamétrica e hipersuperficie homogénea son equivalentes en las esferas.

Sin embargo, y como ya habíamos adelantado, tal equivalencia no es cierta. El primer contraejemplo, del año 1975, se debe a Ozeki y Takeuchi [42], que construyeron polinomios de Cartan-Münzner que dan lugar a hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas. Esto se deduce del hecho de que sus multiplicidades (m_1, m_2) no coinciden con las de los ejemplos homogéneos, ya clasificados.

Tras la obtención de las posibilidades para el número de curvaturas principales debida a Münzner y de cara a la obtención de una clasificación general, una de las primeras preguntas que se trató de responder se refería a las posibles multiplicidades para las curvaturas principales. Aunque hubo muchos trabajos en esta línea, destacamos aquí [1], en el que Abresch mejora alguna de las restricciones ya obtenidas por Münzner [39], [40]. De hecho, es el propio Abresch el que prueba que para $g = 6$ curvaturas principales las únicas posibles multiplicidades son uno y dos. Por otra parte, en el caso $g = 4$, es Stolz [51] quién obtiene todas las posibles multiplicidades.

Años después, Ferus, Karcher y Münzner [22] generalizan el trabajo de Ozeki y Takeuchi construyendo una familia mucho más amplia de ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas con $g = 4$ curvaturas principales. En la literatura, estos ejemplos son conocidos como ejemplos FKM (o también OT-FKM), en referencia a las iniciales de los autores, o ejemplos de tipo Clifford, dado que pueden construirse utilizando sistemas de Clifford, como pasamos a explicar a continuación. La mayoría de estos ejemplos son no homogéneos, lo cual puede demostrarse directamente, sin hacer uso de la clasificación de hipersuperficies isoparamétricas homogéneas.

Definición 3.25. Para un número entero $m \geq 0$, el *álgebra de Clifford* C_m es el álgebra asociativa sobre $\mathbb{R}$ generada por la unidad 1 y por elementos $e_1, \dots, e_m$ con las relaciones

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Definición 3.26. Una *representación de un álgebra de Clifford* sobre $\mathbb{R}^q$ se corresponde con un conjunto $\{E_1, \dots, E_m\}$ de matrices antisimétricas $q \times q$ que satisfacen

$$E_i^2 = -I, \quad E_i E_j = -E_j E_i, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Denotemos $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{R})$ el espacio de matrices reales simétricas de tamaño $n \times n$ con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB)/n.$$

Definición 3.27. Para dos enteros positivos m y l, se llama *sistema de Clifford* sobre $\mathbb{R}^{2l}$ a la $(m+1)$-tupla $(P_0, \dots, P_m)$ con $P_i \in \mathrm{Herm}(2l, \mathbb{R})$ que satisface

$$P_i^2 = -I, \quad P_i P_j = -P_j P_i, \quad i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq m.$$

Los ejemplos de hipersuperficies de tipo FKM construidos por Ferus, Karcher y Münzner [22] vienen dados por el siguiente teorema:

Teorema 3.28. *Sea $(P_0, \dots, P_m)$ un sistema de Clifford sobre $\mathbb{R}^{2l}$. Sean también $m_1 = m$, $m_2 = l - m - 1$ y $F \colon \mathbb{R}^{2l} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \langle x, x \rangle^2 - 2 \sum_{i=0}^{m} \langle P_i x, x \rangle^2.$$

Entonces F satisface la ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner (3.5), (3.6)*, con parámetros $g = 4$ y $c = g^2(m_2 - m_1)/2$. Si $m_2 > 0$, entonces los conjuntos de nivel de la restricción de F a $\mathbb{S}^{2l-1}$ forman una familia de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 4$ curvaturas principales y multiplicidades (m_1, m_2).*

A día de hoy, el problema de clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en esferas con $g = 4$ curvaturas principales constantes se considera resuelto. En efecto, se tiene que todos los ejemplos son de tipo FKM, entre los que aparecen tanto casos homogéneos como no homogéneos, a excepción de los casos homogéneos con multiplicidades $(m_1, m_2) = (2, 2)$ y $(4, 5)$.

En primer lugar, Tagaki [53] prueba que si una de las multiplicidades es uno, la familia isoparamétrica correspondiente es homogénea y de tipo FKM. Por otra parte, Ozeki y Takeuchi, [42], [43], demuestran que si una de las multiplicidades es dos, entonces la familia isoparamétrica es homogénea y de tipo FKM, excepto en el caso $(m_1, m_2) = (2, 2)$, que se corresponde con uno de los ejemplos ya dados por Cartan.

Más recientemente, Cecil, Chi y Jensen [13] prueban que una hipersuperficie isoparamétrica con $g = 4$ curvaturas principales y cuyas multiplicidades verifican la relación $m_2 \geq 2m_1 - 1$ es de tipo FKM. Paralelamente, Immervoll [29] llega a los mismos resultados con una demostración más geométrica que la anterior. Esto permite derivar una clasificación de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 4$ curvaturas principales, excepto para los pares de multiplicidades $(4, 5)$, $(3, 4)$, $(6, 9)$ y $(7, 8)$.

Estos casos excepcionales fueron abordados por Chi en los últimos años. En este sentido, en sus trabajos [15] y [16] consigue resolver todos los casos excepto el de multiplicidades $(7, 8)$. Finalmente, el propio Chi resuelve en [17] este último caso.

3.3.5. El problema de clasificación para $g = 6$

Para $g = 6$ curvaturas principales, Münzner [40] probó que todas tienen la misma multiplicidad, y Abresch [1], que tales multiplicidades únicamente pueden tomar valor 1 o 2. Más tarde, con su clasificación de hipersuperficies homogéneas, Takagi y Takahashi [52] dieron ejemplos para $m = 1$ y $m = 2$, y probaron, además, que salvo congruencia, existe una única familia homogénea en cada caso. Peng y Hou [44] dieron una expresión explícita del polinomio de Cartan-Münzner en estos dos casos.

Posteriormente, Miyaoka redacta dos artículos en los que da una descripción geométrica de ambos casos. En [35], prueba que se puede obtener una hipersuperficie homogénea M de $\mathbb{S}^7$, con $g = 6$ curvaturas principales de multiplicidad $m = 1$, como la imagen inversa mediante el fibrado de Hopf $\mathbb{S}^7 \to \mathbb{S}^4$ de una hipersuperficie isoparamétrica W^3 de $\mathbb{S}^4$ con $g = 3$ curvaturas principales. Además, Dorfmeister y Neher [21] prueban que toda hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{S}^7$ con $(g, m) = (6, 1)$ es homogénea.

No es claro, a día de hoy, si la clasificación de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 6$ curvaturas principales constantes de multiplicidad 2 es un problema abierto o no. De un modo más preciso, Miyaoka [36] publicó un resultado en el que afirma que toda hipersuperficie isoparamétrica de $\mathbb{S}^{13}$ con $(g, m) = (6, 2)$ es homogénea. Sin embargo, Abresch y

Siffert [48], [49] afirman haber encontrado algunos errores en los argumentos de la demostración de Miyaoka. Como consecuencia, no parece haber unanimidad entre los expertos sobre si este último caso, $(g, m) = (6, 2)$, y por tanto la clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en esferas, debe considerarse cerrada o no.

De hecho, es probablemente la dificultad en el estudio de los casos para $g = 4$ y $g = 6$ curvaturas principales, la que contribuyó a que el medalla Fields Yau incluyese la clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en las esferas en su influyente lista de problemas abiertos más importantes en geometría [56].

Capítulo 4

Clasificación de Cartan de hipersuperficies isoparamétricas con 3 curvaturas principales

En este último capítulo, estudiaremos las familias de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{S}^{n+1}$ con $g = 3$ curvaturas principales, obteniendo que todas son homogéneas y dando sus polinomios de Cartan-Münzner. Como ya comentamos, este resultado de clasificación de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 3$ es debido a Cartan [10]. Nuestro enfoque se basará en parte en los resultados de Münzner de algebraicidad y estructura de las familias isoparamétricas en esferas, así como en algunos de los argumentos de Cartan, si bien en varios puntos nosotros propondremos argumentos de carácter más geométrico que los de Cartan. Así pues, este capítulo proporciona una prueba parcialmente original del resultado de clasificación para $g = 3$.

4.1. Planteamiento inicial

Sea $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ el polinomio de Cartan-Münzner de una familia de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 3$ de $\mathbb{S}^{n+1}$. Por el Corolario 3.9, sabemos que estas tres curvaturas principales tienen todas la misma multiplicidad, la cual denotaremos m. Además, $n = 3m$. Aplicando el Teorema 3.11 de Münzner, tenemos que F cumple

$$\|\operatorname{grad} F\|^2 = 9r^4 \qquad \text{y} \qquad \Delta F = 0. \tag{4.1}$$

Tomemos como V la restricción de F a $\mathbb{S}^{n+1}$. Por la Observación 3.12, V es una función isoparamétrica que cumple

$$\|\operatorname{grad}^S V\|^2 = 9(1 - V^2) \qquad \text{y} \qquad \Delta^S V = -3(3 + n)V. \tag{4.2}$$

Teniendo en cuenta la primera de estas igualdades, claramente V toma valores en el intervalo $[-1, 1]$. Además, $M_+ = V^{-1}(1)$ y $M_- = V^{-1}(-1)$ son las subvariedades focales de la familia de hipersuperficies isoparamétricas $\{V^{-1}(s)\}_{s\in(-1,1)}$. En lo que sigue, $\{e_1,\dots e_{n+2}\}$ denotará una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $F(e_{n+2})=1$, es decir, que el vector unitario $e_{n+2}\in M_+$. Por otra parte, podemos tomar la base $\{e_1,\dots e_{n+2}\}$ de forma que los $2m$ primeros vectores generan el espacio tangente $T_{e_{n+2}}M_+$, y los siguientes $m+1$, es decir, $e_{2m+1},\dots e_{n+1}$, generan el espacio normal $\nu_{e_{n+2}}M_+$, viendo M_+ como subvariedad de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Dado que M_+ es un subconjunto de los puntos críticos de V, tenemos que $\operatorname{grad}^S V$ se anula en M_+, con lo que

$$TM_+\subset \ker \operatorname{Hess}^S V, \tag{4.3}$$

donde $\operatorname{Hess}^S V$ denota el operador hessiano de V, dado por $(\operatorname{Hess}^S V)(X)=\bar\nabla_X \operatorname{grad}^S V$, para $X\in T\mathbb{S}^{n+1}$. En particular, en el punto e_{n+2},

$$\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{2m}\}=T_{e_{n+2}}M_+\subset \ker \operatorname{Hess}^S V.$$

Tengamos en cuenta que, por el Teorema 3.10, la restricción del hessiano euclídeo de F a $\mathbb{S}^{n+1}$ y el hessiano esférico de V se relacionan mediante la igualdad

$$\operatorname{Hess}^S V=\pi_{T\mathbb{S}^{n+1}}\circ \operatorname{Hess} F-gF\operatorname{Id}, \tag{4.4}$$

donde, en nuestro caso, $g=3$. En conclusión, por (4.3), tenemos

$$(\pi_{T\mathbb{S}^{n+1}}\circ \operatorname{Hess} F)|_{T_pM_+}=3\operatorname{Id}, \qquad \text{para cualquier } p\in M_+. \tag{4.5}$$

Dado que la restricción de F a $\mathbb{S}^{n+1}$ toma su valor máximo en el punto e_{n+2}, se tiene que $(\operatorname{grad} F)(e_{n+2})\in \nu_{e_{n+2}}\mathbb{S}^{n+1}$. Por lo tanto, el polinomio F, que en nuestro caso es de grado 3, debe ser de la forma

$$F(x):=x_{n+2}^3+x_{n+2}P(x)+Q(x). \tag{4.6}$$

En esta igualdad, $x_{n+2}=\langle x,e_{n+2}\rangle$ es la última coordenada del punto $x\in\mathbb{R}^{n+2}$ respecto a la base ortonormal $\{e_1,\dots,e_{n+2}\}$, y P y Q son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^{n+2}$ de grado 2 y 3, respectivamente, tales que se anulan en e_{n+2}, es decir, que solo dependen de las $n+1$ primeras coordenadas de x respecto de la base ortonormal $\{e_1,\dots,e_{n+2}\}$.

En vista de (4.6), el gradiente de F viene dado en coordenadas por

$$\operatorname{grad} F=(x_{n+2}\partial_1 P+\partial_1 Q,\ \dots\ ,x_{n+2}\partial_{n+1}P+\partial_{n+1}Q,\ 3x_{n+2}^2+P), \tag{4.7}$$

y su hessiano es

$$\operatorname{Hess} F=\left(\begin{array}{c|c} 2A\,x_{n+2}+\operatorname{Hess} Q & (\operatorname{grad} P)^t \\ \hline \operatorname{grad} P & 6x_{n+2}\end{array}\right),$$

donde $\operatorname{Hess} Q$ y $\operatorname{grad} P$ se obtienen pensando P y Q como funciones en las $n+1$ primeras coordenadas $x_1,\dots,x_{n+1}$, y A es una matriz simétrica de orden $n+1$, definiendo el polinomio P de grado 2 como $P(y)=\langle y,Ay\rangle$ para todo $y\in e_{n+2}^{\perp}$. Evaluando el hessiano de F en e_{n+2}, obtenemos la matriz diagonal por bloques

$$(\operatorname{Hess} F)_{e_{n+2}}=\left(\begin{array}{c|c} 2A & 0 \\ \hline 0 & 6\end{array}\right),$$

pero teniendo en cuenta (4.5) y que $e_1, \ldots, e_{2m}$ generan $T_{e_{n+2}}M_+$, las primeras $2m$ columnas de $(\mathrm{Hess}\, F)_{e_{n+2}}$ coinciden con el triple de los $2m$ primeros vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$. Luego

$$(\mathrm{Hess}\, F)_{e_{n+2}} = \left(\begin{array}{c|c|c} 3\,\mathrm{Id}_{2m} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2B & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 \end{array}\right), \tag{4.8}$$

para alguna matriz simétrica B de orden $m+1$ con coeficientes constantes.

Ahora, usando (4.7) y expresando $\|\mathrm{grad}\, F\|^2$ como un polinomio en la variable x_{n+2}, el coeficiente correspondiente a x_{n+2}^2 viene dado por $\|\mathrm{grad}\, P\|^2 + 6P$. Análogamente, el coeficiente de x_{n+2}^2 en la expresión de r^4 como polinomio en x_{n+2} es $2\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$. En conclusión, la primera ecuación diferencial de Cartan-Münzner $\|\mathrm{grad}\, F\|^2 = 9r^4$ en (4.1) implica que

$$\|\mathrm{grad}\, P\|^2 + 6P = 18\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2. \tag{4.9}$$

De forma similar, estudiando el coeficiente de x_{n+2} en esta misma ecuación diferencial de Cartan-Münzner, se tiene

$$\langle \mathrm{grad}\, P, \mathrm{grad}\, Q\rangle = 0. \tag{4.10}$$

Aplicando una transformación ortogonal al conjunto ortonormal $\{e_{2m+1}, \ldots, e_{n+1}\}$, podemos asumir que la matriz simétrica B es diagonal, $B = \mathrm{diag}(b_{2m+1}, \ldots, b_{n+1})$, con lo que $A = \mathrm{diag}(\frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, b_{2m+1}, \ldots, b_{n+1})$, de donde se deduce

$$P(x) = P(y) = \langle y, Ay\rangle = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{2m} x_i^2 + \sum_{i=2m+1}^{n+1} b_i x_i^2,$$

para cualquier $x = (y, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ con $y = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in e_{n+2}^\perp$. Esto implica, por (4.9),

$$\sum_{i=1}^{2m}(3x_i)^2 + \sum_{i=2m+1}^{n+1}(2b_i x_i)^2 + 9\sum_{i=1}^{2m} x_i^2 + 6\sum_{i=2m+1}^{n+1} b_i x_i^2 = 18\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

Con esto, para cada $i \in \{2m+1, \ldots, n+1\}$, tenemos $4b_i^2 + 6b_i = 18$, luego $b_i \in \{\frac{3}{2}, -3\}$.

Ahora, de (4.8), obtenemos

$$(\Delta F)(e_{n+2}) = 6(m+1) + 2\sum_{i=2m+1}^{n+1} b_i,$$

lo cual, por la segunda ecuación diferencial de Cartan-Münzner en (4.1), se anula. Es decir, $\sum_{i=2m+1}^{n+1} b_i = -3(m+1)$, lo cual, junto a que $b_i \in \{\frac{3}{2}, -3\}$, implica que $b_i = -3$ para todo $i \in \{2m+1, \ldots, n+1\}$. Por lo tanto, $B = -3\,\mathrm{Id}_{m+1}$, lo cual determina el polinomio P:

$$P(x) = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{2m} x_i^2 - 3\sum_{j=1}^{m+1} z_j^2, \tag{4.11}$$

donde, siguiendo la notación de Cartan [10], renombramos las coordenadas $x_{2m+1}, \ldots, x_{n+1}$ por $z_1, \ldots, z_{m+1}$, respectivamente. Recordemos que los vectores $e_{2m+1}, \ldots, e_{n+1}$ correspondientes a estas coordenadas forman una base de $\nu_{e_{n+2}} M_+$, pensando M_+ como subvariedad de $\mathbb{S}^{n+1}$. Renombraremos estos vectores como $\eta_k = e_{2m+k}$ para $k \in \{1, \ldots, m+1\}$.

Determinemos ahora el polinomio Q de grado 3, que descomponemos en

$$Q = R_0 + R_1 + R_2 + R_3,$$

donde cada R_k es un polinomio homogéneo de grado k respecto a $z_1, \ldots, z_{m+1}$ y homogéneo de grado $3-k$ respecto a $x_1, \ldots, x_{2m}$. Así, podemos escribir $\operatorname{grad} Q$ de la forma $(\operatorname{grad}_{(x_1,\ldots,x_{2m})} Q, \operatorname{grad}_{(z_1,\ldots,z_{m+1})} Q)$, donde los subíndices denotan las coordenadas respecto a las cuales se calculan las derivadas parciales. Sustituyendo esto y

$$(\operatorname{grad} P)(x) = (3x_1, \ldots, 3x_{2m}, -6z_1, \ldots, -6z_{m+1}),$$

deducido de (4.11), en (4.10), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 3\langle (x_1, \ldots, x_{2m}), \operatorname{grad}_{(x_1,\ldots,x_{2m})} Q\rangle - 6\langle (z_1, \ldots, z_{m+1}), \operatorname{grad}_{(z_1,\ldots,z_{m+1})} Q\rangle \\ &= 3(3R_0 + 2R_1 + R_2) - 6(R_1 + 2R_2 + 3R_3) \\ &= 9R_0 - 9R_2 - 18R_3, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usa (3.3). Por lo tanto, $R_0 = R_2 = R_3 = 0$, y podemos escribir

$$Q = \sum_{k=1}^{m+1} z_k Q_k, \tag{4.12}$$

donde cada Q_k es un polinomio homogéneo de grado 2 en la variables $x_1, \ldots, x_{2m}$.

4.2. Polinomio de Cartan-Münzner y geometría de la focal

Motivados por una observación hecha por Chi [18], a continuación probaremos que los polinomios Q_k vienen dados por el operador de configuración de la subvariedad focal $M_+ = V^{-1}(1)$ en e_{n+2}. Para ello, recordemos que, por (2.3), el operador de configuración de un conjunto de nivel regular, en este caso, de la función isoparamétrica V, respecto del campo de vectores normal unitario $\xi = \operatorname{grad}^S V / \| \operatorname{grad}^S V\|$, viene dado por

$$\mathcal{S}_\xi = -\frac{1}{\| \operatorname{grad}^S V\|} \operatorname{Hess} V.$$

Aplicando (4.4) y la relación $\| \operatorname{grad}^S V\| = 3\sqrt{1-F^2}$ obtenida de (4.2), se tiene una expresión de $\mathcal{S}$ en términos de F:

$$\mathcal{S}_\xi = -\frac{1}{3\sqrt{1-F^2}} (\pi_{T\mathbb{S}^{n+1}} \circ \operatorname{Hess} F - 3F \operatorname{Id}). \tag{4.13}$$

Esta expresión es válida para los conjuntos de nivel regulares de V, pero estamos interesados en calcular el operador de configuración $\mathcal{S}_\eta$ de la subvariedad focal M_+ respecto a un vector unitario $\eta \in \nu_{e_{n+2}} M_+$. Esto se puede obtener tomando límites de forma apropiada, pues nos podemos acercar a M_+ por conjuntos de nivel regulares.

Para este propósito, consideremos una geodésica γ normal a M_+ en $\mathbb{S}^{n+1}$, con condiciones iniciales $\gamma(0) = e_{n+2}$ y $\dot{\gamma}(0) = \eta_k \in \nu_{e_{n+2}} M_+$, $k \in \{1, \ldots, m+1\}$. Recordemos que $\{\eta_1, \ldots, \eta_{m+1}\}$ es una base de $\nu_{e_{n+2}} M_+$. Claramente, $\gamma(t) = \cos(t) e_{n+2} + \sin(t) \eta_k$. Dado que γ es una geodésica en $\mathbb{S}^{n+1}$ normal a cada uno de los conjuntos de nivel de la familia $\{V^{-1}(c)\}_{c \in [-1,1]}$, y V alcanza su máximo en e_{n+2}, obtenemos que $\dot{\gamma}(t) = \xi_{\gamma(t)}$, para todo $t \in (-\epsilon, 0)$ para un $\epsilon < 0$ suficientemente pequeño, el cual podemos tomar como $\epsilon = \pi/3$, ya que $g = 3$, de forma que $\gamma(t)$ pertenece a un conjunto de nivel regular de V. Por continuidad, y usando (4.13), el operador de configuración $\mathcal{S}_{\eta_k}$ de M_+ se puede calcular tomando el límite

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\eta_k} X &= \lim_{t \to 0^-} \mathcal{S}_{\xi_{\gamma(t)}} X \\ &= - \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{3\sqrt{1 - F(\gamma(t))^2}} \big(((\operatorname{Hess} F)_{\gamma(t)} X)_{T\mathbb{S}^{n+1}} - 3F(\gamma(t)) X \big), \end{aligned} \tag{4.14}$$

para un $X \in T_{e_{n+2}} M_+$ arbitrario, e identificándolo con su transportado paralelo en diferentes puntos de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Dado que $F(\gamma(0)) = F(e_{n+2}) = 1$, y, por (4.5), el límite del término derecho de la igualdad (4.14) es una indeterminación de tipo 0/0. Apliquemos la regla de L'Hôpital para calcularlo. Consideremos también (4.14) en términos matriciales, respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ de $T_{e_{n+2}} M_+$. Así, el término (i, j) de $\mathcal{S}_{\eta_k}$ se calcula como sigue

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\eta_k})_{ij} &= - \lim_{t \to 0^-} \frac{(\partial_{ij} F)(\gamma(t)) - 3F(\gamma(t))}{3\sqrt{1 - F(\gamma(t))^2}} \\ &= \lim_{t \to 0^-} \frac{\big\langle \operatorname{grad}(\partial_{ij} F - 3F)(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \big\rangle \sqrt{1 - F(\gamma(t))^2}}{3F(\gamma(t)) \langle \operatorname{grad} F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle} \\ &= \lim_{t \to 0^-} \frac{\big\langle \operatorname{grad}(\partial_{ij} F - 3F)(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \big\rangle \| \operatorname{grad}^S V(\gamma(t)) \|}{9F(\gamma(t)) \langle \operatorname{grad} F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle} \\ &= \frac{1}{9} \langle \operatorname{grad}(\partial_{ij} F - 3F)(e_{n+2}), \eta_k \rangle \\ &= \frac{1}{9} \partial_{z_k} \partial_{ij} F(e_{n+2}), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado la regla de L'Hôpital, en la tercera usamos la primera ecuación de (4.2). Para la cuarta, se aplica el hecho de que $F(e_{n+2}) = 1$, $\langle \operatorname{grad} F, \dot{\gamma} \rangle = \langle \operatorname{grad}^S V, \dot{\gamma} \rangle$ y $\eta_k = \dot{\gamma}(0) = \lim_{t \to 0^-} \operatorname{grad}^S V(\gamma(t)) / \| \operatorname{grad}^S V(\gamma(t)) \|$, y por último, que $\operatorname{grad} F(e_{n+2})$ es ortogonal a $\mathbb{S}^{n+1}$. Por otra parte, tengamos en cuenta que, por (4.6), (4.11) y (4.12), se tiene $\partial_{z_k} \partial_{ij} F = \partial_{ij} Q_k$, para cualquier $i, j \in \{1, \ldots, 2m\}$ y cualquier $k \in \{1, \ldots, m+1\}$. En consecuencia,

$$(\mathcal{S}_{\eta_k})_{ij} = \frac{1}{9} \partial_{ij} Q_k.$$

Recordemos que los Q_k son polinomios homogéneos de grado 2 en las variables $x_1, \ldots, x_{2m}$, con lo que son de la forma $Q_k(x_1, \ldots, x_{2m}) = \langle (x_1, \ldots, x_{2m}), C_k(x_1, \ldots, x_{2m})^t \rangle$ para alguna matriz simétrica C_k de orden $2m$. Entonces, podemos obtener estas matrices C_k a partir de la forma matricial de $\mathcal{S}_{\eta_k}$ mediante la relación anterior con Q_k. Así,

$$C_k = \frac{9}{2}\mathcal{S}_{\eta_k},$$

para $k \in \{1, \ldots, m+1\}$. Ahora, de (4.6), (4.11) y (4.12), junto con la linealidad del operador de configuración y descomponiendo $x = (w, z, u) \in \mathbb{R}^{n+2}$, siendo $u = x_{n+2}$, $w = (x_1, \ldots, x_{2m}) \in T_{e_{n+2}}M_+$ y $z = (z_1, \ldots, z_{m+1}) \in \nu_{e_{n+2}}M_+$, el polinomio de Cartan-Münzner se expresa como

$$F(w, z, u) = u^3 + u\left(\frac{3}{2}\|w\|^2 - 3\|z\|^2\right) + \frac{9}{2}\langle w, \mathcal{S}_z w\rangle, \tag{4.15}$$

donde el operador de configuración $\mathcal{S}$ se considera con base en e_{n+2}.

4.3. Homogeneidad de la familia isoparamétrica

En este punto, estamos en posición de probar la homogeneidad de cualquier familia de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{S}^{n+1}$ con $g = 3$. Seguiremos y expandiremos la prueba original de Cartan.

Teorema 4.1. *Cualquier familia de hipersuperficies isoparamétricas de $\mathbb{S}^{n+1}$ con $g = 3$ curvaturas principales es homogénea.*

Demostración. Veamos en primer lugar la homogeneidad de M_+. Tengamos en cuenta que en lo desarrollado anteriormente comenzamos con un polinomio de Cartan-Münzner general, pero no fijo, para $g = 3$, y las únicas condiciones que pedimos eran $e_{n+2} \in M_+$, $e_1, \ldots, e_{2m}$ generan $T_{e_{n+2}}M_+$ y $\eta_1 = e_{2m+1}, \ldots, \eta_{m+1} = e_{n+1}$ generan $\nu_{e_{n+2}}M_+$. En otras palabras, hemos posicionado la familia isoparamétrica de una forma particular, lo cual siempre se puede obtener usando transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^{n+2}$. Al final de la discusión, sin necesidad de ninguna elección arbitraria, obtuvimos una expresión polinómica concreta (4.15) en términos de las coordenadas (w, z, u) asociadas a la base considerada al inicio, expresión que depende únicamente de la posición de M_+ y su geometría, a través de $\mathcal{S}$.

Ahora, por una parte, si hubiéramos comenzado con la mismas suposiciones para la posición de M_+, pero con otro punto $p \in M_+$, $p \neq e_{n+2}$, podríamos considerar otra base ortonormal $\{e'_1, \ldots, p = e'_{n+2}\}$ y las coordenadas asociadas u', w', z', obteniendo exactamente la misma expresión polinómica (4.15), cambiando las coordenadas por sus respectivas primas. Por otra parte, los dos sistemas de coordenadas relativos a cada base están relacionados por medio de una transformación ortogonal $A_p \in O(n+2)$ tal que lleva e_{n+2} a p, $T_{e_{n+2}}M_+$ en T_pM_+, y en consecuencia $\nu_{e_{n+2}}M_+$ en ν_pM_+. Así $x' = A_px$, donde

$x' = (w', z', u') \in \mathbb{R}^{n+2}$ y $x = (w, z, u) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Dado que el polinomio de Cartan-Münzner F está fijado desde el comienzo, las aparentemente distintas expresiones $F(x)$ y $F(x')$ dadas por (4.15), con y sin primas, deben definir la misma función en $\mathbb{R}^{n+2}$. Por tanto, tenemos $F(A_p x) = F(x') = F(x)$ para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{R}^{n+2}$ con $A_p x = x'$. Esto significa que la transformación ortogonal A_p lleva cada elemento $V^{-1}(c)$, $c \in [-1, 1]$, siendo V la restricción de F a $\mathbb{S}^{n+1}$, de la familia isoparamétrica, en particular M_+, en sí mismo, y por definición, $A_p e_{n+2} = p$. Dado que el punto $p \in M_+$ es arbitrario, concluimos la prueba de que M_+ es homogénea, pues existe un grupo de transformaciones ortogonales que preservan la subvariedad focal M_+ y actúan transitivamente sobre ella.

Para demostrar que la familia isoparamétrica es homogénea basta probar que una de las hipersuperficies isoparamétricas M que la componen es homogénea, pues, en ese caso, para un subgrupo de Lie G de $SO(n+2)$ que actúa transitivamente sobre M, cada órbita será paralela a M, y, por lo tanto, coinciden con los elementos de la familia isoparamétrica, pues estos últimos también son paralelos a M.

Sea M^t una hipersuperficie isoparamétrica de la familia, la cual es un conjunto de nivel regular de V. Entonces, M^t no es más que un tubo alrededor de M_+ de un cierto radio $t \in (0, \pi/3)$. Consideremos dos puntos r, $s \in M^t$. Las geodésicas normales γ_r, γ_s a M^t que pasan por cada uno de estos puntos deben intersecar a M_+, en puntos p y q respectivamente. Por lo ya probado, tenemos que cualquier punto de M_+ puede llevarse a e_{n+2} por medio de una transformación ortogonal que deja invariante las hojas de la familia isoparamétrica. Así, consideremos A_r, $A_s \in O(n+2)$ tales que $A_r p = A_s q = e_{n+2}$. Además, $A_r r$ y $A_s s$ no solo pertenecen a la misma hipersuperficie M^t, sino que $A_r r$, $A_s s \in (\Phi^t)^{-1}(e_{n+2})$, siendo $\Phi^t \colon M_t \to M_+$ la aplicación focalizante de M^t. Los vectores tangentes en e_{n+2} a las geodésicas $A_r\gamma_r$ y $A_s\gamma_s$ son vectores unitarios normales a M_+ en e_{n+2}, que denotaremos η_r y η_s respectivamente. Entonces, existe una transformación ortogonal $B \in O(n+2)$ que fija e_{n+2}, deja invariantes $T_{e_{n+2}}M_+$ y $\nu_{e_{n+2}}M_+$ y tal que $B\eta_r = \eta_s$. Razonando como ya hicimos antes durante esta prueba, la unicidad de la expresión (4.15) implica que $F(Bx) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+2}$. En conclusión, B deja invariante la familia isoparamétrica. Pero, además, B debe enviar $A_r\gamma_r$ a $A_s\gamma_s$, es decir, $BA_r r = A_s s$, luego $A_s^{-1} B A_r r = s$. Ya que A_s, B y A_r conservan la familia, hemos concluido la prueba. $\square$

4.4. Desarrollo geométrico de F

Como objetivo final de este trabajo, probaremos que las familias de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 3$ satisfacen $m \in \{1, 2, 4, 8\}$, y obtendremos una expresión explícita de su polinomio de Cartan-Münzner F en términos de la estructura algebraica de las distintas álgebras de división normadas. En este punto nos distanciaremos más claramente de la prueba original de Cartan, quién continuó estudiando las restricciones dadas por las ecuaciones diferenciales de Cartan-Münzner para los polinomios Q_k introducidos en (4.12), mientras que nosotros vamos a tomar una vía más geométrica.

Más concretamente, haremos uso del hecho de que la subvariedad focal M_+ de una familia isoparamétrica debe ser CPC (véase 2.14). Esto significa que el operador de configuración de M_+ respecto a cualquier vector normal unitario tiene los mismos autovalores con las mismas multiplicidades. En el caso particular de $g = 3$, por el Corolario 3.7, sabemos que los autovalores de M_+ son

$$\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{y} \qquad \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

ambos con multiplicidad m. Entonces, dados dos vectores unitarios ortogonales entre sí ξ, $\eta \in \nu_{e_{n+2}} M_+$, el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ también es unitario y $\mathcal{S}^2_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)} = \mathcal{S}^2_\xi = \mathcal{S}^2_\eta = \frac{1}{3}\operatorname{Id}$. Pero además

$$\frac{1}{3}\operatorname{Id} = \mathcal{S}^2_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{S}^2_\xi + \mathcal{S}^2_\eta + \mathcal{S}_\xi\mathcal{S}_\eta + \mathcal{S}_\eta\mathcal{S}_\xi\right) = \frac{1}{3}\operatorname{Id} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{S}_\xi\mathcal{S}_\eta + \mathcal{S}_\eta\mathcal{S}_\xi\right),$$

con lo que

$$\mathcal{S}_\xi\mathcal{S}_\eta + \mathcal{S}_\eta\mathcal{S}_\xi = 0, \tag{4.16}$$

para cualquier par de vectores unitarios normales entre sí ξ y η.

Observación 4.2. Ya que $(\sqrt{3}\mathcal{S}_\eta)^2 = \operatorname{Id}$ para cualquier vector unitario $\eta \in \nu_{e_{n+2}} M_+$, se puede deducir que la $(m+1)$-tupla $(\sqrt{3}\mathcal{S}_{\eta_1}, \ldots, \sqrt{3}\mathcal{S}_{\eta_{m+1}})$ define un sistema de Clifford simétrico en el espacio vectorial $T_{e_{n+2}} M_+ \cong \mathbb{R}^{2m}$, en el sentido de [22, Definition 3.2(i)](véase Definición 3.27). Dichos sistemas de Clifford están clasificados en términos de representaciones de álgebras de Clifford. De esta clasificación, se sigue, en nuestro contexto, que un sistema de Clifford como el anterior existe si y solo si $m \in \{1, 2, 4, 8\}$. Sin embargo, más adelante seguiremos un razonamiento que hace uso del Teorema de Hurwitz en lugar de la clasificación de sistemas de Clifford, pues históricamente se obtuvo este teorema [28] antes que la clasificación de sistemas de Clifford [3].

Retomemos las bases ortonormales mencionadas anteriormente $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ de $T_{e_{n+2}} M_+$ y $\{\eta_1, \ldots, \eta_{m+1}\}$ de $\nu_{e_{n+2}} M_+$. Por conveniencia, denotaremos $\zeta = \eta_{m+1}$, y consideraremos el operador de configuración $\mathcal{S}_\zeta$. Salvo por la acción de una transformación ortogonal de $T_{e_{n+2}} M_+$, podemos asumir que $e_1, \ldots, e_m$ pertenecen al autoespacio T_+ de $\mathcal{S}_\zeta$ con autovalor $1/\sqrt{3}$, y que el resto de vectores $e_{m+1}, \ldots, e_{2m}$ pertenecen al otro autoespacio T_-. Por (4.16), dados $w_+ \in T_+$ y $\eta \in \nu_{e_{n+2}} M_+$ unitario ortogonal a ζ, tenemos

$$\mathcal{S}_\zeta\mathcal{S}_\eta w_+ = -\mathcal{S}_\eta\mathcal{S}_\zeta w_+ = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{S}_\eta w_+,$$

con lo que $\mathcal{S}_\eta w_+ \in T_-$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_\eta$ lleva T_+ en T_-, y, análogamente, se prueba que lleva T_- en T_+, para cualquier $\eta \in \nu_{e_{n+2}} M_+$ ortogonal a ζ, en particular, si $\eta \in \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$. Así, la expresión matricial de $\mathcal{S}_\eta$ respecto de la base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ es de la forma

$$\mathcal{S}_\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{array}{c|c} 0 & A_\eta \\ \hline A_\eta^t & 0 \end{array}\right), \tag{4.17}$$

donde $A_\eta \in O(m)$ es una matriz ortogonal, ya que $(\sqrt{3}\mathcal{S}_\eta)^2 = \operatorname{Id}$.

A partir de ahora, tomaremos $v = z_{m+1}$ y la notación $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ para referirnos a las primeras y segundas m coordenadas de nuestro sistema respectivamente. Tengamos en cuenta que a partir de ahora las coordenadas w de (4.15) serán $w = (x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$. Es decir, el vector de $\mathbb{R}^{n+2}$ con coordenadas (x, y, z, v, u) es el vector $\sum_{i=1}^m x_i e_i + \sum_{i=1}^m y_i e_i + \sum_{i=1}^m z_i \eta_i + v\zeta + u e_{n+2}$. Con este cambio de notación para (4.15), junto con

$$\mathcal{S}_\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_m\}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{span}\{e_{m+1},\dots,e_{2m}\}}),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} F(x,y,z,v,u) = u^3 - 3v^2u + \frac{3}{2}u\sum_{i=1}^m (x_i^2 + y_i^2) - 3u\sum_{i=1}^m z_i^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}v\sum_{i=1}^m (x_i^2 - y_i^2) \\ + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^m z_k \langle (x,y), \mathcal{S}_{\eta_k}(x,y)\rangle, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde en el último término estamos identificando un vector tangente de $T_{e_{n+2}}M_+$ con las coordenadas (x, y).

Analicemos ahora el último término de (4.18). Tengamos en cuenta que, de (4.17), obtenemos

$$\sum_{k=1}^m z_k \langle (x,y), \mathcal{S}_{\eta_k}(x,y)\rangle = 2\sum_{k=1}^m z_k \langle (x,0), \mathcal{S}_{\eta_k}(0,y)\rangle = 2\sum_{k=1}^m z_k \langle I\!I\big((x,0),(0,y)\big), \eta_k\rangle. \tag{4.19}$$

Observemos que $I\!I\big((x,0),(0,y)\big)$ no tiene componente en ζ, luego, $\langle I\!I\big((x,0),(0,y)\big), \zeta\rangle = 0$.

Ahora, la clave está en considerar una aplicación bilineal $H\colon T_+ \times T_- \to \nu_{e_{n+2}}M_+ \cap \zeta^\perp$ dada por

$$H(x,y) = \sqrt{3}\, I\!I((x,0),(0,y)), \tag{4.20}$$

donde, al igual que antes, en el lado derecho identificamos un vector tangente de $T_{e_{n+2}}M_+$ con sus coordenadas. Dado que el operador de configuración es autoadjunto, y usando (4.16), dado un $w \in T_{e_{n+2}}M_+$ no nulo y $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq \ell$, tenemos

$$\langle \mathcal{S}_{\eta_k}w, \mathcal{S}_{\eta_\ell}w\rangle = \langle \mathcal{S}_{\eta_\ell}\mathcal{S}_{\eta_k}w, w\rangle = -\langle \mathcal{S}_{\eta_k}\mathcal{S}_{\eta_l}w, w\rangle = -\langle \mathcal{S}_{\eta_\ell}w, \mathcal{S}_{\eta_k}w\rangle,$$

de donde deducimos $\langle \mathcal{S}_{\eta_k}w, \mathcal{S}_{\eta_\ell}w\rangle = 0$. En particular, si $w = (x, 0)$ con $x \neq 0$, tenemos $\mathcal{S}_{\eta_k}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}A_{\eta_k}^t x$, lo cual, junto con que $A_{\eta_k} \in O(m)$, implica que $\{A_{\eta_1}^t \frac{x}{\|x\|}, \dots, A_{\eta_m}^t \frac{x}{\|x\|}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^m \cong T_-$. Con esto, por (4.17), se tiene

$$\|I\!I((x,0),(0,y))\|^2 = \sum_{k=1}^m \langle \mathcal{S}_{\eta_k}(x,0),(0,y)\rangle^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^m \langle A_{\eta_k}^t x, y\rangle^2 = \frac{1}{3}\|x\|^2\|y\|^2.$$

Por lo tanto, por la definición de H en (4.20), se tiene

$$\|H(x,y)\| = \|x\|\|y\|, \qquad \text{para cualesquiera } x \in T_+,\ y \in T_-.$$

En particular, para todo $x \in T_+$ unitario, la aplicación $H_x = H(x,\cdot)\colon T_- \to \nu_{e_{n+2}}M_+ \cap \zeta^\perp$ es una isometría lineal, y análogamente con la aplicación $H_y = H(\cdot, y)$ para $y \in T_-$ unitario.

Ya que T_+, T_- y el codominio $\nu_{e_{n+2}}M_+ \cap \zeta^\perp$ de H son de dimensión m, obtenemos que son espacios euclídeos isomorfos. Así, identificamos cada uno de ellos con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ con base canónica $\{f_1, \dots, f_m\}$ como sigue. Primero realizamos la identificación $\nu_{e_{n+2}}M_+ \cap \zeta^\perp \cong \mathbb{R}^m$ por $\eta_1 \leftrightarrow f_1, \dots, \eta_m \leftrightarrow f_m$. Por otra parte, identificamos $T_- \cong \mathbb{R}^m$ por $H_{e_1}^{-1}(\eta_k) \leftrightarrow f_k$, y $T_+ \cong \mathbb{R}^m$ por $H^{-1}_{H_{e_1}^{-1}(\eta_1)}(\eta_k) \leftrightarrow f_k$, para cualquier $k \in \{1, \dots, m\}$, en particular $H^{-1}_{H_{e_1}^{-1}(\eta_1)}(\eta_1) = e_1$. Usando esta identificación, la aplicación bilineal H cumple $H(f_1, f_k) = f_k = H(f_k, f_1)$ para cualquier $k \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto, podemos tomar la aplicación H como la aplicación bilineal

$$H\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

tal que

$$\begin{aligned} \|H(x,y)\| &= \|x\|\|y\|, && \text{para cualquier } x, y \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{y} \\ H(f_1, x) = x &= H(x, f_1), && \text{para cualquier } x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Esto significa que $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle, H)$ es un álgebra normada sobre $\mathbb{R}$ con multiplicación H, unidad $1 = f_1$ y norma $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$. Véase la Subsección 3.3.3 y referencias allí citadas para más información sobre álgebras normadas. Dado que el producto interior de $\mathbb{R}^m$ es definido positivo, esta álgebra normada es de hecho un álgebra de división normada, pues si $H(x,y) = 0$, con x, $y \in \mathbb{R}^m$, entonces necesariamente o bien $x = 0$ o bien $y = 0$, por la primera relación en (4.21). El Teorema de Hurwitz [28], enunciado para álgebras de división normadas, véase [24, Theorem 6.37], asegura que las únicas álgebras de división normadas sobre $\mathbb{R}$, no necesariamente asociativas, son los números reales $\mathbb{R}$, los números complejos $\mathbb{C}$, los cuaternios $\mathbb{H}$, y los octonios $\mathbb{O}$. En particular, $m \in \{1, 2, 4, 8\}$, como ya habíamos mencionado.

Pero lo desarrollado anteriormente nos permite obtener una expresión explícita del polinomio de Cartan-Münzner F con $g = 3$ en función de la multiplicación y la conjugación de álgebras de división normadas. De hecho, estos argumentos prueban que el último término de la expresión polinómica de F en (4.18), a la vista de (4.19) y (4.20), es

$$\frac{9}{2}\sum_{k=1}^{m} z_k \langle (x,y), \mathcal{S}_{\eta_k}(x,y)\rangle = 9\sum_{k=1}^{m} z_k \langle I\!I\big((x,0),(0,y)\big), \eta_k\rangle = 3\sqrt{3}\langle H(x,y), z\rangle,$$

donde recordemos que, geométricamente hablando, x pertenece al $(1/\sqrt{3})$-autoespacio T_+ de $\mathcal{S}_\zeta$, y pertenece al $(-1/\sqrt{3})$-autoespacio T_- de $\mathcal{S}_\zeta$, y z representa un vector normal a M_+ en e_{n+2} ortogonal a ζ. Usando la notación estándar del producto de álgebras normadas de división en lugar de H y teniendo en cuenta que

$$\overline{ab} = \bar{b}\bar{a} \qquad \text{y} \qquad \langle a, b\rangle = ab + \bar{b}\bar{a},$$

para cualquier a, b en un álgebra de división normada, véase [24, (6.8) y Lemma 6.10], podemos reescribir $\langle H(x,y), z\rangle$ como $\langle xy, z\rangle = \frac{1}{2}\left((xy)z + \bar{z}(\bar{y}\bar{x})\right)$. Esto nos permite obtener la expresión final de F en el siguiente teorema, la cual coincide exactamente con la obtenida por Cartan en su artículo original [10, Equation (17)].

Teorema 4.3. *Sea F un polinomio de Cartan-Münzner sobre $\mathbb{R}^{n+2}$ definiendo una familia de hipersuperficies isoparamétricas con $g = 3$ curvaturas principales de la esfera unidad $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Entonces $n = 3m$ para algún $m \in \{1, 2, 4, 8\}$, y existe un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z, v, u) de $\mathbb{R}^{n+2}$, con x, y, $z \in \mathbb{R}^m$, v, $u \in \mathbb{R}$, tales que F adopta la expresión polinómica de grado 3

$$\begin{aligned} F(x, y, z, v, u) = u^3 - 3v^2u + \frac{3}{2}u(x\bar{x} + y\bar{y} - 2z\bar{z}) \\ + \frac{3\sqrt{3}}{2}v(x\bar{x} - y\bar{y}) + \frac{3\sqrt{3}}{2}((xy)z + \bar{z}(\bar{y}\bar{x})), \end{aligned}$$

considerando x, y, z como elementos del álgebra de división normada correspondiente, $\mathbb{R}$ si $m = 1$, $\mathbb{C}$ si $m = 2$, $\mathbb{H}$ si $m = 4$, o $\mathbb{O}$ si $m = 8$.

Esto concluye la determinación, salvo isometría de $\mathbb{S}^{n+1}$, de todas las posibles familias isoparamétricas con $g = 3$ curvaturas principales en esferas, obtenidas como la familia de conjuntos de nivel de la restricción V de F a $\mathbb{S}^{n+1}$, para alguna F con la forma dada en el Teorema 4.3.

Bibliografía

[1] U. Abresch, Isoparametric hypersurfaces with four or six distinct principal curvatures, *Math. Ann.* 264, 1983, 283–302.

[2] M. Atiyah, J. Berndt, Projective planes, Severi varieties and spheres, *Surveys in differential geometry*, Vol. VIII (Boston, MA, 2002), 1–27, Surv. Differ. Geom., 8, Int. Press, Somerville, MA, 2003.

[3] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, Clifford modules, *Topology* 3, 1963, suppl. 1, 3–38.

[4] J. C. Baez, The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 39, 2002, no. 2, 145–205.

[5] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy. Second edition.* Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[6] J. Berndt, V. Sanmartín-López, Submanifolds with constant principal curvatures in symmetric spaces, a aparecer en *Comm. Anal. Geom.*

[7] É. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, I, *Bull. Soc. Math. France* 54, 1926, 214–216.

[8] É. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, II, *Bull. Soc. Math. France* 55, 1927, 114–134.

[9] É. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. Pura Appl.*, IV. Ser. 17, 1938, 177–191.

[10] É. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques, *Math. Z.* 45, 1939, 334–367.

[11] É. Cartan, Sur quelques familles remarquables d'hypersuerfaces, *C. R. Congrès Math. Liège*, 1939, 30–41.

[12] É. Cartan, Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions, *Revista Univ. Tucumán* 1, 1940, 5–22.

[13] T. E. Cecil, Q.-S. Chi, G.R. Jensen, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, *Ann. Math.* 166, 2007, 1–76.

[14] T. E. Cecil, P. J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer, New York, 2015.

[15] Q.-S. Chi, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, II, *Nagoya Math. J.* 204, 2011, 1–18.

[16] Q.-S. Chi, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, III, *Journal of Differential Geometry* 94, 2013, 469–504.

[17] Q.-S. Chi, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV, *Journal of Differential Geometry* 115, 2020, 225-301.

[18] Q.-S. Chi, The isoparametric story, a heritage of Élie Cartan, *Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians*, 2018, Advanced Lectures in Mathematics, 197–260.

[19] M. Domínguez-Vázquez, *An introduction to isoparametric foliations*, disponible en `http://xtsunxet.usc.es/miguel/teaching/download/Notas_isoparametricas.pdf`, último acceso 24/06/2021.

[20] M. Domínguez-Vázquez, *Isoparametric foliations and polar actions on complex space forms*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, vol. 126, Universidade de Santiago de Compostela, 2013.

[21] J. Dorfmeister, E. Neher, Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6$, $m = 1$, *Comm. Algebra* 13, 1985, 2299–2368.

[22] D. Ferus, H. Karcher, H.-F. Münzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.* 177, 1981, 479–502.

[23] J. Ge, Z. Tang, Geometry of isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds, *Asian J. Math.* 18, no. 1, 2014, 117–125.

[24] F. R. Harvey, *Spinors and calibrations*, Academic Press, Inc., 1990.

[25] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, 80, Academic Press, Inc., New York-London, 1978.

[26] E. Heintze, C. E. Olmos, G. Thorbergsson, Submanifolds with constant principal curvatures and normal holonomy groups, *Internat. J. Math.* 2, 1991, 167-175.

[27] W.-Y. Hsiang, H. B. Lawson, Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differ. Geom.* 5, 1971, 1–38.

[28] A. Hurwitz, Über die Komposition der quadratischen Formen, *Math. Ann.* 88, 1923, 1–25.

[29] S. Immervoll, The geometry of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures in spheres, *Adv. Geom.* 5, 2005, 293–300.

[30] E. Laura, Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinido, *Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio*, Bocca, Torino, 1918, 253–278.

[31] J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

[32] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds. An introduction to curvature,* Graduate Texts in Matemathics, 176, Springer-Verlag, New York, 1997.

[33] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Matemathics, 176, Springer- Verlag, New York, 2018.

[34] T. Levi-Civita, Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo, *Rend. Acc. Naz. Lincei XXVI*, 1937, 355–362.

[35] R. Miyaoka, The linear isotropy group of $G_2/SO(4)$, the Hopf fibering and isoparametric hypersurfaces, *Osaka J. Math.* 30, 1993, 179–202.

[36] R. Miyaoka, Geometry of G_2 orbits and isoparametric hypersurfaces, *Nagoya Math. J.* 203, 2011, 175–189.

[37] R. Miyaoka, Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$, *Ann. Math.* 177, 2013, 53–110.

[38] R. Miyaoka, Errata on isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$, *Ann. Math.*, 183, 2016, 1057–1071.

[39] H.-F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I, *Math. Ann.* 251, 1980, 57–71.

[40] H.-F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II, *Math. Ann.* 256, 1981, 215–232.

[41] S. B. Myers, N. E. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.* (2) 40, 1939, no. 2, 400–416.

[42] H. Ozeki, M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I, *Tôhoku Math. J.* 27, 1975, 515–559.

[43] H. Ozeki, M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II, *Tôhoku Math. J.* 28, 1976, 7–55.

[44] C.-K. Peng, Z. Hou, A remark on the isoparametric polynomials of degree 6, *Differential Geometry and Topology, Proceedings Tianjin 1986–1987*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1369, Springer, Berlin/New York, 1989, 222–224.

[45] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, N. M. Queen, *Integrals and Series: elementary functions*, USSR Academi of Science, Moscow, 1986.

[46] B. Segre, Una proprietá caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superficie, *Atti Acc. Sc. Torino LIX*, 1924, 666–671.

[47] B. Segre, Famiglie di ipersupercie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (6) 27, 1938, 203-207.

[48] A. Siffert, Classification of isoparametric hypersurface in spheres with $(g, m) = (6, 1)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 144, 2016, 2217-2230.

[49] A. Siffert, A new structural approach to isoparametric hypersurfaces in spheres, *Ann. Global Anal. Geom.* 52, 2017, 425–456.

[50] C. Somigliana, Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica, *Atti Acc. Sc. Torino LIV*, 1918-1919, 974-979.

[51] S. Stolz, Multiplicities of Dupin hypersurfaces, *Invent. Math.* 138, 1999, 253–279.

[52] R. Takagi, T. Takahashi, On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere, *Differential Geometry in honor of K. Yano*, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 469–481.

[53] R. Takagi, A class of hypersurfaces with constant principal curvatures in a sphere, *J. Differ. Geom.* 11, 1976, 225–233.

[54] G. Thorbergsson, A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations, *Handbook of Differential Geometry*, Vol. I, 963–995, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[55] Q.-M. Wang, Isoparametric functions on Riemannian manifolds *I, Math. Ann.* 277, 1987, 639–646.

[56] S.-T. Yau, Open problems in geometry, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 54, Part 1, American Mathematical Society, Providence, 1993, 1–28.