

SILVIA SOUTO PÉREZ

**SISTEMAS HAMILTONIANOS E
LAGRANGIANOS EN
GEOMETRÍA DE CONTACTO**

**150b
2022**

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SILVIA SOUTO PÉREZ

**SISTEMAS HAMILTONIANOS E
LAGRANGIANOS EN GEOMETRÍA DE
CONTACTO**

150b

2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2022



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

**Sistemas hamiltonianos e
lagrangianos en xeometría de
contacto**

Silvia Souto Pérez

Febreiro, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice xeral

Resumo	5
Introdución	7
1. Formalismo simpléctico	11
1.1. Sistemas hamiltonianos simplécticos	11
1.2. SODES	13
1.3. Sistemas lagrangianos simplécticos	15
1.4. Operador de Euler-Lagrange	19
1.4.1. Fibrados tanxentes de primeira e segunda orde	19
1.4.2. Campos de vectores e 1-formas ao longo de aplicacións	20
1.4.3. Operador de Euler-Lagrange	21
1.5. Mecánica lagrangiana non holonómica	26
1.6. Sistemas cosimplécticos	26
1.6.1. Formalismo hamiltoniano	27
1.6.2. Formalismo lagrangiano	29
2. Formalismo hamiltoniano de contacto	31
2.1. Variedades de contacto	31
2.2. Sistemas hamiltonianos de contacto	33
2.2.1. Evolución temporal do hamiltoniano e a enerxía mecánica	34
2.3. Simetrías, cantidades conservadas e disipadas	36
2.3.1. Simetrías en sistemas hamiltonianos de contacto	36
2.3.2. Cantidades disipadas e conservadas en sistemas hamiltonianos de contacto	38
2.3.3. Simetrías en sistemas hamiltonianos canónicos de contacto	40
3. Formalismo lagrangiano de contacto	43
3.1. SODES	43
3.2. Cálculo variacional de Herglotz	45
3.3. Formalismo lagrangiano de contacto	46
3.3.1. Aplicación de Legendre	47
3.3.2. Forma lagrangiana de contacto	47

3.3.3. Ecuacións de Herglotz	48
3.4. Lagrangianos con disipación holonómica	50
3.5. Simetrías en sistemas lagrangianos de contacto	51
4. Exemplos	55
4.1. Oscilador armónico amortecido	55
4.2. Movemento nun campo gravitacional constante con fricción	58
4.3. Ecuación do paracaídas	60
5. Ecuacións de Herglotz en sistemas lagrangianos con ligaduras	63
5.1. Sistemas ordinarios non holonómicos	63
5.1.1. Formulación co campo de vectores dinámico	64
5.1.2. Formulación co operador de Euler-Lagrange	68
5.2. Lagrangianos disipativos con ligaduras	69
5.3. Exemplo: disco vertical rodante sen deslizamento	71
Bibliografía	73

Resumo

A mecánica xeométrica é a rama da física matemática que estuda a mecánica clásica dende o punto de vista da xeometría. Nos últimos anos xurdiu un gran interese por describir conceptos como a disipación e irreversibilidade dos sistemas dinámicos. Comprobouse que a xeometría de contacto é un marco teórico adecuado para estudar este tipo de sistemas.

O obxectivo principal deste traballo é estudar a dinámica nos sistemas de contacto. Revisaremos as principais características da dinámica simpléctica para poder xeneralizalas despois ao caso de contacto. Faremos unha descrición hamiltoniana e lagrangiana de ditos sistemas, presentando así esta xeometría de contacto como unha candidata natural para describir sistemas disipativos e non disipativos.

Por último, veremos como a dinámica de contacto obtida mediante o principio variacional de Herglotz pode describirse como un sistema lagrangiano non holonómico, dependendo dunha variable disipativa e cunha elección adecuada de ligadura.

Abstract

Geometric Mechanics is the branch of the mathematical physics that studies Classical Mechanics from the point of view of geometry. In the last years there has been a great interest in describing terms such as the dissipation and irreversibility of dynamical systems. It was found that contact geometry is a suitable theoretical framework to study this type of systems.

The main purpose of this work is to study the dynamics of contact systems. We will review the main characteristics of symplectic dynamics to be able to generalize them later to the contact case. We will make a Hamiltonian and Lagrangian description of contact systems, showing how this geometry is a natural candidate to describe dissipative and non-dissipative systems.

Finally, we will see how the contact dynamics obtained by Herglotz's variational principle can be described as a non-holonomic Lagrangian system depending on a dissipative variable with an adequate choice of one constraint.

Introdución

Dende tempos antigos, o estudo dos sistemas dinámicos tivo unha gran repercusión nalgunhas ramas das matemáticas, a física e a enxeñería. Ata a segunda metade do século XX, os principais avances neste campo de estudo estaban baseados en métodos numéricos e analíticos. Sen embargo, sobre os anos 60 xa se comezaron a usar métodos máis modernos en xeometría diferencial co propósito de estudar sistemas físicos. Pode verse, por exemplo, nos traballos de C. Godbillon [9], de W. M. Tulczyjew [28],[29],[30] ou nos de A. Lichnerowicz [24], entre outros.

Esta xeometrización dos sistemas físicos proporciona unha correspondencia entre conceptos físicos e obxectos xeométricos intrinsecamente ben definidos. Por exemplo, as ecuacións diferenciais que definen un sistema físico poden ser pensadas como campos de vectores na variedade de fases do sistema, as simetrías poden identificarse con accións de grupos de Lie, e as ligaduras que restrinxen un sistema físico definen subvariedades no espazo de fases. Ademais, estes conceptos físicos non dependen das coordenadas, o que xustifica que a formulación xeométrica das teorías físicas sexa independente do sistema de coordenadas a considerar.

A formulación hamiltoniana da mecánica clásica é unha ferramenta de gran utilidade na descrición de sistemas mecánicos debido ás súas salientábeis propiedades xeométricas, e ademais proporciona unha forma natural de estender a teoría clásica ao contexto cuántico. Hoxe en día, é ben coñecido que o marco xeométrico natural para os sistemas hamiltonianos autónomos é a xeometría simpléctica, mentres que para a descrición dos sistemas non autónomos faise uso da denominada xeometría cosimpléctica. Un resultado interesante en ambos marcos xeométricos é o teorema de Darboux (véxase [1]).

Sen embargo, esta formulación describe exclusivamente sistemas illados cunha dinámica reversible, en contraste coa realidade, onde nos atopamos constantemente con sistemas que están en interacción cun entorno que introduce os fenómenos de disipación e irreversibilidade. Polo tanto, unha cuestión interesante sería preguntarnos se é posible construír unha nova teoría na mecánica que teña en conta todas as vantaxes do formalismo hamiltoniano e ademais considere os efectos do medio ambiente no sistema. A resposta dánola a xeometría de contacto.

Nos últimos anos houbo un aumento de interese polo estudo dun marco xeométrico para describir sistemas con disipación. Unha ferramenta especialmente útil é esta xeometría de contacto, que xorde de maneira natural para describir sistemas dinámicos non conservativos, tanto hamiltonianos como lagrangianos. Esta xeometría resultou de gran utilidade en

moitas áreas diferentes como en termodinámica [25], mecánica cuántica, teoría de circuítos, teoría de control, etc, co propósito de describir varios tipos de sistemas físicos.

Neste traballo centrarémonos principalmente nos sistemas mecánicos con disipación. Aínda que a xeometría de contacto se aplicou inicialmente para dar unha descrición de tipo hamiltoniano para estes sistemas, recentemente tamén se fixeron estudos para o caso lagrangiano. É interesante sinalar que a primeira formulación lagrangiana de sistemas de contacto foi introducida por Gustav Herglotz, ao redor de 1930 (véxase [13]), dende unha perspectiva variacional.

Unha das vantaxes desta mecánica hamiltoniana de contacto é que inclúe dentro dun mesmo formalismo tanto aos sistemas disipativos coma aos non disipativos. Por outro lado, en [17] preséntase un modelo máis xeral, inspirado na formulación cosimpléctica de sistemas mecánicos non autónomos.

Este traballo consta de 5 capítulos.

■ **Capítulo 1. Formalismo simpléctico.**

Revisamos os principais aspectos da mecánica non disipativa. Describiremos brevemente o formalismo hamiltoniano e lagrangiano en variedades simplécticas, recordando as súas principais estruturas xeométricas. Logo introduciremos o denominado operador de Euler-Lagrange asociado a unha función lagrangiana, que é unha ferramenta de gran interese na mecánica lagrangiana xeométrica, co fin de proporcionar unha forma alternativa de escritura das ecuacións de Euler-Lagrange en termos deste operador. Con este marco, plantéxase o problema variacional para un sistema dinámico non holonómico con ligaduras, isto é, con restricións nas velocidades.

Para rematar, veremos a xeometría que subxace aos sistemas dinámicos non autónomos sen disipación co propósito de dar as súas ecuacións de movemento en termos das curvas integrais dun campo de vectores en particular. Para entendelo con máis claridade, ilustrarémolo cun exemplo.

Este capítulo apóiase en [1],[3],[5],[10],[20],[23] para desenvolver os seus contidos.

■ **Capítulo 2. Formalismo hamiltoniano de contacto.**

Neste capítulo estudamos os sistemas de contacto. Introduciremos as nocións máis importantes da xeometría de contacto, definindo así os conceptos de variedade de contacto, campo de vectores de Reeb e enunciando o teorema de Darboux para este tipo de variedades. Con este fondo xeométrico, definimos a noción de sistema hamiltoniano de contacto e escribiremos as ecuacións de movemento ou ecuacións de Hamilton de contacto en termos das curvas integrais do campo de vectores hamiltoniano. Veremos como no caso particular dos sistemas mecánicos non se ten a conservación da enerxía.

Por último introducimos as simetrías e cantidades disipadas de forma xeométrica. Definimos diferentes tipos de simetrías para sistemas hamiltonianos de contacto (as denominadas simetrías dinámicas e de contacto), dependendo da estrutura que se preserve, e establecemos relacións entre elas. Veremos que hai diferenzas significativas

con respecto aos sistemas simplécticos, e enunciaremos un "teorema de disipación" análogo ao teorema de conservación dos sistemas conservativos.

As principais referencias para este capítulo son [4],[8],[14],[15].

■ **Capítulo 3. Formalismo lagrangiano de contacto.**

Neste capítulo estudamos os sistemas lagrangianos de contacto. Introducimos os SODES (ecuacións diferenciais de segunda orde) na variedade $TQ \times \mathbb{R}$ e describimos brevemente a aproximación variacional de Herglotz para obter as súas ecuacións de contacto. A continuación realizamos unha descrición xeométrica dos sistemas lagrangianos de contacto como un caso particular de sistema hamiltoniano de contacto para chegar ás mesmas ecuacións que Herglotz. Expoñemos un caso particular de lagrangiano de contacto cun termo de disipación holonómica. Por último, trasladamos as diferentes nocións de simetrías definidas no capítulo 2 ao caso do sistema de contacto $(TQ \times \mathbb{R}, \eta_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$ para unha función lagrangiana \mathcal{L} , e veremos as relacións que hai entre cantidades disipadas e conservadas con ditas simetrías.

As principais referencias están en [8],[14].

■ **Capítulo 4. Exemplos.**

Facendo uso da formulación xeométrica de contacto dos capítulos 2 e 3, analizaremos algúns exemplos coñecidos de sistemas dinámicos disipativos, como son o oscilador armónico amortecido, o movemento dun obxecto nun campo gravitacional constante con fricción e a ecuación do paracaídas. En vista de traballar con ambos formalismos, nalgúns exemplos daremos a súa descrición hamiltoniana e noutros a lagrangiana.

Os exemplos deste capítulo podémolos ver tamén en [8].

■ **Capítulo 5. Ecuacións de Herglotz en sistemas lagrangianos con ligaduras.**

Sen facer uso do principio variacional de Herglotz, obtemos as ecuacións de contacto como un sistema lagrangiano con ligaduras non holonómicas nunha variedade pre-simpléctica, cunha variable disipativa s . Veremos como a dinámica e as ecuacións diferenciais que definen as traxectorias do sistema son as mesmas que as que obtivemos mediante o formalismo de contacto.

As ferramentas que utilizaremos neste capítulo son resultados de xeometría pre-simpléctica (ver [17],[20]) e o operador de Euler-Lagrange que introducimos no capítulo 1. Esta aproximación permítenos facer unha clara distinción entre sistemas onde as ligaduras son unicamente $\dot{s} = L$ ou sistemas onde temos ademais ligaduras adicionais.

Apoiarémonos principalmente en [1],[18] para desenvolver os contidos.

Todas as variedades que imos considerar neste traballo son reais, de clase C^∞ e segundo numerables. Todas as funcións supóñense diferenciáveis e as formas diferenciáveis de rango constante.

Para finalizar, quixera deixar constancia do meu agradecemento ao profesor de investigación do ICMAT Manuel de León Rodríguez pola súa activa colaboración en diversos

temas tratados neste traballo, así como a Modesto Salgado polo seu apoio continuo na realización do mesmo.

Capítulo 1

Formalismo simpléctico

As ecuacións de Hamilton e as de Euler-Lagrange, que son sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, xogan un papel fundamental na descrición xeométrica de sistemas físicos na mecánica clásica, en particular dos sistemas dinámicos. Neste capítulo revisaremos as principais características da xeometría simpléctica, que é o marco natural para a descrición de sistemas conservativos. Veremos tanto o formalismo hamiltoniano coma o lagrangiano e introduciremos conceptos como o operador de Euler-Lagrange, co fin de proporcionar unha forma alternativa para escribir as ecuacións de movemento. Recordaremos o problema variacional non holonómico e para finalizar, daremos brevemente unha descrición xeométrica para sistemas que dependen do tempo.

1.1. Sistemas hamiltonianos simplécticos

Nesta sección recordamos a descrición hamiltoniana en sistemas dinámicos autónomos, que como sabemos, desenvólvese nas variedades simplécticas.

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión $2n$. Unha *variedade simpléctica* é un par (M, ω) onde ω é unha 2-forma pechada, $d\omega = 0$, e non dexenerada, $\omega^n \neq 0$.

Como consecuencia do carácter non dexenerado de ω tense o seguinte isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned} \bar{b}: \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto \bar{b}(X) = \omega(X, -) = i_X \omega, \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{X}(M)$ denota o conxunto de campos de vectores en M e $\Omega^1(M)$ o conxunto de 1-formas diferenciables en M .

Consideremos $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ unha función hamiltoniana. Defínese o campo de vectores hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ mediante a denominada ecuación xeométrica simpléctica

$$\bar{b}(X_H) = i_{X_H} \omega = dH. \tag{1.1}$$

Para ver a súa expresión en coordenadas temos o seguinte resultado de gran interese en xeometría simpléctica.

Teorema 1.1 (de Darboux). *Dada (M, ω) unha variedade simpléctica, para cada punto $p \in M$ existe unha carta local*

$$(U, (q^i, p_i)) , \quad i = 1, \dots, n$$

onde U é un entorno aberto de p en M con coordenadas (q^i, p_i) e tal que

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i . \quad (1.2)$$

Observación 1.2. De agora en adiante enténdese a suma de índices repetidos cruzados.

Das ecuacións (1.1) e (1.2) obtemos a expresión local do campo de vectores hamiltoniano

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} . \quad (1.3)$$

Se consideramos o caso dun sistema mecánico de partículas, as curvas integrais de X_H son as que nos proporcionan a dinámica do sistema, e habitualmente, as coordenadas canónicas (q^i, p_i) corresponden coas posicións e momentos xeneralizados de dito sistema.

Sexa $\gamma(t) \equiv (q^i(t), p_i(t))$ unha curva integral de X_H , logo de (1.3) dedúcese que γ é solución das ecuacións do movemento ou *ecuacións de Hamilton*

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \gamma, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \circ \gamma, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Á tripla (M, ω, H) denomínaselle *sistema hamiltoniano simpléctico*.

Observación 1.3. En xeral, na Mecánica Clásica, o espazo de fases é o fibrado cotanxente T^*Q da variedade de configuración Q , provista da súa forma simpléctica canónica, que se constrúe da seguinte maneira:

1-forma de Liouville Defínese a *1-forma de Liouville* $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ como

$$\theta(\alpha_q)(X_{\alpha_q}) = \alpha_q(\pi_*(\alpha_q)(X_{\alpha_q})),$$

onde $\alpha_q \in T^*Q$, $X_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$ e $(\pi_Q)_*(\alpha_q) : T_{\alpha_q}(T^*Q) \rightarrow T_qQ$ denota a diferencial da proxección canónica $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ no punto α_q .

Considerando as coordenadas canónicas (q^i, p_i) en T^*Q , onde

$$q^i(\alpha_q) = q^i(q), \quad p_i(\alpha_q) = \alpha_q \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

tense que localmente

$$\theta = p_i dq^i . \quad (1.5)$$

Forma simpléctica A partir desta θ defínese a forma simpléctica canónica $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$ como

$$\omega = -d\theta,$$

cuxa expresión local é

$$\omega = dq^i \wedge dp_i. \quad (1.6)$$

Observación 1.4. Vexamos agora a evolución temporal $\frac{dF}{dt}$ dunha función diferenciable arbitraria $F \in C^\infty(M)$ ao longo das curvas integrais do campo de vectores hamiltoniano X_H en termos do corchete de Poisson (ver [20]).

Dado $x \in M$, se $\phi_x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é curva integral de X_H con $\phi_x(0) = x$, entón para calquera $t_0 \in I$ tense

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (F \circ \phi_x) = (\phi_x)_* (t_0) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) (F) = X_H(\phi_x(t_0))(F).$$

Polo tanto,

$$\frac{dF}{dt} = X_H(F) = dF(X_H) = i_{X_H}\omega(X_H) = \omega(X_H, X_H) = \{F, H\}_{(q^i, p_i)}, \quad (1.7)$$

onde $\{F, H\}_{(q^i, p_i)}$ denota o *corchete de Poisson* das funcións F e H con respecto ás coordenadas (q^i, p_i) .

A expresión local do corchete de Poisson

$$\{F, H\}_{(q^i, p_i)} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (1.8)$$

dedúcese de (1.2) e de (1.3).

Recordemos que unha función $F \in C^\infty(M)$ dise que é unha *constante do movemento, integral primeira ou cantidade conservada* correspondente a un sistema hamiltoniano (M, ω, H) se F é constante ao longo das curvas integrais de X_H . É dicir, como consecuencia de (1.7) equivale a escribir $\{F, H\} = 0$.

Desta forma, de (1.7) e (1.8) dedúcese que a función H é constante ao longo das curvas integrais de X_H

$$\frac{dH}{dt} = X_H(H) = \{H, H\} = 0,$$

e no caso en que (M, ω, H) sexa un sistema mecánico, onde H representa a enerxía, a expresión anterior representa a conservación de dita enerxía ao longo do tempo.

1.2. SODES

Antes de adentrarnos no formalismo lagrangiano simpléctico, veremos brevemente o que son os SODES ou ecuacións diferenciais de segunda orde sobre o fibrado tanxente TQ dunha variedade diferenciable Q de dimensión n .

Consideremos as coordenadas canónicas (q^i, v^i) en TQ . Isto é, dado un punto $v_q \in TQ$, tense

$$q^i(v_q) = q^i(q), \quad v^i(v_q) = dq^i(q)(v_q), \quad i = 1, \dots, n.$$

Definición 1.5. Sexa Γ un campo de vectores en TQ . Dise que $\Gamma \in \mathfrak{X}(TQ)$ é un *SODE* se toda curva integral $\tilde{\alpha}$ de Γ é o levantamento tanxente da súa curva proxección $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$. Isto é,

$$\tilde{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(t),$$

tal que $\tau_Q(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ con $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$ a proxección canónica.

Vexamos a expresión local dun SODE Γ . Sexa

$$\Gamma = A^i(q^i, v^i) \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i(q^i, v^i) \frac{\partial}{\partial v^i}$$

e consideremos

$$\tilde{\alpha}(t) \equiv \left(q^i(t), \frac{dq^i}{dt} \Big|_t \right)$$

unha curva integral de Γ , onde $\alpha(t) \equiv (q^i(t))$ é unha curva en Q .

Por un lado, tense

$$\Gamma(\tilde{\alpha}(t)) = A^i(\tilde{\alpha}(t)) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\alpha}(t)} + \Gamma^i(\tilde{\alpha}(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\tilde{\alpha}(t)}$$

e por ser $\tilde{\alpha}(t)$ curva integral de Γ ,

$$\Gamma(\tilde{\alpha}(t)) = \dot{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{dq^i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\alpha}(t)} + \frac{d^2q^i}{dt^2} \Big|_t \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\tilde{\alpha}(t)}.$$

Logo,

$$A^i(\tilde{\alpha}(t)) = \frac{dq^i}{dt} \Big|_t = v^i(\tilde{\alpha}(t)).$$

Agora, consideremos un punto $v_q \in TQ$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = v_q$, entón

$$A^i(v_q) = A^i(\tilde{\alpha}(0)) = v^i(\tilde{\alpha}(0)) = v^i(v_q),$$

é dicir,

$$A^i = v^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ademais

$$\Gamma^i(\tilde{\alpha}(t)) = \Gamma^i \left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d^2q^i}{dt^2} \Big|_t.$$

Desta forma, a expresión local dun SODE $\Gamma \in \mathfrak{X}(TQ)$ é

$$\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

e a curva $\alpha(t) \equiv (q^i(t))$ queda determinada polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$\Gamma^i \left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d^2q^i}{dt^2} \Big|_t.$$

1.3. Sistemas lagrangianos simplécticos

Unha vez introducidos os SODES, nesta sección veremos unha serie de ferramentas xeométricas que intervirán na descrición lagrangiana simpléctica, e que poderemos estender posteriormente de maneira natural ao caso de sistemas lagrangianos de contacto.

Campo de vectores de Liouville Dado un punto $v_q \in TQ$, sexa $\alpha_{v_q}(t) = e^t v_q$ unha curva en TQ tal que $\alpha_{v_q}(0) = v_q$. Defínese o *campo de vectores de Liouville* $\Delta \in \mathfrak{X}(TQ)$ como

$$\Delta(v_q) = \dot{\alpha}_{v_q}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \alpha_{v_q}(t),$$

e cuxa expresión local vén dada por

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (1.9)$$

Endomorfismo tanxente canónico Consideremos agora $x_q \in T_q Q$ un vector tanxente (fixo) a Q no punto $q \in Q$. Para cada $v_q \in T_q Q$ consideramos a curva

$$\begin{aligned} \alpha_{x_q} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TQ \\ t &\longmapsto \alpha_{x_q}(t) = v_q + t x_q \end{aligned}$$

que en tempo cero pasa por v_q , isto é, $\alpha_{x_q}(0) = v_q$.

Denomínase *levantamento vertical* de x_q a TQ no punto $v_q \in TQ$ ao vector de $T_{v_q}(TQ)$ definido mediante

$$[x_q]^V(v_q) = \dot{\alpha}_{x_q}(0) = \left. \frac{d(v_q + t x_q)}{dt} \right|_0. \quad (1.10)$$

Agora, se localmente $x_q = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q$ e $v_q = b^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_q$, entón da expresión local de α_{x_q} e de (1.10) tense que

$$[x_q]^V(v_q) = a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q},$$

e así, para os campos de vectores coordenados

$$\left[\frac{\partial}{\partial q^i} \right]^V = \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (1.11)$$

Sexan $Z_{v_q} \in T_{v_q}(TQ)$ e $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$ a proxección canónica, cuxa diferencial nun punto $v_q \in TQ$ denotamos por $(\tau_Q)_*(v_q) : T_{v_q}(TQ) \rightarrow T_q Q$.

O *endomorfismo tanxente canónico* en TQ é o seguinte campo de tensores de tipo $(1, 1)$ definido mediante

$$J(v_q)(Z_{v_q}) = [\tau_*(v_q)(Z_{v_q})]^V(v_q),$$

e a súa expresión local

$$J = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i \quad (1.12)$$

dedúcese de (1.11).

Polo tanto, de (1.12) tense

$$\begin{aligned} J(v_q) : T_{v_q}(TQ) &\longrightarrow T_{v_q}(TQ) \\ \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q} &\longmapsto \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q} \\ \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q} &\longmapsto 0_{v_q} \end{aligned}$$

Con estas estruturas Δ e J , establecemos a seguinte caracterización dos SODES en TQ , que pode probarse de maneira sinxela tomando coordenadas.

Proposición 1.6. *Un campo de vectores $\Gamma \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ é un SODE se e só se $J \circ \Gamma = \Delta$.*

Diferenciación vertical A *diferenciación vertical* en TQ , que denotaremos por d_J , vén descrita de forma detallada no libro [20]. Neste traballo centraremos principalmente na diferenciación vertical de funcións.

Polo tanto, dada unha función arbitraria $F \in C^\infty(TQ)$, defínese a 1-forma $d_J F$ en TQ como a seguinte aplicación

$$d_J F = dF \circ J : TQ \longrightarrow \mathbb{R},$$

cuxa expresión local vén dada por

$$d_J F = \frac{\partial F}{\partial v^i} dq^i \in \Omega^1(TQ), \quad (1.13)$$

que é consecuencia da expresión local de J (1.12).

Con esta definición, introdúcense as denominadas formas de Cartan na variedade TQ .

Formas de Cartan Consideremos $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ unha función lagrangiana. Defínese a 1-forma $\theta_L \in \Omega^1(TQ)$ como

$$\theta_L = d_J L = dL \circ J$$

e a partir desta, a 2-forma $\omega_L \in \Omega^2(TQ)$ como

$$\omega_L = -d\theta_L,$$

que escritas en coordenadas son

$$\begin{aligned} \theta_L &= \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i, \\ \omega_L &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Energía lagrangiana A enerxía lagrangiana asociada a L defínese mediante a función

$$E_L = \Delta(L) - L \in C^\infty(TQ)$$

que escrita en coordenadas é

$$E_L = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L, \quad (1.15)$$

como consecuencia da expresión local de Δ (1.9).

Aplicación de Legendre

Definición 1.7. Se $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función lagrangiana, a aplicación

$$\begin{aligned} FL : TQ &\longrightarrow T^*Q \\ v_q &\longmapsto FL(v_q) : T_qQ \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

definida por

$$(FL(v_q))(w_q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 L(v_q + tw_q)$$

onde $v_q, w_q \in TQ$, denomínase a *aplicación de Legendre* de L .

En coordenadas canónicas tense

$$\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & TQ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (q^i, v^i + tw^i) & \longmapsto & L(q^i, v^i + tw^i), \end{array}$$

logo

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 L(v_q + tw_q) = \left. \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{v_q} w^i,$$

e polo tanto, a expresión local de FL é

$$FL(v_q) = \left. \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{v_q} dq^i(q). \quad (1.16)$$

Observación 1.8. Se ω é a forma simpléctica canónica (1.6) do fibrado cotanxente T^*Q , pode definirse a 2-forma diferencial ω_L en TQ asociada a un lagrangiano L como

$$FL^* \omega = \omega_L.$$

Definición 1.9. Dise que unha función lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ é *regular* se a súa matriz hessiana con respecto ás velocidades

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

é non singular. En caso contrario, dise que o lagrangiano é *singular*.

Por último, tense

Proposición 1.10. *As seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ é un lagrangiano regular.
2. $FL : TQ \rightarrow T^*Q$ é un difeomorfismo local.
3. ω_L é unha forma simpléctica.

Demostración. A proba resulta inmediata ao considerar a matriz xacobiana de

$$FL(q^i, v^i) = \left(q^i, \frac{\partial L}{\partial v^i} \right),$$

que é

$$\begin{pmatrix} I_n & (*) \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right) \end{pmatrix},$$

e da expresión local de ω_L (1.14). □

Formalismo lagrangiano Consideremos $L \in C^\infty(TQ)$ un lagrangiano regular, polo tanto, da Proposición 1.10 tense que ω_L é unha forma simpléctica, e así a seguinte aplicación

$$\begin{aligned} \bar{b}_L : \mathfrak{X}(TQ) &\longrightarrow \Omega^1(TQ) \\ X &\longmapsto \bar{b}_L(X) = \omega_L(X, -) = i_X \omega_L \end{aligned}$$

é un isomorfismo de $C^\infty(TQ)$ -módulos.

Destá forma, como $dE_L \in \Omega^1(TQ)$, existe un único SODE $X_L \in \mathfrak{X}(TQ)$ que é solución da ecuación

$$i_{X_L} \omega_L = \omega_L(X_L, -) = dE_L \tag{1.17}$$

e cuxas curvas integrais son levantamentos tanxentes de curvas en Q . É dicir, son curvas $\dot{\alpha}(t) \equiv \left(q^i(t), \frac{dq^i}{dt} \Big|_t \right)$ en TQ tal que $\alpha(t) \equiv (q^i(t))$ é curva en Q solución das *ecuacións de Euler-Lagrange*

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} \circ \dot{\alpha} \right) \frac{dq^j}{dt} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \circ \dot{\alpha} \right) \frac{d^2 q^j}{dt^2} - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha} \right) = 0.$$

De forma equivalente, pódense escribir estas ecuacións na súa expresión habitual

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha} \right) = 0, \tag{1.18}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Neste caso no que L é regular, a tripla (TQ, ω_L, E_L) é un caso particular de sistema hamiltoniano simpléctico que se denomina *sistema lagrangiano simpléctico*.

1.4. Operador de Euler-Lagrange

Nesta sección introduciremos o operador de Euler-Lagrange, outra ferramenta de gran interese na descrición xeométrica da mecánica lagrangiana (ver [6],[7],[12],[26],[27] para definición e aplicacións).

1.4.1. Fibrados tanxentes de primeira e segunda orde

O fibrado tanxente de primeira orde, TQ , dunha variedade diferenciable Q é difeomorfo á $J_0^1(\mathbb{R}, Q)$, isto é, a variedade de 1-jets $j_0^1\alpha$ en $0 \in \mathbb{R}$ de curvas $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Q$.

O difeomorfismo que identifica estas dúas variedades é

$$\begin{aligned} J_0^1(\mathbb{R}, Q) &\equiv TQ \\ j_0^1\alpha &\equiv v_q, \end{aligned}$$

onde

$$q = \alpha(0) \quad \text{e} \quad v_q = \alpha_*(0) \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = \frac{d(q^i \circ \alpha)}{dt} \Big|_0.$$

O fibrado tanxente de segunda orde, T^2Q , defínese como a variedade $J_0^2(\mathbb{R}, Q)$, isto é, a variedade de 2-jets $j_0^2\alpha$ en $0 \in \mathbb{R}$ de curvas $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Q$.

As súas coordenadas son

$$q^i(j_0^2\alpha) = q^i(\alpha(0)), \quad q_{(1)}^i(j_0^2\alpha) = \frac{d(q^i \circ \alpha)}{dt} \Big|_0, \quad q_{(2)}^i(j_0^2\alpha) = \frac{d^2(q^i \circ \alpha)}{dt^2} \Big|_0.$$

As proxeccións canónicas están definidas como segue

$$\begin{aligned} \tau_Q^2 : T^2Q &\longrightarrow Q \\ j_0^2\alpha &\longmapsto \tau_Q^2(j_0^2\alpha) = \alpha(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_Q^{2,1} : T^2Q &\longrightarrow TQ \\ j_0^2\alpha &\longmapsto \tau_Q^{2,1}(j_0^2\alpha) = j_0^1\alpha, \end{aligned}$$

que escritas en coordenadas son

$$\tau_Q^2(q^i, q_{(1)}^i, q_{(2)}^i) = (q^i),$$

$$\tau_Q^{2,1}(q^i, q_{(1)}^i, q_{(2)}^i) = (q^i, q_{(1)}^i),$$

onde neste caso a notación para $v^i = q_{(1)}^i$.

1.4.2. Campos de vectores e 1-formas ao longo de aplicacións

O concepto de seccións ao longo de aplicacións é unha noción fundamental na descrición xeométrica da Mecánica Clásica, véxase [28],[29],[30].

Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ e unha aplicación diferenciable $f : N \rightarrow M$, unha *sección de π a lo longo de f* é unha aplicación diferenciable $\sigma : N \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = f$, é dicir, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \sigma \nearrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

é conmutativo.

Se $\pi : E \rightarrow M$ é o fibrado tanxente de M , $\tau_M : TM \rightarrow M$ é a proxección canónica, entón as seccións X ao longo de $f : N \rightarrow M$ denomínanse *campos de vectores ao longo de f* .

$$\begin{array}{ccc} & TM & \\ X \nearrow & & \downarrow \tau_M \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Se $\pi : E \rightarrow M$ é o fibrado cotanxente de M , $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ é a proxección canónica, entón as seccións θ ao longo de $f : N \rightarrow M$ denomínanse *1-formas ao longo de f* .

$$\begin{array}{ccc} & T^*M & \\ \theta \nearrow & & \downarrow \pi_M \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Exemplo 1.11. Un campo de vectores W ao longo dunha curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ nunha variedade diferenciable Q

$$\begin{array}{ccc} & TQ & \\ W \nearrow & & \downarrow \tau_Q \\ I & \xrightarrow{\gamma} & Q \end{array}$$

ten a seguinte expresión local

$$W(t) = w^i(t) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}Q,$$

onde as $w^i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funcións diferenciables.

Exemplo 1.12. Unha 1-forma \mathcal{E} ao longo da proxección canónica $\tau_Q^2 : T^2Q \rightarrow Q$

$$\begin{array}{ccc} & T^*Q & \\ \mathcal{E} \nearrow & & \downarrow \pi_Q \\ T^2Q & \xrightarrow{\tau_Q^2} & Q \end{array}$$

ten a seguinte expresión local

$$\mathcal{E}(j_0^2\gamma) = \mathcal{E}_i(j_0^2\gamma) dq^i(\gamma(0)) \in T_{\gamma(0)}^*Q,$$

onde as $\mathcal{E}_i : U \subset T^2Q \rightarrow \mathbb{R}$ son funcións diferenciables nun entorno aberto de T^2Q .

1.4.3. Operador de Euler-Lagrange

Introduciremos primeiro unha serie de conceptos que intervirán na propia definición do operador de Euler-Lagrange dunha función lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(TQ)$.

Derivada fibrada Dada unha función diferenciable arbitraria $F \in C^\infty(TQ)$, considere-mos un punto $q \in Q$ e a restrición de F á fibra T_qQ

$$F|_{T_qQ} : T_qQ \longrightarrow \mathbb{R},$$

cuxa diferencial en cada punto $v_q \in T_qQ$ é

$$d\left(F|_{T_qQ}\right)(v_q) : T_{v_q}(T_qQ) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Mediante a seguinte identificación natural entre espazos vectoriais

$$\begin{aligned} T_{v_q}(T_qQ) &\cong T_qQ \\ a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q} &\equiv a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q \end{aligned}$$

tense que

$$d\left(F|_{T_qQ}\right)(v_q) \in T_q^*Q.$$

Polo tanto, defínese a *derivada fibrada ou vertical*, que denotaremos por d^V , da función F no punto v_q como

$$d^V F(v_q) = d\left(F|_{T_qQ}\right)(v_q) \in T_q^*Q.$$

En coordenadas, sexa

$$d^V F(v_q) = a^i dq^i(q)$$

a expresión local desta 1-forma en Q , logo

$$a^i = d^V F(v_q) \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q \right) = d\left(F|_{T_qQ}\right)(v_q) \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q} \right) = \frac{\partial F}{\partial v^i} \Big|_{v_q},$$

e polo tanto, localmente tense que

$$d^V F(v_q) = \frac{\partial F}{\partial v^i} \Big|_{v_q} dq^i(q). \quad (1.19)$$

Observación 1.13. É importante sinalar a diferenza entre esta derivada fibrada d^V e a diferenciación vertical d_J de funcións $F \in C^\infty(TQ)$, xa que ambas teñen as mesmas compoñentes nas súas expresións locais, (1.19) e (1.13) respectivamente, pero $d^V F$ é unha 1-forma na variedade Q e $d_J F$ é unha 1-forma no seu fibrado tanxente TQ . Esta distinción usarémola ao longo de todo o traballo.

Observación 1.14. Nótese tamén que para unha función lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(TQ)$, a súa derivada fibrada $d^V \mathcal{L}$ é a propia definición da aplicación de Legendre da función lagrangiana \mathcal{L} dada na Definición 1.7, con expresión local (1.16).

Consideremos agora unha curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ con coordenadas $\gamma(t) \equiv (\gamma^i(t))$. A curva levantamento tanxente é a curva $\dot{\gamma}(t) \equiv (\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t))$ en TQ . Polo tanto, dada unha función lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(TQ)$, tense

$$d^V \mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right|_{\dot{\gamma}(t)} dq^i(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}^* Q. \quad (1.20)$$

Sexa W un campo de vectores arbitrario ao longo desta curva γ ,

$$\begin{array}{ccc} & & TQ \\ & \nearrow W & \downarrow \tau_Q \\ I & \xrightarrow{\gamma} & Q \end{array}$$

como

$$W(t) = w^i(t) \left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_{\gamma(t)} \equiv (\gamma^i(t), w^i(t)) \in T_{\gamma(t)} Q,$$

da ecuación (1.20) obtense que

$$d^V \mathcal{L}(\dot{\gamma}(t))(W(t)) = w^i(t) \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right|_{\dot{\gamma}(t)}. \quad (1.21)$$

Involución canónica Por outro lado, denotemos por s ao isomorfismo *involución canónica* dado por

$$\begin{aligned} s : T(TQ) &\longrightarrow T(TQ) \\ (q, v, u, a) &\longmapsto s(q, v, u, a) = (q, u, v, a) \end{aligned}$$

é dicir,

$$s \left(u \left. \frac{\partial}{\partial q} \right|_{(q,v)} + a \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_{(q,v)} \right) = v \left. \frac{\partial}{\partial q} \right|_{(q,u)} + a \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(q,u)}.$$

Consideremos o campo de vectores \dot{W} definido como

$$\dot{W}(t) = W_*(t) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \in T_{W(t)}(TQ),$$

que é un campo de vectores ao longo de W

$$\begin{array}{ccc} & & T(TQ) \\ & \nearrow \dot{W} & \downarrow \tau_{TQ} \\ I & \xrightarrow{W} & TQ \end{array}$$

dado localmente por

$$\dot{W}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{W(t)} + \dot{w}^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{W(t)} \equiv \left(\gamma^i(t), w^i(t), \dot{\gamma}^i(t), \dot{w}^i(t) \right) \in T_{W(t)}(TQ).$$

Polo tanto,

$$s(\dot{W}(t)) = w^i(t) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} + \dot{w}^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} \in T_{\dot{\gamma}(t)}(TQ).$$

Agora, como

$$d\mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} dq^i(\dot{\gamma}(t)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} dv^i(\dot{\gamma}(t)) \in T_{\dot{\gamma}(t)}^*(TQ),$$

tense que

$$d\mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) \left(s(\dot{W}(t)) \right) = w^i(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} + \dot{w}^i(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)}. \quad (1.22)$$

Finalmente, denotemos por

$$D \equiv \frac{d}{dt}$$

ao operador derivada con respecto ao tempo.

Polo tanto, xa estamos en condicións de dar a seguinte definición:

Operador de Euler-Lagrange

Definición 1.15. O *operador de Euler-Lagrange* asociado ao lagrangiano \mathcal{L} defínese como a seguinte 1-forma $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ao longo da proxección $\tau_Q^2 : T^2Q \rightarrow Q$

$$\begin{array}{ccc} & & T^*Q \\ & \nearrow \mathcal{E}_{\mathcal{L}} & \downarrow \pi_Q \\ T^2Q & \xrightarrow{\tau_Q^2} & Q \end{array}$$

dada por

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \circ j_t^2 \gamma, W \rangle := \langle d\mathcal{L} \circ \dot{\gamma}, s \circ \dot{W} \rangle - D \langle d^V \mathcal{L} \circ \dot{\gamma}, W \rangle,$$

para toda curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ e todo campo de vectores W ao longo de γ .

Observación 1.16. Nótese que o elemento $j_t^2\gamma$ de T^2Q está formado por todas as curvas en Q coa seguinte relación de equivalencia:

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \iff \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\gamma}(t) = \ddot{\tilde{\gamma}}(t),$$

polo que $j_t^2\gamma$ podería identificarse cun elemento $j_0^2\alpha \in J_0^2(\mathbb{R}, Q)$ considerando a curva

$$\alpha(s) = \gamma(t + s).$$

Agora, escribindo en coordenadas e utilizando as expresións (1.21) e (1.22) tense que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(j_t^2\gamma(t))(W(t)) &= w^i(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} + \dot{w}^i(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} - \frac{d}{dt} \left(w^i(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} \right) \right) w^i(t), \end{aligned}$$

e como isto se cumpre para calquera campo de vectores W en TQ ao longo de γ , pódese escribir

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(j_t^2\gamma(t)) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\gamma}(t)} \right) \right) dq^i(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}^*Q.$$

A forma máis habitual de escribir a expresión local de $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ é a seguinte

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right) \right) dq^i. \quad (1.23)$$

Polo tanto, dicir que unha curva γ satisfai as ecuacións habituais de Euler-Lagrange (1.18), para unha función lagrangiana \mathcal{L} , é equivalente a expresar que $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \circ j_t^2\gamma = 0$.

Vexamos agora un resultado importante que relaciona este operador $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ coas solucións da ecuación simpléctica (1.17).

Proposición 1.17. *Un SODE $X \in \mathfrak{X}(TQ)$ é solución da ecuación*

$$i_X\omega_{\mathcal{L}} - dE_{\mathcal{L}} = 0$$

se e só se as súas curvas integrais γ son solucións da ecuación

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \circ j_t^2\gamma = 0.$$

Demostración. En coordenadas, sexa

$$X = v^j \frac{\partial}{\partial q^j} + B^j \frac{\partial}{\partial v^j}$$

a expresión local do SODE X ,

$$\omega_{\mathcal{L}} = dq^i \wedge d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j$$

a forma lagrangiana asociada a \mathcal{L} , e

$$E_{\mathcal{L}} = v^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} - \mathcal{L}$$

a función enerxía lagrangiana.

Así,

$$i_X \omega_{\mathcal{L}} - dE_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i - v^j \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^j \partial v^i} dq^i - B^j \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i} dq^i.$$

Agora, se $\gamma(t) \equiv (q^i(t), v^i(t))$ é unha curva integral de X , tense que

$$B^j(\gamma(t)) = \frac{dv^j}{dt} \Big|_t = \frac{d^2 q^j}{dt^2} \Big|_t,$$

e polo tanto, as compoñentes da 1-forma $i_X \omega_{\mathcal{L}} - dE_{\mathcal{L}}$ son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right),$$

obtendo a mesma expresión que para as compoñentes de $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ en (1.23). \square

Observación 1.18. Sexan Q_1 e Q_2 dúas variedades diferenciáveis e consideremos a variedade produto $M = Q_1 \times Q_2$. Para cada punto $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$, tense o seguinte isomorfismo

$$T_{(q_1, q_2)}(Q_1 \times Q_2) \simeq T_{q_1} Q_1 \oplus T_{q_2} Q_2$$

dado por

$$v \longmapsto (d\pi_1(q_1, q_2)v, d\pi_2(q_1, q_2)v),$$

onde $v \in T_{(q_1, q_2)}(Q_1 \times Q_2)$ e

$$\pi_1 : Q_1 \times Q_2 \rightarrow Q_1, \quad \pi_2 : Q_1 \times Q_2 \rightarrow Q_2$$

son as proxeccións.

Polo tanto, para unha función arbitraria $F \in C^\infty(T(Q_1 \times Q_2))$, este produto $Q_1 \times Q_2$ proporciona unha descomposición dos operadores de Euler-Lagrange \mathcal{E}_F e da derivada fibrada d^V da forma

$$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_F^{Q_1} + \mathcal{E}_F^{Q_2},$$

onde $\mathcal{E}_F^{Q_1}$ e $\mathcal{E}_F^{Q_2}$ denotan as restricións de \mathcal{E}_F a $T^2 Q_1$ e $T^2 Q_2$ respectivamente; e

$$d^V F = d_{Q_1}^V F + d_{Q_2}^V F,$$

onde $d_{Q_1}^V F$ e $d_{Q_2}^V F$ denotan as restricións de $d^V F$ a TQ_1 e TQ_2 respectivamente.

No caso particular no que $M = Q \times \mathbb{R}$ con coordenadas (q^i, s) , tense

$$\mathcal{E}_F = \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial v^i} \right) \right) dq^i + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{s}} \right) \right) ds = \mathcal{E}_F^Q + \mathcal{E}_F^{\mathbb{R}}, \quad (1.24)$$

$$d^V F = \frac{\partial F}{\partial v^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{s}} ds = d_Q^V F + d_{\mathbb{R}}^V F. \quad (1.25)$$

1.5. Mecánica lagrangiana non holonómica

A mecánica non holonómica describe sistemas dinámicos suxeitos a ligaduras que dependen das posicións e das velocidades.

Xeometricamente, consiste en tomar unha subvariedade $C \hookrightarrow TQ$ de codimensión h , con $h < n = \dim Q$, e tal que a súa proxección $\tau_Q(C) = Q$. Localmente, C defínese como a imaxe recíproca do cero por un conxunto de funcións $\phi^\alpha \in C^\infty(TQ)$, $\alpha = 1, \dots, h$, as denominadas *funcións de ligadura*, é dicir, $C = (\phi^\alpha)^{-1}(0)$, e tal que as súas diferenciais $d\phi^\alpha$ son linealmente independentes en cada punto de C . A proxección $C \rightarrow Q$ suponse unha submersión, é dicir, estas ligaduras ϕ^α tómanse de forma que as súas derivadas fibradas $d^V\phi^\alpha$ sexan linealmente independentes en cada punto de C , que en coordenadas locais, isto indica que a matriz $\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial v^i}\right)$ teña rango máximo.

Un *camiño admisible* é unha curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ tal que $\dot{\gamma}$ toma valores en C . Dada unha función lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(TQ)$, a tripla (TQ, \mathcal{L}, C) denomínase *sistema lagrangiano non holonómico*.

O problema variacional non holonómico para este sistema consiste en atopar camiños admisibles γ que sexan solución da ecuación

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} \circ j_t^2 \gamma = \lambda_\alpha d^V \phi^\alpha \circ \dot{\gamma}, \quad (1.26)$$

para algunhas funcións $\lambda_\alpha \in C^\infty(TQ)$. Este problema variacional pódese plantexar de forma equivalente buscando campos de vectores $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(TQ)$ satisfacendo as seguintes condicións:

1. $X_{\mathcal{L}}$ é un SODE.
2. $X_{\mathcal{L}}$ é tanxente a C .
3. $X_{\mathcal{L}}$ é solución da ecuación

$$i_{X_{\mathcal{L}}}\omega_{\mathcal{L}} - dE_{\mathcal{L}} = \lambda_\alpha d_J \phi^\alpha. \quad (1.27)$$

Se $X_{\mathcal{L}}$ é un SODE solución desta ecuación (1.27), as súas curvas integrais γ son camiños admisibles, é dicir, son solucións de (1.26), que escrito en coordenadas tense

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \circ \dot{\gamma} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \circ \dot{\gamma} \right) = \lambda_\alpha \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i} \circ \dot{\gamma} \right).$$

Estas son as ecuacións de Euler-Lagrange da mecánica non holonómica.

1.6. Sistemas cosimplécticos

Nótese que todos os sistemas considerados ata agora eran sistemas autónomos, é dicir, independentes do tempo. Para finalizar o capítulo, veremos que existen sistemas mecánicos

cuxo hamiltoniano depende explicitamente do tempo, $H(q^i, p_i, t)$, e polo tanto, a ecuación simpléctica (1.1) que nos proporcionaba a dinámica nos sistemas anteriores, neste caso non nos resulta apropiada. Para isto faise uso da denominada xeometría cosimpléctica (véxase, por exemplo [22]), que nos facilita un escenario natural para a descrición xeométrica dos sistemas mecánicos non autónomos. Veremos primeiro o formalismo hamiltoniano para unha variedade cosimpléctica calquera e despois o formalismo lagrangiano para a variedade extensión do fibrado tanxente.

Unha *estrutura cosimpléctica* nunha variedade diferenciabile M de dimensión impar é un par (Ω, η) onde Ω é unha 2-forma pechada, η é unha 1-forma pechada e $\eta \wedge \Omega^n \neq 0$. Desta forma, M ten dimensión $2n + 1$ e á tripla (M, Ω, η) se lle denomina *variedade cosimpléctica*.

O teorema de Darboux establece que nunha variedade cosimpléctica existen coordenadas locais (q^i, p_i, z) tales que

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i, \quad \eta = dz, \quad (1.28)$$

e un único campo de vectores \mathcal{R} , chamado *campo de vectores de Reeb*, caracterizado mediante as identidades

$$i_{\mathcal{R}}\Omega = 0, \quad i_{\mathcal{R}}\eta = 1, \quad (1.29)$$

e cuxa expresión local é

$$\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.30)$$

1.6.1. Formalismo hamiltoniano

Consideremos o seguinte isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos dado pola estrutura cosimpléctica (Ω, η)

$$\begin{aligned} \tilde{\flat} : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto \tilde{\flat}(X) = i_X\Omega + \eta(X)\eta \end{aligned} \quad (1.31)$$

e sexa $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ unha función hamiltoniana, $H = H(q^i, p_i, z)$.

Defínese o gradiente da función H mediante

$$\tilde{\flat}(\text{grad } H) = dH,$$

e así, do isomorfismo (1.31), das expresións locais (1.28) e da diferencial de H tense a seguinte expresión local

$$\text{grad } H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.32)$$

A raíz deste campo de vectores defínense outros dous:

- O campo de vectores hamiltoniano

$$X_H = \text{grad } H - \mathcal{R}(H)\mathcal{R},$$

· O campo de vectores de evolución

$$\mathcal{E}_H = X_H + \mathcal{R}.$$

Agora, de (1.32) e (1.30) obtemos que a expresión local do campo de vectores de evolución é

$$\mathcal{E}_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Polo tanto, se $\gamma(t) \equiv (q^i(t), p_i(t), z(t))$ é unha curva integral de \mathcal{E}_H , as ecuacións do movemento para este campo de vectores son

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \gamma \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \circ \gamma \\ \frac{dz}{dt} &= 1 \end{aligned} \tag{1.33}$$

que son as ecuacións de Hamilton (1.4) do formalismo hamiltoniano simpléctico xunto coa ecuación trivial $\frac{dz}{dt} = 1$, que indica que $z = t + \text{cte}$, polo que se poden identificar estas dúas coordenadas z e t , no sentido da derivación con respecto a unha ou outra.

A evolución temporal de calquera función $F \in C^\infty(M)$ vén dada por

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{(q^i, p_i)} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

e como consecuencia tense que para sistemas hamiltonianos dependentes do tempo a enerxía H do sistema non se conserva, xa que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Exemplo 1.19. Resorte e parede móbil.

Consideremos unha masa m unida a unha parede por un resorte horizontal con constante de elasticidade k . Supoñamos que a parede se move cara adiante e atrás con posición $A \sin(\omega t)$.

O movemento pode describirse mediante o seguinte hamiltoniano dependente do tempo

$$H = \frac{p^2}{2m} - p(A\omega \cos(\omega t)) + \frac{1}{2}kq^2$$

e así, as ecuacións de Hamilton escríbense

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - A\omega \cos(\omega t), \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \end{aligned}$$

Combinando estas dúas ecuacións obtense a ecuación do oscilador armónico con forza externa

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{k}{m}q = A\omega^2 \text{sen}(\omega t),$$

e ademais, vese que o hamiltoniano non é unha cantidade conservada, xa que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0.$$

1.6.2. Formalismo lagrangiano

Co propósito de realizar unha descrición lagrangiana cosimpléctica similar á descrita para as variedades simplécticas, consideremos a variedade diferenciable $M = TQ \times \mathbb{R}$.

Sexa $L : M \rightarrow \mathbb{R}$ unha función lagrangiana, $L = L(q^i, v^i, z)$. Consideremos a estrutura (Ω_L, dz) en M , onde

$$\Omega_L = -d\lambda_L;$$

e $\lambda_L \in \Omega^1(TQ \times \mathbb{R})$ é a 1-forma definida como

$$\lambda_L = d_J L = dL \circ J,$$

con expresión local

$$\lambda_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i,$$

onde J é a extensión a M do endomorfismo tanxente (1.12) en TQ . Neste caso, a forma Ω_L ten a mesma expresión en coordenadas que a forma ω_L (1.14).

Supoñamos que L é regular, é dicir, que a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

é non singular. Logo, tense que

$$dz \wedge \Omega_L^n \neq 0,$$

e polo tanto (Ω_L, dz) é unha estrutura cosimpléctica.

O campo de vectores de Reeb, caracterizado por (1.29), ten a seguinte expresión local

$$\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad (1.34)$$

e a función enerxía lagrangiana E_L defínese da mesma forma que no caso simpléctico

$$E_L = \Delta(L) - L \in C^\infty(M).$$

Esta función tamén ten a mesma expresión local que a función enerxía (1.15) en TQ , onde Δ é a extensión a M do campo de vectores de Liouville (1.9) en TQ , que denotaremos da mesma forma.

Consideremos o isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned}\tilde{b}_L : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto \tilde{b}_L(X) = i_X \Omega_L + dz(X) dz\end{aligned}\tag{1.35}$$

dado pola estrutura cosimpléctica (Ω_L, dz) .

De novo, defínense o campo de vectores gradiente

$$\tilde{b}_L(\text{grad}E_L) = dE_L,$$

o campo de vectores hamiltoniano

$$X_{E_L} = \text{grad}E_L - \mathcal{R}(E_L) \mathcal{R}$$

e o campo de vectores de evolución

$$\mathcal{E}_L = X_{E_L} + \mathcal{R}.$$

Utilizando as expresións locais (1.14), (1.15), (1.34) e o isomorfismo (1.35) obtense a expresión local do campo de vectores de evolución \mathcal{E}_L

$$\mathcal{E}_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{\partial}{\partial z},\tag{1.36}$$

onde as funcións B^i satisfán o seguinte sistema de ecuacións

$$B^i \frac{\partial}{\partial v^i} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0.$$

Observación 1.20. Pode verse na Sección 7.7 do libro [20] que os SODES na variedade cosimpléctica $TQ \times \mathbb{R}$ teñen esta expresión local (1.36), pois por ser $z = t + cte$, tense que $\frac{dz}{dt} = 1$. Desta forma, o campo de vectores de evolución $\mathcal{E}_L \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ é un SODE.

Agora, se $\gamma(t) \equiv (q^i(t), v^i(t), z(t))$ é unha curva integral de \mathcal{E}_L , entón esta é solución das ecuacións de Euler-Lagrange habituais (1.18)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \gamma \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \gamma \right) = 0,$$

para $i = 1, \dots, n$.

Capítulo 2

Formalismo hamiltoniano de contacto

Neste capítulo faremos unha introdución á xeometría de contacto, dando algunhas nocións e resultados que nos permitan estudar as ecuacións da mecánica no caso de sistemas dinámicos disipativos na súa descrición hamiltoniana.

2.1. Variedades de contacto

Nesta sección presentamos o concepto de variedade de contacto. Veremos como neste tipo de variedades a principal estrutura xeométrica que as caracteriza (a forma de contacto) sempre se vai poder escribir localmente como unha forma canónica en particular. Tamén introduciremos unha nova coordenada s , que no estudo de sistemas dinámicos vai ser unha "coordenada disipativa", e veremos a expresión do denominado campo de vectores de Reeb.

Definición 2.1. Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión $2n + 1$. Unha *forma de contacto* en M é unha 1-forma diferencial $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que $\eta \wedge d\eta^n$ é unha forma de volume, é dicir, $\eta \wedge d\eta^n \neq 0$. Neste caso, dise que (M, η) é unha *variedade de contacto*.

A forma diferencial η permítenos construír a seguinte aplicación

$$\begin{aligned} \flat : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto \flat(X) = i_X d\eta + \eta(X)\eta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde se ten que \flat é un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos se e só se η é unha forma de contacto (véxase [2]).

Da mesma forma que para variedades simplécticas, hai un teorema de Darboux para variedades de contacto, que di o seguinte:

Teorema 2.2. (Darboux) Sexa (M, η) unha variedade de contacto. Para cada punto $p \in M$ existe unha carta $(U; q^i, p_i, s)$, con $i = 1, \dots, n$, tal que

$$\eta|_U = ds - p_i dq^i.$$

Estas son as denominadas coordenadas canónicas ou de Darboux da variedade de contacto (M, η) . Dise que son coordenadas adaptadas para a forma de contacto η .

Localmente, o isomorfismo \flat queda determinado polas identidades

$$\begin{aligned}\flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_p\right) &= p_i p_j dq^j + dp_j - p_i ds, \\ \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_p\right) &= -dq^i, \\ \flat\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_p\right) &= -p_i dq^i + ds,\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde $\left\{\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_p\right\}$ é unha base do espazo $T_p M$.

Definición 2.3. Dada (M, η) unha variedade de contacto, defínese o *campo de vectores de Reeb* como o único campo de vectores tal que $\mathcal{R} = \flat^{-1}(\eta)$.

Este campo queda caracterizado polas seguintes identidades

$$i_{\mathcal{R}} d\eta = 0, \quad i_{\mathcal{R}} \eta = 1,\tag{2.3}$$

e así, en coordenadas de Darboux, escríbese

$$\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial s}.\tag{2.4}$$

Vexamos agora un par de exemplos de variedades de contacto.

Exemplo 2.4. (Estrutura canónica de contacto).

A variedade fibrado cotanxente estendido $M = T^*Q \times \mathbb{R}$ ten unha estrutura canónica de contacto definida pola 1-forma

$$\eta = ds - \theta,$$

onde s é a coordenada cartesiana en \mathbb{R} e θ é o pullback da 1-forma canónica (1-forma de Liouville) en T^*Q con respecto á proxección $\pi_1 : M = T^*Q \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$.

Utilizando as coordenadas (q^i) en Q e as coordenadas canónicas inducidas (q^i, p_i) en T^*Q , tense que a expresión local da forma de contacto é

$$\eta = ds - p_i dq^i,$$

de onde se obtén que

$$d\eta = dq^i \wedge dp_i$$

e o campo de vectores de Reeb é

$$\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Exemplo 2.5. (Contactificación dunha variedade simpléctica).

Sexa (P, ω) unha variedade simpléctica tal que $\omega = -d\theta$, onde θ é unha 1-forma en P , e consideremos o produto $M = P \times \mathbb{R}$. Denotando por s á coordenada cartesiana en \mathbb{R} e representando por θ o pullback de θ ao produto, consideremos a 1-forma $\eta = ds - \theta$ en M . Así, (M, η) é unha variedade de contacto que se denomina a *contactificación* de P .

Nótese que a variedade canónica de contacto $(T^*Q \times \mathbb{R}, \eta)$ do exemplo anterior é a contactificación de T^*Q coa súa estrutura simpléctica canónica.

2.2. Sistemas hamiltonianos de contacto

Consideremos unha variedade de contacto (M, η) e o isomorfismo definido en (2.1).

Definición 2.6. Para cada función hamiltoniana $H \in C^\infty(M)$, defínese o *campo de vectores hamiltoniano de contacto* X_H asociado á función H mediante

$$\flat(X_H) = dH - (\mathcal{R}(H) + H) \eta \quad (2.5)$$

e á tripla (M, η, H) denomínaselle *sistema hamiltoniano de contacto*.

Se consideramos o sistema de coordenadas canónicas (q^i, p_i, s) en M , como $X_H \in \mathfrak{X}(M)$, este escríbese localmente da forma

$$X_H = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} + c \frac{\partial}{\partial s}, \quad (2.6)$$

onde as compoñentes a^i , b_i e c son funcións diferenciables definidas nun entorno aberto de M . Así, aplicándolle (2.1) a (2.6), e tendo en conta as identidades (2.2) tense

$$\flat(X_H) = (a^i p_i^2 - b_i - c p_i) dq^i + a^i dp_i - (a^i p_i - c) ds. \quad (2.7)$$

Por outro lado,

$$dH - (\mathcal{R}(H) + H) \eta = \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial s} + p_i H \right) dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - H ds, \quad (2.8)$$

e igualando agora estas ecuacións (2.7) e (2.8), obtense a expresión local do campo de vectores hamiltoniano

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} + \left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) \frac{\partial}{\partial s}. \quad (2.9)$$

Ecuacións de Hamilton de contacto Se consideramos agora

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) \equiv (q^i(t), p_i(t), s(t)) \end{aligned}$$

unha curva integral deste campo de vectores X_H , entón tense que γ é solución das *ecuacións de Hamilton de contacto*

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.10)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial s} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right). \quad (2.12)$$

Observación 2.7.

1. A ecuación (2.12) é a definición usual da *función principal de Hamilton* (ver [4],[21]). Esta introdúcese na teoría de Hamilton-Jacobi como unha solución completa $s(q^i, t)$ da ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q^i, \frac{\partial s}{\partial q^i}, t\right) = -\frac{\partial s}{\partial t},$$

a cal provén dun caso particular de transformación canónica dependente do tempo.

2. En mecánica, as ecuacións (2.10), (2.11) e (2.12) xeneralizan as ecuacións de movemento para as posicións, os momentos e a función principal de Hamilton da teoría hamiltoniana habitual. Ademais, teñen diversas aplicacións no estudo de sistemas dinámicos disipativos, no campo da termodinámica, neurobioloxía, cosmoloxía, etc.

2.2.1. Evolución temporal do hamiltoniano e a enerxía mecánica

Consideremos un sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) que evoluciona segundo as ecuacións de Hamilton de contacto (2.10), (2.11) e (2.12).

Dada calquera función diferenciable $F \in C^\infty(M)$, a súa evolución temporal vén dada por

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= X_H(F) = -H \frac{\partial F}{\partial s} + p_i \left(\frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \\ &= -H \frac{\partial F}{\partial s} + p_i \{F, H\}_{(s, p_i)} + \{F, H\}_{(q^i, p_i)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde utilizamos a expresión local (2.9) de X_H .

Observación 2.8. Nótese que $\{, \}_{(q^i, p_i)}$ é o corchete de Poisson estándar e o corchete $\{, \}_{(s, p_i)}$ é simplemente unha abreviación para as coordenadas (s, p_i) , sen chegar a dar unha definición intrínseca, pois non é posible definir un corchete de Poisson nunha variedade de contacto. En [16],[24] en cambio, pódese ver que as variedades de contacto son un exemplo de variedades de Jacobi, cunha estrutura proporcionada de forma natural polo corchete de Jacobi.

Polo tanto, de (2.13) obtense que a evolución temporal da función hamiltoniana de contacto ao longo do seu fluxo é

$$\frac{dH}{dt} = X_H(H) = -H \frac{\partial H}{\partial s} = -\mathcal{R}(H) H$$

e desta forma, H é constante ao longo das curvas integrais de X_H se e só se $H = 0$ ou H non depende de s .

Observación 2.9. No estudo de sistemas mecánicos, o feito de que a función H non dependa da coordenada s corresponde ao caso dun sistema conservativo, para o cal a enerxía (total) do sistema é a enerxía mecánica $H = H_{mec}(q^i, p_i)$, que é a suma das enerxías cinética e a potencial. Desta forma, sabemos que a enerxía mecánica se conserva.

Consideremos agora un caso de hamiltoniano máis xeral, para o cal

$$H = H_{mec}(q^i, p_i) + h(s),$$

onde $H_{mec}(q^i, p_i)$ é a enerxía mecánica do sistema e $h(s)$ simboliza a interacción co entorno.

Da expresión (2.13) tense que a evolución da enerxía mecánica ao longo do tempo é

$$\frac{dH_{mec}}{dt} = -p_i \frac{\partial H_{mec}}{\partial p_i} h'(s),$$

polo tanto, o sistema é non conservativo, xa que a enerxía mecánica non se conserva.

Exemplo 2.10. Consideremos o seguinte sistema hamiltoniano de contacto 1-dimensional con coordenadas (q, p, s) dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) + ks,$$

onde $V(q)$ denota o potencial mecánico e k é un parámetro constante.

As ecuacións do movemento (2.10), (2.11) e (2.12) para este caso particular son

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial V(q)}{\partial q} - kp \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{p^2}{2m} - V(q) - ks \end{aligned} \tag{2.14}$$

Das dúas primeiras ecuacións de (2.14) dedúcese a denominada *ecuación de Newton amortecida*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + k \frac{dq}{dt} + \frac{1}{m} \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0, \tag{2.15}$$

a cal describe todos os sistemas que teñan unha forza de fricción que dependa linealmente da velocidade [4].

Neste caso, como $H_{mec} = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, pode verse que a evolución da enerxía mecánica ao longo do tempo vén dada por

$$\frac{dH_{mec}}{dt} = -p_i \frac{\partial H_{mec}}{\partial p_i} h'(s) = -mk \left(\frac{dq}{dt} \right)^2,$$

que coincide cos resultados baseados na función de disipación de Rayleigh (ver [19]).

O seguinte resultado proporciona outra caracterización do campo de vectores hamiltoniano de contacto X_H , que nos vai ser de gran utilidade no estudo das simetrías para este tipo de sistemas. Pode verse dunha forma máis detallada en [8].

Proposición 2.11. *Sexa (M, η, H) un sistema hamiltoniano de contacto. As seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. X_H é un campo de vectores hamiltoniano (é dicir, é solución de (2.5)).
2. X_H é solución das ecuacións

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{X_H}\eta &= -(\mathcal{L}_{\mathcal{R}}H)\eta, \\ i_{X_H}\eta &= -H, \end{cases} \quad (2.16)$$

onde \mathcal{L} denota a derivada de Lie.

3. X_H é solución de

$$\begin{cases} i_{X_H}d\eta &= dH - \mathcal{R}(H)\eta, \\ i_{X_H}\eta &= -H. \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3. Simetrías, cantidades conservadas e disipadas

O papel das simetrías dentro do estudo dos sistemas dinámicos resulta de gran interese en xeometría. No caso simpléctico, as simetrías estaban asociadas con cantidades conservadas (véxase, por exemplo [20]), e polo tanto obtíñase a denominada conservación da enerxía. Nesta sección veremos resultados non conservativos, debido á natureza disipativa deste tipo de sistemas, e polo tanto, as simetrías dinámicas van a estar asociadas agora con cantidades que chamaremos disipadas.

2.3.1. Simetrías en sistemas hamiltonianos de contacto

Nun sistema dinámico existen diferentes conceptos de simetría, que dependen da estrutura dinámica que se preserve. Por exemplo, podemos considerar as transformacións que preservan as estruturas xeométricas do sistema ou aquelas que preservan as súas solucións.

Sexa (M, η, H) un sistema hamiltoniano de contacto con campo de vectores de Reeb \mathcal{R} e campo de vectores hamiltoniano X_H .

Definición 2.12. Unha *simetría dinámica* dun sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) é un difeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ tal que

$$\Phi_*X_H = X_H.$$

É dicir, leva curvas solucións das ecuacións de Hamilton (2.10),(2.11),(2.12) en curvas solucións.

Unha *simetría dinámica infinitesimal* dun sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) é un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que os difeomorfismos locais xenerados polo seu fluxo son simetrías dinámicas, isto é,

$$\mathcal{L}_Y X_H = [Y, X_H] = 0.$$

Outros tipos de simetrías son as que deixan as estruturas xeométricas invariantes.

Definición 2.13. Unha *simetría de contacto* dun sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) é un difeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ tal que

$$\Phi^* \eta = \eta, \quad \Phi^* H = H.$$

Unha *simetría de contacto infinitesimal* dun sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) é un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que os difeomorfismos locais xenerados polo seu fluxo son simetrías de contacto, isto é,

$$\mathcal{L}_Y \eta = 0, \quad \mathcal{L}_Y H = 0.$$

Ademais, tense o seguinte resultado:

Proposición 2.14. *Toda simetría de contacto (infinitesimal) preserva o campo de vectores de Reeb, isto é,*

$$\Phi^* \mathcal{R} = \mathcal{R} \tag{2.18}$$

(ou $[Y, \mathcal{R}] = 0$).

Demostración. Por ser Φ difeomorfismo, pola caracterización do campo de vectores de Reeb (2.3) e por cumprirse que $\Phi^* \eta = \eta$, tense

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi^* (i_{\mathcal{R}} \eta) = i_{\Phi^* \mathcal{R}} \Phi^* \eta = i_{\Phi^* \mathcal{R}} \eta, \\ 0 &= \Phi^* (i_{\mathcal{R}} d\eta) = i_{\Phi^* \mathcal{R}} \Phi^* d\eta = i_{\Phi^* \mathcal{R}} d\Phi^* \eta = i_{\Phi^* \mathcal{R}} d\eta. \end{aligned}$$

Agora, pola unicidade do campo de vectores de Reeb tense que $\Phi^* \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

A proba para o caso infinitesimal resulta inmediata a partir da definición. \square

Finalmente, como consecuencia do anterior, tense o seguinte resultado que relaciona as simetrías dinámicas coas simetrías de contacto.

Proposición 2.15. *Toda simetría de contacto (infinitesimal) é unha simetría dinámica (infinitesimal).*

Demostración. Sexa X_H o campo de vectores hamiltoniano de contacto caracterizado polas identidades (2.17) da Proposición 2.11. Logo, se Φ é unha simetría de contacto e usando (2.18), tense

$$\begin{aligned} i_{\Phi_* X_H} d\eta &= i_{\Phi_* X_H} d\Phi^* \eta = \Phi^* (i_{X_H} d\eta) = \Phi^* (dH - \mathcal{R}(H)\eta) = dH - \mathcal{R}(H)\eta, \\ i_{\Phi_* X_H} \eta &= i_{\Phi_* X_H} \Phi^* \eta = \Phi^* (i_{X_H} \eta) = \Phi^* (-H) = -H, \end{aligned}$$

e así, pola unicidade do campo de vectores hamiltoniano X_H tense que $\Phi_* X_H = X_H$.

A proba para o caso infinitesimal resulta inmediata a partir da definición. \square

2.3.2. Cantidades disipadas e conservadas en sistemas hamiltonianos de contacto

Uns conceptos asociados coas simetrías de sistemas hamiltonianos de contacto son os de cantidades disipadas e conservadas.

Definición 2.16. Unha *cantidade disipada* dun sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) é unha función $F \in C^\infty(M)$ tal que

$$\mathcal{L}_{X_H} F = -(\mathcal{L}_R H) F.$$

Nun sistema hamiltoniano de contacto pódense relacionar os conceptos de simetría e cantidade disipada a través do seguinte resultado:

Teorema 2.17. (*Teorema de disipación para sistemas hamiltonianos de contacto*).

Sexa X_H o campo de vectores hamiltoniano e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores. Se Y é unha simetría dinámica infinitesimal, entón a función

$$F = -i_Y \eta$$

é unha cantidade disipada.

Demostración. Como

$$\mathcal{L}_Y X_H = [Y, X_H] = 0,$$

tendo en conta a primeira identidade de (2.16) da Proposición 2.11 e utilizando a propiedade

$$i_{[X_H, Y]} \eta = \mathcal{L}_{X_H} (i_Y \eta) - i_Y \mathcal{L}_{X_H} \eta,$$

tense que

$$\mathcal{L}_{X_H} F = \mathcal{L}_{X_H} (-i_Y \eta) = -i_Y (\mathcal{L}_{X_H} \eta) - i_{\mathcal{L}_{X_H} Y} \eta = (\mathcal{L}_R H) i_Y \eta + i_{[Y, X_H]} \eta = -(\mathcal{L}_R H) F,$$

o que proba o resultado. \square

Observación 2.18. A última igualdade proba que $[Y, X_H] \in \ker \eta$ é unha condición necesaria e suficiente para que a función F sexa unha cantidade disipada.

Corolario 2.19. Se (M, η, H) é un sistema hamiltoniano de contacto, o campo de vectores X_H é trivialmente unha simetría dinámica infinitesimal ($[X_H, X_H] = 0$). Polo tanto, a función hamiltoniana

$$F = -i_{X_H} \eta = H$$

é unha cantidade disipada, xa que se verifica

$$\mathcal{L}_{X_H} H = -(\mathcal{L}_R H) H. \tag{2.19}$$

Esta relación (2.19) expresa a disipación da enerxía en sistemas hamiltonianos de contacto.

En coordenadas canónicas, escíbese

$$\mathcal{L}_{X_H} H = -\frac{\partial H}{\partial s} H.$$

Demostración. A proba resulta inmediata ao aplicar o Teorema 2.17 ao campo X_H e ao considerar a segunda identidade de (2.17). \square

Definición 2.20. Unha *cantidade conservada* dun sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H) é unha función $G \in C^\infty(M)$ tal que

$$\mathcal{L}_{X_H} G = 0.$$

Toda cantidade disipada varía na mesma medida $(-\mathcal{L}_R H)$, o cal indica que o cociente entre dúas cantidades disipadas debería ser unha cantidade conservada; e o produto entre unha cantidade conservada e unha disipada é unha cantidade disipada. Verémolo no seguinte resultado.

Proposición 2.21. 1. Se F_1 e F_2 son dúas cantidades disipadas e $F_2 \neq 0$, entón o cociente $\frac{F_1}{F_2}$ é unha cantidade conservada.

2. Se F é unha cantidade disipada e G é unha cantidade conservada, entón o produto FG é unha cantidade disipada.

Demostración. 1.

$$\mathcal{L}_{X_H} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \frac{F_2 \mathcal{L}_{X_H} F_1 - F_1 \mathcal{L}_{X_H} F_2}{F_2^2} = -\frac{F_1 \mathcal{L}_R H}{F_2} + \frac{F_1 F_2 \mathcal{L}_R H}{F_2^2} = 0.$$

2.

$$\mathcal{L}_{X_H}(FG) = G \mathcal{L}_{X_H} F + F \mathcal{L}_{X_H} G = -(\mathcal{L}_R H)FG.$$

\square

Observación 2.22. Tendo en conta o Teorema de disipación (2.17), se $H \neq 0$, é posible asignarlle unha cantidade conservada a unha simetría dinámica infinitesimal Y . Desta forma,

$$G = -\frac{1}{H} i_Y \eta$$

é unha cantidade conservada.

Por último, establecemos o seguinte resultado que nos vai permitir construír novas cantidades disipadas a partir dunha cantidade disipada dada, facendo uso das simetrías de contacto.

Proposición 2.23. Se $\Phi : M \rightarrow M$ é unha simetría de contacto e $F \in C^\infty(M)$ é unha cantidade disipada, entón $\Phi^* F$ tamén o é.

Demostración. Como

$$\Phi_* X_H = X_H, \quad \Phi^* H = H, \quad \Phi^* \mathcal{R} = \mathcal{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{X_H} F = -(\mathcal{L}_{\mathcal{R}} H) F,$$

tense

$$\mathcal{L}_{X_H} (\Phi^* F) = \Phi^* (\mathcal{L}_{\Phi_* X_H} F) = \Phi^* (\mathcal{L}_{X_H} F) = \Phi^* ((-\mathcal{L}_{\mathcal{R}} H) F) = -(\mathcal{L}_{\mathcal{R}} H) (\Phi^* F).$$

A proba para o caso infinitesimal resulta inmediata a partir da definición. \square

2.3.3. Simetrías en sistemas hamiltonianos canónicos de contacto

Consideremos a variedade canónica de contacto $(T^*Q \times \mathbb{R}, \eta)$ con forma de contacto expresada en coordenadas canónicas

$$\eta = ds - p_i dq^i,$$

coma no exemplo (2.4).

Antes de falar de simetrías en $(T^*Q \times \mathbb{R}, \eta)$ recordemos como son os levantamentos de difeomorfismos e campos de vectores de Q a $T^*Q \times \mathbb{R}$.

Se $\varphi : Q \rightarrow Q$ é un difeomorfismo, podemos construír o difeomorfismo

$$\Phi = (T^*\varphi, Id_{\mathbb{R}}) : T^*Q \times \mathbb{R} \longrightarrow T^*Q \times \mathbb{R},$$

onde $T^*\varphi : T^*Q \rightarrow T^*Q$ é o levantamento canónico de φ a T^*Q . Logo, dise que Φ é o *levantamento canónico* de φ a $T^*Q \times \mathbb{R}$, e calquera transformación Φ deste estilo denomínase unha *transformación natural* de $T^*Q \times \mathbb{R}$.

De forma análoga, consideremos un campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(Q)$. O seu *levantamento completo* a $T^*Q \times \mathbb{R}$ é o campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(T^*Q \times \mathbb{R})$ cuxo fluxo local é o levantamento canónico do fluxo local de Z a $T^*Q \times \mathbb{R}$; isto é, o campo de vectores $Y = Z_*^C$, onde Z_*^C denota o levantamento completo de Z a T^*Q , identificado de maneira natural como un campo de vectores en $T^*Q \times \mathbb{R}$. Calquera transformación infinitesimal Y deste estilo denomínase unha *transformación natural infinitesimal* de $T^*Q \times \mathbb{R}$.

As formas canónicas $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ e $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$ permanecen invariantes baixo a acción de levantamentos canónicos de difeomorfismos e campos de vectores de Q a T^*Q . É dicir, se $T^*\varphi$ é o levantamento canónico a T^*Q , entón

$$(T^*\varphi)^* \theta = \theta, \quad (T^*\varphi)^* \omega = \omega.$$

Vexamos agora un resultado relacionado coa forma de contacto $\eta \in \Omega^1(T^*Q \times \mathbb{R})$.

Denotemos por $\text{Diff}(Q)$ ao conxunto de difeomorfismos en Q e por $\text{Diff}(T^*Q \times \mathbb{R})$ ao conxunto de difeomorfismos en $T^*Q \times \mathbb{R}$.

Proposición 2.24. *Sexa $\Phi \in \text{Diff}(T^*Q \times \mathbb{R})$ (respectivamente $Y \in \mathfrak{X}(T^*Q \times \mathbb{R})$) un levantamento canónico a $T^*Q \times \mathbb{R}$ dun difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}(Q)$ (respectivamente de $Z \in \mathfrak{X}(Q)$), entón*

1. $\Phi^*\eta = \eta$ (respectivamente $\mathcal{L}_Y\eta = 0$).
2. Se ademais $\Phi^*H = H$ (respectivamente $\mathcal{L}_YH = 0$), entón é unha simetría de contacto (infinitesimal).

Demostración. Sexa

$$\eta = ds - p_i dq^i$$

e $\Phi = (T^*\varphi, Id_{\mathbb{R}})$ a transformación natural de $T^*Q \times \mathbb{R}$. Logo,

$$\Phi^*\eta = \Phi^*(ds - p_i dq^i) = \Phi^*(ds) - p_i \Phi^*(dq^i) = d(\Phi^*s) - p_i d(\Phi^*q^i) = ds - p_i dq^i = \eta.$$

E se ademais $\Phi^*H = H$, resulta evidente que Φ é unha simetría de contacto.

A proba para o caso infinitesimal é inmediata a partir da definición. \square

Observación 2.25. En particular, tense que se H non depende da coordenada q^i para un certo índice i , isto é, se

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0,$$

entón o campo de vectores

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \in \mathfrak{X}(T^*Q \times \mathbb{R})$$

é unha simetría de contacto infinitesimal, e a súa cantidade disipada asociada é o correspondente momento p_i . É dicir,

$$\mathcal{L}_{X_H} p_i = -(\mathcal{L}_R H) p_i.$$

Desta forma, se $H \neq 0$, tense que a función

$$G = \frac{p_i}{H}$$

é unha cantidade conservada.

Capítulo 3

Formalismo lagrangiano de contacto

Ao redor de 1930, Gustav Herglotz introduciu a primeira formulación lagrangiana dos sistemas de contacto dende unha perspectiva variacional. Neste capítulo estudamos os sistemas lagrangianos de contacto. Tras describir os SODES na variedade extensión do fibrado tanxente $TQ \times \mathbb{R}$, desenvolveremos o formalismo lagrangiano de contacto, presentando as principais estruturas xeométricas que intervirán no proceso de obtención das ecuacións de Herglotz. Por último, veremos como son as simetrías neste tipo de sistemas e daremos un resultado que relaciona estas simetrías con transformacións naturais preservando o lagrangiano.

3.1. SODES

Sexa Q unha variedade diferenciable de dimensión n . Consideremos a variedade produto $TQ \times \mathbb{R}$ con coordenadas (q^i, v^i, s) e coas súas proxeccións canónicas

$$\begin{array}{ccccc} & & TQ \times \mathbb{R} & & \\ & \swarrow \tau_1 & \downarrow \tau_0 & \searrow s & \\ TQ & & Q \times \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array} \quad (3.1)$$

onde, se (v_q, s) é un punto de $TQ \times \mathbb{R}$,

$$\tau_1(v_q, s) = v_q, \quad \tau_0(v_q, s) = (q, s), \quad s(v_q, s) = s.$$

O isomorfismo

$$T_{(v_q, s)}(TQ \times \mathbb{R}) \simeq T_{v_q}(TQ) \oplus T_s \mathbb{R}$$

permítenos estender as estruturas xeométricas definidas no fibrado tanxente TQ , como son o endomorfismo tanxente (1.12) e o campo de vectores de Liouville (1.9), a un endomorfismo e un campo de vectores en $TQ \times \mathbb{R}$, para os que utilizaremos a mesma notación e as mesmas expresións locais

$$J = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i, \quad (3.2)$$

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (3.3)$$

Veremos agora un tipo importante de campos de vectores sobre $TQ \times \mathbb{R}$, que son as *ecuacións diferenciais de segunda orde* ou *SODES*.

Definición 3.1. Sexa $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q \times \mathbb{R}$ unha curva en $Q \times \mathbb{R}$. A *prolongación canónica* de α a $TQ \times \mathbb{R}$ é a curva

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= (\dot{\alpha}_1, Id_{\mathbb{R}}) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow TQ \times \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tilde{\alpha}(t) \equiv \left(\alpha_1(t), \left. \frac{d\alpha_1}{dt} \right|_t, \alpha_2(t) \right), \end{aligned}$$

onde $\dot{\alpha}_1(t) \equiv \left(\alpha_1(t), \left. \frac{d\alpha_1}{dt} \right|_t \right)$ é a velocidade de α_1 .

Neste caso dise que $\tilde{\alpha}$ é unha curva *holonómica*.

Definición 3.2. Un campo de vectores $\Gamma \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ dise que é un *SODE* se as súas curvas integrais son holonómicas.

Vexamos a expresión local dun SODE Γ . Sexa

$$\Gamma = A^i(q^i, v^i, s) \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i(q^i, v^i, s) \frac{\partial}{\partial v^i} + g(q^i, v^i, s) \frac{\partial}{\partial s}$$

e consideremos

$$\tilde{\alpha}(t) \equiv \left(q^i(t), \left. \frac{dq^i}{dt} \right|_t, s(t) \right)$$

unha curva integral de Γ , con $\alpha(t) \equiv (q^i(t), s(t))$ unha curva en $Q \times \mathbb{R}$.

Por un lado,

$$\Gamma(\tilde{\alpha}(t)) = A^i(\tilde{\alpha}(t)) \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i(\tilde{\alpha}(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} + g(\tilde{\alpha}(t)) \frac{\partial}{\partial s},$$

e por ser $\tilde{\alpha}(t)$ curva integral tense

$$\Gamma(\tilde{\alpha}(t)) = \dot{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{dq^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d^2q^i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Logo,

$$A^i(\tilde{\alpha}(t)) = \frac{dq^i}{dt} = v^i(\tilde{\alpha}(t)).$$

Consideremos un punto $(v_q, s) \in TQ \times \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = (v_q, s)$. Entón

$$A^i(v_q, s) = A^i(\tilde{\alpha}(t)) = v^i(\tilde{\alpha}(t)) = v^i(v_q, s),$$

é dicir,

$$A^i = v^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ademais,

$$\begin{aligned}\Gamma^i(\tilde{\alpha}(t)) &= \Gamma^i\left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt}\Big|_t, s(t)\right) = \frac{d^2q^i}{dt^2}\Big|_t \\ g(\tilde{\alpha}(t)) &= g\left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt}\Big|_t, s(t)\right) = \frac{ds}{dt}\Big|_t\end{aligned}$$

Desta forma, a expresión local dun SODE $\Gamma \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ é

$$\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i} + g \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.4)$$

e a curva $\alpha(t) \equiv (q^i(t), s(t))$ queda determinada polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$\frac{d^2q^i}{dt^2}\Big|_t = \Gamma^i\left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt}\Big|_t, s(t)\right), \quad \frac{ds}{dt}\Big|_t = g\left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt}\Big|_t, s(t)\right).$$

Tense a seguinte caracterización dos SODES, que pode probarse de maneira sinxela tomando coordenadas.

Proposición 3.3. *Un campo de vectores $\Gamma \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ é un SODE se e só se $J \circ \Gamma = \Delta$, onde Δ é o campo de vectores de Liouville (3.3) e J é a estrutura tanxente (3.2).*

3.2. Cálculo variacional de Herglotz

Na formulación variacional da mecánica clásica, as ecuacións dinámicas obtéñense mediante o *Principio de Hamilton* que, como recordamos, dada unha función lagrangiana $L \in C^\infty(TQ)$, consiste en atopar curvas $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ que sexan puntos críticos do funcional

$$\gamma \mapsto \int_I L \circ \dot{\gamma},$$

e así obter as ecuacións de Euler-Lagrange (1.18).

No estudo de sistemas disipativos, Gustav Herglotz xeneralizou, en 1930, este principio introducindo unha nova variable s no lagrangiano, $\mathcal{L}(q^i, v^i, s)$, e cambiando o funcional integral por un diferencial. Esta aproximación deu lugar á posteriormente denominada formulación de contacto para este tipo de sistemas, e a estes lagrangianos en particular, se lles denomina *lagrangianos disipativos* ou *lagrangianos dependentes da acción*.

Aproximación variacional Sexa $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función lagrangiana. Consideremos o espazo de curvas en Q con extremos $q_0, q_1 \in Q$ fixados, e que denotaremos por

$$\Omega(q_0, q_1) = \{\gamma : [0, T] \longrightarrow Q / \gamma(0) = q_0, \gamma(T) = q_1\}.$$

Fixamos un valor inicial $z_0 \in \mathbb{R}$ e podemos calcular a acción $s_\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dunha curva γ resolvendo o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{ds_\gamma}{dt} &= \mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma}, s_\gamma), \\ s_\gamma(0) &= z_0. \end{cases}$$

Defínese o *funcional acción de Herglotz* como

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \Omega(q_0, q_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \mathcal{A}(\gamma) := s_\gamma(T) - s_\gamma(0) = \int_0^T \dot{s}_\gamma dt = \int_0^T \mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma}, s_\gamma) dt. \end{aligned}$$

Os puntos críticos desta acción \mathcal{A} son as curvas γ tal que $(\gamma, \dot{\gamma}, s_\gamma)$ é unha solución das ecuacións de Herglotz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right) = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}.$$

Na seguinte sección veremos outra forma de chegar a estas ecuacións dende un punto de vista máis xeométrico.

3.3. Formalismo lagrangiano de contacto

Unha vez introducidos o campo de vectores de Liouville Δ e a estrutura tanxente J en $TQ \times \mathbb{R}$, veremos unha serie de conceptos máis para completar a descrición xeométrica lagrangiana en sistemas mecánicos disipativos.

Consideremos $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función lagrangiana, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^i, v^i, s)$.

Definición 3.4. Defínense as *formas de Cartan* asociadas á función \mathcal{L} como

$$\theta_\mathcal{L} = d\mathcal{L} \circ J \in \Omega^1(TQ \times \mathbb{R}), \quad \omega_\mathcal{L} = -d\theta_\mathcal{L} \in \Omega^2(TQ \times \mathbb{R}), \quad (3.5)$$

onde localmente

$$\theta_\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} dq^i.$$

A *enerxía lagrangiana* do sistema é a función

$$E_\mathcal{L} = \Delta(\mathcal{L}) - \mathcal{L} \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R}),$$

cuxa expresión local é

$$E_\mathcal{L} = v^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} - \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

3.3.1. Aplicación de Legendre

A seguinte ferramenta que imos introducir é a aplicación de Legendre en $TQ \times \mathbb{R}$, definida de forma similar a como fixemos para o fibrado tanxente TQ no capítulo 1.

Definición 3.5. Dada $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función lagrangiana. Defínese a *aplicación de Legendre* de \mathcal{L} como a derivada fibrada de \mathcal{L} , considerada como unha función no fibrado vectorial $\tau_0 : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$.

Esta aplicación, que denotaremos por $F\mathcal{L}$, vén dada por

$$\begin{aligned} F\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} &\longrightarrow T^*Q \times \mathbb{R} \\ (v_q, s) &\longmapsto F\mathcal{L}(v_q, s) = (F(\mathcal{L}(-, s))(v_q), s), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}(-, s) : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ é o lagrangiano con s fixado e $F(\mathcal{L}(-, s))$ a aplicación de Legendre definida en 1.7.

Polo tanto, en coordenadas (q^i, v^i, s) , a expresión local de $F\mathcal{L}$ é

$$F\mathcal{L}(q^i, v^i, s) = \left(q^i, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}, s \right). \quad (3.7)$$

Observación 3.6. Nótese que con esta aplicación $F\mathcal{L}$, dase unha definición alternativa das formas de Cartan (3.5):

$$\theta_{\mathcal{L}} = F\mathcal{L}^*(\pi_1^*\theta), \quad \omega_{\mathcal{L}} = F\mathcal{L}^*(\pi_1^*\omega),$$

onde θ e ω son a 1-forma de Liouville e a forma simpléctica canónica en T^*Q , respectivamente, e $\pi_1 : T^*Q \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$ é a proxección no primeiro factor.

3.3.2. Forma lagrangiana de contacto

Defínese a *forma lagrangiana* $\eta_{\mathcal{L}}$ como a seguinte 1-forma en $TQ \times \mathbb{R}$

$$\eta_{\mathcal{L}} = ds - \theta_{\mathcal{L}} \in \Omega^1(TQ \times \mathbb{R}), \quad (3.8)$$

que cumpre $d\eta_{\mathcal{L}} = \omega_{\mathcal{L}}$.

En coordenadas (q^i, v^i, s) , tense

$$\eta_{\mathcal{L}} = ds - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} dq^i, \quad (3.9)$$

$$d\eta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial v^i} dq^i \wedge ds + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j. \quad (3.10)$$

Vexamos agora un resultado que nos proporciona unha condición necesaria para que $\eta_{\mathcal{L}}$ sexa unha forma de contacto.

Proposición 3.7. *Para un lagrangiano $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son equivalentes:*

1. $F\mathcal{L}$ é un difeomorfismo local.
2. $(TQ \times \mathbb{R}, \eta_{\mathcal{L}})$ é unha variedade de contacto.

Demostración. A demostración é consecuencia das expresións locais (3.9), (3.10) e (3.7), xa que resulta que a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

é non singular se e só se $\eta_{\mathcal{L}} \wedge (d\eta_{\mathcal{L}})^n \neq 0$. □

No caso no que $F\mathcal{L}$ sexa un difeomorfismo, á aplicación $F\mathcal{L}$ se lle denomina *transformación de Legendre*. Polo tanto,

Definición 3.8. Dise que un lagrangiano $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *regular* se se cumpren os enunciados equivalentes da Proposición 3.7. En caso contrario, dise que o lagrangiano é *singular*. En particular, un lagrangiano regular dise *hiperregular* se a súa aplicación de Legendre $F\mathcal{L}$ é un difeomorfismo global.

3.3.3. Ecuacións de Herglotz

Consideremos $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular, logo pola Proposición 3.7 tense que a forma $\eta_{\mathcal{L}}$ definida en (3.8) é unha forma de contacto, e así, $(TQ \times \mathbb{R}, \eta_{\mathcal{L}})$ é unha variedade de contacto.

Neste caso, a tripla $(TQ \times \mathbb{R}, \eta_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$ é un modelo particular de sistema hamiltoniano de contacto que se lle denomina *sistema lagrangiano de contacto*.

Consideremos entón o seguinte isomorfismo de $C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$ -módulos

$$\begin{aligned} b_{\mathcal{L}} : \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \Omega^1(TQ \times \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto b_{\mathcal{L}}(X) = i_X d\eta_{\mathcal{L}} + \eta_{\mathcal{L}}(X) \eta_{\mathcal{L}}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

dado pola forma de contacto $\eta_{\mathcal{L}}$.

O correspondente campo de vectores de Reeb, definido mediante

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = b_{\mathcal{L}}^{-1}(\eta_{\mathcal{L}})$$

é

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial s} - W^{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{3.12}$$

onde $W^{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial v^j} \right)^{-1}$ é a inversa da matriz hessiana $W_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial v^j} \right)$.

Observación 3.9. Nótese que para este tipo de sistemas de contacto, o campo de vectores de Reeb non ten unha expresión en coordenadas tan simple coma no caso hamiltoniano (2.4). Isto é debido a que as coordenadas canónicas (q^i, v^i, s) en $(TQ \times \mathbb{R})$ non son coordenadas adaptadas para a forma de contacto $\eta_{\mathcal{L}}$, xa que esta depende da función lagrangiana \mathcal{L} a considerar.

Observación 3.10. Con esta expresión local (3.12), resulta fácil comprobar que a enerxía lagrangiana $E_{\mathcal{L}}$ dada localmente por (3.6) satisfai a seguinte relación

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}, \quad (3.13)$$

que utilizaremos máis adiante para expresar a disipación da enerxía.

Sexa $\Gamma_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ o único campo de vectores definido mediante a ecuación

$$\flat_{\mathcal{L}}(\Gamma_{\mathcal{L}}) = dE_{\mathcal{L}} - (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(E_{\mathcal{L}}) + E_{\mathcal{L}}) \eta_{\mathcal{L}}. \quad (3.14)$$

Para calcular a súa expresión local, escribamos

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + C \frac{\partial}{\partial s},$$

onde as compoñentes A^i , B^i e C son funcións diferenciables definidas nun entorno aberto de $TQ \times \mathbb{R}$.

Agora, tendo en conta o isomorfismo (3.11) e facendo un cálculo directo na ecuación (3.14), tense que a expresión local de $\Gamma_{\mathcal{L}}$ é

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial s}$$

onde as compoñentes B^i satisfán o seguinte sistema de ecuacións

$$B^k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^k \partial v^i} + v^k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^k \partial v^i} + \mathcal{L} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial v^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}. \quad (3.15)$$

Observación 3.11. Nótese que o campo de vectores $\Gamma_{\mathcal{L}}$ é un SODE, pois a súa expresión local é (3.4).

Agora, se consideramos $\tilde{\alpha}(t) \equiv (q^i(t), v^i(t), s(t))$ unha curva integral holonómica de $\Gamma_{\mathcal{L}}$, onde $v^i(t) = \left. \frac{dq^i}{dt} \right|_t$, e substituímos os valores na expresión anterior (3.15), obtemos

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^k \partial v^i} + \frac{dq^k}{dt} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^k \partial v^i} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial v^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}, \quad (3.16)$$

que son as *ecuacións de Euler-Lagrange xeneralizadas* consideradas por G.Herglotz no seu principio variacional

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}, \quad (3.17)$$

$$\frac{ds}{dt} = \mathcal{L}. \quad (3.18)$$

Un SODE $\Gamma_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ solución desas ecuacións denomínase un *campo de vectores lagrangiano de contacto*.

Observación 3.12. Se o lagrangiano \mathcal{L} non é regular, o campo de vectores $\Gamma_{\mathcal{L}}$ pode non ser único ou existir soamente nunha subvariedade de $TQ \times \mathbb{R}$. En [11],[17] desenvólvese un algoritmo de ligaduras co propósito de resolver este tipo de problemas.

Observación 3.13. É interesante sinalar que, no formalismo lagrangiano de sistemas disipativos, a expresión (3.18) relaciona a variación temporal da "coordenada disipativa" s coa función lagrangiana \mathcal{L} e, así, podemos identificar esta coordenada coa acción lagrangiana dada polo principio variacional, $s = \int \mathcal{L}$.

3.4. Lagrangianos con disipación holonómica

Un tipo particular de lagrangianos de contacto son os que teñen unha descomposición da seguinte forma: por un lado, unha compoñente que é o pullback mediante a proxección canónica dunha función lagrangiana en TQ , máis outra que chamaremos función de disipación holonómica, que non depende das coordenadas v^i . Daremos unha breve descrición para ver como son as súas ecuacións de Herglotz.

Definición 3.14. Un *lagrangiano cun termo de disipación holonómica* en $TQ \times \mathbb{R}$ é unha función

$$\mathcal{L} = L + \phi \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R}),$$

onde $L = \tau_1^* L_0$ para unha función lagrangiana $L_0 \in C^\infty(TQ)$ e $\phi = \tau_0^* \phi_0$ para unha función $\phi_0 \in C^\infty(Q \times \mathbb{R})$, onde τ_0^* e τ_1^* denotan o pullback das proxeccións canónicas (3.1).

Tomando coordenadas (q^i, v^i, s) , un lagrangiano cun termo de disipación holonómica ten a forma

$$\mathcal{L}(q^i, v^i, s) = L(q^i, v^i) + \phi(q^i, s).$$

Isto implica que os momentos definidos mediante a aplicación de Legendre son independentes da coordenada s . Ademais, para este tipo de lagrangianos cúmprese a condición $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial s} = 0$.

Proposición 3.15. *Consideremos un lagrangiano cun termo de disipación holonómica $\mathcal{L} = L + \phi \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$. Entón a súa 1-forma de Cartan, a forma de contacto, a enerxía lagrangiana e o campo de vectores de Reeb como lagrangianos de contacto son*

$$\theta_{\mathcal{L}} = \theta_L, \quad \eta_{\mathcal{L}} = ds - \theta_{\mathcal{L}}, \quad E_{\mathcal{L}} = E_L - \phi, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial s},$$

onde θ_L é a 1-forma de Cartan de L considerada vía pullback como 1-forma en $TQ \times \mathbb{R}$, e E_L é a enerxía lagrangiana de L como función en $TQ \times \mathbb{R}$.

A aplicación de Legendre de \mathcal{L} , $F\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q \times \mathbb{R}$ pode expresarse mediante $F\mathcal{L} = FL \times Id_{\mathbb{R}}$, onde FL é a aplicación de Legendre de L . Ademais, \mathcal{L} é regular se e só se L é regular.

Demostración. A demostración faise de forma inmediata tomando coordenadas. \square

Consideremos o sistema lagrangiano de contacto $(TQ \times \mathbb{R}, \eta_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$, onde $\mathcal{L} = L + \phi$ é unha función lagrangiana cun termo de disipación holonómica. Supoñamos que \mathcal{L} é regular, e sexa $\Gamma_{\mathcal{L}}$ o campo de vectores definido mediante a ecuación

$$\flat_{\mathcal{L}}(\Gamma_{\mathcal{L}}) = dE_{\mathcal{L}} - (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(E_{\mathcal{L}}) + E_{\mathcal{L}})\eta_{\mathcal{L}},$$

onde $\flat_{\mathcal{L}}$ é o isomorfismo dado por (3.11).

Entón, tense que o campo de vectores $\Gamma_{\mathcal{L}}$ é un SODE e as ecuacións de movemento (3.17) e (3.18) convírtense en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= \frac{\partial \phi}{\partial q^i} + \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i} \\ \frac{ds}{dt} &= \mathcal{L} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Esta é a expresión en coordenadas das ecuacións de Euler-Lagrange de contacto para este lagrangiano $\mathcal{L} = L + \phi$.

3.5. Simetrías en sistemas lagrangianos de contacto

Nesta última sección veremos brevemente como todo o estudado no capítulo anterior sobre simetrías e cantidades disipadas en sistemas hamiltonianos de contacto podémolo trasladar agora ao sistema lagrangiano de contacto regular $(TQ \times \mathbb{R}, \eta_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$, onde $\eta_{\mathcal{L}}$ e $E_{\mathcal{L}}$ son a forma de contacto e a enerxía lagrangiana dadas por (3.9) e (3.6) respectivamente; $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ é o campo de vectores de Reeb asociado, e $X_{\mathcal{L}}$ é o campo de vectores de Euler-Lagrange de contacto.

Polo tanto, os conceptos de simetrías dinámicas e de contacto son os mesmos, e o Teorema de disipación 2.17 expresa que a función

$$F = -i_Y \eta_{\mathcal{L}}$$

é unha cantidade disipada, para toda simetría dinámica infinitesimal $Y \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$.

En particular, a *disipación da enerxía lagrangiana* (2.19), neste sistema, establece que

$$\mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}} = -(\mathcal{L}_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}}) E_{\mathcal{L}}. \tag{3.20}$$

En coordenadas canónicas escríbese

$$\mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} E_{\mathcal{L}},$$

debido á relación (3.13).

De forma análoga a como construímos levantamentos de aplicacións e campos de vectores de Q a $T^*Q \times \mathbb{R}$, se $\varphi : Q \rightarrow Q$ é un difeomorfismo, podemos establecer o difeomorfismo

$$\Phi = (T\varphi, Id_{\mathbb{R}}) : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow TQ \times \mathbb{R},$$

onde $T\varphi$ é o levantamento canónico de φ a TQ . Baixo estas hipóteses, o difeomorfismo Φ dise que é unha *transformación natural* de $TQ \times \mathbb{R}$.

Por outro lado, dado un campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(Q)$, pódese definir o seu *levantamento completo* a $TQ \times \mathbb{R}$ como o campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ cuxo fluxo local é o levantamento canónico do fluxo local de Z a $TQ \times \mathbb{R}$; isto é, o campo de vectores $Y = Z^C$, onde Z^C denota o levantamento completo de Z a TQ , identificado de maneira natural como un campo de vectores en $TQ \times \mathbb{R}$. Calquera transformación infinitesimal Y deste estilo denomínase unha *transformación infinitesimal natural* de $TQ \times \mathbb{R}$.

As extensións a $TQ \times \mathbb{R}$ do endomorfismo tanxente J e do campo de vectores de Liouville Δ , que denotabamos da mesma forma, permanecen invariantes baixo a acción de transformacións naturais de $TQ \times \mathbb{R}$. Desta forma, se Φ é tal transformación, tense que

$$\Phi_* \circ J = J \circ \Phi_* \quad \text{e} \quad \Phi_* \Delta = \Delta,$$

que utilizaremos para probar o seguinte resultado, que relaciona transformacións naturais que preservan o lagrangiano coas simetrías de contacto.

Denotemos, de novo, por $\text{Diff}(Q)$ ao conxunto de difeomorfismos en Q e por $\text{Diff}(TQ \times \mathbb{R})$ ao conxunto de difeomorfismos en $TQ \times \mathbb{R}$.

Proposición 3.16. *Sexa $\Phi \in \text{Diff}(TQ \times \mathbb{R})$ (respectivamente $Y \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$) o levantamento canónico de $\varphi \in \text{Diff}(Q)$ a $TQ \times \mathbb{R}$ (respectivamente de $Z \in \mathfrak{X}(Q)$) que deixa o lagrangiano invariante, entón é unha simetría de contacto (infinitesimal), isto é,*

$$\Phi^* \eta_{\mathcal{L}} = \eta_{\mathcal{L}}, \quad \Phi^* E_{\mathcal{L}} = E_{\mathcal{L}}$$

$$(respectivamente \mathcal{L}_Y \eta_{\mathcal{L}} = 0, \quad \mathcal{L}_Y E_{\mathcal{L}} = 0).$$

Como consecuencia, é tamén unha simetría dinámica (infinitesimal).

Observación 3.17. En particular, de forma similar ao resultado de *disipación dos momentos* 2.25 do capítulo anterior, se a función \mathcal{L} non depende da coordenada q^i para un certo índice i , isto é, se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0,$$

entón o campo de vectores

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$$

é unha simetría de contacto infinitesimal, e a súa cantidade disipada asociada é o momento $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}$. É dicir,

$$\mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} \right) = -(\mathcal{L}_{R_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}.$$

Polo tanto, como o cociente entre dúas cantidades disipadas é unha cantidade conservada, se $E_{\mathcal{L}} \neq 0$, tense que a función

$$G = \frac{1}{E_{\mathcal{L}}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}$$

é unha cantidade conservada.

Capítulo 4

Exemplos

Neste capítulo desenvolveremos tres exemplos coñecidos de sistemas mecánicos de contacto.

O primeiro exemplo é o **oscilador armónico amortecido**, unha variación do oscilador armónico simple ao engadirle á súa función lagrangiana un termo de disipación holonómica. Para ver con máis claridade o estudado nos capítulos anteriores, neste exemplo faremos a formulación lagrangiana e hamiltoniana, e veremos como en ambos casos se chega ás mesmas ecuacións de movemento.

O segundo exemplo é o **movemento dunha partícula ou un obxecto nun plano vertical baixo a acción dunha gravidade constante e con fricción**. Este movemento tamén se describe mediante un lagrangiano cun termo de disipación holonómica, e desenvolveremos só a súa formulación lagrangiana.

O terceiro exemplo é a **ecuación do paracaídas**, a cal describe a caída vertical dun obxecto en presenza dunha gravidade constante. Neste caso, a forza de fricción é proporcional ao cadrado da velocidade, e o lagrangiano correspondente a este movemento non vai ter un termo de disipación holonómica. Faremos a súa descrición hamiltoniana.

4.1. Oscilador armónico amortecido

Consideremos o espazo de configuración $Q = \mathbb{R}$. A descrición lagrangiana do oscilador armónico unidimensional vén dada pola función lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$L(q, v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

A ecuación de Euler-Lagrange ou de movemento para este lagrangiano é

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2q = 0,$$

que é a ecuación do oscilador armónico simple.

Formulación lagrangiana de contacto

Consideremos agora a seguinte función lagrangiana con termo de disipación holonómica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : T\mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, v, s) &\longmapsto \mathcal{L}(q, v, s) = L(q, v) - ks = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 - ks. \end{aligned}$$

Para ilustrar este movemento, consideremos unha masa m unida ao extremo dun resorte con constante de elasticidade C , e a un amortecedor cuxa forza de fricción é proporcional á velocidade da masa en cada instante de tempo. Neste sistema, denotamos por $k = \frac{\rho}{m}$

á constante de amortecemento e por $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$ á frecuencia angular.

Resulta evidente ver que o lagrangiano \mathcal{L} é regular, pois $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v \partial v} = m \neq 0$.

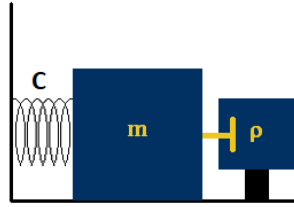


Figura 4.1: Oscilador armónico amortecido

A diferencial da función lagrangiana é

$$d\mathcal{L} = -m\omega^2q dq + mv dv - kds,$$

e como neste sistema

$$\Delta = v \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{e} \quad J = \frac{\partial}{\partial v} \otimes dq,$$

tense que a enerxía lagrangiana e a súa diferencial son

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{L}} &= \Delta(\mathcal{L}) - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + ks, \\ dE_{\mathcal{L}} &= m\omega^2q dq + mv dv + kds. \end{aligned}$$

As formas diferenciais e o correspondente campo de vectores de Reeb son

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{L}} &= d\mathcal{L} \circ J = mv dq, \\ \eta_{\mathcal{L}} &= ds - mv dq, \\ d\eta_{\mathcal{L}} &= mdq \wedge dv, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}} &= \frac{\partial}{\partial s}. \end{aligned}$$

Consideremos un campo de vectores $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(T\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con expresión local

$$X_{\mathcal{L}} = a \frac{\partial}{\partial q} + b \frac{\partial}{\partial v} + c \frac{\partial}{\partial s}.$$

Por un lado, aplicándolle (3.11) ao campo $X_{\mathcal{L}}$, obtemos

$$\flat_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}) = (am^2v^2 - bm - cmv) dq + amdv + (c - amv) ds$$

e por outro,

$$\begin{aligned} dE_{\mathcal{L}} - (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(E_{\mathcal{L}}) + E_{\mathcal{L}})\eta_{\mathcal{L}} &= \left(m\omega^2q + mkv + \frac{1}{2}m^2v^3 + \frac{1}{2}m^2\omega^2q^2v + mkvs \right) dq + \\ &+ mvdv + \left(-\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 - ks \right) ds. \end{aligned}$$

Logo, igualando en (3.14), a expresión local de $X_{\mathcal{L}}$ é

$$X_{\mathcal{L}} = v \frac{\partial}{\partial q} + (-\omega^2q - kv) \frac{\partial}{\partial v} + \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Entón, se $\gamma(t) \equiv (q(t), v(t), s(t))$ é unha curva integral de $X_{\mathcal{L}}$, esta satisfai o seguinte sistema de ecuacións diferenciais

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2q - kv, \quad \frac{ds}{dt} = \mathcal{L}.$$

Das primeiras dúas ecuacións do sistema obtense o seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$\frac{d^2q}{dt^2} + k \frac{dq}{dt} + \omega^2q = 0,$$

que corresponde coa ecuación do oscilador armónico amortecido.

A disipación da enerxía lagrangiana (3.20) neste sistema vén dada por

$$\mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}}}E_{\mathcal{L}} = -kE_{\mathcal{L}}.$$

Formulación hamiltoniana de contacto

Consideremos a variedade de contacto $(T^*Q \times \mathbb{R}, \eta)$ con coordenadas (q, p, s) , onde $\eta = ds - pdq$ e o campo de Reeb é $\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial s}$.

Mediante a aplicación de Legendre asociada a \mathcal{L} dada por

$$\begin{aligned} F\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} &\longrightarrow T^*Q \times \mathbb{R} \\ (q, v, s) &\longmapsto F\mathcal{L}(q, v, s) = (q, p = mv, s), \end{aligned}$$

defínese a función hamiltoniana como $F\mathcal{L}^*H = E_{\mathcal{L}}$. Desta forma,

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + ks$$

e a súa diferencial é

$$dH = \frac{p}{m}dp + m\omega^2q dq + kds.$$

Sexa $X_H \in \mathfrak{X}(T^*Q \times \mathbb{R})$ o campo de vectores con expresión local

$$X_H = a \frac{\partial}{\partial q} + b \frac{\partial}{\partial p} + c \frac{\partial}{\partial s},$$

e definido mediante (2.5).

Por un lado, aplicándolle (2.1) a X_H tense

$$\flat(X_H) = (ap^2 - b - cp) dq + adp + (c - ap) ds.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} dH - (\mathcal{R}(H) + H) \eta &= \left(m\omega^2 q + kp + \frac{p^3}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 p + kps \right) dq + \\ &+ \frac{p}{m} dp + \left(-\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 - ks \right) ds. \end{aligned}$$

Logo, igualando en (2.5), obtemos a expresión local de X_H

$$X_H = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} + (-m\omega^2 - kp) \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{2m} p^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 - ks \right) \frac{\partial}{\partial s}.$$

Así, unha curva integral $\gamma(t) \equiv (q(t), p(t), s(t))$ de X_H é solución do seguinte sistema de ecuacións diferenciais

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q - kp, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 - ks.$$

Combinando as dúas primeiras ecuacións do sistema anterior obtemos o sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + k \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0,$$

da mesma forma que no caso lagrangiano, e a disipación da enerxía (2.19) neste sistema exprésase como

$$\mathcal{L}_{X_H} H = -kH.$$

4.2. Movemento nun campo gravitacional constante con fricción

Consideremos o movemento dunha partícula nun plano vertical baixo a acción da gravidade constante. Neste caso, o espazo de configuración é $Q = \mathbb{R}^2$ con coordenadas (x, y) e o seu fibrado tanxente $TQ = T\mathbb{R}^2$ con coordenadas (x, y, v_x, v_y) .

Este movementu pode describirse mediante a función lagrangiana

$$L(x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 - mgy,$$

onde g denota a aceleración da gravidade.

Para introducir a fricción do aire, consideramos o seguinte lagrangiano con termo de disipación holonómica

$$\mathcal{L} = L - ks = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 - mgy - ks \quad (4.1)$$

en $M = TQ \times \mathbb{R}$ e con coordenadas (x, y, v_x, v_y, s) .

De novo, resulta evidente ver que o lagrangiano \mathcal{L} é regular, pois a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial v^j} \right) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

ten rango máximo.

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= mv_x dv_x + mv_y dv_y - mgdy - kds, \\ \Delta &= v_x \frac{\partial}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial}{\partial v_y}, \\ J &= \frac{\partial}{\partial v_x} \otimes dx + \frac{\partial}{\partial v_y} \otimes dy, \\ E_{\mathcal{L}} &= \Delta(\mathcal{L}) - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy + ks, \\ dE_{\mathcal{L}} &= mv_x dv_x + mv_y dv_y + mgdy + kds, \end{aligned}$$

e formas diferenciais

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{L}} &= d\mathcal{L} \circ J = mv_x dx + mv_y dy, \\ \eta_{\mathcal{L}} &= ds - (mv_x dx + mv_y dy), \\ d\eta_{\mathcal{L}} &= mdx \wedge dv_x + mdy \wedge dv_y. \end{aligned}$$

Consideremos $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(TQ \times \mathbb{R})$ con expresión local

$$X_{\mathcal{L}} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial v_x} + d \frac{\partial}{\partial v_y} + e \frac{\partial}{\partial s}$$

o único campo de vectores solución da ecuación (3.14), con \mathcal{L} o lagrangiano dado por (4.1).

Por un lado, aplicándolle (3.11) a $X_{\mathcal{L}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \flat_{\mathcal{L}}(X_{\mathcal{L}}) &= (am^2v_x^2 + bm^2v_xv_y - emv_x - cm) dx + (am^2v_xv_y + bm^2v_y^2 - emv_y - dm) dy + \\ &+ amdv_x + bmdv_y + (e - amv_x - bmv_y) ds, \end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} dE_{\mathcal{L}} - (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(E_{\mathcal{L}}) + E_{\mathcal{L}}) \eta_{\mathcal{L}} &= \left(kmv_x + \frac{1}{2}m^2v_x^3 + \frac{1}{2}m^2v_xv_y^2 + m^2gyv_x + kmv_xs \right) dx + \\ &\quad \left(kmv_y + \frac{1}{2}m^2v_x^2v_y + \frac{1}{2}m^2v_y^3 + m^2gyv_y + kmv_ys + mg \right) dy \\ &\quad + mv_xdv_x + mv_ydv_y + \left(-\frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_y^2 - mgy - ks \right) ds. \end{aligned}$$

Agora, igualando en (3.14), obtemos a expresión local de $X_{\mathcal{L}}$

$$X_{\mathcal{L}} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - kv_x \frac{\partial}{\partial v_x} - (kv_y + g) \frac{\partial}{\partial v_y} + \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Sexa $\gamma(t) \equiv (x(t), y(t), v_x(t), v_y(t), s(t))$ unha curva integral de $X_{\mathcal{L}}$. Entón γ é solución do seguinte sistema de ecuacións diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - g, \quad \frac{ds}{dt} = \mathcal{L}.$$

Combinando as ecuacións primeira e terceira por un lado, e a segunda e cuarta por outro, chegamos ao seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + g = 0, \end{cases}$$

que describe o movemento dun obxecto nun plano vertical.

A disipación da enerxía lagrangiana (3.20) para este sistema é

$$\mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}} = -kE_{\mathcal{L}}.$$

4.3. Ecuación do paracaídas

Consideremos o movemento vertical dunha partícula caendo sobre un fluido baixo a acción dunha gravidade constante. A fricción modélase mediante a ecuación de arrastre, onde a forza de fricción é proporcional ao cadrado da velocidade.

Este movemento pode describirse mediante o sistema lagrangiano de contacto (M, \mathcal{L}) , onde $M = T\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con coordenadas (y, v, s) e

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mg}{2k} (e^{2ky} - 1) + 2kvs,$$

onde k é o coeficiente de fricción, o cal depende da densidade do aire, a forma do obxecto, etc.

Mediante a aplicación de Legendre

$$FL(y, v, s) = \left(y, p = \frac{\partial L}{\partial v}, s \right) = (y, p = mv + 2ks, s) \in T^*\mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

e a función enerxía

$$E_{\mathcal{L}} = \Delta(\mathcal{L}) - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg}{2k}(e^{2ky} - 1),$$

onde $\Delta = v \frac{\partial}{\partial v}$, defínese a función hamiltoniana como $FL^*H = E_{\mathcal{L}}$.

Así,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{2k^2s^2}{m} - \frac{2kps}{m} + \frac{mg}{2k}(e^{2ky} - 1)$$

e a súa diferencial é

$$dH = mge^{2ky}dy + \frac{1}{m}(p - 2ks)dp + \frac{2k}{m}(2ks - p)ds.$$

Consideremos, polo tanto, a variedade de contacto $(T^*\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \eta)$ onde $\eta = ds - pdq$ e o campo de vectores de Reeb é $\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial s}$.

Sexa $X_H \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ o campo de vectores con expresión local

$$X_H = a \frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial p} + c \frac{\partial}{\partial s}$$

e definido mediante a ecuación (2.5).

Por un lado, aplicándolle (2.1) obtemos

$$\flat(X_H) = (ap^2 - cp - b)dy + adp + (c - ap)ds,$$

e por outro,

$$\begin{aligned} dH - (\mathcal{R}(H) + H)\eta &= \left(\frac{2k^2ps(2+s)}{m} + \frac{mgp}{2k}(e^{2ky} - 1) + \frac{p^3 - 4kp^2(1+s)}{2m} + mge^{2ky} \right) dy \\ &+ \left(\frac{p}{m} - \frac{2ks}{m} \right) dp + \left(\frac{2kps}{m} - \frac{p^2}{2m} - \frac{2k^2s^2}{m} - \frac{mg}{2k}(e^{2ky} - 1) \right) ds. \end{aligned}$$

Agora, igualando ambas ecuacións en (2.5) e despexando, chegamos a que

$$\begin{cases} a = \frac{p - 2ks}{m}, \\ b = -mge^{2ky} + \frac{2kp}{m}(p - 2ks), \\ c = \frac{p^2 - 4k^2s^2}{2m} - \frac{mg}{2k}(e^{2ky} - 1), \end{cases}$$

e polo tanto, a expresión local de X_H é

$$X_H = \left(\frac{p - 2ks}{m} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2kp}{m} (p - 2ks) - mge^{2ky} \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{p^2 - 4k^2s^2}{2m} - \frac{mg}{2k} (e^{2ky} - 1) \right) \frac{\partial}{\partial s}.$$

Sexa $\gamma(t) \equiv (y(t), p(t), s(t))$ unha curva integral de X_H . Logo γ satisfai o seguinte sistema de ecuacións diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{p - 2ks}{m}, \\ \frac{dp}{dt} = -mge^{2ky} + \frac{2kp}{m} (p - 2ks), \\ \frac{ds}{dt} = \frac{p^2 - 4k^2s^2}{2m} - \frac{mg}{2k} (e^{2ky} - 1). \end{cases}$$

Combinando as dúas primeiras ecuacións do sistema anterior, obtemos a ecuación diferencial de segunda orde

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + g = 0,$$

que describe a caída vertical dun obxecto en presenza da gravidade.

A disipación da enerxía (2.19) para este sistema é

$$\mathcal{L}_{X_H} H = - \left(\frac{4k^2s}{m} - \frac{2kp}{m} \right) H.$$

Capítulo 5

Ecuaciones de Herglotz en sistemas lagrangianos con ligaduras

O interese deste capítulo é facer unha aproximación aos sistemas disipativos utilizando sistemas lagrangianos non holonómicos con ligaduras. Veremos unha forma alternativa de chegar ás ecuacións de movemento ou ecuacións de Herglotz sen recorrer ao formalismo de contacto descrito nos capítulos anteriores.

5.1. Sistemas ordinarios non holonómicos

Consideremos $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular, $\mathcal{L}(q^i, v^i, s)$. O noso propósito vai ser obter a dinámica definida por \mathcal{L} nunha subvariedade non holonómica de $T(Q \times \mathbb{R})$, definida pola función de ligadura

$$\phi(q^i, v^i, s, v_s) = v_s - \mathcal{L} = 0.$$

Polo tanto, se π_0 é a proxección canónica, consideramos a función lagrangiana $L = \pi_0^* \mathcal{L} \in C^\infty(T(Q \times \mathbb{R}))$ como un lagrangiano dexenerado, xa que non depende da coordenada v_s .

$$\begin{array}{ccc} T(Q \times \mathbb{R}) & & \\ \pi_0 \downarrow & \searrow^{L = \pi_0^* \mathcal{L}} & \\ TQ \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Así, a ligadura non holonómica convértese en $\phi(q^i, v^i, s, v_s) = v_s - L = 0$.

Denotemos por

$$C = \phi^{-1}(0) = \{(q^i, v^i, s, v_s) \in T(Q \times \mathbb{R}) / v_s = L(q^i, v^i, s)\}$$

á subvariedade de $T(Q \times \mathbb{R})$ definida por ϕ .

As formas canónicas asociadas a este lagrangiano L son

$$\theta_L = d_J L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i$$

e

$$\Omega_L = -d\theta_L = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j + \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^i} dq^i \wedge ds,$$

onde J é a estrutura tanxente en $T(Q \times \mathbb{R})$ dada por

$$J = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i + \frac{\partial}{\partial v_s} \otimes ds, \quad (5.1)$$

e notando que $\frac{\partial L}{\partial v_s} = 0$.

Denotemos tamén por Δ ao campo de vectores de Liouville en $T(Q \times \mathbb{R})$, isto é

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i} + v_s \frac{\partial}{\partial v_s},$$

e así, a correspondente enerxía lagrangiana é

$$E_L = v^h \frac{\partial L}{\partial v^h} - L,$$

e polo tanto, a súa diferencial

$$dE_L = v^h \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^h} dq^i + v^h \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^h} + v^h \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^h} ds - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial s} ds.$$

5.1.1. Formulación co campo de vectores dinámico

O problema variacional para este sistema lagrangiano non holonómico $(T(Q \times \mathbb{R}), L, C)$, como vimos na sección 1.5, consiste en atopar campos de vectores $X_L \in T(Q \times \mathbb{R})$ que sexan SODES, tanxentes á subvariedade C e solucións da ecuación dinámica

$$i_{X_L} \Omega_L - dE_L = \lambda d_J \phi, \quad (5.2)$$

onde $\lambda : T(Q \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é o denominado *multiplicador de Lagrange*, e $d_J \phi$ denota a diferenciación vertical da función ϕ .

O carácter dexenerado da función lagrangiana obríganos a saír do formalismo simpléctico estándar ao que estamos acostumados para adentrarnos no formalismo presimpléctico. Hai varios traballos xa nos que se propón un algoritmo de restricións co fin de poder describir a dinámica do sistema. Podémolo ver, por exemplo, na sección 8.1.1 do libro [20] ou en [18], entre outros.

O que daremos a continuación é unha idea deste algoritmo de restricións, que nos será de utilidade ao longo de todo o capítulo para describir a formulación lagrangiana non holonómica de sistemas disipativos.

Observación 5.1. Lagrangianos singulares.

Unha *estructura presimpléctica* ω nunha variedade diferenciable M de dimensión $2n + r$ é unha 2-forma pechada e dexenerada, é dicir, ω ten rango constante $2n$. Ao par (M, ω) se lle denomina *variedade presimpléctica*.

Consideremos $(TQ, \omega_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$ un sistema lagrangiano singular, isto é, a matriz hessiana con respecto ás velocidades

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

non ten rango máximo. Desta forma, $\omega_{\mathcal{L}}$ é dexenerada e, polo tanto, é unha estrutura presimpléctica.

Logo, a ecuación dinámica

$$i_{X_{\mathcal{L}}} \omega_{\mathcal{L}} = dE_{\mathcal{L}} \quad (5.3)$$

non é compatible en todo o espazo TQ e, cando teña solución, non é única nin é necesariamente un SODE.

En xeral, as solucións desta ecuación (5.3) van a existir só nunha subvariedade $C \hookrightarrow TQ$, denominada *subvariedade de ligaduras*. O obxectivo do algoritmo de restricións é atopar esta subvariedade C (se existe), onde haberá definidos campos de vectores $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(TQ)$ que van a ser SODES, tanxentes a C e cuxas curvas integrais serán solucións das ecuacións de Euler-Lagrange en C . A idea deste algoritmo é a seguinte:

1. Buscamos as *condicións de compatibilidade* que definen a subvariedade de TQ onde a ecuación dinámica (5.3) sexa compatible. Esta subvariedade vén definida por

$$P_1 = \{p \in TQ / (i_Z dE_{\mathcal{L}})(p) = 0, \forall Z \in \ker \omega_{\mathcal{L}}\}.$$

2. Aplicamos as *condicións de tanxencia*. A partir dunha base local de campos de vectores $Z \in \ker \omega_{\mathcal{L}}$ obtemos unha base de funcións de ligadura $i_Z dE_{\mathcal{L}}$ localmente definindo P_1 . Se $X_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{X}(TQ)$ é a solución xeral de (5.3) en P_1 , entón as condicións de tanxencia son

$$X_{\mathcal{L}}(i_Z dE_{\mathcal{L}}) \Big|_{P_1} = 0.$$

Se seguimos aplicando o proceso, estas condicións poden orixinar novas ligaduras que definan novas subvariedades. Atopámonos, polo tanto, cunha cadea de subvariedades

$$\dots P_i \hookrightarrow P_{i-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_1 \hookrightarrow TQ$$

tal que pode ocorrer un dos seguintes casos: que o algoritmo continúe ata que non atope novas funcións de ligadura, no cal teremos unha subvariedade final $P_r = C$; que chegue un momento no que $P_r = \emptyset$, no cal non existe solución; que a subvariedade $P_r = C$ sexa un conxunto de puntos illados, ou ben que o proceso sexa infinito.

3. Impoñemos a *condición de SODE*. Como nun principio a solución non ten por que ser un SODE, esiximos que $J(X) = \Delta$ para a solución xeral $X \in \mathfrak{X}(TQ)$. Obtemos, polo tanto, unha subvariedade definida por esta nova restrición.

Ao final de todo o proceso, obteremos unha subvariedade máis pequena que acolla todas estas condicións e que estea definida por todas as ligaduras impostas polo sistema.

Volvendo ao problema variacional inicial, tense que a forma Ω_L é presimpléctica, pois é unha forma dexenerada xa que $\ker \Omega_L = \left\{ \frac{\partial}{\partial v_s} \right\}$. Polo tanto, vexamos en que subvariedade ten solución a ecuación, calculando primeiro as ligaduras primarias coa condición de compatibilidade

$$i_{\frac{\partial}{\partial v_s}} (i_{X_L} \Omega_L - dE_L) = i_{\frac{\partial}{\partial v_s}} (\lambda d_J \phi). \quad (5.4)$$

Como $\phi = v_s - L$ e considerando a expresión local (5.1), tense que

$$d_J \phi = d\phi \circ J = \frac{\partial \phi}{\partial v_s} ds + \frac{\partial \phi}{\partial v^i} dq^i = ds - \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i.$$

Polo tanto,

$$i_{\frac{\partial}{\partial v_s}} (\lambda d_J \phi) = 0,$$

e así, ambos lados da ecuación (5.4) son idénticamente cero. Isto indica que non hai ligaduras primarias, é dicir, que a ecuación dinámica (5.2) ten solución en toda a subvariedade C .

Para calcular a expresión local do campo $X_L \in \mathfrak{X}(T(Q \times \mathbb{R}))$, sexa

$$X_L = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + F \frac{\partial}{\partial s} + G \frac{\partial}{\partial v_s},$$

e aplicando a ecuación (5.2) aos campos $\frac{\partial}{\partial q^i}$, $\frac{\partial}{\partial v^i}$, $\frac{\partial}{\partial s}$, obtemos as seguintes ecuacións para os coeficientes dq^i , dv^i e ds :

- Para dq^i ,

$$A^h \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^h} - A^h \frac{\partial^2 L}{\partial q^h \partial v^i} - B^h \frac{\partial^2 L}{\partial v^h \partial v^i} - F \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^i} - v^h \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^h} + \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\lambda \frac{\partial L}{\partial v^i}. \quad (5.5)$$

- Para dv^i ,

$$A^h \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^h} - v^h \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^h} = 0.$$

Como estamos supoñendo \mathcal{L} regular, entón

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^h} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^i \partial v^h} \right) \neq 0,$$

de onde se deduce que $A^h = v^h$.

- Para ds ,

$$A^h \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^h} - v^h \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^h} + \frac{\partial L}{\partial s} = \lambda,$$

e utilizando que $A^h = v^h$, tense que $\lambda = \frac{\partial L}{\partial s}$.

A correspondente compoñente para dv_s non aparece.

Por ser X_L SODE en $T(Q \times \mathbb{R})$, tense tamén que $F = v_s = L$. Logo a expresión local do campo X_L é

$$X_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + L \frac{\partial}{\partial s} + G \frac{\partial}{\partial v_s}. \quad (5.6)$$

Para determinar G , necesitamos a condición de tanxencia, que indica que

$$\mathcal{L}_{X_L} \phi = X_L(\phi) = X_L(v_s - L) = 0.$$

Así,

$$G = v^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + L \frac{\partial L}{\partial s},$$

e polo tanto, tense que en coordenadas, X_L é

$$X_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + L \frac{\partial}{\partial s} + \left(v^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + L \frac{\partial L}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial v_s}.$$

Agora, introducindo os valores de A^h e λ na ecuación (5.5), tense

$$v^h \frac{\partial^2 L}{\partial q^h \partial v^i} + B^h \frac{\partial^2 L}{\partial v^h \partial v^i} + L \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i}. \quad (5.7)$$

Se consideramos $\gamma(t) \equiv (q^i(t), v^i(t), s(t), v_s(t))$ unha curva integral de X_L , da súa expresión local (5.6) obtéñense

$$v^i(\gamma(t)) = \frac{dq^i}{dt} \Big|_t, \quad B^i(\gamma(t)) = \frac{dv^i}{dt} \Big|_t, \quad L(\gamma(t)) = \frac{ds}{dt} \Big|_t, \quad G(\gamma(t)) = \frac{dv_s}{dt} \Big|_t,$$

e substituíndo na ecuación (5.7), determínanse as traxectorias do sistema como solucións das ecuacións de Herglotz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i}. \quad (5.8)$$

Observación 5.2. Hai outra forma de escribir estas ecuacións (5.8), cuxas traxectorias son as solucións dunha ecuación diferencial dada en termos do operador de Euler-Lagrange \mathcal{E}_L en $Q \times \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}_L \circ j_t^2 \gamma = \lambda d^V \phi \circ \dot{\gamma}. \quad (5.9)$$

Neste caso λ é a mesma da ecuación (5.2) e, considerando as expresións locais (1.23) e (1.20), de \mathcal{E}_L e d^V respectivamente, obtéñense

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = -\lambda \frac{\partial L}{\partial v^i}, \quad \frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt}(0) = \lambda,$$

xa que L non depende de v_s .

Polo tanto, unha curva $\gamma(t) \equiv (q^i(t), s(t))$ en $Q \times \mathbb{R}$ solución de (5.9) é unha solución das ecuacións

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = -\frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i},$$

que se corresponden coas compoñentes (5.8) da ecuación dinámica (5.2).

Por último, para concluír o noso estudo sobre sistemas non holonómicos disipativos dende este punto de vista do campo de vectores dinámico X_L , é interesante observar como varía a enerxía lagrangiana ao longo das súas curvas integrais.

Polo tanto, partindo da ecuación dinámica

$$i_{X_L}\Omega_L - dE_L = \lambda d_J\phi,$$

e utilizando que $\lambda = \frac{\partial L}{\partial s}$, tense

$$i_{X_L}\Omega_L = dE_L + \frac{\partial L}{\partial s} \left(ds - \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i \right).$$

Agora, facendo a contracción con i_{X_L} , como $i_{X_L}(i_{X_L}\Omega_L) = 0$, obtense

$$\begin{aligned} 0 &= i_{X_L} \left(dE_L + \frac{\partial L}{\partial s} \left(ds - \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i \right) \right) \\ &= i_{X_L} dE_L + \frac{\partial L}{\partial s} i_{X_L} \left(ds - \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i \right) \\ &= \mathcal{L}_{X_L} E_L + \frac{\partial L}{\partial s} (L - \Delta(L)) \\ &= \mathcal{L}_{X_L} E_L - \frac{\partial L}{\partial s} E_L. \end{aligned}$$

Logo a relación

$$\mathcal{L}_{X_L} E_L = \frac{\partial L}{\partial s} E_L$$

expresa a disipación da enerxía lagrangiana (3.20), como vimos no capítulo 3.

5.1.2. Formulación co operador de Euler-Lagrange

Pódese plantexar o mesmo problema dende un punto de vista do operador de Euler-Lagrange da seguinte maneira:

A ecuación dinámica (5.2) escríbese agora como

$$\mathcal{E}_L = \lambda d^V\phi, \tag{5.10}$$

e debido a (1.24) e (1.25), pódese descompoñer ambos lados da ecuación en

$$\mathcal{E}_L = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \right) dq^i + \left(\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_s} \right) \right) ds = \mathcal{E}_L^Q + \frac{\partial L}{\partial s} ds$$

e

$$d^V\phi = -\frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i + ds.$$

Agora, igualando na ecuación (5.10) tense

$$\mathcal{E}_L^Q + \frac{\partial L}{\partial s} ds = -\lambda \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i + \lambda ds,$$

e identificando as compoñentes en ds , chégase a que

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \lambda.$$

Polo tanto, a ecuación dinámica en coordenadas escríbese como

$$\mathcal{E}_L^Q = -\frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i,$$

que é a clásica ecuación de Herglotz para sistemas lagrangianos disipativos.

5.2. Lagrangianos disipativos con ligaduras

Nesta sección consideramos un caso máis xeral de sistemas con ligaduras. Describiremos brevemente a dinámica determinada por un lagrangiano disipativo, restrinxido a moverse nunha subvariedade definida por unha familia de ligaduras independentes das velocidades, e outra que é a ligadura debido á disipación que vimos na sección anterior.

Sexa $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano disipativo regular, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^i, v^i, s)$, e sexa $L = \pi_0^* \mathcal{L} \in C^\infty(T(Q \times \mathbb{R}))$ o lagrangiano dexenerado dado polo pullback de \mathcal{L} mediante a proxección π_0 .

Consideremos a subvariedade $N \subset TQ$ definida pola familia de ligaduras

$$\phi^\alpha : TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha = 1, \dots, h,$$

independentes con respecto ás velocidades (v^1, \dots, v^n) , isto é,

$$\text{rango} \left(\frac{\partial(\phi^1, \dots, \phi^h)}{\partial(v^1, \dots, v^n)} \right) = h.$$

Por outro lado, imos considerar tamén a ligadura non holonómica

$$\phi(q^i, v^i, s, v_s) = v_s - L = 0.$$

Polo tanto, atopámonos nunha subvariedade $C \subset N \subset T(Q \times \mathbb{R})$ definida pola familia de ligaduras $\{\phi, \phi^\alpha\}$ independentes das velocidades (v_s, v^i, \dots, v^n) , xa que

$$\text{rango} \left(\frac{\partial(\phi, \phi^1, \dots, \phi^h)}{\partial(v_s, v^1, \dots, v^n)} \right) = h + 1.$$

O problema variacional agora para o sistema lagrangiano non holonómico con ligaduras definido por $(T(Q \times \mathbb{R}), L, \phi, \phi^\alpha)$ consiste en atopar campos de vectores $X_L \in \mathfrak{X}(T(Q \times \mathbb{R}))$ que sexan SODES, tanxentes a C e solucións da ecuación dinámica

$$i_{X_L} \Omega_L - dE_L = \lambda d_J \phi + \lambda_\alpha d_J \phi^\alpha, \quad (5.11)$$

onde $\lambda, \lambda_\alpha : T(Q \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ son os multiplicadores de Lagrange. A forma Ω_L , a función enerxía lagrangiana E_L e a súa diferencial dE_L son as mesmas que na sección 5.1, polo que teñen a mesma expresión en coordenadas.

Polo tanto, seguindo o mesmo procedemento da sección anterior, calculamos a expresión local do campo de vectores X_L

$$X_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i} + L \frac{\partial}{\partial s} + \left(v^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + L \frac{\partial L}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial v_s},$$

onde agora as funcións B^i satisfán o seguinte sistema de ecuacións

$$v^h \frac{\partial^2 L}{\partial q^h \partial v^i} + B^h \frac{\partial^2 L}{\partial v^h \partial v^i} + L \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \lambda_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i}.$$

Observación 5.3. Nótese que realmente agora para calcular os multiplicadores de Lagrange λ_α e os coeficientes B^i necesitamos considerar as ligaduras non holonómicas $\phi^\alpha = 0$ como ecuacións adicionais. Desta forma, o campo de vectores dinámico X_L queda completamente determinado.

Polo tanto, tense que as traxectorias do sistema $(T(Q \times \mathbb{R}), L, C)$ son curvas integrais do campo X_L tales que son solucións das ecuacións

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = - \frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i} + \lambda_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i}. \quad (5.12)$$

Para ver a variación da enerxía lagrangiana neste caso, consideremos a ecuación dinámica (5.11) e, utilizando que $\lambda = \frac{\partial L}{\partial s}$, facemos de novo a contracción con i_{X_L} , obtendo así

$$\begin{aligned} 0 &= i_{X_L} \left(dE_L + \frac{\partial L}{\partial s} \left(ds - \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i \right) + \lambda_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i} dq^i \right) \\ &= \mathcal{L}_{X_L} E_L + \frac{\partial L}{\partial s} \left(L - v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) + \lambda_\alpha v^i \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i} \\ &= \mathcal{L}_{X_L} E_L - \frac{\partial L}{\partial s} E_L + \lambda_\alpha \Delta(\phi^\alpha), \end{aligned}$$

onde Δ denota a extensión a $T(Q \times \mathbb{R})$ do campo de vectores de Liouville en TQ .

Polo tanto, obtense a relación

$$\mathcal{L}_{X_L} E_L = \frac{\partial L}{\partial s} E_L - \lambda_\alpha \Delta(\phi^\alpha) \quad (5.13)$$

que expresa a disipación da enerxía lagrangiana (3.20) máis un termo correspondente ás ligaduras non holonómicas.

Agora ben, voltando ao noso problema inicial, existe unha forma equivalente de escribir as traxectorias do sistema $(T(Q \times \mathbb{R}), L, C)$ en termos do operador de Euler-Lagrange, onde agora a ecuación dinámica (5.11) é

$$\mathcal{E}_L = \lambda d^V \phi + \lambda_\alpha d^V \phi^\alpha,$$

e as traxectorias dinámicas son curvas $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ solucións dun sistema de ecuacións diferenciais onde as compoñentes son as propias ecuacións (5.12).

Usando a descomposición (1.24) e (1.25) para os operadores \mathcal{E}_L e d^V , tense

$$\mathcal{E}_L^Q + \frac{\partial L}{\partial s} ds = -\lambda \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i + \lambda ds + \lambda_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i} dq^i,$$

e identificando as compoñentes en ds e dq^i a ambos lados da ecuación, chégase a que

$$\lambda = \frac{\partial L}{\partial s},$$

e así, a ecuación de movemento escríbese

$$\mathcal{E}_L^Q = -\frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i + \lambda_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial v^i} dq^i.$$

5.3. Exemplo: disco vertical rodante sen deslizamento

Para finalizar o capítulo, veremos un exemplo sinxelo de sistema disipativo non holonómico con ligaduras, onde utilizando as ferramentas descritas nas seccións anteriores, daremos as súas ecuacións de movemento.

Consideremos un disco vertical que roda sobre o plano XY e que xira sobre o seu eixo vertical. Denotemos por (x, y) á posición de contacto do disco co plano XY , por θ ao ángulo de rotación dun punto dado do disco con respecto ao eixo vertical, e por φ ao ángulo de orientación do disco, como vemos na Figura 5.1.

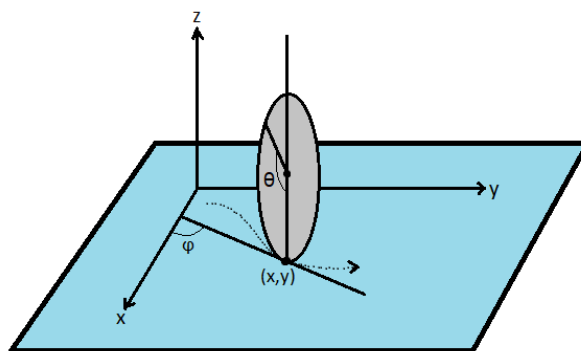


Figura 5.1: Disco vertical rodante

Desta forma, o espazo de configuración é $Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con coordenadas (x, y, θ, φ) . Por outro lado, en vista de considerar a disipación, engadimos a maiores o termo ks , que simboliza a fricción co medio, con coeficiente $k > 0$. Para simplificar a notación, denotemos por $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ e por $\ddot{q}^i = \frac{d^2q^i}{dt^2}$, onde q^i son as coordenadas na variedade de configuración.

O lagrangiano deste sistema, definido en $T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$, é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \right) + ks,$$

e as ligaduras non holonómicas ás que está sometido son

$$\phi_1 = \dot{x} - \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \phi_2 = \dot{y} - \dot{\theta} \sin \varphi.$$

Polo tanto, as ecuacións dinámicas (5.12) para este sistema lagrangiano non holonómico $(T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}), L, C)$, onde a subvariedade C está definida polas funcións de ligadura $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 0$, son

$$\begin{aligned} -\ddot{x} &= -k\dot{x} + \lambda_1, \\ -\ddot{y} &= -k\dot{y} + \lambda_2, \\ -\ddot{\theta} &= -k\dot{\theta} - \lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi, \\ -\ddot{\varphi} &= -k\dot{\varphi}, \end{aligned}$$

e a disipación da enerxía lagrangiana (5.13) neste sistema vén dada pola expresión

$$\mathcal{L}_{X_{\mathcal{L}}} E_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} k \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \right) - k^2 s.$$

Bibliografía

- [1] Abraham, R. and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, second edition, revised, enlarged, reset. Benjamin/Cummings, Reading, 1978.
- [2] Albert, C., *Le théorème de réduction de Marsden-Weinstein en géométrie cosymplectique et de contact*, Journal of Geometry and Physics 6(4):627–649, 1989.
- [3] Arnold, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science and Business Media, 1989.
- [4] Bravetti, A., H. Cruz and D. Tapias, *Contact Hamiltonian mechanics*, Ann. Phys., 376:17–39, 2017.
- [5] Cannas Da Silva, A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
- [6] Cariñena, J. F., C. López and E. Martínez, *A new approach to the converse of Cartan's theorem*, J. Phys A: Math. Gen., 22, 4777–4786, 1989.
- [7] Cariñena, J. F., J. Fernández-Núñez and E. Martínez, *A geometric approach to Cartan's Second Theorem in time-dependent Lagrangian Mechanics*, Lett. Math. Phys., 23, 51, 1991.
- [8] Gaset, J., X. Gracia, M. C. Muñoz-Lecanda, X. Rivas and N. Román-Roy, *New contributions to the Hamiltonian and Lagrangian contact formalisms for dissipative mechanical systems and their symmetries.*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 17(6):2050090, 2020.
- [9] Godbillon, C., *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [10] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- [11] Gotay, M. J., J. M. Nester and G. Hinds, *Presymplectic manifolds and the Dirac–Bergmann theory of constraints*, Journal of Mathematical Physics 19, 2388–2399 (1978) 10.1063/1.523597.

-
- [12] Gracia, X. and J. M. Pons, *On an evolution operator connecting lagrangian and hamiltonian formalisms*, Lett. Math. Phys., 17, 175–180, 1989.
- [13] Herglotz, G., *Berührungstransformationen*, Lectures at the University of Gottingen, 1930.
- [14] De León, M. and M. Lainz-Valcázar, *A review on contact Hamiltonian and Lagrangian systems*, Rev. Acad. Canaria Cienc. (2019), XXXI, 1–46.
- [15] De León, M. and M. Lainz-Valcázar, *Contact Hamiltonian systems*, J. Math. Phys. 60, 102902 , (2019).
- [16] De León, M. and M. Lainz-Valcázar, *Infinitesimal symmetries in contact Hamiltonian systems*, J. Geom. Phys. 153 (2020) 103651.
- [17] De León, M. and M. Lainz-Valcázar, *Singular Lagrangians and precontact Hamiltonian Systems*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 16(10) (2019) 1950158.
- [18] De León, M., M. Lainz-Valcázar, M. C. Muñoz-Lecanda and N. Román-Roy, *Constrained Lagrangian dissipative contact dynamics*, J. Math. Phys. 62, 122902 (2021).
- [19] De León, M., M. Lainz-Valcázar and A. López-Gordón, *Discrete Hamilton-Jacobi theory for systems with external forces*, (October 29, 2021).
- [20] De León, M. and P. R. Rodrigues, *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [21] De León, M. and C. Sardón, *Cosymplectic and contact structures for time-dependent and dissipative Hamiltonian systems*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50, 255205 (2017). 10.1088/1751-8121/aa711d.
- [22] Libermann, P., *Colloque de Géométrie Différentielle Globale*, (Bruxelles 1958), Paris: Gauthier-Villars, 1959.
- [23] Libermann, P. and C. M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer Academic 1987.
- [24] Lichnerowicz, A., *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées*, J. Math. Pures Appl. (9) 57 (4) (1978) 453-488.
- [25] Mrugala, R., J. D. Nulton, J. Christian Schön and P. Salamon, *Contact structure in thermodynamic theory*, Reports on Mathematical Physics 29, 109-121 (1991) 10.1016/0034-4877(91)90017-H.
- [26] Pidello, G. and W. M. Tulczyjew, *Derivations of differential forms on jet bundles*, Annali di Mat. Pura ed Apl. (4) 147, 249–265, 1987.

-
- [27] Saunders, D. J., *The Geometry of Jet Bundles*, volume 142 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1989.
- [28] Tulczyjew, W. M., *Hamiltonian systems, Lagrangian systems and the Legendre transformation*, Symposia Mathematica 16 247–258, 1974.
- [29] Tulczyjew, W. M., *Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique lagrangienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 283(8) Av, A675–A678, 1976.
- [30] Tulczyjew, W. M., *Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique hamiltonienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 283(1) Ai, A15–A18, 1976.

