PRÓLOGO JOSÉ LUIS GÓMEZ PARDO
TRADUCIÓN ANA GLORIA RODRÍGUEZ ALONSO
CELSO RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ

EUCLIDES
ELEMENTOS

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
FUNDACIÓN BBVA

CLÁSICOS DO PENSAMENTO UNIVERSAL

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FUNDACIÓN BBVA

ELEMENTOS

CLÁSICOS DO
PENSAMENTO UNIVERSAL

NÚM. 20

PRÓLOGO JOSÉ LUIS GÓMEZ PARDO
TRADUCIÓN ANA GLORIA RODRÍGUEZ ALONSO
CELSO RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ

EUCLIDES
ELEMENTOS

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
FUNDACIÓN BBVA

Deseño da colección
Barro, Salgado, Santana [Grupo Revisión Deseño]

Maquetación
Imprenta Universitaria

Edición Técnica
Servizo de Publicacións e Intercambio Científico
Campus Vida
15782 Santiago de Compostela
usc.es/publicacions

ISBN
978-84-15876-04-5

ÍNDICE

PRÓLOGO
JOSÉ LUIS GÓMEZ PARDO

«Un punto é o que non ten partes» é a primeira frase dun libro memorable escrito na antigüidade. *Un punto é o que non ten partes* (*A point is that which has no part*) é tamén o título dunha colección de poemas de Liz Waldner que recibiu diversos premios de poesía e foi publicada en 2000 pola Universidade de Iowa (Waldner 2000). O libro antigo —en realidade unha obra integrada por 13 libros, que corresponden ó que agora chamaríamos capítulos— foi escrito hai aproximadamente 2300 anos por un matemático grego chamado Euclides, de quen moi pouco se sabe. Trátase dos *Elementos*, que foi descrito como o libro de texto con máis éxito da historia pois foi utilizado na ensinanza da xeometría durante máis de 2000 anos. O libro de poesía, cuxos capítulos levan títulos procedentes das definicións e postulados euclidianos, é só un dos innumerables testemuños da enorme influencia dos *Elementos* na cultura occidental, que non se limita ás matemáticas e se estende tamén a eidos como a filosofía, a literatura e as artes. Ó longo de máis de 20 séculos, os *Elementos* foron traducidos a moitos idiomas, entre os que xa podemos dicir que se atopa o galego, grazas ó coidadoso traballo de Ana Gloria Rodríguez Alonso e Celso Rodríguez Fernández, que agora prologamos. Nos comentarios que seguen, utilizarei esta tradución ó referirme ós resultados dos *Elementos*, os cales serán denotados polo número do libro seguido do da proposición. Por exemplo, a Proposición I.5 é a proposición número cinco do libro primeiro que afirma: «Dos triángulos isósceles, os ángulos da base son iguais entre si e, se se prolongan as rectas iguais, os ángulos baixo a base serán iguais entre si»[1]. A Ilustración 1 mostra un

[1] Esta proposición era coñecida na Idade Media como *pons asinorum* ('a ponte dos asnos'), quizais pola forma, que recorda unha ponte, do debuxo que a ilustra, aínda que tamén se suxeriu que o nome se debe a que a proposición servía como unha proba que os parvos serían incapaces de superar. Outros resultados tamén recibiron nomes populares baseados no seu aspecto. Por exemplo, a representación gráfica da Proposición I.47 (o teo-

fragmento do papiro *Oxyrhynchus I 29* no que se pode ver un dos máis antigos diagramas ilustrativos da obra de Euclides. O diagrama ilustra a Proposición II.5: «Se unha liña recta se corta en partes iguais e desiguais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos desiguais dela enteira xunto co cadrado da recta do medio dos cortes é igual ó cadrado da metade».

O método euclidiano

De Euclides sábese moi pouco e ata se chegou a pór en dúbida que fose unha única persoa —outras alternativas son que Euclides era o líder, ou mesmo o pseudónimo colectivo, dun grupo de matemáticos— aínda que a maioría dos expertos cren que así foi. O único apuntamento histórico sobre a vida de Euclides procede dun parágrafo nun comentario de Proclo escrito no século V, onde nos di que viviu e ensinou en Alexandría en torno ó ano 300 a. C. Del cóntanse un par de historias que, aínda sen unha garantía de veracidade —pois historias similares contáronse tamén doutros personaxes da antigüidade grega— serven para dar unha idea da percepción histórica do personaxe. A primeira dá testemuño do desprezo que Euclides —e en xeral, os matemáticos gregos cuxa obra foi recollida nos *Elementos*— sentía polas aplicacións prácticas das matemáticas[2]. Cando un estudante lle preguntou que podería gañar ó aprender xeometría, Euclides chamou un escravo e díxolle: «Dádelle ó mozo unha moeda posto que ten que gañar algo co que aprende». A outra anécdota prodúcese cando o rei Ptolomeo I lle pregunta a Euclides se hai unha forma rápida de aprender xeometría, ó que se di que Euclides respondeu: «Non hai un camiño real cara á xeometría».

rema de Pitágoras) recibiu a miúdo o nome de *a cadeira da noiva* e en Rusia era coñecida como *os pantalóns de Pitágoras*.

2 Este desprezo é posto de manifesto por Bertrand Russell (Russell 1984), quen menciona que os gregos estudaron as seccións cónicas sen chegar a imaxinar que puidesen ter utilidade ningunha, e que non foi ata moito despois, a través dos descubrimentos de Galileo e Kepler —quen observaron que os proxectís se moven en parábolas e os planetas en elipses— cando se fixeron evidentes as aplicacións á guerra e á astronomía.

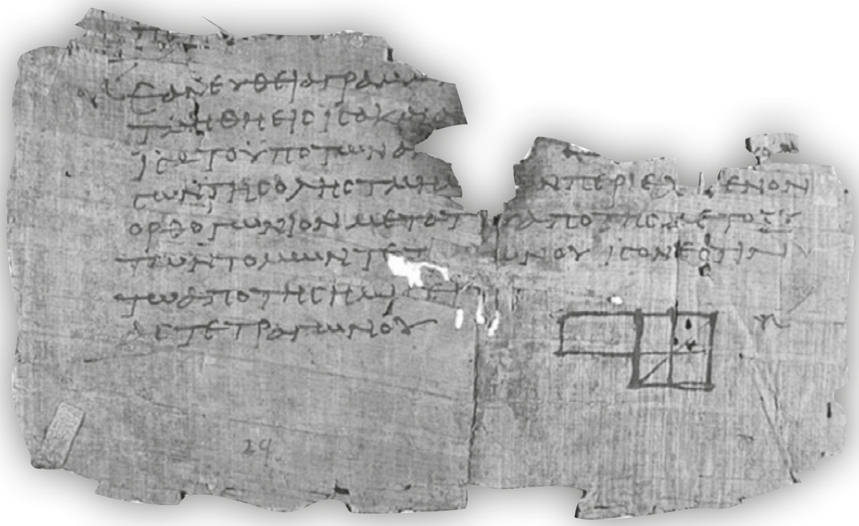


Ilustración 1. Fragmento do papiro *Oxyrhynchus I 29* coa demostración da Proposición II.5 dos *Elementos*

Os libros I-VI dos *Elementos* están dedicados á xeometría plana e á teoría da proporción, os libros VII-X tratan a teoría de números, e, finalmente, os libros XI-XIII dedícanse á xeometría do espazo, culminando coa construción dos cinco *sólidos platónicos* (ou, en terminoloxía máis actual, *poliedros regulares*). Foi o texto matemático do que máis edicións se fixeron e xa a finais do século XIX rexistrábanse máis de mil; tamén foi o texto matemático que foi traducido a máis idiomas. Os *Elementos* recollen e sistematizan a matemática grega e crese que a maior parte do seu contido non se debe a Euclides senón a outros matemáticos que o precederon, de modo que se supón que Euclides foi ante todo un ensinante de primeira liña. Do que non cabe dúbida é de que os *Elementos* teñen o inmenso mérito de formular unha presentación das matemáticas dun rigor inusitado que ía permanecer insuperada durante 2000 anos e moitas de cuxas características esenciais —aínda que, está claro, non todas— perviven nas matemáticas actuais. Unha idea da vixencia que tiveron os *Elementos* ó longo dos séculos proporciónaa un libro publicado en 1879 polo matemático inglés Charles L. Dodgson, máis coñecido como Lewis Carroll, o autor de *Alicia no país das marabillas*. O libro de Dodgson titúlase *Euclid and his modern rivals* (Dodgson 2009) e nel faise unha comparación dos *Elementos* con trece textos de xeometría da época —finais do século XIX— chegando á conclusión de que ningún destes textos supera os *Elementos*. Máis recentemente, xa en pleno século XX, Bertrand Russell[3] di o seguinte (Russell 1984, pp. 220-221):

> Euclides, que aínda era, cando eu era novo, o único texto recoñecido de xeometría para mozos [...] A maior parte dos *Elementos* non era orixinal, pero a orde das proposicións e a estrutura lóxica eran súas en gran

[3] Na súa autobiografía, Russell describe así o seu primeiro encontro cos *Elementos*: «Ós once anos comecei Euclides co meu irmán como titor. Este foi un dos grandes acontecementos da miña vida, tan abraiante coma o primeiro amor. Non imaxinara que houbese nada tan delicioso no mundo».

> medida. Canta máis xeometría estuda un, máis admirables resultan [...]
>
> Os *Elementos* de Euclides é certamente un dos máis grandes libros que se escribiron, e un dos máis perfectos monumentos do intelecto grego.

Estas son só algunhas das innumerables palabras de eloxio que os *Elementos* recibiron, sendo tamén significativas as de Heath no prólogo da que se considera a tradución definitiva á lingua inglesa (Heath 1956), que foi publicada por primeira vez en 1908:

> A obra de Euclides vivirá moito despois de que todos os libros de texto actuais sexan superados e esquecidos. É un dos máis nobres monumentos da antigüidade; ningún matemático digno deste nome pode permitirse non coñecelo [...]

Estas declaracións poñen de manifesto a gran preponderancia que os *Elementos* seguían tendo no ensino da xeometría no paso do século XIX ó século XX, e non sería ata un pouco máis tarde cando se produciu a famosa declaración do matemático francés Jean Dieudonné, quen no «Colloque de Royaumont» que, patrocinado pola Organización de Cooperación Económica Europea, tivo lugar en novembro de 1959, pronunciou na conferencia inaugural un berro de guerra que se fixo famoso: «À bas Euclide!»[4]

Este coloquio marcou a introdución da chamada *matemática moderna* no ensino secundario, o que representaba pór énfase na teoría de conxuntos e nas estruturas, e abandonar o método tradicional de ensino da xeometría baseado en Euclides, que foi substituído por unha presentación que facía uso da álxebra

[4] Está claro que o berro de Dieudonné non debe ser tomado literalmente; a súa declaración non ía contra Euclides senón contra unha forma de ensinar a xeometría que permanecera anquilosada durante moito tempo, incidindo demasiado en detalles irrelevantes sobre a «xeometría do triángulo» e cousas parecidas, e distanciándose moito da xeometría que estaban a facer os matemáticos contemporáneos.

lineal. Aínda que o alcance desta reforma foi suavizado posteriormente, este momento marcou a relegación definitiva dos *Elementos* como texto didáctico[5].

A importancia de Euclides non se debe á creación de resultados matemáticos pois aqueles que se atopan nos *Elementos* proceden case todos da obra dos seus predecesores. O que fixo Euclides foi organizalos sistematicamente e o máis crucial é que comprendeu a importancia do concepto de demostración e o feito de que unha demostración[6] tiña que basearse nunhas hipóteses previas. Así, nos *Elementos* establécese un camiño cara á verdade que marca a pauta que foi seguida desde entón:

Definicións -> Axiomas -> Teoremas (e Proposicións) -> Demostracións.

O punto de partida de Euclides son, pois, as definicións. A idea básica de definición é a mesma que temos hoxe en día: trátase de dar un significado preciso ós termos definidos. Pero ata unha idea tan simple como esta plantexa problemas lóxicos, pois unha definición ten que basearse necesariamente en conceptos cuxo significado xa está establecido.

Por exemplo, a Definición I.15 de Euclides vén dicir, usando unha linguaxe máis actual, que unha circunferencia é un conxunto de puntos tal que os segmentos de recta que unen os puntos da circunferencia cun punto fixo O son todos iguais. Isto dinos o que é unha circunferencia pero para iso temos que saber

---

5 Dieudonné era un membro destacado do Grupo Bourbaki, formado principalmente por matemáticos franceses, que adoptou o nome colectivo *Nicolas Bourbaki* para escribir a partir de 1935 un tratado autocontido das partes centrais das matemáticas modernas que facía uso da teoría de conxuntos e as estruturas, cun nivel de rigor máis alto que o que era habitual na época. O tratado, facéndose eco da obra de Euclides, chámase *Éléments de mathématique*.

6 A estrutura dedutiva dos *Elementos* é posta de manifesto implicitamente en (Netz 1999, p. 115), onde, despois de aludir á «monstruosa repetitividade» dos textos matemáticos gregos, menciónase que a palabra *ara* ('logo, polo tanto') é usada 2778 veces nos *Elementos*, sobre un total de, aproximadamente, 150000 palabras.

previamente o que é un punto, o que é un segmento de recta e o que significa que os segmentos de recta sexan iguais.

Isto fai necesario impor certas regras pois, por exemplo, se definimos o obxecto A facendo uso do obxecto B e, á súa vez, o obxecto B facendo uso do obxecto A, estariamos utilizando un razoamento circular que non é aceptable loxicamente. Agora ben, se non se utilizan razoamentos circulares e cada definición se formula en termos de conceptos que han de ser definidos previamente, chégase a unha *regresión infinita* que tampouco é aceptable, e iso leva á conclusión de que ten que haber algunhas definicións que sexan as primeiras e que non han de basearse en conceptos previamente definidos.

Todo isto plantexaba unha seria dificultade que Euclides tratou de resolver recorrendo á intuición ou aludindo a conceptos ou a certas imaxes visuais que se supón que xa están presentes na nosa mente. Así, por exemplo, a definición dunha recta como «unha liña que está tendida por igual respecto ós seus propios puntos» non é moi informativa, e tampouco o é a primeira das súas definicións que xa mencionamos: «un punto é o que non ten partes». Por iso o enfoque moderno consiste en deixar que estes conceptos permanezan *sen definir* e que todo o que sabemos sobre eles sexa que teñen que satisfacer uns axiomas que lles son impostos. Na actualidade, conservando dalgunha forma o espírito de Euclides, desenvolvéronse as definicións sobre a base da teoría de conxuntos, na cal se parte duns axiomas que haberán de ser aceptados como intuitivamente evidentes, mentres que outros axiomas, como os da xeometría euclidiana plana, pasan a ser propiedades demostrables de obxectos construídos en termos conxuntistas.

Nótese que a mesma restrición que hai que impor ás definicións para evitar unha regresión infinita (a necesidade de partir dalgúns conceptos non definidos) manifístase cando se demostran os teoremas ou proposicións mediante razoamentos lóxicos a partir doutras proposicións previamente demostradas. Tamén neste caso, para evitar a regresión infinita é necesario tomar como punto de partida algúns enunciados que han de ser aceptados sen demostración e que se denominan axiomas ou postulados. Todo isto foi comprendido por Euclides e nos *Elementos* cada teorema ou proposición baséase nas definicións, os axiomas e as proposicións previamente demostradas, utilizando as regras da lóxica para obter as demostracións en forma similar ó que se segue facendo hoxe en día, polo menos no que tradicionalmente se veu chamando «matemática pura». Esta estrutura foi descrita por Yuri Manin, un dos matemáticos máis destacados da segunda metade do século XX coas palabras seguintes:

> Véxase calquera artigo contemporáneo nunha das revistas de investigación destacadas como *Annals of Mathematics* ou *Inventiones Mathematicae*. Tipicamente, subdivídese en fragmentos razoablemente curtos chamados Definicións, Teoremas (con Lemas e Proposicións como subespecies), e Demostracións, que poden ser considerablemente máis longas. Estes son os bloques estruturais básicos dunha exposición matemática moderna; floreos como motivación, exemplos e contraexemplos, discusión de casos especiais, etc., fana máis viva. Esta tradición organizativa do coñecemento matemático é herdada dos gregos, especialmente, dos *Elementos* de Euclides. O obxectivo dunha definición é introducir un obxecto matemático. O obxectivo dun teorema é enunciar algunhas das súas propiedades, ou interrelacións entre varios obxectos. O obxectivo dunha demostración é facer que tal enunciado sexa convincente, presentando un razoamento subdividido en pequenos pasos, cada un dos cales se xustifica como un argumento «convincente» elemental. (Manin 2007)

Manin tamén resume isto dándolle a volta a unhas palabras de Bertrand Russell: «para dicilo simplemente, primeiro explicamos de que estamos falando e logo explicamos porque o que estamos dicindo é verdade».

O anterior pon de manifesto a gran importancia dos *Elementos* de Euclides e o profundo impacto que tiveron sobre o desenvolvemento e a organización das matemáticas ata hoxe en día, pero tamén é conveniente sinalar que, no que se refire ós axiomas, o noso punto de vista é bastante diferente. Os axiomas e postulados de Euclides eran considerados como verdades absolutas —que describían o espazo físico, no caso da xeometría. En consecuencia, os teoremas que se deducían deles a través da lóxica eran considerados «verdadeiros» no mesmo sentido absoluto e tiveron que pasar moitos séculos ata que se chegou a comprender que había outros conxuntos de axiomas que levaban a unha xeometría diferente pero igualmente consistente, unha conclusión á que só se chegou co descubrimento das xeometrías non-euclidianas no século XIX. Un dos grandes legados de Euclides manifestase tamén neste contexto, e foi terse decatado de que os axiomas e postulados eran *indemostrables*, unha idea que segue sendo perfectamente válida.

Outra diferenza, non tan importante, manifestase na consideración do papel das demostracións. A imaxe ideal dunha demostración orixínase tamén nos *Elementos* e é, en palabras de Manin:

> […] unha sucesión de argumentos elementais cuxas regras de formación son establecidas antes de que a demostración comece e, idealmente, son comúns a todas as demostracións que se deseñaron ou que se poden deseñar no futuro […] Esta imaxe ideal é tan ríxida que acabou sendo o obxecto de estudo matemático no contexto da metamatemática. Pero na matemática creativa, o papel da demostración non está en absoluto restrinxido á súa función como portadora de convicción. Doutro xeito, non habería necesidade de que Gauss considerase oito (!) demostracións diferentes da Lei de Reciprocidade Cuadrática. (Manin 2012)

Estase incidindo aquí en que unha demostración é algo máis que un argumento convincente e o exemplo da Lei de Reciprocidade

Cuadrática (LRC) ilústrao perfectamente: non só Gauss deu varias demostracións diferentes —o que era innecesario para convencernos de que o resultado era certo— senón que, como se pode ver na páxina web (Lemmermeyer), mantida por Franz Lemmermeyer, na actualidade hai rexistradas xa máis de 240 demostracións da LRC utilizando métodos moi diversos, e é previsible que este número siga crecendo...

Isto contradí a idea —que se manifesta a miúdo nos estudos fundacionais— consistente en identificar as demostracións con deducións formais nunha lóxica especificada, cuxo único propósito é o de servir como verificación dun resultado. Tamén é frecuente considerar que este era o único propósito das demostracións euclidianas, pero isto non está de todo claro e pódese observar que, por exemplo, o propio Euclides deu dúas demostracións moi diferentes do teorema de Pitágoras nas Proposicións I.47 e VI.31 dos *Elementos*[7].

Máis aló do concepto de dedución formal, na actualidade está bastante estendida a idea de que a demostración debe ser, ante todo, unha explicación e que o que a lexitima é a súa capacidade de facernos comprender os feitos matemáticos. A idea de que as demostracións son portadoras de coñecemento matemático é defendida en forma persuasiva por Yehuda Rav (Rav 1999, p. 22) quen, tomando como exemplo diversas demostracións da Proposición IX.20 dos *Elementos* sobre a infinidade dos números primos, di:

> As demostracións, concluímos, conteñen información específica significativa sobre o tema, indo máis aló do enunciado incorporado na formulación dun teorema.

7 A Proposición VI.31 é máis xeral e a súa demostración é unha das poucas dos *Elementos* que se atribúen ao propio Euclides. Nas palabras de Michael Atiyah, un dos matemáticos contemporáneos máis importantes: «Calquera bo teorema debería ter varias demostracións, cantas máis mellor. Por dúas razóns: usualmente, diferentes demostracións teñen diferentes fortalezas e debilidades, e xeneralízanse en diferentes direccións —non son só repeticións unhas doutras» (Raussen e Skau 2005). En (Maor 2007) discútense varias demostracións do teorema de Pitágoras e menciónase que se coñecen máis de 400, e en (Meštrović 2012) catalóganse 169 demostracións do teorema de Euclides sobre a infinidade dos primos.

> Ou, para falar metaforicamente, *os teoremas son os titulares, as demostracións son a historia completa.*

A mesma idea e sucintamente expresada por Manin en (Manin 1977, p. 49) onde, logo de discutir o papel da demostración di: «The moral: a good proof is one that makes us wiser».

Na actualidade existen moitos tipos de demostracións que, por diferentes medios, cumpren a súa función de resultar convincentes e, á vez, transmitir coñecemento matemático. Algunhas das formas que pode adoptar unha demostración foron resumidas en (Krantz 2010, p. 8) do xeito seguinte:

> E que é unha demostración? Unha demostración é un dispositivo retórico para convencer a outro matemático de que un enunciado dado (o teorema) é verdadeiro. Así, unha demostración pode adoptar moitas formas diferentes. A forma máis tradicional de demostración matemática é a dunha sucesión de enunciados enlazados por regras estritas da lóxica [...] Hoxe, unha demostración podería (e moitas veces faino) tomar a forma tradicional que se remonta 2300 anos á época de Euclides. Pero tamén podería consistir nun cálculo por computador. Ou podería consistir nunha simulación ou un modelo por computador. Ou podería consistir nunha computación usando un paquete de álxebra computacional como Mathematica ou Maple ou Matlab. Tamén podería consistir nunha combinación de varias desas técnicas.

Abundando nisto, tamén merece a pena mencionar, aínda que sexa brevemente, que existen diversas concepcións filosóficas sobre a natureza das matemáticas que postulan diferentes variantes do concepto de demostración. A idea tradicional é que as demostracións nos *Elementos* seguen as pautas marcadas polo realismo platónico, que considera os obxectos matemáticos como universais que teñen unha existencia obxectiva que é independente do noso coñecemento dos mesmos. Esta concepción está moi afastada do construtivismo, que basicamente postula que as demostracións sexan *construcións* e non acepta como válidas demostracións existenciais nas que, por exemplo, se demostra a existencia dun número enteiro que satisfai unha certa propiedade polo método de redución ó absurdo, que consiste en probar que a hipótese de que tal número non existe leva a unha contradición. Euclides utilizou este método[8] pero tamén se pode destacar que moitas das súas demostracións son construtivas e algúns dos seus teoremas adoptan, como veremos, a forma de construcións ou de algoritmos. Neste caso podemos pensar que o que Euclides trataba de obter era unha aproximación construtiva ó ideal platónico, o que non é incompatible coa presunción de que aceptaba plenamente este ideal. Porén, está claro que en Euclides hai unha visión construtiva que, aínda que relegada a un segundo termo durante moitos séculos, enlaza moi ben cos desenvolvementos algorítmicos e computacionais de tempos máis recentes. Un exemplo claro disto atópase xa na Proposición I.1, «Construír un triángulo equilátero sobre a recta finita dada» que, como se sinala en (Edwards 2005, p. 6) sería probablemente formulada por un autor máis moderno na forma «Dado un segmento de recta, existe un triángulo equilátero do cal é un dos lados». Euclides era plenamente consciente da diferenza entre as demostracións construtivas e as que non o eran, como demostra o feito de que esta demostración —e outras similares— finaliza coa frase «o que, xustamente, era preciso facer», en contraste con «o que, xustamente, era preciso demostrar» que usa ó final das demostracións «existenciais» (véxase, a propósito disto, a Nota ó pé número 24 do Libro I).

O comentario anterior é só unha moi breve aproximación á cuestión do papel que as demostracións xogan nos *Elementos* e, máis xeralmente, en Matemáticas. Para unha discusión máis detallada remitímonos á bibliografía, en particular a (Netz 1999) —que inclúe unha análise pormenorizada das demos-

[8] Hardy (Hardy 2005, pp. 94-95) di: «O método de reductio ad absurdum, que tanto compracía a Euclides, é unha das máis finas armas que pode empregar un matemático. É un gambito moito máis fermoso que calquera dos que poida ofrecernos o xogo do xadrez. Un xogador de xadrez pode sacrificar un peón ou mesmo unha peza, pero un matemático sacrifica a partida completa».

tracións euclidianas— (Krantz 2010), (Manin 2012), e tamén a (Gómez Pardo 2008) para os aspectos conxuntistas.

Os inconmensurables

Os gregos vían as matemáticas como unha creación divina con dúas ramas moi importantes, a aritmética e a xeometría (usarei o termo *aritmética* co sentido do que se denomina a miúdo *teoría de números* e que adoitaba tamén chamarse *aritmética superior* —*higher arithmetic*, en inglés— para distinguila da aritmética elemental que trata das propiedades básicas das operacións con números). Cara ó ano 500 a.C. a escola pitagórica proclamaba que os números gobernaban o Universo pero, uns 150 anos máis tarde, Platón afirmaba —segundo nos transmitiu Plutarco— que «Deus xeometriza eternamente». Entre as dúas vías, os gregos inclináronse pola xeometría, que adquiriu gran preponderancia nas súas matemáticas onde, como se aprecia nos *Elementos*, non só é o tema central senón que a súa linguaxe —a linguaxe xeométrica— é a que se utiliza tamén en moitos casos para describir os resultados e problemas aritméticos.

Un destes resultados, debido á escola pitagórica e recollido nos *Elementos*, foi, sen dúbida, clave na elección que fixeron os gregos. Trátase do *teorema de Pitágora*s (I.47), do que Proclo, no seu comentario sobre o primeiro libro de Euclides, di (véxase a Nota 253 do Libro I):

> Se escoitamos ós que lles gusta contar cousas antigas, encontraremos que atribúen este teorema a Pitágoras e din que sacrificou un boi polo seu descubrimento. Pola miña parte, aínda que admiro ós que primeiro coñeceron este teorema, máis me marabilla o autor dos *Elementos* […]

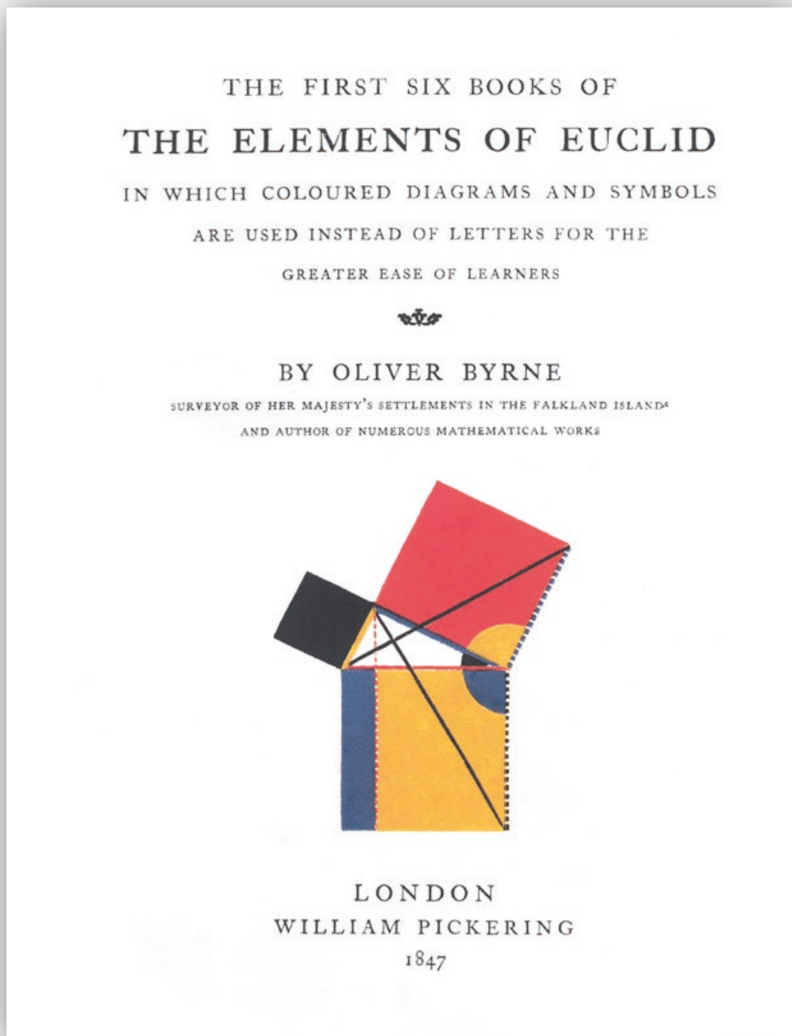
O teorema de Pitágoras establece unha conexión entre a forma e os números, é dicir, entre a xeometría e a aritmética pero na formulación de Euclides os números non aparecen:

«Nos triángulos rectángulos, o cadrado do lado que está tendido baixo o ángulo recto é igual ós cadrados dos lados que conteñen o ángulo recto».

Isto dinos que a área do cadrado construído sobre a hipotenusa dun triángulo rectángulo é igual á área combinada dos cadrados construídos sobre os catetos. Aquí a área non é un número e, aínda que non estea claramente definida, pódese deducir, cf. (Hartshorne 2000), que o concepto de igualdade de áreas implícito nos *Elementos* se obtén cortando as figuras en pezas e engadindo ou subtraendo figuras congruentes. Este teorema ten un corolario que produce un resultado altamente perturbador que probablemente foi, cf. (Reid 1963, p. 9), o que relegou a aritmética no mundo matemático grego: *se se considera un triángulo rectángulo isósceles, a hipotenusa é inconmensurable cos catetos*. O caso máis sinxelo obtense cando se toma un cadrado unidade: *non pode haber un número enteiro nin unha razón de números enteiros que represente a lonxitude da diagonal do devandito cadrado*. En termos máis modernos, expresamos isto dicindo que *a raíz cadrada de dous é un número irracional*. Pero os gregos non admitían a posibilidade de números irracionais e só traballaban cos enteiros ou coas súas razóns (números racionais)[9], polo que este era un resultado altamente perturbador e así, dado que a diagonal do cadrado non podía ser representada por un número, optaron por representala por un segmento dunha recta. Este proceso expresouno maxistralmente B. L. van der Waerden:

> Agora dicimos que a lonxitude da diagonal é o «número irracional» $\sqrt{2}$ e sentímonos superiores aos pobres gregos que «non coñecían os irracionais». Pero os gregos coñecían razóns irracionais moi ben [...] Que

9 Audun Holme, en (Holme 2010, p. 47), sinala que probablemente a visión atomista do mundo físico que moitos gregos tiñan foi unha das motivacións desta opción aínda que isto non está de todo claro pois, como é ben sabido, o atomismo non era universalmente aceptado e, en particular, foi rexeitado por Aristóteles.



THE FIRST SIX BOOKS OF
THE ELEMENTS OF EUCLID
IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS

BY OLIVER BYRNE
SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS
AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

Ilustración 2. Portada da edición dos *Elementos* feita por Oliver Byrne, na que se recolle o debuxo que ilustra a Proposición I.47

> non considerasen $\sqrt{2}$ como un número non era o resultado da ignorancia senón a estrita consecuencia da definición de número. *Arithmos* significa cantidade, xa que logo, número enteiro. O seu rigor lóxico nin sequera lles permitía admitir fraccións; substituíronas por razóns de enteiros [...] No dominio dos números (enteiros positivos), a ecuación $x^2 = 2$ non pode ser resolta nin sequera usando razóns de números. Pero é resoluble no dominio dos segmentos pois a diagonal do cadrado é unha solución. En consecuencia, para obter solucións exactas de ecuacións cuadráticas temos que pasar do dominio dos números ó das magnitudes xeométricas. A álxebra xeométrica é válida tamén para os segmentos irracionais e, a pesar de todo, unha ciencia exacta. É, polo tanto, a necesidade lóxica e non o mero deleite no visible o que obrigou os pitagóricos a transmutar a súa álxebra nunha forma xeométrica. (Van der Waerden 1975, p. 125)

O descubrimento dos números irracionais tivo profundas consecuencias e Proclo insinúa que o seu autor pereceu afogado nun naufraxio provocado para facer que «o inexpresable e inimaxinable permanecese velado para sempre». A consecuencia máis importante foi o provocar unha separación entre a aritmética e a xeometría (os números e o espazo) que perduraría polo menos ata o século XVII, cando Descartes introduciu as coordenadas para representar os puntos, e non cesaría definitivamente ata o século XIX. Para os gregos, as magnitudes xeométricas eran continuas e as numéricas eran discretas e, dado que non podían aceptar que a diagonal do cadrado unidade estivese representada por un número, este descubrimento tivo unha influencia decisiva na elección do camiño —e da linguaxe— que realizaron, dando preferencia ó xeométrico sobre o aritmético. Esta preferencia pola visión xeométrica ten un claro reflexo nos *Elementos*, en cuxa primeira frase xa se manifesta e onde tamén se aprecia ata no tratamento das lonxitudes arbitrarias, para o que se recorre a enxeñosos métodos —a teoría da proporción e o método exhaustivo ou de esgotamento— que permiten estudalas en termos de números racionais.

Con todo, existe tamén outro factor que puido influír nesta elección como sinala Manin en (Manin 2006). Partindo da observación de que a dicotomía xeometría/aritmética, que andando o tempo se transformou na dicotomía xeometría/álxebra, encárnase a nivel humano na dicotomía visión/dedución, a cal se pode relacionar cos modos de pensamento cerebro-dereito/cerebro-esquerdo que foron estudados a partir do traballo orixinal de Roger Sperry (premio Nobel en 1981), Manin propón a Euclides e a Leibniz, respectivamente, como representantes destes dous modos. Así cabe imaxinar que unha posible característica do cerebro de Euclides puido ter unha profunda influencia, a través dos *Elementos*, no desenvolvemento das matemáticas durante moitos séculos[10].

En todo caso, aínda que houbo declaracións que non deben tomarse demasiado literalmente, como a de Hermann Weyl, «In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of each individual mathematical domain», a xeometría/topoloxía, a álxebra e a aritmética hai xa moito tempo que deixaron de discorrer por camiños distintos e na actualidade colaboran estreitamente. A xeometría alxébrica e a topoloxía alxébrica son algúns dos campos matemáticos que adquiriron máis forza ó longo do século XX e outro é a xeometría alxébrica aritmética que, como o seu nome suxire, é un punto de encontro da álxebra, a xeometría e a aritmética.

A xeometría alxébrica aritmética trata de resolver problemas de teoría de números usando as técnicas da xeometría alxébrica (que aplica a álxebra ó estudo de problemas xeométricos). En particular, isto engloba o estudo das *ecuacións diofánticas* (ecuacións polinómicas cuxas variables toman valores enteiros)

10 Outro destacado matemático, Barry Mazur, compara en (Mazur) a Euclides con Grothendieck —matemático contemporáneo que renovou a xeometría alxébrica— quen nunca sentiu a necesidade de facer cálculos concretos. Así menciona que o libro VII dos *Elementos* sobre teoría de números non contén ningún número. Hai que facer notar non obstante que, nunha linguaxe puramente xeométrica como a que usou Euclides, a construción dun diagrama pode ser vista como un cálculo concreto.

usando métodos álxebro-xeométricos e así un dos resultados matemáticos máis importantes dos demostrados nos últimos anos, a saber, o *último teorema de Fermat*, enmárcase claramente neste campo. As ecuacións diofánticas deben o seu nome a outro matemático grego que tamén era de Alexandría: Diofanto, que viviu no século III e é, xa que logo, posterior a Euclides. Pero, en realidade, as ecuacións diofánticas xa aparecen con Pitágoras e unha das máis básicas é, precisamente, a que expresa a relación entre as lonxitudes a, b, dos dous catetos dun triángulo rectángulo e a lonxitude c da hipotenusa:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Os enteiros positivos a, b, c, son entón solucións da ecuación diofántica $x^2 + y^2 = z^2$, e os triplos (a, b, c) así obtidos reciben o nome de triplos pitagóricos, dos cales os máis famosos son (3, 4, 5) e (5, 12, 13) que, xunto con moitos outros, xa eran coñecidos polos babilonios moito antes de Pitágoras como testemuña a taboíña de arxila Plimpton 322, datada entre os anos 1600 e 1900 a. C. (véxase a Nota 253 do Libro I). Non é difícil demostrar que a fórmula xeral que xera todos os triplos pitagóricos é:

$$a = (m^2 - n^2)r, \quad b = 2mnr, \quad \mathrm{c} = (m^2 + n^2)\, r,$$

onde m, n e r son enteiros (véxase, por exemplo, (Bressoud e Wagon 2000, Proposition 1.13)). É interesante sinalar que unha solución equivalente a esta, formulada na linguaxe xeométrica aínda que é esencialmente aritmética, é dada por Euclides no lema seguinte á Proposición X.28 dos *Elementos*: «Atopar dous números cadrados de xeito que tamén a súa suma sexa cadrado».

Outra ecuación diofántica moi importante que tamén xurdiu no contexto dos problemas plantexados pola irracionalidade de $\sqrt{2}$, é a ecuación de Pell[11]:

$$x^2 - dy^2 = \pm 1,$$

[11] O nome da ecuación procede dun erro de Euler, que atribuíu a John Pell, matemático inglés do século XVII, un método para resolvela cando o que a resolveu realmente, en resposta a un desafío de Fermat, era outro matemático inglés, William Brouncker. Lagrange foi o primeiro en demostrar que a ecuación de Pell sempre ten solución —de feito, que ten infinitas solucións.

onde d é un enteiro que non é un cadrado. A solución da ecuación de Pell xoga un papel central na doutras ecuacións diofánticas máis xerais e tamén foi utilizada na demostración dun teorema moi importante que, con achegas de Martin Davis, Hilary Putnam e Julia Robinson, foi culminado por Yuri Matiyasevich en 1970 e proporcionou a solución do chamado *problema décimo de Hilbert* ó demostrar que non existe un algoritmo que permita decidir se unha ecuación diofántica arbitraria (dada por un polinomio con coeficientes enteiros) ten solución. Os pitagóricos estudaron o caso máis sinxelo da ecuación de Pell:

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

pois déronse conta de que se x e y son solucións grandes desta ecuación, entón x/y é unha aproximación racional de $\sqrt{2}$, cf. (Anglin e Lambek 1995, pp. 49-50), (Bressoud e Wagon 2000, Theorem 7.11). Os pitagóricos atoparon un método para xerar solucións cada vez maiores da ecuación, que permiten obter aproximacións racionais de $\sqrt{2}$ que están tan próximas a este valor como se desexe ou, na terminoloxía matemática estándar que se orixinou moito despois, que teñen por límite $\sqrt{2}$. Para iso consideraron as relacións recorrentes:

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n,$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n,$$

que, como se pode demostrar facilmente por indución, teñen a propiedade de que se o par (a_n, b_n) é unha solución da ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ entón o par (a_{n+1}, b_{n+1}) tamén o é. Así, partindo de $a_1 = 1$ e $b_1 = 1$, obtéñense sucesivamente as solucións:

$$(3,2),\ (7, 5),\ (17,12),\ (41, 29),\ \ldots$$

as cales, á súa vez, proporcionan a sucesión de aproximacións racionais a $\sqrt{2}$:

$$3/2,\ 7/5,\ 17/12,\ 41/29,\ \ldots$$

de modo que se verifica que $^{a_n}/_{b_n} \to \sqrt{2}$ cando $n \to \infty$ (a sucesión tende a $\sqrt{2}$ cando n tende a infinito).

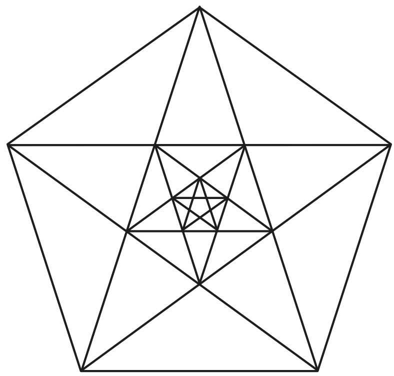
Este proceso é descrito por Proclo nun comentario á *República* de Platón, e en (Stillwell 2010, p. 44) menciónase que Van der Waerden suxeriu que o método que os gregos usaron consistiu en aplicar o algoritmo de Euclides (que discutirei máis adiante) a segmentos de recta. Este método, descrito en (Stillwell 2010, pp. 45-46), era chamado άνθυφαίρεσις (*antifairesis*, subtracción recíproca ou subtracción continua, tamén chamada *antanairesis*) e proporciona un magnífico exemplo da capacidade dos gregos —que Euclides ilustra tan ben— para combinar o pensamento algorítmico coa intuición xeométrica. Partindo de dúas lonxitudes dadas, a, b, constrúese unha sucesión (a_1, b_1), (a_2, b_2), … subtraendo repetidamente a máis pequena da máis grande. Se a e b son múltiplos enteiros dunha certa unidade, entón o proceso termina pero se a e b son inconmensurables, continúa para sempre. O algoritmo da antifairesis pode ser representado en pseudo-código da seguinte maneira:

Antifairesis

Input: Magnitudes a, b

while $a \neq b$ **do**
if $a > b$ **then**
    $a := a - b$
else
    $b := b - a$
end if
end while
return a

Quizais o exemplo máis sinxelo é o que serve para demostrar a inconmensurabilidade da diagonal e o lado dun pentágono regular. Se a e a lonxitude da diagonal e b a lonxitude do lado, e chamamos (a_i, b_i) ó par de valores de a e b obtidos despois da i-ésima iteración do «bucle while» do algoritmo, entón $(a_1, b_1) = (a - b, b)$, $(a_2\ b_2) = (a - b, 2b - a)$, … e, como se pode apreciar visualmente inspeccionando a figura do pentagrama:



$a - b$ e $2b - a$ son, respectivamente, a diagonal e o lado do pentágono interior que aparece invertido, o que mostra que o proceso vaise repetir indefinidamente sen parar nunca e, xa que logo, que a diagonal e o lado son inconmensurables (véxase, por exemplo (Holme 2010, pp. 49-50) para unha explicación máis detallada). Alxebricamente, isto dinos que se chamamos $x = {}^{a}\!/_{b}$ á razón entre a diagonal e o lado, x satisfai a ecuación:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = 1 + \frac{1}{x}$$

que equivale a $x^2 - x - 1 = 0$, cuxa raíz positiva é o *número áureo*[12]:

$$\phi = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1{,}6180 \dots$$

que, ademais das matemáticas, ten xogado un papel historicamente importante nas artes e, en particular, na pintura e na arquitectura e que, como vemos, xa estaba presente nos *Elementos*.

12 É tradicional usar a letra ϕ na honra do escultor grego Fidias de quen se di que usou o número áureo na súa obra.

A ecuación de Pell tamén serve para mostrar a grande dificultade que podían ter problemas computacionais ós que xa os gregos se enfrontaron. Un exemplo famoso é o *problema do gando* de Arquímedes, onde o tamaño da solución máis pequena é enorme. Este problema, que foi descuberto nun manuscrito achado a finais do século XVIII onde se formula nunha carta que Arquímedes escribe a Eratóstenes en forma de poema, pregunta polo número de touros e vacas de catro diferentes cores que pertencen ó deus Sol e que se sabe que satisfán unha serie de condicións aritméticas[13]. Unha análise destas condicións leva á conclusión de que a solución se obtén a partir da ecuación de Pell:

$$x^2 - 410286423278424y^2 = 1,$$

que pode ser resolta usando a ecuación de Pell máis manexable $x^2 - 4729494y^2 = 1$. O primeiro en resolver esta ecuación e, en consecuencia, o primeiro en resolvelo problema foi A. Amthor en 1880, quen atopou que na menor solución posible[14] o número total de gando está dado por un número de 206545 díxitos decimais, dos que calculou os catro primeiros que serían 7766, aínda que logo se descubriu que o cuarto é erróneo, estando o erro motivado polo uso de logaritmos que non eran suficientemente precisos. O problema é discutido en detalle en (Lenstra Jr. 2002), e unha explicación da solución usando o programa de álxebra computacional Mathematica atópase en (Bressoud e Wagon 2000, pp. 232-238). Como sinala Lenstra, o número total de cabezas de gando ocupa corenta e sete páxinas e, escrito abreviadamente, é:

---

[13] Por exemplo, o número de touros brancos era igual «á metade mais un terzo do número de touros negros mais o número de touros castaños», e así ata completar nove condicións, a última das cales é que «o número de touros pintos mais o número de touros castaños é un número triangular» —onde os números triangulares son os da forma $n(n + 1)/2$, así chamados porque contan o número de obxectos que poden ser dispostos formando un triángulo equilátero.

[14] A ecuación e, xa que logo, o problema, ten infinitas solucións como demostrou Lagrange.

77602714 ... 237983357 ... 55081800,

onde cada un dos seis puntos representa 34420 díxitos omitidos[15].

No artigo de Lenstra discútese a eficiencia dos algoritmos coñecidos para resolver a ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$, e proponse outro que, a diferenza dos algoritmos clásicos que son de tempo exponencial en log d (e xa que logo moi pouco eficientes), é de tempo subexponencial (máis eficiente que exponencial pero menos que polinómico) se se verifican unha serie de conxecturas que aínda non puideron ser demostradas. No devandito traballo menciónase tamén un algoritmo cuántico debido a Hallgren que sería capaz de resolver o problema en tempo polinómico se existisen ordenadores cuánticos capaces de executalo. O traballo de Lenstra, xunto cos doutros autores que cita, mostra que un problema tan antigo aínda ofrece desafíos importantes ós matemáticos de hoxe en día.

Outra idea que se orixina con Diofanto e ten ramificacións que xogan un papel importante na xeometría alxébrica aritmética actual son os chamados métodos da *corda e a tanxente*, cuxos primeiros balbucidos proporcionaron a Diofanto un método moi potente para calcular os triplos pitagóricos. Diofanto comprendeu que un triplo pitagórico (a, b, c) define un triángulo rectángulo con lados de lonxitude racional $x = a/c$, $y = b/c$ e hipotenusa 1, o cal pode ser inscrito nunha circunferencia, da que a hipotenusa é o radio. Así, o par (x, y) convértese nas *coordenadas* dun punto P da circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

e achar os triplos pitagóricos é equivalente a achar os puntos racionais (é dicir, os puntos con coordenadas racionais) da circunferencia. Este é o prototipo do que hoxe en día se chama

15 Lenstra tamén sinala que varios eruditos alemáns do século XIX desconfiaban de que tantos touros e vacas puidesen caber na illa de Sicilia —como se afirmaba nas primeiras liñas do poema— pero, como outros observaron, o deus Sol a quen o gando pertencía, tiña sen dúbida capacidade para facer fronte a este problema...

un *problema diofántico*, moitos dos cales refírense a ecuacións cuadráticas (como é o caso mencionado) ou cúbicas para as que xa se coñece algunha solución obvia. O método que Diofanto usou para obter solucións a partir dunha solución dada non se coñece exactamente pero suponse que foi o precursor do método da corda-tanxente que desenvolveron Fermat e Newton no século XVII. Este método xoga un papel importantísimo na teoría das curvas elípticas que, á súa vez, xogaron un papel decisivo na resolución por Andrew Wiles en 1992 do *último teorema de Fermat*[16] e tamén teñen gran importancia, por exemplo, en criptografía. Todo isto demostra que existe unha conexión sutil pero profunda entre Pitágoras, Euclides, Diofanto e Arquímedes, e algúns dos máis difíciles problemas aritméticos e computacionais ós que se enfrontan os matemáticos de hoxe en día.

A xeometría

O corazón dos *Elementos* é a xeometría e, ó longo de máis de 20 séculos, os *Elementos* foron o manual de xeometría por excelencia. Se se contempla este manual dende un punto de vista actual, obsérvanse importantes diferenzas cos métodos que se utilizan hoxe en día pero tamén se pode apreciar a importancia das ideas que xa están presentes nel e a duradeira influencia que tivo no desenvolvemento da xeometría.

Na xeometría grega clásica os únicos números admitidos eran os enteiros positivos, do 2 en diante, pois o 1 tiña un status especial, era «a unidade» e, por suposto, non se incluía o cero nin os números negativos. As cantidades xeométricas non eran representadas por números, pois eran continuas e aínda estaba lonxe a introdución dos números reais que servirían para medilas. Así, as cantidades xeométricas como segmentos, ángulos ou áreas

---

16 Por certo que este teorema tamén se refire a unha ecuación diofántica, $x^n + y^n = z^n$, unha xeneralización obvia da ecuación pitagórica que segundo o teorema non ten solucións non triviais cando $n > 2$.

eran denominadas magnitudes e as operacións que se podían realizar coas magnitudes do mesmo tipo (ademais de comparalas para determinar se eran iguais[17] ou cal delas era maior) eran a adición e a subtracción, onde esta última só permitía subtraer a menor da maior. Como sinala Hartshorne (Hartshorne 2000), as magnitudes non podían ser multiplicadas, aínda que a operación de formar un rectángulo a partir de dous segmentos ou un volume a partir dun segmento e unha área, podía ser interpretada como unha forma de multiplicación na que o resultado era unha magnitude dun tipo diferente. A preferencia dos gregos pola linguaxe xeométrica levou ó desenvolvemento do que se adoita chamar *álxebra xeométrica*, onde a relación entre a álxebra e a xeometría é, en liñas xerais, a inversa da que se utiliza hoxe en día. En contraste coa visión moderna que utiliza a álxebra para o estudo da xeometría dando lugar á xeometría alxébrica, a álxebra xeométrica grega utiliza argumentos xeométricos para resolver problemas alxébricos. Un exemplo disto é a demostración xeométrica da identidade binomial:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

que está dada na Proposición II.4 dos *Elementos*.

O uso da linguaxe xeométrica ponse tamén de manifesto, como xa se indicou, para referirse ós números irracionais ó dicir que dúas magnitudes do mesmo tipo son conmensurables cando existe outra magnitude do mesmo tipo da que ambas as dúas

[17] Euclides usou un concepto de igualdade que non definiu (o que, máis modernamente, se chama congruencia) e no caso de segmentos (que nos *Elementos* son as rectas finitas) a igualdade ou desigualdade comprobábase simplemente colocando un sobre o outro para ver se coincidían, sen referirse para nada ó que hoxe chamariamos as súas lonxitudes. No caso de áreas isto era máis complicado e, ó non haber un número que as medise, a igualdade verificábase cortando as figuras en pezas e engadindo ou subtraendo triángulos congruentes, como xa mencionamos ó referirnos ó teorema de Pitágoras. A igualdade euclidiana é o que actualmente chamamos unha relación de equivalencia como consecuencia da primeira das nocións comúns, que postula que «As cousas iguais a unha mesma tamén son iguais entre si» (propiedade transitiva), e da sétima, «As cousas que cadran entre si son iguais entre si» (que proporciona a propiedade reflexiva). A simetría tamén se deduce destas dúas nocións comúns.

son múltiplos (ou, na terminoloxía euclidiana, *que as mide ás dúas*). No caso contrario, as magnitudes son inconmensurables e así, no canto de dicir que $\sqrt{2}$ é irracional, Euclides di que a diagonal do cadrado é inconmensurable co lado. A conexión álxebra-xeometría tamén está subxacente no hábil manexo das magnitudes que se fai no estudo dos triángulos semellantes, que en termos actuais son aqueles cuxos lados son proporcionais no sentido de que as razóns das lonxitudes dos lados correspondentes son iguais (como números reais). Estas razóns non son números nos *Elementos* pero Euclides desenvolve no libro V a teoría da proporción debida a Eudoxo que lle permite definir a igualdade entre razóns (Definición 5) e así tratar o concepto xeométrico de semellanza no libro VI, sen usar en ningún caso números para medir segmentos, ángulos ou áreas.

O desenvolvemento da xeometría proseguiu durante moitos séculos sen utilizar máis números que os enteiros positivos e mesmo na obra de Descartes, xa en pleno século XVII, considéranse polinomios con coeficientes enteiros cuxas raíces poden ser calculadas cando son á súa vez números enteiros, pero son construídas xeometricamente en caso de non selo. Non foi, finalmente, ata o século XIX cando Dedekind deu unha definición rigorosa dos números reais para os que definiu operacións aritméticas que os converten no que hoxe chamamos un corpo, todo o cal permitiu por fin utilizar números para medir todas as cantidades xeométricas e basear neles o estudo da continuidade e da xeometría.

Dende un punto de vista actual, os *Elementos* teñen unha serie de limitacións que non embazan o seu gran mérito, pois non se trata en ningún caso de falsidades senón que son máis ben lagoas que tardaron moito tempo en ser corrixidas e que, nalgúns casos, serviron de motivación e propiciaron novos desenvolvementos matemáticos de grande importancia. Xa mencionamos que Euclides comezou os *Elementos* dando unha serie de definicións, algunhas das cales realmente definen con precisión novos conceptos en termos doutros conceptos definidos previamente, mentres que outras simplemente dan unha idea intuitiva e corresponden a nocións que hoxe en día permanecen indefinidas e suxeitas só á verificación dos axiomas. Os axiomas veñen a continuación e divídense en dous tipos: postulados e nocións comúns. Dende o punto de vista clásico os axiomas eran verdades autoevidentes pero isto cambiou moito e dende o punto de vista moderno son enunciados que se elixen co obxectivo de que dean lugar a unha teoría que sexa consistente (é dicir, de que non permitan deducir unha contradición) e, nun nivel máis pragmático, que sexa relevante no sentido de que teña conexións con outras teorías matemáticas e tamén aplicacións. A idea de que a xeometría euclidiana é unha descrición fiel do mundo físico non podía ser xustificada por métodos puramente dedutivos e isto sinalouno Russell (Russell 1984) precisamente a continuación do eloxio ós *Elementos* citado anteriormente:

> Ten, está claro, as típicas limitacións gregas: o método é puramente dedutivo e non é posible con el someter a proba as hipóteses iniciais. Estas hipóteses supoñíase que eran incuestionables, pero no século dezanove a xeometría non euclidiana mostrou que podían estar parcialmente equivocadas, e que só a observación podería decidir se era así.

Nos *Elementos* os postulados son enunciados cun contido xeométrico (exemplo: «Trazar unha liña recta dende un punto calquera ata un punto calquera» (Postulado 1)) e as nocións comúns son dunha natureza máis universal (exemplo (8): «O todo é maior que a parte») e poden ser considerados como principios lóxicos. O Postulado 5 é, con diferenza, o máis sofisticado de todos eles e, como sinalou Russell (Russell 1984, p. 220), «O tratamento das paralelas por medio do famoso postulado das paralelas ten o dobre mérito do rigor na dedución e de non ocultar o dubidoso da hipótese inicial». Estas dúbidas deron lugar, como veremos, a unha longa procura que non culminaría ata o século XIX coa chegada das xeometrías non euclidianas.

Ademais dos problemas inherentes ós axiomas, pódense mencionar outras limitacións nalgúns dos argumentos dedutivos usados nos *Elementos*. Aínda que a idea de Euclides era ir demostrando as proposicións usando as regras da lóxica e baseándose só nos axiomas e nas proposicións anteriormente demostradas, os *Elementos* teñen argumentos que se apoian en intuicións visuais e usan hipóteses que son plausibles pero que non son axiomas nin foron demostradas previamente. Un exemplo notorio disto atópase xa na Proposición I.1 onde, como observou Heath, a construción do triángulo equilátero presupón que as dúas circunferencias que traza córtanse nun punto. Con todo, o Postulado 5 que garante que dúas liñas se cortan baixo certas condicións non é aplicable, e aínda que nos pareza intuitivamente obvio que así é, non hai nada nas definicións nin nos postulados que garanta que esas circunferencias se cortan. Esta cuestión é analizada con detalle en (Hartshorne 2000, p. 30), onde se observa que o problema xorde de novo en I.22.

Outra lagoa no razoamento euclidiano manifféstase no uso do *método de superposición* que se aplica, por exemplo, na demostración de I.4, onde para demostrar que dous triángulos son congruentes (é dicir, iguais na terminoloxía euclidiana) os superpón colocando o un sobre o outro. Tampouco neste caso hai nada nos axiomas que xustifique isto e, como sinala Hartshorne, Euclides parece remiso a utilizar o método pois só aparece nas Proposicións I.4 e I.8. Hartshorne (Hartshorne 2000, p. 33) tamén observa que se este argumento fose aceptable entón o Postulado 4 —que afirma que todos os ángulos rectos son iguais entre si— sería superfluo pois deduciríase inmediatamente aplicando superposición.

Un terceiro tipo de razoamento incorrecto nos *Elementos* prodúcese ó tratar coa relación de «estar entre» que aparece, por exemplo, cando un punto está entre outros dous nunha liña ou cando unha liña que pasa por un punto está dentro dun ángulo con vértice no devandito punto. Dado que non se postulou ningunha relación de orde entre os puntos ou entre as liñas, certos argumentos que usan esta relación son incorrectos como se discute en detalle en (Hartshorne 2000, pp. 35-36) usando I.7 e I.16 como exemplos. Eventualmente todos estes defectos foron corrixidos en axiomatizacións posteriores da xeometría, que culminan coa realizada por Hilbert no seu tratado *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert) publicado en 1899. Hilbert reparou os fallos lóxicos dos *Elementos* e, para iso, comezou resolvendo o problema das definicións ó tomar como nocións indefinidas o punto, a recta e o plano e introducir relacións primitivas de pertenza, «estar entre», congruencia, paralelismo e continuidade. Os postulados e as nocións comúns foron substituídos por unha colección de 21 enunciados que se coñecen como *axiomas de Hilbert* e o sistema resultante mostrou que os postulados euclidianos poden funcionar nun contexto axiomático moderno e rigoroso [18].

Partindo dos seus axiomas, Hilbert demostra que o plano euclidiano pode ser identificado con $\mathbb{R}^2$ (onde $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais) usando a definición habitual de distancia, e na actualidade a xeometría euclidiana estúdase definindo o espazo euclidiano n-dimensional como $\mathbb{R}^n$, o que permite usar as ferramentas alxébricas no devandito estudo. Con todo, é posible desenvolver tamén rigorosamente a xeometría euclidiana sen facer uso desta identificación e definindo directamente unha aritmética de segmentos no espírito de Euclides, como fai Hartshorne en (Hartshorne 2000).

---

18 Pódese facer notar que aínda hai quen prefire a presentación de Euclides á de Hilbert; ámbalas dúas son contrapostas por Lucas (Lucas 2000, pp. 33-34) quen se decanta a favor de Euclides declarando: «Mentres que a presentación de Euclides é intelixible e ten un inmenso atractivo intelectual, a de Hilbert é inintelixible, agás para os que xa coñecen a xeometría perfectamente».

Unha diferenza fundamental entre a presentación de Euclides e a de Hilbert é que, mentres que esta última é puramente existencial —os seus axiomas aseguran a existencia de certos obxectos sen indicar como poden ser construídos— a de Euclides é, como xa sinalamos, construtiva. Aínda que poida parecer algo paradoxal tendo en conta o pouco aprecio de Euclides e dos gregos, en xeral, polas aplicacións, este carácter construtivo probablemente se debe a que a xeometría euclidiana obtense como unha abstracción ou idealización de procesos prácticos relacionados coa agricultura. Esta idea ponse de manifesto explicitamente no Comentario de Proclo sobre Euclides, no que afirma que a xeometría foi descuberta polos exipcios como consecuencia de que os desbordamentos do Nilo borraban as marcas que separaban as propiedades. Pódese pensar entón que, aínda que claramente Euclides non formalizaba a xeometría coa idea de poder aplicala, a relación entre a xeometría euclidiana e as aplicacións prácticas era moi estreita aínda que fluía en sentido inverso ó que hoxe se busca cando se desenvolven teorías matemáticas: a xeometría non se estudaba para obter aplicacións á solución de problemas prácticos senón que se desenvolvía por abstracción a partires de certas solucións xa existentes para ditos problemas.

Xa mencionamos que o postulado 5 de Euclides[19] é, con diferenza, o máis complicado de todos e por iso foi obxecto de controversia xa dende o principio. Un bo testemuño disto dáo o comentario de Proclo ó primeiro libro dos *Elementos*, onde di:

> Este (o Postulado 5) debería ser eliminado de entre os postulados. Pois trátase dun teorema que supón moitas dificultades, o cal Ptolomeo se propuxo resolver nun dos seus libros e require para a súa demostración un gran número de definicións e teoremas. O seu

[19] «Se unha recta, ó incidir en dúas rectas fai os ángulos do interior e do mesmo lado menores que dous ángulos rectos, as dúas rectas, prolongadas ó infinito, atópanse no lado no que están os ángulos menores que dous rectos». É frecuente expresalo nunha forma equivalente, pero máis sinxela, debida a Playfair: «por un punto exterior a unha recta só é posible trazar unha paralela».

> recíproco está de feito probado polo mesmo Euclides como un teorema.

Proclo pide a eliminación do Postulado 5 argumentando que xa Euclides demostrou o recíproco e dando a entender que se o recíproco é un teorema o postulado debe selo tamén. De feito, o propio Proclo deu unha demostración falaz do postulado mediante un lema que é esencialmente unha versión do postulado de Playfair. Tamén se di que o propio Euclides, sen dubidar en ningún momento da veracidade do postulado, realizou intentos de demostralo a partir dos outros catro. Pero non foron só Euclides e Proclo pois moitos seguiron a intentalo nos 2000 anos seguintes á publicación dos *Elementos* e se ninguén o conseguiu é por unha boa razón: o Postulado 5 é independente dos outros catro e polo tanto non é posible demostralo a partir deles.

En (Hartshorne 2000, pp. 304-305), Hartshorne distingue catro períodos diferentes neste proceso. O primeiro deles é o máis duradeiro, e nel os que intentan demostrar o postulado fano coa idea de superar a Euclides, partindo da hipótese de que este non o fixera ben de todo. O segundo período non chega ata os séculos XVII-XVIII e nel, xeómetras como Saccheri e Legendre consideran a hipótese de que o postulado é falso e tratan de ver que conclusións se deducen, sempre co obxectivo de chegar a unha contradición que lles permitise demostralo. Tan convencidos estaban de que tal contradición tiña que existir que acabaron convencidos de tela atopado a pesar de non ser así e de que, en realidade, estiveran a explorar novas xeometrías. O terceiro período sitúase entre finais do século XVIII e principios do XIX e nel prodúcese o descubrimento decisivo. Parece probable que o primeiro en facelo foi Gauss a finais do XVIII pero nunca publicou os seus resultados sobre isto. Foron finalmente o húngaro Janos Bolyai e o ruso Nikolai Lobachevski os que, en torno a 1830, descubriron a existencia das xeometrías non euclidianas. O cuarto e último período caracterízase pola confirmación destas novas xeometrías mediante o desenvolvemento de modelos para as mesmas que servían para probar a súa consistencia, principalmente, pola obra de Beltrami, Klein e Poincaré.

O modelo estándar da xeometría euclidiana é o plano $\mathbb{R}^2$ pero, se supoñemos que o Postulado 5 de Euclides non se verifica, podemos obter outros dous tipos de xeometría completamente diferentes. No caso do plano, se se supón que todos os axiomas do plano euclidiano se satisfán, agás o Postulado 5 que se substitúe por un postulado que afirma que «dada unha recta e un punto exterior existen polo menos dúas rectas que pasan polo punto e non cortan á recta dada», obtense o *plano hiperbólico* e se, pola contra, se supón que todas as rectas que pasan polo punto exterior cortan á recta dada, entón obtense o *plano elíptico*. Estas construcións pódense estender ó espazo para obter as xeometrías hiperbólica e elíptica. Estas xeometrías e algunhas das súas aplicacións dentro e fóra das matemáticas son estudadas con certo detalle en [(Greenberg 1993), (Hartshorne 2000), (Holme 2010)].

O descubrimento das xeometrías non euclidianas tardou a causa do convencemento de que a xeometría euclidiana era unha verdade absoluta que describía o mundo físico, algo que aínda estaba moi vixente en pleno século XVIII como testemuña a afirmación de Kant na *Crítica da razón pura*: «o concepto de espazo [euclidiano] non é en absoluto de orixe empírica senón que é unha necesidade inevitable do pensamento». Pero as xeometrías non euclidianas ían ter unha gran transcendencia non só para as matemáticas senón tamén para a física, onde, segundo a teoría da relatividade, a xeometría do espazo-tempo é non euclidiana, correspondendo ó que se denomina unha variedade pseudoriemanniana[20]. O feito de que as xeometrías

---

20 A xeometría riemanniana é a que mellor describe a xeometría do espazo físico nunha escala macroscópica pero, como se indica en (Luminet 2011, p. 82), «nunha escala local, é dicir, para distancias entre10^{-18} metros (a distancia agora accesible á experimentación en aceleradores de partículas) e 10^{11} metros (aproximadamente a distancia da terra ao sol), a xeometría do espazo está moi ben descrita pola dun espazo euclidiano tridimensional ordinario». Isto mostra que a xeometría euclidiana, aínda non sendo unha descrición absoluta do espazo, é moi valiosa tamén para a física.

non euclidianas tardasen tanto en descubrirse é unha homenaxe indirecta á visión dos matemáticos gregos recollida nos *Elementos* de Euclides.

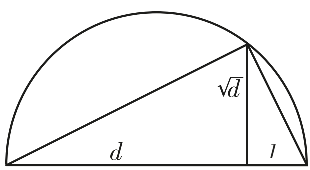
Hai outro aspecto destacable nos *Elementos* que tivo un eco continuado nas matemáticas —e na súa filosofía— ó longo dos séculos e que o segue tendo hoxe en día. Refírome ás construcións pois, como xa mencionei, a aproximación á xeometría nos *Elementos*, é, en boa medida, construtiva, no sentido de que moitas das súas proposicións non se limitan a demostrar a existencia dun obxecto xeométrico baixo determinadas hipóteses senón que, ademais, proporcionan un algoritmo que permite construílo. Máis aínda, o enfoque construtivo non se restrinxe ás demostracións senón que xa está presente nas hipóteses iniciais nas que se basea a xeometría euclidiana e así, por exemplo, o Postulado 1 formúlase como «Trazar unha liña recta dende un punto calquera ata un punto calquera» e non como «Existe unha liña recta...».

As construcións euclidianas son construcións con regra e compás e por iso Euclides limítase a estudar as figuras xeométricas que son construíbles deste xeito. Esa é a razón pola que algúns polígonos regulares, como por exemplo o heptágono, non son nunca mencionados nos *Elementos* mentres que, en contraste, si son mencionados outros polígonos regulares cun maior número de lados, como é o caso do pentadecágono (polígono de 15 lados) que se constrúe na Proposición IV.16. Dende o punto de vista moderno non hai ningún problema en traballar co polígono de 7 lados pero a Euclides non lle estaba permitido posto que non sabía construílo e, en consecuencia, o devandito polígono non existía (esta é, polo menos, a interpretación de Hartshorne en (Hartshorne 2000)). Hoxe en día sabemos que este descoñecemento non era de ningún xeito achacable á ignorancia senón que era completamente inevitable porque, como se demostrou moito despois, o heptágono regular non pode ser construído con regra e compás.

A regra era simplemente unha peza recta, sen marcas, que permitía trazar segmentos de recta de lonxitude arbitraria (pero non medir distancias) e o compás, na interpretación máis usual, era o que hoxe en día se chamaría un «compás colapsable», que tiña dous brazos cun pivote central e permitía trazar unha circunferencia con centro un punto dado e pasando por outro punto pero que, a diferenza dos compases actuais, non permitía transportar distancias porque cando se levantaba «colapsábase». Podería parecer que un compás moderno permitiría realizar construcións imposibles co antigo pero non é así e as construcións que se poden facer con regra e compás son as mesmas en ámbolos dous casos, aínda que co compás colapsable poden ser máis complicadas. A demostración de que o compás colapsable tamén permite transportar distancias dánola a Proposición I.2 dos *Elementos* e, polo tanto, podemos considerar no que segue que o compás é un compás moderno, pois os resultados son os mesmos. Tamén é precisamente esta proposición o que xustifica a hipótese de que os compases euclidianos eran colapsables porque, de non ser así, a demostración da proposición sería moito máis sinxela e completamente obvia.

Que era pois unha construción? Era simplemente un número finito de (segmentos de) rectas e circunferencias trazadas coa regra e o compás a partir duns datos iniciais, que permitían obter novos puntos como interseccións de liñas e remataban coa obtención da figura desexada. Pensemos agora que lonxitudes serán «construíbles» con regra e compás, é dicir, serán lonxitudes de segmentos construíbles (os gregos non pensarían nestas magnitudes como números pero facelo así simplificará moito a exposición). Se partimos dun segmento dado, cuxa lonxitude podemos tomar como unidade, de modo que partimos dun segmento de lonxitude 1, é claro que podemos tamén construír segmentos de lonxitudes 2, 3..., n, para calquera enteiro positivo n dado. Polo tanto, podemos dicir que todos os números enteiros son construíbles, pero… hai máis números construíbles neste sentido? Dende logo que si, e Euclides sabíao ben: utilizando a teoría da proporción e, máis concretamente, o Teorema de Tales sobre triángulos semellantes dado na Proposición VI.2, é doado ver que todos os números racionais son construíbles (véxase, por exemplo (Dewdney 2004, pp. 127-128) para unha explicación detallada).

De feito, o mesmo método permite demostrar, máis xeralmente, que a razón de dúas distancias construíbles é, á súa vez, construíble. Pero a cousa non remata aquí porque tamén podemos construír un triángulo rectángulo isósceles (ou un cadrado, cuxa diagonal é a hipotenusa de dous triángulos rectángulos dos que os lados do cadrado son os catetos) e así vemos que as construcións con regra e compás permiten construír lonxitudes irracionais. Isto dínolo o teorema de Pitágoras que nos permite construír un segmento de lonxitude $\sqrt{2}$ e, de forma semellante, a antifairesis aplicada á diagonal e ó lado do pentágono regular —que tamén é construíble pola Proposición IV.11— mostra que se pode construír un segmento cuxa lonxitude é o número áureo ϕ. Polo tanto, hai números irracionais construíbles e, en particular, $\sqrt{2}$ e ϕ o son![21] Así, non só $\sqrt{2}$ senón tamén $\sqrt{5}$ é construíble e é natural preguntarse se todas as raíces cadradas de números enteiros o serán. A resposta é afirmativa e, de feito, a raíz cadrada de calquera lonxitude construíble é construíble como o mostra a seguinte figura que pode ser construída con regra e compás a partires dos segmentos de lonxitudes d e 1:



O anterior mostra que se chamamos construíble a un número real que se pode construír con regra e compás a partir de puntos de coordenadas racionais, entón o conxunto dos números construíbles é pechado para as operacións de adición, subtracción,

21 Tódolos números irracionais cos que os gregos se atoparon eran construíbles, pois as construcións xeométricas eran a única fonte para obtelos.

multiplicación, división e extracción de raíces cadradas de números positivos e, en particular, o devandito conxunto é un corpo, chamado o *corpo construíble*. Este resultado remóntase esencialmente a Descartes, cf. (Hartshorne 2000, Theorem 13.2, Proposition 16.4). Como consecuencia disto, os números construíbles son números alxébricos, é dicir, son raíces de ecuacións polinómicas con coeficientes enteiros. Cada número alxébrico α é tamén raíz dun polinomio irredutible (o análogo para polinomios do concepto de número primo) cuxos coeficientes son racionais e cuxo coeficiente principal (o do termo de maior grao) é 1. Este polinomio chámase o polinomio mínimo de α e, como consecuencia do feito de que as raíces cadradas de números construíbles son construíbles, obtense que o grao do polinomio mínimo dun número construíble ten que ser unha potencia de dous[22].

Isto xa abonda para demostrar que unha serie de construcións clásicas son imposibles. Por exemplo, a duplicación do cubo, que é o problema de, dado un cubo, construír un novo cubo cuxo volume sexa xusto o dobre. Se o cubo dado ten lado a, entón o seu volume é a^3, e o que se busca é un cubo de lado b tal que $b^3 = 2a^3$, de onde se deduce que $b/a = \sqrt[3]{2}$. Pero o polinomio mínimo de $\sqrt[3]{2}$, $x^3 - 2$, ten grao 3, que non é unha potencia de 2 e, polo tanto, $\sqrt[3]{2}$ non é construíble e o cubo de volume dobre tampouco o é. Outro problema similar que tamén ten solución negativa é o da trisección do ángulo pero, quizais, o problema clásico de construción por excelencia é o da cuadratura do círculo que consiste en, dado un círculo, construír con regra e compás un cadrado que teña a mesma área.

A cantidade de construcións que se fixeron e que supostamente cadran o círculo é enorme, e cada ano seguen aparecendo numerosas construcións que pretenden levar a cabo esta

22 Esta condición é necesaria pero non suficiente para que o número sexa construíble, pero coñécense condicións necesarias e suficientes que caracterizan aos devanditos números e formúlanse en termos da *teoría de Galois de extensións de corpos*.

tarefa imposible. A avalancha de construcións que pretendían resolver o problema, debidas na súa maior parte a afeccionados que trataban de alcanzar a fama deste xeito, chegou a tal punto que, a finais do século XVIII tanto a Académie des Sciences de París coma a Royal Society de Londres resolveron non tomar en consideración máis intentos de solucións. No seu libro *A budget of paradoxes*, publicado en 1872, Augustus De Morgan suxeriu, facendo gala da súa facilidade para o sarcasmo, que os «cadradores» deberían adoptar como patrón a san Vito, en referencia ó baile de san Vito no que os berros dos que o sufrían levaban a unha histeria colectiva. De feito, De Morgan aínda foi máis alá e suxeriu para a «enfermidade da cuadratura» o nome de *morbus cyclometricus* para a que, segundo Dewdney, non hai cura coñecida.

Euclides non sufriu de morbus cyclometricus —as súas construcións non eran erróneas— pero si foi a inspiración para moitos dos que a sufriron. Un deles foi o filósofo inglés Thomas Hobbes, quen descubriu a Euclides cando tiña corenta anos e quedou fascinado, vendo na xeometría a esencia do razoamento científico e abrazándoa case coma se fose unha relixión á que consideraba perfecta. En 1655 publicou o seu tratado *De corpore*, no que a xeometría erixíase no centro da ciencia e no que daba un método, inspirado en Euclides, para cadrar o círculo. John Wallis, quen era entón profesor de xeometría en Oxford, aproveitou a ocasión para atacar a Hobbes criticando non só a súa errónea construción senón tamén moitas das súas opinións filosóficas.

Así, ó pouco tempo, Wallis publicou *Elenchus geometriae hobbianae*, sinalando os numerosos erros que Hobbes cometera na súa demostración. Este tratado foi seguido dunha obra menos técnica pero máis curta e máis punzante, *Due correction for Mr. Hobbes; or Schole discipline, for not saying his lessons right*. A isto respondeu Hobbes en 1657 co seu *Markes of the absurd geometry, rural language, Scottish church-politiks, and barbaris-*

mes of John Wallis, professor of geometry and doctor of divinity, e a amarga controversia continuou durante varios anos máis, ata a morte de Hobbes en 1679. Naquela época aínda non se sabía se a cuadratura era posible ou non, e a solución definitiva aínda ía tardar máis de douscentos anos, pois non foi ata 1882 cando o matemático alemán Lindemann probou definitivamente que a cuadratura é imposible usando os métodos euclidianos.

A cuadratura do círculo esixe construír, dado un círculo de radio r, un cadrado de área πr^2, cuxo lado terá, polo tanto, lonxitude igual a $r\sqrt{\pi}$. O problema é así decidir se $\sqrt{\pi}$ é ou non un número construíble o cal, como vimos, é equivalente a que o propio π o sexa. O que demostrou Lindemann é que π é transcendente, é dicir, non alxébrico, de modo que non é raíz de ningún polinomio non nulo con coeficientes racionais (así que neste caso non hai polinomio mínimo). Dado que todo número construíble é alxébrico, π non é construíble e a imposibilidade da construción queda definitivamente demostrada. Esta imposibilidade transcendeu á linguaxe ordinaria, na que se fala da «cuadratura do círculo» para referirse á quintaesencia da imposibilidade pero nin sequera isto foi suficiente para deter a proliferación do morbus cyclometricus, que hoxe en día segue afectando a moitos.

Outro problema construtivo importante que aparece tratado en detalle nos *Elementos* é o da construción dos polígonos regulares, é dicir, dos polígonos cuxos lados e cuxos ángulos son todos iguais. Euclides presentou construcións do polígono de n lados para $n = 3$. (Proposición I.1), $n = 4$ (Proposición I.46), $n = 5$ (Proposición IV.11), $n = 6$ (Proposición IV.15) e $n = 15$ (Proposición IV.16). É claro que a partir do polígono regular de n lados pódese construír o de $2n$ lados mediante a bisección dos ángulos centrais e, aplicando isto repetidamente, vese que se o polígono de n lados é costruíble tamén o é o de $2^k \cdot n$ lados para calquera enteiro positivo k. Así, Euclides sabía construír os polígonos regulares de n lados para $n = 2^k, 2^k \cdot 3, 2^k \cdot 5, 2^k \cdot 3 \cdot 5$ e estes foron os únicos polígonos regulares cuxa construción era coñecida ata que, máis de 2000 anos despois, Gauss descubriu —á idade de 19 anos— que o polígono regular de 17 lados (o heptadecágono regular) tamén é construíble[23]. Esta construción é explicada detalladamente en (Hartshorne 2000) como o é tamén un resultado máis xeral de Gauss que, aínda que dá unha condición necesaria e suficiente en n para que o polígono regular de n lados sexa construíble, non resolve de todo o problema, como imos ver.

Nesta cuestión xogan un papel relevante os primos de Fermat, así chamados porque foron estudados por Fermat no século XVII. Fermat considerou os números $F_n = 2^{2^n} + 1$ para $n \geq 0$ (agora chamados *números de Fermat*) e, ó observar que os cinco primeiros $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$ son primos, conxecturou que todos os F_n son primos. Esta vez, cousa non frecuente nel, Fermat equivocábase e a principios do século XVIII Euler demostrou que $F_5 = 641 \cdot 6700417$, de modo que F_5 non é primo. Pois ben, a relación dos primos de Fermat cos polígonos construíbles estableceuna Gauss, quen demostrou que o polígono regular de n lados é construíble se e só se n é o produto dunha potencia de 2 e de primos de Fermat —é dicir, números de Fermat que son, ademais, primos— distintos.

Isto explica a construibilidade dos polígonos que aparecen nos *Elementos* e tamén a do heptadecágono pero, a pesar do que puidese parecer á primeira vista, non resolve totalmente o problema porque, a día de hoxe, continuamos sen saber exactamente cales son os primos de Fermat nin cantos hai e, de feito, nin sequera se sabe se o conxunto dos primos de Fermat é finito ou infinito. O máis sorprendente é que os únicos primos de Fermat que se coñecen son os cinco que xa coñecía Fermat —nin máis nin menos que os cinco primeiros números de Fermat— pero non se atopou ningún máis —a pesar de dedicar recursos computacionais moi potentes á súa busca— e sospéi-

23 Dise que Gauss na súa xuventude dubidaba se dedicarse ás matemáticas ou á filoloxía e que este descubrimento foi a clave para elixir as matemáticas.

tase, con base en certos argumentos heurísticos, que eses cinco poden ser os únicos. De ser así, todos os F_n con $n \geqslant 5$ serían compostos pero nin sequera se sabe —aínda que parece moi probable— se existen infinitos números de Fermat compostos. O número de Fermat máis grande que se sabe que é composto é $F_{2543548}$ que, debido ó crecemento dobremente exponencial da secuencia dos F_n, é un número enorme.

Os gregos non conseguiron resolver completamente o problema da construibilidade dos polígonos regulares pero si resolveron —e a solución atópase no libro XIII dos *Elementos*— o problema análogo para a xeometría do espazo, é dicir, o problema da construción dos poliedros regulares —ou sólidos platónicos, como se lles chamou tradicionalmente debido ó papel importante que xogaban no mundo dos ideais platónicos. Os gregos descubriron que, en contraste co número infinito de polígonos regulares, só hai cinco poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, e no seu diálogo *Timeo*, Platón asóciaos cos catro elementos clásicos mais o Universo completo na forma seguinte:

Terra	Cubo
Aire	Octaedro
Auga	Icosaedro
Lume	Tetraedro
Universo	Dodecaedro

Euclides define estes cinco poliedros regulares, constrúeos inscritos nunha esfera e afirma que son os únicos posibles. En linguaxe moderna un poliedro regular está formado por polígonos (caras) que encerran un volume finito e suponse ademais que son convexos[24] —é dicir, que calquera par de

[24] Euclides non incluíu explicitamente a convexidade, que é necesaria para que os poliedros sexan únicos.

puntos no seu interior están unidos por un segmento de recta que tamén e interno— e que todas as caras son polígonos regulares congruentes e co mesmo número de caras adxacentes a cada vértice.

A construción dos cinco poliedros regulares e a demostración de que son os únicos é quizais o punto culminante dos *Elementos* e da xeometría grega, e estes poliedros xogan un papel importante tamén na teoría de Galois. Un testemuño claro da profunda influencia que, a través dos *Elementos*, tiveron os sólidos platónicos no pensamento aínda que fose levando a unha conclusión equivocada, dánolo a teoría de Kepler sobre as distancias planetarias, formulada en 1596 no seu libro *Mysterium cosmographicum*. Kepler propuxo que as relacións entre as distancias dos seis planetas coñecidos na época podían ser interpretadas en termos dos cinco sólidos platónicos mediante o modelo presentado na *Ilustración 3*, na que cada un dos sólidos platónicos se sitúa entre cada par de esferas planetarias, as cales teñen radios proporcionais ás distancias dos seis planetas ó sol. Kepler vía esta interpretación como a xustificación de que existían precisamente 6 planetas pero esta teoría foi definitivamente refutada en 1781 co descubrimento do sétimo planeta (Urano), aínda que xa Kepler en posteriores edicións do *Mysterium* manifestara as súas dúbidas sobre esta interpretación e, por suposto, este episodio non mingua o enorme mérito das súas leis sobre o movemento planetario.

A xeometría de Euclides tivo unha profunda influencia nas matemáticas modernas, non só nos aspectos metodolóxicos senón tamén polo feito de que moitas das súas ideas fundamentais perviven hoxe en día aínda que sexa baixo aspectos un pouco diferentes. Esta apreciación é recollida, por exemplo, en (Manders 2008), onde se sinala:

> […] a matemática moderna subsume as conclusións xeométricas de Euclides na xeometría analítica real, a análise real e a análise funcional. No perfil da

> investigación, isto só é unha esquina da xeometría moderna; pero en termos da pegada das matemáticas no mundo moderno, é a maior parte das matemáticas modernas. Euclides, Apolonio e Arquímedes están virtualmente libres de erro: cada un dos seus resultados ten un reflexo nas matemáticas modernas aínda que estea subsumido en patróns de resultados e demostracións recoñecidos moito máis tarde [...] Ademais, os *Elementos* de Euclides xa establecen patróns que son extrapolados polas máis abstractas matemáticas do século XX. O teorema de Pitágoras vive nos espazos métricos euclidianos e ata nos riemannianos; mesmo os resultados euclidianos que todo o mundo coñece establecen o marco para o máis abstracto pensamento matemático moderno, como ocorre coa desigualdade triangular I.20 na definición de espazo métrico.

A xeometría euclidiana tamén ten moitas aplicacións que se estenden fóra do ámbito das matemáticas e da física. Un exemplo no campo da ciencias sociais proporciónao o escalado multidimensional (abreviadamente MDS, polas iniciais do nome en inglés: *Multidimensional scaling*). O MDS é unha familia de modelos xeométricos que se usan para analizar a estrutura das desemellanzas (e, polo tanto, tamén das semellanzas) entre obxectos ou conceptos mediante a representación destes como puntos nun espazo multidimensional, de modo que as desemellanzas entre pares de obxectos represéntanse como distancias entre os puntos do espazo. A distancia máis comunmente usada é a euclidiana pero nalgúns casos úsase tamén a chamada *métrica do taxi* ('taxicab metric') ou *métrica da cidade* ('city-block metric'), que calcula a distancia entre dous puntos como a suma dos valores absolutos das diferenzas entre as súas coordenadas (en correspondencia co percorrido que habería que facer a través das rúas dunha cidade con bloques rectangulares de casas para ir dun punto ó outro). O MDS úsase, por exemplo,

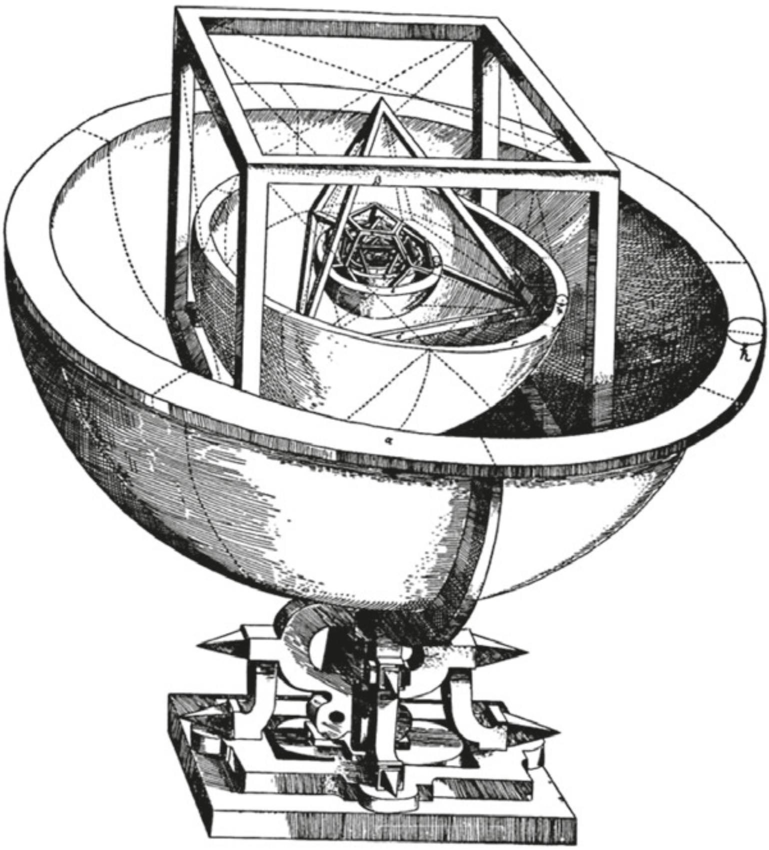


Ilustración 3. Representación do sistema solar no *Mysterium Cosmographicum* de Kepler

en psicoloxía, para analizar as diferenzas entre distintos estímulos, e en ciencias políticas, para medir as diferenzas entre diferentes posicións políticas. No artigo de P. Arabie provocativamente titulado «Was Euclid an unnecesarily sophisticated psychologist?» (Arabie 1991) analízanse estas dúas métricas. A pregunta retórica do título formula a posibilidade de que a métrica do taxi, a pesar de ser máis sinxela, pode ser tamén moi útil e debería substituír á euclidiana en moitos casos. Isto exprésase no artigo suxerindo que Euclides (a personificación da distancia euclidiana) quizais fose sobrevalorado en psicoloxía aínda que, como o propio Arabie recoñece, é xa tarde para culpar a Euclides disto e a falta sería, en todo caso, atribuíble ós científicos condutistas contemporáneos.

A pesar do manifestado por Arabie, a distancia euclidiana segue sendo a que se usa preferentemente no MDS (Borg e Groenen 2005) e, aínda que existen algúns tipos de obxectos que fan máis apropiada a métrica da cidade, hai moitos outros nos que acontece xusto o contrario, véxase (Fantazzini e Zakharov) para un exemplo concreto. Unha aproximación matemática diferente á psicoloxía tamén foi explicitamente propugnada por G. Kelly, quen tomou como modelo os *Elementos* para desenvolver o que chamou a *xeometría do espazo psicolóxico*, na que non se define explicitamente unha métrica pero inspírase igualmente en Euclides para darlle unha estrutura lóxica ó devandito espazo (Shaw e Gaines 1992). Este é só un dos moitos exemplos nos que os *Elementos* serviron como paradigma no mundo da ciencia ou da cultura. Vemos pois que aínda que, en contraste co que Euclides puido crer, a xeometría euclidiana non é unha descrición absoluta do espazo físico, si que continúa sendo útil para o estudo deste e doutros espazos, como o psicolóxico, que non formaban parte do pensamento euclidiano.

A aritmética

A visión tradicional considera os *Elementos* como un tratado de xeometría, e certamente o é, pero é tamén algo máis: é un importante tratado de aritmética[25]. Probablemente, unha das razóns desta apreciación é que, como vimos, os resultados aritméticos dos *Elementos* están envoltos en linguaxe xeométrica e non sempre é fácil percibir toda a súa forza na forma que están expostos[26]. Outra razón, quizais aínda máis importante é que, a diferenza da xeometría para a que desde o principio acháronse aplicacións importantes, as aplicacións da aritmética superior non apareceron ata moito máis recentemente, como testemuña indirectamente a famosa declaración formulada en 1940 por G. H. Hardy sobre o seu traballo matemático, que tiña como eixe principal a aritmética:

> Nunca producín nada «útil». Ningún dos meus descubrimentos supuxo, directa ou indirectamente, a máis mínima alteración sobre a afabilidade do mundo, nin para ben nin para mal. (Hardy 2005, p. 144)

Hardy fai extensiva esta idea a todas as matemáticas que el considera auténticas (*real mathematics,* que contrasta coas matemáticas triviais, que serían as que resultan útiles) e equivocábase porque, como se descubriu máis recentemente, a aritmética tamén ten importantes aplicacións prácticas, sendo quizais a criptografía a máis coñecida delas. En moitas destas aplicacións xogan un papel importante algúns dos descubrimentos e métodos que xa están presentes nos *Elementos*.

---

[25] Como xa mencionei, estou a usar o termo *aritmética* no sentido de 'teoría de números' —basicamente o estudo dos números enteiros— e non no sentido elemental do termo.

[26] Como se sinala en (Higgins 2008), «a interpretación xeométrica das matemáticas é unha respectada tradición occidental que se remonta a Pitágoras, Euclides e os antigos gregos». Esta interpretación contrasta coa interpretación asiática —e, en particular, coa da matemática india— que se basea máis na aritmética e a álxebra. Por iso Higgins sinala que é irónico que a extraordinaria calidade da matemática grega clásica puido actuar como factor inhibidor no desenvolvemento da aritmética e a álxebra en Europa.

Euclides non foi só un xeómetra senón que tamén foi o que no mundo anglosaxón de hoxe en día se chama un *theoretical computer scientist*, e iso moitos séculos antes de que houbera os primeiros ordenadores. Os máis importantes temas da informática teórica son o deseño e análise de algoritmos, a teoría da computabilidade e a teoría da complexidade. No primeiro deles xa brillou Euclides e o *algoritmo de Euclides* é a proba definitiva disto. O nome que se lle dá a este algoritmo provén de que a súa primeira aparición coñecida se produce no Libro VII dos *Elementos*, concretamente nas Proposicións VII.1 e VII.2 [27], aínda que na opinión da maioría dos historiadores o algoritmo xa fora descuberto antes —parece certo que Eudoxo xa o coñecía arredor do ano 375 a. C.— e, coma noutros casos semellantes, o que fixo Euclides foi dar unha presentación maxistral do mesmo.

O algoritmo de Euclides non é outra cousa que a *antifairesis* que xa mencionamos aplicada a un par de números enteiros; neste caso, o algoritmo termina nun número finito de pasos producindo como saída o máximo común divisor de ambos. Aínda que algúns métodos semellantes eran coñecidos polos exipcios e os babilonios, os devanditos métodos aplicábanse só en casos particulares e non coa suficiente xeneralidade para seren considerados algoritmos. Por iso está xustificada a apreciación de Knuth (Knuth 1998, p. 335), quen se refire ó algoritmo de Euclides nos seguintes termos:

> Poderíamos chamar ó método de Euclides o avó de tódolos algoritmos, posto que é o máis antigo algoritmo non trivial que sobreviviu ata o presente.

Euclides xa era consciente de que, na antifairesis, varias subtraccións sucesivas ata obter un número que fose menor

[27] A división en dúas proposicións débese ó feito de que, como os gregos non consideraban a unidade como un número, o caso en que o máximo común divisor dos números é 1 (dise entón que os enteiros son primos entre si) é tratado na Proposición VII.1 separadamente dos restantes casos que o son na Proposición VII.2.

que o número que está sendo subtraído podíanse substituír por tomar o resto da división enteira do número maior entre o menor pero, como non existía o concepto de cero, non podía falar do resto en xeral. Con todo, como sinala Knuth, parece probable que xa podía imaxinar que cada división constituía unha única etapa do algoritmo que, en consecuencia, pode ser descrito como o algoritmo recursivo mcdrec seguinte, onde se denota por a mod b o resto de dividir a entre b e chamamos mcdrec(a, b) ó enteiro producido como saída polo algoritmo:

Algoritmo de Euclides, mcdrec
Input: Enteiros positivos a, b tales que $a \geq b$.
Output: mcdrec(a, b), o máximo común divisor de a e b.

if $b = 0$ **then**
    return a
else
    mcdrec(b, a mod b)
end if

A idea subxacente a este algoritmo é realmente fermosa e redúcese a que se $a > b$ e denotamos o máximo común divisor de a e b por mcd(a, b), tense a identidade mcd(a, b) = mcd(b, a mod b) que, ó ser $b < a$ e a mod $b < b$, reduce o cálculo do mcd de a e b ó do mcd de dous enteiros positivos estritamente máis pequenos. Isto significa que, nun número finito de pasos, o problema se reducirá a calcular mcd(d, 0), onde d é un enteiro positivo, e ese valor d (o último resto non nulo na cadea de divisións) é precisamente mcd(a, b). Aínda que a demostración de Euclides non se expresa exactamente desta forma debido a que, por unha banda, 0 non era un número (o que non era problema pois no canto de dicir que o resto era 0 bastaba dicir que b dividía a a en tal caso) e, por outra, Euclides non coñecía a forma de tratar cun número finito *n* de casos (e limitouse a comprobar que o algoritmo funcionaba ben no caso dunha ou tres divisións), parece obvio que esta idea recursiva xa estaba clara na súa mente.

Unha consecuencia moi importante do algoritmo de Euclides é o corolario que afirma que se un número divide a outros dous tamén divide ó seu máximo común divisor[28], un resultado que é clave para a demostración da Proposición VII.30 dos *Elementos* que se coñece como *lema de Euclides* (Pengelley e Richman 2006) e tamén foi chamada *primeiro teorema de Euclides* en (Hardy e Wright 1975). O lema de Euclides asegura que se un primo divide a un produto de dous enteiros, entón divide a un dos factores. Á súa vez, este lema é clave para probar a unicidade no Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), que asegura que todo enteiro maior que 1 pode ser representado como un produto de primos en forma única salvo a orde.

En canto ó propio TFA discutiuse moito o seu status nos *Elementos* e aínda que é unha consecuencia do lema de Euclides e a Proposición VII.31 (que afirma que todo número composto é múltiplo dalgún número primo), non está formulado explicitamente nos *Elementos*, onde o que máis se lle aproxima é a Proposición IX.14, que algúns consideran equivalente ó TFA[29] inda que outros precisan que non proporciona a existencia da factorización e só proporciona a unicidade para enteiros que son libres de cadrados, e dicir, que son produto de factores primos distintos. Tradicionalmente vense atribuíndo a Gauss, nas *Disquisitiones Arithmeticae*, a primeira demostración completa do TFA pero en (Göksel Agargun e Mehmet Özkan 2001)

[28] O algoritmo de Euclides implica que se d = mcd(a,b), entón existen enteiros r, s tales que $d = ra + sb$ (a versión que produce como saída r e s recibe o nome de algoritmo de Euclides estendido) e así, calquera divisor común de a e b ten que dividir tamén a d e, en consecuencia, é menor ou igual que d. Así, o algoritmo de Euclides produce unha demostración da súa corrección e é, polo tanto, un algoritmo autocertificador ('self-certifying algorithm').

[29] Por exemplo, esta é a interpretación de Heath en (Heath 1921, p. 401).

móstrase que xa o matemático persa al-Farisi, que morreu arredor de 1320, obtivera unha demostración. Esta cuestión tamén se analiza en (Pengelley e Richman 2006) e (Zhang 2010), e parece claro que aínda que, como se argumenta en (Hardy e Wright 1975), Euclides non podía probar formalmente o TFA porque non dispuña dun cálculo formal de multiplicación e exponenciación, si que tiña os recursos necesarios para probalo en canto o devandito cálculo se desenvolvera e, probablemente, tiña tamén xa unha idea bastante clara do resultado mesmo.

Ademais do algoritmo de Euclides e dos outros resultados relacionados co TFA que xa mencionamos, os *Elementos* conteñen outro resultado aritmético moi importante que está tamén relacionado cos números primos (os gregos dedicáronlle gran atención ós primos que, dende o seu punto de vista xeométrico, eran vistos como os números que non tiñan unha representación rectangular[30] e só podían ser representados linealmente). O resultado ó que nos estamos a referir é a Proposición IX.20, a que en (Hardy e Wright 1975) é chamada *segundo teorema de Euclides* e afirma que *hai infinitos números primos* ou, na terminoloxía euclidiana que non fala do infinito: *Os números primos son máis que toda cantidade proposta de números primos*. A importancia deste resultado é enorme pois os primos xogan un papel importantísimo na teoría de números ó seren, como consecuencia do TFA, os bloques elementais a partir dos cales se constrúe toda a aritmética. Isto foi expresado por Hardy (Hardy 2005) da maneira seguinte:

> […] o teorema de Euclides é vital para a estrutura completa da aritmética. Os primos son a materia prima que temos para construír a aritmética, e o teorema de Euclides asegúranos que temos cantidade de material suficiente para a tarefa.

[30] Se tivese unha representación rectangular, o número sería o produto dos dous lados e polo tanto sería composto.

Pero a importancia dos primos non se limita á aritmética senón que se pon de manifesto en moitas das súas aplicacións. Por exemplo, teñen un papel fundamental na criptografía moderna, na que a seguridade de moitos esquemas criptográficos se basea na dificultade de problemas computacionais entre os cales ocupa un lugar destacado o da factorización, é dicir, o problema de, dado un enteiro, achar a súa factorización en produto de primos. Nos esquemas criptográficos baseados neste problema xoga un papel fundamental o feito de que é posible elixir aleatoriamente primos de tamaño suficiente e iso é posible esencialmente porque os primos son, en certo sentido, abundantes entre os números naturais. Isto dínolo o *teorema dos números primos*, demostrado por Hadamard e De La Vallée Poussin a finais do século XIX, como consecuencia do cal a probabilidade de que un enteiro grande collido ó azar resulte ser primo é aproximadamente igual á inversa do seu logaritmo (en contraste con isto, a probabilidade de que un enteiro grande collido ó azar sexa un cadrado decrece exponencialmente en función do seu logaritmo). O teorema de Euclides sobre a infinidade dos primos pode ser visto como un primeiro paso moi importante no camiño ata o teorema dos números primos.

Nos algoritmos criptográficos tamén xoga un papel moi importante o algoritmo de Euclides, unha ferramenta que resulta fundamental para outros algoritmos máis complexos[31]. É importante sinalar que unha das cousas que o fai tan útil é que se trata dun algoritmo extremadamente eficiente pois, como demostrou Lamé a mediados do século XIX, o número de ope-

31 Unha estatística ilustrativa do interese do algoritmo de Euclides para a criptografía móstranos que na obra enciclopédica (Van Tilborg e Jajodia (eds.) 2011) o nome *Euclid* e o adxectivo *Euclidean* aparecen mencionados un total de 126 veces, e estes mesmos nomes aparecen mencionados un total de 68 veces en (Gómez Pardo 2013) onde, ademais, os termos `igcd` e `igcdex`, que nomean o algoritmo de Euclides na linguaxe de programación utilizada, son usados un total de 28 veces. En canto á aritmética, en textos de teoría de números computacional o número de referencias a Euclides adoita ser aínda maior e así, por exemplo, en (Cohen 1993) fanse un total de 191 mencións ós termos *Euclid* e *Euclidean*.

racións de división requiridas polo algoritmo de Euclides non é máis de cinco veces o número de díxitos decimais do máis pequeno dos dous números ós que se aplica. Esta eficiencia contrasta coa que se obtén se para o cálculo do mcd se aplica o algoritmo inxenuo consistente en factorizar os números e obter o mcd a partir dos factores primos comúns: dado que os mellores algoritmos de factorización coñecidos son de *tempo subexponencial* e, polo tanto, pouco eficientes (e isto é, precisamente, o que fai que os primos sexan tan útiles en criptografía), o cálculo do mcd por este método é tamén extremadamente ineficiente, véxase, e. g., (Gómez Pardo 2013). Un exemplo concreto de aplicación criptográfica do algoritmo de Euclides encóntrase na xeración de claves para o criptosistema RSA, onde a clave privada d dun usuario se constrúe a partir da súa clave pública (n, e), na que $n = pq$ é o produto de dous primos grandes distintos p, q, e e é un enteiro positivo tal que $\mathrm{mcd}(e, (p-1)(q-1)) = 1$. Para iso hai que calcular un enteiro d tal que $ed \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1)$ (o que significa que o resto de dividir ed entre $(p-1)(q-1)$ é igual a 1) e é, precisamente, o algoritmo de Euclides o que permite realizar este cálculo de xeito eficiente.

As aplicacións prácticas do algoritmo de Euclides non se limitan á criptografía senón que se estenden a moitos outros ámbitos e, por citar un exemplo concreto, son moi importantes na computación gráfica. Isto pódese apreciar, por exemplo, en (Harris e Reingold 2004), onde tamén se discuten outras aplicacións nas que o algoritmo de Euclides xoga un papel decisivo.

Ademais dos mencionados, os *Elementos* conteñen outros resultados aritméticos interesantes, algúns dos cales están inspirados polo estudo de propiedades místicas dos números na tradición pitagórica. En particular, os gregos chamaron perfectos ós números que son igual á suma dos seus divisores propios (incluíndo 1 pero excluíndo o propio número), o que se expresaba dicindo que son a suma das súas partes alícuotas. Na antigüidade só se coñecían catro números perfectos: 6, 28, 496 e 8128, pero hoxe sabemos que hai moitos máis. Euclides deu unha condición suficiente para que un número par sexa perfecto na Proposición IX.36 que, en termos modernos se expresa dicindo que se o enteiro $2^n - 1$ é primo, entón $2^{n-1} (2^n - 1)$ é perfecto. O interese deste resultado é que atraeu a matemáticos como Mersenne, Fermat[32] e Euler, e finalmente foi este último quen estableceu o recíproco e deu unha condición necesaria e suficiente. Os números $M_p = 2^p - 1$ con p primo[33] chámanse *números de Mersenne* pois foron estudados por este no século XVII, e o que demostrou Euler é que os números perfectos pares son precisamente os da forma $2^{p-1} M_p$ onde M_p (e en consecuencia tamén p) é primo (chamado un *primo de Mersenne*).

A caracterización dos números perfectos pares aínda deixa moitos problemas abertos neste tema. Un deles é que se descoñece se existen números perfectos impares e este problema, segundo Stillwell (Stillwell 2010, p. 40), é posible que sexa o problema aberto máis antigo de todas as matemáticas. En canto ós números perfectos pares, a súa existencia depende da existencia de primos de Mersenne e tampouco se sabe se existen infinitos aínda que, a diferenza dos primos de Fermat, crese que probablemente sexa así e periodicamente atópanse primos de Mersenne cada vez máis grandes. De feito, nos últimos anos o récord do primo máis grande coñecido é case sempre o último primo de Mersenne que se descubriu, e isto proporciona tamén o récord do número perfecto máis grande. A busca de primos de Mersenne (e, en consecuencia, de números perfectos pares) coordínase a través da páxina web (GIMPS) da *Great Internet Mersenne Prime Search*, e polo momento acháronse 48 primos de Mersenne dos cales o máis grande, descuberto en 2013, é

32 Por exemplo, Fermat descubriu o seu *teorema pequeno* (se o primo p non divide a a, entón divide a $a^{p-1} - 1$), que ten grande utilidade en teoría de números e en moitas das súas aplicacións, como consecuencia do seu estudo dos primos de Mersenne e dos números perfectos (Stillwell 2003, p. 64).

33 Que p sexa primo é unha condición necesaria aínda que non suficiente para que M_p sexa primo.

$M_{57885161}$ que ten máis de dezasete millóns de díxitos decimais. Unha medida física que pretende dar unha idea do grande que é este número é que escrito cun tamaño estándar de 50 liñas por páxina e 75 díxitos por liña, o número ocuparía 4647 páxinas. Na páxina web (Noll) pódense encontrar as versión decimal e o nome en inglés deste primo pero hai que ter en conta que este último ocupa 499,51 megabytes, así que non é moi recomendable usalo e quizais, nun caso como este, sexa preferible seguir o camiño de Ireneo Funes, o personaxe de Borges (Borges 1971) insensatamente empeñado en construír un vocabulario infinito para os números naturais ós que atribuía nomes tan suxestivos como *El Ferrocarril, Agustín de Vedia, El Negro Timoteo*...[34]

A obra de Euclides deu lugar a importantes conceptos que xogan un papel fundamental na aritmética de hoxe en día. Particularmente importantes son os conceptos de dominio euclidiano e dominio de factorización única (DFU) (un dominio é un anel[35] no que a multiplicación e conmutativa e no que o produto de dous elementos distintos de cero é, á súa vez, distinto de cero). A xeneralización máis inmediata do concepto de número primo é o de elemento irredutible. Un elemento que ten inverso multiplicativo dise que é unha unidade, e un elemento x é *irredutible* cando $x \neq 0$ e, se $x = yz$, entón ou y ou z ten que ser unha unidade. Así, un DFU é un dominio no cal todo elemento distinto de cero que non sexa unha unidade se descompón en forma única (salvo a orde) en produto de elementos irredutibles, e o prototipo dos DFUs e o anel dos números enteiros $\mathbb{Z}$ no que os elementos irredutibles son os números primos e os seus opostos negativos –2, –3, … Os dominios euclidianos, pola súa banda, teñen un algoritmo de división similar ó que existe

---

34 Claro está que isto requiriría usar nomes arbitrariamente longos pero sempre se podería optar por reservar os nomes máis curtos e máis interesantes para os números máis notables...

35 Un anel é un conxunto con operacións de adición e multiplicación que teñen propiedades similares ás dos números enteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, que é o anel prototípico de onde o concepto xurdiu por abstracción.

en $\mathbb{Z}$ e neles pódese formular tamén o algoritmo de Euclides. A versión moderna dos resultados sobre factorización única contidos nos *Elementos* é un teorema que di que «todo dominio euclidiano é un DFU».

Estes conceptos xogan un papel central na teoría de números alxébricos, a cal desenvolveuse durante o século XIX en boa medida como consecuencia dos intentos de demostrar o último teorema de Fermat, algo que non acontecería ata finais do século XX. En 1847, Lamé creu ter demostrado o teorema, pero a súa demostración tiña un erro como consecuencia de que supoñía que certo anel de enteiros alxébricos era un DFU e, como se viu despois, realmente non o era. O feito de que, tanto o anel dos números enteiros $\mathbb{Z}$ coma os aneis de polinomios nunha variable sexan DFUs levara á crenza de que os aneis de enteiros alxébricos, que teñen un comportamento parecido, tamén o eran, e iso foi o que produciu o erro de Lamé [36]. A razón última da confusión estriba en que hai dous conceptos que son equivalentes en moitos casos pero non sempre: o concepto de irredutible e o concepto de primo. O concepto de elemento irredutible é, como se mencionou, a xeneralización directa do concepto de número primo pero, neste contexto máis xeral, defínese un *elemento primo* como aquel que se divide a un produto *ab* de dous elementos, entón ten que dividir a algún deles; a idea desta definición ten a súa orixe no lema de Euclides (a Proposición VII.30 dos *Elementos*), como consecuencia da cal os conceptos de primo e irredutible son equivalentes en $\mathbb{Z}$. Porén, nos aneis de enteiros alxébricos a propiedade máis familiar das dúas, a de ser irredutible, é máis débil e un elemento pode ser irredutible sen que teña que ser primo, o que fai que unha factorización en produto de irredutibles non sexa necesariamente única (si o sería se os irredutibles fosen primos). A

[36] Unha clara exposición da relación entre a teoría de números alxébricos e o último teorema de Fermat encóntrase en (Stewart e Tall 2002).

factorización única en aneis de enteiros alxébricos recupérase, como observou o matemático alemán Dedekind no século XIX, introducindo o concepto máis xeral de factorización de ideais. Dende entón, a teoría de números progresou moito e continúa en pleno desenvolvemento, e neste contexto existen numerosos problemas abertos relacionados cos conceptos que acabamos de mencionar, véxanse, por exemplo (Guy 2004), (Shanks 2001). Todo isto é un testemuño máis sobre o profundo impacto que, máis de 20 séculos despois, segue tendo a matemática grega e, en concreto, os *Elementos*, no desenvolvemento das matemáticas modernas.

Outro aspecto dos *Elementos* que está relacionado coa aritmética é o tratamento do infinito. Nas matemáticas actuais considéranse habitualmente conxuntos infinitos, pero os gregos tiñan temor a este concepto e polo tanto evitábano. A palabra *ápeiron* que eles usaban significaba 'ilimitado', 'infinito' ou 'indefinido' e tiña unha connotación negativa, ata o punto de que os pitagóricos asociaban o ben e o mal co finito e o infinito (Donald Allen). A pesar desta reticencia, as observacións de que o tempo parece non ter fin, que o espazo parece non ter límites e que o espazo e o tempo parecen poder ser subdivididos indefinidamente, obrigaban ós gregos a enfrontarse co concepto de infinito. Isto aconteceulle a Euclides ó demostrar que hai infinitos números primos aínda que el, naturalmente, non o expresaba así senón que dicía que «os números primos son máis que toda cantidade proposta de números primos», utilizando así un concepto que se deu en chamar *infinito potencial*, segundo o cal os enteiros (e tamén os primos) son potencialmente infinitos porque sempre se pode engadir un para obter un número maior, sen que iso presupoña a existencia do conxunto infinito (é dicir, a totalidade completa) de todos os enteiros ou todos os primos. Tamén a definición de punto que dá Euclides suxire a idea de que o espazo é infinitamente divisible sen mencionar explicitamente o infinito.

A relutancia grega a tratar co concepto de infinito non foi obstáculo para que establecesen as bases que permitiron introducir rigorosamente, xa no século XIX, os números reais e os procesos de cálculo a eles asociados. As contribucións principais da matemática grega que serven como paso previo ó desenvolvemento dunha teoría do infinito atribúense a Eudoxo e son a teoría da proporción, desenvolvida no Libro V dos *Elementos*, e o método exhaustivo, que é tratado no Libro XII. A teoría da proporción estende a teoría da proporción pitagórica, que só trataba con magnitudes conmensurables, é dicir, con magnitudes cuxa razón era racional. Na teoría de Eudoxo, esta teoría estendeuse para incluír razóns inconmensurables sen ter que usar números irracionais (que, como sinalamos, os gregos non admitían). A teoría da proporción parte da idea de que unha magnitude α pode ser determinada pola súa posición entre os números racionais, é dicir, coñécese α se se coñecen os números racionais que son maiores que α e os que son menores que α, unha idea que sería perfeccionada por Dedekind moitos séculos máis tarde para definir os números reais mediante o uso de *cortaduras*.

A teoría da proporción serve como punto de apoio ó método exhaustivo ou de esgotamento, que é un precursor da moderna teoría da integración e permite demostrar resultados que hoxe en día serían probados usando límites, en particular, resultados sobre áreas ou volumes de obxectos xeométricos. Dúas das proposicións máis coñecidas que usan este método son as seguintes:

- Proposición XII.2. «Os círculos son entre si como os cadrados dos seus diámetros».
- Proposición XII.18. «As esferas están entre si en razón triplicada da dos seus respectivos diámetros».

A primeira destas proposicións di que a área do círculo é proporcional ó cadrado do seu diámetro e a segunda di que o volume da esfera é proporcional ó cubo do seu diámetro. Para probar a primeira, Euclides inscribía no círculo unha sucesión de polígonos cuxas áreas, na terminoloxía actual, converxen á área do círculo, é dicir, a diferenza en área entre o polígono e o círculo faise arbitrariamente pequena ó ir crecendo o número de lados do polígono, de modo que os posibles valores da área do círculo van sendo «esgotados» polas sucesivas cotas inferiores establecidas polos polígonos. De xeito semellante, a área do círculo pódese aproximar polas de polígonos circunscritos e as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos determinan a do círculo (de forma parecida a como na teoría da proporción unha magnitude é determinada polos números racionais que a preceden e que a suceden). A demostración de que a área do círculo é proporcional ó cadrado do radio baséase en que esta propiedade cúmprese para os polígonos inscritos e non implica o uso dun número finito de pasos senón que a demostración faise por contradición: a non proporcionalidade do círculo refútase nun número finito de pasos tomando un polígono suficientemente próximo. O caso da esfera é similar pero traballando con poliedros en lugar de con polígonos. O método exhaustivo coa mesma idea que se usa na demostración da Proposición XII.2 foi usado máis tarde por Arquímedes no seu cálculo da área do círculo, do cal esta proposición é unha consecuencia inmediata.

A pesar de que a teoría da proporción e o método exhaustivo proporcionaban medios para tratar cos irracionais, o medo ó infinito impediulles ós gregos dar o paso e os irracionais non foron introducidos explicitamente ata o século XIX. Ata ese momento, os fundamentos das matemáticas residían na xeometría pois esta era mellor comprendida que a aritmética. Isto cambiou cando se chegou á conclusión de que os razoamentos puramente xeométricos non eran suficientemente rigorosos, e os termos invertéronse para trataren de reconstruír as matemáticas baseándose nos números e a teoría de conxuntos, incluíndo unha plena admisión do infinito. Esta vindicación do infinito chegou a finais do século XIX con George Cantor, quen non só desenvolveu a teoría de conxuntos infinitos sen restrición ningunha, senón que demostrou que existen diferentes infinitos ó probar que o conxunto dos números naturais e o dos números reais non teñen «o mesmo tamaño», é dicir, non poden ser postos en correspondencia biunívoca. Isto levouno de xeito natural a desenvolver unha teoría de números transfinitos, e a teoría de conxuntos pasou a ocupar un lugar preferente nos fundamentos das matemáticas. Pero antes de todo isto, para poder traballar con conxuntos infinitos, Cantor tivo que renunciar á Noción común 8 de Euclides, «o todo é maior que a parte», que aplicada a conxuntos di simplemente que todos os conxuntos son finitos. En efecto, un conxunto infinito S sempre se pode poñer en correspondencia biunívoca cun subconxunto propio do mesmo[37], é dicir, cun conxunto formado por algúns, pero non todos os elementos de S (dise entón que S é *reflexivo*). De feito, a propiedade de ser infinito é equivalente á de ser reflexivo e por iso esta última propiedade foi adoptada por Dedekind como definición do concepto de conxunto infinito.

É de notar tamén que a definición de número cardinal que deu Cantor —que se estende a cardinais transfinitos— é un eco da definición orixinal de número dada por Euclides (Definición 2 do Libro VII): «Número é a pluralidade composta de unidades». Da mesma forma, para Cantor, un cardinal vén dado por un conxunto ó abstraer a natureza dos seus elementos e a orde de colocación destes, de modo que, como en Euclides, está composto só por unidades ou, como o propio Cantor indicou, «por unidades puras» (Cantor 2009).

A historia do infinito e a súa tardía introdución en matemáticas proporciona outro claro testemuño da enorme influencia que os *Elementos* tiveron no desenvolvemento das matemáticas a través dos séculos, pois non cabe dúbida de que os enxeñosos métodos gregos para tratar co infinito sen admitilo de pleno dereito foron en parte responsables desta tardanza.

[37] De modo que «o todo» (S) e «a parte» (o subconxunto propio) teñen «o mesmo tamaño» e definen o mesmo número (cardinal) infinito.

A Beleza espida

«Euclid alone has looked on Beauty bare» (Edna St. Vincent Millay en (Millay 1923)).

«Euclides, só, ten ollado a Beleza espida» é o primeiro verso dun famoso soneto que de xeito inequívoco relaciona a Euclides coa beleza e que, dende unha perspectiva máis ampla, foi interpretado como unha especie de pronunciamento definitivo sobre a relación entre ciencia e beleza, como se pode ver en (Chiasson e Rogers 2009). A beleza espida é, neste caso, a beleza das matemáticas pero o verso tamén se pode tomar como un punto de partida para explorar a influencia da obra de Euclides noutros ámbitos onde a beleza é tamén moi relevante, principalmente na arte e, por extensión, no mundo da cultura.

A beleza das matemáticas xa foi glosada na antigüidade por Proclo, quen a destacou facéndose eco dun texto de Aristóteles na *Metafísica*, no que di: «As principais formas de beleza son a orde, a simetría e a precisión, cousa que as ciencias matemáticas demostran de modo especial», cf. (Artmann 1999). En tempos moito máis recentes tamén Hardy destacou a beleza, sen intentar definila como fixeran Aristóteles e Proclo, como o principal valor das matemáticas:

> Un matemático, como un pintor ou un poeta, é un facedor de patróns [...] Os patróns do matemático, como os dos pintores ou os poetas, teñen que ser fermosos; as ideas, como as cores ou as palabras, teñen que compaxinarse de forma harmoniosa. A beleza é o primeiro requisito: non hai lugar permanente no mundo para as matemáticas feas. (Hardy 2005, p. 14)

A continuación, Hardy procede a dar exemplos de teoremas matemáticos que, aínda sendo sinxelos, son de primeira liña e serven para exemplificar a beleza e… que teoremas elixe para iso? Pois elixe nin máis nin menos que a Proposición IX.20 de Euclides sobre a infinidade dos primos e a demostración de

Pitágoras de que $\sqrt{2}$ é irracional, mencionando de paso que este teorema aparece de forma moito máis xeral na Proposición X.9 dos *Elementos*. O primeiro destes teoremas dinos que temos á nosa disposición abundante material para a construción da aritmética e o segundo que esta, unha vez construída, se mostra insuficiente para as nosas necesidades posto que hai magnitudes que non poden ser medidas co sistema obtido. Hardy fai tamén un intento de definir as calidades estéticas destes teoremas e, entre elas, atribúelles «a calidade de ser inesperados, combinada coa inevitabilidade e a economía». Hardy termina resumindo as súas consideracións sobre a beleza das matemáticas coa declaración seguinte: «resulta obvio que o meu interese polas matemáticas céntrase exclusivamente no feito de consideralas como unha arte creativa».

A importancia do compoñente estético das matemáticas tamén foi destacada por von Neumann, cuxa opinión é especialmente relevante porque non só é un dos máis grandes matemáticos da historia senón que o seu traballo abarcou tanto os campos tradicionalmente considerados «puros» (teoría de conxuntos, análise funcional) coma os «aplicados» (análise numérica, teoría de xogos), incluíndo as aplicacións á física e á informática, da cal é considerado un dos fundadores[38]. En (Von Neumann 1961), von Neumann di ó falar da actividade matemática:

> Baste dicir que o carácter estético é aínda máis prominente que no exemplo que mencionei antes no caso da física teórica. Un espera dun teorema matemático ou dunha teoría matemática non só que describan e clasifiquen de modo simple e elegante numerosos casos especiais que aparecen dispares a priori. Un

[38] A perspectiva de von Neumann é, sen lugar a dúbidas, moi diferente da de Hardy pois unha gran parte do traballo de von Neumann produciu «matemáticas útiles», un concepto que Hardy non apreciaba demasiado. Como consecuencia do devandito traballo e do doutros matemáticos que desenvolveron os seus aspectos computacionais, grandes partes da aritmética non elemental resultaron ser finalmente «útiles», algo que Hardy non chegou a imaxinar. A pesar de todo, é notable que dende eses puntos de vista tan diferentes, ambos personaxes chegasen a conclusións similares no referente á beleza das matemáticas.

> tamén espera «elegancia» na súa forma estrutural, «arquitectónica» [...] Eses criterios son claramente os de calquera arte creativa [. . .] todo isto está moito máis próximo á atmosfera da arte pura e simple que á das ciencias empíricas.

Nesta liña hai numerosos testemuños directos e indirectos que mostran a proximidade das matemáticas e a arte. Entre os indirectos pódese, por exemplo, mencionar que existe unha revista titulada *Journal of Mathematics and the Arts*, e existen tamén institucións como a *European Society for Mathematics and the Arts* (EMSA) e *The International Society of the Arts, Mathematics, and Architecture* (ISAMA). Por citar só unha mostra recente dos testemuños directos referireime ó artigo (Farsi e Craft), onde tomando como punto de arranque o poema de Millay sobre Euclides que xa mencionamos, arguméntase que a pesar das grandes diferenzas que aparentemente existen entre ambas, «como o símbolo ying/yang, a arte e as matemáticas son realmente unha en dúas, e dúas nunha».

A estreita conexión entre matemáticas e arte está xa presente na obra de Euclides, que non só foi considerada como exemplo dos valores artísticos das matemáticas —como xa mencionamos en relación cos exemplos de Hardy— senón que tivo unha influencia considerable ó longo da historia nas chamadas tradicionalmente *belas artes*, é dicir, na pintura, a escultura e a arquitectura. Comezarei referíndome a esta última posto que é nela onde a influencia euclidiana se puxo de manifesto de forma clara desde o principio. Non é estraño que fose así, porque dende tempo inmemorial existiu un estreito lazo entre as matemáticas e a arquitectura[39], cuxos deseños se represen-

[39] Esta estreita conexión séguese mantendo hoxe en día e a revista *Nexus Network Journal* está dedicada ó seu estudo, aínda que tamén hai voces que sosteñen que esta relación cambiou no século xx e que a arquitectura e o deseño contemporáneos poden estar a promover unha mentalidade antimatemática (Salingaros 1999). Por outra banda, o texto de von Neumann antes citado tamén destaca implicitamente a conexión entre a arquitectura e as matemáticas ó referirse á estrutura «arquitectónica» destas.

taron sempre mediante técnicas xeométricas nas que, dende Pitágoras, a teoría da proporción xogou un papel importante. Por esta razón, Euclides foi percibido tamén como un arquitecto ou, polo menos, como un teórico da arquitectura. Baste citar a xeito de exemplo que na cara este do Campanile da catedral de Florencia, un dos paneis hexagonais de Nino Pisano[40] representa a Arquitectura na figura de Euclides utilizando un compás (véxase a Ilustración 4).

Outro feito que se pode citar neste sentido é que a primeira tradución ó inglés dos *Elementos*, a de John Dee do ano 1570, di expresamente no seu prefacio que está dirixida ós arquitectos e, como se sinala en (Mitchell 2001), existe unha boa xustificación para considerar os *Elementos* como o primeiro texto teórico de arquitectura en inglés.

Dende a súa formulación inicial, a teoría pitagórica da proporción foi usada na arquitectura grega, sendo o templo de Apolo en Corinto, construído arredor do 540 a. C, o primeiro templo coñecido cunha clara proporción *lonxitude:anchura* = *anchura:altura*. Pola súa banda, o Partenón de Atenas usa a razón 9:4 (que corresponde ós dous primeiros cadrados), de modo que esta é a súa razón *lonxitude:anchura* e tamén a razón *anchura:altura*, e mesmo a razón entre a distancia entre columnas (medida dende os seus centros) e o diámetro de cada columna. De feito, usando medidas máis detalladas, Buckens postula en (Buckens 2002) que o deseño do Partenón, no que se refire ás súas medidas de altura, estaba baseado nunha escala musical dórica que tamén ten a súa orixe na escola pitagórica.

Esta influencia pitagórica na arquitectura foi contraposta á euclidiana en (Sbacchi 2001), onde se menciona que, aínda que durante a Idade Media as liñas xeométricas usábanse na práctica da construción ó ser máis sinxelas que os complicados cálculos

40 Nino Pisano era fillo de Andrea Pisano, que sucedera a Giotto, cando este morreu, como mestre da obra da catedral. Os paneis que figuran actualmente no campanario da catedral son copias e os orixinais son conservados no Museo dell'Opera di Santa Maria del Fiore, situado xusto detrás da catedral.

Ilustración 4. Panel da catedral de Florencia, debido a Nino Pisano, que representa
a Arquitectura na figura de Euclides

aritméticos, entre os arquitectos predominaba a tradición de basear o deseño nas proporcións pitagórico-platónicas tal como fixera Vitruvio no seu tratado *De architectura* escrito no século I a. C. Sbacchi establece unha polaridade entre a «teoría de números pitagórica» e a «xeometría euclidiana de rectas», sendo a primeira predominante na teoría da arquitectura ata o século XVII, cando a xeometría euclidiana aparece abertamente no tratado *Archittetura civile* de Guarino Guarini, que ademais de arquitecto era un matemático que vía a xeometría euclidiana como unha especie de clave universal para o coñecemento humano. O tratado de Guarini contén moitas cousas transportadas directamente dos *Elementos* e o enfoque xeométrico é predominante sobre o aritmético. Como di Sbacchi, nel a miúdo os elementos de xeometría convértense en elementos de arquitectura sen máis e, por exemplo, para Guarini unha parede é unha «superficie» e unha bóveda é unha «semiesfera» de modo que, en consecuencia, o deseño arquitectónico transfórmase en debuxo arquitectónico.

A contraposición que formula Sbacchi entre o «euclidismo» e a «numeroloxía pitagórica» podería levar á impresión de que Euclides e os *Elementos* non tiveron gran influencia na arquitectura previa ó século XVII, pero nada máis lonxe da realidade. Por unha banda, tal como xa sinala o propio Sbacchi, a xeometría euclidiana estivo sempre moi presente na práctica arquitectónica, mesmo cando a teoría se inclinaba cara ó enfoque aritmético. Tanto Vitruvio como Leon Battista Alberti, o gran teórico arquitectónico do Renacemento, eran bos coñecedores da xeometría euclidiana aínda que nos seus tratados predominase o uso das razóns numéricas. Tamén Andrea Palladio, o arquitecto de Padua que foi mestre no uso das proporcións como mostra no seu tratado *Quattro libri dell'archittetura* (publicado en 1570) e na súa propia obra arquitectónica, dominaba os libros I-VI de Euclides xa á idade de 12 anos (March 2008). E non hai dúbida de que todos eles usaron efectivamente a xeometría euclidiana nas súas construcións.

Pero, aínda que non fose así, a influencia dos *Elementos* de Euclides na arquitectura previa ó século XVII, e especialmente na renacentista, tería sido igualmente innegable. Pois, como xa sinalamos, os *Elementos* non son só un tratado de xeometría senón que tamén o son de aritmética, aínda que esta última estea envolvida na linguaxe xeométrica. Por iso, máis que unha contraposición Pitágoras/Euclides ou Vitruvio/Euclides, o que existiu foi un contraste entre a aplicación dos métodos aritméticos e os xeométricos na arquitectura. Os arquitectos que seguían a primeira liña, sen dúbida, tiñan tamén os *Elementos* como fonte matemática principal, aínda que a iconoloxía renacentista e medieval levase posteriormente a identificar a Euclides coa xeometría[41], excluíndo inxustificadamente a aritmética[42].

A arquitectura evolucionou moito dende o século XVII pero a influencia euclidiana seguiu sendo moi importante. Por exemplo, xa en pleno século XX, no seu *Urbanisme*, publicado en 1924, Le Corbusier manifestábase con palabras de resonancias euclidianas:

> O home camiña en liña recta porque ten un obxectivo. Sabe onde vai, decidiu ir nunha dirección e camiña directamente cara a ela.
>
> O ángulo recto é a ferramenta necesaria e suficiente para a acción, porque serve para determinar o espazo con absoluta claridade.

---

41 Por exemplo, un dos paneis hexagonais na cara norte do Campanile da catedral de Florencia, atribuído a Luca della Robbia, representa a Aritmética e a Xeometría nas figuras de Pitágoras e Euclides sostendo un diálogo.

42 Aínda que os *Elementos* recollen resultados anteriores de xeometría e de aritmética, resulta paradoxal que os que se lle atribúen tradicionalmente ó propio Euclides, «o xeómetra», sexan (ademais da demostración de VI.31, que ten contido xeométrico) a Proposición VII.30 e, sobre todo, a Proposición IX.20 sobre a infinidade dos primos, cuxo contido é puramente aritmético, como tamén o é o do algoritmo que leva o seu nome. Probablemente, esta identificación de Euclides coa xeometría provén do feito de que estes resultados aritméticos tardaron moito en ter aplicacións prácticas —non as tiveron realmente ata a chegada das matemáticas computacionais e da informática— e os únicos resultados aritméticos dos *Elementos* que as tiñan eran os da teoría da proporción que, como era ben coñecido, proviñan da escola pitagórica.

Algo máis tarde, en 1945, Le Corbusier introduciu o *Modulor* (Le Corbusier 1962), un sistema de medida baseado nas proporcións do corpo humano e na razón áurea, de onde deriva o seu nome: «module et section d'or». Tamén aquí a influencia euclidiana segue a manifestarse claramente.

Aínda máis recentemente, o deconstrutivismo arquitectónico representado, entre outros, por arquitectos como Peter Eisenmann, Zaha Hadid e Frank Gehry, usa formas non convencionais con superficies complexas e volumes que dan a impresión de ter sido detidos no seu movemento. Isto está lonxe do concepto estático da xeometría que tiñan os gregos e quizais por iso adóitase dicir que usan xeometría non euclidiana (en particular, Gehry é frecuentemente descrito como un «arquitecto non euclidiano»). Non é doado precisar o que isto significa e, por exemplo, Jeremy Gilbert-Rolfe, un pintor e profesor de arte que colaborou con Frank Gehry, di a propósito disto (Gilbert-Rolfe): «É certo que os edificios de Gehry están feitos, a miúdo pero non sempre, de curvas. Algunhas pode que sexan non-euclidianas pero nin Gehry nin eu sabemos distinguilas». Non obstante, aínda admitindo que o uso de superficies curvas non convencionais[43] afástaa do contido literal dos Elementos, a obra de Gehry e outros deconstrutivistas insírese tamén no espazo euclidiano e non tería sido posible sen toda a tradición xeométrica que se iniciou con Euclides.

As matemáticas dos *Elementos* tamén tiveron unha importante influencia na escultura. Tampouco isto resulta estraño

---

43 Algúns chaman non-euclidiana á arquitectura que usa este tipo de superficies —que poderían ser non-euclidianas no sentido de que as súas seccións planas non sexan construíbles con regra e compás a partir de cónicas— pero o carácter euclidiano é unha propiedade global do espazo e por iso, para encontrar verdadeira arquitectura non-euclidiana quizais habería que dirixirse á imaxinaria cidade afundida de R'lyeh, que H. P. Lovecraft describiu no seu relato curto «A chamada de Cthulhu» (Lovecraft) sinalando que a súa xeometría é «anormal, non-euclidiana e repugnantemente reminiscente de esferas e dimensións afastadas das nosas». Unha posible explicación física destes fenómenos no contexto da teoría da relatividade xeral foi ofrecida recentemente por B. K. Tippett, quen sostén que «poden ser explicados como as consecuencias observables dunha burbulla localizada da curvatura do espazo-tempo» (Tippett 2012).

porque, como no caso da arquitectura, a proporción e a xeometría son aquí factores determinantes. Sobre a similitude da beleza escultórica e a beleza matemática tamén se pronunciou Bertrand Russell (Russell, 1919):

> As matemáticas, observadas correctamente, posúen non só a verdade, senón a suprema beleza —unha beleza fría e austera, como a da escultura, sen apelar a ningunha parte da nosa natureza máis débil, sen os espléndidos adornos da pintura ou da música, non obstante, sublimemente pura e capaz dunha rigorosa perfección, como só a arte máis grande pode mostrar.

Case ó mesmo tempo que se construía o Partenón, Policleto, xunto con Fidias o escultor máis famoso da Atenas clásica, escribía o seu *Canon* sobre as proporcións da figura humana. O *Canon* perdeuse pero mostra a importancia que xa no século V a. C. tiña a teoría da proporción para a escultura. Platón alude a isto no *Sofista* onde di «o exemplo perfecto consiste en crear unha copia que é conforme ás proporcións do orixinal nas tres dimensións». Euclides veu despois e incluíu a teoría da proporción nos *Elementos*, que pasaron a seren tamén a principal referencia matemática neste campo.

A preferencia grega pola idealización e a abstracción que está patente nos *Elementos*, estableceu a ponte entre as matemáticas e a escultura. A escultura non trataba de representar persoas concretas senón corpos ideais que capturasen o concepto, tamén ideal, de beleza. Este concepto baseábase nas proporcións, e así por exemplo, seguindo os ditados do *Canon*, a razón do corpo á cabeza da Afrodita de Praxiteles é 8:1. A idea de que a figura humana ideal estaba determinada pola proporción foi continuada no Renacemento, especialmente por Leonardo da Vinci, quen realizou unha análise completa mostrando como as diferentes partes do corpo estaban relacionadas pola razón áurea. A influencia dos *Elementos* en Leonardo foi, como sinala Kemp, decisiva (Kemp 2006, p. 135):

> Este deleite na beleza intelectual das matemáticas abstractas é precisamente o que motivou a Leonardo a partir de 1497 para embarcarse nun programa de autoeducación na especialidade do seu amigo, usando primariamente os *Elementos* de Euclides, o texto estándar para calquera que buscase unha completa introdución á encantadora orde da perfección matemática.

O amigo de Leonardo que se menciona na cita anterior era o matemático e frade franciscano Luca Pacioli, quen no seu *De divina proportione*, publicado en 1509, se referiu á razón áurea como «dal ciel mandata» (de aí o cualificativo de *divina* no título). A segunda parte deste libro, que se basea nunha obra non publicada de Piero della Francesca, está dedicada ós sólidos platónicos e foi ilustrada polo propio Leonardo. Non resulta esaxerado dicir que, dada a importancia da obra de Leonardo en numerosos campos do coñecemento e da arte, e a grande influencia que na súa educación tiveron os *Elementos*, só este feito tería sido suficiente para considerar estes como unha das obras máis importantes da historia.

A obra de Euclides non só foi importante para a representación escultórica da figura humana senón que tamén serviu como inspiración directa para a creación de esculturas que representan motivos xeométricos euclidianos. Unha mostra recente diso son as esculturas de papel de Helen Friel que reinterpretan en tres dimensións os diagramas euclidianos (Friel).

O anterior mostra as estreitas conexións das matemáticas coa arquitectura e a escultura e, en particular, a influencia da obra de Euclides no establecemento das devanditas conexións. Por iso non debe sorprender que tamén a pintura estea estreitamente relacionada coas matemáticas. Esta é a tese fundamental desenvolvida por Jensen en (Jensen 2002) e (Jensen 2009), e o título do segundo destes artigos xa o deixa bastante claro: «As matemáticas son pintura sen o pincel e a pintura é matemáticas sen o xiz». Por exemplo, en (Jensen 2009), esta idea exprésase do xeito seguinte:

> […] a un nivel profundo as matemáticas e a pintura son similares. Fundamentalmente, tanto as matemáticas coma a pintura esfórzanse en desenvolver unha representación da realidade circundante. Vemos que este esforzo certamente tivo éxito en casos como os da xeometría de Euclides ou as pinturas murais de Knossos. A pesar do dramático cambio de perspectiva durante os séculos que nos separan de Euclides ou do artista de Knossos, comprendemos e apreciamos as matemáticas e a arte.

Tendo en conta esta estreita conexión, non resulta estraña a enorme influencia que Euclides tivo no mundo da pintura. Esta influencia alcanzou o seu punto culminante no Renacemento, a partir do descubrimento da perspectiva lineal e do seu posterior uso xeneralizado na pintura. Curiosamente, este descubrimento non foi realizado por un pintor, senón por Brunelleschi, que era primariamente un arquitecto que usaba os principios da perspectiva nos seus deseños para conseguir que o efecto visual desexado fora apreciable dende todas as posicións do observador.

Brunelleschi parece ter descuberto a perspectiva lineal ó redor de 1413, cando comprendeu que nun cadro debería existir un único punto de fuga ó que deberían converxer todas as liñas paralelas situadas en planos distintos ó do lenzo (O'Connor e Robertson). Para ilustrar o seu descubrimento, Brunelleschi debuxou en paneis de madeira dúas imaxes que se perderon pero das que se conservaron descricións. Unha delas representaba o baptisterio florentino de san Xoán visto dende o pórtico occidental da catedral e tiña un burato que permitía a un observador situado detrás do panel ver a imaxe reflectida nun espello[44]. A importancia do descubrimento dos principios da perspectiva foi enorme e en (Edgerton) afírmase que isto non

[44] A interpretación disto que se formula en (Andersen 2007, pp. 11-13) é que o observador debería a continuación mirar a imaxe do baptisterio reflectida no espello e marabillarse de que non houbese diferenza entre ámbolos dous reflexos.

só cambiou o modo en que representamos o que vemos senón tamén o modo en que vemos *a priori*.

A constelación de grandes artistas do Renacemento que eran tamén, en gran medida, matemáticos, íniciase con Brunelleschi e inclúe a Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Alberto Durero, todos os cales foron decisivamente influídos por Euclides. O primeiro en formular por escrito a teoría da perspectiva foi Alberti no seu tratado *De pictura*, de 1435, onde dá a seguinte definición: «Un cadro é a intersección dunha pirámide visual a unha distancia dada, cun centro fixado e unha posición definida da luz, representada por arte con liñas e cores sobre unha superficie dada».

Alberti estaba máis interesado na teoría da pintura que na práctica desta, pero non era este o caso de Piero della Francesca, que viviu uns anos despois e, sendo artista e matemático, manifestou o seu desexo de conectar ámbalas dúas disciplinas[45]. Piero era un profundo coñecedor da obra de Euclides[46] e da de Arquímedes e a el débese o primeiro tratado práctico completo de pintura en perspectiva, *De prospectiva pingendi* que, tomando como inspiración *De pictura* e maila obra de Euclides, foi escrito entre 1474 e 1482. Referíndose a *De prospectiva*, Emmer di (Emmer 2005, p. 270):

> Piero imponse a tarefa teórica de transformar a observación empírica en *vera scientia*, é dicir, en demostracións matemáticas. Por esta razón o seu tratado está estruturado seguindo as liñas da lóxica e partindo da definición dun punto como «essere una cosa tanto picholina quanto è possibile ad ochio comprendere»

[45] Piero della Francesca simboliza mellor que ninguén a conexión matemáticas-arte, un feito que Kline destaca na súa historia do pensamento matemático (Kline 1972) cando escribe: «Piero foi o pintor-matemático e o artista científico *par excellence*, e os seus contemporáneos así o consideraban. Foi tamén o mellor xeómetra do seu tempo».

[46] Este feito ponse de manifesto claramente nos estudos de Judith V. Field, (Field 1997), (Field 2005), onde se mencionan as numerosas referencias que Piero fai á obra de Euclides.

> leva, teorema tras teorema, á representación perspectiva dun corpo tridimensional.

Tanto a estrutura do tratado como o seu punto de partida, a definición de punto, son un eco da obra de Euclides. Ademais deste, Piero escribiu outros tratados matemáticos, e en todos eles a herdanza de Euclides apréciase claramente[47]. Un destes tratados é o *Libellus de quinque corporibus regularibus*, que está dedicado ós sólidos platónicos. O libro non se publicou e, segundo Vasari, pintor e historiador que escribiu uns 60 anos despois, foi copiado polo seu discípulo Pacioli na segunda parte de *De divina proportione*, que se publicou con ilustracións de Leonardo. Non obstante, en (Andersen 2007, p. 36) póñense en dúbida as afirmacións de Vasari, e baseándose nunha das construcións que aparecen en ámbolos dous textos menciónase que a de Pacioli está moito máis próxima á de Euclides que a de Piero, suxerindo que as semellanzas entre ambas obras poden ser debidas a que os dous autores se basearon nos mesmos textos anteriores, entre os que os *Elementos* ocupan un lugar destacado.

A obra de Euclides tamén influíu profundamente en Leonardo (Kemp 2006) e en Durero (Andersen 2007) así como en moitos outros artistas do Renacemento. Un testemuño da súa relevancia proporciónao a súa aparición como unha das figuras principais en *A Escola de Atenas*, un fresco pintado por Rafael Sanzio entre 1410 e 1411 nunha das paredes da *Stanza della Segnatura* no Vaticano. O cadro trata de proporcionar unha visualización do coñecemento a través das figuras dos filósofos e científicos antigos. Euclides aparece á fronte, á dereita, rodeado por catro alumnos absortos nunha demostración matemática que

[47] A obra matemática de Piero descríbese en (Peterson 1997) do xeito seguinte: «Piero traballou ambiciosamente en matemáticas, demostrou teoremas novos, enfrontouse a problemas difíciles, e mesmo formulou un programa de investigación coherente, a aritmetización dos últimos libros de Euclides».

Euclides realiza debuxando cun compás nunha pizarra que se atopa no chan[48] (Ilustración 5).

O interese espertado pola representación que Rafael fixo da figura de Euclides ponse de manifesto nas numerosas análises e interpretacións que se fixeron sobre cal pode ser o teorema que están a estudar no cadro. A pizarra mostra unha estrela de 6 puntas con dúas rectas paralelas e unha diagonal no centro pero, como está tan inclinada, discutiuse moito sobre se a estrela é simétrica ou non. Algunhas das diferentes interpretacións son discutidas con detalle en (Haas 2012), onde se formula tamén a hipótese de que a imaxe non ten un significado matemático concreto senón que representa a beleza do descubrimento matemático pois, como di Haas: «a escena segue sendo unha imaxe magnífica dunha vida ideal en matemáticas».

Outros artistas que pintaron a Euclides foron Joos van Gent e José Ribera, *o Españoleto*. Van Gent foi un pintor flamenco que, en torno a 1460, pintou en Urbino retratos de 28 personaxes do mundo da cultura e da política. O seu retrato de Euclides reprodúceo debuxando cun compás sobre unha pizarra que sostén entre as súas mans, e puido servir de inspiración a Rafael. Xa no século XVII José Ribera, pola súa banda, pintou un filósofo sostendo un libro aberto en cuxas páxinas se pode ver o debuxo dun pentágono inscrito nunha circunferencia. Parece que o debuxo que se adiviña no cadro é unha ilustración da Proposición IV.14 dos *Elementos*, na que se circunscribe unha circunferencia a un pentágono, de onde se deduce que o filósofo é precisamente Euclides. Estes dous cadros están representados na Ilustración 6.

A influencia de Euclides na pintura non se limita ó Renacemento e ó século XVII. Dando un salto cara a adiante chegamos a Vassily Kandinsky, o pintor que, xa no século XX, reali-

---

[48] Non podo deixar de mostrar a miña conformidade coa observación que se fai en (Haas 2012, p. 12) a propósito desta escena: «Os profesores de matemáticas traballan toda a súa vida esperando encontrar alumnos como os que Rafael proporcionou a Euclides aquí».

Ilustración 5. Euclides rodeado de catro discípulos na *Escola de Atenas* de Rafael

zou os primeiros cadros completamente abstractos, o cal podería facer pensar que estaría moi afastado de Euclides. Non obstante, non foi así e, pola contra, Kandinsky tratou de establecer unha fundamentación axiomática da pintura tomando ós *Elementos* como referencia. No seu libro *Point and line to plane*, publicado en 1914, Kandinsky parte dunha serie de definicións e trata de deducir propiedades dos elementos da pintura a partir delas. Unha das súas definicións, citada en (Jensen 2009), é a seguinte:

O punto xeométrico: O punto xeométrico é unha cousa invisible. Polo tanto ten que ser definido como algo incorpóreo. Considerado en termos de substancia, é igual a cero. Ocultos neste cero hai, con todo, varios atributos que son de natureza «humana» [...]

Quizais tampouco cabería esperar que os pintores surrealistas, que pretendían fundir a realidade coa imaxinación e os sonos, fosen a inspirarse en Euclides. Pero así foi, quizais porque Euclides lles proporcionaba a realidade xeométrica que debería ser distorsionada. Así, Max Ernst pintou, en 1945, un retrato surrealista de Euclides no que usa técnicas xeométricas para mostrar formas que aluden á natureza matemática do mundo. A cabeza de Euclides toma a forma dun poliedro parecido a unha pirámide, cuns ollos dun amarelo brillante que suxiren unha actividade intelectual intensa (Ernst).

Outro pintor surrealista que se interesou por Euclides foi René Magritte, que pintou *Les promenades d'Euclide* en 1955 (Magritte). Neste cadro, Magritte xoga coa ilusión e a realidade e neste xogo teñen un papel fundamental as formas xeométricas que, aínda representando realidades moi diferentes, poden chegar a confundirse. No cadro vese, a través dunha ventá, a torre dun castelo e ó fondo unha cidade, unha de cuxas rúas toma, en virtude da perspectiva, unha forma similar á da torre. Pero se o cadro se mira máis de preto, vese que o castelo está pintado nun lenzo (un cadro dentro do cadro) situado sobre un cabalete fronte á ventá, dando a impresión de que este lenzo reproduce

Ilustración 6. Retratos de Euclides por Joos van Gent (esquerda) e José Ribera (dereita)

fielmente a parte da cidade cuxa vista tapa. Pero tamén podería non ser así e puidera ser que a torre e a rúa da cidade que se parece a ela non existan realmente... Ou poderíase pensar que o lenzo sobre o cabalete é transparente e o que vemos é a cidade real... Na rúa pódense apreciar dúas figuras minúsculas e quizais unha delas é Euclides paseando, así que Euclides pasearía dentro dun triángulo...

Tamén en 1955, o mesmo ano no que Magritte pintou *Os paseos de Euclides*, Salvador Dalí pintaba *El sacramento de la Última Cena* (Dalí), no que usou a razón áurea na colocación das figuras e simbolizou a Deus na figura dun enorme dodecaedro que flota sobre a mesa.

A influencia euclidiana é tamén patente en moitos outros pintores e artistas gráficos do século XX. Pódese citar neste sentido M. C. Escher, cuxos gravados inclúen numerosos motivos matemáticos, entre os que os sólidos platónicos aparecen con frecuencia. Tamén o artista americano Crockett Johnson que, aínda sendo máis coñecido como autor e ilustrador de contos infantís, produciu entre 1965 e 1975 máis de cen cadros abstractos ó óleo, cada un dos cales representa un teorema matemático, moitos deles xa presentes nos *Elementos*, cf. (Crockett Johnson Homepage).

Xa mencionamos que a xeometría euclidiana proporciona unha descrición moi precisa do espazo físico na escala local que é, quizais coa excepción proporcionada pola contemplación visual do ceo nocturno, a única escala que pode ser percibida directamente polos nosos sentidos. A nosa apreciación das artes plásticas está, polo tanto, estreitamente ligada á nosa percepción da xeometría euclidiana e da proporción, e esta conexión permítenos albiscar que as matemáticas e as artes teñen como nexo común a beleza[49] formal subxacente. Un dos casos en

[49] A definición de beleza formulada en (Read 1972) ilustra especialmente ben este aspecto: «beauty is a unity of formal relations among our sense-perceptions».

que isto se manifesta máis claramente é o da arquitectura pois «Historicamente, a arquitectura foi parte das matemáticas, e en moitos períodos do pasado ámbalas dúas disciplinas foron indistinguibles. No mundo antigo, os matemáticos eran arquitectos, ante cuxas construcións —pirámides, cigurats, templos, estadios e proxectos de rego— marabillámonos hoxe» (Salingaros 1999). Pero tamén vimos a estreita conexión coa austera beleza da escultura (Russell, 1919) e coa pintura (Jensen 2009). Non é esaxerado dicir que moitas destas conexións teñen o seu punto de partida nos *Elementos* de Euclides, que continúa sendo unha referencia importante neste campo.

Outra das artes que foron historicamente influídas polos *Elementos* é a música[50]. Na Grecia antiga, a palabra música tiña un significado máis amplo do que lle damos na actualidade e abranguía a idea das razóns de enteiros como a clave para a comprensión tanto do universo físico visible como do universo espiritual invisible (Benson 2006). Os pitagóricos estudaron a harmonía, é dicir, as combinacións de sons que resultan «agradables», o cal, aínda tendo un compoñente subxectivo importante, levoulles á conclusión de que dous sons tocados simultaneamente resultaban agradables cando o cociente entre as lonxitudes das cordas que os producían era unha fracción formada por números enteiros pequenos. Así descubriron, por exemplo, que o intervalo dunha quinta perfecta, correspondente a unha razón de 3:2, é particularmente harmonioso, e concluíron que unha boa escala podíase construír usando as razóns 2:1 e 3:2.

Como sinala Benson no seu estudo da relación entre as matemáticas e a música, parece que os pitagóricos aplicaban ós intervalos musicais a antifairesis xa antes de que servise de base para o algoritmo de Euclides. Este algoritmo tamén foi

50 Isto é moi natural tendo en conta que a música era, xunto coa aritmética, a xeometría e a astronomía, unha das catro integrantes do *quadrivium* medieval que, herdando a tradición clásica, agrupaba as artes liberais influídas polas matemáticas.

usado no século XVII polos *luthiers* para afinar de xeito preciso os instrumentos musicais e, máis recentemente, foi aplicado á composición musical por Iannis Xenakis, o compositor de ascendencia grega que foi pioneiro no uso do ordenador na composición algorítmica. Xenakis non só foi un dos grandes compositores vangardistas da segunda metade do século XX senón que foi tamén enxeñeiro e arquitecto, coas matemáticas como nexo común entre todas estas facetas. A partir de 1947, traballou como enxeñeiro no estudo de Le Corbusier, co que colaborou en diversos proxectos. Influído por Le Corbusier, Xenakis aplicou o *Modulor* nunha das súas principais composicións, *Metástase*, a cal, á súa vez, inspirouno para o deseño dunha das súas máis importantes obras arquitectónicas: o pavillón Philips da Exposición Universal de Bruxelas de 1958. A teoría da proporción de raíces pitagóricas, transmitida por Euclides, é o substrato común de ámbalas dúas obras e, aínda que Xenakis tamén aplicou á música teorías matemáticas de desenvolvemento moito máis recente (teoría de conxuntos, teoría de xogos, procesos estocásticos...), a tradición euclidiana seguiu xogando un papel relevante na súa obra, como se pode ver no uso que fai do algoritmo de Euclides no seu libro *Formalized music* (Xenakis 1992).

Pero isto non rematou aquí e, por exemplo, novas aplicacións do algoritmo de Euclides á música e, en conexión con elas tamén ós aceleradores de partículas nucleares, foron encontradas recentemente por Godfried Toussaint. Así, en (Toussaint) móstrase, en particular, que a maioría dos ritmos tradicionais do mundo son xerados implicitamente polo algoritmo de Euclides, o cal proporciona unha proba máis de que o legado de Euclides segue moi vivo.

Outra conexión musical (e teatral) coa obra e o personaxe de Euclides encóntrase no musical *Fermat's last tango*, que foi estreado en Broadway na tempada 2001-2002. O musical baséase na historia da demostración por Andrew Wiles do último teorema de Fermat e nela Euclides é un dos catro matemáticos[51] que, xunto con Fermat, son gardiáns do paraíso dos matemáticos onde Daniel Keane (que é como se chama o personaxe de Wiles no musical) querería entrar.

A obra de Euclides tivo tamén un impacto notable na filosofía, na literatura e, mesmo na política. Xa mencionamos a súa influencia en Kant e en Newton, e tamén influíu en Leibniz, pero aínda hai outro filósofo no que influíu de xeito máis decisivo. Trátase de Spinoza, cuxa obra mestra, *Ethica ordine geometrico demonstrata*, publicada postumamente en 1677, xa mostra claramente no título a súa pretensión de fundamentar a ética nun sistema dedutivo usando demostracións rigorosas, no estilo de Euclides, para obter os teoremas a partir das definicións e os axiomas. Cando Spinoza quería deixar claro que algo era indubidable dicía que era tan certo como que a suma dos ángulos dun triángulo é igual a dous rectos e así, por exemplo, en (Espinosa 1980, p. 45), asegura: «do mesmo modo que da natureza do triángulo se segue, dende a eternidade e para a eternidade, que os seus tres ángulos valen dous rectos».

Antes de examinar a pegada de Euclides no mundo da literatura, mencionarei brevemente que, como unha extensión da súa influencia na filosofía, a doutrina dos dereitos naturais do século XVIII é unha busca de axiomas euclidianos para a política (Russell 1984, p. 55). Nesta liña sitúase a Declaración de Independencia dos Estados Unidos, formulada en 1776, onde a redacción orixinal de Thomas Jefferson «we hold these truths to be sacred and undeniable» foi cambiada[52] a «we hold these truths to be self-evident», unha frase con claros ecos euclidianos. A continuación veñen os postulados: «Todos os homes son creados iguais e teñen dereitos inalienables», «Os gobernos están para asegurar eses dereitos», etc. Despois inclúense

[51] Os outros tres son Pitágoras, Newton e Gauss.

[52] O cambio foi atribuído a Benjamin Franklin pero existen dúbidas sobre iso e pode ser que o cambio fose realizado polo propio Jefferson, cf. (Jefferson).

razoamentos lóxicos que especifican como se pode proceder se se violan eses dereitos...

A pegada dos *Elementos* tamén é apreciable na literatura. De feito, os *Elementos* quizais poderían ser vistos tamén como unha obra literaria e, máis concretamente, como unha novela. Esta cuestión é abordada en (Crumey 2009) onde, a pesar de que a conclusión é negativa se se ten en conta que é un texto monolóxico e non dialóxico[53], faise fincapé en que isto é consecuencia dunha elección histórica e non unha necesidade.

Euclides ten sido invocado en numerosas ocasións como un paradigma da racionalidade e así, por exemplo, Conan Doyle fai dicir ó Dr. Watson, referíndose a Sherlock Holmes, no seu relato *A study in scarlet* (Conan Doyle 2003, p. 17): «As súas conclusións eran tan infalibles como tantas proposicións de Euclides». Pero quizais a referencia a Euclides que máis discusión e análise mereceu en virtude das súas implicacións filosóficas é a que fai Ivan en *Os irmáns Karamazov* cando discute co seu irmán Alioscha sobre a existencia de Deus:

> Hai que dicir, non obstante, que se Deus existe, se verdadeiramente creou a terra, fíxoo, como é sabido, segundo a xeometría de Euclides e non lle deu ó espírito humano máis que a noción das tres dimensións do espazo. (Dostoyevsky 1991, p. 279)

A afirmación de Ivan Karamazov establece unha comparación entre as súas dúbidas teolóxicas e a existencia da xeometría non euclidiana e, como se observa en (Fowler 2010), Ivan ve a súa incapacidade para comprender a xeometría non euclidiana como unha evidencia de que non pode comprender a Deus. O que está a facer Ivan é equiparar a razón humana á que el chama «razón euclidiana» e o que lle di a Alioscha é que esta razón non pode comprender a Deus...

53 A contraposición entre estes dous conceptos foi o criterio fundamental que o teórico literario ruso Mijail Bajtin utilizou para definir o concepto de novela.

A conexión literaria das matemáticas é especialmente estreita coa poesía e hai abundantes testemuños que dalgún xeito equiparan ámbalas dúas. Un exemplo claro disto é a definición de Ezra Pound (Pound 2005, p. 14): «A poesía é unha especie de matemática inspirada, que nos dá ecuacións, non para as figuras abstractas, triángulos, cadrados e similares, senón para as emocións humanas». Máis recentemente, José Manuel Caballero Bonald fixo a seguinte declaración ó xornal *El País* despois de serlle concedido o premio Cervantes 2012: «E eu teño unha secreta vocación polas matemáticas. Iso era o que tivese querido ser. A poesía é música e matemáticas». A atracción entre a poesía e as matemáticas é recíproca, como se pode apreciar na frase do matemático alemán do século XIX Karl Weierstrass, que é a miúdo citado como o «pai da análise matemática moderna»: «É certo que un matemático que non é tamén unha especie de poeta nunca será un matemático perfecto».

Entre a abundante poesía de inspiración matemática ocupa un posto destacado a inspirada en Euclides. Xa mencionamos un poema de Edna St. Vincent Millay e tamén a obra recente de Liz Waldner, pero a fascinación con Euclides remóntase a moito antes. O poeta inglés Samuel Taylor Coleridge escribiu en 1791 unha demostración da Proposición I.1 dos *Elementos* en forma de poema: «A mathematical problem», de beleza certamente discutible, dispoñible en (Coleridge). Como se menciona en (Glaz 2011), este poema era só o primeiro dun proxecto moito máis ambicioso que pretendía reproducir a totalidade dos *Elementos* nunha serie de odas pindáricas, proxecto que non chegou a realizarse.

Quizais o poema máis famoso de todos os que foron inspirados por Euclides é o xa mencionado de Edna St. Vincent Millay «Euclid alone has looked on Beauty bare» (Millay 1923). Este poema foi recollido en numerosas antoloxías e o seu primeiro verso, que lle dá título, ten ecos que suxiren heroísmo (a soidade do heroe) e tamén o desvelamento do misterio (a beleza espida). Como di Eva Brann (Brann):

> Isto seguramente non significa beleza núa, senón máis ben beleza espida, desprovista de algo que a vela. A poeta suxire que cando miras os obxectos euclidianos, como círculos, triángulos, e rectángulos, ves algo revelado que as formas corpóreas non mostran, e que te pode conmover igual que a beleza física.

Este poema serviu como modelo no estudo da estética do soneto realizado en (Chiasson e Rogers 2009), onde se discuten as múltiples interpretacións que se fixeron deste soneto e, en particular, da expresión *Beauty bare* no seu primeiro verso e das súas implicacións sobre a beleza matemática. Ademais, neste artigo explóranse en detalle as conexións da forma poética do soneto co teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas e suxírese que a tradución dos *Elementos* ó latín a partir do árabe, realizada por Xerardo de Cremona no século XII, influíu nos poetas innovadores que introduciron o soneto a principios do século XIII, influencia que se estendeu aínda máis unha vez que en 1482 se publicou a primeira edición impresa.

Un dos temas comúns á poesía e as matemáticas é o aprecio pola beleza das formas, e os *Elementos* proporcionan unha gran variedade de formas xeométricas que se prestan especialmente ben a ser glosadas poeticamente. Isto é o que fixo o poeta francés do século XX Eugène Guillevic (ou Guillevic, a secas, como el asinaba) quen na súa obra *Euclidiennes* (Guillevic 1967), dotou de personalidade individual a cada unha desas formas abstractas. Para os gregos, a circunferencia e a esfera representaban o cumio da beleza e a perfección, e esta tradición mantívose longo tempo e explica, por exemplo, a reticencia de Kepler a aceptar o seu propio descubrimento de que as órbitas planetarias eran elipses, pois a idea de que Deus usara unha forma diferente á circunferencia resultaba autenticamente revolucionaria. En *Euclidiennes*, Guillevic dedicou dous poemas á circunferencia e dous á esfera. Nun deles, titulado *Cercle* (II), a circunferencia encarna a profundidade, a plenitude e, en suma, a perfección:

> Parfaitement plein
> Dans ta profondeur,
> Dans l'immobile va-et-vient
> Qui te nourrit.

Os versos de Guillevic ilustran perfectamente ben a conexión matemáticas-poesía —que xa glosara Ezra Pound— a través da beleza, sendo aquí os *Elementos* o elo principal da devandita conexión. Os exemplos mostrados permítennos apreciar que tamén nas artes non visuais como a música e a poesía, a «unidade e a harmonía das relacións formais» das que falaba Read (Read 1972) son un evidente substrato común á idea de beleza subxacente nas devanditas artes e nas matemáticas.

A relación entre as matemáticas e a literatura de ficción é só un aspecto da relación entre matemáticas e narrativa, que é analizada a diferentes niveis e dende distintas perspectivas na colección de ensaios (Doxiadis e Mazur (eds.) 2012), que ten na obra de Euclides unha das súas principais referencias. O punto de partida que deu lugar a estes textos foi un ensaio publicado en 2005 por Apostolos Doxiadis (Doxiadis 2005), no que se postula a existencia dun isomorfismo entre a demostración dun teorema matemático e a composición dunha narrativa. O propio Doxiadis di que a idea lle veu cando un lector da súa novela *O tío Petros e a conxectura de Goldbach* (Doxiadis 2000)[54] lle comentou que o desenvolvemento desa novela é similar ó da solución dun problema matemático. A técnica que usa Doxiadis para probar a existencia deste isomorfismo consiste en demostrar que ambos conceptos son isomorfos a un terceiro, a *analoxía espacial*, que cre que está subxacente tanto á narrativa como á

[54] Esta novela trata da relación entre un mozo que sente debilidade polas matemáticas e o seu tío Petros, que consagrou a súa vida a tratar de demostrar a conxectura de Goldbach, que afirma que todo número par maior que 2 é igual á suma de dous números primos. A novela supuxo a consagración de Doxiadis como autor mundialmente coñecido.

demostración ó poder ser ámbalas dúas vistas como viaxes, e despois usar a transitividade da relación definida polos isomorfismos. A contribución de Doxiadis en (Doxiadis e Mazur (eds.) 2012) titúlase «A streetcar named (among other things) Proof: from storytelling to geometry, via poetry and rhetoric» e, enlazando co seu anterior ensaio do ano 2005 no que relacionaba a demostración matemática coa viaxe heroica, argumenta que a narración literaria e as matemáticas comparten a súa estrutura e que certos aspectos formais dos relatos homéricos que se apreciaban pola súa beleza, pasaron a integrarse nas demostracións matemáticas, nas que foron adoptados primeiramente como mecanismos persuasivos que remataron formando parte da estrutura das deducións lóxicas. En ámbolos dous ensaios, os *Elementos* de Euclides[55] xogan un papel central na análise de Doxiadis, quen resume as súas conclusións en (Doxiadis 2012, pp. 311, 347) do xeito seguinte:

> Dado que as demostracións dedutivas de Euclides son as primeiras que merecen claramente ese nome na historia, describir a presenza nelas de formas orixinadas na narración poética, transmitidas ás matemáticas polo menos parcialmente vía a retórica, é esencialmente equivalente a encontrar o elo perdido entre a historia cognitiva das matemáticas, dende non demostración a demostración: o noso tranvía terá alcanzado a súa parada final. [...] Propuxen que a metodoloxía da demostración lóxica non naceu *ex nihilo* na Grecia Clásica, senón que resultou da transformación gradual

55 Dende un punto de vista algo diferente, que non se centra na estrutura da demostración senón no conxunto da obra, a narrativa dos *Elementos* foi destacada por Netz en (Netz 2009) da forma seguinte: «Os libros aritméticos de Euclides teñen unha estrutura narrativa complexa, pois están deseñados con dous puntos culminantes: o propio final, IX.36, que produce un algoritmo para encontrar un número perfecto [...] e logo IX.20 que [...] non ten propósitos dedutivos adicionais [...] O illamento de IX.20, o cambio que vén a continuación e o notable logro que materializa serven para marcalo como un punto culminante». Por outra banda, no capítulo 4 de (Netz 2009), titulado «The poetic interface», faise unha afirmación explícita de que as prácticas poéticas son, por unha parte, complementarias, e por outra, paralelas ás das ciencias exactas, afirmación que sustenta nas relacións existentes entre ámbalas dúas no mundo grego.

> e a converxencia de varias prácticas, no corazón das cales están as capacidades cognitivas da narrativa e as ferramentas culturais da poesía. Seguín unha liña particular da historia intelectual dende as súas raíces [...] ata a fusión final da metodoloxía retórica co mundo da xeometría práctica para producir o que coñecemos hoxe como demostración matemática, especialmente como aparece nos *Elementos* de Euclides.

En (Doxiadis e Mazur (eds.) 2012) tamén hai contribucións de varios matemáticos destacados como Timothy Gowers, Michael Harris, Barry Mazur e Bernard Teissier. A contribución de Harris ten, como a de Doxiadis, un título de amplas resonancias literarias e cinematográficas, «Do androids prove theorems in their sleep?»[56], e aventúrase nunha exploración das semellanzas entre demostracións matemáticas e obras de ficción. Os «androides» son programas de ordenador que proban teoremas e que Harris imaxina que poden chegar a colaborar cos humanos no futuro. Xa vimos a grande influencia que os *Elementos* tiveron na literatura e en (Doxiadis 2012), Doxiadis proponnos que tamén houbo un fluxo na dirección contraria: a literatura influíu nos *Elementos* e, a través deles, en todas as matemáticas. O artigo de Harris suxire a posibilidade de que unha figura de orixe literaria, os androides —instanciados como demostradores automáticos de teoremas— quizais poidan seguir facéndoo decisivamente no futuro.

A longa viaxe

Como xa vimos no repaso anterior, a influencia euclidiana no mundo das matemáticas e, máis en xeral, no da cultura, foi prolongada e profunda. Non obstante, non sempre esta influencia foi percibida como beneficiosa e así, en tempos recentes,

[56] O título de Harris faise eco do relato de Philip K. Dick *Do androids dream of electric sheep?*, que serviu de base para a película de Ridley Scott *Blade Runner*, un clásico da ciencia ficción ó que Harris fai varias referencias.

alzáronse algunhas voces poñendo reparos á devandita influencia ou contrapoñendo a ela outros camiños e outras concepcións diferentes. Un exemplo disto prodúcese na arquitectura, onde os principios euclidianos chegaron a ser vistos como unha limitación, unha visión que está, por exemplo, implícita no título de (Mitchell 2001) onde a frase *Roll over Euclid* parece unha declaración de principios similar á que realizou Chuck Berry na súa canción de 1956 *Roll over Beethoven*, na que mostraba o seu desexo de que o rock e o *rythm and blues* substituísen á música clásica. Os versos de Berry, «Roll over Beethoven and tell Tchaikovsky the news», encontran eco no artigo de Mitchell:

> It was curtains for the, well, hegemonic discourse of straightedge and compasses. Roll over Euclid. Tell Pythagoras the news. (Mitchell 2001, p. 357)

Tamén no mundo das matemáticas a influencia euclidiana adquiriu connotacións negativas nalgúns contextos. Naturalmente, estas connotacións non se refiren ó propio Euclides senón ó uso que se puido facer dos *Elementos* sen ter en conta que as matemáticas evolucionaron moito dende que foron escritos. Neste sentido, xa temos mencionado o berro «abaixo Euclides!» que proferiu Dieudonné en 1959, un berro que non ía dirixido contra Euclides senón contra unha forma de ensinar a xeometría que non respondía ás necesidades das matemáticas contemporáneas. Máis recentemente, en 1988, Edsger W. Dijkstra utilizou a xeometría euclidiana como un exemplo de disciplina precientífica:

> A pretensión con que se ensina a xeometría euclidiana hoxe en día (a saber, que é un sistema estritamente dedutivo) é unha gran mentira. A súa aceptación xeneralizada (e o estendido eloxio da intuición ó seu amparo) estanos a dicir: as matemáticas hoxe son aínda unha disciplina cun compoñente precientífico importante, no que o espírito da Idade Media aínda persiste. (Dijkstra 1988)

A diatriba de Dijkstra enmárcase nunha concepción estritamente formalista das matemáticas[57] e a súa crítica é moi diferente da de Dieudonné, pois non se dirixe ó contido (Dieudonné renegaba da *xeometría do triángulo*) nin moito menos á metodoloxía dedutiva, senón ó feito de que esta última non é suficientemente rigorosa en Euclides xa que se combina con chamadas á intuición. Tamén en agudo contraste coa crítica de Dijkstra se encontra a de Imre Lakatos (Lakatos 1978) quen, tomando como punto de partida o falsacionismo popperiano, tratou de demostrar que as matemáticas teñen unha base empírica e que, lonxe da pretensión de certeza absoluta que se buscaba ó basealas en métodos puramente lóxico-dedutivos, desenvólvense a través da crítica e a corrección de teorías que non están nunca libres da posibilidade de erro (Gómez Pardo 1990). Pois ben, dende esta posición tan distante da de Dijkstra, Lakatos recorreu tamén a Euclides para ilustrar a súa idea mediante a oposición da súa visión *cuasi-empírica* das matemáticas á tradicional *visión euclidiana*.

Dende unha posición non moi afastada da de Lakatos, tamén Davis e Hersh utilizan a Euclides para ilustrar o que chaman *o mito de Euclides*, é dicir, o ideal tradicional das matemáticas, contrapoñéndoo á realidade das matemáticas que se concreta na práctica da actividade matemática. A súa descrición do mito de Euclides é a seguinte:

> Que é o mito de Euclides? É a crenza en que os libros de Euclides conteñen verdades sobre o universo que son claras e indubidables. Partindo de verdades autoevidentes, e procedendo mediante demostración rigorosa, Euclides chega a un coñecemento que é certo, obxectivo e eterno. (Davis & Hersh, 1981)

57 Desde este punto de vista as matemáticas son pura sintaxe e Dijkstra chamou *informalistas* os matemáticos non formalistas que, a pesar de todo, son unha ampla maioría no conxunto da profesión.

Todas estas críticas teñen un punto de razón pero de todas elas Euclides sae ben parado. É certo que os *Elementos* teñen fallos lóxicos que se suplen con chamadas á intuición e é certo tamén que, contra o que se pensou durante moito tempo, a xeometría euclidiana non é unha descrición de verdades absolutas sobre o universo. Tamén é indubidable que as matemáticas avanzaron moito e que hoxe en día son posibles moitas cousas que Euclides non podía sequera ter imaxinado. A consecuencia de todo isto é que actualmente non ten xa sentido acudir ós *Elementos* como fonte primaria de coñecemento matemático pero isto non quere dicir que os *Elementos* non sigan a ter un valor incalculable para o mundo matemático e, máis aínda, para o mundo da cultura en xeral. Este aspecto é destacado en (Byers 2007), onde se insiste en que gran parte do espírito das matemáticas modernas ten a súa orixe nos *Elementos*. Despois de preguntarse cal pode ser a orixe do espertar intelectual que Russell e moitos outros recoñeceron ter experimentado ó ler os *Elementos*, Byers di:

> Non foron espertados certamente á perfección lóxica porque os *Elementos* non están libres de erro [...] Así, se non é na perfección do razoamento, de onde xurdiu o espertar intelectual de Russell? Quizais é a combinación de intuición xeométrica e rigor lóxico que se encontra nos *Elementos* o que resulta irresistible. Euclides espertou en xeracións o que poderiamos chamar o *soño da razón* [...] Foi coma se Euclides e os matemáticos gregos tivesen descuberto un modo novo de usar a mente humana. Con esta visión profundamente creativa, xurdira unha nova idea sobre o que significaba ser humano. Unha ventá abriuse mirando á Verdade e á Certeza. Este era un modo de emancipar os humanos do caos e a continxencia da vida diaria mediante a demostración da existencia doutro ámbito máis profundo onde todo parecía ordenado, claro e definido. Así Euclides proporcionou un método que foi máis alá dos particulares resultados matemáticos

> que demostrou. Estes resultados conforman un corpo de coñecemento cuxo alcance fixo nacer o *soño da razón*. O soño era que todo o noso coñecemento sobre o mundo natural podería ser organizado nun vasto sistema dedutivo de pensamento baseado nun pequeno número de axiomas intuitivamente obvios. (Byers, 2007, pp. pp. 85-86)

Este soño non produciu monstros e, pola contra, o que se propoñía parecía ser moi desexable, pero non ía ser posible de acadar a causa —entre outras razóns— do *teorema de incompletitude de Gödel*, que mostrou que o *programa de Hilbert* era irrealizable[58]. Porén, os soños, aínda non sendo reais, poden servir de inspiración e marcarnos un camiño cara á verdade e o coñecemento. Aínda que estes obxectivos non se cheguen a alcanzar completamente, o camiño en si é o que fai que soños como este sexan especialmente valiosos. Esta idea de que o importante é a viaxe está perfectamente expresada por outro autor grego moito máis moderno, Kavafis, no seu poema «Ítaca» (Cavafis 1989):

> Cando emprendas a túa viaxe a Ítaca
> pide que o camiño sexa longo,
> cheo de aventuras, cheo de experiencias.

A viaxe proporcionada polos *Elementos* certamente foi, como tratamos de mostrar, longa e fermosa. Máis aínda, pódese dicir que esta viaxe non rematou porque as ideas que se atopan nos *Elementos* seguen vivas nas matemáticas actuais aínda que tivesen que adoptar formas diferentes. Neste sentido, a viaxe dos *Elementos* a través do tempo e da historia, das matemáticas e do mundo da cultura recórdanos á realizada na secuela

[58] O programa de Hilbert pretendía obter unha demostración formal da consistencia das matemáticas ou, en palabras do propio Hilbert que poden ser interpretadas como unha formulación do soño da razón antes mencionado: «O obxectivo da miña teoría é establecer dunha vez por todas a certeza dos métodos matemáticos» (Gómez Pardo 1990). O (segundo) teorema de incompletitude de Gödel mostrou que os sistemas axiomáticos que conteñen a aritmética non poden probar a súa propia consistencia —a menos, claro está, que sexan inconsistentes, en cuxo caso poden demostrar calquera cousa.

moderna da *Odisea* de Nikos Kazantzakis (Kazantzakis 1958), outro autor grego moderno: despois de regresar a Ítaca, Odiseo séntese insatisfeito e reemprende a viaxe en busca de novas aventuras. De forma semellante, as ideas orixinadas nos tempos de Euclides séguense reencarnando baixo novas formas e non só nas matemáticas tradicionais, onde seguen a ocupar un lugar relevante, senón tamén na computación, na física, e mesmo na música, como mostra a aparición do adxectivo *euclidiano* en moitas investigacións recentes (en termos como *Euclidean quantum gravity*, *Euclidean rhythms*, etc.). Todo iso suxire que a longa viaxe está lonxe de finalizar...

Agradecementos

Quero agradecer ó Servizo de Publicacións da Universidade de Santiago o ter acollido favorablemente a proposta de publicación dos *Elementos* e, en particular, a axuda que en todo momento me prestaron Natalia Villar e Juan Blanco. O meu agradecemento tamén a Ana Gloria Rodríguez Alonso e a Celso Rodríguez Fernández por tódolos seus comentarios e suxestións.

Referencias

Andersen, Kirsti. *The geometry of an art. The history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer, 2007.

Anglin, W. S., e J. Lambek. *The heritage of Thales*. New York: Springer, 1995.

Arabie, Phipps. «Was Euclid an unnecesarily sophisticated psychologist?» *Psychometrika*, vol. 56, n.º 4, 1991: 567-587.

Artmann, Benno. *Euclid. The creation of mathematics*. New York: Springer, 1999.

Benson, Dave. *Music. A mathematical offering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Borg, Ingwer, e Patrick J. F. Groenen. *Modern multidimensional scaling, 2nd edition.* New York: Springer, 2005.

Borges, Jorge Luis. «Funes el memorioso.» En *Ficciones*. Madrid: Alianza Emecé, 1971.

Brann, Eva. «Philoctetes. Beauty Bare.» http://philoctetes.org/news/beauty_bare.

Bressoud, David, e Stan Wagon. *A course in computational number theory.* Emeryville: Key College Publishing, 2000.

Buckens, Anne. «The Parthenon's symmetry.» *Symmetry. Art and Science*, vol. 2, n.os 1-4, 2002: 219-229.

Byers, William. *How mathematicians think. Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics.* Princeton: Princeton University Press, 2007.

Cantor, Georg. «Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos.» En *Georg Cantor. Sistema de números y conjuntos*, de Carlos Gómez Bermúdez. A Coruña: Servizo de Publicacións, Universidade da Coruña, 2009.

Cavafis, C. P. *Poesía completa, traducción del griego de Pedro Bádenas de la Peña, tercera edición.* Madrid: Alianza Editorial, 1989.

Chiasson, Matthew, e Janine Rogers. «Beauty bare. The sonnet form, geometry and aesthetics.» *Journal of Literature and Science*, 2009: vol. 2, n.º 1, 48-64.

Cohen, Henri. *A course in computational algebraic number theory.* Berlin: Springer, 1993.

Coleridge, Samuel Taylor. «Project Gutenberg, The complete poetical works of Samuel Taylor Coleridge.» http://www.gutenberg.org/files/29090/29090-h/29090-h.htm#stcvol1_Page_21.

Conan Doyle, Sir Arthur. *The complete Sherlock Holmes*, vol. I. New York: Barnes & Noble, 2003.

Crockett Johnson Homepage. http://www.k-state.edu/english/nelp/purple/art.html.

Crumey, Andrew. «Mathematics and literature.» En *Mathknow. Mathematics, applied sciences and real life*, de Michele Emmer e Alfio Quarteroni (eds.), 9-25. Milan: Springer, 2009.

Dalí, Salvador. «The sacrament of the Last Supper.» *WikiPaintings.org*. http://www.wikipaintings.org/en/salvador-dali/the-sacrament-of-the-last-supper-1955.

Davis, Philip J., e Reuben Hersh. *The mathematical experience.* Boston: Birkhäuser, 1981.

Dewdney, A. K. *Beyond reason. Eight great problems that reveal the limits of science.* Hoboken: Wiley, 2004.

Dijkstra, Edsger W. «Real mathematicians don't prove.» *E. W. Dijkstra Archive.* 1988. http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD10xx/EWD1012.html.

Dodgson, Charles L. *Euclid and his modern rivals.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

Donald Allen, G. «The history of infinity.» http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/infinity.pdf.

Dostoyevsky, Fyodor. *Los hermanos Karamazov, traducido por R. Ledesma Miranda.* Madrid: EDAF, 1991.

Doxiadis, Apostolos. «A streetcar named (among other things) Proof: from storytelling to geometry, via poetry and rethoric.» En *Circles disturbed. The interplay of mathematics and narrative*, de Apostolos Doxiadis e Barry Mazur (eds.), 274-363. Princeton: Princeton University Press, 2012.

— «Euclid's poetics. An examination of the similarity between narrative and proof.» En *Mathematics and culture II*, de Michele Emmer (ed.), 175-182. Berlin: Springer, 2005.

— *El tío Petros y la conjetura de Goldbach.* Barcelona: Ediciones B, 2000.

Doxiadis, Apostolos, e Barry Mazur (eds.). *Circles disturbed. The interplay of mathematics and narrative.* Princeton: Princeton University Press, 2012.

Edgerton, Samuel Y. «Picturing the mind's Eye.» *Journal of Art History*, vol. 1, 2006. http://journal.utarts.com/articles.php?id=4&type=paper.

Edwards, Harold M. *Essays in constructive mathematics*. New York: Springer, 2005.

Emmer, Michele (ed.). *The visual mind II*. Cambridge, Massachusets: MIT Press, 2005.

Ernst, Max. «Euclid.» *WikiPaintings.org*. http://www.wikipaintings.org/en/max-ernst/euclid-1945.

Espinosa, Baruch de. *Ética demostrada según el orden geométrico*. Barcelona: Orbis, 1980.

Fantazzini, Dean, e Alexei Zakharov. «Euclidean or city-block? Estimation of voter preferences in a multi-dimensional probabilistic voting model.» http://www.polit-econ.ru/zakharov/statii/metrics_2.pdf.

Farsi, Carla, e Doug Craft. «One in two, two in one: Mathematics and the arts.» *Math Horizons*, febreiro, 2005: 12-15.

Field, Judith Veronica. «Piero della Francesca and painting as a science.» http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/25/61/PDF/05_Field.tif.pdf.

— *Piero della Francesca. A mathematician's art*. New Haven: Yale University Press, 2005.

— «Rediscovering the Archimedean polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler.» *Archive for History of Exact Sciences*, 1997: vol. 50, n.º 3-4, pp. 241-289.

Fowler, David. «Mathematics in science fiction: Mathematics as science fiction.» *World Literature Today*, vol. 84, n.º 3, 2010: 48-52.

Friel, Helen. «Here's looking at Euclid.» http://www.helenfriel.com/Here-s-Looking-at-Euclid.

Gilbert-Rolfe, Jeremy. «Critical Response III, Response to Saree Makdisi's 'The Architecture of Erasure'.» *Critical Inquiry*, primavera 2010: 595-600.

GIMPS. *Great Internet Mersenne Prime Search*. http://www.mersenne.org.

Glaz, Sarah. «Poetry inspired by mathematics. A brief journey through history.» *Journal of Mathematics and the Arts*, 5, 2011: 171-183.

Göksel Agargun, A., e E. Mehmet Özkan. «A historical survey of the fundamental theorem of arithmetic.» *Historia Mathematica*, 28, 2001: 207-214.

Gómez Pardo, José Luis. *Introduction to cryptography with Maple*. Heidelberg: Springer, 2013.

— «Un paseo alrededor de la teoría de conjuntos.» *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2008: vol. 11, 45-96.

— «Observaciones sobre la naturaleza de la matemática.» En *Aspectos metodológicos de la investigación científica, 2.ª edición*, de Wenceslao J. González (ed.), 191-221. Murcia: Universidad Autónoma de Madrid - Universidad de Murcia, 1990.

Greenberg, Marvin. *Euclidean and non-Euclidean geometries*. New York: Freeman, 1993.

Guillevic, Eugène. *Euclidiennes*. Paris: Gallimard, 1967.

Guy, Richard K. *Unsolved problems in number theory, third edition*. New York: Springer, 2004.

Haas, Robert. «Raphael's School of Athens: A theorem in a painting?» *Journal of Humanistic Mathematics*, 2012: vol. 2, n.º 2, 2-26.

Hardy, G. H. *A mathematician's apology (1940)*. Edición electrónica de University of Alberta Mathematical Sciences Society, dispoñible en http://www.math.ualberta.ca/mss/, 2005.

Hardy, G. H., e E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers, fourth ed.* Oxford: The Clarendon Press, 1975.

Harris, Mitchell A., e Edward Reingold. «Line drawing, leap years, and Euclid.» *ACM computing surveys*, vol. 36, n.º 1, 2004: 68-80.

Hartshorne, Robin. *Geometry*: *Euclid and beyond.* New York: Springer, 2000.

— «Teaching geometry according to Euclid.» *Notices of the American Mathematical Society*, 2000: vol. 47, 460-465.

Heath, Thomas L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vols.* New York: Dover, 1956.

— *A history of Greek mathematics, Vol. 1, From Thales to Euclid.* Oxford: The Clarendon Press, 1921.

Higgins, Peter. *Number story. From counting to cryptography.* London: Springer, 2008.

Hilbert, David. *The foundations of geometry (traducido por E. J. Townsend)*, en Project Gutenberg. http://www.gutenberg.org/ebooks/17384.

Holme, Audun. *Geometry, our cultural heritage, 2nd ed.* Heidelberg: Springer, 2010.

Jefferson, Thomas. «Jefferson's "original rough draught" of Declaration of Independence.» http://www.princeton.edu/~tjpapers/declaration/declaration.html.

Jensen, Henrik Jeldtoft. «Mathematics is painting without the brush; painting is mathematics without the chalk.» 2009. http://www2.imperial.ac.uk/~hjjens/Athens_proc_HJJensen.pdf.

— «Mathematics and painting.» *Interdisciplinary Science Reviews*, 2002: 45-49.

Kazantzakis, Nikos. *The Odyssey. A modern sequel, translated by Kimon Friar.* New York: Simon and Schuster, 1958.

Kemp, Martin. *Leonardo da Vinci.* Oxford: Oxford University Press, 2006.

Kline, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford: Oxford University Press, 1972.

Knuth, Donald E. *The art of computer programming, Vol. 2, Seminumerical Algorithms, 3rd edition.* Reading: Addison-Wesley, 1998.

Krantz, Steven G. *The proof is in the pudding. The changing nature of mathematical proof.* New York: Springer, 2010.

Lakatos, Imre. *Pruebas y refutaciones.* Madrid: Alianza Editorial, 1978.

Le Corbusier. *El Modulor. Modulor 2.* Buenos Aires: Poseidon, 1962.

Lemmermeyer, Franz. «Proofs of the Quadratic Reciprocity Law.» http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/rchrono.html.

Lenstra Jr., Hendrik W. «Solving the Pell Equation.» *Notices of the American Mathematical Society*, 2002: 49, 182-192.

Lovecraft, Howard Phillips. «The call of Cthulhu.» http://www.hplovecraft.com/writings/fiction/cc.asp.

Lucas, J. R. *The conceptual roots of mathematics.* London: Routledge, 2000.

Luminet, Jean-Pierre. «Geometry and topology in relativistic cosmology.» En *New trends in geometry. Their role in the natural and life sciences*, de C. Bartocci, L. Boi e C. Sinigaglia (eds.), 81-103. London: Imperial College Press, 2011.

Magritte, René. «Where Euclid walked.» *WikiPaintings.org.* http://www.wikipaintings.org/en/rene-magritte/where-euclide-walked-1955.

Manders, Kenneth. «Diagram-based geometric practice.» En *The philosophy of mathematical practice*, de Paolo Mancuso (ed.), 65-79. Oxford: Oxford University Press, 2008.

Manin, Yuri I. «Foundations as superstructure.» *arXiv:1205.6044v1*, 2012.

— «Mathematical knowledge. Internal, social and cultural aspects.» *arXiv:math/0703427v1*, 2007.

— «The notion of dimension in geometry and algebra.» *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43, 2006: 139-161.

— *A course in mathematical logic.* New York: Springer, 1977.

Maor, Eli. *The Pythagorean theorem. A 4,000-year history.* Princeton: Princeton University Press, 2007.

March, Lionel. «Palladio, Pythagoreanism and Renaissance mathematics.» *Nexus Network Journal*, 2008: vol. 10, n.º 2, 227-243.

Mazur, Barry. «Mazur interviewed by Corfield.» *Thales + Friends*. http://thalesandfriends.org/2007/07/23/mazur-interviewed-by-corfield/.

Meštrović, Romeo. «Euclid's theorem on the infinitude of primes. A historical survey of its proofs (300 B. C.-2012).» *arXiv:1202.3670v2*, 2012: 1-66.

Millay, Edna St. Vincent. «Euclid alone has looked on Beauty bare.» *The harp-weaver and other poems*. New York: Harper, 1923.

Mitchell, William J. «Roll over Euclid: how Frank Gehry designs and builds.» En *Frank Gehry, architect*, de J. Fiona Ragheb (ed.), 325-363. New York: Guggenheim Museum Publications, 2001.

Netz, Reviel. *Ludic Proof. Greek mathematics and the Alexandrian aesthetic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

— *The shaping of deduction in Greek mathematics. A study in cognitive history*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Neumann, John von. «The mathematician.» En *Collected works, Vol. I*. Oxford: Pergamon Press, 1961.

Noll, Landon Curt. «Mersenne prime digits.» http://www.isthe.com/chongo/tech/math/prime/mersenne.html.

O'Connor, J. J., e E. F. Robertson. «History topic. Mathematics and art-perspective.» *The MacTutor History of Mathematics archive*. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Art.html.

Pengelley, David, e Fred Richman. «Did Euclid need the Euclidean algorithm to prove unique factorization?» *American Mathematical Monthly*, 113, 2006: 196-205.

Peterson, Mark A. «The geometry of Piero della Francesca.» *The Mathematical Intelligencer*, 1997: vol. 19, 33-40.

Pound, Ezra. *The spirit of romance.* New York: New Directions Publishing, 2005.

Raussen, Martin, e Christian Skau. «Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer.» *Notices of the American Mathematical Society*, 52, n.º 2, 2005: 225-233.

Rav, Yehuda. «Why do we prove theorems?» *Philosophia Mathematica*, 1999: 3, vol. 7, pp. 5-41.

Read, Herbert. *The meaning of art.* London: Faber and Faber, 1972.

Reid, Constance. *A long way from Euclid.* New York: Thomas Y. Crowell Company, 1963.

Russell, Bertrand. *A history of western philosophy, 3rd ed.* London: Unwin, 1984.

— «Mysticism and logic, and other essays (Longmans, 1919).» *Cornell University Library.* http://archive.org/details/cu31924059441125.

Salingaros, Nikos A. «Architecture, patterns, and mathematics.» *Nexus Network Journal*, vol. 1, 1999: 75-85.

Sbacchi, Michele. «Euclidism and theory of architecture.» *Nexus Network Journal*, 2001: vol. 3, n.º 2, 25-38.

Shanks, Daniel. *Solved and unsolved problems in number theory, Fourth edition.* Providence: American Mathematical Society, 2001.

Shaw, Mildred L. G., e Brian R. Gaines. «Kelly's "geometry of psychological space" and its significance for cognitive modeling.» *The New Psychologist*, 1992: 23-31.

Stewart, Ian, e David Tall. *Algebraic number theory and Fermat's last theorem, 3rd edition.* Natick: A K Peters, 2002.

Stillwell, John. *Mathematics and its history, 3rd edition.* New York: Springer, 2010.

— *Elements of number theory.* New York: Springer, 2003.

Tilborg, Henk C. A. van, e Sushil Jajodia (eds.). *Encyclopedia of cryptography and security, Second edition.* New York: Springer, 2011.

Tippett, Benjamin K. «Possible bubbles of spacetime curvature in the South Pacific.» *arXiv: 1210.8144v1*, 2012: 1-13.

Toussaint, Godfried. «The Euclidean Algorithm generates traditional music rythms.» *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science, Banff, Alberta, Canada, July 31 to August 3, 2005,* pp. 47–56. http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/publications/banff.pdf.

Waerden, Bartel L. van der. *Science awakening, Vol. I.* Groningen: Noordhoff International, 1975.

Waldner, Liz. *A point is that which has no part.* Iowa City: University of Iowa Press, 2000.

Xenakis, Iannis. *Formalized music. Thought and mathematics in composition.* New York: Pendragon Press, 1992.

Zhang, Shaohua. «Euclid's number-theoretical work.» *arXiv:0902.2465v2*, 2010: 1-32.

ELEMENTOS

NOTA DOS TRADUTORES

Cóntase que a Johann Carl Friedrich Gauss custoulle decidirse entre as matemáticas e a filoloxía; como era habitual no ámbito científico ata o século XVIII, as publicacións facíanse en latín e o estudo desta lingua xunto co da grega formaba parte da educación básica e universitaria. Finalmente puido máis o interese de Gauss polas matemáticas, pero o latín foi a lingua na que escribiu as súas obras. Dende hai anos unha situación como esa é impensable: quen se adica ás matemáticas, no mellor dos casos, abandonou moi cedo o estudo das linguas clásicas, mentres que moitos dos que se adican ás linguas clásicas nalgún momento chegaron a elas fuxindo das matemáticas. Así pois, a alianza entre un matemático e unha helenista foi froito da necesidade; ambos tiñan uns coñecementos básicos dunha das disciplinas e máis profundos da outra e cada un, por separado, sentíase incapaz de descifrar os dous códigos empregados por Euclides na súa obra: a lingua grega e a linguaxe matemática. O noso recoñecemento ó director do Servizo de Publicacións da Universidade de Santiago de Compostela, Juan L. Blanco Valdés, e a Isabel Vaquero Quintela, que tiveron a valente idea e pensaron concretamente en nós para levala a termo. O noso agradecemento ó prologuista, José Luis Gómez Pardo, pola súa xenerosa lectura final do texto e os seus comentarios e suxestións.

Esta alianza non tería funcionado de non existir unha ferramenta clave no noso traballo: as novas tecnoloxías. Grazas a elas foi máis doado dispoñer de materiais dispersos e de difícil acceso, puidemos aclarar dúbidas contactando rapidamente coas persoas axeitadas e, sobre todo, foi posible o intercambio case diario de dous puntos de vista complementarios que permitiron darlle a forma definitiva ó texto que tes nas túas mans.

Non sabemos se esta versión de Euclides será do agrado de moitos ou poucos, pero estamos seguros de que a suma de puntos de vista só pode significar a suma de coñecemento e que se isto non foi así será debido á nosa propia impericia. Animamos, pois, á apertura de portas entre disciplinas máis que a ansiedade por delimitalas.

O texto grego do que partimos foi o fixado na edición crítica de J. L. Heiberg e H. Menge, *Euclidis Opera omnia*, vols. I-IV, Leipzig 1883-1886, que segue sendo considerado, despois de máis de dous séculos da súa publicación, o máis axustado ó orixinal grego. Tamén tivemos presente a revisión feita por E. S. Stamatis, *Euclidis Elementa*, vols. I-IV, Leipzig 1969-1973, que non difire substancialmente da anterior pero que achega testemuños en papiro e referencias de autores gregos a Euclides. Nos casos nos que estes dous editores ofrecen dúbidas en canto á autenticidade do texto, adoitamos seguir as solucións de Heiberg; porén, nos casos máis salientables, indicamos nas notas a pé de páxina os problemas textuais, rexistrando as variantes descartadas ou consideradas de dubidosa autenticidade polos editores e incluíndo, en caso de supoñer unha achega interesante dende o punto de vista matemático, a súa tradución. A tradución ó latín de J. L. Heiberg que acompaña á edición foinos tamén de grande utilidade.

Tivemos sempre presentes para o noso traballo os comentarios e a tradución ó inglés do grande estudoso de Euclides T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, vols. I-III, Cambridge 1908, o cal, ó parecer, non se decidiu nin pola filoloxía nin polas matemáticas, xa que o seu coñecemento de Euclides amósase tan profundo no aspecto matemático como no lingüístico. Nalgunha ocasión apartámonos da lectura dos devanditos editores por parecernos mellor a opinión de Heath en canto á variante textual asumida, o cal tamén queda indicado na nota correspondente.

A tradución feita por E. S. Stamatis, Ευκλιδοῦ Στοιχεῖα —*Elementos de Euclides*—, vols. I-IV, Atenas 1953-1975, achegounos a interpretación dun gregofalante a quen, por máis que estivese separado máis de vinte e tres séculos de Euclides, lle outorgamos unha certa autoridade verbo da interpretación do texto.

A versión en lingua moderna máis recente que coñecemos é a de Richard Fitzpatrick, *Euclid's Elements of geometry*, 2007; ademais de ter a vantaxe da proximidade temporal connosco, ofrécenos unha recompilación de termos matemáticos empregados ó longo da obra que nos foi de grande utilidade.

A única tradución completa ó castelán dos *Elementos* de Euclides é a de M. L. Puertas Castaños, *Elementos*, vols. I-III, Madrid 1991-1996. Como non podía ser doutro xeito, pola proximidade xenética e espacial do galego co castelán e pola calidade da tradución, esta obra foi un faro sen o cal o noso traballo tería sido moito máis dificultoso e probablemente cun resultado peor. Aínda que as nosas solucións na tradución de conceptos ou na interpretación dalgún parágrafo difiran das súas, o feito de ter presente esta achega abriu o camiño para a nosa.

Non queremos deixar de mencionar a única tentativa parcial de termos un Euclides en galego; referímonos á versión de José Nicanor Alonso Álvarez e José Montero Reguera, *Euclides. Elementos, Libro I*, Vigo, 2009, feita a partir da tradución castelá publicada en 1574 por Rodrigo Zamorano; aínda que se limitan ó Libro I e non se trata dunha tradución do texto grego orixinal, supón unha referencia valiosa por canto ten de apertura de vías á hora da escolla da palabra galega axeitada para un determinado concepto matemático.

Todas as notas a pé de páxina son dos tradutores, ás veces inspiradas, ó igual que a tradución, na tradición anterior. Unhas tratan de achegar explicacións complementarias referidas ó fondo —o contido matemático e a súa interpretación na linguaxe matemática actual—, outras á forma —a lingua orixinal e decisións na tradución.

Os criterios que seguimos para a nosa tradución son tamén debedores da tradición: tratamos de seguir o máis fielmente posible o texto grego e que o resultado fose galego comprensible para un lector do século XXI. Isto non quere dicir que a lectura do texto euclidiano resultante sexa doada, como tampouco o debía ser para un grego coetáneo do autor. Precísase certa familiaridade cos conceptos matemáticos, e, como non se cansou de repetir a metade matemática deste equipo, as gráficas e a tradución á linguaxe matemática contemporánea recollida nas notas axudan a clarificar a escuridade dunha explicación verbal dos enunciados, demostracións ou conclusións.

Moitas disquisicións xurdiron dalgunhas palabras ou frases coas que Euclides se refire a conceptos matemáticos hoxe perfectamente asociados a tecnicismos nas distintas linguas modernas. Presentábase a dúbida de se no tempo de Euclides xa existía un vocabulario matemático formalizado ou se, opción pola que nos inclinamos, estamos asistindo a un proceso de creación do mesmo. A maioría de termos utilizados por Euclides son descricións moi precisas do obxecto ó que se refire. Por iso optamos, non sen longas reflexións e discusións, por manter a tradución literal que adoita levar consigo unha «visualización» do obxecto ou operación á que se está a referir. Posiblemente, nalgún caso, esta descrición xa perdese parte do seu sentido orixinal, pero aínda así, pareceunos mellor mantela como tal. Referímonos á tradución de palabras das que existe un helenismo de uso habitual nas matemáticas modernas pero das que, por algún motivo, o seu significado non se corresponde co que presenta no texto euclidiano. Por exemplo: para traducir a palabra ὑποτείνουσα evitamos «hipotenusa» por estar restrinxido o seu uso nas linguas modernas ós triángulos rectángulos; optamos pola tradución literal e etimolóxica que evoca o concepto que os gregos tiñan das liñas como fíos tensos, e dos triángulos, construídos nunha determinada posición de xeito que o lado ó que lle aplican esta denominación é o que está por debaixo; no caso dos adxectivos ἑτερομήκες —«máis longo nun sentido que noutro»— e ὀρθογώνιον —«rectángulo»—, traducimos o primeiro por «rectángulo» e o segundó por «de ángulos rectos», co fin de manter o nome da figura «rectángulo», moi asentado en matemáticas, e respectar o sentido matemático do texto euclidiano.

Outro caso que merece comentario dende o punto de vista dos problemas de tradución é o da inexistencia no grego do autor dos *Elementos* dunha expresión que indique especificamente o concepto de suma. Ó longo da obra enténdese que dous elementos xustapostos —sempre que se refire a elementos denominados con letras— ou coordinados se suman, salvo que o contexto ou a presenza de palabras expresas elimine tal posibilidade. Así mesmo, Euclides reforza o significado de suma con adxectivos como συναμφότερος «un e outro xuntos» e πᾶς / ἅπας «enteiro»; co sintagma preposicional μετά con xenitivo «xunto con»; con verbos como συντίθημι, συγκεῖμαι e προσλαμβάνω «xuntar unha cousa con outra»; co adverbio ἅμα «xuntamente»; tamén coa presenza do adxectivo «igual» despois de mencionar dous elementos, equivalente en termos modernos ó símbolo «=» despois dos sumandos; por exemplo: «A, B son iguais a dous rectos» equivale a dicir A + B = dous ángulos rectos.

Por último, queremos mencionar o procedemento seguido por Euclides para referirse a elementos xeométricos e do cal deducimos que aínda a «tecnificación» da linguaxe matemática non se producira. O autor nomea o obxecto cunha descrición a primeira vez que este aparece no texto e pouco a pouco vai simplificando cada vez máis a expresión ata reducila ó mínimo posible.

Para elo, conta Euclides coa gran riqueza expresiva da lingua grega baseada no uso das preposicións ben en sintagmas preposicionais, ben como prefixos verbais, en ambos casos engadindo significados ou simplemente matices que fan máis doada a visión do contido que se quere nomear. Poñamos un exemplo: comeza describindo o ángulo con respecto ás rectas que o forman: «o ángulo contido por as rectas»; o seguinte paso na formalización dos termos consiste en omitir o verbo e así: «o ángulo por as rectas»; por último, coa ausencia do substantivo «ángulo», obtén a máxima simplificación: «o por as rectas», expresión perfectamente comprensible por térnola presentado na primeira aparición coa expresión completa.

Aínda que na nosa opinión, como xa dixemos, o léxico de Euclides non é rigorosamente técnico, os *Elementos* son un elo nunha tradición matemática cuns esquemas moi formalizados tanto dende o punto de vista da estrutura do contido como da forma lingüística coa que este se presenta. As repeticións case formularias, tan importantes na creación literaria grega, son constantes, de xeito que podemos supoñer a existencia dun repertorio de recursos expresivos para organizar o desenvolvemento de cada proposición, coñecido por quen, nun momento dado, tomou a decisión de darlle forma escrita.

Os *Elementos* seguen unha organización dedutiva. Partindo duns postulados e nocións comúns iniciais vai probando novos resultados que pode usar para probar os seguintes.

As definicións aparecen ó principio de cada un dos libros, salvo no libro X que están repartidas en tres bloques —ó principio do libro as definicións de carácter xeral, antes da Proposición X, 48 as seis definicións que se refiren ás seis ordes de rectas binomiais e antes da Proposición X, 85 as que se refiren ás seis ordes de rectas apótomas— e para os libros de aritmética (os libros VII, VIII e IX) e xeometría do espazo (os libros XI, XII e XIII) que están agrupadas ó principio do primeiro libro de cada bloque, no libro VII e no libro XI, respectivamente, dándolle certa unidade ós tres libros de cada un dos bloques. Os postulados e nocións comúns aparecen a continuación das definicións do Libro I.

Para facilitar a lectura e comprensión do texto matemático, as notas a pé de páxina indican a proposición, corolario ou lema en que se sustenta cada paso da demostración. Tratamos de manter un certo equilibrio e, aínda que se faga uso do mesmo resultado previo varias veces, procuramos evitar a repetición da cita dentro da mesma proposición. A partir do Libro I xa non facemos referencia ó postulado ou noción común en que se basea o razoamento.

Como criterio xeral, para referirnos a unha proposición ou definición, indicamos o libro e o número da proposición ou definición; para referirnos a unha nota, indicamos o número de nota e, entre parénteses, a proposición ou definición correspondente.

Non podemos rematar sen lembrar a unha persoa esencial na xénese e desenvolvemento deste traballo: o profesor Juan José Moralejo Álvarez. Calquera helenista galego de hoxe leva a súa marca: as súas ensinanzas, a súa paixón pola lingua e cultura gregas, os seus innumerables traballos referidos especialmente ó helenismo pero tamén á lingua galega, forman parte de nós. No caso concreto da metade lingüista desta alianza, podo dicir que ademais de por todo o anterior, existe unha grande débeda con el con respecto a este traballo que probablemente non teriamos emprendido sen o seu respaldo consistente en «barra libre de consultas».

Facendo nosas algunhas das palabras do profesor Moralejo, rematamos esta nota xustificativa dos tradutores co desexo de que as augas «do pozo sen fondo que é Euclides» deveñan un pouco menos turbias dende a súa lectura na nosa lingua.

EUCLIDIS

OPERA OMNIA.

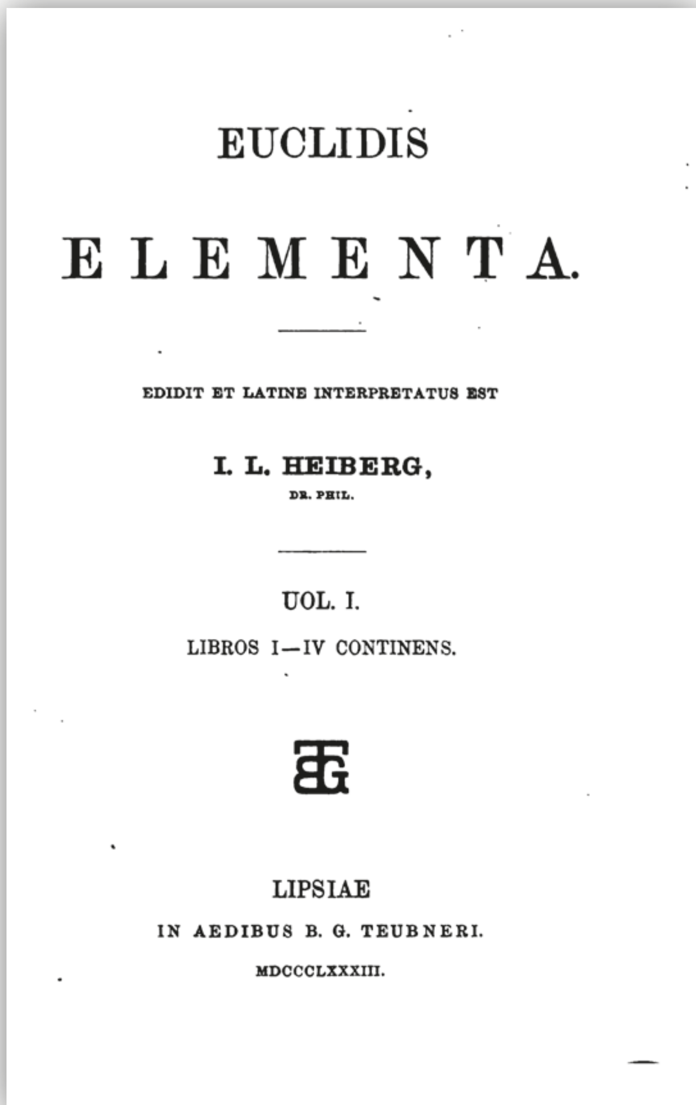
EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXIII.



EUCLIDIS

ELEMENTA.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. I.

LIBROS I—IV CONTINENS.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXIII.

Portadas de *Euclidis Opera omnia* e de *Euclidis Elementa*
(volume I da edición crítica de J. L. Heiberg e H. Menge de *Euclidis Opera omnia*, Leipzig 1883)

LIBRO I

DEFINICIÓNS

1. Un punto é o que non ten partes.
2. Unha liña é unha lonxitude sen anchura.
3. Os extremos dunha liña son puntos.
4. Unha liña recta é calquera que está tendida[1] por igual respecto ós seus propios puntos.
5. Unha superficie é o que só ten lonxitude e ancho.
6. Os extremos dunha superficie son liñas.
7. Unha superficie plana[2] é calquera que está tendida por igual respecto ás súas propias rectas.
8. Un ángulo plano[3] é unha inclinación de dúas liñas, unha cara a outra, que se tocan unha a outra nun plano e non están en liña recta.
9. Cando as liñas que conteñen o ángulo son rectas, o ángulo chámase rectilíneo.
10. Cando unha recta levantada sobre outra recta fai os ángulos adxacentes[4] iguais entre si, cada un dos ángulos

---

[1] Dende o punto de vista lingüístico esta definición é moi ambigua, como xa os propios comentaristas gregos indicaron: ἐξ ἴσου significa «en condicións de igualdade», agora ben, non hai nada no texto grego que nos indique en que sentido debemos entender esa igualdade (simetría, distancia, dirección, son algunhas das interpretacións dadas ó longo da historia). Tamén o verbo empregado, κεῖμαι, permite dúas interpretacións; por unha parte, pode indicar que a liña está tendida —consonte algunhas caracterizacións da liña como un fío tenso—, por outra, simplemente que a liña «está», sendo preciso neste caso completar o verbo con «en condicións de igualdade respecto ós seus puntos».

Ó non existiren outras definicións similares de recta que puidesen verter algo de luz sobre o que Euclides quixo dicir exactamente, tratamos de manter esa imprecisión do texto grego na nosa versión.

[2] ᾿Επίπεδος: adxectivo que expresa o concepto «plano»; cualifica nesta definición unha superficie e na seguinte, un ángulo; na mesma Definición I, 8 aparece substantivado co significado de «superficie plana», «plano». Na Definición I, 15 cualifica unha figura.

[3] Chaman a atención dous feitos. Por unha parte Euclides non admite o ángulo raso, igual a dous rectos (μὴ ἐπ᾿εὐθείας κειμένων... «non están en liña recta»). De feito Euclides só admite os ángulos convexos, menores que o raso. Por outra parte, admite os ángulos formados por dúas liñas, sexan ou non rectas, e introduce os ángulos rectilíneos, os formados por dúas rectas, na Definición I, 9.

[4] Euclides utiliza o adverbio ἐφεξῆς, «a continuación», para indicar a situación dun ángulo en lugar de buscar un adxectivo cualificativo. O mesmo procedemento utilizará cos ángulos opostos —Definición I, 22—, interiores e exteriores —Proposición I, 16— e alternos —Proposición I, 27.

iguais é recto e a recta levantada chámase perpendicular[5] a aquela sobre a que está levantada.

11. Ángulo obtuso é o maior que un recto.
12. Ángulo agudo é o menor que un recto.
13. Límite é o que é extremo de algo.
14. Figura é o contido por algún ou algúns límites.
15. Círculo é unha figura plana contida por unha liña[6], na que todas as rectas que caen sobre ela dende un punto dos que están dentro da figura son iguais entre si.
16. O punto chámase centro do círculo.
17. Diámetro do círculo é unha recta calquera trazada polo centro e limitada pola circunferencia do círculo por ambos lados e que, ademais, corta á metade[7] o círculo.
18. Semicírculo é a figura contida entre o diámetro e a circunferencia separada por el. O centro do semicírculo é o mesmo que tamén o é do círculo.
19. Figuras rectilíneas son as contidas por rectas; trilaterais[8], as contidas por tres rectas; por catro, cuadriláteras; por máis de catro, multiláteras.
20. Das figuras trilaterais, é triángulo equilátero o que ten os tres lados iguais, isóscele o que ten só dous lados iguais, escaleno o que ten os tres lados desiguais.

---

[5] En grego, κάθετος, «cateto», termo reservado nas linguas modernas para os lados dun triángulo rectángulo perpendiculares entre si.

[6] Os manuscritos presentan aquí a frase «que se chama circunferencia»; Heiberg considera que se trata dunha interpolación xa que Proclo, Tauro, Sexto Empírico, Filopono e Boecio omítena. Da mesma opinión é Heath, que engade ademais a testemuña do papiro Herculanense 1061 no que tampouco aparece. Segundo Heath, a interpolación foi feita para xustificar a aparición da palabra περιφέρεια —circunferencia— sen definición previa na definición I, 17; considera que sería un engadido innecesario, dado que a palabra era de uso común en grego.

[7] δίχα é un adverbio relacionado etimoloxicamente co numeral δύω, «dous», que significa «en dúas partes». Aínda que o seu significado orixinal non contén o matiz «partes iguais», é evidente que Euclides o utiliza con este trazo semántico engadido; o diámetro divide en dúas partes iguais o círculo e, cando na Proposición I, 9 se divide o ángulo en dúas partes, estas deben ser iguais, xa que, de non ser así, poderiamos prescindir desa proposición.

[8] Todas as palabras coas que Euclides designa as figuras fan alusión ós lados. Porén, a partir da Definición I, 21, na que acaba de definir os diferentes tipos de figuras trilaterais, pasa a chamarlle a estas τρίγωνα, «triángulos».

21. Ademais, das figuras trilaterais, é triángulo rectángulo o que ten un ángulo recto, obtuso o que ten un ángulo obtuso, agudo o que ten os tres ángulos agudos.
22. Das figuras cuadriláteras, é cadrado o que é equilátero e de ángulos rectos[9]; rectángulo o de ángulos rectos pero non equilátero; rombo o equilátero pero non rectángulo; romboide o que ten os lados e os ángulos opostos[10] iguais entre eles que non é nin equilátero nin rectángulo; os cuadriláteros diferentes a estes chámense trapecios[11].
23. Paralelas[12] son rectas que, estando no mesmo plano e prolongadas ó infinito[13] en ambos sentidos, non se atopan en ningures unha coa outra.

POSTULADOS

Postúlese[14]:

1. Trazar unha liña recta dende un punto calquera ata un punto calquera[15].

---

[9] Euclides emprega ἑτερομήκες —«máis longo nun sentido que noutro»— para referirse á figura que se coñece como rectángulo e o adxectivo ὀρθογώνιον —«rectángulo»—, para indicar que ten os ángulos rectos. Co fin de manter o nome da figura «rectángulo» que está moi asentado en matemáticas, optamos por traducir ἑτερομήκες por «rectángulo» e ὀρθογώνιον por «de ángulos rectos».

[10] Como na Definición I, 10, utiliza un adverbio, ἀπεναντίον, «enfronte», para referirse a un tipo de ángulos.

[11] Non introduce nesta definición os paralelogramos e dá por feito, na Proposición I, 34, que é suficiente co nome παραλληλόγραμμον, «de liñas paralelas».

[12] Paralela: adxectivo formado a partir da preposición παρά e o pronome ἀλλήλος; o seu significado orixinario, referido a liñas, sería «colocadas unha a carón da outra». Xa aparece en Aristóteles.

[13] Ἄπειρον: Infinito sen consideración de lugar ou entidade matemática.

[14] A tradución fixada pola tradición neste contexto para o verbo grego αἰτέω, «pedir», é «facer un postulado», a partir da versión ó latín. Enténdese que o autor pide, a quen se achega ó seu traballo, a aceptación destes principios que non vai demostrar pero que utilizará en posteriores demostracións.

Hai diverxencias sobre o número de postulados: Proclo sinala que IV e V son máis ben «axiomas»; algúns manuscritos sitúanos entre as nocións comúns. Aínda que non está clara cal é a diferenza para o autor entre postulados e nocións comúns, algúns autores aventuran que as nocións comúns son axiomas ou verdades evidentes que se admiten sen demostración, mentres que os postulados son condicións que hai que esixir pero que poderían ser probadas.

[15] Este postulado obriga á existencia de dous puntos para trazar unha recta. Non se debe entender no sentido de poder trazar unha recta arbitraria infinita, nin sequera de

2. E prolongar en liña recta de forma continua unha recta finita[16].
3. E debuxar un círculo con calquera centro e distancia.
4. E que todos os ángulos rectos son iguais entre si.
5. E que, se unha recta ó incidir en dúas rectas fai os ángulos do interior e do mesmo lado menores que dous ángulos rectos, as dúas rectas, prolongadas ó infinito, atópanse no lado no que están os ángulos menores que dous rectos[17].

NOCIÓNS COMÚNS[18]

1. As cousas iguais a unha mesma tamén son iguais entre si.
2. E se se engaden cousas iguais a cousas iguais, o total é igual.
3. E se se quitan cousas iguais de cousas iguais, as que quedan son iguais.
4. E se se engaden cousas iguais a cousas desiguais, o total é desigual.
5. E os dobres da mesma cousa son iguais entre si.

---

poder trazar unha recta arbitraria infinita a partir dun punto dado, como pon de manifesto a Proposición I, 2 e a I, 3.

16 πεπερασμένη εὐθεία: «recta finita, limitada, con extremos» —πέρας, Definición I, 3.

17 Este postulado, coñecido como o «postulado das paralelas», foi considerado durante moito tempo como unha proposición, é dicir, algo que se pode demostrar. Os múltiples intentos de demostración deron lugar a postulados equivalentes. Por exemplo:

- «por un punto exterior a unha recta só é posible trazar unha paralela» (Axioma de Playfair, 1795)
- «a suma dos ángulos dun triángulo é igual a dous rectos» (Legendre, 1794).

A solución definitiva non chega ata principios do século XIX coa formulación das xeometrías non euclidianas. Gauss, Bolyai e Lobachevski, partindo do suposto de que «a suma dos ángulos dun triángulo é menor que dous rectos», constrúen a *xeometría hiperbólica*, na que «por un punto exterior a unha recta é posible trazar infinitas paralelas», e Riemann parte do suposto de que «a suma dos ángulos dun triángulo é maior que dous rectos», é dicir, «por un punto exterior a unha recta non é posible trazar ningunha paralela» e dá lugar á *xeometría elíptica* que permite que Einstein desenvolva a teoría da relatividade.

18 No texto grego non aparece un título que presente as tradicionalmente chamadas *nocións comúns.* A súa consideración como tales parece vir da tradición anterior a Euclides e da definición de Aristóteles. Dende a antigüidade considéranse auténticas as tres primeiras (a tradución árabe de Al-Nayrizi recolle a observación de Simplicio de que nos manuscritos máis antigos só había tres nocións comúns). As demais aparecen nalgúns manuscritos e foron obxecto de debate xa para os comentaristas antigos —especialmente Proclo—. Heiberg considera auténticas as nocións comúns 1, 2, 3, 7 e 8. Pola nosa parte, recollemos a tradución das nove que nos legou a tradición manuscrita.

6. E as metades da mesma cousa son iguais entre si.
7. E as cousas que cadran entre si son iguais entre si.
8. E o todo é maior que a parte.
9. E dúas rectas non conteñen un espazo.

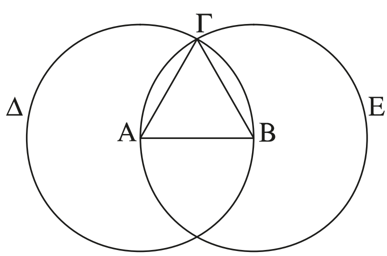
PROPOSICIÓN 1

Construír un triángulo equilátero sobre a recta finita dada*[19]*.

Sexa a recta finita dada AB.

É preciso, entón, construír un triángulo equilátero sobre a recta AB.

Debúxese un círculo ΒΓΔ co centro A e coa distancia[20] AB e, por outro lado, debúxese o círculo ΑΓΕ co centro B e a distancia BA, e dende o punto Γ, no que os círculos se cortan entre si[21], ata os puntos A e B trácense as rectas ΓΑ e ΓΒ[22].



[19] O verbo συνίστημι neste contexto indica «levantar dúas rectas que se xuntan». Se esas rectas se levantan sobre unha terceira, ó xuntárense, dan como resultado un triángulo, o que temos nesta e noutras proposicións —I, 2; I, 9; I, 11; I, 22— e nas proposicións I, 7; I, 8 e I, 21 sen explicitar que o resultado sexa un triángulo. Porén, tamén imos atopar o mesmo verbo para a construción dun ángulo, —ó non partir as dúas liñas dunha terceira, Proposición I, 23—, e para un paralelogramo —Proposición I, 42.

[20] Postulado 3.

[21] Aínda que nos *Elementos* non figura de forma explícita a definición de circunferencia —véxase a Nota 6 (Definición I, 15)—, xa neste libro I queda clara a diferenza entre os conceptos de círculo e circunferencia. De todas formas, Euclides non sempre respecta esta diferenza. Así, nesta proposición, fala de «círculos» cando son realmente as «circunferencias» as que se cortan en puntos; na Definición III, 2 só define a tanxente a un círculo e na Definición IV, 4 fala de tanxente á circunferencia do círculo; na Proposición IV, 16 di que a circunferencia ΑΒΓ é a terceira parte do círculo e outras veces, tal como fai nesta proposición, fala de círculos que se cortan en puntos: Proposición III, 5 ou Proposición III, 10 por exemplo.

[22] Postulado 1.

E dado que o punto A é centro do círculo ΓΔΒ, ΑΓ é igual a ΑΒ.

Por outro lado, dado que o punto Β é centro do círculo ΓΑΕ, ΒΓ é igual a ΒΑ. E foi demostrado tamén que ΓΑ é igual a ΑΒ; logo, tanto ΓΑ como ΓΒ son iguais a ΑΒ.

E as cousas iguais a unha mesma son tamén iguais entre si[23]; logo, tamén ΓΑ é igual a ΓΒ ; logo, as tres, ΓΑ, ΑΒ e ΒΓ, son iguais entre si.

Logo, o triángulo ΑΒΓ é equilátero e queda construído sobre a recta finita dada ΑΒ; o que, xustamente, era preciso facer[24].

PROPOSICIÓN 2

Poñer a continuación do punto dado unha recta igual á recta dada.

Sexa o punto dado Α e a recta dada ΒΓ; é preciso, entón, poñer a continuación do punto Α unha recta igual[25] a unha recta dada ΒΓ.

Pois ben, únase coa recta ΑΒ o punto Α co punto Β[26], constrúase sobre ela o triángulo equilátero ΔΑΒ[27], prolónguense as rectas ΑΕ e ΒΖ[28] en liña recta con ΔΑ e ΔΒ, debúxese o círculo ΓΗΘ co centro Β e coa distancia ΒΓ[29] e, asemade, debúxese o círculo ΗΚΛ co centro Δ e coa distancia ΔΗ.

Así, dado que o punto Β é centro do círculo ΓΗΘ, a recta ΒΓ é igual á recta ΒΗ.

23 Noción Común 1.

24 A estrutura de todas as proposicións é idéntica a esta que acabamos de ver. Logo do enunciado, resalta o punto de partida (a recta AB) e expón o que quere probar (construír un triángulo equilátero sobre a recta AB). A continuación fai a proba utilizando as definicións, postulados e nocións comúns xunto cos resultados previamente obtidos e acaba coa repetición do enunciado («o triángulo ΑΒΓ é equilátero, e queda construído sobre a recta finita dada AB») e remata cunha apostila («o que xustamente, era preciso facer» ou «o que xustamente, era preciso demostrar» segundo sexa unha construción ou unha demostración).

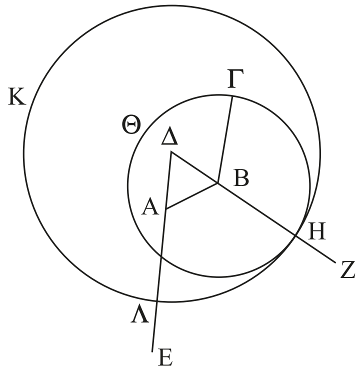
25 Refírese a un «segmento da mesma lonxitude» cun extremo en A que non é necesariamente «paralelo» ó «segmento» inicial ΒΓ.

26 Postulado 1.

27 Proposición I, 1.

28 Proposición I, 2.

29 Postulado 3.



Por outra parte, dado que o punto Δ é centro do círculo ΚΛΗ, a recta ΔΛ é igual a ΔΗ e, das súas partes, a recta ΔΑ é igual a ΔΒ.

Polo tanto, a parte restante ΑΛ é igual á parte restante ΒΗ.

E foi demostrado tamén que ΒΓ é igual a ΒΗ; logo, tanto ΑΛ como ΒΓ son iguais a ΒΗ.

E as cousas iguais á mesma cousa son tamén iguais entre si[30]; logo, tamén ΑΛ é igual a ΒΓ.

Logo, a partir do punto dado Α, a recta ΑΛ queda posta igual á recta dada ΒΓ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 3

***Dadas dúas rectas desiguais, cortar da maior unha recta igual á menor*[31].**

Sexan as dúas rectas desiguais dadas ΑΒ e Γ[32], das cales ΑΒ sexa a maior; é preciso, entón, cortar da maior, ΑΒ, unha recta igual á menor, Γ.

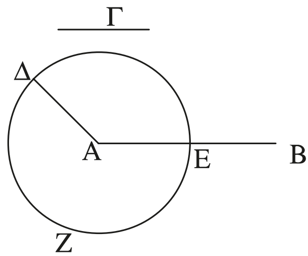
---

30 Noción Común 1.

31 Pódese pensar que o máis fácil é trazar un círculo con centro A e radio a recta Γ; pero o Postulado 3 non permite facer esta construción de forma directa e necesita antes da Proposición I, 2 para poder trazar unha recta igual a Γ a partir do punto A. Esta proposición completa a I, 2 no sentido de que non só podemos trazar unha recta igual a unha dada a partir dun punto (Proposición I, 2) senón que tamén podemos «poñer» unha recta igual a unha dada «sobre outra recta dada» e «a partir dun punto dela».

32 A diferenza do que viña facendo ata o de agora, nomea unha recta cunha letra Γ en vez de usar os nomes dos extremos. É de supoñer que isto deriva do feito de que para a

Póñase, a partir do punto A, a recta AΔ igual á recta Γ[33]; e, co centro A e coa distancia ΔA, debúxese o círculo ΔEZ[34].



E, dado que o punto A é centro do círculo ΔEZ, AE é igual a AΔ; pero tamén Γ é igual a AΔ. Logo, tanto AE como Γ son iguais a AΔ; en consecuencia, tamén AE é igual a Γ[35].

Logo, dadas dúas rectas desiguais, AB e Γ, queda cortada da maior, AB, a recta AE igual á menor, Γ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 4

Se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e teñen igual o ángulo contido polas rectas iguais[36], tamén terán as súas bases[37] iguais e os triángulos serán iguais e os demais ángulos,

---

demostración pon a recta Γ a partir de A, usando a proposición anterior, sen necesidade de coñecer os extremos de Γ, igual que na Proposición I, 22.

33 Proposición I, 2.

34 Postulado 3.

35 Noción Común 1.

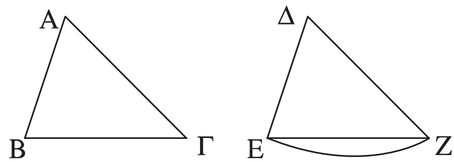
36 Aparece aquí a expresión completa para referirse ó ángulo: τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, «o ángulo contido polas rectas iguais»; con máis frecuencia aparecerá sen o verbo —na seguinte frase desta mesma proposición: ἡ ὑπό ΒΑΓ γωνία, «o ángulo (contido) por ΒΑΓ»—, e, coa máxima simplificación, só coa preposición «por» e os nomes das rectas que o conteñen: ἡ ὑπο ΑΒΓ, «o (ángulo contido) por ΑΒΓ» —nesta proposición e reiteradamente ó longo de toda a obra.

37 Esta é a primeira vez que aparece a palabra βάσις. Non hai acordo con respecto ó seu uso referido ós triángulos. Tendo en conta que en grego esta palabra, que en principio significa «paso», fai referencia a aquilo sobre o que se asenta algo, o máis probable é que Euclides pense nun triángulo no que un dos lados —a base— se debuxa horizontalmente e os outros dous, sobre ela. Este matiz vaise perdendo e Euclides acaba usando o nome de base para o terceiro lado que nomea nun triángulo, sobre todo se usa o ángulo formado polos outros dous lados no razoamento.

aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais*[38]*, serán iguais respectivamente ós demais ángulos.

Sexan dous triángulos, ΑΒΓ e ΔΕΖ, que teñen os dous lados ΑΒ e ΑΓ iguais ós dous lados ΔΕ e ΔΖ respectivamente —é dicir, ΑΒ igual a ΔΕ, e ΑΓ igual a ΔΖ— e o ángulo ΒΑΓ igual a ΕΔΖ; digo que tamén a base ΒΓ é igual a ΕΖ e que o triángulo ΑΒΓ será igual ó triángulo ΔΕΖ, e os demais ángulos serán iguais respectivamente ós demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, é dicir, o ángulo ΑΒΓ a ΔΕΖ, ΑΓΒ a ΔΖΕ.

Pois se aplicamos o triángulo ΑΒΓ sobre o triángulo ΔΕΖ[39] e se poñemos o punto Α sobre o punto Δ e a recta ΑΒ sobre a recta ΔΕ, cadrará tamén o punto Β co Ε, por ser igual ΑΒ a ΔΕ.



Aplicada, por tanto, ΑΒ sobre ΔΕ, cadrará tamén a recta ΑΓ con ΔΖ, por ser igual o ángulo ΒΑΓ ó ΕΔΖ.

En consecuencia, tamén o punto Γ cadrará co punto Ζ, por ser, pola súa parte, igual ΑΓ a ΔΖ.

Pero tamén é certo que o punto Β cadrará co Ε; en consecuencia, a base ΒΓ cadrará coa base ΕΖ.

---

[38] O verbo ὑποτείνω que significa «estar tendido debaixo» está na orixe de «hipotenusa» (o lado que está tendido baixo o ángulo formado polos catetos) e Euclides utilízao para referirse ó lado que está fronte a un ángulo en calquera tipo de triángulo (ὑπὸ τὰς γωνίας αἱ πλευ̃ραι ὑποτείνουσιν). Nas linguas modernas restrinxiuse, pois, o uso desta palabra ó lado que está fronte ó ángulo recto dos triángulos rectángulos. Os termos que utiliza Euclides son moi plásticos, probablemente porque asistimos ó proceso de creación dun vocabulario técnico a partir do vocabulario común que remite ó mundo real, engadindo matices que tratan de que vexamos as figuras como el as concibe; Proclo di que unha das imaxes que definen a liña recta é a dun fío tensado (τείνω); de aí que un lado —que é unha recta— estea «tensado» baixo un ángulo.

[39] Non debe interpretarse que este traslado do triángulo ΑΒΓ sobre ΔΕΖ estea fora do rigor das demostracións de Euclides. A Proposición I, 3 permite «poñer» a recta ΑΒ sobre ΔΕ a partir de Δ e a partir de aí o resto de consideracións.

Pois se, cadrando o punto B co punto E e o punto Γ co punto Z, a base BΓ non cadrase con EZ, dúas rectas conterían un espazo; o que, sen dúbida, é imposible[40].

Cadrará, logo, a base BΓ con EZ e será igual a ela.

En consecuencia, tamén o triángulo ABΓ cadrará enteiro co triángulo ΔEZ enteiro e será igual a el, e os ángulos restantes cadrarán cos ángulos restantes e serán iguais a eles, é dicir, ABΓ con ΔEZ e AΓB con ΔZE.

Logo, se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e teñen igual o ángulo contido polas rectas iguais, tamén terán as súas bases iguais e os triángulos serán iguais e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais respectivamente ós demais ángulos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

Dos triángulos isósceles, os ángulos da base son iguais entre si e, se se prolongan as rectas iguais, os ángulos baixo a base serán iguais entre si.

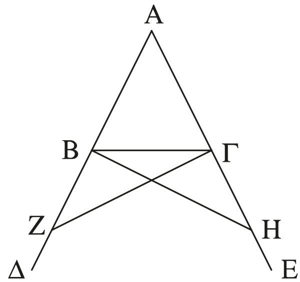
Sexa o triángulo isóscele ABΓ co lado AB igual ó lado AΓ e prolónguense as rectas BΔ e ΓE en liña recta con AB e AΓ[41]; digo que o ángulo ABΓ é igual a AΓB, mentres que ΓBΔ é igual a BΓE.

Pois ben, tómese en BΔ o punto Z ó azar, quítese da recta maior AE, a recta AH igual á menor AZ[42] e trácense as rectas ZΓ e HB.

Logo, dado que AZ é igual a AH, mentres que AB é igual a AΓ, entón as dúas rectas ZA e AΓ son iguais respectivamente a HA e AB. E conteñen un ángulo común, ZAH; logo, a base ZΓ é igual á base HB e o triángulo AZΓ será igual ó triángulo AHB[43]

40 Noción Común 9.
41 Postulado 2.
42 Proposición I, 3.
43 Proposición I, 4.

e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais respectivamente ós demais ángulos, é dicir, ΑΓΖ igual a ΑΒΗ, mentres que ΑΖΓ é igual a ΑΗΒ.



E, dado que a recta ΑΖ enteira é igual á recta ΑΗ enteira cuxas partes ΑΒ e ΑΓ son iguais, logo, a recta restante ΒΖ é igual a ΓΗ.

E tamén foi demostrado que ΖΓ é igual a ΗΒ; por tanto, as dúas rectas ΒΖ e ΖΓ son iguais respectivamente ás rectas ΓΗ e ΗΒ.

E o ángulo ΒΖΓ é igual a ΓΗΒ, e ΒΓ é a base común.

Logo, o triángulo ΒΖΓ será igual a ΓΗΒ e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais respectivamente ós demais ángulos.

Logo, ΖΒΓ é igual a ΗΓΒ, mentres que ΒΓΖ é igual a ΓΒΗ.

Logo, dado que foi demostrado que o ángulo ΑΒΗ enteiro é igual ó ángulo ΑΓΖ enteiro cuxas partes ΓΒΗ e ΒΓΖ son iguais, logo, o ángulo restante, ΑΒΓ, é igual ó ángulo restante, ΑΓΒ.

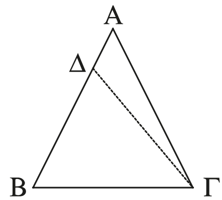
E están na base do triángulo ΑΒΓ. E foi demostrado tamén que o ángulo ΖΒΓ é igual a ΗΓΒ, e están baixo a base.

Logo, dos triángulos isósceles, os ángulos da base son iguais entre si e, se se prolongan as rectas iguais, os ángulos baixo a base serán iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se os dous ángulos dun triángulo son iguais entre si, tamén os lados que están tendidos baixo os ángulos iguais serán iguais entre si.

Sexa un triángulo ΑΒΓ co ángulo ΑΒΓ igual ó ángulo ΑΓΒ; digo que tamén o lado ΑΒ é igual a ΑΓ.



Pois, se ΑΒ non é igual a ΑΓ, un dos dous é maior.

Sexa ΑΒ maior, quítese de ΑΒ, o maior, ΔΒ, igual ó menor ΑΓ[44], e únase ΔΓ.

Logo, dado que ΔΒ é igual a ΑΓ e ΒΓ, común[45], entón os dous lados ΔΒ e ΒΓ son iguais a ΑΓ e ΓΒ respectivamente e o ángulo ΔΒΓ é igual a ΑΓΒ.

Logo, a base ΔΓ é igual á base ΑΒ e o triángulo ΔΒΓ será igual ó triángulo ΑΓΒ[46], o menor ó maior; o que, sen dúbida, é absurdo; logo, non son desiguais ΑΒ e ΑΓ; logo, son iguais.

Logo, se os dous ángulos dun triángulo son iguais entre si, tamén os lados que están tendidos baixo os ángulos iguais serán iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

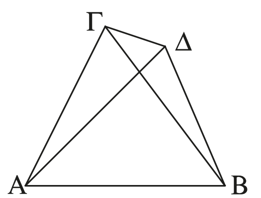
Sobre a mesma recta non poderán levantarse[47], iguais respectivamente ás dúas mesmas rectas dadas, outras dúas rectas atopándose unhas nun punto e outras nou-

---

44 Proposición I, 3.
45 Está comparando os triángulos ΔΒΓ e ΑΓΒ.
46 Proposición I, 4.
47 Véxase a Nota 19 (Proposición I, 1)

tro, polo mesmo lado e cos mesmos extremos que as rectas do principio.

Pois ben, se é posible, levántense sobre a mesma recta AB outras dúas rectas, AΔ e ΔB, iguais respectivamente ás dúas mesmas rectas dadas AΓ e ΓB atopándose unhas no punto Γ e outras no Δ, polo mesmo lado e cos mesmos extremos; de xeito que a recta ΓA sexa igual a ΔA e teña o mesmo extremo A, mentres que a recta ΓB sexa igual a ΔB e teña o mesmo extremo B, e únase ΓΔ.



Logo, dado que AΓ é igual a AΔ, tamén é igual o ángulo AΓΔ a AΔΓ[48].

Logo, AΔΓ é maior que AΓB; logo ΓΔB é moito maior que ΔΓB.

Pola súa parte, dado que ΓB é igual a ΔB, tamén é igual o ángulo ΓΔB ó ángulo ΔΓB[49].

Pero foi demostrado que tamén é moito maior que este; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, sobre a mesma recta non poderán levantarse, iguais respectivamente ás dúas mesmas rectas dadas, outras dúas rectas atopándose unhas nun punto e outras noutro, polo mesmo lado e cos mesmos extremos que as rectas do principio; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 8

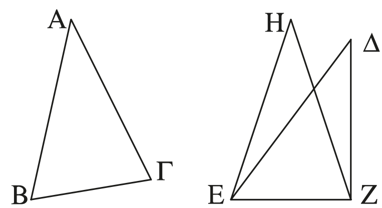
Se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e teñen tamén as

[48] Proposición I, 5.
[49] Proposición I, 5.

bases iguais, tamén terán igual o ángulo contido polas rectas iguais.

Sexan dous triángulos, ΑΒΓ e ΔΕΖ, que teñen os dous lados ΑΒ e ΑΓ iguais ós dous lados ΔΕ e ΔΖ respectivamente, é dicir, ΑΒ igual a ΔΕ, e ΑΓ a ΔΖ. Teñan tamén a base ΒΓ igual a ΕΖ; digo que tamén o ángulo ΒΑΓ é igual a ΕΔΖ.

Pois ben, aplicado o triángulo ΑΒΓ sobre o triángulo ΔΕΖ e posto o punto Β sobre o punto Ε e a recta ΒΓ sobre ΕΖ, cadrará tamén o punto Γ sobre o punto Ζ, por ser igual ΒΓ a ΕΖ; por tanto, se cadra ΒΓ con ΕΖ, cadrarán tamén ΒΑ e ΓΑ con ΕΔ e ΔΖ.



Pois, se a base ΒΓ cadra coa base ΕΖ, pero os lados ΒΑ e ΑΓ non cadran cos lados ΕΔ e ΔΖ senón que se desvían como ΕΗ e ΗΖ, sobre a mesma recta poderán levantarse[50] outras dúas rectas iguais respectivamente ás mesmas dúas rectas dadas, atopándose unhas nun punto e outras noutro, polo mesmo lado e cos mesmos extremos.

Pero non se poden levantar[51]; logo, non pode ser que, aplicada a base ΒΓ sobre a base ΕΖ, non cadren tamén os lados ΒΑ e ΑΓ cos lados ΕΔ e ΔΖ.

Logo, cadrarán; en consecuencia, tamén o ángulo ΒΑΓ cadrará con ΕΔΖ e será igual a el.

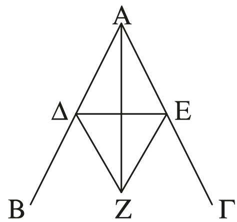
Logo, se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e teñen a base igual á base, tamén terán igual o ángulo contido polas rectas iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

50 Verbo συνίστημι, véxase a Nota 19 (Proposición I, 1).
51 Proposición I, 7.

PROPOSICIÓN 9

Cortar á metade o ángulo rectilíneo dado.

Sexa o ángulo rectilíneo dado ΒΑΓ. É preciso, entón, cortalo á metade[52].



Tómese en ΑΒ o punto Δ ó azar, quítese da recta ΑΓ a recta ΑΕ, igual a ΑΔ[53], únase ΔΕ, constrúase sobre ΔΕ o triángulo equilátero ΔΕΖ[54] e únase ΑΖ; digo que o ángulo ΒΑΓ queda cortado á metade pola recta ΑΖ.

Pois, dado que ΑΔ é igual a ΑΕ e ΑΖ, común, por tanto as dúas rectas ΔΑ e ΑΖ son iguais respectivamente ás dúas rectas ΕΑ e ΑΖ. E a base ΔΖ é igual á base ΕΖ; logo, o ángulo ΔΑΖ é igual a ΕΑΖ[55].

Logo, o ángulo rectilíneo dado queda cortado á metade pola recta ΑΖ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 10

Cortar á metade a recta finita dada

Sexa a recta finita dada ΑΒ; é preciso, entón, cortar á metade a recta finita ΑΒ.

Levántese sobre ela o triángulo equilátero ΑΒΓ[56] e córtese á metade o ángulo ΑΓΒ coa recta ΓΔ[57]; digo que a recta ΑΒ queda cortada á metade polo punto Δ.

---

[52] Δίχα: véxase a Nota 7 (Definición I, 17). Non tería sentido toda a proposición se non se pedise que as partes resultantes fosen iguais.

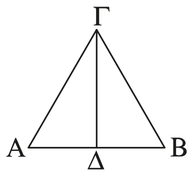
[53] Proposición I, 3.

[54] Proposición I, 1.

[55] Proposición I, 8.

[56] Proposición I, 1.

[57] Proposición I, 9.



Pois, dado que ΑΓ é igual a ΓΒ e ΓΔ, común, por tanto as dúas rectas ΑΓ e ΓΔ son iguais respectivamente a ΒΓ e ΓΔ; e o ángulo ΑΓΔ é igual ó ángulo ΒΓΔ; logo, a base ΑΔ é igual á base ΒΔ[58].

Logo, a recta finita dada ΑΒ queda cortada á metade polo punto Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 11

Trazar unha liña recta en ángulo recto[59] coa recta dada, dende o punto dado nela.

Sexa a recta dada ΑΒ e o punto dado nela Γ; é preciso, entón, trazar dende o punto Γ unha liña recta en ángulo recto coa recta ΑΒ.

Tómese en ΑΓ o punto Δ ó azar, póñase[60] a recta ΓΕ igual a ΓΔ[61], constrúase sobre a recta ΔΕ o triángulo equilátero ΖΔΕ[62] e únase ΖΓ; digo que queda trazada a liña recta ΖΓ en ángulos rectos coa recta dada ΑΒ dende Γ, o punto dado nela.

---

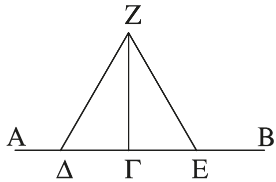
58 Proposición I, 4.

59 En grego, en plural, xa que o resultado son dous ángulos rectos.

60 Euclides utiliza fundamentalmente dous verbos para trazar unha liña: ἵστημι «poñer dereito» e κεῖμαι «estar deitado» —tamén usado como perfecto pasivo de τίθημι, «colocar»—. Ó longo da obra, esa diferenciación entre as nocións de «verticalidade» (ἵστημι) e «horizontalidade» (κεῖμαι) inherentes a estes verbos resulta, en moitas ocasións, inapreciable ou irrelevante, especialmente no caso de κεῖμαι que acaba tendo un uso neutro que indica simplemente a «existencia» dunha liña ou figura xeométrica. Porén, nalgúns casos, aínda se pode apreciar algún matiz que xustifica o uso dun deses verbos e non do outro; por exemplo, nesta proposición, Euclides emprega κεῖμαι (Definición I, 4) porque marca o punto Ε (simétrico de Δ, respecto de Γ) sobre a mesma recta ΑΒ e entón a recta ΓΕ «está deitada» sobre ΑΒ. Asemade, ambos verbos son utilizados profusamente nas súas respectivas formas compostas con preposicións, usos nos que o valor local das preposicións é o relevante ó achegar un matiz importante adicional ó significado básico do verbo —véxase a Nota 19, (Proposición I, 1) e a Nota 129, (Proposición I, 26).

61 Proposición I, 3.

62 Proposición I, 1.



Pois, dado que ΔΓ é igual a ΓE, e ΓZ, común, por tanto ΔΓ e ΓZ son iguais respectivamente a EΓ e ΓZ; e a base ΔZ é igual á base ZE; logo, o ángulo ΔΓZ é igual ó ángulo EΓZ[63]; e son adxacentes.

E cando unha recta levantada sobre outra recta fai os ángulos adxacentes iguais entre si, cada un dos ángulos iguais é recto[64]; logo, cada un dos ángulos ΔΓZ e ZΓE é recto.

Logo, queda trazada a liña recta ΓZ en ángulo recto coa recta dada AB dende Γ, o punto dado nela; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 12

Trazar unha liña recta perpendicular[65] á recta sen límites[66] dada dende o punto dado que non está nela.

Sexa a recta sen límites dada AB e o punto dado que non está nela Γ; é preciso, entón, trazar unha liña recta perpendicular á recta sen límites dada AB dende o punto dado Γ que non está nela.

Pois ben, tómese o punto Δ ó azar no outro lado da recta AB e, con Γ como centro e con ΓΔ como distancia, debúxese o círculo EZH[67], córtese a recta EH á metade por Θ[68] e trácense as rectas ΓH, ΓΘ e ΓE; digo que a recta ΓΘ queda trazada perpendicular á recta sen límites dada AB, dende o punto dado Γ que non está nela.

---

[63] Proposición I, 8.

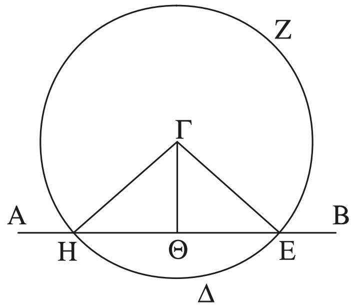
[64] Definición I, 10.

[65] Definición I, 10.

[66] εὐθεῖαν ἄπειρον recta que non ten πέρατα, «extremos» —Definición I, 3— fronte a εὐθείας πεπερασμένη «recta finita» —Postulado 2, Proposición I, 1, etc..

[67] Postulado 3.

[68] Proposición I, 10.



Pois ben, dado que HΘ é igual a ΘE, e ΘΓ, común, por tanto HΘ e ΘΓ, as dúas, son iguais respectivamente a EΘ e ΘΓ; e a base ΓH é igual á base ΓE, logo, o ángulo ΓΘH é igual ó ángulo EΘΓ[69]; e son adxacentes.

E cando unha recta levantada sobre outra recta fai os ángulos adxacentes iguais entre si, cada un dos ángulos iguais é recto e a recta levantada chámase perpendicular a aquela sobre a que está levantada.

Logo a recta ΓΘ queda trazada perpendicular á recta sen límites dada AB dende o punto dado Γ que non está nela; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 13

Se unha recta levantada sobre outra recta fai ángulos, fará ou dous rectos ou iguais[70] a dous rectos.

Pois ben, faga unha recta AB levantada sobre outra recta ΓΔ os ángulos ΓBA e ABΔ; digo que os ángulos ΓBA e ABΔ ou son dous rectos ou iguais a dous rectos.

Efectivamente, se ΓBA é igual a ABΔ, os dous son rectos[71].

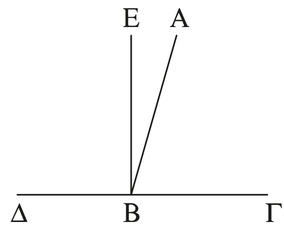
Pero se non, trácese dende o punto B a recta BE en ángulo recto coa recta ΓΔ[72]; logo, os dous, ΓBE e EBΔ, son rectos.

69 Proposición I, 8.

70 Euclides non considera o ángulo raso. Véxase a Nota 3 (Definición I, 8). Para «iguais a dous rectos» véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

71 Definición I, 10.

72 Proposición I, 11.



E, dado que ΓΒΕ é igual ós dous[73], a ΓΒΑ e ΑΒΕ, engádase o ángulo ΕΒΔ a todos eles[74]; logo ΓΒΕ e ΕΒΔ[75] son iguais ós tres, a ΓΒΑ, ΑΒΕ e ΕΒΔ.

Por outra parte, dado que ΔΒΑ é igual ós dous, a ΔΒΕ e ΕΒΑ, engádase ΑΒΓ a todos eles.

Logo ΔΒΑ e ΑΒΓ son iguais ós tres, a ΔΒΕ, ΕΒΑ e ΑΒΓ.

E tamén foi demostrado que ΓΒΕ e ΕΒΔ son iguais ós mesmos tres; e as cousas iguais a unha mesma cousa tamén son iguais entre si[76]; logo, tamén ΓΒΕ e ΕΒΔ son iguais a ΔΒΑ e ΑΒΓ; pero os dous, ΓΒΕ e ΕΒΔ, son rectos; logo, tamén ΔΒΑ e ΑΒΓ son iguais a dous rectos.

Logo, se unha recta levantada sobre outra recta fai ángulos, fará ou dous rectos ou iguais a dous rectos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

Se dúas rectas que non están polo mesmo lado fan ángulos adxacentes iguais*[77] *a dous rectos cunha recta e nun punto dela, as rectas estarán en liña recta unha coa outra.

Pois ben, fagan dúas rectas ΒΓ e ΒΔ que non están polo mesmo lado os ángulos adxacentes ΑΒΓ e ΑΒΔ iguais a dous

73 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

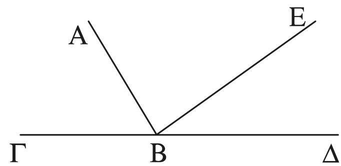
74 Engade o ángulo ΕΒΔ a ΓΒΑ + ΑΒΕ e a ΓΒΕ.

75 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

76 Noción Común 1.

77 Nota 70 (Proposición I, 13).

rectos coa recta AB e no seu punto B; digo que BΔ está en liña recta con ΓB.



Pois se non está BΔ en liña recta con BΓ, estea BE en liña recta con ΓB[78].

Así pois, dado que a recta AB está levantada sobre a recta ΓBE, logo, os ángulos ABΓ e ABE son iguais a dous rectos[79]; e tamén os ángulos ABΓ e ABΔ son iguais a dous rectos; logo, os ángulos ΓBA e ABE son iguais a ΓBA e ABΔ.

Quítese o ángulo ΓBA ós dous; logo, o ángulo restante ABE, é igual ó ángulo restante ABΔ, o menor ó maior; o que, sen dúbida, é imposible[80].

Logo, non está en liña recta BE con ΓB.

De xeito semellante, poderemos demostrar que ningunha outra o está excepto BΔ; logo ΓB está en liña recta con BΔ.

Logo, se dúas rectas que non están polo mesmo lado fan ángulos adxacentes iguais a dous rectos cunha recta e nun punto dela, as rectas estarán en liña recta unha coa outra; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 15

Se dúas rectas se cortan unha á outra, fan os ángulos opostos polo vértice*[81] *iguais un ó outro.

---

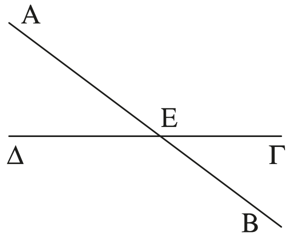
78 Postulado 2.

79 Proposición I, 13.

80 Noción Común 8.

81 κορυφή, «cima» —da cabeza, dunha montaña, ...—; referido ós ángulos, o vértice; unha vez máis, a terminoloxía é moi plástica. Ademais, a preposición κατά indica movemento vertical —concretamente, de arriba cara abaixo—. Refírese, por tanto, ós ángulos que están verticalmente opostos —fronte os adxacentes, postos un á carón do outro, Definición I, 10.

Pois ben, córtense as dúas rectas AB e ΓΔ unha a outra no punto E; digo que o ángulo AEΓ é igual a ΔEB, mentres que ΓEB a AEΔ.



Pois, dado que a recta AE está levantada sobre a recta ΓΔ facendo os ángulos ΓEA e AEΔ, logo, os ángulos ΓEA e AEΔ son iguais a dous rectos[82].

Asemade, dado que a recta ΔE está levantada sobre a recta AB facendo os ángulos AEΔ e ΔEB, logo, os ángulos AEΔ e ΔEB son iguais a dous rectos.

E tamén foi demostrado que ΓEA e AEΔ son iguais a dous rectos; logo ΓEA e AEΔ son iguais a AEΔ e ΔEB.

Quítese dos dous o ángulo AEΔ; logo, o ángulo restante ΓEA, é igual ó ángulo restante BEΔ; de xeito semellante, poderase demostrar que tamén os ángulos ΓEB e ΔEA son iguais.

Logo, se dúas rectas se cortan unha á outra, fan os ángulos opostos polo vértice iguais un ó outro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Corolario[83].- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se dúas rectas se cortan unha á outra, farán os catro ángulos do corte iguais a catro rectos.

---

82 Proposición I, 13.

83 Os Corolarios son o resultado incidental que se deduce da proba dun teorema, proposición ou problema, pero que non se busca de forma directa. Euclides escribiu unha obra titulada Πορίσματα na que recollía unha serie de proposicións a medio camiño entre teoremas e problemas, diferentes, pois, deste corolario. Os manuscritos considerados por Heiberg máis fiables non inclúen este Πόρισμα pero si Proclo e Pselo.

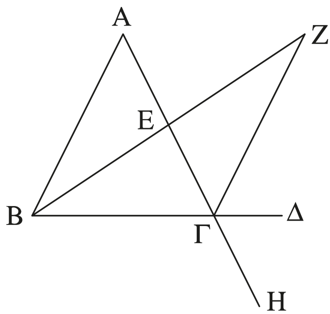
Podemos clasificar as corenta e oito proposicións do Libro I dos *Elementos* en catorce problemas, que explican como se pode facer unha construción determinada, e trinta e catro teoremas, nos que se dá unha proba formal dun resultado xeral. Tal como se indicou na Nota 24 (Proposición I, 1), Euclides acaba todas as proposicións do Libro I, a excepción

PROPOSICIÓN 16

Prolongado un dos lados de todo triángulo, o ángulo exterior é maior que cada un dos ángulos interiores e opostos*[84]*.

Sexa o triángulo ΑΒΓ e prolónguese un dos seus lados, ΒΓ, ata Δ[85]; digo que o ángulo exterior ΑΓΔ é maior que cada un dos ángulos interiores e opostos, ΓΒΑ e ΒΑΓ.

Córtese a recta ΑΓ á metade por Ε[86] e, unida a recta ΒΕ, prolónguese en liña recta ata Ζ[87], póñase a recta ΕΖ igual a ΒΕ, únase ΖΓ e lévese ΑΓ ata Η.



Logo, dado que ΑΕ é igual a ΕΓ, mentres que ΒΕ é igual a ΕΖ, por tanto ambas, ΑΕ e ΕΒ, son iguais a ΓΕ e ΕΖ respectivamente; e o ángulo ΑΕΒ é igual ó ángulo ΖΕΓ, pois están opostos polo vértice[88]; logo, a base ΑΒ é igual á base ΖΓ e o triángulo

---

da Proposición I, 30, repetindo o enunciado e a continuación engadindo unha apostila: «o que, xustamente, era preciso facer» no caso dos problemas e «o que, xustamente, era preciso demostrar» no caso dos teoremas. Cando a proposición vai seguida dun corolario, entón traslada a apostila para o final do corolario. Isto, aínda que con algunhas excepcións e pequenas variantes, será a estrutura habitual en todos os libros dos *Elementos*.

84 Na Proposición I, 5 fai referencia ós ángulos exteriores que están «baixo a base» —*αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν*— e na Definición I, 22 ós «de enfronte, opostos» —*ἀπεναντίον*— mentres que aquí introduce o concepto de ángulo «de fóra, exterior» —*ἐκτός*— e «de dentro, interior» —*ἐντός*— . Para todos eles utiliza adverbios, tal como fixera para os adxacentes —Definición I, 10— e os opostos —Definición I, 22.

85 Postulado 2.

86 Proposición I, 10.

87 Postulados 1 e 2.

88 Proposición I, 15.

ABE é igual a ZEΓ e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, son iguais respectivamente ós demais ángulos[89]; logo, BAE é igual a EΓZ.

E EΓΔ é maior que EΓZ; logo, AΓΔ é maior que BAE.

De xeito semellante poderase demostrar tamén que, cortada á metade BΓ, tamén BΓH, isto é, AΓΔ[90], é maior que ABΓ.

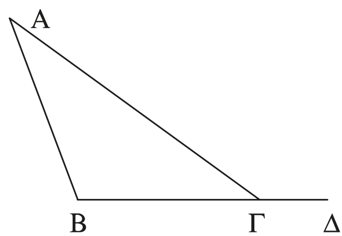
Logo, prolongado un dos lados de todo triángulo, o ángulo exterior é maior que cada un dos ángulos interiores e opostos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 17

De todo triángulo, dous ángulos tomados xuntos de calquera xeito son menores que dous rectos.

Sexa o triángulo ABΓ; digo que dous ángulos do triángulo ABΓ tomados xuntos de calquera xeito son menores que dous rectos.

Pois ben, prolónguese BΓ ata Δ[91].



E, dado que AΓΔ é un ángulo exterior do triángulo ABΓ, é maior que o interior e oposto ABΓ[92].

Engádase a ambos AΓB; logo, AΓΔ e AΓB son maiores que ABΓ e BΓA.

89 Proposición I, 4.
90 Proposición I, 15.
91 Postulado 2.
92 Proposición I, 16.

Pero AΓΔ e AΓB son iguais a dous rectos[93]; logo, ABΓ e BΓA son menores que dous rectos.

De xeito semellante, poderemos demostrar tamén que BAΓ, AΓB e, ademais, ΓAB e ABΓ son menores que dous rectos.

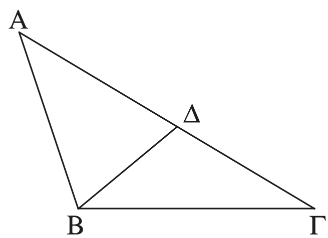
Logo, de todo triángulo, dous ángulos tomados de calquera xeito son menores que dous rectos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

De todo triángulo, o lado maior está tendido baixo o ángulo maior.

Pois ben, sexa o triángulo ABΓ co lado AΓ maior que AB; digo que tamén o ángulo ABΓ é maior que BΓA.

Pois ben, dado que AΓ é maior que AB, póñase AΔ igual a AB e únase BΔ.



E dado que o ángulo AΔB é exterior ó triángulo BΓΔ, é maior que o interior e oposto ΔΓB[94]; pero AΔB é igual ABΔ, dado que tamén o lado AB é igual a AΔ[95]; logo, tamén ABΔ é maior que AΓB; logo, ABΓ é moito maior que AΓB[96].

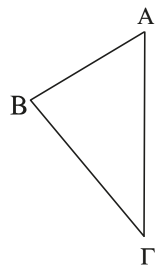
Logo, de todo triángulo, o lado maior está tendido baixo o ángulo maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

93 Proposición I, 13.
94 Proposición I, 16.
95 Proposición I, 5.
96 Noción Común 8.

PROPOSICIÓN 19

De todo triángulo, baixo o ángulo maior está tendido o lado maior.[97]

Sexa o triángulo ΑΒΓ co ángulo ΑΒΓ maior que ΒΓΑ; digo que tamén o lado ΑΓ é maior que o lado ΑΒ.



Pois se non, ΑΓ ou é igual ou menor que ΑΒ; e é certo que ΑΓ non é igual a ΑΒ; pois sería tamén igual ΑΒΓ a ΑΓΒ[98]; pero non o é; logo, non é igual ΑΓ a ΑΒ.

E tampouco ΑΓ é menor que ΑΒ; pois sería menor tamén o ángulo ΑΒΓ que ΑΓΒ[99]. Pero non o é; logo non é ΑΓ menor que ΑΒ.

Pero foi demostrado que non é igual. Logo, ΑΓ é maior que ΑΒ.

De todo triángulo, baixo o ángulo maior está tendido o lado maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 20[100]

De todo triángulo, dous lados tomados xuntos de calquera xeito son maiores que o restante.

[97] O enunciado desta proposición difire do da Proposición I, 18 no orde de palabras e no uso do verbo ὑποτείνω —transitivo na 18, intransitivo na 19, pero con idéntico significado—. Na Proposición I, 18, o *datum* é dicir, o punto de partida, é o lado e o *quaesitum*, o que se busca, é o ángulo; na Proposición I, 19 o *datum* é o ángulo e o *quaesitum* é o lado.

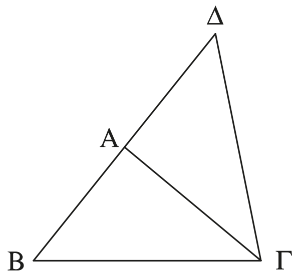
[98] Proposición I, 5.

[99] Proposición I, 18.

[100] Proposición coñecida pola ridiculización que dela fixeron os epicúreos: o que di Euclides é tan evidente que non precisa demostración. Ata un asno o percibe, xa que, colocado nun punto que sería un dos vértices do triángulo e noutro vértice a herba, o asno iría polo lado que une ambos vértices e non polos outros dous lados do suposto triángulo. Porén, Proclo afirma que a evidencia da percepción dun teorema non basta para probalo.

Pois ben, sexa o triángulo ΑΒΓ; digo que, do triángulo ΑΒΓ, dous lados tomados xuntos de calquera xeito son maiores que o restante: ΒΑ e ΑΓ maiores que ΒΓ; ΑΒ e ΒΓ maiores que ΑΓ; ΒΓ e ΓΑ maiores que ΑΒ.

Pois ben, lévese ΒΑ ata o punto Δ, póñase ΑΔ igual a ΓΑ e únase ΔΓ.



Logo, dado que ΔΑ é igual a ΑΓ, tamén o ángulo ΑΔΓ é igual a ΑΓΔ[101]; logo, ΒΓΔ é maior que ΑΔΓ; e dado que ΔΓΒ é un triángulo que ten o ángulo ΒΓΔ maior que ΒΔΓ e que o lado maior está tendido baixo o ángulo maior[102], logo, ΔΒ é maior que ΒΓ.

Pero ΔΑ é igual a ΑΓ; logo ΒΑ e ΑΓ son maiores que ΒΓ; de xeito semellante, poderemos demostrar que tamén ΑΒ e ΒΓ son maiores que ΓΑ, mentres que ΒΓ e ΓΑ son maiores que ΑΒ.

Logo, de todo triángulo, dous lados tomados xuntos de calquera xeito son maiores que o restante; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 21

Se sobre un dos lados dun triángulo, a partir dos extremos, se levantan dúas rectas que se encontren no seu interior, as rectas levantadas serán menores que os dous

---

Esta proposición é unha mostra da meticulosidade e do rigor cos que Euclides pretende traballar nos *Elementos*.

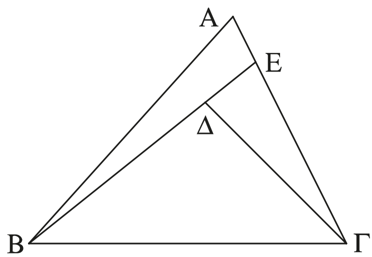
[101] Proposición I, 5.

[102] Proposición I, 19.

lados restantes do triángulo, mentres que conterán un ángulo maior.

Pois ben, sobre un dos lados do triángulo ΑΒΓ, o lado ΒΓ, a partir dos extremos Β e Γ, levántense dúas rectas, ΒΔ e ΔΓ, que se encontren no seu interior; digo que ΒΔ e ΔΓ son menores que os dous lados restantes do triángulo, ΒΑ e ΑΓ[103], mentres que conteñen un ángulo, ΒΔΓ, maior que ΒΑΓ.

Pois ben, lévese ΒΔ ata Ε[104].



E, dado que, de todo triángulo, dous lados son maiores que o restante[105], logo do triángulo ΑΒΕ, os dous lados ΑΒ e ΑΕ son maiores que ΒΕ; engádase a todos eles ΕΓ; logo ΒΑ e ΑΓ son maiores que ΒΕ e ΕΓ[106].

Por outra parte, dado que os dous lados ΓΕ e ΕΔ do triángulo ΓΕΔ son maiores que ΓΔ, engádase a todos eles ΔΒ; logo, ΓΕ e ΕΒ son maiores que ΓΔ e ΔΒ.

Pero foi demostrado que ΒΑ e ΑΓ son maiores que ΒΕ e ΕΓ; logo, ΒΑ e ΑΓ son moito maiores que ΒΔ e ΔΓ.

Por outra parte, dado que, de todo triángulo, o ángulo exterior é maior que o interior e oposto[107], logo, do triángulo ΓΔΕ, o ángulo exterior ΒΔΓ é maior que ΓΕΔ.

---

[103] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

[104] Postulado 2.

[105] Proposición I, 20.

[106] Noción Común 4.

[107] Proposición I, 16.

Ademais, por iso tamén, do triángulo ABE, o ángulo exterior ΓEB é maior que BAΓ.

Pero foi demostrado que BΔΓ é maior que ΓEB; logo, BΔΓ é moito maior que BAΓ.

Logo, se sobre un dos lados dun triángulo, a partir dos extremos, se levantan dúas rectas que se encontren no seu interior, as rectas levantadas serán menores que os dous lados restantes do triángulo, mentres que conterán un ángulo maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 22

A partir de tres rectas que son iguais ás tres rectas dadas, construír un triángulo; é preciso, entón*[108]*, que, tomadas xuntas de calquera xeito, dúas sexan maiores que a restante*[109]*. [110]

Sexan as tres rectas dadas A, B e Γ, das cales sexan dúas, tomadas xuntas de calquera xeito, maiores que a restante: A e

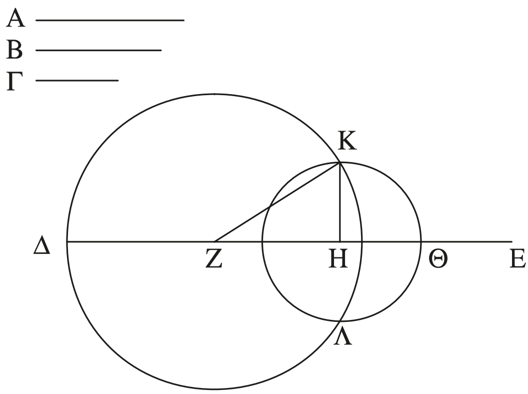
[108] Temos en conta aquí a variante textual δὴ que presentan os manuscritos e non a que recolle a edición crítica de J. L.Heiberg e H. Menge, δὲ, xa que, tal e como argumenta Heath, é máis coherente co sentido do texto que ven a continuación.

[109] Este é, segundo Heath, o primeiro διορισμός dos *Elementos* referido a un problema, sendo unha restrición ou condición para a súa resolución. Euclides indica que para poder construír o triángulo a partir de tres rectas «é preciso que, tomadas xuntas de calquera xeito, dúas sexan maiores que a restante». Se temos tres rectas calquera e seguimos os pasos que indica Euclides nesta proposición, pode suceder que o punto de corte das dúas circunferencias, K, non exista (se non se tocan) ou sexa un punto da recta ΔE (se as circunferencias son tanxentes). Se A fose maior ou igual que B e Γ xuntas, entón o círculo con centro H e radio HΘ queda dentro do círculo con centro Z e radio ZΔ (tanxentes no caso de que A fose igual que B e Γ) e non se cortarían nun punto K (ou K non sería exterior á recta ΔE); se Γ fose maior ou igual que A e B xuntas, entón o círculo con centro Z e radio ZΔ queda dentro do círculo con centro H e radio HΘ (tanxentes no caso de que Γ fose igual que A e B) e tampouco se cortarían nun punto K (ou K non sería exterior á recta ΔE); finalmente se B fose maior ou igual que A e Γ xuntas, entón o círculo con centro H e radio HΘ é exterior ó círculo con centro Z e radio ZΔ (tanxentes no caso de que B fose igual que A e Γ) e tampouco se cortarían nun punto K (ou K non sería exterior á recta ΔE). Con esa restrición, Euclides fai que a súa construción sexa válida.

[110] Aquí aparece a continuación esta frase nos manuscritos: «Debido a que dous lados de todo triángulo tomados xuntos de calquera xeito son maiores que o restante». Proclo e Campano non a recollen. Heiberg considera que é unha interpolación e Heath afirma que parece unha glosa. Esta frase reproduce a Proposición I, 20 e xustifica que a construción é sempre válida pois, se non se dá esa condición, non existe un triángulo que teña esas tres rectas como lados.

B maiores que Γ, ademais A e Γ maiores que B, e tamén B e Γ maiores que A; é preciso, entón, construír un triángulo a partir das rectas iguais a A, B e Γ.

Póñase unha liña ΔE[111] limitada por Δ pero ilimitada por E e fágase ΔZ igual a A, ZH igual a B, e HΘ igual a Γ[112]; e co centro Z e a distancia ZΔ debúxese un círculo, ΔKΛ[113]; por outra parte, co centro H e coa distancia HΘ, debúxese o círculo KΛΘ e trácense KZ e KH; digo que o triángulo KZH queda construído a partir das tres rectas iguais A, B e Γ.



Pois ben, dado que o punto Z é o centro do círculo ΔKΛ, ZΔ é igual a ZK; pero ZΔ é igual a A. Logo, KZ é igual a A[114].

Por outra parte, dado que o punto H é o centro do círculo ΛKΘ, HΘ é igual a HK; pero, HΘ é igual a Γ; e KH é igual, logo, a Γ.

Pero tamén ZH é igual a B; logo, as tres rectas, KZ, ZH e HK, son iguais ás tres A, B e Γ.

Logo, a partir das tres rectas KZ, ZH e HK que son iguais ás tres rectas dadas A, B e Γ, queda construído o triángulo KZH; o que, xustamente, era preciso facer.

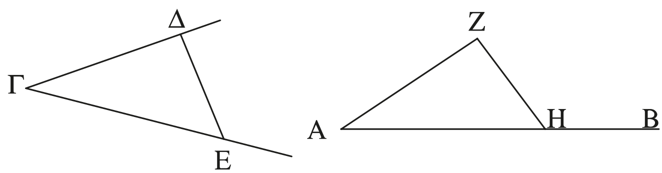
111 Postulado 1.
112 Proposición I, 3.
113 Postulado 3.
114 Noción Común 1.

PROPOSICIÓN 23

Construír un ángulo rectilíneo igual ó ángulo rectilíneo dado na recta dada e nun punto dela.

Sexa a recta dada AB, o punto nela A, e o ángulo rectilíneo dado ΔΓE; é preciso, entón, construír un ángulo rectilíneo igual ó ángulo rectilíneo dado, ΔΓE, sobre a recta dada, AB, e no seu punto A.

Tómense os puntos Δ e E ó azar en cada unha das rectas ΓΔ e ΓE e únase ΔE[115]; e a partir das tres rectas, que son iguais ás tres ΓΔ, ΔE e ΓE, constrúase o triángulo AZH[116], de xeito que ΓΔ sexa igual a AZ, ΓE a AH e tamén ΔE a ZH.



Logo, dado que as dúas rectas ΔΓ e ΓE son iguais respectivamente a ZA e AH, e a base ΔE é igual á base ZH, logo, o ángulo ΔΓE é igual ó ángulo ZAH[117].

Logo, o ángulo rectilíneo ZAH, igual ó ángulo rectilíneo dado ΔΓE, queda construído na recta dada AB e no seu punto A; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 24

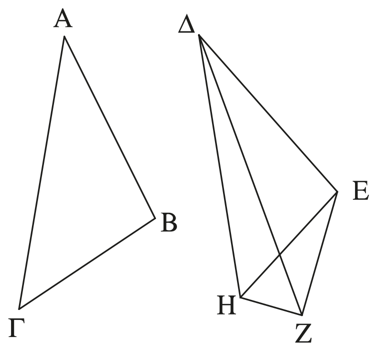
Se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e un ten o ángulo contido polas rectas iguais maior que o outro, tamén terá a base maior que a base do outro.

Sexan dous triángulos, ABΓ e ΔEZ, que teñen os dous lados AB e AΓ iguais respectivamente ós dous lados ΔE e ΔZ, —AB igual

[115] Postulado 1.
[116] Proposición I, 22.
[117] Proposición I, 8.

a ΔE, mentres que ΑΓ igual a ΔZ— e sexa o ángulo A[118] maior que o ángulo Δ; digo que tamén a base ΒΓ é maior que a base EZ.

Pois ben, dado que o ángulo ΒΑΓ é maior que o ángulo EΔZ, constrúase na recta ΔE e no seu punto Δ o ángulo EΔH igual ó ángulo ΒΑΓ[119], póñase ΔH igual a unha das dúas, a ΑΓ ou ΔZ[120], e trácense EH e ZH.



Logo, dado que AB é igual a ΔE, mentres que ΑΓ é igual a ΔH, entón, BA e ΑΓ son iguais respectivamente ós dous lados, EΔ e ΔH; e o ángulo ΒΑΓ é igual ó ángulo EΔH; logo, a base ΒΓ é igual á base EH[121].

Por outra parte, dado que ΔZ é igual a ΔH, tamén o ángulo ΔHZ é igual ó ángulo ΔZH[122]; logo, o ángulo ΔZH é maior que EHZ; logo, o ángulo EZH é moito maior que EHZ.

E, dado que EZH é un triángulo que ten o ángulo EZH maior que EHZ e que o lado maior está tendido baixo o ángulo maior, logo, o lado EH é maior que EZ.

Pero EH é igual a ΒΓ; logo, tamén ΒΓ é maior que EZ.

Logo, se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e un ten o ángulo contido polas

---

118 É aquí a primeira vez que nomea un ángulo só cunha letra —o punto no que se tocan as dúas rectas que o forman, o vértice.

119 Proposición I, 23.

120 O lado ΑΓ é igual a ΔZ e, polo tanto, AH, ΑΓ e AZ son iguais.

121 Proposición I, 4.

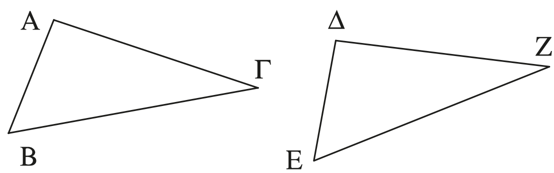
122 Proposición I, 5.

rectas iguais maior que o outro, tamén terá a base maior que a base do outro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 25[123]

Se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e un ten a base maior que o outro, tamén terá o ángulo contido polas rectas iguais maior que o ángulo do outro.

Sexan dous triángulos, ΑΒΓ e ΔΕΖ, que teñen os dous lados ΑΒ e ΑΓ iguais respectivamente ós dous lados ΔΕ e ΔΖ —ΑΒ igual a ΔΕ, mentres que ΑΓ igual a ΔΖ—; e a base ΒΓ sexa maior que a base ΕΖ; digo que tamén o ángulo ΒΑΓ é maior que ΕΔΖ.



Pois se non, entón é igual ou menor que el; agora ben, ΒΑΓ non é igual a ΕΔΖ; pois sería tamén igual a base ΒΓ á base ΕΖ[124]; pero non é. Logo, non é igual o ángulo ΒΑΓ ó ángulo ΕΔΖ; nin tampouco é menor ΒΑΓ que ΕΔΖ; pois sería menor tamén a base ΒΓ que a base ΕΖ[125]; pero non é; logo, non é menor o ángulo ΒΑΓ que o ángulo ΕΔΖ. E foi demostrado que non é igual; logo, é maior ΒΑΓ que ΕΔΖ.

Logo, se dous triángulos teñen dous lados dun iguais respectivamente a dous lados do outro e un ten a base maior que o outro, tamén terá o ángulo contido polas rectas iguais maior que o ángulo do outro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[123] Igual que ocorría entre as proposicións I, 18 e I, 19, as proposicións I, 24 e I, 25 só se diferencian polo punto de partida do enunciado: na I, 24 parte do ángulo e na I, 25 parte da base.

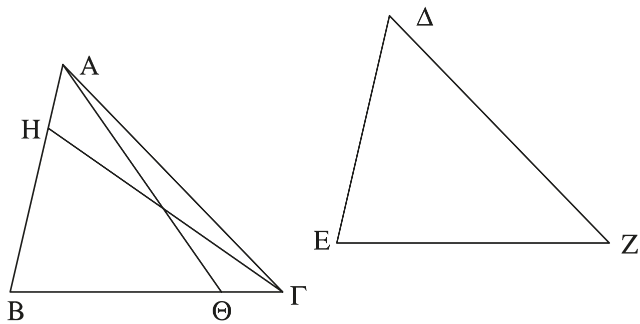
[124] Proposición I, 4.

[125] Proposición I, 24.

PROPOSICIÓN 26

Se dous triángulos teñen dous ángulos dun iguais respectivamente a dous ángulos do outro e un lado dun igual a un lado do outro —ou o lado dos ángulos iguais[126] ou o que está tendido baixo un dos ángulos iguais—, tamén os demais lados dun serán iguais ós demais lados do outro e o ángulo restante dun ó ángulo restante do outro.

Sexan dous triángulos, ΑΒΓ e ΔΕΖ, que teñen os dous ángulos ΑΒΓ e ΒΓΑ iguais respectivamente ós dous ángulos ΔΕΖ e ΕΖΔ —o ángulo ΑΒΓ igual a ΔΕΖ, mentres que ΒΓΑ igual a ΕΖΔ.



E teñan tamén un lado dun igual a un lado do outro, primeiro o lado dos ángulos iguais, ΒΓ igual a ΕΖ; digo que tamén os demais lados dun serán iguais respectivamente ós demais lados do outro, ΑΒ a ΔΕ, mentres que ΑΓ a ΔΖ, e o ángulo restante dun ó ángulo restante do outro, ΒΑΓ a ΕΔΖ.

Pois se non é igual ΑΒ a ΔΕ, un deles é maior. Sexa maior ΑΒ, fágase ΒΗ igual a ΔΕ[127] e únase ΗΓ.

---

[126] A preposición πρός aparece ó longo de toda obra indicando contacto; así úsase para indicar a construción dunha recta a partir dun punto —Proposicións I, 2; I, 3—, que as rectas se cruzan nun punto —Proposicións I, 7; I, 8—, o vértice dun ángulo —Proposición I, 24— ou que un punto está nunha recta —Proposicións I, 14; I, 23—. Neste caso, e por primeira vez, πρός indica a relación dun lado con respecto a dous ángulos: é o lado que está nos dous ángulos, é dicir, o lado común a dous ángulos do triángulo; un uso similar na Proposición VI, 8: «os triángulos da perpendicular», é dicir, os triángulos que comparten un lado, a perpendicular.

[127] Proposición I, 3.

Logo, dado que BH é igual a ΔE, mentres que BΓ a EZ, por tanto BH e BΓ son iguais respectivamente a ΔE e EZ; e o ángulo HBΓ é igual ó ángulo ΔEZ; logo, a base HΓ é igual á base ΔZ, o triángulo HBΓ é igual ó triángulo ΔEZ[128] e os demais ángulos dun serán iguais ós demais ángulos do outro, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais; logo, o ángulo HΓB é igual a ΔZE.

Pero suponse[129] que o ángulo ΔZE é igual a BΓA, logo, tamén BΓH é igual a BΓA, o menor ó maior; o que, sen dúbida, é imposible[130].

Logo, AB non é desigual a ΔE. Logo, é igual.

Pero tamén BΓ é igual a EZ; por tanto os dous lados dun, AB e BΓ, son iguais respectivamente ós dous do outro, ΔE e EZ; e o ángulo ABΓ é igual ó ángulo ΔEZ; logo, a base AΓ é igual á base ΔZ e o ángulo restante dun, BAΓ, é igual ó ángulo restante do outro, EΔZ.

Agora, sexan iguais, asemade, os lados que están tendidos baixo os ángulos iguais, como AB a ΔE; digo, asemade, que tamén os demais lados dun serán iguais ós demais lados do outro —AΓ a ΔZ, mentres que BΓ a EZ— e tamén o ángulo restante dun, BAΓ, é igual ó ángulo restante do outro, EΔZ .

Pois se BΓ non é igual a EZ, un deles é maior.

Sexa o maior, se é posible, BΓ, póñase BΘ igual a EZ e únase AΘ.

E, dado que BΘ é igual a EZ, mentres que AB a ΔE, por tanto, os dous lados dun, AB e BΘ, son iguais respectivamente ós dous do outro, ΔE e EZ; e conteñen ángulos iguais; logo, a base AΘ é igual á base ΔZ, o triángulo ABΘ é igual ó triángulo ΔEZ e os demais ángulos dun serán iguais ós demais ángulos do outro, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais; logo, o ángulo BΘA é igual a EZΔ.

---

[128] Proposición I, 4.

[129] ὑποκεῖμαι: significa «poñer por debaixo» ou o que é o mesmo «su(b)poñer», é dicir, Euclides utiliza aquí unha suposición ou hipótese (ὑπόθεσις, «o que está posto por debaixo», «a base»).

[130] Noción Común 8.

Pero EZΔ é igual a BΓA; por tanto, do triángulo AΘΓ, o ángulo exterior, BΘA, é igual ó interior e oposto, BΓA; o que, sen dúbida, é imposible[131].

Logo, non é desigual BΓ a EZ; logo, é igual. Pero tamén AB é igual a ΔE. Por tanto os dous lados dun, AB e BΓ, son iguais respectivamente ós dous lados do outro, ΔE e EZ; e conteñen ángulos iguais; logo, a base dun, AΓ, é igual á base do outro, ΔZ, o triángulo ABΓ é igual ó triángulo ΔEZ e o ángulo restante dun, BAΓ, é igual ó ángulo restante do outro, EΔZ.

Logo, se dous triángulos teñen dous ángulos dun iguais respectivamente ós dous ángulos do outro e un lado dun igual a un lado do outro —ou o lado dos ángulos iguais ou o que está tendido baixo un dos ángulos iguais—, tamén os demais lados dun serán iguais ós demais lados do outro e o ángulo restante dun ó ángulo restante do outro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 27[132]

Se unha recta ó incidir en dúas rectas[133] fai os ángulos alternos[134] iguais entre si, as rectas serán paralelas entre si.

Pois ben, faga a recta EZ, ó incidir nas rectas AB e ΓΔ, os ángulos alternos AEZ e EZΔ iguais entre si; digo que AB é paralela a ΓΔ.

131 Proposición I, 16.

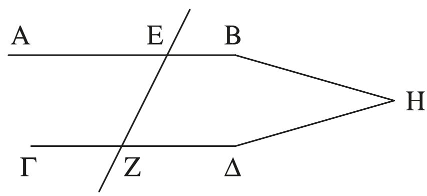
132 As 26 primeiras proposicións están dedicadas ó estudio dos triángulos con resultados, case todos eles, encadeados, sendo cada proposición necesaria para algunha das que lle seguen. Para poder chegar a Proposición I, 25, as únicas proposicións que poderíamos quitar da serie son a I, 6, recíproca da I, 5, a I, 12 que completa a I, 11 permitindo trazar unha perpendicular a unha recta por un punto exterior, a I, 14 que proba un resultado recíproco da I, 13 (e que ademais é necesaria para a proba do Teorema de Pitágoras, Proposición I, 47), e a I, 17, consecuencia da I, 16, que proba que dous ángulos dun triángulo suman menos de dous rectos. Esta Proposición I, 27 é a primeira dun grupo de proposicións destinadas ó estudio das rectas paralelas e dos paralelogramos. A Proposición I, 32 é un refinamento da Proposición I, 17 ó probar que os ángulos dun triángulo suman dous rectos e, a partir da Proposición I, 35, empeza unha nova sección dedicada á comparación de áreas de triángulos e paralelogramos.

133 O principio do enunciado desta proposición é exactamente igual ó do Postulado 5 e ó da Proposición I, 28.

134 O mesmo uso dun adverbio, ἐναλλάξ, para cualificar ángulos segundo a súa situación —véxase a Definición I, 10 e I, 22 e a Proposición I, 16.

Pois se non, prolongadas AB e ΓΔ, atoparanse no lado[135] de B e Δ ou de A e Γ.

Prolónguense e atópense no lado de B e Δ en H.



Por tanto, do triángulo HEZ, o ángulo exterior AEZ é igual ó interior e oposto, EZH; o que, sen dúbida, é imposible[136]; logo, prolongadas as rectas AB e ΓΔ, non se atoparán no lado de B e Δ.

De xeito semellante poderase demostrar que tampouco no lado de A e Γ; pero, ó non atoparse en ningún dos lados, son paralelas; logo AB é paralela a ΓΔ.

Logo, se unha recta, ó incidir en dúas rectas, fai os ángulos alternos iguais entre si, as rectas serán paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 28

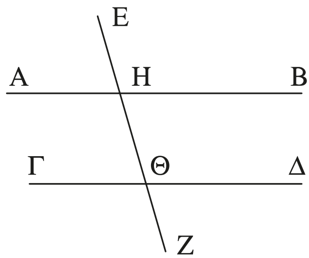
Se unha recta, ó incidir en dúas rectas, fai o ángulo exterior igual ó interior, oposto e do mesmo lado, ou ben os interiores e do mesmo lado iguais a dous rectos, as rectas serán paralelas entre si.

Pois ben, faga a recta EZ, ó incidir nas rectas AB e ΓΔ, o ángulo exterior EHB igual ó ángulo interior e oposto HΘΔ ou os

[135] μέρη significa as partes dun todo (definicións I, 1; I, 17; I, 23, Postulado 5, Noción Común 8 e proposicións I, 7; I, 8; I, 12 e I, 14); ó referirse a rectas (Definición I, 23, Postulado 5, Proposición I, 7), co determinante ἑκατέρα —«cada un de entre dous», «un e outro»—, ἕτερα —«un de entre dous»— ou τά αὐτά —«os mesmos»—, enténdese que esas partes da recta serán os sentidos. Euclides aínda utilizará esta palabra con outro sentido, «submúltiplo», «denominador» dunha fracción (definicións VII, 3 e VII, 4).

[136] Proposición I, 16.

ángulos interiores e no mesmo lado, BHΘ e HΘΔ, iguais a dous rectos; digo que AB é paralela a ΓΔ.



Pois, dado que o ángulo EHB é igual a HΘΔ pero EHB é igual a AHΘ[137], logo, tamén AHΘ é igual a HΘΔ; e son alternos; logo AB é paralela a ΓΔ[138].

Por outra parte, dado que os ángulos BHΘ e HΘΔ son iguais a dous rectos, son tamén os ángulos AHΘ e BHΘ iguais a dous rectos, logo, os ángulos AHΘ e BHΘ son iguais a BHΘ e HΘΔ; quítese a ambos o ángulo BHΘ; logo, o ángulo restante AHΘ é igual ó ángulo restante HΘΔ[139]; e son alternos; logo, AB é paralela a ΓΔ.

Logo, se unha recta ó incidir en dúas rectas fai o ángulo exterior igual ó interior, oposto e do mesmo lado, ou ben os interiores e do mesmo lado iguais a dous rectos, as rectas serán paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

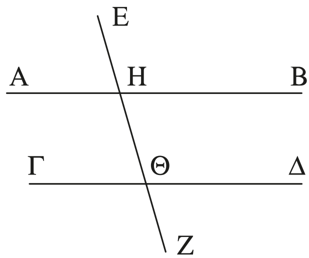
PROPOSICIÓN 29

A recta que incide nas rectas paralelas fai os ángulos alternos iguais entre si, o ángulo externo igual ó interno e oposto, e os internos e do mesmo lado, iguais a dous rectos.

Pois ben, incida a recta EZ nas rectas paralelas AB e ΓΔ; digo que fai iguais os ángulos alternos, AHΘ e HΘΔ, o ángulo

[137] Proposición I, 15.
[138] Proposición I, 27.
[139] Noción Común 3.

exterior EHB igual ó interior e oposto HΘΔ e os interiores do mesmo lado, BHΘ e HΘΔ, iguais a dous rectos.



Pois, se o ángulo AHΘ non é igual a HΘΔ, un deles é maior.

Sexa maior AHΘ; engádase a ambos BHΘ; logo, os ángulos AHΘ e BHΘ son maiores que BHΘ e HΘΔ[140].

Pero os ángulos AHΘ e BHΘ[141] son iguais a dous rectos.

Logo, os ángulos BHΘ e HΘΔ son menores que dous rectos.

Pero, as rectas prolongadas ata o infinito dende dous ángulos menores que dous rectos atópanse[142]; logo, as rectas AB e ΓΔ prolongadas ata o infinito atoparanse; pero non se atopan por supormos[143] que son paralelas; logo, non é desigual o ángulo AHΘ a HΘΔ; logo, é igual.

Pero o ángulo AHΘ é igual a EHB[144]; logo, tamén o ángulo EHB é igual a HΘΔ[145].

Engádase a ambos o ángulo BHΘ; logo, os ángulos EHB e BHΘ son iguais a BHΘ e HΘΔ[146].

Pero os ángulos EHB e BHΘ son iguais a dous rectos; logo, tamén os ángulos BHΘ e HΘΔ son iguais a dous rectos.

Logo, a recta que incide nas rectas paralelas fai os ángulos alternos iguais entre si, o ángulo externo igual ó interno e oposto, e os internos e do mesmo lado, iguais a dous rectos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

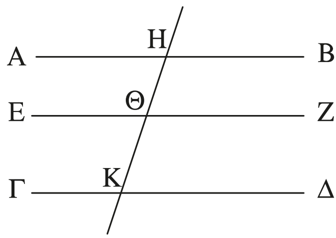
140 Noción Común 4.
141 Proposición I, 13.
142 Postulado 5.
143 Nota 129 (Proposición I, 26); Definición I, 23.
144 Proposición I, 15.
145 Noción Común 1.
146 Noción Común 2.

PROPOSICIÓN 30

As paralelas á mesma recta tamén son paralelas entre si.

Sexa cada unha das rectas ΑΒ e ΓΔ paralela a ΕΖ; digo que tamén ΑΒ é paralela a ΓΔ.

Pois ben, incida a recta ΗΚ nelas.



E, dado que a recta ΗΚ incidiu nas rectas paralelas ΑΒ e ΕΖ, logo, o ángulo ΑΗΚ é igual a ΗΘΖ[147].

Por outra parte, dado que a recta ΗΚ incidiu nas rectas paralelas ΕΖ e ΓΔ, o ángulo ΗΘΖ é igual a ΗΚΔ.

Pero foi demostrado tamén que ΑΗΚ é igual a ΗΘΖ. Logo, tamén o ángulo ΑΗΚ é igual a ΗΚΔ[148]; e son alternos.

Logo, ΑΒ é paralela a ΓΔ[149]; o que, xustamente, era preciso demostrar[150].

PROPOSICIÓN 31

Polo[151] punto dado, trazar unha liña recta paralela á recta dada.

Sexa o punto dado Α e a recta dada ΒΓ; é preciso, entón, polo punto Α, trazar unha liña recta paralela á recta ΒΓ.

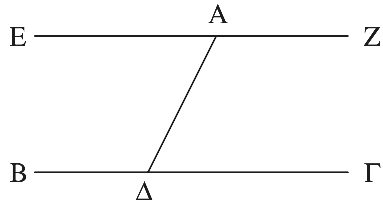
147 Proposición I, 29.

148 Noción Común 1.

149 Proposición I, 27.

150 Por primeira vez quebra o esquema común de todas as proposicións e non aparece nos manuscritos máis fiables para Heiberg a conclusión que repite o enunciado. Ó longo da obra ocorrerá en máis ocasións.

151 Euclides trata de ser moi preciso e a lingua grega é moi rica en matices grazas ó seu sistema de preposicións; o que aquí traducimos «por» é a preposición διά, é dicir, a liña trazada pasa «a través» do punto.



Tómese, sobre a recta ΒΓ, o punto Δ, un calquera, e únase ΑΔ; constrúase o ángulo ΔΑΕ igual a ΑΔΓ na recta ΔΑ e no seu punto Α[152]; e prolónguese a recta ΑΖ en liña recta con ΕΑ[153].

E, dado que a recta ΑΔ, ó incidir nas dúas rectas ΒΓ e ΕΖ, fixo os ángulos alternos, ΕΑΔ e ΑΔΓ, iguais entre si, logo, a recta ΕΑΖ é paralela a ΒΓ[154].

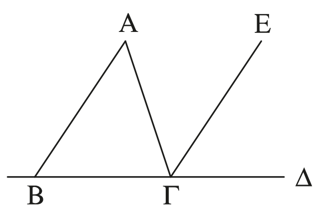
Logo, polo punto dado Α, queda trazada unha liña recta paralela á recta dada ΕΑΖ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 32

De todo triángulo, prolongado un dos lados, o ángulo exterior é igual ós dous interiores e opostos, e os tres ángulos interiores do triángulo son iguais a dous rectos.

Sexa o triángulo ΑΒΓ e prolónguese un lado del, ΒΓ, ata Δ[155]; digo que o ángulo exterior, ΑΓΔ, é igual ós dous interiores e opostos, ΓΑΒ e ΑΒΓ, e os tres interiores do triángulo, ΑΒΓ, ΒΓΑ e ΓΑΒ, son iguais a dous rectos.

Pois ben, polo punto Γ, trácese ΓΕ paralela á recta ΑΒ[156].



[152] Proposición I, 23.
[153] Postulado 2.
[154] Proposición I, 27.
[155] Postulado 2.
[156] Proposición I, 31.

E, dado que AB é paralela a ΓE e que AΓ incidiu nelas, os ángulos alternos, BAΓ e AΓE, son iguais entre si[157].

Por outra parte, dado que AB é paralela a ΓE e que a recta BΔ incidiu nelas, o ángulo exterior EΓΔ é igual ó interior e oposto ABΓ. Pero foi demostrado que tamén AΓE é igual a BAΓ; logo, o ángulo AΓΔ enteiro é igual ós dous interiores e opostos, BAΓ e ABΓ.

Engádase a todos eles o ángulo AΓB; logo, os ángulos AΓΔ e AΓB son iguais ós tres ángulos ABΓ, BΓA e ΓAB.

Pero os ángulos AΓΔ e AΓB son iguais a dous rectos[158]; logo, tamén os ángulos AΓB, ΓBA e ΓAB son iguais a dous rectos.

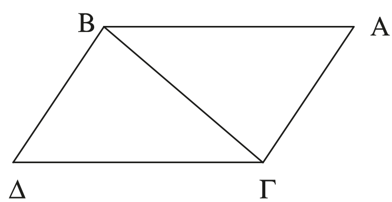
Logo, de todo triángulo, prolongado un dos lados, o ángulo exterior é igual ós dous interiores e opostos, e os tres ángulos interiores do triángulo son iguais a dous rectos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 33

As rectas que unen rectas iguais e paralelas polo mesmo lado[159], tamén son elas mesmas iguais e paralelas.

Sexan as rectas iguais e paralelas AB e ΓΔ e únanas polo mesmo lado as rectas AΓ e BΔ; digo que tamén AΓ e BΔ son iguais e paralelas.

Únase BΓ.



157 Proposición I, 29.

158 Proposición I, 13.

159 μέρη: Nota 135 (Proposición I, 27). Euclides sobreentende que unir dúas rectas quere dicir unilas polos extremos; cando fala de unilas polo mesmo lado estase referindo a unir os extremos que quedan no mesmo lado con respecto a unha recta que incide sobre elas.

E dado que AB é paralela a ΓΔ e que BΓ incidiu nelas, os ángulos alternos ABΓ e BΓΔ son iguais entre si[160].

E, dado que AB é igual a ΓΔ, e BΓ, común, entón as dúas rectas AB e BΓ son iguais ás outras dúas, BΓ e ΓΔ[161]; e o ángulo ABΓ é igual ó ángulo BΓΔ; logo, a base AΓ é igual á base BΔ, o triángulo ABΓ é igual ó triángulo BΓΔ, e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais respectivamente ós demais ángulos[162]; logo, o ángulo AΓB é igual a ΓBΔ.

E, dado que a recta BΓ, ó incidir nas dúas rectas AΓ e BΔ, fixo os ángulos alternos iguais entre si, logo AΓ é paralela a BΔ[163].

Pero foi demostrado que tamén é igual a ela.

Logo, as rectas que unen rectas iguais e paralelas polo mesmo lado, tamén son elas mesmas iguais e paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 34

Dos espazos paralelogramos[164], os lados e os ángulos opostos son iguais entre si e a diagonal[165] córtaos á metade.

Sexa o espazo paralelogramo AΓΔB e a súa diagonal BΓ; digo que os lados e os ángulos opostos do paralelogramo[166] AΓΔB son iguais entre si e que a diagonal BΓ o corta á metade.

---

160 Proposición I, 29.

161 Mantemos a orde das rectas tal como aparece no texto fixado por Heiberg. As dúas rectas AB e BΓ son iguais respectivamente ás outras dúas, ΓΔ e BΓ.

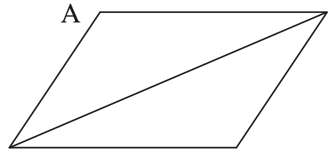
162 Proposición I, 4.

163 Proposición I, 27.

164 παραλληλόγραμμον: «comprendido por liñas paralelas». Na tradución optamos por manter a palabra composta grega que pasou ás linguas modernas —segundo Proclo, creada por Euclides a semellanza de εὐθύγραμμος, «comprendido por liñas rectas».

165 A palabra que utiliza Euclides é διάμετρος, a mesma que para as circunferencias. Igual que noutros casos, nas linguas modernas, os helenismos sufriron cambios semánticos, ás veces, como aquí, restrinxindo o seu significado; o diámetro —orixinariamente un adxectivo que cualifica a γραμμή, «liña que mide polo medio»— utilízase nas linguas modernas só para a circunferencia, mentres que para as figuras rectilíneas utilizouse «diagonal» (Proposición XI, 28: διαγώνιος, «liña que vai de ángulo a ángulo nun plano dun sólido paralelepípedo e nun cubo»).

166 A partir de aquí xa prescinde do substantivo «espazo», substantivando o adxectivo «paralelogramo». O mesmo procedemento utilizou cando empezou falando de



Pois ben, dado que AB é paralela a ΓΔ e a recta BΓ incidiu nelas, os ángulos alternos ABΓ e BΓΔ son iguais entre si[167].

Por outra parte, dado que AΓ é paralela a BΔ e que BΓ incidiu nelas, os ángulos alternos, AΓB e ΓBΔ, son iguais entre si.

Entón, ABΓ e BΓΔ son dous triángulos cos dous ángulos dun, ABΓ e BΓA, iguais respectivamente ós dous ángulos do outro, BΓΔ e ΓBΔ, e un lado dun igual a un lado do outro, o dos ángulos iguais[168], común a eles, BΓ; logo, tamén terán os demais lados dun iguais respectivamente ós demais lados do outro e o ángulo restante dun ó ángulo restante do outro[169]; logo, o lado AB igual a ΓΔ; AΓ a BΔ e, ademais, o ángulo BAΓ é igual a ΓΔB.

E, dado que o ángulo ABΓ é igual a BΓΔ e ΓBΔ a AΓB, logo, o ángulo ABΔ enteiro é igual a AΓΔ enteiro[170].

Pero tamén foi demostrado que BAΓ é igual a ΓΔB.

Logo, dos espazos paralelogramos, os lados e os ángulos opostos son iguais entre si.

Entón, digo que tamén a diagonal os corta á metade. Pois, dado que AB é igual a ΓΔ, e BΓ, común, entón as dúas, AB e BΓ, son iguais respectivamente ás outras dúas, ΓΔ e BΓ; e o ángulo ABΓ é igual a BΓΔ. Logo, tamén a base[171] AΓ é igual a ΔB e o triángulo ABΓ é igual ó triángulo BΓΔ[172].

Logo, a diagonal BΓ corta á metade o paralelogramo ABΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

εὐθεῖα γραμμή (Definición I, 4) «liña recta» e despois xa só εὐθεῖα (Definición I, 10), ou con (εὐθεῖα) παράλληλος.

[167] Proposición I, 29.

[168] Nota 126 (Proposición I, 26).

[169] Proposición I, 26.

[170] Noción Común 2: ABΔ é a suma de ABΓ e ΓBΔ; AΓΔ é a suma de BΓΔ e AΓB.

[171] Refírese á base do triángulo ABΓ que se forma xunto co BΓΔ ó dividir o paralelogramo pola diagonal. Na proposición que segue xa fala de base dun paralelogramo.

[172] Proposición I, 4.

PROPOSICIÓN 35[173]

Os paralelogramos que están sobre[174] a mesma[175] base e entre as mesmas paralelas son iguais[176] entre si.

Sexan ΑΒΓΔ e ΕΒΓΖ os paralelogramos sobre a mesma base, ΒΓ, e entre as mesmas paralelas, ΑΖ e ΒΓ; digo que ΑΒΓΔ é igual ó paralelogramo ΕΒΓΖ.

Pois ben, dado que ΑΒΓΔ é un paralelogramo, o lado ΑΔ é igual a ΒΓ[177].

---

[173] Segundo Proclo, este é o primeiro τοπικόν θεώρημα ou *locus teorema* que presenta Euclides, un dos tres escritores —xunto con Pappo e Eutocio— que sentaron as bases da concepción dos *loci* en xeometría. Un lugar xeométrico é o «conxunto de puntos» que satisfán determinadas propiedades xeométricas.

[174] Aquí fala, por primeira vez, de base dos paralelogramos, especificando que é o lado *sobre* —ἐπί— o que está a figura. Unha vez máis o valor local das preposicións recollendo matices que despois se van diluíndo —a base non é sempre o lado sobre o que se constrúe a figura.

[175] As catro proposicións seguintes son paralelas dúas a dúas, partindo da distinción en grego de dúas palabras que en certos contextos poden ter significados próximos, pero que aquí deben distinguirse ben: ἡ αὐτῆ / ἡ ἴση (βάσις): a mesma (non outra) / igual (pero outra) (base). As proposicións I, 35 e I, 36 refírense ós paralelogramos e as proposicións I, 37 e I, 38, ós triángulos.

«Os paralelogramos que están sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas son iguais entre si» (Proposición I, 35) e «Os paralelogramos que están sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas, son iguais entre si» (Proposición I, 36). «Os triángulos que están sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas son iguais entre si» (Proposición I, 37) e «Os triángulos que están sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas son iguais entre si» (Proposición I, 38). Por outra parte, estas catro proposicións mostran como paralelogramos e triángulos con distinto perímetro poden ter a mesma superficie. Comenta Proclo que era este un principio descoñecido na antigüidade por moitos xeógrafos que comparaban as áreas de cidades a partir do seu perímetro.

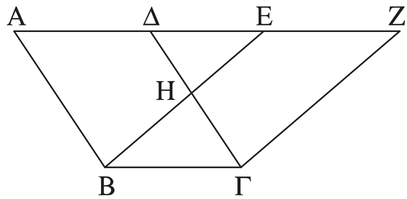
A Proposición I, 39 é o recíproco da Proposición I, 37 e a Proposición I, 40 o recíproco da Proposición I, 38. «Os triángulos iguais que están sobre a mesma base e no mesmo lado, tamén están entre as mesmas paralelas» (Proposición I, 39) e «Os triángulos iguais que están sobre bases iguais e no mesmo lado tamén están entre as mesmas paralelas» (Proposición I, 40).

Heiberg, baseándose nos fragmentos en papiro, considera que toda a Proposición I, 40, que aparece nos manuscritos sen dúbidas sobre a súa autenticidade, é unha interpolación para cadrar o paralelismo a partir da Proposición I, 35.

Chama a atención que Euclides non incluíra o recíproco das proposicións I, 35 e I, 36 para os que podería utilizar razoamentos similares ós das proposicións I, 39 e I, 40 ou dividir os paralelogramos pola diagonal e utilizar a Proposición I, 34 xunto coas proposicións I, 39 ou I, 40, respectivamente.

[176] É significativo aquí ter en conta que παραλληλόγραμμον estase referindo ó χωρίον —Proposición I, 34—, é dicir, son iguais os espazos, superficies ou áreas comprendidas entre paralelas. Ata este momento o concepto de triángulos iguais estaba restrinxido a «dous triángulos que superpostos cadran». Na Proposición I, 37 tamén falará da igualdade de triángulos neste mesmo sentido de «triángulos que ten a mesma superficie».

[177] Proposición I, 34.



Entón, polo mesmo, tamén EZ é igual a BΓ; en consecuencia, tamén AΔ é igual a EZ[178]; e ΔE, común; logo, o lado AE enteiro é igual a ΔZ enteiro[179].

E tamén AB é igual a ΔΓ; entón, os dous lados dun[180], EA e AB, son iguais respectivamente ós dous lados do outro, ZΔ e ΔΓ; e o ángulo ZΔΓ é igual ó ángulo EAB, o exterior ó interior[181]; logo, a base EB é igual á base ZΓ, e o triángulo EAB será igual ó triángulo ΔZΓ[182]; quítese o triángulo ΔHE a ambos; logo, o trapecio restante ABHΔ é igual ó trapecio restante, EHΓZ[183]; engádase a ambos o triángulo HBΓ; logo, o paralelogramo ABΓΔ enteiro é igual ó paralelogramo EBΓZ enteiro.

Logo, os paralelogramos que están sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 36

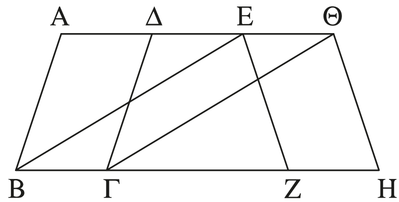
Os paralelogramos que están sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas, son iguais entre si.

Sexan ABΓΔ e EZHΘ os paralelogramos que están sobre bases iguais, BΓ e ZH, e entre as mesmas paralelas, AΘ e BH; digo que o paralelogramo ABΓΔ é igual ó paralelogramo EZHΘ.

---

178 Noción Común 1.
179 Noción Común 2.
180 Está comparando os triángulos ABE e ΔΓZ.
181 Proposición I, 29.
182 Proposición I, 4.
183 Noción Común 3.

Pois ben, trácense ΒΕ e ΓΘ.



E, dado que ΒΓ é igual a ΖΗ, pero ΖΗ é igual a ΕΘ, logo, tamén ΒΓ é igual a ΕΘ[184].

Pero tamén son paralelas. E ΕΒ e ΘΓ únenas; e as rectas que unen rectas iguais e paralelas polo mesmo lado son iguais e paralelas[185].

Logo, ΕΒΓΘ é un paralelogramo[186]. E é igual a ΑΒΓΔ —pois ten a mesma base que el, ΒΓ, e está entre as mesmas paralelas que el, ΒΓ e ΑΘ[187]—; entón, polo mesmo, tamén ΕΖΗΘ é igual ó mesmo ΕΒΓΘ[188]; en consecuencia, tamén o paralelogramo ΑΒΓΔ é igual a ΕΖΗΘ.

Logo, os paralelogramos que están sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

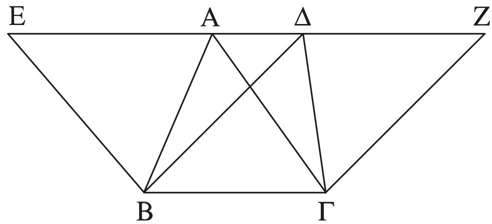
PROPOSICIÓN 37

Os triángulos que están sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas son iguais entre si.

Sexan ΑΒΓ e ΔΒΓ os triángulos sobre a mesma base, ΒΓ, e entre as mesmas paralelas, ΑΔ e ΒΓ; digo que o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΔΒΓ.

---

184 Noción Común 1.
185 Proposición I, 33.
186 Nota 164 (Proposición I, 34).
187 Proposición I, 35.
188 Está aplicando a Proposición I, 35 tomando como base ΕΘ.



Prolónguese a recta AΔ en ambos sentidos ata E e Z[189], trácese BE paralela a ΓA por B e trácese ΓZ paralela a BΔ por Γ[190]. Logo, un e outro, EBΓA e ΔBΓZ, son paralelogramos.

E son iguais; pois están sobre a mesma base, BΓ, e entre as mesmas paralelas, BΓ e EZ[191]; e o triángulo ABΓ é unha metade do paralelogramo EBΓA —pois a diagonal AB córtao á metade[192]—, mentres que o triángulo ΔBΓ é unha metade do paralelogramo ΔBΓZ —pois a diagonal ΔΓ córtao á metade.

Logo, o triángulo ABΓ é igual ó triángulo ΔBΓ[193].

Logo, os triángulos que están sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 38

Os triángulos que están sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas son iguais entre si.

Sexan ABΓ e ΔEZ os triángulos sobre bases iguais, BΓ e EZ, e entre as mesmas paralelas, BZ e AΔ; digo que o triángulo ABΓ é igual ó triángulo ΔEZ.

Pois ben, prolónguese AΔ en ambos sentidos ata H e Θ[194], trácese BH paralela a ΓA por B[195], e trácese ZΘ paralela a ΔE por Z.

---

189 Postulado 2.

190 Proposición I, 31.

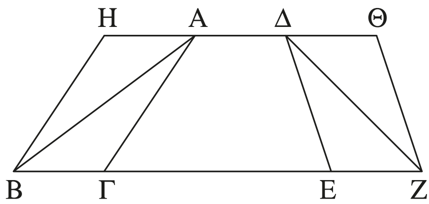
191 Proposición I, 35.

192 Proposición I, 34.

193 Variante da Noción Común 6. A diferenza é o matiz indicado na Nota 175 (Proposición I, 35): ἴσος / αυτός —igual (pero outra) / a mesma (non outra).

194 Postulado 2.

195 Proposición I, 31.



Logo, un e outro, ΗΒΓΑ e ΔΕΖΘ, son paralelogramos.

E ΗΒΓΑ é igual a ΔΕΖΘ —pois están sobre bases iguais, ΒΓ e ΕΖ, e entre as mesmas paralelas, ΒΖ e ΗΘ[196]—; e o triángulo ΑΒΓ é unha metade do paralelogramo ΗΒΓΑ —pois a diagonal ΑΒ córtao á metade[197]—; mentres que o triángulo ΖΕΔ é unha metade do paralelogramo ΔΕΖΘ —pois a diagonal ΔΖ córtao á metade.

Logo, o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΔΕΖ[198].

Logo, os triángulos que están sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 39

Os triángulos iguais que están sobre a mesma base e no mesmo lado tamén están entre as mesmas paralelas.

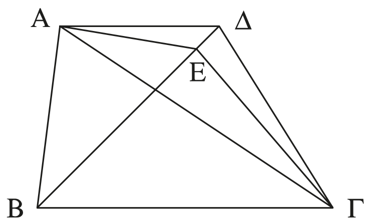
Sexan ΑΒΓ e ΔΒΓ os triángulos iguais que están sobre a mesma base, ΒΓ, e no mesmo lado dela; digo que tamén están entre as mesmas paralelas[199].

Pois ben, únase ΑΔ; digo que ΑΔ é paralela a ΒΓ.

Pois se non, trácese ΑΕ paralela á recta ΒΓ polo punto Α[200] e únase ΕΓ.

Logo o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΕΒΓ —pois está sobre a mesma base que el, ΒΓ, e entre as mesmas paralelas[201].

196 Proposición I, 36.
197 Proposición I, 34.
198 Variante da Noción Común 6. Véxase Nota 193 (Proposición I, 37).
199 Heiberg considera esta frase unha interpolación a partir dun fragmento de papiro.
200 Proposición I, 31.
201 Proposición I, 37.



Pero ΑΒΓ é igual a ΔΒΓ; logo, tamén ΔΒΓ é igual a ΕΒΓ[202], o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible[203]; logo, non é paralela ΑΕ a ΒΓ.

De xeito semellante, poderemos demostrar que ningunha outra o é excepto ΑΔ; logo, ΑΔ é paralela a ΒΓ.

Logo, os triángulos iguais que están sobre a mesma base e no mesmo lado tamén están entre as mesmas paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

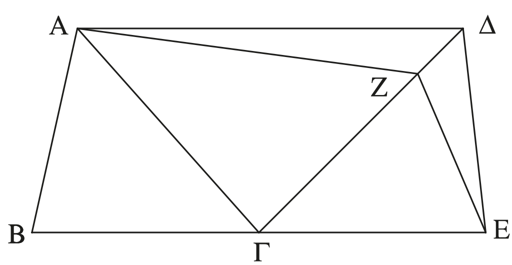
PROPOSICIÓN 40

Os triángulos iguais que están sobre bases iguais e no mesmo lado tamén están entre as mesmas paralelas.

Sexan ΑΒΓ e ΓΔΕ os triángulos iguais sobre bases iguais e no mesmo lado; digo que tamén están entre as mesmas paralelas.

Pois ben, únase ΑΔ; digo que ΑΔ é paralela a ΒΕ.

Pois se non, trácese ΑΖ paralela a ΒΕ por Α[204] e únase ΖΕ.



[202] Noción Común 1.
[203] Noción Común 8.
[204] Proposición I, 31.

Logo, o triángulo ΑΒΓ é igual a ΖΓΕ —pois están sobre bases iguais, ΒΓ e ΓΕ, e entre as mesmas paralelas, ΒΕ e ΑΖ[205].

Pero o triángulo ΑΒΓ é igual a ΔΓΕ; logo, tamén ΔΓΕ é igual ó triángulo ΖΓΕ[206], o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible[207]; logo, non é paralela ΑΖ a ΒΕ.

De xeito semellante, poderemos demostrar que ningunha outra o é excepto ΑΔ; logo, ΑΔ é paralela a ΒΕ.

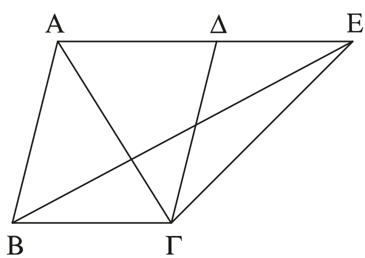
Logo, os triángulos iguais que están sobre bases iguais e no mesmo lado tamén están entre as mesmas paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 41

Se un paralelogramo ten a mesma base que un triángulo e está entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobre que o triángulo.

Pois ben, teña o paralelogramo ΑΒΓΔ a mesma base ΒΓ que o triángulo ΕΒΓ e estea entre as mesmas paralelas, ΒΓ e ΑΕ; digo que o paralelogramo ΑΒΓΔ é o dobre que o triángulo ΒΕΓ.

Pois ben, únase ΑΓ.



Entón o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΕΒΓ —pois está sobre a mesma base que el, ΒΓ, e entre as mesmas paralelas, ΒΓ e ΑΕ[208].

[205] Proposición I, 38.
[206] Noción Común 1.
[207] Noción Común 8.
[208] Proposición I, 37.

Pero o paralelogramo ΑΒΓΔ é o dobre que o triángulo ΑΒΓ —pois a diagonal ΑΓ córtao á metade[209]—; en consecuencia, o paralelogramo ΑΒΓΔ tamén é o dobre que o triángulo ΕΒΓ.

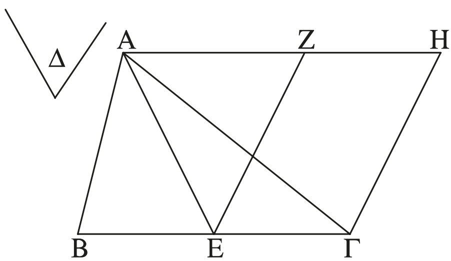
Logo, se un paralelogramo ten a mesma base que un triángulo e está entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobre que o triángulo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 42

Construír un paralelogramo igual ó triángulo dado no ángulo rectilíneo dado.

Sexa o triángulo dado ΑΒΓ e o ángulo rectilíneo dado Δ; é preciso, entón, construír un paralelogramo igual ó triángulo ΑΒΓ no ángulo rectilíneo Δ.

Córtese á metade[210] ΒΓ por Ε, únase ΑΕ, constrúase na recta ΕΓ e no seu punto Ε o ángulo ΓΕΖ igual ó ángulo Δ[211] e, por Α, trácese ΑΗ paralela a ΕΓ[212], mentres que por Γ trácese ΓΗ paralela a ΕΖ; logo, ΖΕΓΗ é un paralelogramo.



E, dado que ΒΕ é igual a ΕΓ, tamén é igual o triángulo ΑΒΕ ó triángulo ΑΕΓ —pois están sobre bases iguais, ΒΕ e ΕΓ, e entre as mesmas paralelas, ΒΓ e ΑΗ[213]—; logo, o triángulo ΑΒΓ é o dobre que o triángulo ΑΕΓ.

---

[209] Proposición I, 34.
[210] Proposición I, 10.
[211] Proposición I, 23.
[212] Proposición I, 31.
[213] Proposición I, 38.

Pero tamén o paralelogramo ΖΕΓΗ é o dobre que o triángulo ΑΕΓ —pois ten a mesma base que el e está entre as mesmas paralelas que el[214].

Logo, o paralelogramo ΖΕΓΗ é igual ó triángulo ΑΒΓ. E ten o ángulo ΓΕΖ igual ó dado, Δ.

Logo, queda construído o paralelogramo ΖΕΓΗ igual ó triángulo ΑΒΓ dado, no ángulo ΓΕΖ que é igual a Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 43

De todo paralelogramo, os complementos*[215] *dos paralelogramos que están ós lados da diagonal son iguais entre si.

Sexa o paralelogramo ΑΒΓΔ e a súa diagonal ΑΓ e, ós lados de ΑΓ, sexan os paralelogramos[216] ΕΘ e ΖΗ, e ΒΚ e ΚΔ, os chamados[217] complementos; digo que o complemento ΒΚ é igual ó complemento ΚΔ.

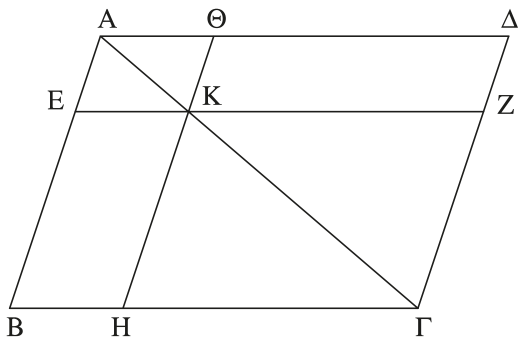
---

214 Proposición I, 41.

215 παραπληρώματα: segundo o comentario de Proclo, estes *complementos*, espazos sobrantes ó formar paralelogramos a partir dun punto da diagonal, con liñas paralelas ós lados do paralelogramo inicial, son unha noción coñecida no tempo de Euclides, pero de uso técnico. Proclo comenta que Euclides non necesita dar a definición formal de complemento pois o nome ven suxerido polo feito de que son os complementos dos paralelogramos que están ós lados da diagonal. Incluso fai extensible o comentario ós dous casos en que eses paralelogramos que están ós lados da diagonal non están determinados por dúas liñas paralelas ós lados do paralelogramo orixinal que se cortan na diagonal. No caso en que as diagonais dos paralelogramos que están ós lados da diagonal sumen menos que a diagonal do paralelogramo orixinal, entón os complementos son dúas figuras iguais de cinco lados. No caso en que as diagonais dos paralelogramos que están ós lados da diagonal sumen máis que a diagonal do paralelogramo orixinal, entón Proclo dá unha definición inexacta dos complementos.

216 Ata agora identificaba os paralelogramos polas letras dos catro vértices. Nesta proposición nomea, por primeira vez, un paralelogramo mediante dous vértices opostos. Nas proposicións que seguen utiliza varias veces esta opción que converterá en usual no resto dos *Elementos*.

217 Desta expresión λεγόμενα, «chamados», dedúcese que era xa un concepto coñecido porque xa tiña nome. Ademais o desenvolvemento do método de «aplicación de áreas» acadado polos Pitagóricos non sería posible sen un coñecemento profundo dos complementos.



Pois ben, dado que ΑΒΓΔ é un paralelogramo e ΑΓ a súa diagonal, o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΑΓΔ[218].

Por outra parte, dado que ΕΘ é un paralelogramo e que ΑΚ é a súa diagonal, o triángulo ΑΕΚ é igual ó triángulo ΑΘΚ.

Polo mesmo, entón, tamén o triángulo ΚΖΓ é igual a ΚΗΓ.

Logo, dado que o triángulo ΑΕΚ é igual ó triángulo ΑΘΚ, mentres que o triángulo ΚΖΓ é igual a ΚΗΓ, o triángulo ΑΕΚ xunto con ΚΗΓ é igual ó triángulo ΑΘΚ xunto con ΚΖΓ[219]; e tamén o triángulo ΑΒΓ enteiro é igual a ΑΔΓ enteiro; logo, o complemento restante ΒΚ é igual ó complemento restante ΚΔ[220].

Logo, de todo espazo paralelogramo, os complementos dos paralelogramos que están ós lados da diagonal son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 44

Na recta dada, aplicar[221] un paralelogramo igual ó triángulo dado no ángulo rectilíneo dado.

---

[218] Proposición I, 34.

[219] Noción Común 2.

[220] Noción Común 3.

[221] A primeira vez que aparece este verbo, παραβάλλω, que significa «botar ó longo de». Enténdese, construír unha figura ó longo dunha recta. Nótese como calquera das traducións que deamos perderá a plasticidade do termo grego. Euclides introduce nesta proposición o método de «aplicación de áreas» consistente nunha serie de técnicas que permitían construír unha área determinada cun lado sobre unha liña dada. Deste método proceden os nomes das cónicas (παραβολή «parábola», ὑπερβολη «hipérbole» e ἔλλειψις «elipse»). Se o lado coincide coa recta, entón dise que aplicamos (παραβάλλω) dita área; se o lado é maior que a recta, dicimos que sae da liña ou que excede a liña (ὑπερβάλλω) —Proposición VI, 29—; e cando é menor dicimos que lle falta (ἐλλείπω) —Proposición VI,

Sexa a recta dada AB, o triángulo dado Γ e o ángulo rectilíneo dado Δ; é preciso, entón, aplicar na recta dada, AB, un paralelogramo igual ó triángulo dado, Γ, nun ángulo igual a Δ.

Constrúase o paralelogramo BEZH igual ó triángulo Γ, no ángulo EBH que é igual a Δ[222]; póñase de xeito que BE estea en liña recta con AB[223], lévese ZH ata Θ, trácese, por A, AΘ paralela a unha das dúas, BH ou EZ[224], e únase ΘB.

E, dado que a recta ΘZ incidiu nas paralelas AΘ e EZ, logo, os ángulos AΘZ e ΘZE son iguais a dous rectos[225].

Logo, os ángulos BΘH e HZE son menores que dous rectos; e as rectas prolongadas ó infinito dende ángulos menores que dous rectos atópanse[226]; logo, se se prolongan ΘB e ZE atoparanse.

Prolónguense e atópense en K; trácese KΛ, polo punto K, paralela a unha das dúas, EA ou ZΘ, e prolónguense ΘA e HB ata os puntos Λ e M.

Logo, ΘΛKZ é un paralelogramo, ΘK a súa diagonal, AH e ME paralelogramos ós lados de ΘK, e ΛB e BZ os chamados complementos; logo, ΛB é igual a BZ[227].

28—. Nótese que o método utilizado na demostración permite aplicar na recta dada un paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada no ángulo rectilíneo dado, dividindo a figura en triángulos, tal como se pon de manifesto na Proposición I, 45.

222 Proposición I, 42.

223 Euclides non explica os pasos que hai que dar para poder facer esta construción que tampouco é consecuencia directa da Proposición I, 42 pois esta permite construír un paralelogramo sobre unha recta, prolongación de AB, igual a un triángulo dado no ángulo rectilíneo dado. Para elo temos que construír previamente un triángulo igual ó de partida cun lado sobre esa prolongación. Ademais, para que o ángulo dado coincida no punto B, é necesario que B coincida co punto medio dese lado do triángulo.

Para obter dito paralelogramo, podemos seguir os seguintes pasos:

1) O Postulado 2 permite prolongar AB nos dous sentidos.

2) A Proposición I, 22 permite construír sobre a recta infinita que contén AB un triángulo igual a Γ. Se, ademais, utilizamos a Proposición I, 3 e a Proposición I, 10 coordinadamente coa Proposición I, 22 podemos construír ese triángulo de forma que B coincida co punto medio do lado que se apoia na recta infinita que contén AB.

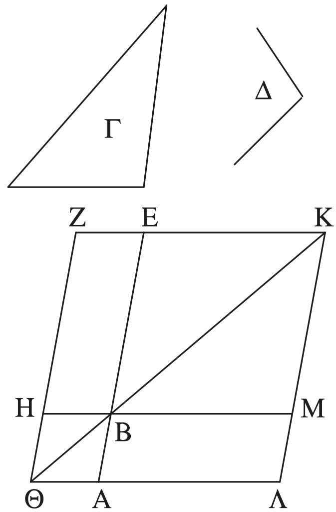
3) Desta forma a construción da Proposición I, 42 permite construír un paralelogramo BEZH igual ó triángulo Γ, no ángulo EBH que é igual a Δ, e de xeito que BE estea en liña recta con AB.

224 Proposición I, 31. «Unha das dúas», no texto grego, pero, dado que esas dúas son paralelas entre si, sería paralela ás dúas.

225 Proposición I, 29.

226 Postulado 5.

227 Proposición I, 43.



Pero BZ é igual ó triángulo Γ; logo, tamén ΛB é igual a Γ[228].

E, dado que o ángulo HBE é igual a ABM[229], mentres que HBE é igual a Δ, logo, tamén ABM é igual ó ángulo Δ[230].

Logo, na recta dada AB queda aplicado o paralelogramo ΛB igual ó triángulo dado Γ, no ángulo ABM que é igual a Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 45

Construír un paralelogramo igual á figura rectilínea*[231] *dada no ángulo rectilíneo dado.

Sexa a figura rectilínea dada ABΓΔ[232] e o ángulo rectilíneo dado, E; é preciso, entón, construír un paralelogramo igual á figura rectilínea ABΓΔ no ángulo dado, E.

228 Noción Común 1.

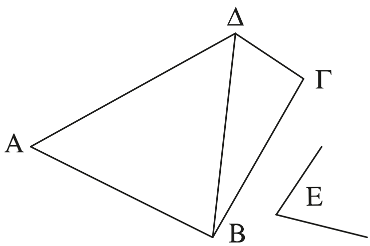
229 Proposición I, 15.

230 Noción Común 1.

231 Ata aquí εὐθύγραμμον sempre se usara como adxectivo cualificando a un tipo de σχήματα, «figuras», (Definición I, 19) ou de ángulos (a partir da Definición I, 9 en numerosas proposicións, por exemplo, nesta mesma frase). Aquí o contexto deixa claro que non se refire a ángulo, senón a unha figura ou, tal e como fixo con παραλληλόγραμμον, a χωρίον «espazo».

232 Nesta proposición, Euclides formula un enunciado xeral para calquera figura rectilínea e limita a demostración ó caso en que a figura é un cuadrilátero sen ningún comentario

Únase ΔΒ e constrúase o paralelogramo ΖΘ igual ó triángulo ΑΒΔ no ángulo ΘΚΖ que é igual a Ε[233]; e aplíquese na recta ΗΘ o paralelogramo ΗΜ igual ó triángulo ΔΒΓ no ángulo ΗΘΜ, que é igual a Ε[234].



E, dado que o ángulo Ε é igual tanto a ΘΚΖ como a ΗΘΜ, tamén, logo, o ángulo ΘΚΖ é igual a ΗΘΜ[235].

Engádase ós dous o ángulo ΚΘΗ; logo, os ángulos ΖΚΘ e ΚΘΗ son iguais a ΚΘΗ e ΗΘΜ.

Pero os ángulos ΖΚΘ e ΚΘΗ son iguais a dous rectos[236]; logo, tamén os ángulos ΚΘΗ e ΗΘΜ son iguais a dous rectos.

Entón, coa recta ΗΘ e no seu punto Θ, as dúas rectas, ΚΘ e ΘΜ, que non están polo mesmo lado, fan os ángulos adxacentes iguais a dous rectos; logo, ΚΘ está en liña recta con ΘΜ[237]; e, dado que a recta ΘΗ incidiu nas paralelas ΚΜ e ΖΗ, os ángulos alternos, ΜΘΗ e ΘΗΖ, son iguais entre si[238].

Engádase a ambos o ángulo ΘΗΛ; logo, os ángulos ΜΘΗ e ΘΗΛ son iguais a ΘΗΖ e ΘΗΛ[239].

---

para o caso xeral. Porén, debe entenderse que dá por feito que a solución ó enunciado xeral é consecuencia de dividir a figura rectilínea en triángulos e aplicar reiteradamente a segunda parte da construción. Isto mesmo pasa noutros moitos casos, como na Proposición II, 14 cando fala de cortar unha recta nun número calquera de segmentos e só fai a proba cando a corta en dous puntos.

233 Proposición I, 42.

234 Proposición I, 44.

235 Noción Común 1.

236 Proposición I, 29.

237 Proposición I, 14.

238 Proposición I, 29.

239 Noción Común 2.

Pero os ángulos ΜΘΗ e ΘΗΛ son iguais a dous rectos[240]; logo, tamén os ángulos ΘΗΖ e ΘΗΛ son iguais a dous rectos[241].

Logo, ΖΗ está en liña recta con ΗΛ.

E, dado que ΖΚ é igual e paralela a ΘΗ, pero tamén ΘΗ a ΜΛ, logo, tamén ΚΖ é igual e paralela a ΜΛ[242]; e as rectas ΚΜ e ΖΛ únenas; logo ΚΜ e ΖΛ son iguais e paralelas[243]; logo, ΚΖΛΜ é un paralelogramo.

E dado que o triángulo ΑΒΔ é igual ó paralelogramo ΖΘ, mentres que ΔΒΓ a ΗΜ, logo, a figura rectilínea ΑΒΓΔ enteira é igual ó paralelogramo ΚΖΛΜ enteiro.

Logo, queda construído o paralelogramo ΚΖΛΜ, igual á figura rectilínea dada ΑΒΓΔ, no ángulo ΖΚΜ que é igual ó ángulo dado Ε; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 46

Debuxar*[244] *un cadrado a partir da recta dada.

Sexa a recta dada ΑΒ; é preciso, entón, debuxar un cadrado a partir da recta ΑΒ.

Trácese ΑΓ en ángulo recto[245] coa recta ΑΒ dende o seu punto Α[246] e póñase ΑΔ igual a ΑΒ; e, polo punto Δ, trácese ΔΕ paralela a ΑΒ, mentres que, polo punto Β, trácese ΒΕ paralela a ΑΔ[247].

---

240 Proposición I, 29.

241 Noción Común 1.

242 Noción Común 1 e Proposición I, 30.

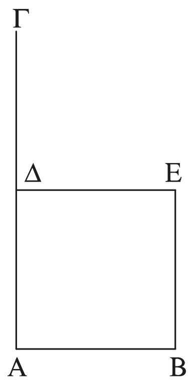
243 Proposición I, 33.

244 O verbo utilizado é ἀναγράφω, un composto de γράφω, «debuxar», empregado sempre para o círculo (Postulado 3, proposicións I, 1; I, 2; ...). Aquí vai complementado co sintagma preposicional ἀπό τῆς εὐθεῖας, «a partir dunha recta». Proclo, nos seus comentarios, sinala como Euclides para construír triángulos e paralelogramos utiliza συνίστημι, mentres que para o cadrado utiliza estoutra expresión que significaría «debuxar repetidamente o lado do que partimos». «Describere» é o termo utilizado na versión latina.

245 Aquí a expresión grega πρός ὀρθάς aínda máis simplificada que na Proposición I, 11, ó omitir ángulo.

246 Proposición I, 11.

247 Proposición I, 31.



Logo, AΔEB é un paralelogramo; logo, AB é igual a ΔE, mentres que AΔ a BE[248].

Pero AB é igual a AΔ; logo, as catro rectas, BA, AΔ, ΔE e EB, son iguais entre si[249]; logo, o paralelogramo AΔEB é equilátero.

Digo agora que tamén é de ángulos rectos[250].

Pois, dado que a recta AΔ incidiu nas paralelas AB e ΔE, logo, os ángulos BAΔ e AΔE son iguais a dous rectos[251].

Pero BAΔ é recto; logo, tamén é recto AΔE.

E os lados e os ángulos opostos dos espazos paralelogramos son iguais entre si[252]; logo, é recto tamén cada un dos ángulos opostos, ABE e BEΔ; logo, é de ángulos rectos AΔEB.

E tamén foi demostrado que é equilátero.

Logo, é un cadrado; e queda debuxado a partir da recta AB; o que, xustamente, era preciso facer.

248 Proposición I, 34.
249 Noción Común 1.
250 ὀρθογώνιον, Definición I, 22.
251 Proposición I, 29.
252 Proposición I, 34.

PROPOSICIÓN 47[253]

Nos triángulos rectángulos, o cadrado do lado[254] *que está tendido baixo o ángulo recto*[255] *é igual ós cadrados dos lados que conteñen o ángulo recto.*

Sexa ΑΒΓ o triángulo rectángulo co ángulo recto ΒΑΓ; digo que o cadrado de ΒΓ é igual ós cadrados de ΒΑ e ΑΓ[256].

---

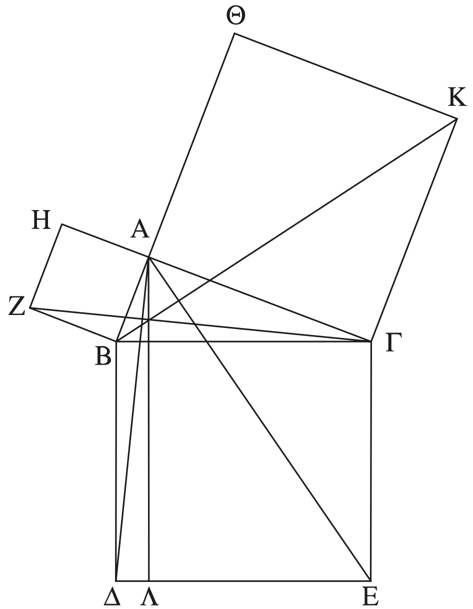
[253] Estamos ante o denominado Teorema de Pitágoras, seguramente o resultado de certo nivel matemático máis coñecido por persoas con formación básica. Atribúese a Pitágoras (580 a. C. - 500 a. C.) e á escola pitagórica a súa demostración. Non cabe dúbida de que as civilizacións máis antigas (Mesopotamia, Exipto, India, China) xa coñecían esta relación estre os lados dun triángulo rectángulo, a lo menos dende o punto de vista práctico. As poucas dúbidas que puideran existir quedan esgotadas co descifrado por Neugebauer e Sach en 1945 da taboíña de arxila *Plimpton 322*. Esta taboíña de 13x9 cm. e dun grosor de 2 cm. en escritura cuneiforme está depositada na Universidade de Columbia e está datada entre 1.900 e 1.600 a. C., é dicir, 1.300 anos antes de que Pitágoras vivira. A taboíña *Plimpton 322* confirma que os habitantes de Mesopotamia xa empregaban os triplos pitagóricos, triplos de números (a, b, c) que cumpren a «relación de Pitágoras» $a^2 + b^2 = c^2$, para calcular os lados dun triángulo rectángulo. É coñecido o uso dos triángulos e triplos pitagóricos por outras civilizacións, tal como se indica nalgunhas taboíñas e papiros, pero non subsistiu ningún documento que expoña o resultado dende un punto de vista xeral e tampouco hai constancia de que as regras prácticas para o seu cálculo procederan de demostracións xerais. A primeira proba xeral do teorema parece que pode deberse a Pitágoras, sistematizando a relación entre a hipotenusa e os catetos dun triángulo rectángulo. Quizais foi Euclides o primeiro en facer unha demostración xeométrica do Teorema de Pitágoras e en todo caso, tal como afirma Proclo (com. 426, 6): «Se escoitamos ós que lles gusta contar cousas antigas, encontraremos que atribúen este teorema a Pitágoras e din que sacrificou un boi polo seu descubrimento. Pola miña parte, aínda que admiro ós que primeiro coñeceron este teorema, máis me marabilla o autor dos *Elementos*, non só por establecelo mediante unha clara demostración senón por ter sentado unha proposición aínda máis xeral coas probas irrefutables da ciencia no Libro sexto. Neste libro dá unha proba xeral de que, nun triángulo rectángulo, a figura sobre o lado oposto ó ángulo recto é igual ás figuras semellantes e situadas de modo semellante construídas sobre os lados que conteñen o ángulo recto». Refírese Proclo á Proposición 31 do Libro VI.

[254] A Proposición 46 presentaba a construción do cadrado a partir dunha recta dada —Nota 244 (Proposición I, 46)—; a partir de aí, simplifica a expresión: *τὸ τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς*, «o cadrado (construído a partir) do lado», e máis adiante xa só a preposición *ἀπὸ* e as letras que definen a recta, *τὸ ἀπὸ* ΒΑ *τετράγωνον*. É un procedemento lingüístico utilizado en repetidas ocasións por Euclides de xeito que vai configurando un conxunto de expresións braquilóxicas que teñen sentido no contexto dos *Elementos*. Ó pasar o tempo vaise perdendo a noción que había detrás e un profano descoñece que o cadrado da hipotenusa quere dicir realmente «o cadrado que se constrúe sobre o lado que está fronte ó ángulo recto dun triangulo rectángulo». Algo similar ocorreu coa denominación máis frecuente dos ángulos —da expresión completa á braquiolóxica, véxase Nota 36 (Proposición I, 4).

[255] A hipotenusa, xa que se trata dun triángulo rectángulo.

[256] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

Pois ben, debúxese a partir de ΒΓ o cadrado ΒΔΕΓ[257] e, a partir de ΒΑ e ΑΓ, ΗΒ e ΘΓ[258], e por Α, trácese ΑΛ paralela a unha das dúas, ΒΔ ou ΓΕ[259]; e trácense ΑΔ e ΖΓ[260].



E, dado que cada un dos ángulos ΒΑΓ e ΒΑΗ é recto, entón, nunha recta ΒΑ e no seu punto Α, as dúas rectas ΓΑ e ΑΗ que non están polo mesmo lado fan os ángulos adxacentes iguais a dous rectos; logo, ΓΑ está en liña recta con ΑΗ[261].

Entón, polo mesmo, tamén ΒΑ está en liña recta con ΑΘ.

E, dado que o ángulo ΔΒΓ é igual a ΖΒΑ —pois un e outro son rectos—, engádase a ambos o ángulo ΑΒΓ; logo, o ángulo ΔΒΑ enteiro é igual a ΖΒΓ enteiro[262].

---

257 Proposición I, 46.

258 Sobreenténdese «cadrados»; acaba de denominar un cadrado con catro letras e inmediatamente xa só con dúas.

259 Proposición I, 31.

260 Postulado 1.

261 Proposición I, 14.

262 Noción Común 2.

E, dado que ΔB é igual a BΓ, mentres que ZB a BA, logo, os dous lados, ΔB e BA, son iguais respectivamente a ZB e BΓ; e o ángulo ΔBA é igual ó ángulo ZBΓ; logo, a base AΔ é igual á base ZΓ, o triángulo ABΔ é igual ó triángulo ZBΓ[263], e o paralelogramo BΛ[264] é o dobre que o triángulo ABΔ —pois teñen a mesma base, BΔ, e están entre as mesmas paralelas, BΔ e AΛ[265]—, mentres que o cadrado HB é o dobre que o triángulo ZBΓ —pois, pola súa parte, ten a mesma base ZB e está entre as mesmas paralelas, ZB e HΓ.

Logo, é igual tamén o paralelogramo BΛ ó cadrado HB[266].

De xeito semellante, se unimos AE e BK, poderase demostrar tamén que o paralelogramo ΓΛ é igual ó cadrado ΘΓ[267]; logo, o cadrado BΔEΓ enteiro é igual ós dous cadrados HB e ΘΓ.

E o cadrado BΔEΓ queda debuxado a partir de BΓ, mentres que HB e ΘΓ a partir de BA e AΓ.

Logo, o cadrado do lado BΓ é igual ós cadrados dos lados BA e AΓ.

Logo, nos triángulos rectángulos, o cadrado do lado que está tendido baixo o ángulo recto é igual ós cadrados dos lados que conteñen o ángulo recto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 48

Se, dun triángulo, o cadrado dun dos lados é igual ós cadrados dos dous lados restantes do triángulo, o

[263] Proposición I, 4.

[264] Ata agora sempre lle asignaba unha letra a cada un dos vértices dos paralelogramos que utilizaba nas demostracións aínda que nalgúns casos referíase a eles polas letras de dous vértices opostos. Neste caso para o paralelogramo BΛ, non lle asignou ningunha letra ó vértice oposto a Δ.

[265] Proposición I, 41.

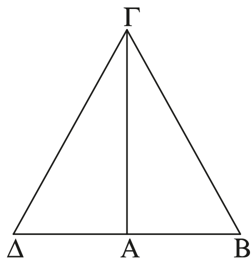
[266] Variante da Noción Común 5. Véxase Nota 193 (Proposición I, 37).

[267] Os triángulos EΓA e KΓB son iguais, pois ΓK e ΓB son iguais a ΓA e ΓE e os ángulos KΓB e EΓA tamén son iguais por ser ambos iguais ó ángulo AΓB mais un recto, e son a metade dos paralelogramos ΓΛ e ΘΓ.

ángulo contido polos dous lados restantes do triángulo é recto.

Pois ben, dun triángulo ΑΒΓ, sexa o cadrado dun lado, ΒΓ, igual ós cadrados dos lados ΒΑ e ΑΓ; digo que o ángulo ΒΑΓ é recto.

Pois ben, trácese, dende o punto Α, a recta ΑΔ en ángulo recto coa recta ΑΓ[268], póñase ΑΔ igual a ΒΑ e únase ΔΓ.



Dado que ΔΑ é igual a ΑΒ, tamén é igual o cadrado de ΔΑ ó cadrado de ΑΒ.

Engádase a ambos o cadrado de ΑΓ; logo, os cadrados de ΔΑ e de ΑΓ son iguais ós cadrados de ΒΑ e ΑΓ.

Pero o cadrado de ΔΓ é igual ós cadrados de ΔΑ e de ΑΓ —pois o ángulo ΔΑΓ é recto[269]—, mentres que o cadrado de ΒΓ é igual ós cadrados de ΒΑ e de ΑΓ —pois suponse[270]—; logo, o cadrado de ΔΓ é igual ó cadrado de ΒΓ[271]; en consecuencia, tamén o lado ΔΓ é igual a ΒΓ; e, dado que ΔΑ é igual a ΑΒ, e ΑΓ, común, por tanto, os dous lados, ΔΑ e ΑΓ, son iguais ós outros dous, ΒΑ e ΑΓ; e a base ΔΓ é igual á base ΒΓ; logo, o ángulo ΔΑΓ é igual ó ángulo ΒΑΓ[272]; e ΔΑΓ é recto; logo, tamén é recto ΒΑΓ.

Logo, se, dun triángulo, o cadrado dun dos lados é igual ós cadrados dos dous lados restantes do triángulo, o ángulo contido polos dous lados restantes do triángulo é recto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[268] Proposición I, 11.
[269] Proposición I, 47.
[270] Nota 129 (Proposición I, 26).
[271] Noción Común 3.
[272] Proposición I, 8.

LIBRO II

DEFINICIÓNS

1. Dise que todo paralelogramo de ángulos rectos está contido polas dúas rectas que conteñen o ángulo recto.
2. De todo espazo paralelogramo chámese gnomon[1] calquera un dos paralelogramos que están ós lados da súa diagonal xunto cos dous complementos.

PROPOSICIÓN 1

Se hai dúas rectas e se corta unha delas en cantos segmentos se queira[2], o paralelogramo de ángulos rectos[3] contido polas dúas rectas é igual ós paralelogramos de ángulos rectos contidos pola recta sen cortar e cada un dos segmentos[4].

Sexan as dúas rectas Α e ΒΓ, e córtese ΒΓ, ó azar, polos puntos Δ e Ε; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido

---

[1] *γνώμον*: adxectivo cuxo significado orixinario é «coñecedor,-a». Heródoto, II, 109,3 é o primeiro que o utiliza para referirse a un tipo de reloxo solar que coñeceron os gregos polos babilonios; baseábase na medición da sombra proxectada por un pau —que se chamaba *γνώμον*— sobre un panel. O termo empregouse máis tarde para nomear un instrumento similar a unha escuadra que se usaba para debuxar ángulos rectos. A partir de aí, pola similitude da forma (L), pasou a designar a figura que queda ó quitar da esquina dun cadrado outro máis pequeno; Euclides amplía este sentido a calquera paralelogramo. Para Aristóteles é a figura que, engadida a un cadrado, aumenta os seus lados pero non altera a forma. Os Pitagóricos usan o termo *γνώμον* e no mesmo sentido que Aristóteles e, en aritmética, para referirse ó número que hai que engadir a un número figurado para pasar ó seguinte da mesma natureza.

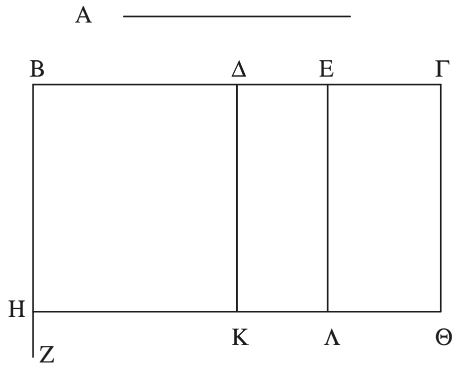
[2] Nesta proposición, tal como xa fixera na Proposición I, 45 para unha figura arbitraria, Euclides fai unha formulación global para calquera número de segmentos e limita a demostración ó caso de tres segmentos sen ningún comentario para o caso xeral, dando por feito que o lector pode repetir o mesmo argumento as veces que sexa necesario.

[3] Euclides, na Definición I, 22, diferencia *ἑτερομήκες*, «rectángulo», de *ὀρθογώνιον*, «de ángulos rectos» —véxase a Nota 9 (Definición I, 22)—. Aquí entendemos que debe sobreentenderse paralelogramo pois a proposición é válida tanto se as dúas rectas son iguais e forman un cadrado, como se son distintas e forman un rectángulo. O mesmo se pode dicir do resto de *ὀρθογώνιον* desta proposición que serán rectángulos ou cadrados dependendo de que as rectas ΒΔ, ΔΕ, ΕΓ sexan iguais ou distintas da recta Α.

[4] Este libro II permite falar da «álxebra xeométrica» dos gregos. As dez primeiras proposicións poden presentarse como a demostración de ecuacións e a Proposición II, 14 permite calcular a «raíz cadrada da área dunha figura rectilínea». Esta Proposición II, 1 corresponde á ecuación alxébrica $a(b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots$, onde a representa unha das rectas e b, c, d, ... os segmentos en que se divide a outra recta.

por A e BΓ[5] é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por A e BΔ mais o contido por A e ΔE, ademais do contido por A e EΓ.

Pois ben, trácese BZ dende B en ángulo recto con BΓ[6], póñase BH igual a A[7] e, por H, trácese HΘ paralela a BΓ[8], mentres que, por Δ, E e Γ, trácense ΔK, EΛ e ΓΘ paralelas a BH.



Por tanto, BΘ[9] é igual a BK, ΔΛ e EΘ. E BΘ é o contido por A e BΓ[10] —pois está contido por HB e BΓ, mentres que BH é igual a A[11]—. E BK é o contido por A e BΔ —pois está contido por HB e BΔ, mentres que BH é igual a A—. E ΔΛ é o contido por A e ΔE —pois ΔK, é dicir, BH, é igual a A—. E, ademais, de xeito semellante, EΘ é o contido por A e EΓ; logo, o contido

5 Definición II, 1.

6 Proposición I, 11.

7 Proposición I, 3.

8 Proposición I, 31.

9 De novo, como no libro I, nomea o paralelogramo coas letras dunha diagonal. O paralelogramo BΘ é igual á suma dos paralelogramos BK, ΔΛ e EΘ. Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

10 Tal e como ocorreu cos ángulos —véxase a Nota 36 (Proposición I, 4)— e cos cadrados —véxase a Nota 254 (Proposición I, 47)— a expresión completa para denominar «o paralelogramo de ángulos rectos contido por ...» vaise substituír pola braquilóxica na que se omite primeiro «paralelogramo de ángulos rectos», —omisión que respectaremos aínda que o recordaremos se consideramos que o texto resulta ambiguo— e finalmente tamén o participio, «contido», quedando tan só o artigo e o sintagma preposicional ὑπό coas letras das rectas, —neste caso engadiremos na tradución o participio «contido».

11 Proposición I, 36.

por A e ΒΓ é igual ó contido por A e ΒΔ máis o contido por A e ΔΕ, ademais do contido por A e ΕΓ.

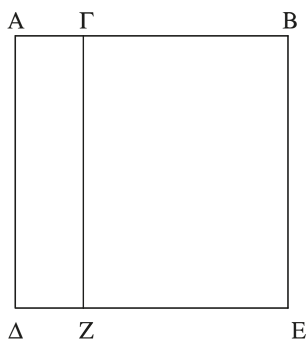
Logo, se hai dúas rectas e se corta unha delas en cantos segmentos se queira, o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dúas rectas é igual ós paralelogramos de ángulos rectos contidos pola recta sen cortar e cada un dos segmentos; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 2

***Se unha liña recta se corta ó azar, o paralelogramo de ángulos rectos*[12] *contido por ela enteira e un dos segmentos xunto co contido por ela enteira e o outro segmento é igual ó cadrado dela enteira*[13].**

Pois ben, córtese a recta ΑΒ, ó azar, polo punto Γ; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΒ e ΒΓ xunto co paralelogramo de ángulos rectos contido por ΒΑ e ΑΓ é igual ó cadrado de ΑΒ.

Pois ben, debúxese o cadrado ΑΔΕΒ a partir de ΑΒ[14] e, por Γ, trácese ΓΖ paralela a unha das dúas, ΑΔ ou ΒΕ[15].



Por tanto, ΑΕ é igual a ΑΖ e ΓΕ. E ΑΕ é o cadrado de ΑΒ, mentres que ΑΖ é o paralelogramo de ángulos rectos contido por

12 Neste caso todos os ὀρθογώνιον son tamén rectángulos.

13 Esta Proposición corresponde á ecuación alxébrica $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$, onde a e b representan os segmentos en que se divide a recta.

14 Proposición I, 46.

15 Proposición I, 31.

BA e AΓ —pois está contido por ΔA e AΓ, mentres que AΔ é igual a AB[16]—; e ΓE é o contido por AB e BΓ —pois BE é igual a AB—. Logo, o contido por BA e AΓ xunto co contido por AB e BΓ é igual ó cadrado de AB.

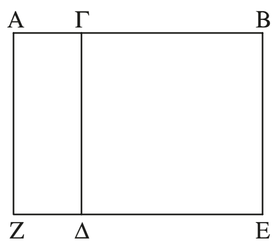
Logo, se unha liña recta se corta ó azar, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos xunto co contido por ela enteira e o outro segmento é igual ó cadrado dela enteira; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 3

Se unha liña recta se corta ó azar, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos mais o cadrado do segmento antedito[17].

Pois ben, córtese a recta AB, ó azar, por Γ; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por AΓ e ΓB xunto co cadrado de BΓ.

Pois ben, debúxese o cadrado ΓΔEB a partir de ΓB[18], lévese EΔ ata Z e, por A, trácese AZ paralela a unha das dúas, ΓΔ ou BE[19].



Por tanto, AE é igual a AΔ e ΓE; e AE é o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ —pois está contido por AB

[16] Proposición I, 36.

[17] Esta Proposición corresponde á ecuación alxébrica $(a + b)b = ab + b^2$, onde a e b representan os segmentos en que se divide a recta.

[18] Proposición I, 46.

[19] Proposición I, 31.

e BE, mentres que BE é igual a BΓ[20]—; e AΔ é o contido por AΓ e ΓB —pois ΔΓ é igual a ΓB—; e ΔB é o cadrado de ΓB; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por AΓ e ΓB xunto co cadrado de BΓ.

Logo, se unha liña recta se corta ó azar, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos mais o cadrado do segmento antedito; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

***Se unha liña recta se corta ó azar, o cadrado dela enteira é igual ós cadrados dos segmentos mais dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos*[21].**

Pois ben, córtese a liña AB, ó azar, por Γ; digo que o cadrado de AB é igual ós cadrados de AΓ e ΓB[22] mais dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por AΓ e ΓB.

Pois ben, debúxese o cadrado AΔEB a partir de AB[23], únase BΔ e trácese ΓZ paralela a unha das dúas, a AΔ ou EB[24], mentres que, por H, trácese ΘK paralela a unha das dúas, a AB ou ΔE.

E, dado que ΓZ é paralela a AΔ e que BΔ incidiu nelas, o ángulo exterior ΓHB é igual ó interior e oposto AΔB[25]. Pero AΔB é igual a ABΔ, dado que tamén o lado BA é igual a AΔ[26]; logo, tamén o ángulo ΓHB é igual a HBΓ; en consecuencia, tamén o

[20] Proposición I, 36.

[21] Esta Proposición corresponde á ecuación alxébrica $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, onde a e b representan os segmentos en que se divide a recta.

[22] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

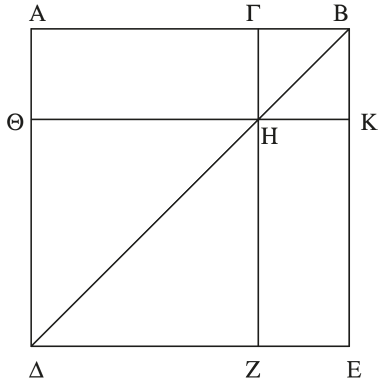
[23] Proposición I, 46.

[24] Proposición I, 31.

[25] Proposición I, 29.

[26] Proposición I, 5.

lado BΓ é igual a ΓH[27]; pero ΓB é igual a HK, mentres que ΓH a KB[28]; logo, tamén HK é igual a KB; logo, ΓHKB é equilátero.



Digo, por tanto, que é tamén de ángulos rectos.

Pois, dado que ΓH é paralela a BK logo, os ángulos KBΓ e HΓB son iguais a dous rectos[29]. Pero KBΓ é recto; logo, tamén é recto BΓH; en consecuencia, tamén os ángulos opostos ΓHK e HKB son rectos[30]. Logo ΓHKB é de ángulos rectos; pero foi demostrado que, tamén, equilátero; logo, é un cadrado; e é cadrado de ΓB. Entón, polo mesmo, tamén ΘZ é un cadrado; e é cadrado de ΘH, é dicir, de AΓ; logo, ΘZ e KΓ son cadrados de AΓ e ΓB.

E, dado que AH é igual a HE[31] e que AH é o contido por AΓ e ΓB[32] —pois HΓ é igual a ΓB[33]— logo, tamén HE é igual ó contido por AΓ e ΓB; logo, AH e HE[34] son iguais ó contido por AΓ e ΓB dúas veces.

---

27 Proposición I, 6.
28 Proposición I, 34.
29 Proposición I, 29.
30 Proposición I, 34.
31 Proposición I, 43.
32 Definición II, 1.
33 Proposición I, 36.
34 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

Pero ΘZ e ΓK son tamén cadrados de AΓ e ΓB. Logo, os catro, ΘZ, ΓK, AH e HE, son iguais ós cadrados de AΓ e ΓB mais o paralelogramo de ángulos rectos contido por AΓ e ΓB dúas veces.

Pero ΘZ, ΓK, AH e HE son AΔEB enteiro, que é o cadrado de AB; logo, o cadrado de AB é igual ós cadrados de AΓ e ΓB mais o paralelogramo de ángulos rectos contido por AΓ e ΓB dúas veces.

Logo, se unha liña recta se corta ó azar, o cadrado dela enteira é igual ós cadrados dos segmentos mais dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos; o que, xustamente, era preciso demostrar[35].

PROPOSICIÓN 5

Se unha liña recta se corta en partes iguais e desiguais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos desiguais dela enteira xunto co cadrado da recta do medio[36] dos cortes é igual ó cadrado da metade[37].

Pois ben, córtese unha recta AB en partes iguais por Γ e en partes desiguais por Δ; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por AΔ e ΔB xunto co cadrado de ΓΔ é igual ó cadrado de ΓB.

Pois ben, debúxese a partir de ΓB o cadrado ΓEZB[38], únase BE e, por Δ, trácese ΔH paralela a unha das dúas, a ΓE ou BZ[39], mentres que, por Θ, trácese KM paralela a unha das dúas, a AB

---

35 Os manuscritos presentan aquí o seguinte corolario: «Por tanto, a partir disto, é evidente que, nos espazos cadrados, os paralelogramos ós lados da diagonal son cadrados». Heiberg confirmou que se trataba dunha interpolación a partir dos fragmentos en papiro do texto de Euclides.

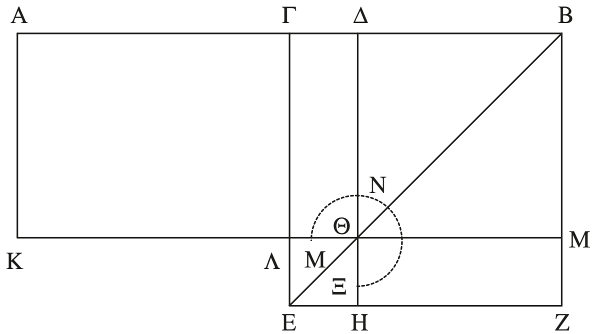
36 Unha vez máis un adverbio con sentido local, μεταξύ, para cualificar, neste caso, unha recta —véxase a Nota 4 (Definición I, 10).

37 Esta Proposición, se tomamos AΔ como *a* e ΔB como *b*, corresponde á ecuación alxébrica $((a + b)/2)^2 = ab + (a - ((a + b)/2))^2$, onde *a* e *b* representan os segmentos desiguais en que se divide a recta.

38 Proposición I, 46.

39 Proposición I, 31.

ou EZ, e asemade, por A, trácese AK paralela a unha das dúas, a ΓΛ ou BM.



E, dado que o complemento ΓΘ é igual ó complemento ΘZ[40], engádase a ambos ΔM; logo, ΓM enteiro é igual a ΔZ enteiro. Pero ΓM é igual a AΛ, dado que tamén AΓ é igual a ΓB[41]; logo, tamén AΛ é igual a ΔZ.

Engádase a ambos ΓΘ; logo, AΘ enteiro é igual ó gnomon MNΞ[42]. Pero AΘ é o contido por AΔ e ΔB —pois ΔΘ é igual a ΔB—; logo, tamén o gnomon MNΞ é igual ó contido[43] por AΔ e ΔB. Engádase a ambos ΛH, que é igual ó cadrado de ΓΔ[44]; logo, o gnomon MNΞ mais ΛH é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por AΔ e ΔB mais o cadrado de ΓΔ.

Pero o gnomon MNΞ mais ΛH é o cadrado ΓEZB enteiro, que é o cadrado de ΓB; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por AΔ e ΔB xunto co cadrado de ΓΔ é igual ó cadrado de ΓB.

Logo, se unha liña recta se corta en partes iguais e desiguais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos desiguais dela enteira xunto co cadrado da recta do medio dos puntos de corte é igual ó cadrado da metade; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

40 Proposición I, 43.

41 Proposición I, 36.

42 O gnomon está formado polos paralelogramos ΔM xunto cos dous complementos ΓΘ e ΘZ, todos eles marcados pola liña descontinua. Os manuscritos presentan a letra M para a recta KM e para o gnomon MNΞ; algúns editores, como Heath, modifican o M do gnomon para evitar confusións. Heiberg manteno, fiel á tradición manuscrita.

43 Nota 10 (Proposición II, 1).

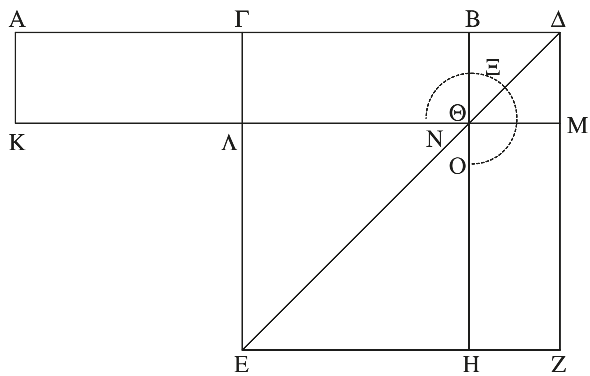
44 Véxase a Nota 35 (Proposición II, 4) .

PROPOSICIÓN 6

***Se unha liña recta se corta á metade e se lle engade outra recta en liña recta, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira coa recta engadida e pola recta engadida xunto co cadrado da metade é igual ó cadrado da recta composta da metade e da recta engadida*[45]**.

Pois ben, córtese unha recta, AB, á metade polo punto Γ e engádaselle outra recta, BΔ, en liña recta; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por AΔ e ΔB xunto co cadrado de ΓB é igual ó cadrado de ΓΔ.

Pois ben, debúxese a partir de ΓΔ o cadrado ΓΕΖΔ[46], únase ΔΕ e, polo punto Β, trácese ΒΗ paralela a unha das dúas, a ΕΓ[47] ou ΔΖ, mentres que, polo punto Θ, trácese ΚΜ paralela a unha das dúas, a ΑΒ ou ΕΖ, e ademais, polo punto Α, trácese ΑΚ paralela a unha das dúas, a ΓΛ ou ΔΜ.



Entón, dado que ΑΓ é igual a ΓΒ, tamén é igual ΑΛ a ΓΘ[48]. Pero ΓΘ é igual a ΘΖ[49]. Logo, tamén ΑΛ é igual a ΘΖ.

[45] Esta proposición corresponde á ecuación alxébrica $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$, onde *a* representa a metade da recta inicial e *b* a recta que se engade.

[46] Proposición I, 46.

[47] Proposición I, 31.

[48] Proposición I, 36.

[49] Proposición I, 43.

Engádase a ambos ΓΜ; logo, ΑΜ enteiro é igual ó gnomon ΝΞΟ. Pero ΑΜ é o contido por ΑΔ e ΔΒ —pois ΔΜ é igual a ΔΒ—; logo, tamén o gnomon ΝΞΟ é igual ó contido por ΑΔ e ΔΒ. Engádase a ambos ΛΗ, que é igual ó cadrado de ΒΓ; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΔ e ΔΒ xunto co cadrado de ΓΒ é igual ó gnomon ΝΞΟ mais ΛΗ. Pero o gnomon ΝΞΟ mais ΛΗ é o cadrado enteiro ΓΕΖΔ, que é cadrado de ΓΔ; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΔ e ΔΒ xunto co cadrado de ΓΒ é igual ó cadrado de ΓΔ.

Logo, se unha liña recta se corta á metade e se lle engade outra recta en liña recta, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira coa recta engadida e pola recta engadida xunto co cadrado da metade é igual ó cadrado da recta composta da metade e da recta engadida; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Se unha liña recta se corta ó azar, os dous cadrados xuntos, o dela enteira e o dun dos segmentos, son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido pola recta enteira e polo segmento dito mais o cadrado do segmento restante*[50]*.

Pois ben, córtese unha recta, ΑΒ, ó azar, polo punto Γ; digo que os cadrados de ΑΒ e ΒΓ son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΒ e ΒΓ mais o cadrado de ΓΑ.

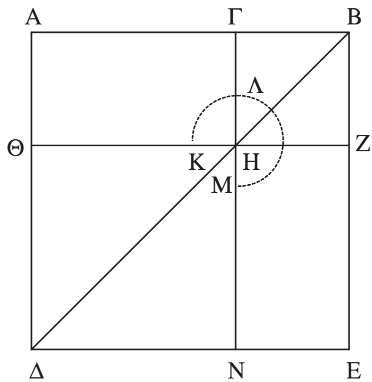
Pois ben, debúxese a partir de ΑΒ o cadrado ΑΔΕΒ[51]; e remátese o debuxo[52] da figura.

---

50 Esta proposición corresponde á ecuación alxébrica $(a + b)^2 + b^2 = 2(a + b)b + a^2$, onde *a* e b representan os segmentos en que se divide a recta.

51 Proposición I, 46.

52 Debe entenderse todo o feito en proposicións anteriores (cortar a recta, unir as rectas...); en lugar de repetir as instrucións de todo o proceso, utiliza unha forma verbal da raíz de γράφω en pretérito perfecto; tanto a preposición κατά que leva o verbo como



Entón, dado que AH é igual a HE[53], engádase a ambos ΓZ; logo, AZ enteiro é igual a ΓE enteiro; logo, AZ e ΓE son o dobre que AZ. Pero AZ e ΓE son o gnomon ΚΛΜ mais o cadrado ΓZ; logo, o gnomon ΚΛΜ e ΓZ son o dobre que AZ. Pero, o dobre que AZ é tamén dúas veces o contido por[54] AB e BΓ —pois BZ é igual a BΓ[55]—; logo, o gnomon ΚΛΜ mais o cadrado ΓZ é igual a dúas veces o contido por AB e BΓ. Engádase a ambos ΔH, que é o cadrado de AΓ; logo, o gnomon ΚΛΜ mais os cadrados BH e HΔ son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ mais o cadrado de AΓ. Pero o gnomon ΚΛΜ mais os cadrados BH e HΔ son AΔEB enteiro mais ΓZ, que son os cadrados de AB e BΓ; logo, os cadrados de AB e BΓ son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ xunto co cadrado de AΓ.

Logo, se unha liña recta se corta ó azar, os dous cadrados xuntos, o dela enteira e o dun dos segmentos, son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido pola recta enteira e polo segmento dito mais o cadrado do segmento restante; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

o tempo escollido indican «levar a termo». Une BΔ, traza a recta ΓN —paralela a BE por Γ— e a recta ΘZ —paralela a AB por H.

53 Proposición I, 43.

54 Nota 10 (Proposición II, 1).

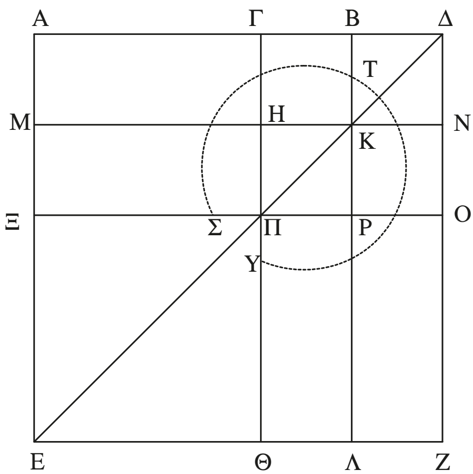
55 Proposición I, 36.

PROPOSICIÓN 8

Se unha liña recta se corta ó azar, catro veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos xunto co cadrado do segmento restante é igual ó cadrado debuxado a partir dela enteira e do segmento dito, como se fosen unha soa recta[56].

Pois ben, córtese unha liña recta, AB, ó azar, polo punto Γ; digo que catro veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ xunto co cadrado de AΓ é igual ó cadrado debuxado a partir de AB e BΓ como se fosen unha soa recta.

Pois ben, prolónguese en liña recta BΔ, póñase BΔ igual a ΓB[57], debúxese a partir de AΔ o cadrado AEZΔ[58] e remátese o debuxo da figura dobre[59].



Entón, dado que ΓB é igual a BΔ, pero ΓB é igual a HK[60], mentres que BΔ a KN, logo, tamén HK é igual a KN. Entón, polo

[56] Esta proposición corresponde á ecuación alxébrica $4(a + b)b + a^2 = ((a + b) + b)^2$, onde *a* e *b* representan os segmentos en que se divide a recta.

[57] Proposición I, 3.

[58] Proposición I, 46.

[59] Une ΔE, traza as rectas BΛ e ΓΘ —paralelas a ΔZ por B e Γ— e as rectas MN e ΞO —paralelas a AΔ por K e Π.

[60] Proposición I, 34.

mesmo, tamén ΠΡ é igual a ΡΟ. E, dado que ΒΓ é igual a ΒΔ, mentres que ΗΚ a ΚΝ, logo, tamén é igual ΓΚ a ΚΔ[61], mentres que ΗΡ a ΡΝ. Pero ΓΚ é igual a ΡΝ —pois son complementos do paralelogramo ΓΟ[62]—; logo, tamén ΚΔ é igual a ΗΡ; logo, os catro, ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ e ΡΝ, son iguais entre si. Logo, os catro son cuádruplo que ΓΚ.

Por outra parte, dado que ΓΒ é igual a ΒΔ, pero ΒΔ é igual a ΒΚ[63], isto é, a ΓΗ, mentres que ΓΒ é igual a ΗΚ, isto é, a ΗΠ, logo tamén ΓΗ é igual a ΗΠ.

E, dado que ΓΗ é igual a ΗΠ, mentres que ΠΡ a ΡΟ, tamén é igual ΑΗ a ΜΠ, mentres que ΠΛ a ΡΖ. Pero ΜΠ é igual a ΠΛ —pois son complementos do paralelogramo ΜΛ—; logo ΑΗ é igual a ΡΖ; logo, os catro, ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ e ΡΖ, son iguais entre si; logo, os catro son cuádruplo que ΑΗ.

Pero foi demostrado que tamén os catro, ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ e ΡΝ, son cuádruplo que ΓΚ; logo, os oito, que conteñen o gnomon ΣΤΥ, son cuádruplo que ΑΚ. E, dado que ΑΚ é o contido por[64] ΑΒ e ΒΔ —pois ΒΚ é igual a ΒΔ—, logo, catro veces o contido por ΑΒ e ΒΔ é cuádruplo que ΑΚ.

Pero foi demostrado que tamén o gnomon ΣΤΥ é catro veces ΑΚ; logo, catro veces o contido por ΑΒ e ΒΔ é igual ó gnomon ΣΤΥ.

Engádase a ambos ΞΘ, que é igual ó cadrado de ΑΓ; logo, catro veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΒ e ΒΔ xunto co cadrado de ΑΓ é igual ó gnomon ΣΤΥ mais ΞΘ.

Pero o gnomon ΣΤΥ mais ΞΘ son o cadrado ΑΕΖΔ enteiro, que é o cadrado de ΑΔ; logo, catro veces o contido por ΑΒ e ΒΔ xunto co cadrado de ΑΓ é igual ó cadrado de ΑΔ.

Pero ΒΔ e igual a ΒΓ; logo, catro veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΒ e ΒΓ xunto co cadrado de ΑΓ é igual ó cadrado de ΑΔ, isto é, ó cadrado debuxado a partir de ΑΒ e ΒΓ como se fosen unha soa recta.

---

61 Proposición I, 36.

62 Proposición I, 43.

63 Os ángulos ΒΔΚ e ΒΚΔ son iguais, ΒΚ é o lado oposto a ΒΔΚ e ΒΔ é o lado oposto a ΒΚΔ; véxase a Proposición II, 4.

64 Nota 10 (Proposición II, 1).

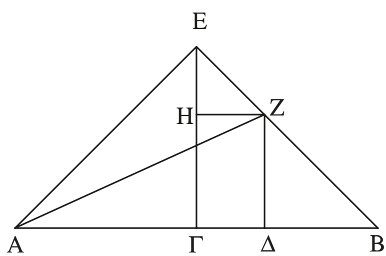
Logo, se unha liña recta se corta ó azar, catro veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos xunto co cadrado do segmento restante é igual ó cadrado debuxado a partir dela enteira e do segmento dito, como se fosen unha soa recta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 9

Se unha liña recta se corta en partes iguais e desiguais, os cadrados dos segmentos desiguais dela enteira son o dobre que o cadrado da metade mais o cadrado da recta do medio dos cortes[65].

Pois ben, córtese unha recta, AB, en partes iguais por Γ e en desiguais por Δ; digo que os cadrados de AΔ e ΔB son o dobre que os cadrados de AΓ e ΓΔ.

Pois ben, trácese ΓE dende Γ en ángulo recto con AB e póñase igual tanto a AΓ como a ΓB[66]; fáganse EA e EB, trácese ΔZ paralela a EΓ por Δ[67], mentres que por Z, ZH paralela a AB, e únase AZ.



E, dado que AΓ é igual a ΓE, tamén é igual o ángulo EAΓ a AEΓ[68]. E, dado que o ángulo Γ[69] é recto, logo, os demais ángulos, EAΓ e AEΓ, son iguais a un recto[70]; e son iguais; logo, cada

65 Esta proposición corresponde á ecuación alxébrica $a^2 + b^2 = 2(((a + b)/2)^2 + (a - ((a + b)/2))^2)$, onde *a* e *b* representan os segmentos desiguais en que se divide a recta.

66 Proposición I, 11 e Proposición I. 3.

67 Proposición I, 31.

68 Proposición I, 5.

69 Nomea o ángulo polo vértice —véxase a Nota 118 (Proposición I, 24).

70 Proposición I, 32.

un dos ángulos ΓΕΑ e ΓΑΕ é metade dun recto. Entón, polo mesmo, tamén cada un dos ángulos ΓΕΒ e ΕΒΓ é metade dun recto; logo, ΑΕΒ, enteiro, é recto.

E, dado que o ángulo ΗΕΖ é metade dun recto, e ΕΗΖ é recto —pois é igual ó interior e oposto ΕΓΒ[71]—, logo, o ángulo restante ΕΖΗ é metade dun recto; logo, o ángulo ΗΕΖ é igual a ΕΖΗ; en consecuencia, tamén o lado ΕΗ é igual a ΗΖ[72].

Por outra parte, dado que o ángulo Β é metade dun recto e que ΖΔΒ é recto —pois, no seu caso, é igual ó interior e oposto ΕΓΒ— logo, o ángulo restante ΒΖΔ é metade dun recto; logo, o ángulo Β é igual a ΔΖΒ; en consecuencia, tamén o lado ΖΔ é igual ó lado ΔΒ. E, dado que ΑΓ é igual a ΓΕ, tamén o cadrado de ΑΓ é igual ó cadrado de ΓΕ; logo, os cadrados de ΑΓ e ΓΕ son o dobre que o de ΑΓ.

Pero o cadrado de ΕΑ é igual ós cadrados de ΑΓ e ΓΕ[73] —pois o ángulo ΑΓΕ é recto—; logo, o cadrado de ΕΑ é o dobre que o de ΑΓ. Por outra parte, dado que ΕΗ é igual a ΗΖ, tamén o cadrado de ΕΗ é igual ó de ΗΖ; logo, os cadrados de ΕΗ e ΗΖ son o dobre que o cadrado de ΗΖ. Pero o cadrado de ΕΖ é igual ós cadrados de ΕΗ e ΗΖ; logo, o cadrado de ΕΖ é o dobre que o de ΗΖ. Pero ΗΖ é igual a ΓΔ[74]; logo, o cadrado de ΕΖ é o dobre que o de ΓΔ. Pero tamén o cadrado de ΕΑ é o dobre que o de ΑΓ; logo, os cadrados de ΑΕ e ΕΖ son o dobre que os cadrados de ΑΓ e ΓΔ.

Pero o cadrado de ΑΖ é igual ós de ΑΕ e ΕΖ —pois o ángulo ΑΕΖ é recto—; logo, o cadrado de ΑΖ é o dobre que os de ΑΓ e ΓΔ. Pero os cadrados de ΑΔ e ΔΖ son iguais ó de ΑΖ —pois o ángulo Δ é recto—; logo, os de ΑΔ e ΔΖ son o dobre que os cadrados de ΑΓ e ΓΔ. Pero ΔΖ é igual a ΔΒ; logo, os cadrados de ΑΔ e ΔΒ son o dobre que os cadrados de ΑΓ e ΓΔ.

71 Proposición I, 29.
72 Proposición I, 6.
73 Proposición I, 47.
74 Proposición I, 34.

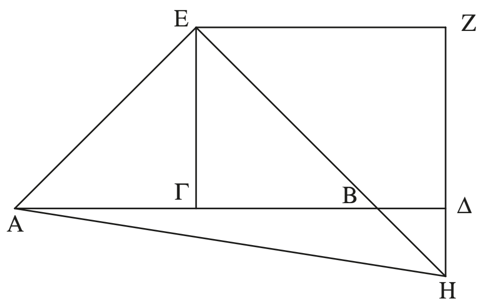
Logo, se unha liña recta se corta en partes iguais e desiguais, os cadrados dos segmentos desiguais dela enteira son o dobre que o cadrado da metade mais o cadrado da recta do medio dos cortes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 10

***Se unha liña recta se corta á metade e se lle engade outra recta en liña recta, os dous cadrados xuntos, o dela enteira coa recta engadida mais o da recta engadida, son o dobre que o cadrado da metade e o cadrado debuxado a partir da recta composta da metade e da recta engadida como se fosen unha soa recta*[75]**.**

Pois ben, córtese unha recta AB á metade por Γ e engádasele en liña recta outra recta BΔ; digo que os cadrados de AΔ e ΔB son o dobre que os cadrados de AΓ e ΓΔ.

Pois ben, trácese ΓE dende Γ en ángulo recto con AB e póñase igual tanto a AΓ como a ΓB[76], e fáganse EA e EB; e, por E, trácese EZ paralela a AΔ[77], mentres que, por Δ, trácese ZΔ paralela a ΓE.



E, dado que a recta EZ incidiu nas rectas paralelas EΓ e ZΔ, logo, os ángulos ΓEZ e EZΔ son iguais a dous rectos[78]; logo, ZEB e EZΔ son menores que dous rectos.

[75] Esta proposición corresponde á ecuación alxébrica $(2a + b)2 + b2 = 2(a2 + (a + b)2)$, onde *a* representa a metade da recta inicial e *b* a recta que se lle engade.

[76] Proposición I, 11 e Proposición I, 3.

[77] Proposición I, 31.

[78] Proposición I, 29.

Pero as rectas prolongadas dende ángulos menores que dous rectos atópanse; logo, EB e ZΔ prolongadas polos lados B e Δ atoparanse. Prolónguense, atópense en H e únase AH.

E, dado que AΓ é igual a ΓE, tamén o ángulo EAΓ é igual a AEΓ[79]; e o ángulo Γ é recto; logo, cada un dos ángulos, EAΓ e AEΓ, metade dun recto[80]. Entón, polo mesmo, tamén cada un dos ángulos, ΓEB e EBΓ, é metade dun recto. Logo, AEB é recto. E, dado que EBΓ é metade dun recto, logo, tamén ΔBH é metade dun recto[81]. Pero tamén BΔH é recto —pois é igual a ΔΓE; pois son alternos[82]—; logo, o ángulo restante ΔHB é metade dun recto; logo, ΔHB é igual a ΔBH; en consecuencia, tamén o lado BΔ é igual ó lado HΔ[83].

Por outra parte, dado que EHZ é metade dun recto e que o ángulo Z é recto —pois é igual ó oposto Γ[84]—, logo, o ángulo restante ZEH é metade dun recto; logo, o ángulo EHZ é igual a ZEH; en consecuencia, tamén o lado HZ é igual ó lado EZ. E, dado que o cadrado de EΓ é igual ó cadrado de ΓA, logo, os cadrados de EΓ e ΓA son o dobre que o cadrado de ΓA. Pero o de EA é igual ós de EΓ e ΓA[85]; logo, o cadrado de EA é o dobre que o cadrado de AΓ.

Por outra parte, dado que ZH é igual a EZ, o cadrado de ZH tamén é igual ó de ZE; logo, os de HZ e ZE son o dobre que o de EZ. Pero o de EH é igual ós de HZ e ZE; logo, o de EH é o dobre que o de EZ. Pero EZ é igual a ΓΔ[86]; logo, o cadrado de EH é o dobre que o de ΓΔ. Pero foi demostrado tamén que o de EA é o dobre que o de AΓ; logo, os cadrados de AE e EH son o dobre que os cadrados de AΓ e ΓΔ. Pero o cadrado de AH é igual ós cadrados de AE e EH; logo, o de AH é o dobre que os

79 Proposición I, 5.
80 Proposición I, 32.
81 Proposición I, 15.
82 Proposición I, 29.
83 Proposición I, 6.
84 Proposición I, 34.
85 Proposición I, 47.
86 Proposición I, 34.

de AΓ e ΓΔ. Pero os de AΔ e ΔH son iguais ó de AH; logo, os de AΔ e ΔH son o dobre que os de AΓ e ΓΔ. Pero ΔH é igual a ΔB; logo, os de AΔ e ΔB son o dobre que os cadrados de AΓ e ΓΔ.

Logo, se unha liña recta se corta á metade e se lle engade outra recta en liña recta, os dous cadrados xuntos, o dela enteira coa recta engadida mais o da recta engadida, son o dobre que o cadrado da metade e o cadrado debuxado a partir da recta composta da metade e da recta engadida como se fosen unha soa recta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 11

Cortar a recta dada de xeito que o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos sexa igual ó cadrado do segmento restante.

Sexa a recta dada AB; é preciso, entón, cortar AB de xeito que o paralelogramo de ángulos rectos contido por ela enteira e un dos segmentos sexa igual ó cadrado do segmento restante.

Pois ben, debúxese a partir de AB o cadrado ABΔΓ, córtese AΓ á metade por E, únase BE, lévese ΓA ata Z, póñase EZ igual a BE, debúxese o cadrado ZΘ a partir de AZ e lévese HΘ ata K; digo que AB queda cortada por Θ de xeito que fai o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΘ igual ó cadrado de AΘ[87].

Pois ben, dado que a recta AΓ queda cortada á metade por E e que se lle engadiu ZA, logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓZ e ZA xunto co cadrado de AE é igual ó cadrado de EZ[88]. Pero EZ é igual a EB; logo, o contido por ΓZ e ZA xunto co cadrado de AE é igual ó cadrado de EB[89]. Pero os cadrados de BA e AE son iguais ó cadrado de EB[90] —pois o ángulo A é

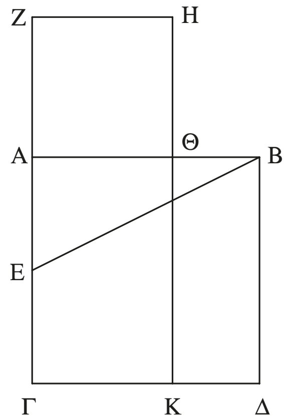
[87] Esta proposición responde á resolución da ecuación $x^2 + ax - a^2 = 0$, pois se a representa a recta AB e x o segmento ΘB, necesitamos calcular x ($x < a$) tal que $a(a - x) = x^2$ que é equivalente a ecuación $x^2 + ax - a^2 = 0$.

[88] Proposición II, 6.

[89] Proposición I, 36.

[90] Proposición I, 47.

recto—; logo, o contido por[91] ΓZ e ZA xunto co cadrado de AE é igual ós cadrados de BA e AE.



Quítese a ambos o cadrado de AE; logo, o paralelogramo de ángulos rectos restante contido por ΓZ e ZA é igual ó cadrado de AB. E o contido por ΓZ e ZA é ZK —pois AZ é igual a ZH—; pero o cadrado de AB é AΔ; logo, ZK é igual a AΔ.

Quítese a ambos AK; logo, o restante, ZΘ, é igual a ΘΔ. E ΘΔ é o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΘ —pois AB é igual a BΔ— mentres que ZΘ é o cadrado de AΘ; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΘ é igual ó cadrado de ΘA.

Logo, a recta dada AB quedou cortada por Θ de xeito que fai o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΘ igual ó cadrado de ΘA; o que, xustamente, era preciso facer.

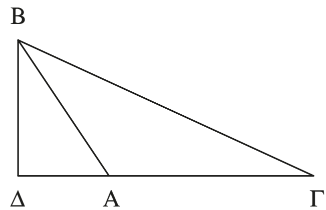
PROPOSICIÓN 12

Nos triángulos obtusángulos, o cadrado do lado que está tendido baixo o ángulo obtuso é maior que os cadrados dos lados que conteñen o ángulo obtuso en dúas veces o

91 Nota 10 (Proposición II, 1).

contido por[92] un dos lados[93] do ángulo obtuso, aquel sobre o que cae a perpendicular, e pola recta exterior cortada pola perpendicular ata o ángulo obtuso.

Sexa o triángulo obtusángulo ΑΒΓ co ángulo obtuso ΒΑΓ e, dende o punto Β, trácese ΒΔ perpendicular a ΓΑ prolongada[94]; digo que o cadrado de ΒΓ é maior que os cadrados de ΒΑ e ΑΓ en dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΑ e ΑΔ.



Pois, dado que a recta ΓΔ queda cortada ó azar polo punto Α, logo, o cadrado de ΔΓ é igual ós cadrados de ΓΑ e ΑΔ mais dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΑ e ΑΔ[95]. Engádase a ambos o cadrado de ΔΒ; logo, os cadrados de ΓΔ e ΔΒ son iguais ós cadrados de ΓΑ, ΑΔ e ΔΒ mais dúas veces o contido por ΓΑ e ΑΔ.

Pero o cadrado de ΓΒ é igual ós cadrados de ΓΔ e ΔΒ[96] —pois o ángulo Δ é recto—; e o cadrado de ΑΒ é igual ós cadrados de ΑΔ e ΔΒ; logo, o cadrado de ΓΒ é igual ós cadrados de ΓΑ e ΑΒ mais dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΑ e ΑΔ; en consecuencia, o cadrado de ΓΒ é maior que os cadrados de ΓΑ e ΑΒ en dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΑ e ΑΔ.

Nos triángulos obtusángulos, o cadrado do lado que está tendido baixo o ángulo obtuso é maior que os cadrados dos lados

---

92 Nota 10 (Proposición II, 1).

93 En grego utiliza a preposición περί para indicar que os lados están exactamente «ó redor do ángulo».

94 Postulado 2. e Proposición I, 12.

95 Proposición II, 4.

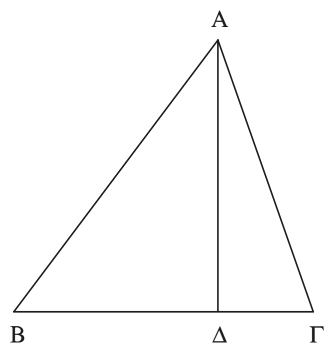
96 Proposición I, 47.

que conteñen o ángulo obtuso en dúas veces o contido por un dos lados do ángulo obtuso, aquel sobre o que cae a perpendicular, e pola recta exterior cortada pola perpendicular ata o ángulo obtuso; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13[97]

Nos triángulos acutángulos, o cadrado do lado que está tendido baixo o ángulo agudo é menor que os cadrados dos lados que conteñen o ángulo agudo en dúas veces o contido por*[98] *un dos lados do ángulo agudo, aquel sobre o que cae a perpendicular, e pola recta interior cortada pola perpendicular ata o ángulo agudo.

Sexa o triángulo acutángulo ΑΒΓ co ángulo agudo Β e, dende o punto Α, trácese ΑΔ perpendicular a ΒΓ; digo que o cadrado de ΑΓ é menor que os cadrados de ΓΒ e ΒΑ en dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΒ e ΒΔ.



Pois, dado que a recta ΓΒ queda cortada ó azar polo punto Δ, logo, os cadrados de ΓΒ e ΒΔ son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΒ e ΒΔ mais o cadrado de ΔΓ[99].

---

97 O enunciado desta proposición é igual ó da anterior, *mutatis mutandis*. As proposicións II, 12 e II, 13 proporcionan unha xeneralización do Teorema de Pitágoras (Proposición I, 47) ós triángulos obtusángulos e acutángulos, respectivamente.

98 Nota 10 (Proposición II, 1).

99 Proposición II, 7.

Engádase a ambos o cadrado de ΔA; logo, os cadrados de ΓB, BΔ e ΔA son iguais a dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓB e BΔ mais os cadrados de AΔ e ΔΓ.

Pero o cadrado de AB é igual ós cadrados de BΔ e ΔA[100] —pois o ángulo Δ é recto—; pero o cadrado de AΓ é igual ós cadrados de AΔ e ΔΓ; logo, os cadrados de ΓB e BA son iguais ó cadrado de AΓ mais dúas veces o contido por ΓB e BΔ; en consecuencia, o cadrado de AΓ so é menor que os cadrados de ΓB e BA en dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓB e BΔ.

Nos triángulos acutángulos, o cadrado do lado que está tendido baixo o ángulo agudo é menor que os cadrados dos lados que conteñen o ángulo agudo en dúas veces o contido por un dos lados do ángulo agudo, aquel sobre o que cae a perpendicular, e pola recta interior cortada pola perpendicular ata o ángulo agudo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

***Construír*[101] *un cadrado igual á figura rectilínea dada*[102].**

Sexa a figura rectilínea dada A. É preciso, entón, construír un cadrado igual á figura rectilínea A.

Pois ben, constrúase o paralelogramo de ángulos rectos BΔ igual á figura rectilínea A[103]; se, efectivamente, BE é igual a EΔ, resultaría o proposto; pois queda construído o cadrado BΔ igual á figura rectilínea A. Pero se non, unha das rectas BE ou EΔ é maior; sexa maior BE, prolónguese ata Z, póñase EZ igual a EΔ[104], córtese á metade BZ por H[105], e, con centro en H e como

---

100 Proposición I, 47.

101 Para συνίστημι véxase a Nota 19 (Proposición I, 1).

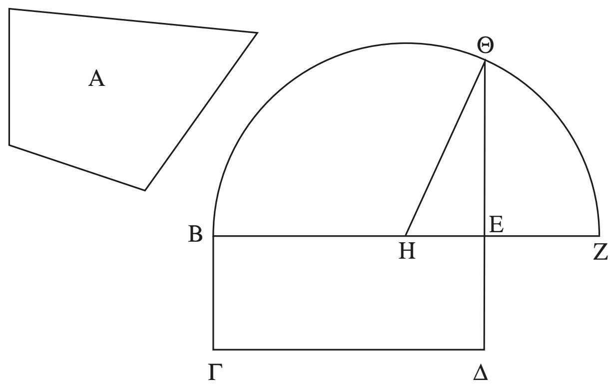
102 Non parece aventurado crer que esta proposición, ou quizais a Proposición I, 45, tal como suxire Proclo, levou a pensar ós xeómetras na *cuadratura do círculo*. Se, utilizando só regra e compás, podemos construír un cadrado igual a unha figura rectilínea dada, parece lóxico estudar a posibilidade de construír un cadrado igual a un círculo dado. Este problema, xunto coa trisección do ángulo e a duplicación do cubo, é un dos chamados problemas clásicos. Non foi resolto ata finais do século XIX ao probar que π é un número transcendente e polo tanto non é posible «cadrar o círculo».

103 Proposición I, 45.

104 Proposición I, 3.

105 Proposición I, 10.

distancia unha das rectas HB ou HZ, debúxese o semicírculo BΘZ, prolónguese ΔE ata Θ e únase HΘ.



Entón, dado que a recta BZ queda cortada en partes iguais por H e en desiguais por E, logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por BE e EZ xunto co cadrado de EH é igual ó cadrado de HZ[106].

Pero HZ é igual a HΘ; logo, o contido por[107] BE e EZ xunto co cadrado de HE é igual ó cadrado de HΘ.

Pero os cadrados de ΘE e EH son iguais ó de HΘ[108]; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por BE e EZ xunto co cadrado de HE son iguais ós cadrados de ΘE e EH.

Quítese a ambos o cadrado de HE; logo, o paralelogramo de ángulos rectos restante contido por BE e EZ é igual ó cadrado de EΘ.

Pero o contido por BE e EZ é BΔ —pois EZ é igual a EΔ—; logo, o paralelogramo BΔ é igual ó cadrado de ΘE. Pero BΔ é igual á figura rectilínea A. Logo, tamén a figura rectilínea A é igual ó cadrado que se poderá debuxar a partir de EΘ .

Logo, queda construído un cadrado, o que se poderá debuxar a partir de EΘ, igual á figura rectilínea dada; o que, xustamente, era preciso facer.

106 Proposición II, 5.
107 Nota 10 (Proposición II, 1.)
108 Proposición I, 47.

LIBRO III

DEFINICIÓNS

1. Círculos iguais son aqueles cuxos diámetros son iguais ou as rectas que parten dos seus centros[1] son iguais.
2. Dise que é tanxente[2] a un círculo unha recta que, tocando o círculo, aínda que se prolongue non corta o círculo.
3. Dise que son tanxentes entre si os círculos que, tocándose un ó outro, non se cortan un ó outro.
4. Nun círculo, dise que as rectas distan o mesmo do centro cando as perpendiculares trazadas ata elas dende o centro son iguais.
5. Dise que dista máis aquela sobre a que cae a perpendicular maior.[3]
6. Segmento de círculo é a figura contida por unha recta e unha circunferencia[4] de círculo.
7. Ángulo de segmento é o contido por unha recta e unha circunferencia de círculo[5].
8. Ángulo nun segmento é o ángulo que, cando se toma un punto sobre a circunferencia do segmento e se uniron rectas dende el ata os extremos da recta que é base do segmento, está contido polas rectas que se uniron.
9. Cando as rectas que conteñen o ángulo cortan unha circunferencia, dise que o ángulo está sobre ela[6].

---

[1] Os radios; como xa apuntamos anteriormente, Euclides carece xeralmente dun vocabulario específico axeitado para todo o que precisa nomear. Ata aquí —a partir do postulado 4 do libro I— referírase ó radio como διάστημα, «distancia que se toma para debuxar un círculo»; agora recorre novamente á substantivación dun sintagma preposicional, αἱ ἐκ τῶν κέντρων, que describe as rectas «a partir do centro»; algo similar fixo coa palabra «paralela» (véxase a Nota 12 (Definición I, 23)); naquel caso a tradición consolidou a denominación, neste non. A partir de aquí, traduciremos por «radio».

[2] Nesta definición Euclides precisa en que sentido vai utilizar o verbo ἐφάπτω «tocar nun punto, ser tanxente», partindo do verbo ἅπτω que ten un sentido máis xeral «entrar en contacto, tocar»; é dicir, está dando un significado técnico a estes dous verbos, significado que, polo xeral, respectarán os xeómetras gregos posteriores a Euclides. Porén, o propio Euclides, nalgunha ocasión utiliza ἅπτω onde esperariamos ἐφάπτω —Definición IV, 5.

[3] Segue a referirse á distancia entre unha recta e o centro do círculo.

[4] Utiliza de forma reiterada «circunferencia de círculo» para referirse a un arco de circunferencia. Nesta definición a «circunferencia de círculo» é o arco delimitado pola corda.

[5] É un ángulo non rectilíneo. Recórdese que Euclides fala de ángulos planos, Definición I, 8, e especifica cando son rectilíneos, Definición I, 9.

[6] Esta Definición III, 9 é continuación da Definición III, 8. O vértice do «ángulo nun segmento» é un punto do arco do segmento e fórmase un triángulo que ten por lados as

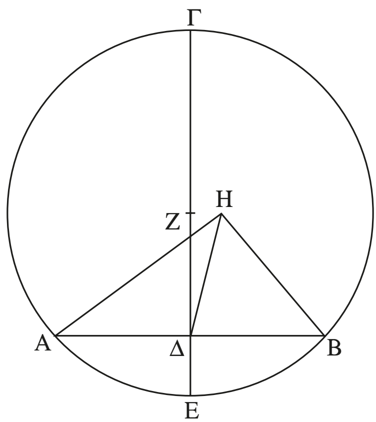
10. Un sector[7] de círculo é a figura que, cando un ángulo se constrúe no centro do círculo, está contida polas rectas que conteñen o ángulo e a circunferencia cortada por elas.
11. Son segmentos semellantes de círculos os que admiten ángulos iguais ou nos que os ángulos son iguais entre si.

PROPOSICIÓN 1

Atopar o centro do círculo dado

Sexa o círculo dado ΑΒΓ; é preciso, entón, atopar o centro do círculo ΑΒΓ.

Lévese por el a recta ΑΒ ó azar, córtese á metade polo punto Δ e, dende Δ, en ángulo recto con ΑΒ trácese ΔΓ[8], lévese ata Ε e córtese ΓΕ á metade por Ζ; digo que Ζ é centro de ΑΒΓ.



Supoñamos que non, entón, se é posible, sexa Η[9] e trácense ΗΑ, ΗΔ e ΗΒ. E, dado que ΑΔ é igual a ΔΒ, e ΔΗ é común, por tanto os dous lados, ΑΔ e ΔΗ, son iguais respectivamente a ΗΔ

cordas que forman o ángulo e a corda do segmento. O «ángulo nun segmento» é un ángulo que «está sobre a circunferencia» (o arco) restante, o arco que queda ó quitarlle á circunferencia o arco do segmento. Un ángulo está sobre calquera das circunferencias (arcos de circunferencia) delimitados polas rectas que conteñen o ángulo (Nota 4 (Definición III, 6)).

7 τομεύς : «o que corta»; en latín a tradución exacta é «*sector*», palabra que a tradición consolidou.

8 Proposicións I, 10 e I, 11.

9 Sobreenténdase, o centro.

e ΔB[10]; e a base HA é igual á base HB —pois son radios[11]—; logo, o ángulo AΔH é igual ó ángulo HΔB[12].

Pero cando unha recta levantada sobre outra recta fai os ángulos adxacentes iguais entre si, cada un dos ángulos iguais é recto[13]; logo, HΔB é recto.

Pero tamén é recto ZΔB; logo, ZΔB é igual a HΔB, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, H non é centro do círculo ABΓ. De xeito semellante poderemos demostrar que non o é ningún outro excepto Z[14].

Logo, o punto Z é centro de ABΓ.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que se, nun círculo, unha recta corta á metade e en ángulo recto outra recta, o centro do círculo está sobre a que corta; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 2

Se, sobre a circunferencia dun círculo, se toman dous puntos ó azar, a recta que une os puntos caerá dentro do círculo.

Sexa o círculo ABΓ e, sobre a súa circunferencia, tómense dous puntos A e B ó azar; digo que a recta unida dende A ata B caerá dentro do círculo.

---

10 AΔ é igual a ΔB e ΔH é igual a HΔ.

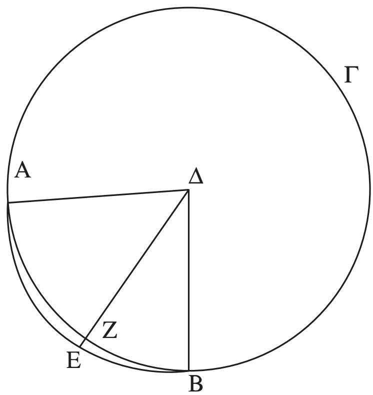
11 Véxase a Definición III, 1.

12 Proposicións I, 8.

13 Definición I, 10.

14 Euclides traslada a apostila para o final do corolario —Véxase a Nota 83 (Proposición I, 15. Corolario)—. O usual, aínda que con algunha excepción, nos corolarios que non presentan dúbidas en canto á súa atribución a Euclides, é que a apostila —«o que, xustamente, era preciso facer/demostrar»— figure no final do corolario e que non exista apostila no final da proposición previa. Proba que o centro, Z, ten que estar na recta EΓ, perpendicular a unha corda arbitraria, AB, polo punto medio de AB, sen pararse a xustificar que ten que ser o punto medio desta recta EΓ pois, probado que o centro está neste diámetro, dá por feito que o lector xa sabe que ten que ser o punto medio para que EZ sexa igual a ZΓ, definicións I, 15 e I, 16. Reflexa esta idea no corolario que segue, sendo, dalgunha forma, continuación e peche da proposición.

Supoñamos que non, entón, se é posible, caia fóra como AEB, tómese o centro do círculo ΑΒΓ e sexa Δ, trácense ΔA e ΔB, e lévese ΔZE.



Entón, dado que ΔA é igual a ΔB, logo, tamén o ángulo ΔAE é igual a ΔBE[15]; e dado que un lado, AEB, do triángulo ΔAE queda prolongado, logo, o ángulo ΔEB é maior que ΔAE[16].

Pero ΔAE é igual a ΔBE; logo, ΔEB é maior que ΔBE.

Pero o lado maior está tendido baixo o ángulo maior[17]; logo, ΔB é maior que ΔE.

Pero ΔB é igual a ΔZ. Logo, ΔZ é maior que ΔE, o menor que o maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, a recta unida dende A ata B non caerá fóra do círculo. De xeito semellante poderemos demostrar que tampouco sobre a mesma circunferencia; logo, dentro.

Logo, se sobre a circunferencia dun círculo se toman dous puntos ó azar, a recta que une os puntos caerá dentro do círculo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

15 Está supoñendo que AEB é unha recta e, polo tanto, ΔAB é un triángulo isóscele; aplica a Proposición I, 5.

16 Proposición I, 16.

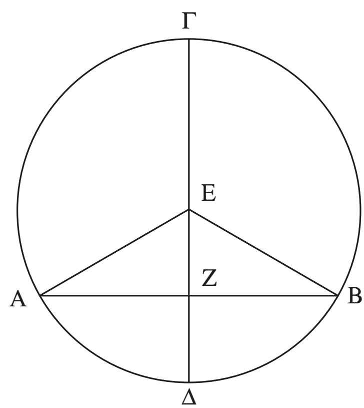
17 Proposición I, 19.

PROPOSICIÓN 3

Nun círculo, se unha recta trazada polo centro corta á metade unha recta non trazada polo centro, tamén a corta en ángulo recto; e, se a corta en ángulo recto, tamén a corta á metade.

Sexa o círculo ΑΒΓ e, nel, unha recta ΓΔ trazada polo centro corte á metade, polo punto Ζ, unha recta ΑΒ non trazada polo centro; digo que tamén a corta en ángulo recto.

Pois ben, tómese o centro do círculo ΑΒΓ e sexa Ε, e trácense ΕΑ e ΕΒ.



E, dado que ΑΖ é igual a ΖΒ, e ΖΕ é común, son iguais dous lados a dous lados. E a base ΕΑ é igual á base ΕΒ; logo, o ángulo ΑΖΕ é igual ó ángulo ΒΖΕ[18]. E, cando unha recta levantada sobre outra recta fai os ángulos adxacentes iguais entre si, cada un dos ángulos iguais é recto[19]; logo, cada un dos ángulos ΑΖΕ e ΒΖΕ é recto. Logo, ΓΔ, que atravesa o centro e que corta á metade ΑΒ que non atravesa o centro, tamén a corta en ángulo recto.

Agora, corte ΓΔ en ángulo recto ΑΒ; digo que tamén a corta á metade, isto é, que ΑΖ é igual a ΖΒ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, dado que ΕΑ é igual a ΕΒ, tamén é igual ΕΑΖ a ΕΒΖ[20].

[18] Proposición I, 8.
[19] Definición I, 10.
[20] Proposición I, 5.

Pero tamén o ángulo recto AZE é igual ó recto BZE; logo, EAZ e EZB son dous triángulos con dous ángulos iguais a dous ángulos e un lado igual a un lado, o común a eles, EZ, que está tendido baixo un dos ángulos iguais; logo, terá os demais lados iguais ós demais lados[21]; logo, AZ é igual a ZB.

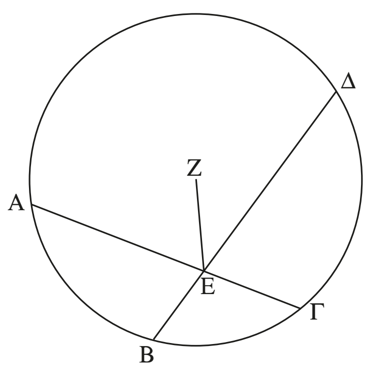
Logo, nun círculo, se unha recta trazada polo centro corta á metade unha recta non trazada polo centro, tamén a corta en ángulo recto; e, se a corta en ángulo recto, tamén a corta á metade; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

Nun círculo, se dúas rectas que non atravesan o centro se cortan unha á outra, non se cortan á metade unha á outra.

Sexa o círculo ΑΒΓΔ e, nel, as dúas rectas ΑΓ e ΒΔ que non atravesan o centro córtense unha á outra por E; digo que non se cortan unha á outra á metade.

Pois ben, se é posible, córtense unha a outra á metade de modo que AE sexa igual a ΕΓ, e BE a ΕΔ; tómese o centro do círculo ΑΒΓΔ e sexa Z[22], e únase ZE.



[21] Proposición I, 26.
[22] Proposición III, 1.

Entón, dado que ZE, unha recta trazada polo centro, corta á metade outra recta ΑΓ non trazada polo centro, tamén a corta en ángulo recto[23]; logo, ZEA é recto; por outra parte, dado que unha recta ZE corta á metade outra recta ΒΔ, tamén a corta en ángulo recto; logo, ZEB é recto.

Pero foi demostrado tamén que ZEA é recto; logo, ZEA é igual a ZEB, o menor ó maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ΑΓ e ΒΔ non se cortan á metade unha á outra.

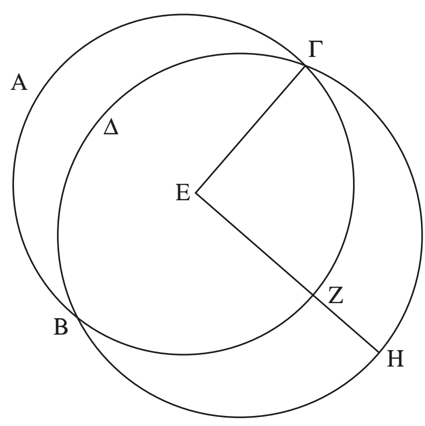
Logo, nun círculo, se dúas rectas que non atravesan o centro se cortan unha á outra, non se cortan á metade unha á outra; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

Se dous círculos se cortan un ó outro, non terán o mesmo centro.

Pois ben, córtense un ó outro os dous círculos ΑΒΓ e ΓΔΗ polos puntos Β e Γ; digo que non terán o mesmo centro.

Pois ben, se é posible, sexa E[24], únase EΓ e lévese EZH ó azar.



[23] Proposición III, 3.
[24] O centro común.

E, dado que o punto E é centro do círculo ΑΒΓ, ΕΓ é igual a ΕΖ[25]. Por outra parte, dado que o punto E é centro do círculo ΓΔΗ, ΕΓ é igual a ΕΗ; pero foi demostrado que tamén ΕΓ é igual a ΕΖ; logo, tamén ΕΖ é igual a ΕΗ, a menor á maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, o punto E non é centro dos círculos ΑΒΓ e ΓΔΗ.

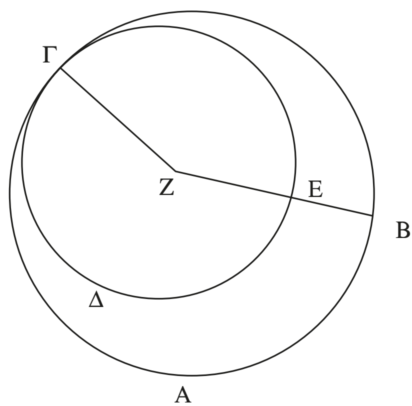
Logo, se dous círculos se cortan un ó outro, non terán o mesmo centro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se dous círculos son tanxentes entre si, non terán o mesmo centro.

Pois ben, sexan tanxentes entre si os dous círculos ΑΒΓ e ΓΔΕ no punto Γ; digo que non terán o mesmo centro.

Pois ben, se é posible, sexa Z, únase ΖΓ e lévese ΖΕΒ ó azar.



Entón, dado que o punto Z é centro do círculo ΑΒΓ, ΖΓ é igual a ΖΒ.

Por outra parte, dado que o punto Z é centro do círculo ΓΔΕ, ΖΓ é igual a ΖΕ.

[25] Definición I, 15.

Pero foi demostrado que ZΓ é igual a ZB; logo, tamén ZE é igual a ZB, a menor á maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, o punto Z non é centro dos círculos ABΓ e ΓΔE.

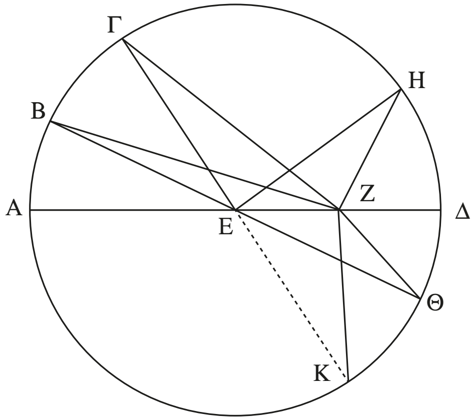
Logo, se dous círculos son tanxentes entre si, non terán o mesmo centro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Se, no diámetro dun círculo, se toma un punto que non é centro do círculo e dende o punto ata o círculo caen algunhas rectas, a maior será aquela na que está o centro, a menor a restante e, das outras, sempre a máis próxima á trazada polo centro é maior que a máis afastada e só dúas iguais caerán dende o punto ata o círculo a un e outro lado da menor.

Sexa o círculo ABΓΔ, sexa AΔ o seu diámetro, sobre AΔ tómese un punto Z que non é centro do círculo, sexa E centro do círculo e, dende Z ata o círculo ABΓΔ, caian unhas rectas ZB, ZΓ e ZH; digo que ZA é a maior, ZΔ a menor e, das demais, ZB maior que ZΓ, e ZΓ que ZH.

Pois ben, trácense BE, ΓE e HE.



E, dado que, de todo triángulo, dous lados son maiores que o restante[26], logo, EB e EZ[27] son maiores que BZ.

Pero AE é igual a BE; logo, AZ é maior que BZ.

Asemade, dado que BE é igual a ΓE, e ZE, común, entón os dous lados BE e EZ son iguais ós dous lados ΓE e EZ.

Pero tamén é maior o ángulo BEZ que ΓEZ; logo, a base BZ é maior que a base ΓZ[28]. Entón, polo mesmo, tamén ΓZ é maior que ZH.

Por outra parte, dado que HZ e ZE son maiores que EH e que EH é igual a EΔ, logo, HZ e ZE son maiores que EΔ.

Quítese a ambos EZ; logo, o restante HZ é maior que o restante ZΔ[29].

Logo, ZA é a maior, ZΔ a menor, ZB maior que ZΓ, e ZΓ que ZH.

Digo tamén que só dúas rectas iguais caerán dende o punto Z ata o círculo ABΓΔ a un e outro lado da menor, ZΔ.

Pois ben, constrúase na recta EZ e no seu punto E o ángulo ZEΘ igual ó ángulo HEZ[30] e únase ZΘ.

Entón, dado que HE é igual a EΘ, e EZ, común, entón os dous lados HE e EZ son iguais ós dous lados ΘE e EZ; e o ángulo HEZ é igual ó ángulo ΘEZ; logo, a base ZH é igual á base ZΘ[31].

Digo pois, que non caerá outra recta igual a ZH dende o punto Z ata o círculo.

Pois ben, se é posible, caia ZK. E, dado que ZK é igual a ZH, pero ZΘ a ZH, logo, tamén ZK é igual a ZΘ, a máis próxima á recta trazada polo centro igual á máis afastada; o que, sen dúbida é imposible.

---

26 Proposición I, 20.

27 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

28 Proposición I, 24.

29 Variación da Noción Común 4.

30 Proposición I, 23.

31 Proposición I, 4.

Logo, dende o punto Z non caerá ata o círculo ningunha outra igual a HZ; logo, só unha.

Logo, se, no diámetro dun círculo, se toma un punto que non é centro do círculo e dende o punto ata o círculo caen algunhas rectas, a maior será aquela na que está o centro, a menor a restante e, das outras, sempre a máis próxima á trazada polo centro é maior que a máis afastada e só dúas iguais caerán dende o punto ata o círculo a un e outro lado da menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

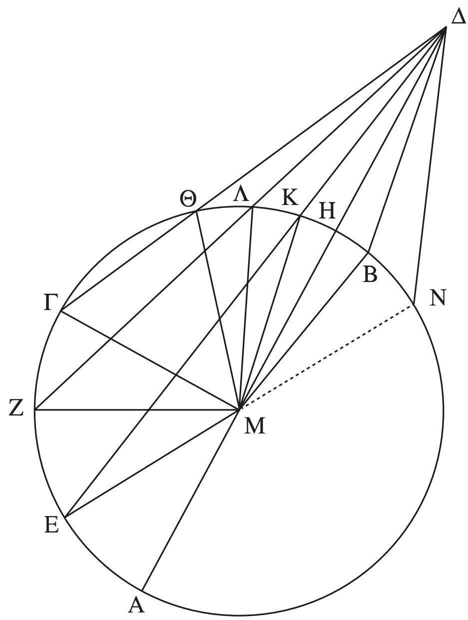
PROPOSICIÓN 8

Se se toma un punto fóra dun círculo e dende o punto ata o círculo se levan unhas rectas, das cales, unha polo centro e as demais ó azar, a trazada polo centro é a maior das rectas que caen na parte cóncava da circunferencia, e, das demais, sempre a máis próxima á trazada polo centro é maior que a máis afastada, e a que está entre o punto e o diámetro é a menor das rectas que caen na parte convexa da circunferencia, e, das demais, sempre a máis próxima á menor é menor que a máis afastada, e só dúas iguais caerán dende o punto ata o círculo a un e outro lado da menor.

Sexa o círculo ΑΒΓ, tómese un punto Δ fóra de ΑΒΓ e, dende el, lévense unhas rectas ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ e ΔΓ, e sexa ΔΑ a que atravese o centro; digo que, das rectas que caen na parte cóncava da circunferencia ΑΕΖΓ, ΔΑ, a trazada polo centro, é a maior, ΔΕ maior que ΔΖ, ΔΖ que ΔΓ, e, das rectas que caen na parte convexa da circunferencia ΘΛΚΗ, ΔΗ, que está entre o punto e o diámetro ΑΗ, é a menor, e sempre a máis próxima á menor, ΔΗ, é menor que a máis afastada —ΔΚ que ΔΛ e ΔΛ que ΔΘ.

Pois ben, tómese o centro do círculo ΑΒΓ[32] e sexa Μ; e trácense ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ e ΜΘ.

32 Proposición III, 1.



E, dado que AM e igual a EM, engádase a ambas MΔ; logo, AΔ é igual a EM e MΔ.

Pero EM e MΔ son maiores que EΔ[33]; logo, tamén AΔ é maior que EΔ.

Por outra parte, dado que ME é igual a MZ, e MΔ, común, logo, EM e MΔ son iguais a ZM e MΔ; e o ángulo EMΔ é maior que o ángulo ZMΔ.

Logo, a base EΔ é maior que a base ZΔ[34]. De xeito semellante poderemos demostrar que tamén ZΔ é maior que ΓΔ; logo, ΔA é a maior, ΔE maior que ΔZ, e ΔZ que ΔΓ.

E, dado que MK e KΔ son maiores que MΔ e que MH igual a MK, logo, a restante KΔ é maior que a restante HΔ; de xeito que HΔ é menor que KΔ; e dado que nun dos lados, MΔ, do triángulo MΛΔ se levantaron no interior dúas rectas MK e KΔ,

33 Proposición I, 20.
34 Proposición I, 24.

logo, MK e KΔ son menores que MΛ e ΛΔ[35]; pero MK é igual a MΛ; logo, a restante ΔK é menor que a restante ΔΛ.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén ΔΛ é menor que ΔΘ; logo, ΔH é a menor, ΔK menor que ΔΛ, e ΔΛ que ΔΘ.

Digo tamén que só dúas rectas iguais caerán dende o punto Δ ata o círculo a un e outro lado da menor ΔH.

Constrúase na recta MΔ e no seu punto M o ángulo ΔMB igual ó ángulo KMΔ[36], e únase ΔB. E, dado que MK é igual a MB, e MΔ[37], común, entón os dous lados KM e MΔ son iguais ós dous lados BM e MΔ respectivamente; e o ángulo KMΔ é igual ó ángulo BMΔ; logo, a base ΔK é igual á base ΔB[38].

Digo, que non caerá outra igual á recta ΔK dende o punto Δ ata o círculo.

Pois ben, se é posible, caia e sexa ΔN. Entón, dado que ΔK é igual a ΔN, pero ΔK é igual a ΔB, logo, tamén ΔB é igual a ΔN, a máis próxima á menor, ΔH, igual á máis afastada; o que, precisamente, foi demostrado imposible.

Logo, non caerán máis que dúas rectas iguais dende o punto Δ ata o círculo ABΓ a un e outro lado da menor ΔH.

Logo, se se toma un punto fóra dun círculo e dende o punto ata o círculo se levan unhas rectas, das cales, unha polo centro e as demais ó azar, a trazada polo centro é a maior das rectas que caen na parte cóncava da circunferencia, e, das demais, sempre a máis próxima á trazada polo centro é maior que a máis afastada, e a que está entre o punto e o diámetro é a menor das rectas que caen na parte convexa da circunferencia, e, das demais, sempre a máis próxima á menor é menor que a máis afastada, e só dúas iguais caerán dende o punto ata o círculo a un e outro lado da menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

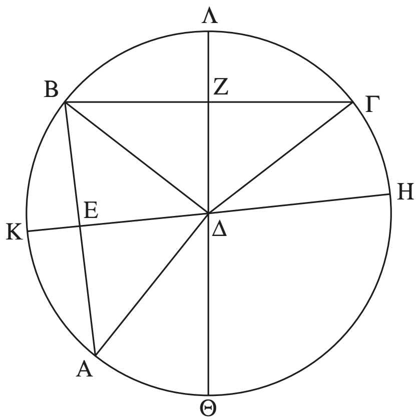
35 Proposición I, 21.
36 Proposición I, 23.
37 Refírese ós triángulos MKΔ e MBΔ nos que MK é igual a MB e MΔ é común ós dous.
38 Proposición I, 4.

PROPOSICIÓN 9

Se se toma un punto dentro dun círculo, e, dende o punto ata o círculo, caen máis que dúas rectas iguais, o punto tomado é centro do círculo.

Sexa o círculo ΑΒΓ, Δ o punto dentro del, e dende Δ ata o círculo ΑΒΓ caian máis que dúas rectas iguais, ΔΑ, ΔΒ e ΔΓ; digo que o punto Δ é centro do círculo ΑΒΓ.

Pois ben, trácense ΑΒ e ΒΓ e córtense á metade[39] polos puntos Ε e Ζ, e, unidas ΕΔ e ΖΔ, lévense ata os puntos Η, Κ, Θ e Λ.



Entón, dado que ΑΕ é igual a ΕΒ, e ΕΔ, común, entón os dous lados ΑΕ e ΕΔ son iguais ós outros dous, ΒΕ e ΕΔ; e a base ΔΑ igual á base ΔΒ; logo, o ángulo ΑΕΔ é igual ó ángulo ΒΕΔ[40]; logo, cada un dos ángulos ΑΕΔ e ΒΕΔ é recto[41]; logo, ΗΚ corta á metade e en ángulo recto ΑΒ.

E, dado que, se nun círculo unha recta corta á metade e en ángulo recto outra recta, o centro do círculo está sobre a que corta, logo, o centro do círculo está sobre ΗΚ[42].

---

39 Proposición I, 10.

40 Proposición I, 8.

41 Definición I, 10.

42 Proposición III, 1. Corolario.

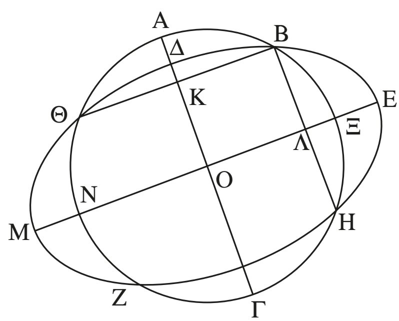
Entón, polo mesmo, o centro do círculo ΑΒΓ está sobre ΘΛ. E as rectas ΗΚ e ΘΛ non teñen ningún outro común excepto o punto Δ; logo, o punto Δ é centro do círculo ΑΒΓ.

Logo, se se toma un punto dentro dun círculo, e, dende o punto ata o círculo, caen máis que dúas rectas iguais, o punto tomado é centro do círculo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 10

Un círculo non corta outro círculo por máis puntos que dous.

Pois ben, se é posible, o círculo ΑΒΓ corte o círculo ΔΕΖ por máis puntos que dous, Β, Η, Ζ e Θ e, unidas ΒΘ e ΒΗ, córtense á metade polos puntos Κ e Λ; e, unha vez trazadas ΚΓ e ΛΜ dende Κ e Λ en ángulo recto con ΒΘ e ΒΗ[43], lévense ata os puntos Α e Ε.



Entón, dado que no círculo ΑΒΓ unha recta ΑΓ corta á metade e en ángulo recto outra recta ΒΘ, logo, o centro do círculo ΑΒΓ está sobre ΑΓ[44].

Por outra parte, dado que no mesmo círculo ΑΒΓ unha recta ΝΞ corta outra recta ΒΗ á metade e en ángulo recto, logo, o centro do círculo ΑΒΓ está sobre ΝΞ.

---

43 Proposición I, 11.

44 Proposición III, 1. Corolario.

E foi demostrado tamén que está sobre ΑΓ e que as rectas ΑΓ e ΝΞ non se topan en ningún outro punto que en Ο; logo, Ο é centro do círculo ΑΒΓ.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén Ο é centro do círculo ΔΕΖ; logo, dous círculos, ΑΒΓ e ΔΕΖ, que se cortan un ó outro teñen o mesmo centro Ο; o que, sen dúbida, é imposible[45].

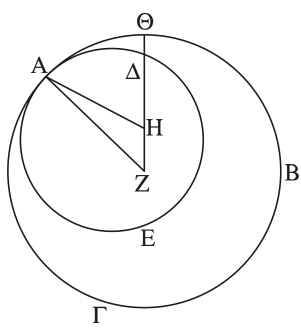
Logo, un círculo non corta outro círculo por máis puntos que dous; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 11

Se dous círculos son tanxentes entre si no interior e se toman os seus centros, a recta que une os seus centros ó ser prolongada caerá sobre o punto de contacto dos círculos.

Pois ben, sexan tanxentes entre si os dous círculos ΑΒΓ e ΑΔΕ no interior, no punto Α, e tómese o centro Ζ do círculo ΑΒΓ, e de ΑΔΕ, Η[46]; digo que a recta unida dende Η ata Ζ ó ser prolongada caerá sobre Α.

Supoñamos que non, entón, se é posible, caia como ΖΗΘ e trácense ΑΖ e ΑΗ.



Entón, dado que ΑΗ e ΗΖ son maiores que ΖΑ[47], isto é, que ΖΘ, quítese a ambas ΖΗ; logo, a restante ΑΗ é maior que a

[45] Proposición III, 5.
[46] Proposición III, 1.
[47] Proposición I, 20.

restante HΘ. Pero AH é igual a HΔ[48]; logo, tamén HΔ é maior que HΘ, a menor que a maior; o que, sen dúbida, é imposible; logo, a recta unida dende Z ata H non caerá fóra; logo, caerá en A sobre o punto de contacto.

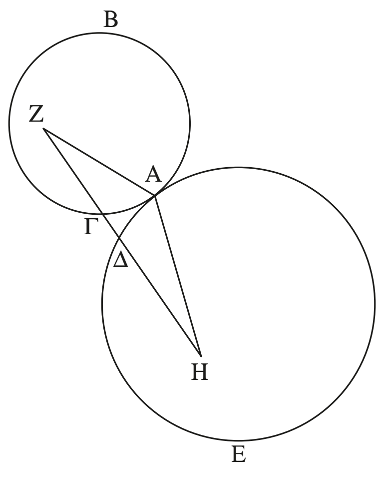
Logo, se dous círculos son tanxentes entre si no interior, a recta que une os seus centros caerá sobre o punto de contacto dos círculos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 12[49]

Se dous círculos son tanxentes entre si no exterior, a recta que une os seus centros pasará polo punto de contacto.

Pois ben, sexan tanxentes entre si os dous círculos ABΓ e AΔE no exterior, no punto A, e tómese o centro Z de ABΓ, e de AΔE, H[50]; digo que a recta unida dende Z ata H pasará polo punto de contacto, por A.

Supoñamos que non, entón, se é posible, pase como ZΓΔH e trácense AZ e AH.



48 H é o centro do círculo AΔE.

49 Heath pensa que esta proposición que aparece en todos os manuscritos e que mantén a edición crítica de J. L.Heiberg e H. Menge, non foi escrita por Euclides, senón que se trataría dunha proba de Herón para a proposición anterior que algún editor incorporou como proposición.

50 Proposición III, 1.

Entón, dado que o punto Z é centro do círculo ΑΒΓ, ZA é igual a ZΓ[51].

Por outra parte, dado que o punto H é centro do círculo ΑΔΕ, HA é igual a HΔ.

Pero foi demostrado tamén que ZA é igual a ZΓ; logo, ZA e AH son iguais a ZΓ e HΔ; de xeito que ZH enteira é maior que ZA e AH; pero tamén menor[52]; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, en ningún caso a recta unida dende Z ata H non pasará polo punto de contacto, por A; logo atravesarao.

Logo, se dous círculos son tanxentes entre si no exterior, a recta que une os seus centros pasará polo punto de contacto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

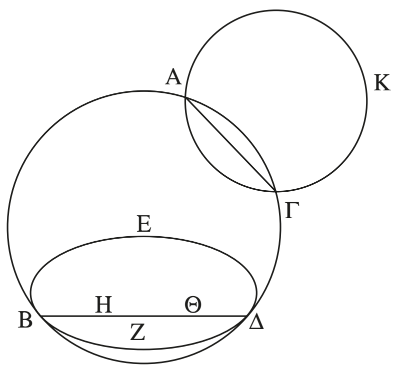
PROPOSICIÓN 13

Un círculo non é tanxente a outro círculo en máis puntos que nun, xa sexa tanxente no interior ou no exterior.

Pois ben, se é posible, sexa tanxente o círculo ΑΒΓΔ a ΕΒΖΔ primeiro no interior en máis puntos que nun, Δ e B.

E tómese o centro H do círculo ΑΒΓΔ, e Θ de ΕΒΖΔ[53].

Logo, a recta unida dende H ata Θ caerá sobre B e Δ[54]. Caia como ΒΗΘΔ.



51 Definición I, 15 e I, 16.
52 Proposición I, 20.
53 Proposición III, 1.
54 Proposición III, 11.

E, dado que o punto H é centro do círculo ΑΒΓΔ, ΒΗ é igual a ΗΔ; logo, ΒΗ é maior que ΘΔ; logo, ΒΘ, moito maior que ΘΔ.

Por outra parte, dado que o punto Θ é centro do círculo ΕΒΖΔ, ΒΘ é igual a ΘΔ; pero foi demostrado que tamén moito maior que ela; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, un círculo non é tanxente a outro círculo no interior en máis puntos que nun.

Digo, asemade, que tampouco no exterior.

Pois ben, se é posible, o círculo ΑΓΚ sexa tanxente ó círculo ΑΒΓΔ no exterior en máis puntos que nun, Α e Γ, e únase ΑΓ.

Entón, dado que sobre a circunferencia de cada un dos círculos ΑΒΓΔ e ΑΓΚ se tomaron dous puntos Α e Γ ó azar, a recta que une os puntos caerá dentro de cada un[55]; pero caeu dentro de ΑΒΓΔ e fóra de ΑΓΚ[56]; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, un círculo non é tanxente no exterior a outro círculo en máis puntos que nun. E foi demostrado que tampouco no interior.

Logo, un círculo non é tanxente a outro círculo en máis puntos que nun, xa sexa tanxente no interior ou no exterior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

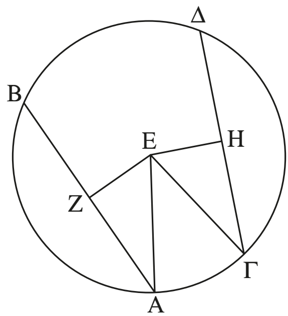
Nun círculo as rectas iguais distan o mesmo do centro e as que distan igual do centro son iguais entre si.

Sexa o círculo ΑΒΓΔ e, nel, sexan iguais as rectas ΑΒ e ΓΔ; digo que ΑΒ e ΓΔ distan o mesmo do centro.

Pois ben, tómese o centro do círculo ΑΒΓΔ e sexa Ε[57], e dende Ε trácense ΕΖ e ΕΗ perpendiculares a ΑΒ e ΓΔ[58] e fáganse ΑΕ e ΕΓ.

---

55 Proposición III, 2.
56 Definición III, 3.
57 Proposición III, 1.
58 Proposición I, 12.



Entón, dado que unha recta EZ trazada polo centro corta en ángulo recto outra recta AB non trazada polo centro, tamén a corta á metade[59].

Logo, AZ é igual a ZB; logo AB é o dobre que AZ.

Entón, polo mesmo, tamén ΓΔ é o dobre que ΓH; e AB é igual a ΓΔ; logo, tamén AZ é igual a ΓH.

E, dado que AE é igual a EΓ, tamén o cadrado de AE é igual ó de EΓ.

Pero os cadrados de AZ e EZ[60] son iguais ó de AE[61] —pois o ángulo Z é recto—; pero os cadrados de EH e HΓ son iguais ó de EΓ —pois o ángulo H é recto—; logo, os cadrados de AZ e ZE son iguais ós de ΓH e HE, dos cales o de AZ é igual ó de ΓH —pois AZ é igual a ΓH—; logo, o cadrado restante de ZE é igual ó de EH; logo, EZ é igual a EH.

Pero nun círculo, dise que as rectas distan o mesmo do centro cando as perpendiculares trazadas ata elas dende o centro son iguais[62]; logo AB e ΓΔ distan o mesmo do centro.

Agora, disten as rectas AB e ΓΔ o mesmo do centro, isto é, sexa EZ igual a EH; digo que AB é igual tamén a ΓΔ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que AB é o dobre que AZ, e ΓΔ que ΓH;

---

59 Proposición III, 3.

60 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

61 Proposición I, 47.

62 Definición III, 4.

e, dado que AE é igual a ΓE, o cadrado de AE é igual ó de ΓE; pero os cadrados de EZ e ZA son iguais ó de AE, mentres que os de EH e HΓ, iguais ó de ΓE. Logo, os de EZ e ZA son iguais ós de EH e HΓ; destes, o de EZ é igual ó de EH —pois EZ é igual a EH—; logo, o cadrado restante de AZ é igual ó de ΓH; logo, AZ é igual a ΓH; e AB é o dobre que AZ, mentres que ΓΔ, o dobre que ΓH; logo, AB é igual a ΓΔ.

Logo, nun círculo as rectas iguais distan o mesmo do centro e as que distan igual do centro son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 15

Nun círculo o diámetro é a recta maior e, das outras, sempre a máis próxima ó centro é maior que a máis afastada.

Sexa o círculo ABΓΔ, sexa o seu diámetro AΔ e o centro E, e sexa BΓ a máis próxima ó diámetro AΔ[63], mentres que ZH a máis afastada; digo que AΔ é a maior, mentres que BΓ maior que ZH.

Pois ben, dende o centro trácense EΘ e EK perpendiculares a BΓ e ZH. E, dado que BΓ é a máis próxima ó centro e ZH a máis afastada, logo, EK é maior que EΘ[64].

Fágase EΛ igual a EΘ[65] e, a través de Λ, lévese ΛM, trazada en ángulo recto con EK[66], ata N e trácense ME, EN, ZE e EH.

E, dado que EΘ é igual a EΛ, tamén é igual BΓ a MN[67].

Por outra parte, dado que AE é igual a EM, mentres que EΔ a EN, logo, AΔ é igual a ME e EN[68].

---

63 Fala da distancia das rectas BΓ e ZH ó diámetro AΔ, cando o que realmente quere indicar é a distancia das rectas BΓ e ZH ó centro do círculo, Definición III, 5.

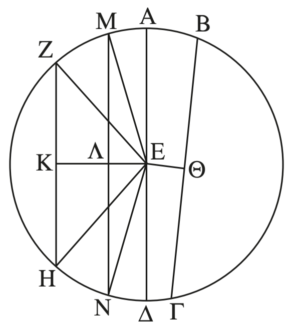
64 Definición III, 5.

65 Proposición I, 3.

66 Proposición I, 11.

67 Proposición III, 14.

68 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.



Pero ME e EN son maiores que MN[69], mentres que MN igual a BΓ; logo, AΔ é maior que BΓ. E, dado que os dous lados, ME e EN, son iguais ós outros dous, ZE e EH, e o ángulo MEN maior que o ángulo ZEH, logo, a base MN é maior que a base ZH[70].

Pero foi demostrado que MN é igual a BΓ. Logo, a maior é o diámetro AΔ, e BΓ maior que ZH.

Logo, nun círculo o diámetro é a recta maior e, das outras, sempre a máis próxima ó centro é maior que a máis afastada; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

A recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo, dende o seu extremo, caerá fóra do círculo e, no espazo entre a recta e a circunferencia, non caerá[71] outra recta, e o ángulo do semicírculo é maior que calquera ángulo rectilíneo agudo, mentres que o restante, menor.

Sexa o círculo ABΓ en torno ó centro Δ e ó diámetro AB; digo que a recta trazada en ángulo recto con AB, dende A, caerá fóra do círculo.

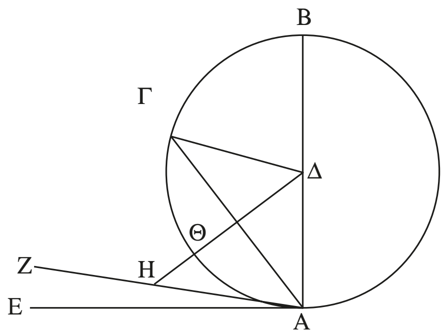
---

69 Proposición I, 20.

70 Proposición I, 24.

71 O verbo grego aquí empregado é un composto de πίπτω «caer», matizado no seu significado por dous prefixos que lle engaden o trazo semántico «entre», redundante neste contexto ó estar explicitado polo complemento circunstancial ἐις τὸν τόπον μετάξυ..., «no espazo entre...».

Supoñamos que non, entón, se é posible, caia dentro como ΓA e únase ΔΓ.



Dado que ΔA é igual a ΔΓ, tamén é igual o ángulo ΔAΓ ó ángulo AΓΔ[72]. E ΔAΓ é recto; logo tamén é recto AΓΔ; entón, os dous ángulos ΔAΓ e AΓΔ do triángulo AΓΔ son iguais a dous rectos; o que, sen dúbida é imposible[73].

Logo, a recta trazada en ángulo recto con BA, dende o punto A, non caerá dentro do círculo.

De xeito semellante poderemos demostrar que tampouco sobre a circunferencia; logo, fóra.

Caia como AE; digo agora que, no espazo entre a recta AE e a circunferencia ΓΘA, non caerá outra recta.

Pois ben, se é posible, caia como ZA e, dende Δ, trácese ΔH perpendicular a ZA[74]. E, dado que AHΔ é recto e ΔAH é menor que un recto, logo, AΔ é maior que ΔH[75].

Pero ΔA é igual a ΔΘ; logo, ΔΘ é maior que ΔH, a menor que a maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, no espazo entre a recta e a circunferencia, non caerá outra recta.

Digo tamén que o ángulo do semicírculo contido pola recta BA e a circunferencia ΓΘA[76] é maior que calquera ángulo

72 Proposición I, 5.
73 Proposición I, 17.
74 Proposición I, 12.
75 Proposición I, 19.
76 Definición III, 7.

rectilíneo agudo, mentres que o restante, contido pola circunferencia ΓΘΑ e a recta ΑΕ, é menor que calquera ángulo rectilíneo agudo.

Pois, se hai un ángulo rectilíneo[77] maior que o contido pola recta ΒΑ e a circunferencia ΓΘΑ, e un menor que o contido pola circunferencia ΓΘΑ e a recta ΑΕ, no espazo entre a circunferencia ΓΘΑ e a recta ΑΕ, caerá unha recta calquera que fará un ángulo contido polas rectas maior que o contido pola recta ΒΑ e a circunferencia ΓΘΑ, e un menor que o contido pola circunferencia ΓΘΑ e a recta ΑΕ.

Pero non cae; logo, un ángulo agudo contido por rectas non será maior que o ángulo contido pola recta ΒΑ e a circunferencia ΓΘΑ, nin tampouco menor que o contido pola circunferencia ΓΘΑ e a recta ΑΕ[78].

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que a recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo, dende un extremo, é tanxente ó círculo. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 17

Trazar dende o punto dado unha liña recta tanxente ó círculo dado.

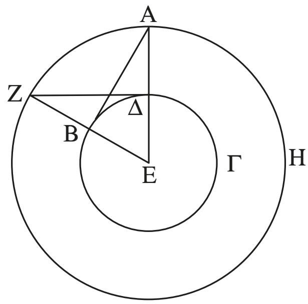
Sexa o punto dado Α e o círculo dado ΒΓΔ; é preciso, entón, trazar dende o punto Α unha liña recta tanxente ó círculo ΒΓΔ.

---

77 Ángulo rectilíneo agudo (menor que o ángulo ΒΑΕ).

78 A medida destes ángulos, formados polo círculo e a tanxente, ós que Jordano de Nemore no século XIII deu o nome de «ángulos de continxencia», foi un tema de controversia entre os estudosos de Euclides ata o século XIII. No século XVI, mentres Peletier nunha carta a Cardano defendía que estes ángulos de continxencia son todos iguais, cun razoamento certamente enxeñoso, Clavius apelaba á simple vista para afirmar que dúas circunferencias tanxentes, unha dentro da outra, dan lugar a dous ángulos de continxencia e a circunferencia exterior proporciona un ángulo menor que o da circunferencia interior. Incluso John Wallis (1616–1703) mantén que estes non son verdadeiros ángulos e que non ten medida. Wallis basea a súa afirmación en que, segundo a definición de Euclides, «un ángulo plano é unha inclinación de dúas liñas» e neste caso as liñas encóntranse sen ser inclinadas. Véxase Heath, vol. 2, pax. 39-43.

Pois ben, tómese E, o centro do círculo[79], e únase AE; co centro E e a distancia EA, debúxese o círculo AZH, e, dende Δ, trácese ΔZ en ángulo recto con EA[80], e fáganse EZ e AB; digo que, dende o punto A, queda trazada AB tanxente ó círculo BΓΔ.



Pois ben, dado que E é centro dos círculos BΓΔ e AZH, logo, EA é igual a EZ, mentres que EΔ a EB; entón, os dous lados AE e EB son iguais ós outros dous ZE e EΔ; e conteñen un ángulo común, E; logo, a base ΔZ é igual á base AB, o triángulo ΔEZ é igual ó triángulo EBA, e os ángulos restantes son iguais ós ángulos restantes[81]; logo, o ángulo EΔZ é igual a EBA.

Pero EΔZ é recto; logo, tamén é recto EBA. E EB é un radio[82]; e a recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo, dende o seu extremo, é tanxente ó círculo[83]; logo, AB é tanxente ó círculo BΓΔ.

Logo, queda trazada dende o punto dado A unha liña recta AB tanxente ó círculo dado BΓΔ; o que, xustamente, era preciso facer.

---

79 Proposición III, 1.

80 Proposición I, 11.

81 Proposición I, 4.

82 Véxase a Nota 1 (Definición III, 1) .

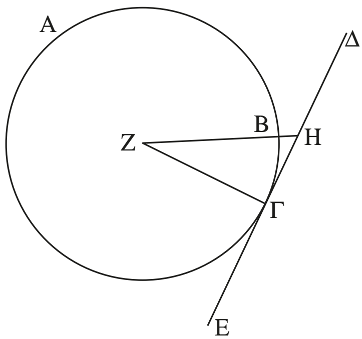
83 Proposición III, 16. Corolario.

PROPOSICIÓN 18

Se unha recta é tanxente a un círculo, e, dende o centro ata o punto de contacto, se une unha recta, a recta unida será perpendicular á tanxente.

Pois ben, sexa tanxente unha liña ΔE a un círculo ABΓ no punto Γ[84], tómese o centro Z do círculo ABΓ, e, dende Z ata Γ, únase ZΓ; digo que ZΓ é perpendicular a ΔE

Pois se non, trácese ZH dende Z perpendicular a ΔE[85].



Entón, dado que o ángulo ZHΓ é recto, logo ZΓH é agudo[86]; e o lado maior está tendido baixo o ángulo maior[87]; logo, ZΓ é maior que ZH; pero ZΓ é igual a ZB; logo, ZB é maior que ZH, a menor que a maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ZH non é perpendicular a ΔE.

De xeito semellante poderemos demostrar que ningunha outra o é excepto ZΓ; logo, ZΓ é perpendicular a ΔE.

Logo, se unha recta é tanxente a un círculo, e, dende o centro ata o punto de contacto, se une unha recta, a recta unida será perpendicular á tanxente; o que, xustamente, era preciso demostrar.

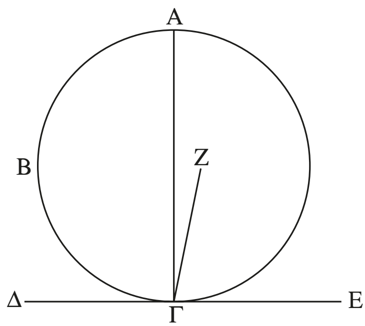
84 Definición III, 2.
85 Proposición I, 12.
86 Proposición I, 17.
87 Proposición I, 19.

PROPOSICIÓN 19

Se unha recta é tanxente a un círculo e, dende o punto de contacto, se traza unha liña recta en ángulo recto coa tanxente, o centro do círculo estará sobre a recta trazada.

Pois ben, sexa tanxente a ΑΒΓ unha recta ΔΕ no punto Γ e, dende Γ, trácese ΓΑ en ángulo recto con ΔΕ[88]; digo que o centro do círculo está sobre ΑΓ.

Supoñamos que non, entón, se é posible, sexa Ζ e únase ΓΖ.



Entón, dado que unha recta ΔΕ é tanxente ó círculo ΑΒΓ e que, dende o centro ata o punto de contacto, uniuse ΖΓ, logo, ΖΓ é perpendicular a ΔΕ[89]; logo, ΖΓΕ é recto.

Pero tamén é recto ΑΓΕ; logo, ΖΓΕ é igual a ΑΓΕ, o menor ó maior; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, Ζ non é centro do círculo ΑΒΓ.

De xeito semellante poderemos demostrar que ningún outro o é excepto un sobre ΑΓ.

Logo, se unha recta é tanxente a un círculo e, dende o punto de contacto, se traza unha liña recta en ángulo recto coa tanxente, o centro do círculo estará sobre a recta trazada; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

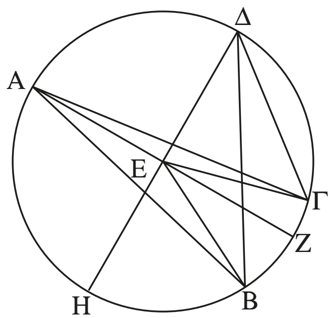
[88] Proposición I, 11.
[89] Proposición III, 18.

PROPOSICIÓN 20

Nun círculo, o ángulo do centro[90] é o dobre que o da circunferencia, cando os ángulos teñen como base a mesma circunferencia.

Sexa o círculo ΑΒΓ, sexa o ángulo do seu centro ΒΕΓ, e ΒΑΓ o da circunferencia, e teñan como base a mesma circunferencia ΒΓ; digo que o ángulo ΒΕΓ é o dobre que ΒΑΓ.

Pois ben, unha vez unida ΑΕ, lévese ata Ζ.



Entón, dado que ΕΑ é igual a ΕΒ, tamén o ángulo ΕΑΒ é igual a ΕΒΑ[91]; logo, os ángulos ΕΑΒ e ΕΒΑ son o dobre que ΕΑΒ.

Pero ΒΕΖ é igual a ΕΑΒ e ΕΒΑ[92]; logo, tamén ΒΕΖ é o dobre que ΕΑΒ.

Entón, polo mesmo, tamén ΖΕΓ é o dobre que ΕΑΓ.

Logo, ΒΕΓ enteiro é o dobre que ΒΑΓ enteiro.

Por outra parte, fágase unha liña quebrada[93] e sexa outro ángulo ΒΔΓ e, unha vez unida ΔΕ, prolónguese ata Η.

---

[90] Enténdase, que ten o vértice no centro ou na circunferencia; véxase a Nota 118 (Proposición I, 24).

[91] Proposición I, 5.

[92] Proposición I, 32.

[93] En grego o verbo é κλάω «romper»; o seu uso técnico en xeometría é presentado e asumido por Aristóteles en *Anal Post*. 1. 10 ,76 b 9; en *Phys. 5,4,15* utiliza o participio substantivado para referirse á liña «quebrada»; posteriormente foi usado por outros matemáticos como Papo ou Apolonio de Pérgamo. Indica que unha liña ó atoparse con outra, recta ou curva, volve atrás cara outro punto, ou ben que dúas rectas trazadas dende dous puntos atópanse nun terceiro.

De xeito semellante poderemos demostrar que o ángulo ΗΕΓ é o dobre que ΕΔΓ, parte dos cales ΗΕΒ é o dobre que ΕΔΒ; logo, o restante ΒΕΓ é o dobre que ΒΔΓ.

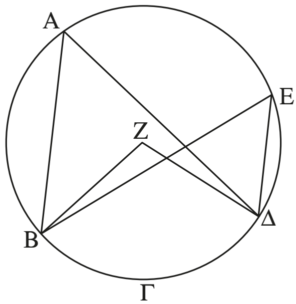
Logo, nun círculo, o ángulo do centro é o dobre que o da circunferencia, cando os ángulos teñen como base a mesma circunferencia; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 21

Nun círculo, os ángulos no mesmo segmento son iguais entre si.

Sexa o círculo ΑΒΓΔ e, no mesmo segmento ΒΑΕΔ, sexan os ángulos ΒΑΔ e ΒΕΔ; digo que os ángulos ΒΑΔ e ΒΕΔ son iguais entre si.

Pois ben, tómese o centro do círculo ΑΒΓΔ e sexa Ζ[94], e trácense ΒΖ e ΖΔ.



E, dado que o ángulo ΒΖΔ está no centro, mentres que ΒΑΔ, na circunferencia, e que teñen como base a mesma circunferencia ΒΓΔ, logo, o ángulo ΒΖΔ é o dobre que ΒΑΔ[95].

Entón, polo mesmo, tamén ΒΖΔ é o dobre que ΒΕΔ; logo, ΒΑΔ é igual a ΒΕΔ.

Logo, nun círculo, os ángulos no mesmo segmento son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

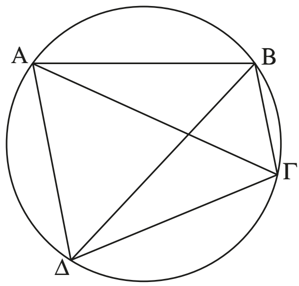
94 Proposición III, 1.
95 Proposición III, 20.

PROPOSICIÓN 22

Os ángulos opostos dos cuadriláteros nos círculos son iguais a dous rectos.

Sexa o círculo ΑΒΓΔ e, nel, sexa o cuadrilátero ΑΒΓΔ; digo que os ángulos opostos son iguais a dous rectos.

Trácense ΑΓ e ΒΔ.



Entón, dado que os tres ángulos de todo triángulo son iguais a dous rectos[96], logo, os tres ángulos ΓΑΒ, ΑΒΓ e ΒΓΑ do triángulo ΑΒΓ son iguais a dous rectos.

Pero ΓΑΒ é igual a ΒΔΓ —pois están no mesmo segmento ΒΑΔΓ[97]—, mentres que ΑΓΒ é igual a ΑΔΒ —pois están no mesmo segmento ΑΔΓΒ—, logo, ΑΔΓ enteiro é igual a ΒΑΓ e ΑΓΒ.

Engádase a ambos ΑΒΓ; logo, ΑΒΓ, ΒΑΓ e ΑΓΒ son iguais a ΑΒΓ e ΑΔΓ.

Pero ΑΒΓ, ΒΑΓ e ΑΓΒ son iguais a dous rectos. Logo, tamén ΑΒΓ e ΑΔΓ son iguais a dous rectos.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén os ángulos ΒΑΔ e ΔΓΒ son iguais a dous rectos.

Logo, os ángulos opostos dos cuadriláteros nos círculos son iguais a dous rectos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

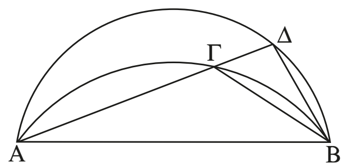
---

96 Proposición I, 32.
97 Proposición III, 21.

PROPOSICIÓN 23

Sobre a mesma recta dous segmentos semellantes e desiguais de círculos non poderán construírse polo mesmo lado.

Pois ben, se é posible, sobre a mesma recta ΑΒ constrúanse dous segmentos semellantes[98] e desiguais de círculos polo mesmo lado, ΑΓΒ e ΑΔΒ, lévese ΑΓΔ e trácense ΓΒ e ΔΒ.



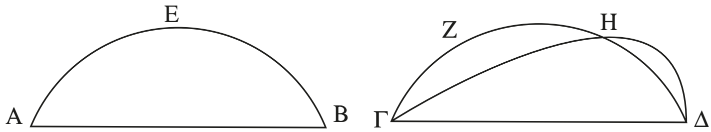
Entón, dado que o segmento ΑΓΒ é semellante ó segmento ΑΔΒ e que segmentos semellantes de círculos son os que admiten ángulos iguais, logo, o ángulo ΑΓΒ é igual a ΑΔΒ, o exterior ó interior; o que, sen dúbida, é imposible[99].

Logo, non poderán construírse sobre a mesma recta polo mesmo lado dous segmentos semellantes e desiguais de círculos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 24

Os segmentos semellantes de círculos sobre rectas iguais son iguais entre si.

Pois ben, sexan ΑΕΒ e ΓΖΔ os segmentos semellantes de círculos sobre as rectas iguais ΑΒ e ΓΔ; digo que o segmento ΑΕΒ é igual ó segmento ΓΖΔ.



Pois ben, se se aplica o segmento ΑΕΒ sobre ΓΖΔ e se se pon o punto Α sobre o Γ e a recta ΑΒ sobre a ΓΔ, cadrará tamén o punto Β co punto Δ, por ser igual ΑΒ a ΓΔ[100]; e, se cadrou ΑΒ

[98] Definición III, 11.
[99] Proposición I, 16.
[100] Nota 31 (Proposición I, 3).

con ΓΔ, cadrará tamén o segmento AEB co ΓΖΔ. Pois se a recta AB cadra con ΓΔ pero o segmento AEB non cadra co ΓΖΔ, ou ben caerá dentro del ou fóra ou desviarase como ΓΗΔ, e un círculo corta un círculo por máis puntos que dous[101]; o que, sen dúbida, é imposible[102].

Logo, se se aplica a recta AB sobre ΓΔ non poderá ser que non cadre tamén o segmento AEB co ΓΖΔ; logo cadrará e será igual a el.

Logo, os segmentos semellantes de círculos sobre rectas iguais son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

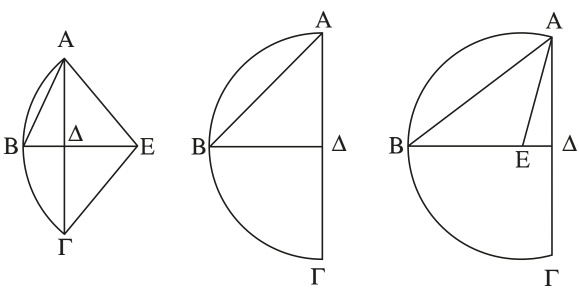
PROPOSICIÓN 25

Dun segmento dado de círculo, rematar o debuxo do círculo do que é segmento.

Sexa ΑΒΓ o segmento dado de círculo; é preciso, entón, do segmento ΑΒΓ, rematar o debuxo do círculo do que precisamente é segmento.

Pois ben, córtese á metade ΑΓ por Δ[103] e, dende o punto Δ, trácese ΔΒ en ángulo recto con ΑΓ[104] e únase AB; logo, o ángulo ΑΒΔ ou é maior, ou igual, ou menor que ΒΑΔ.

Sexa, primeiro, maior, constrúase BAE igual ó ángulo ΑΒΔ na recta BA e no seu punto A[105], lévese ΔΒ ata E e únase ΕΓ.



[101] Só xustifica por que non pode desviarse xa que acaba de probar na Proposición III, 23 que non pode caer dentro nin fóra pois non é posible construír dous segmentos semellantes e desiguais sobre a mesma recta polo mesmo lado.

[102] Proposición III, 10.

[103] Proposición I, 10.

[104] Proposición I, 11.

[105] Proposición I, 23.

Entón, dado que o ángulo ABE é igual a BAE, logo, tamén a recta EB é igual a EA[106].

E, dado que AΔ é igual a ΔΓ, e ΔE, común, entón os dous lados AΔ e ΔE son iguais respectivamente ós outros dous, ΓΔ e ΔE; e o ángulo AΔE é igual a ΓΔE —pois cada un deles é recto—; logo, a base AE é igual á base ΓE[107].

Pero foi demostrado que AE é igual a BE; logo, tamén BE é igual a ΓE; logo, as tres, AE, EB e EΓ, son iguais entre si; logo, o círculo debuxado co centro E e, como distancia, unha das rectas, AE, EB ou EΓ, pasará tamén polos demais puntos[108] e quedará rematado o seu debuxo.

Logo, o debuxo do círculo dun segmento dado de círculo queda rematado. E é evidente que o segmento ABΓ é menor que un semicírculo por atoparse o centro E fóra del.

De xeito semellante, aínda que o ángulo ABΔ sexa igual a BAΔ, ó ser AΔ igual tanto a BΔ como a ΔΓ, as tres, ΔA, ΔB e ΔΓ, serán iguais entre si e Δ será centro do círculo que se completou e, evidentemente, ABΓ será un semicírculo.

E se ABΔ é menor que BAΔ e construímos na recta BA e no seu punto A un ángulo igual ó ángulo ABΔ, o centro caerá dentro do segmento ABΓ, sobre ΔB, e, evidentemente, o segmento ABΓ será maior que un semicírculo.

Logo, dun segmento dado de círculo, queda rematado o debuxo do círculo; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 26

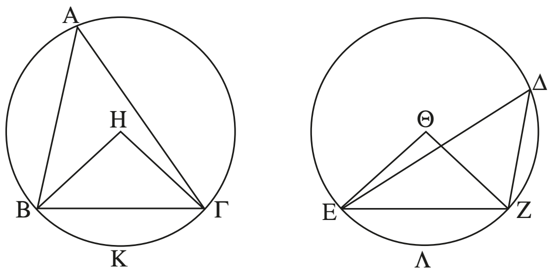
Nos círculos iguais, os ángulos iguais están sobre circunferencias iguais[109], tanto se están nos centros como se están nas circunferencias.

Sexan ABΓ e ΔEZ círculos iguais e, neles, sexan BHΓ e EΘZ ángulos iguais do centro, mentres BAΓ e EΔZ, das cir-

[106] Proposición I, 6.
[107] Proposición I, 4.
[108] Proposición III, 9.
[109] Definición III, 9.

cunferencias[110]; digo que a circunferencia ΒΚΓ é igual á circunferencia ΕΛΖ.

Pois ben, trácense ΒΓ e ΕΖ.



E, dado que os círculos ΑΒΓ e ΔΕΖ son iguais, iguais son os radios[111]; entón, as dúas rectas ΒΗ e ΗΓ son iguais ás dúas ΕΘ e ΘΖ; e o ángulo Η é igual ó ángulo Θ; logo, a base ΒΓ é igual á base ΕΖ[112].

E, dado que o ángulo Α é igual a Δ, logo, o segmento ΒΑΓ é semellante ó segmento ΕΔΖ[113], e están sobre rectas iguais; pero os segmentos semellantes de círculos sobre rectas iguais son iguais entre si[114]; logo, o segmento ΒΑΓ é igual a ΕΔΖ.

Pero tamén é igual o círculo ΑΒΓ enteiro ó círculo ΔΕΖ enteiro; logo, a circunferencia ΒΚΓ restante é igual á circunferencia ΕΛΖ.

Logo, nos círculos iguais, os ángulos iguais están sobre circunferencias iguais, tanto se están nos centros como se están nas circunferencias; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[110] Esta proposición inclúe dúas afirmacións diferenciadas, unha referente ós ángulos que están nos centros e outra para os que están nas circunferencias. Como na Proposición III, 20 xa probou que, nun círculo, o ángulo do centro é o dobre que o da circunferencia cando os ángulos están sobre a mesma circunferencia, pode facer unha demostración conxunta, pois dicir que os ángulos ΒΗΓ e ΕΘΖ son iguais é equivalente a dicir que os ángulos ΒΑΓ e ΕΔΖ son iguais.

[111] Definición III, 1.

[112] Proposición I, 4.

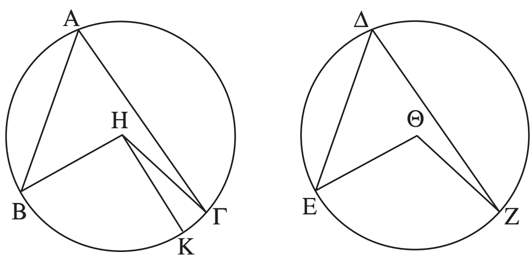
[113] Definición III, 11.

[114] Proposición III, 24.

PROPOSICIÓN 27

Nos círculos iguais, os ángulos que están sobre circunferencias iguais son iguais entre si, tanto se están nos centros como se están nas circunferencias.

Pois ben, nos círculos iguais ΑΒΓ e ΔΕΖ[115], sobre as circunferencias iguais ΒΓ e ΕΖ, estean nos centros Η e Θ os ángulos ΒΗΓ e ΕΘΖ[116], mentres que nas circunferencias os ángulos ΒΑΓ e ΕΔΖ; digo que o ángulo ΒΗΓ é igual a ΕΘΖ, mentres que ΒΑΓ é igual a ΕΔΖ.



Pois se non é igual ΒΗΓ a ΕΘΖ, un deles é maior. Sexa maior ΒΗΓ e constrúase na recta ΒΗ e no seu punto Η o ángulo ΒΗΚ igual a ΕΘΖ[117]; pero os ángulos iguais están sobre circunferencias iguais cando son do centro[118]; logo, a circunferencia ΒΚ é igual á circunferencia ΕΖ.

Pero ΕΖ é igual a ΒΓ; logo, tamén ΒΚ é igual a ΒΓ, a menor á maior; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, o ángulo ΒΗΓ non é desigual a ΕΘΖ; logo é igual.

E o ángulo Α é metade de ΒΗΓ, mentres que Δ é metade de ΕΘΖ[119]; logo, tamén o ángulo Α é igual a Δ.

Logo, nos círculos iguais, os ángulos que están sobre circunferencias iguais son iguais entre si, tanto se están nos centros

115 Definición III, 1.
116 Definición III, 9.
117 Proposición I, 23.
118 Proposición III, 26.
119 Proposición III, 20.

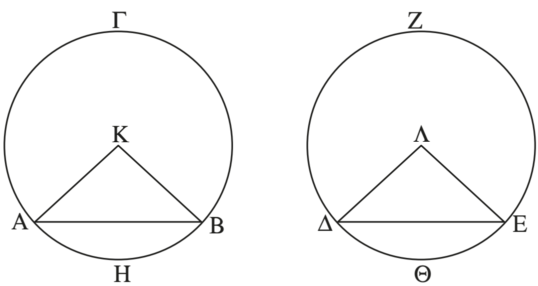
como se están nas circunferencias; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 28

Nos círculos iguais, as rectas iguais cortan circunferencias iguais, a maior á maior, a menor á menor.

Sexan ΑΒΓ e ΔΕΖ círculos iguais e, nos círculos iguais, sexan as rectas iguais ΑΒ e ΔΕ que cortan as circunferencias maiores ΑΓΒ e ΔΖΕ e as menores ΑΗΒ e ΔΘΕ; digo que a circunferencia maior ΑΓΒ é igual á circunferencia maior ΔΖΕ, mentres que a circunferencia menor ΑΗΒ a ΔΘΕ.

Pois ben, tómense os centros dos círculos Κ e Λ[120] e trácense ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ e ΛΕ.



E, dado que son círculos iguais, son tamén iguais os radios[121]; entón, os dous lados ΑΚ e ΚΒ son iguais ós outros dous ΔΛ e ΛΕ; e a base ΑΒ é igual á base ΔΕ; logo, o ángulo ΑΚΒ é igual ó ángulo ΔΛΕ[122].

Pero os ángulos iguais están sobre circunferencias iguais, cando son dos centros[123]; logo, a circunferencia ΑΗΒ é igual a ΔΘΕ.

[120] Proposición III, 1.
[121] Definición III, 1.
[122] Proposición I, 8.
[123] Proposición III, 26.

Pero tamén é igual o círculo ΑΒΓ enteiro ó círculo ΔΕΖ enteiro; logo, tamén a circunferencia restante ΑΓΒ é igual á circunferencia restante ΔΖΕ.

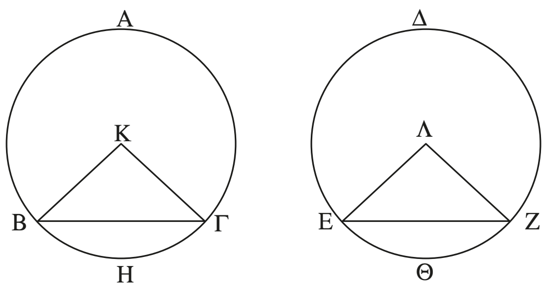
Logo, nos círculos iguais, as rectas iguais cortan circunferencias iguais, a maior á maior, a menor á menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 29

Nos círculos iguais, rectas iguais están tendidas baixo circunferencias iguais.

Sexan ΑΒΓ e ΔΕΖ círculos iguais e, neles, córtense as circunferencias iguais ΒΗΓ e ΕΘΖ, e trácense as rectas ΒΓ e ΕΖ; digo que ΒΓ é igual a ΕΖ.

Pois ben, tómense os centros dos círculos, sexan Κ e Λ[124] e trácense ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ e ΛΖ.



E, dado que a circunferencia ΒΗΓ é igual á circunferencia ΕΘΖ, tamén o ángulo ΒΚΓ é igual a ΕΛΖ[125]. E, dado que os círculos ΑΒΓ e ΔΕΖ son iguais, son tamén iguais os radios[126]; entón as dúas rectas ΒΚ e ΚΓ son iguais ás outras dúas ΕΛ e ΛΖ; e conteñen ángulos iguais; logo, a base ΒΓ é igual á base ΕΖ[127].

Logo, nos círculos iguais, rectas iguais están tendidas baixo circunferencias iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

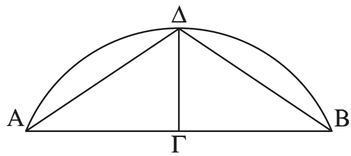
124 Proposición III, 1.
125 Proposición III, 27.
126 Definición III, 1.
127 Proposición I, 4.

PROPOSICIÓN 30

Cortar á metade a circunferencia dada.

Sexa a circunferencia dada ΑΔΒ; é preciso, entón, cortar á metade a circunferencia ΑΔΒ.

Únase ΑΒ, córtese á metade por Γ[128] e, dende o punto Γ, trácese ΓΔ en ángulo recto coa recta ΑΒ[129], e trácense ΑΔ e ΔΒ.



E, dado que ΑΓ é igual a ΓΒ, e ΓΔ, común, entón, os dous lados ΑΓ e ΓΔ son iguais ós outros dous, ΒΓ e ΓΔ; e o ángulo ΑΓΔ é igual ó ángulo ΒΓΔ —pois cada un deles é recto—; logo, a base ΑΔ é igual á base ΔΒ[130].

Pero as rectas iguais cortan circunferencias iguais, a maior a maior, a menor a menor[131]; e cada unha das circunferencias ΑΔ e ΔΒ é menor que un semicírculo; logo, é igual a circunferencia ΑΔ á circunferencia ΔΒ.

Logo, a circunferencia dada queda cortada á metade polo punto Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 31

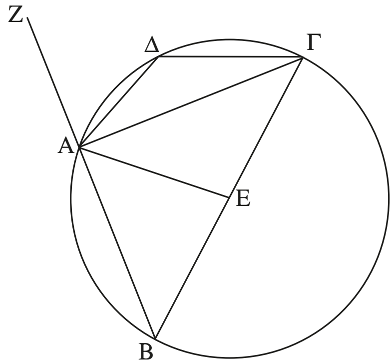
Nun círculo, o ángulo no*[132] *semicírculo é recto, o ángulo no segmento maior é menor que un recto e o ángulo no segmento menor é maior que un recto; e, asemade, o ángulo do*[133] *segmento maior é maior que un recto e o ángulo do segmento menor é menor que un recto.

Sexa o círculo ΑΒΓΔ, sexa o seu diámetro ΒΓ e o centro, Ε, e trácense ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ e ΔΓ; digo que o ángulo ΒΑΓ no semicír-

128 Proposición I, 10.
129 Proposición I, 11.
130 Proposición I, 4.
131 Proposición III, 28.
132 Definición III, 8.
133 Definición III, 7.

culo ΒΑΓ é recto, o ángulo ΑΒΓ no segmento ΑΒΓ maior que o semicírculo é menor que un recto, e o ángulo ΑΔΓ no segmento ΑΔΓ menor que o semicírculo é maior que un recto.

Únase ΑΕ e lévese ΒΑ ata Ζ.



E, dado que ΒΕ é igual a ΕΑ, tamén o ángulo ΑΒΕ é igual a ΒΑΕ[134].

Por outra parte, dado que ΓΕ é igual a ΕΑ, tamén ΑΓΕ é igual a ΓΑΕ; logo, o ángulo ΒΑΓ enteiro é igual ós dous, ΑΒΓ e ΑΓΒ.

Pero tamén o ángulo ΖΑΓ, exterior ó triángulo ΑΒΓ, é igual ós dous ángulos ΑΒΓ e ΑΓΒ[135]; logo, o ángulo ΒΑΓ tamén é igual a ΖΑΓ; logo, cada un deles é recto[136]; logo, o ángulo ΒΑΓ no semicírculo ΒΑΓ é recto.

E, dado que, do triángulo ΑΒΓ, os dous ángulos ΑΒΓ e ΒΑΓ son menores que dous rectos[137] e ΒΑΓ é recto, logo, o ángulo ΑΒΓ é menor que un recto; e está no segmento ΑΒΓ maior que o semicírculo.

E, dado que ΑΒΓΔ é un cuadrilátero nun círculo e os ángulos opostos dos cuadriláteros nos círculos son iguais a dous rectos[138], tamén o ángulo ΑΒΓ é menor que un recto; logo, o ángulo

---

134 Proposición I, 5.
135 Proposición I, 32.
136 Definición I, 10.
137 Definición I, 17.
138 Proposición III, 22.

ΑΔΓ restante é maior que un recto; e está no segmento ΑΔΓ menor que o semicírculo.

Digo que tamén o ángulo do segmento maior, o contido pola circunferencia ΑΒΓ e a recta ΑΓ, é maior que un recto, e o ángulo do segmento menor, o contido pola circunferencia ΑΔΓ[139] e a recta ΑΓ, é menor que un recto. E, de seu, isto é evidente. Pois, dado que o ángulo contido polas rectas ΒΑ e ΑΓ é recto, logo, o contido pola circunferencia ΑΒΓ e a recta ΑΓ é maior que un recto. Por outra parte, dado que o contido polas rectas ΑΓ e ΑΖ é recto, logo, o contido pola recta ΓΑ e a circunferencia ΑΔΓ[140] é menor que un recto.

Logo, nun círculo, o ángulo no semicírculo é recto, o ángulo no segmento maior é menor que un recto e o ángulo no segmento menor é maior que un recto; e, asemade, o ángulo do segmento maior é maior que un recto e o ángulo do segmento menor é menor que un recto; o que, xustamente, era preciso demostrar.[141]

PROPOSICIÓN 32

Se unha recta é tanxente a un círculo e dende o punto de contacto ata o círculo se leva unha recta que corte o círculo, os ángulos que fai coa tanxente serán iguais ós ángulos nos segmentos alternos do círculo.

Pois ben, sexa a recta ΕΖ tanxente ó círculo ΑΒΓΔ no punto Β e, dende o punto Β, lévese unha recta ΒΔ no círculo ΑΒΓΔ que o corte; digo que os ángulos que faga ΒΔ coa tanxente ΕΖ serán

---

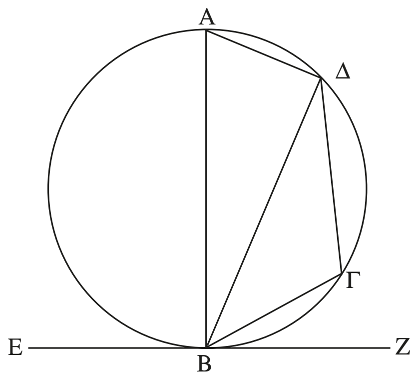
[139] Nalgúns manuscritos falta a letra Γ e noutros foi engadida.

[140] Nalgúns manuscritos tamén falta a letra Γ e noutros foi engadida.

[141] Os manuscritos presentan aquí o seguinte corolario: «Por tanto, a partir disto é evidente que se un ángulo dun triángulo é igual ós outros dous, o ángulo é recto por ser tamén o exterior a aquel igual ós mesmos; e se os adxacentes son iguais, son rectos». Heiberg considera que é unha interpolación posterior a Teón por dous motivos: porque a apostila final da proposición está antes do corolario e non ó final, como é usual nos *Elementos,* e porque conceptualmente non é necesario. Segundo o editor parece claro que, se Euclides quixera incluír este corolario, xa o tería colocado despois da Proposición I, 32, pois non hai nada nesta Proposición III, 31, en relación co corolario, que non estivera naquela. En efecto, se temos un triángulo ΑΒΓ, despois da Proposición I, 32, podemos razoar exactamente igual: «se o ángulo ΒΑΓ dun triángulo é igual ós outros dous, ΑΒΓ e ΑΓΒ, entón prolongamos ΒΑ ata Ζ e tamén [pola Proposición I, 32] o ángulo ΖΑΓ, exterior ó triángulo ΑΒΓ, é igual ós dous ángulos ΑΒΓ e ΑΓΒ; logo, o ángulo ΒΑΓ tamén é igual a ΖΑΓ; logo, [como son adxacentes] cada un deles é recto».

iguais ós ángulos nos segmentos alternos do círculo, isto é, que o ángulo ZBΔ é igual ó ángulo construído no segmento BAΔ, e o ángulo EBΔ é igual ó ángulo construído no segmento ΔΓB.

Pois ben, dende B, trácese BA en ángulo recto con EZ[142], tómese un punto Γ ó azar sobre a circunferencia BΔ e trácense AΔ, ΔΓ e ΓB.



E, dado que unha recta EZ é tanxente ó círculo ABΓΔ en B, e, dende o punto de contacto, queda trazada BA en ángulo recto coa tanxente, logo, o centro do círculo ABΓΔ está sobre BA[143].

Logo, BA é diámetro do círculo ABΓΔ[144]; logo, AΔB, que é un ángulo nun semicírculo, é recto[145]. Logo, os ángulos restantes, BAΔ e ABΔ, son iguais a un recto[146].

Pero tamén ABZ é recto; logo, ABZ é igual a BAΔ e ABΔ.

Quítese a ambos ABΔ; logo, o ángulo restante ΔBZ é igual ó ángulo BAΔ no segmento alterno do círculo.

E, dado que ABΓΔ é un cuadrilátero nun círculo, os seus ángulos opostos son iguais a dous rectos[147].

Pero tamén os ángulos ΔBZ e ΔBE son iguais a dous rectos[148]; logo, ΔBZ e ΔBE son iguais a BAΔ e BΓΔ, dos cales, foi

142 Proposición I, 11.
143 Proposición III, 19.
144 Definición I, 17.
145 Proposición III, 31.
146 Proposición I, 32.
147 Proposición III, 22.
148 Proposición I, 13.

demostrado que BAΔ é igual a ΔBZ; logo, o ángulo restante ΔBE é igual ó ángulo ΔΓB no segmento ΔΓB alterno do círculo.

Logo, se unha recta é tanxente a un círculo e dende o punto de contacto ata o círculo se leva unha recta que corte o círculo, os ángulos que fai coa tanxente serán iguais ós ángulos nos segmentos alternos do círculo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 33

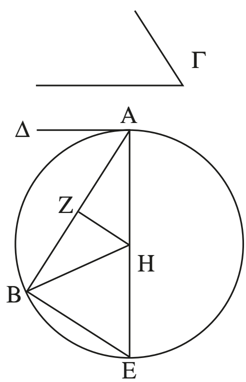
Sobre a recta dada debuxar un segmento de círculo que admita un ángulo igual ó ángulo rectilíneo dado.

Sexa a recta dada AB e o ángulo rectilíneo dado Γ; é preciso, entón, sobre a recta dada AB debuxar un segmento de círculo que admita un ángulo igual a Γ.

Entón, o ángulo Γ ou ben é agudo ou recto ou obtuso.

Sexa, primeiro, agudo e, como na primeira figura, constrúase na recta AB e no punto A o ángulo BAΔ igual ó ángulo Γ[149]; logo, é agudo tamén BAΔ.

Trácese AE en ángulo recto con ΔA[150], córtese AB á metade por Z[151] e, dende Z, trácese ZH en ángulo recto con AB e únase HB.



[149] Proposición I, 23.
[150] Proposición I, 11.
[151] Proposición I, 10.

E, dado que AZ é igual a ZB, e ZH, común, entón os dous lados AZ e ZH son iguais ós outros dous BZ e ZH; e o ángulo AZH é igual a BZH; logo, a base AH é igual á base BH[152].

Logo, o círculo debuxado co centro H e a distancia HA pasará tamén por B. Debúxese, sexa ABE e únase EB.

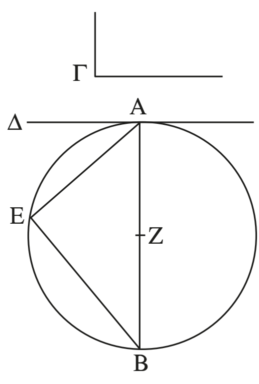
Entón, dado que AΔ, dende o extremo do diámetro AE, dende A, está en ángulo recto con AE, logo, AΔ é tanxente ó círculo ABE[153]; entón, dado que unha recta AΔ é tanxente ó círculo ABE, e dende o punto de contacto A ata o círculo ABE se levou unha recta AB, logo, o ángulo ΔAB é igual ó ángulo AEB no segmento alterno do círculo[154].

Pero ΔAB é igual a Γ; logo, tamén Γ é igual a AEB.

Logo, sobre a recta dada AB queda debuxado un segmento de círculo, AEB, que admite un ángulo AEB igual ó dado, Γ.

Agora sexa recto o ángulo Γ; e, asemade, cumpra debuxar sobre AB un segmento de círculo que admita un ángulo igual ó ángulo recto Γ.

Constrúase o ángulo BAΔ igual ó ángulo recto Γ, como está na segunda figura, e córtese AB á metade por Z e co centro Z e como distancia unha das dúas, ZA ou ZB, debúxese o círculo AEB.



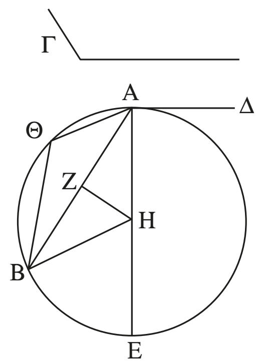
152 Proposición I, 4.
153 Proposición III, 16. Corolario.
154 Proposición III, 32.

Logo, a recta AΔ é tanxente do círculo ABE por ser recto o ángulo A. E o ángulo BAΔ é igual ó ángulo no segmento AEB —pois tamén el é recto ó estar nun semicírculo[155].

Pero tamén o ángulo BAΔ é igual a Γ. Logo, tamén o ángulo en AEB é igual a Γ.

Logo, asemade, queda debuxado sobre AB o segmento AEB de círculo que admite un ángulo igual a Γ.

Agora sexa obtuso o ángulo Γ; constrúase na recta AB e no punto A o ángulo BAΔ igual a el, como está na terceira figura, trácese AE en ángulo recto con AΔ, córtese, asemade, AB á metade por Z, trácese ZH en ángulo recto con AB e únase HB.



E, dado que, asemade, AZ é igual a ZB, e ZH, común, entón os dous lados AZ e ZH son iguais ós outros dous, BZ e ZH; e o ángulo AZH é igual a BZH; logo, a base AH é igual á base BH; logo, o círculo debuxado co centro H e coa distancia HA pasará tamén por B.

Pase como AEB. E, dado que AΔ, dende un extremo, está en ángulo recto co diámetro AE, logo, AΔ é tanxente do círculo ABE; e AB levouse dende o punto de contacto A; logo, o ángulo BAΔ é igual ó ángulo construído no segmento AΘB alterno do círculo. Pero o ángulo BAΔ é igual a Γ. Logo, tamén, o ángulo no segmento AΘB é igual a Γ.

[155] Proposición III, 31.

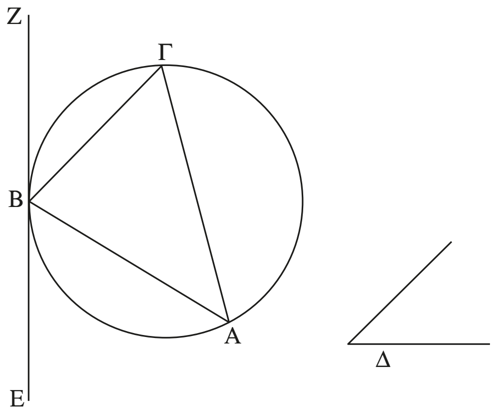
Logo, sobre a recta dada AB queda debuxado un segmento de círculo, AΘB, que admite un ángulo igual a Γ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 34

Do círculo dado, quitar un segmento que admita un ángulo igual ó ángulo rectilíneo dado.

Sexa o círculo dado ABΓ e o ángulo rectilíneo dado Δ; entón, é preciso, do círculo ABΓ, quitar un segmento que admita un ángulo igual ó ángulo rectilíneo dado Δ.

Trácese EZ tanxente a ABΓ no punto B[156] e, na recta ZB e no seu punto B, constrúase ZBΓ igual ó ángulo Δ[157].



Entón, dado que unha recta EZ é tanxente ó círculo ABΓ e que dende o punto de contacto B se levou BΓ, logo, o ángulo ZBΓ é igual ó ángulo construído no segmento alterno BAΓ[158].

Pero ZBΓ é igual a Δ; logo, tamén o ángulo no segmento BAΓ é igual ó ángulo Δ.

Logo, do círculo dado ABΓ quitouse o segmento BAΓ que admite un ángulo igual ó ángulo rectilíneo dado Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

---

[156] Proposición III, 16. Corolario.

[157] Proposición I, 23.

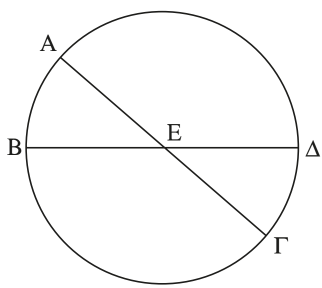
[158] Proposición III, 32.

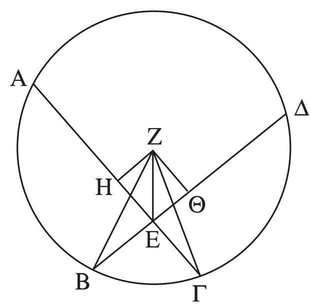
PROPOSICIÓN 35

Se nun círculo se cortan dúas rectas unha á outra, o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos dunha é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos da outra.

Pois ben, no círculo ΑΒΓΔ córtense unha á outra as dúas rectas ΑΓ e ΒΔ no punto Ε; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΕ e ΕΓ é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por ΔΕ e ΕΒ.

Entón, se as rectas ΑΓ e ΒΔ atravesan o centro de xeito que Ε é centro do círculo ΑΒΓΔ, é evidente que, sendo iguais ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ e ΕΒ, tamén o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΕ e ΕΓ é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por ΔΕ e ΕΒ.





Non atravesen o centro ΑΓ e ΔΒ, tómese o centro de ΑΒΓΔ e sexa Ζ[159], trácense ΖΗ e ΖΘ, dende Ζ, perpendiculares ás rectas ΑΓ e ΔΒ[160] e fáganse ΖΒ, ΖΓ e ΖΕ.

Ε, dado que unha recta ΗΖ trazada polo centro corta en ángulo recto unha recta ΑΓ non trazada polo centro, tamén a corta á metade[161]; logo, ΑΗ é igual a ΗΓ.

Entón, dado que a recta ΑΓ queda cortada en partes iguais por Η e en partes desiguais por Ε, logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΕ e ΕΓ xunto co cadrado de ΕΗ é

159 Proposición III, 1.
160 Proposición I, 12.
161 Proposición III, 3.

igual ó cadrado de HΓ[162]; engádase[163] o cadrado de HZ; logo, o contido por AE e EΓ xunto cos cadrados de HE e HZ é igual ós cadrados de ΓH e HZ.

Pero o cadrado de ZE é igual ós cadrados de EH e HZ[164], e o cadrado de ZΓ é igual ós cadrados de ΓH e HZ; logo, o contido por AE e EΓ xunto co cadrado de ZE é igual ó cadrado de ZΓ.

Pero ZΓ é igual a ZB; logo, o contido por AE e EΓ xunto co cadrado de EZ é igual ó cadrado de ZB.

Entón, polo mesmo, tamén o contido por ΔE e EB xunto co cadrado de ZE é igual ó cadrado de ZB.

Pero tamén foi demostrado que o contido por AE e EΓ xunto co cadrado de ZE é igual ó cadrado de ZB; logo, o contido por AE e EΓ xunto co cadrado de ZE é igual ó contido por ΔE e EB xunto co cadrado de ZE.

Quítese a ambos o cadrado de ZE; logo, o paralelogramo de ángulos rectos restante contido por AE e EΓ é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por ΔE e EB.

Logo, se nun círculo dúas rectas se cortan unha á outra, o paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos dunha é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polos segmentos da outra; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 36

Se se toma un punto fóra dun círculo e dende el caen dúas rectas no círculo e unha delas corta o círculo e a outra é tanxente a el, o contido pola recta que corta enteira e a exterior tomada entre o punto e a circunferencia convexa será igual ó cadrado da tanxente.

Pois ben, tómese un punto Δ fóra do círculo ABΓ e, dende Δ, caian as dúas rectas ΔΓA[165] e ΔB no círculo ABΓ; corte ΔΓA o

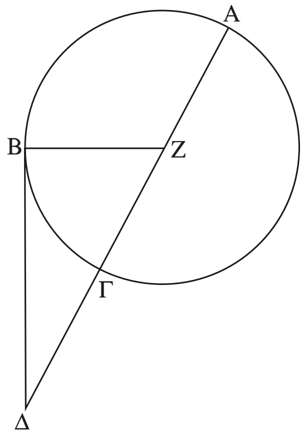
[162] Proposición II, 5.

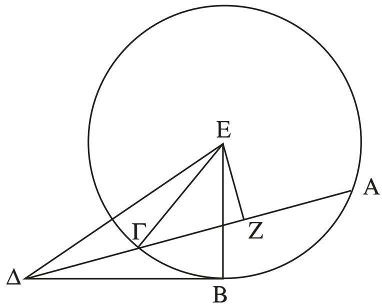
[163] A maioría dos manuscritos presentan aquí «a ambos»; Heiberg considera que é unha interpolación.

[164] Proposición I, 47.

[165] Nalgúns manuscritos falta a letra A en noutros foi engadida.

círculo ΑΒΓ, e ΒΔ sexa tanxente a el; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por ΑΔ e ΔΓ é igual ó cadrado de ΔΒ.





Logo, ou ΔΓΑ[166] atravesa o centro ou non.

Atravese primeiro o centro, sexa Ζ centro do círculo ΑΒΓ e únase ΖΒ; logo, o ángulo ΖΒΔ é recto[167].

E, dado que a recta ΑΓ queda cortada á metade en Ζ, e ΓΔ se lle engadiu, logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de ΖΓ é igual ó cadrado de ΖΔ[168].

Pero ΖΓ é igual a ΖΒ; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de ΖΒ é igual ó cadrado de ΖΔ.

Pero os cadrados de ΖΒ e ΒΔ son iguais ó de ΖΔ[169]; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de ΖΒ é igual ós cadrados de ΖΒ e ΒΔ.

Quítese a ambos o cadrado de ΖΒ; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ restante é igual ó cadrado da tanxente ΔΒ.

Agora, non atravese ΔΓΑ o centro do círculo ΑΒΓ, tómese o centro Ε[170], trácese ΕΖ dende Ε, perpendicular a ΑΓ[171] e fáganse ΕΒ, ΕΓ e ΕΔ; logo, ΕΒΔ é recto.

166 Nalgúns manuscritos falta a letra Δ e noutros foi engadida.
167 Proposición III, 18.
168 Proposición II, 6.
169 Proposición I, 47.
170 Proposición III, 1.
171 Proposición I, 12.

E, dado que unha recta EZ trazada polo centro corta en ángulo recto unha recta ΑΓ que non atravesa o centro, tamén a corta á metade[172]; logo, AZ é igual a ZΓ.

E, dado que a recta ΑΓ queda cortada á metade no punto Z, e se lle engadiu ΓΔ, logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de ZΓ é igual ó cadrado de ZΔ.

Engádaselle a ambos o cadrado de ZE; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto cos cadrados de ΓZ e ZE é igual ós cadrados de ZΔ e ZE.

Pero o cadrado de EΓ é igual ós cadrados de ΓZ e ZE —pois o ángulo EZΓ é recto—; e o cadrado de EΔ é igual ós cadrados de ΔZ e ZE; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de EΓ é igual ó cadrado de EΔ. E EΓ é igual a EB; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de EB é igual ó cadrado de EΔ.

Pero os cadrados de EB e ΒΔ son iguais ó cadrado de EΔ —pois o ángulo EΒΔ é recto—; logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ xunto co cadrado de EB é igual ós cadrados de EB e ΒΔ.

Quítese a ambos o cadrado de EB; logo, o restante contido por ΑΔ e ΔΓ é igual ó cadrado de ΔΒ.

Logo, se se toma un punto fóra dun círculo e dende el caen dúas rectas no círculo e unha delas corta o círculo e a outra é tanxente a el, o contido pola recta que corta enteira e a exterior tomada entre o punto e a circunferencia convexa será igual ó cadrado da tanxente; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 37

Se se toma un punto fóra dun círculo e dende o punto caen dúas rectas no círculo e unha delas corta o círculo e a outra cae nel, e o contido[173] pola recta que corta enteira e a exterior tomada entre o punto e a circunferen-

---

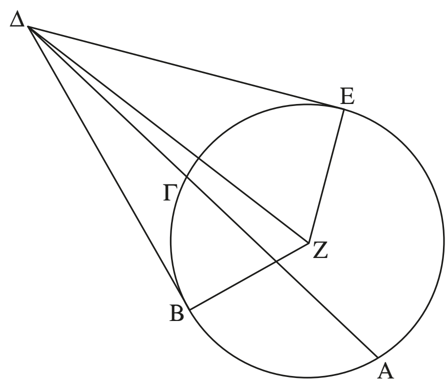
[172] Proposición III, 3.

[173] Definición II, 1. Paralelogramo de ángulos rectos contido por dúas rectas.

cia convexa é igual ó cadrado da que cae nel, a que cae nel será tanxente ó círculo.

Pois ben, tómese un punto Δ fóra do círculo ΑΒΓ, caian, dende Δ, as dúas rectas ΔΓΑ e ΔΒ no círculo ΑΒΓ, corte ΔΓΑ o círculo e ΔΒ caia nel, e o contido por ΑΔ e ΔΓ[174] sexa igual ó cadrado de ΔΒ; digo que ΔΒ é tanxente ó círculo ΑΒΓ.

Pois ben, trácese ΔΕ tanxente a ΑΒΓ[175], tómese o centro do círculo ΑΒΓ e sexa Ζ[176], e fáganse ΖΕ, ΖΒ e ΖΔ.



Logo, o ángulo ΖΕΔ é recto[177].

E, dado que ΔΕ é tanxente ó círculo ΑΒΓ e que ΔΓΑ o corta, logo, o contido por ΑΔ e ΔΓ é igual ó cadrado de ΔΕ[178].

E tamén o contido por ΑΔ e ΔΓ era igual ó cadrado de ΔΒ; logo, o cadrado de ΔΕ e igual ó de ΔΒ; logo, ΔΕ é igual a ΔΒ.

Pero tamén ΖΕ é igual a ΖΒ; logo, os dous lados ΔΕ e ΕΖ son iguais ós dous lados ΔΒ e ΒΖ; e a base deles, ΖΔ, é común; logo, o ángulo ΔΕΖ é igual ó ángulo ΔΒΖ[179].

---

174 Definición II, 1.
175 Proposición III, 17.
176 Proposición III, 1.
177 Proposición III, 18.
178 Proposición III, 36.
179 Proposición I, 8.

Pero ΔEZ é recto; logo, tamén ΔBZ é recto. E ZB ó ser prolongada é un diámetro; pero a recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo, dende un extremo, é tanxente ó círculo[180]; logo ΔB é tanxente ó círculo ABΓ. De xeito semellante poderase demostrar tamén se o centro se atopa sobre AΓ.

Logo, se se toma un punto fóra dun círculo e dende o punto caen dúas rectas no círculo e unha delas corta o círculo e a outra cae nel, e o contido pola recta que corta enteira e a exterior tomada entre o punto e a circunferencia convexa é igual ó cadrado da que cae nel, a que cae nel será tanxente ó círculo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[180] Proposición III, 16. Corolario.

LIBRO IV

DEFINICIÓNS

1. Dise que unha figura rectilínea está inscrita nunha figura rectilínea cando cada un dos ángulos[1] da figura inscrita toca cada lado daquela na que está inscrita.
2. Dise, de xeito semellante, que unha figura está circunscrita a unha figura cando cada lado da circunscrita toca cada ángulo daquela á que está circunscrita.
3. Dise que unha figura rectilínea está inscrita nun círculo cando cada ángulo da inscrita toca a circunferencia do círculo.
4. Dise que unha figura rectilínea está circunscrita a un círculo cando cada lado da circunscrita é tanxente á circunferencia do círculo.
5. Dise, de xeito semellante, que un círculo está inscrito nunha figura cando a circunferencia do círculo toca[2] cada lado daquela figura na que está inscrito.
6. Dise que un circulo está circunscrito a unha figura cando a circunferencia do círculo toca cada ángulo daquela figura á que está circunscrito.
7. Dise que unha recta se axusta a un círculo cando os seus extremos están sobre a circunferencia do círculo.

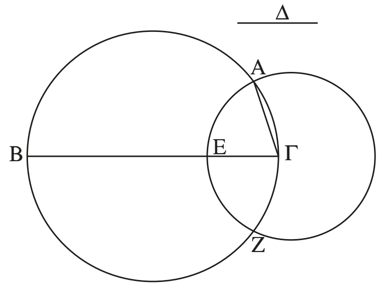
PROPOSICIÓN 1

Ó círculo dado, axustar unha recta igual á recta dada que non sexa maior que o diámetro do círculo.

Sexa o círculo dado ΑΒΓ e Δ a recta dada non maior que o diámetro do círculo. É preciso, entón, axustar unha recta igual á recta Δ ó círculo ΑΒΓ.

1 Identifica os ángulos cos vértices.
2 Aquí esperariamos o verbo ἐφάπτω, «é tanxente» —véxase a Nota 2 (Definición III, 2).

Trácese o diámetro ΒΓ do círculo ΑΒΓ[3].



Entón, se ΒΓ é igual a Δ, resultaría o proposto: ΒΓ, igual á recta Δ, queda axustada ó círculo ΑΒΓ.

Pero se ΒΓ é maior que Δ, póñase ΓΕ igual a Δ[4], debúxese o círculo ΕΑΖ co centro Γ e a distancia ΓΕ e únase ΓΑ.

Entón, dado que o punto Γ é centro do círculo ΕΑΖ, ΓΑ é igual a ΓΕ. Pero ΓΕ é igual a Δ; logo, Δ é igual a ΓΑ.

Logo, ó círculo dado, ΑΒΓ queda axustada ΓΑ igual á recta dada Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 2

No círculo dado, inscribir un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo dado.

Sexa o círculo dado ΑΒΓ e o triángulo dado ΔΕΖ; é preciso, entón, inscribir no círculo ΑΒΓ un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo ΔΕΖ.

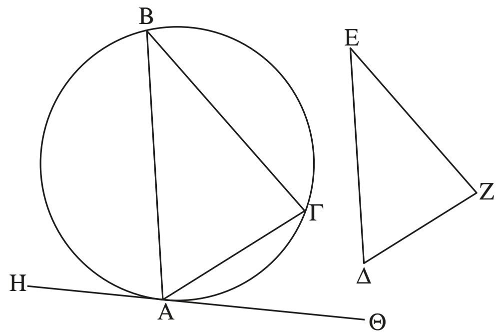
Trácese ΗΘ tanxente ó círculo ΑΒΓ no punto Α[5] e constrúase na recta ΑΘ e no seu punto Α o ángulo ΘΑΓ igual ó ángulo ΔΕΖ[6], e na recta ΑΗ e no seu punto Α o ángulo ΗΑΒ igual ó ángulo ΔΖΕ e únase ΒΓ.

Entón, dado que unha recta ΑΘ é tanxente ó círculo ΑΒΓ e que dende o punto de contacto Α ata o círculo se levou a recta

---

[3] Proposición III, 1.
[4] Proposición I, 3.
[5] Proposición III, 16. Corolario.
[6] Proposición I, 23.

AΓ, logo, o ángulo ΘAΓ é igual ó ángulo ABΓ no segmento alterno de círculo[7].



Pero ΘAΓ é igual a ΔEZ; logo, tamén ABΓ é igual a ΔEZ.

Polo mesmo, tamén AΓB é igual a ΔZE; logo, tamén o restante BAΓ é igual ó restante EΔZ[8].

Logo, no círculo dado, queda inscrito un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo dado; o que, xustamente, era preciso facer.

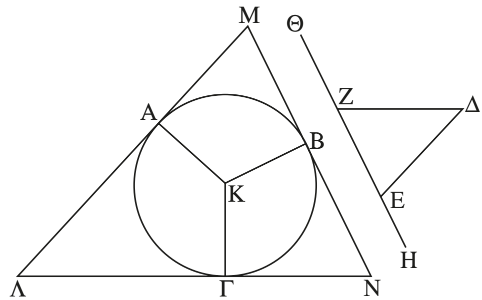
PROPOSICIÓN 3

Ó círculo dado, circunscribir un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo dado.

Sexa o círculo dado ABΓ e o triángulo dado ΔEZ; é preciso, entón, circunscribir ó círculo ABΓ un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo ΔEZ.

Prolónguese EZ en ambos sentidos ata os puntos H e Θ, tómese o centro K do círculo ABΓ[9], lévese, ó azar, a recta KB, constrúase na recta KB e no seu punto K o ángulo BKA igual ó ángulo ΔEH, e BKΓ igual a ΔZΘ[10] e, polos puntos A, B e Γ, trácense tanxentes ó círculo ABΓ as rectas ΛAM, MBN e NΓΛ[11].

7 Proposición III, 32.
8 Proposición I, 32.
9 Proposición III, 1.
10 Proposición I, 23.
11 Proposición III, 16. Corolario.



E, dado que ΛM, MN e NΛ son tanxentes ó círculo ABΓ nos puntos A, B e Γ, e as rectas KA, KB e KΓ quedan trazadas dende o centro K ata os puntos A, B e Γ, logo, os ángulos dos puntos A, B e Γ son rectos[12].

E, dado que os catro ángulos do cuadrilátero AMBK son iguais a catro rectos, posto que AMBK se divide en dous triángulos[13], e son rectos os ángulos KAM e KBM, logo, os ángulos restantes AKB e AMB[14] son iguais a dous rectos.

Pero ΔEH e ΔEZ son tamén iguais a dous rectos[15]; logo, AKB e AMB son iguais a ΔEH e ΔEZ, dos cales, AKB é igual a ΔEH; logo, o restante AMB é igual ó restante ΔEZ.

De xeito semellante poderase demostrar que tamén ΛNB é igual a ΔZE; logo, tamén o restante MΛN é igual a EΔZ.

Logo, o triángulo ΛMN é de ángulos iguais ós do triángulo ΔEZ; e queda circunscrito ó círculo ABΓ.

Logo, ó círculo dado, queda circunscrito un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo dado; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 4

No triángulo dado, inscribir un círculo.

Sexa o triángulo dado ABΓ; é preciso, entón, inscribir un círculo no triángulo ABΓ[16].

---

12 Proposición III, 18.

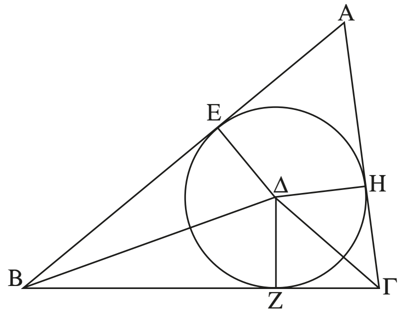
13 Proposición I, 32.

14 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

15 Proposición I, 13.

16 Definición IV, 5.

Córtense á metade os ángulos ΑΒΓ e ΑΓΒ coas rectas ΒΔ e ΓΔ[17], topen unha coa outra no punto Δ[18] e trácense, dende Δ ata as rectas ΑΒ, ΒΓ e ΓΑ, as perpendiculares ΔΕ, ΔΖ e ΔΗ[19].



E, dado que o ángulo ΑΒΔ é igual a ΓΒΔ e que tamén o ángulo recto ΒΕΔ é igual ó ángulo recto ΒΖΔ, entón ΕΒΔ e ΖΒΔ son dous triángulos que teñen dous ángulos iguais a dous ángulos, e un lado, ΒΔ, común a eles, o que está tendido baixo un dos ángulos iguais, igual a un lado; logo, terán tamén os lados restantes iguais ós lados restantes[20]; logo, ΔΕ é igual a ΔΖ.

Polo mesmo, tamén ΔΗ é igual a ΔΖ.

Logo as tres rectas, ΔΕ, ΔΖ e ΔΗ, son iguais entre si; logo o círculo debuxado co centro Δ e como distancia una das rectas Ε, Ζ ou Η[21] pasará tamén polos puntos restantes e será tanxente ás rectas ΑΒ, ΒΓ e ΓΑ, por ser rectos os ángulos dos puntos Ε, Ζ e Η. Pois, se as corta, ocorrerá que a recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo, dende o extremo, cae dentro do círculo; o que, sen dúbida, demostrouse imposible[22]; logo, o círculo debuxado co centro Δ e como distancia unha das rectas

---

17 Proposición I, 9.

18 Os ángulos ΑΒΓ e ΑΓΒ suman menos que dous rectos; ó dividilos á metade, a suma das metades de cada un dos ángulos tamén sumarán menos que dous rectos e, polo tanto, as rectas atópanse nun punto Δ. Postulado 5.

19 Proposición I, 12.

20 Proposición I, 26.

21 Refírese ós radios ΔΕ, ΔΖ e ΔΗ indicando os seus extremos Ε, Ζ e Η.

22 Proposición III, 16. Corolario.

E, Z ou H non cortará as rectas AB, BΓ e ΓA; logo, será tanxente a elas e o círculo estará inscrito no triángulo ABΓ.

Inscríbase como ZHE.

Logo, no triángulo dado ABΓ, queda inscrito o círculo EZH; o que, xustamente, era preciso facer.

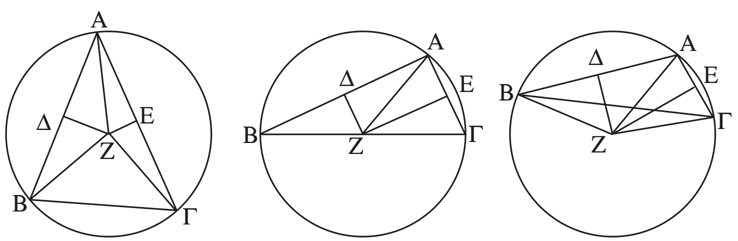
PROPOSICIÓN 5

Ó triángulo dado, circunscribir un círculo.

Sexa o triángulo dado ABΓ; é preciso circunscribir un círculo ó triángulo dado ABΓ[23].

Córtense á metade as rectas AB e AΓ polos puntos Δ e E[24] e, dende os puntos Δ e E, trácense as rectas ΔZ e EZ en ángulo recto con AB e AΓ[25]; atoparanse[26], entón, ou dentro do triángulo ABΓ ou sobre a recta BΓ ou fóra de BΓ.

Atópense primeiro dentro, en Z, e únanse ZB, ZΓ e ZA. E, dado que AΔ é igual a ΔB, e ΔZ é común e en ángulo recto[27], logo a base AZ é igual á base ZB[28].



De xeito semellante poderemos demostrar que tamén ΓZ é igual a AZ; de xeito que tamén ZB é igual a ZΓ; logo, as tres, ZA, ZB e ZΓ, son iguais entre si.

---

23 Definición IV 6.

24 Proposición I, 10.

25 Proposición I, 11.

26 Véxase a Nota 31 do corolario desta mesma proposición.

27 Non utiliza κάθετος como noutros lugares senón o sintagma preposicional πρὸς ὀρθάς que describe as rectas —procedemento semellante ó comentado para «paralelas» ou «radios».

28 Proposición I, 4.

Logo, o círculo debuxado co centro Z e como distancia unha das rectas A, B ou Γ[29] pasará polos demais puntos e o círculo estará circunscrito ó triángulo. Circunscríbase como ΑΒΓ.

Atópense agora as rectas ΔZ e EZ sobre a recta ΒΓ no punto Z, como está na segunda figura, e únase AZ. De xeito semellante poderemos demostrar que o punto Z é centro do círculo circunscrito ó triángulo ΑΒΓ[30].

Atópense agora fóra do triángulo ΑΒΓ no punto Z outra vez, como está na terceira figura, e únanse AZ, BZ e ΓZ. E, dado que outra vez AΔ é igual a ΔB, e ΔZ é común e en ángulo recto, logo, a base AZ é igual á base BZ. De xeito semellante poderemos demostrar que tamén ΓZ é igual a AZ; de xeito que tamén BZ é igual a ZΓ; logo, o círculo debuxado co centro Z e como distancia unha das rectas ZA, ZB ou ZΓ pasará tamén polos demais puntos e estará circunscrito ó triángulo ΑΒΓ.

Logo, ó triángulo dado, queda circunscrito un círculo; o que, xustamente, era preciso facer.

Corolario[31].- E é evidente que, cando o centro do círculo cae dentro do triángulo, o ángulo ΒΑΓ que se atopa nun segmento[32] maior que o semicírculo é menor que un recto; e cando o centro cae sobre a recta ΒΓ, o ángulo ΒΑΓ que se atopa no semicírculo é recto; e cando o centro do círculo cae fóra do triángulo, o ángulo ΒΑΓ que se atopa nun segmento menor que o semicírculo é maior que un recto.[33]

---

29 Véxase a Nota 21 (Proposición IV, 4).

30 A proba é exactamente a mesma que no caso anterior.

31 O encabezamento «corolario» non aparece nos manuscritos considerados por Heiberg máis fiables; segundo Heath non sería tal, senón unha explicación adicional como o penúltimo parágrafo da Proposición III, 25. Euclides non xustifica de forma explícita que as rectas dende os puntos Δ e E, en ángulo recto con AB e AΓ, se atopen nun punto Z. O corolario inclúe certa explicación. Se trazamos a recta ΔE, entón os ángulos que forma esta recta ΔE coas rectas perpendiculares a AB e AΓ por Δ e E suman menos de dous rectos (os dous xunto co ángulo ΔZE suman dous rectos) e, polo tanto, atópanse nun punto Z. Postulado 5.

32 Definición III, 8.

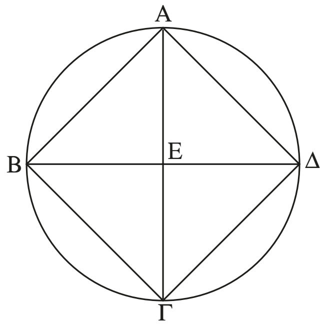
33 Os manuscritos presentan aquí o seguinte texto: «De xeito que, cando o ángulo dado é menor que un recto, as rectas ΔZ e EZ caerán dentro do triángulo, cando é recto, sobre ΒΓ e, cando é maior que un recto, fóra de ΒΓ; o que, xustamente, era preciso facer». Heiberg,

PROPOSICIÓN 6

No círculo dado, inscribir un cadrado.

Sexa o círculo dado ΑΒΓΔ; é preciso, entón, inscribir un cadrado no círculo ΑΒΓΔ.

Trácense ΑΓ e ΒΔ, dous diámetros do círculo ΑΒΓΔ, en ángulo recto un co outro[34], e fáganse ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ e ΔΑ.



E, dado que ΒΕ é igual a ΕΔ —pois Ε é o centro— e ΕΑ é común e en ángulo recto, logo, a base ΑΒ é igual á base ΑΔ[35].

Polo mesmo, tamén cada unha das rectas ΒΓ e ΓΔ é igual respectivamente a ΑΒ e ΑΔ.

Logo, o cuadrilátero ΑΒΓΔ é equilátero.

Digo que tamén de ángulos rectos. Pois, dado que a recta ΒΔ é un diámetro do círculo ΑΒΓΔ, logo ΒΑΔ é un semicírculo; logo, o ángulo ΒΑΔ é recto[36].

Polo mesmo, tamén cada un dos ángulos ΑΒΓ, ΒΓΔ e ΓΔΑ é recto; logo, o cuadrilátero ΑΒΓΔ é de ángulos rectos. E foi demostrado que tamén equilátero; logo, é un cadrado[37].

E queda inscrito no círculo ΑΒΓΔ.

Logo, no círculo dado, queda inscrito o cadrado ΑΒΓΔ; o que, xustamente, era preciso facer.

---

seguindo a Simson, considera que se trata dun engadido posterior a Euclides, xa que, ademais de parecerlle innecesario, menciónase un «ángulo dado» ausente na proposición.

[34] Proposición III, 1 e Proposición I, 11.

[35] Proposición I, 4.

[36] Proposición III, 31.

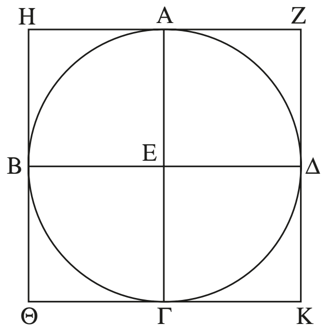
[37] Definición I, 22.

PROPOSICIÓN 7

Ó círculo dado, circunscribir un cadrado.

Sexa o círculo dado ΑΒΓΔ; é preciso, entón, circunscribir un cadrado ó círculo ΑΒΓΔ.

Trácense ΑΓ e ΒΔ, dous diámetros do círculo ΑΒΓΔ[38], en ángulo recto un co outro, e, polos puntos Α, Β, Γ, Δ, trácense ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ e ΚΖ tanxentes ó círculo ΑΒΓΔ[39].



Entón, dado que ΖΗ é tanxente ó círculo ΑΒΓΔ, e ΕΑ se uniu dende o centro Ε ata o punto de contacto, Α, logo, os ángulos Α[40] son rectos[41].

Polo mesmo, tamén os ángulos dos puntos Β, Γ e Δ son rectos.

E, dado que o ángulo ΑΕΒ é recto e é recto tamén o ángulo ΕΒΗ, logo, ΗΘ é paralela a ΑΓ[42].

Polo mesmo, tamén ΑΓ é paralela a ΖΚ. De modo que tamén ΗΘ é paralela a ΖΚ[43].

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén tanto ΗΖ como ΘΚ son paralelas a ΒΕΔ, logo, ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ e ΒΚ son paralelogramos[44]; logo, ΗΖ é igual a ΘΚ, e ΗΘ a ΖΚ[45].

---

38 Proposición III, 1. e Proposición I, 11.
39 Proposición III, 16. Corolario.
40 Refírese ós ángulos ΗΑΕ e ΖΑΕ.
41 Proposición III, 18.
42 Proposición I, 28.
43 Proposición I, 30.
44 Nomea os paralelogramos polas letras da diagonal.
45 Proposición I, 34.

E, dado que ΑΓ é igual a ΒΔ, pero tamén ΑΓ tanto a ΗΘ como a ΖΚ, e ΒΔ é igual tanto a ΗΖ como a ΘΚ, logo, o cuadrilátero ΖΗΘΚ é equilátero.

Digo que tamén de ángulos rectos.

Pois ben, dado que ΗΒΕΑ é un paralelogramo e ΑΕΒ é recto, logo, tamén ΑΗΒ é recto.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén os ángulos Θ, Κ e Ζ son rectos. Logo, ΖΗΘΚ é de ángulos rectos.

E foi demostrado que tamén equilátero; logo é un cadrado[46].

E queda circunscrito ó círculo ΑΒΓΔ.

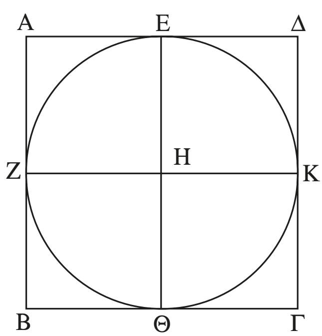
Logo, ó círculo dado, queda circunscrito un cadrado; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 8

No cadrado dado, inscribir un círculo.

Sexa o cadrado dado ΑΒΓΔ; é preciso, entón, inscribir un círculo no cadrado ΑΒΓΔ.

Córtese á metade cada unha das rectas ΑΔ e ΑΒ polos puntos Ε e Ζ[47] e, por Ε, trácese ΕΘ paralela a unha das dúas, ΑΒ ou ΓΔ[48], mentres que por Ζ trácese ΖΚ paralela a unha das dúas, ΑΔ ou ΒΓ; logo, cada unha das figuras ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ e ΗΔ é un paralelogramo e é evidente que os seus lados opostos son iguais[49].



46 Definición I, 22.
47 Proposición I, 10.
48 Proposición I, 31.
49 Proposición I, 34.

E, dado que AΔ é igual a AB e AE é metade de AΔ, mentres que AZ metade de AB, logo, tamén AE é igual a AZ; en consecuencia, tamén os lados opostos; logo, tamén ZH é igual a HE.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén cada unha das rectas HΘ e HK é igual respectivamente ás rectas ZH e HE; logo, as catro, HE, HZ, HΘ e HK son iguais entre si.

Logo, o círculo debuxado co centro H e como distancia unha das rectas E, Z, Θ ou K[50] pasará tamén polos puntos restantes; e será tanxente ás rectas AB, BΓ, ΓΔ e ΔA, por ser rectos os ángulos de E, Z, Θ e K[51]; pois se o círculo corta AB, BΓ, ΓΔ e ΔA, a recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo dende un extremo caerá dentro do círculo; o que, sen dúbida, demostrouse imposible[52].

Logo, o círculo debuxado co centro H e como distancia unha das rectas E, Z, Θ ou K non cortará as rectas AB, BΓ, ΓΔ e ΔA.

Logo, será tanxente a elas e inscrito no cadrado ABΓΔ.

Logo, no cadrado dado, queda inscrito un círculo; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 9

Ó cadrado dado, circunscribir un círculo.

Sexa o cadrado dado ABΓΔ; é preciso, entón, circunscribir un círculo ó cadrado ABΓΔ.

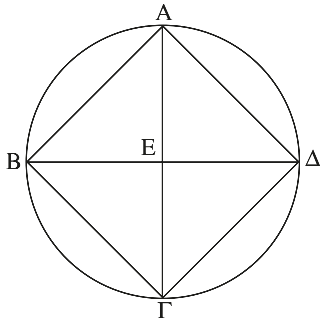
Pois ben, unha vez trazadas AΓ e BΔ, córtense unha á outra por E.

E, dado que ΔA é igual a AB, e AΓ, común, entón os dous lados ΔA e AΓ son iguais ós outros dous, BA e AΓ; e a base ΔΓ é igual á base BΓ; logo, o ángulo ΔAΓ é igual ó ángulo BAΓ[53];

---

50 Véxase a Nota 21 (Proposición IV, 4).
51 Véxase a Nota 40 (Proposición IV, 7).
52 Proposición III, 16.
53 Proposición I, 8.

logo, o ángulo ΔAB queda cortado á metade por AΓ; de xeito semellante poderemos demostrar que cada un dos ángulos ABΓ, BΓΔ e ΓΔA queda cortado á metade polas rectas AΓ e ΔB.



E, dado que o ángulo ΔAB é igual a ABΓ, que EAB é metade de ΔAB, e EBA metade de ABΓ, logo, tamén EAB é igual a EBA; de xeito que tamén o lado EA é igual a EB[54].

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén cada unha das rectas EA e EB é igual respectivamente ás rectas EΓ e EΔ.

Logo, as catro, EA, EB, EΓ e EΔ, son iguais entre si.

Logo, o círculo debuxado co centro E e como distancia unha das rectas A, B, Γ ou Δ[55] pasará tamén polos puntos restantes e estará circunscrito ó cadrado ABΓΔ[56].

Circunscríbase como ABΓΔ.

Logo, ó cadrado dado, queda circunscrito un círculo; o que, xustamente, era preciso facer.

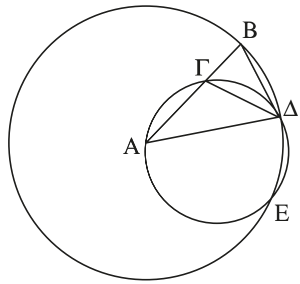
PROPOSICIÓN 10

Construír un triángulo isóscele que teña cada un dos ángulos da base dobre que o restante.

Tómese unha recta AB e córtese polo punto Γ de xeito que o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e BΓ sexa igual

54 Proposición I, 6.
55 Véxase a Nota 21 (Proposición IV, 4).
56 Definición IV, 6.

ó cadrado de ΓΑ[57]; debúxese o círculo ΒΔΕ co centro Α e a distancia ΑΒ e axústese[58] ó círculo ΒΔΕ a recta ΒΔ igual á recta ΑΓ que non é maior có diámetro do círculo ΒΔΕ. Únanse ΑΔ e ΔΓ e circunscríbase o círculo ΑΓΔ ó triángulo ΑΓΔ[59].



E, dado que o contido por ΑΒ e ΒΓ[60] é igual ó cadrado de ΑΓ, e ΑΓ é igual a ΒΔ, logo, o contido por ΑΒ e ΒΓ é igual ó cadrado de ΒΔ.

E, dado que se tomou un punto Β fóra do círculo ΑΓΔ, que dende Β ata o círculo ΑΓΔ caen dúas rectas ΒΑ e ΒΔ, e que unha delas o corta e outra cae nel, e que o contido por ΑΒ e ΒΓ é igual ó cadrado de ΒΔ, logo, ΒΔ é tanxente ó círculo ΑΓΔ[61].

Entón, dado que ΒΔ é tanxente e que ΔΓ se levou dende o punto de contacto Δ, logo, o ángulo ΒΔΓ é igual ó ángulo ΔΑΓ no segmento alterno do círculo[62].

Entón, dado que ΒΔΓ é igual a ΔΑΓ, engádase a ambos ΓΔΑ; logo, ΒΔΑ enteiro é igual ós dous, ΓΔΑ e ΔΑΓ.

Pero o ángulo exterior ΒΓΔ é igual ós ángulos ΓΔΑ e ΔΑΓ[63]; logo, tamén ΒΔΑ é igual a ΒΓΔ.

Pero ΒΔΑ é igual a ΓΒΔ, posto que tamén o lado ΑΔ é igual a ΑΒ[64]; en consecuencia, tamén o ángulo ΔΒΑ é igual a ΒΓΔ.

---

57 Proposición II, 11.
58 Proposición IV, 1.
59 Proposición IV, 5.
60 Definición II, 1.
61 Proposición III, 37.
62 Proposición III, 32.
63 Proposición I, 32.
64 Proposición I, 5.

Logo, os tres, BΔA, ΔBA e BΓΔ, son iguais entre si.

E, dado que o ángulo ΔBΓ é igual a BΓΔ, tamén é igual o lado BΔ ó lado ΔΓ[65].

Pero BΔ suponse[66] igual a ΓA; logo, tamén ΓA é igual a ΓΔ; en consecuencia, tamén o ángulo ΓΔA é igual a ΔAΓ; logo, ΓΔA e ΔAΓ son o dobre que ΔAΓ.

Pero BΓΔ é igual a ΓΔA e ΔAΓ; logo, tamén BΓΔ é o dobre que ΓAΔ.

Pero BΓΔ é igual a cada un dos ángulos BΔA e ΔBA; logo, tamén cada un dos ángulos BΔA e ΔBA é o dobre que ΔAB.

Logo, queda construído o triángulo isóscele ABΔ que ten cada un dos ángulos da base dobre que o restante; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 11

No círculo dado, inscribir un pentágono equilátero e equiángulo.

Sexa o círculo dado ABΓΔE; é preciso, entón, inscribir no círculo ABΓΔE un pentágono equilátero e equiángulo.

Tómese o triángulo isóscele ZHΘ que ten cada un dos ángulos H e Θ dobre que o ángulo Z[67] e inscríbase no círculo ABΓΔE o triángulo AΓΔ de ángulos iguais ós do triángulo ZHΘ, de xeito que o ángulo ΓAΔ sexa igual ó ángulo Z e cada un dos ángulos H e Θ igual respectivamente ós ángulos AΓΔ e ΓΔA[68]; logo, tamén cada un dos ángulos AΓΔ e ΓΔA é dobre que o ángulo ΓAΔ.

Córtense á metade os ángulos AΓΔ e ΓΔA respectivamente coas rectas ΓE e ΔB[69] e trácense AB, BΓ,[70] ΔE e EA.

---

[65] Proposición I, 6.

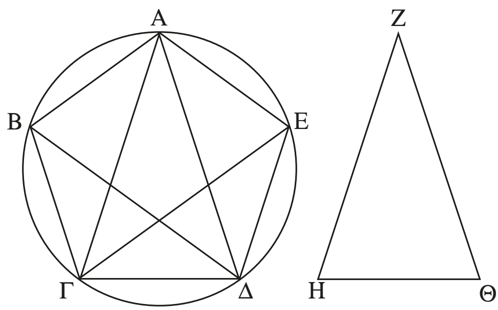
[66] Véxase a Nota 129 (Proposición I, 26).

[67] Proposición IV, 10.

[68] Proposición IV, 2.

[69] Proposición I, 9.

[70] En case todos os manuscritos aparece aquí ΓΔ que xa está trazado con anterioridade; a edición crítica de J. L. Heiberg e H. Menge mantén que, seguindo a Gregorio, débese eliminar.



Entón, dado que cada un dos ángulos ΑΓΔ e ΓΔΑ é dobre que o ángulo ΓΑΔ e foron cortados á metade polas rectas ΓΕ e ΔΒ, logo, os cinco ángulos, ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ e ΒΔΑ, son iguais entre si.

Pero os ángulos iguais están sobre circunferencias iguais[71]; logo, as cinco circunferencias, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ e ΕΑ, son iguais entre si.

Pero rectas iguais están tendidas baixo circunferencias iguais[72]; logo, as cinco rectas, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ e ΕΑ, son iguais entre si; logo, o pentágono ΑΒΓΔΕ é equilátero.

E digo que tamén equiángulo.

Pois ben, dado que a circunferencia ΑΒ é igual á circunferencia ΔΕ, engádase a ambas ΒΓΔ; logo, a circunferencia ΑΒΓΔ enteira é igual á circunferencia ΕΔΓΒ enteira.

E o ángulo ΑΕΔ está sobre a circunferencia ΑΒΓΔ, mentres que o ángulo ΒΑΕ sobre a circunferencia ΕΔΓΒ; logo, tamén o ángulo ΒΑΕ é igual ó ángulo ΑΕΔ[73].

Entón, polo mesmo tamén cada un dos ángulos ΑΒΓ, ΒΓΔ e ΓΔΕ é igual a cada un dos ángulos ΒΑΕ e ΑΕΔ; logo, o pentágono ΑΒΓΔΕ é equiángulo. E demostrouse que tamén equilátero.

Logo, no círculo dado, queda inscrito un pentágono equilátero e equiángulo; o que, xustamente, era preciso facer.

---

71 Definición III, 9 e Proposición III, 26.

72 Proposición III, 29.

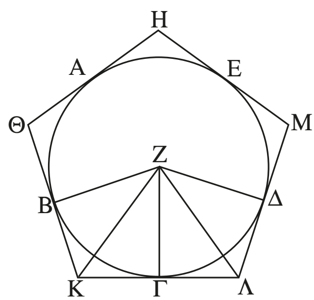
73 Proposición III, 27.

PROPOSICIÓN 12

Ó círculo dado, circunscribir un pentágono equilátero e equiángulo.

Sexa o círculo dado ΑΒΓΔΕ; é preciso circunscribir ó círculo ΑΒΓΔΕ un pentágono equilátero e equiángulo

Considérense os puntos dos ángulos do pentágono inscrito Α, Β, Γ, Δ e Ε[74] de xeito que as circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ e ΕΑ sexan iguais; polos puntos Α, Β, Γ, Δ e Ε trácense as rectas ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ e ΜΗ tanxentes ó círculo[75], tómese Ζ o centro do círculo ΑΒΓΔΕ[76], e fáganse ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ e ΖΔ.



E, dado que a recta ΚΛ é tanxente ó círculo ΑΒΓΔΕ en Γ e, dende o centro Ζ ata o punto de contacto Γ, queda trazada ΖΓ, logo, ΖΓ é perpendicular a ΚΛ[77]; logo, cada un dos ángulos de Γ é recto.

Entón, polo mesmo, tamén os ángulos dos puntos Β e Δ son rectos.

E, dado que o ángulo ΖΓΚ é recto, logo, o cadrado de ΖΚ é igual ós de ΖΓ e ΓΚ[78].

Entón, polo mesmo, tamén o cadrado de ΖΚ é igual ós de ΖΒ e ΒΚ; en consecuencia, os cadrados de ΖΓ e ΓΚ son iguais ós

[74] Proposición IV, 11.
[75] Proposición III, 16. Corolario.
[76] Proposición III, 1.
[77] Proposición III, 18.
[78] Proposición I, 47.

de ZB e BK, dos cales, o de ZΓ é igual ó de ZB; logo, o restante, o cadrado de ΓK, é igual ó de BK.

Logo, BK é igual a ΓK.

E, dado que ZB é igual a ZΓ, e ZK, común, entón os dous lados BZ e ZK son iguais ós outros dous ΓZ e ZK; e a base BK é igual á base ΓK; logo, o ángulo BZK é igual ó ángulo KZΓ[79] e BKZ a ZKΓ; logo, BZΓ é o dobre que KZΓ, mentres BKΓ o dobre que ZKΓ.

Entón, polo mesmo, tamén ΓZΔ é o dobre que ΓZΛ, mentres que ΔΛΓ o dobre que ZΛΓ.

E, dado que a circunferencia BΓ é igual a ΓΔ, tamén o ángulo BZΓ é igual a ΓZΔ[80].

E BZΓ é o dobre que KZΓ, mentres ΔZΓ o dobre que ΛZΓ; logo, tamén KZΓ é igual a ΛZΓ; pero tamén o ángulo ZΓK é igual a ZΓΛ.

Entón ZKΓ e ZΛΓ son dous triángulos que teñen os dous ángulos iguais ós dous ángulos e un lado igual a un lado, o común a eles, ZΓ; logo, tamén terán os lados restantes iguais ós lados restantes e o ángulo restante igual ó ángulo restante[81]; logo, a recta KΓ é igual a ΓΛ, mentres que o ángulo ZKΓ a ZΛΓ.

E, dado que KΓ é igual a ΓΛ, logo, KΛ é o dobre que KΓ.

Entón, polo mesmo poderase demostrar tamén que ΘK é o dobre que BK. E BK é igual a KΓ; logo, tamén ΘK é igual a KΛ.

De xeito semellante poderase demostrar tamén que cada un das rectas ΘH, HM e MΛ é igual a cada unha das rectas ΘK e KΛ; logo, o pentágono HΘKΛM é equilátero.

E digo que tamén equiángulo.

Pois, dado que o ángulo ZKΓ é igual a ZΛΓ e foi demostrado que ΘKΛ é o dobre que ZKΓ, mentres que KΛM o dobre que ZΛΓ, logo, tamén ΘKΛ é igual a KΛM.

79 Proposición I, 8.
80 Proposición III, 27.
81 Proposición I, 26.

De xeito semellante poderase demostrar que tamén cada un dos ángulos ΚΘΗ, ΘΗΜ e ΗΜΛ é igual a cada un dos ángulos ΘΚΛ e ΚΛΜ; logo, os cinco ángulos, ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ e ΜΗΘ, son iguais entre si, logo, o pentágono ΗΘΚΛΜ é equiángulo. E foi demostrado que tamén equilátero, e queda circunscrito ó círculo ΑΒΓΔΕ.

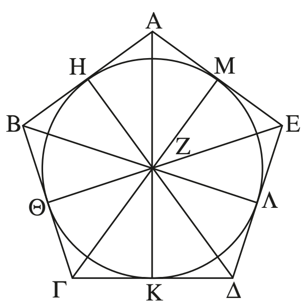
O que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 13

No pentágono dado, que é equilátero e equiángulo, inscribir un círculo.

Sexa ΑΒΓΔΕ o pentágono dado equilátero e equiángulo; é preciso, entón, inscribir un círculo no pentágono ΑΒΓΔΕ.

Pois ben, córtense á metade os ángulos ΒΓΔ e ΓΔΕ respectivamente coas rectas ΓΖ e ΔΖ[82]; e, dende o punto Ζ no que topan unha coa outra as rectas ΓΖ e ΔΖ, trácense as rectas ΖΒ, ΖΑ e ΖΕ.



E, dado que ΒΓ é igual a ΓΔ, e ΓΖ é común, entón os dous lados ΒΓ e ΓΖ son iguais ós outros dous ΔΓ e ΓΖ; e o ángulo ΒΓΖ é igual ó ángulo ΔΓΖ; logo, a base ΒΖ é igual á base ΔΖ e o triángulo ΒΓΖ é igual ó triángulo ΔΓΖ, e os ángulos restantes serán iguais ós ángulos restantes, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais[83]; logo, o ángulo ΓΒΖ é igual a ΓΔΖ.

---

82 Proposición I, 9.

83 Proposición I, 4.

E, dado que ΓΔΕ é o dobre que ΓΔΖ, mentres que ΓΔΕ é igual a ΑΒΓ, e ΓΔΖ a ΓΒΖ, logo, tamén ΓΒΑ é o dobre que ΓΒΖ; logo, o ángulo ΑΒΖ é igual a ΖΒΓ; logo, o ángulo ΑΒΓ queda cortado á metade pola recta ΒΖ.

De xeito semellante poderase demostrar que tamén os ángulos ΒΑΕ e ΑΕΔ quedan cortados á metade respectivamente polas rectas ΖΑ e ΖΕ.

Trácense pois, dende o punto Ζ, as rectas ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ e ΖΜ perpendiculares ás rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ e ΕΑ[84].

E, dado que o ángulo ΘΓΖ é igual a ΚΓΖ, e o ángulo recto ΖΘΓ é tamén igual a ΖΚΓ, entón ΖΘΓ e ΖΚΓ son dous triángulos que teñen dous ángulos iguais a dous ángulos e un lado igual a un lado, o común a eles, ΖΓ, que está tendido baixo un dos ángulos iguais; logo, os lados restantes serán iguais ós lados restantes[85]; logo, a perpendicular ΖΘ é igual á perpendicular ΖΚ.

De xeito semellante poderase demostrar que tamén cada unha das rectas ΖΛ, ΖΜ e ΖΗ é igual a cada unha das rectas ΖΘ e ΖΚ; logo, as cinco rectas, ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ e ΖΜ, son iguais entre si.

Logo, o círculo debuxado co centro Ζ e como distancia unha das rectas Η, Θ, Κ, Λ ou Μ[86] pasará tamén polos puntos restantes e será tanxente ás rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ e ΕΑ, por seren rectos os ángulos dos puntos Η, Θ, Κ, Λ e Μ. Pois se non é tanxente a elas senón que as corta, ocorrerá que a recta trazada en ángulo recto co diámetro do círculo, dende un extremo, cae dentro do círculo; o que, sen dúbida, demostrouse imposible[87]; logo, o círculo debuxado co centro Ζ e como distancia unha das rectas Η, Κ, Λ ou Μ non cortará as rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ e ΕΑ; logo, será tanxente a elas.

Debúxese como ΗΘΚΛΜ.

Logo, no pentágono dado, que é equilátero e equiángulo, queda inscrito un círculo; o que, xustamente, era preciso facer.

---

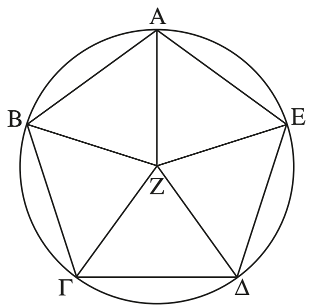
84 Proposición I, 12.
85 Proposición I, 26.
86 Véxase a Nota 21 (Proposición IV, 4).
87 Proposición III, 16.

PROPOSICIÓN 14

Ó pentágono dado, que é equilátero e equiángulo, circunscribir un círculo.

Sexa ΑΒΓΔΕ o pentágono dado, que é equilátero e equiángulo; é preciso, entón, circunscribir un círculo ó pentágono ΑΒΓΔΕ.

Córtense á metade os ángulos ΒΓΔ e ΓΔΕ respectivamente coas rectas ΓΖ e ΔΖ e, dende o punto Ζ no que topan as rectas ata os puntos Β, Α e Ε, trácense as rectas ΖΒ, ΖΑ e ΖΕ.



De xeito semellante ó anterior[88] poderase demostrar que tamén os ángulos ΓΒΑ, ΒΑΕ e ΑΕΔ quedan cortados á metade respectivamente polas rectas ΖΒ, ΖΑ e ΖΕ.

E, dado que o ángulo ΒΓΔ é igual a ΓΔΕ, e ΖΓΔ é metade de ΒΓΔ, mentres que ΓΔΖ, metade de ΓΔΕ, entón, tamén ΖΓΔ é igual a ΖΔΓ; en consecuencia, tamén o lado ΖΓ é igual ó lado ΖΔ[89].

De xeito semellante poderase demostrar que tamén cada unha das rectas ΖΒ, ΖΑ e ΖΕ é igual a cada unha das rectas ΖΓ e ΖΔ; logo, as cinco rectas, ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ e ΖΕ son iguais entre si; logo, o círculo debuxado co centro Ζ e como distancia unha das rectas ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ ou ΖΕ pasará tamén polos puntos restantes e estará circunscrito.

Circunscríbase e sexa ΑΒΓΔΕ.

Logo, ó pentágono dado, que é equilátero e equiángulo, queda circunscrito un círculo; o que, xustamente, era preciso facer.

---

[88] De xeito semellante a como se fixo na Proposición IV, 13.

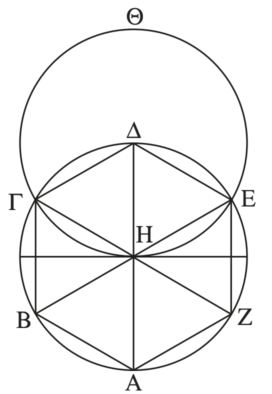
[89] Proposición I, 6.

PROPOSICIÓN 15

No círculo dado, inscribir un hexágono equilátero e equiángulo.

Sexa o círculo dado ΑΒΓΔΕΖ; é preciso, entón, inscribir no círculo ΑΒΓΔΕΖ un hexágono equilátero e equiángulo.

Trácese o diámetro ΑΔ do círculo ΑΒΓΔΕΖ, tómese o centro Η do círculo[90], debúxese o círculo ΕΗΓΘ co centro Δ e coa distancia ΔΗ e, unha vez trazadas ΕΗ e ΓΗ, lévense ata os puntos Β e Ζ, e trácense ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ e ΖΑ; digo que o hexágono ΑΒΓΔΕΖ é equilátero e equiángulo.



Pois ben, dado que o punto Η é centro do círculo ΑΒΓΔΕΖ, ΗΕ é igual a ΗΔ. Asemade, dado que o punto Δ é centro do círculo ΗΓΘ, ΔΕ é igual a ΔΗ. Pero foi demostrado que ΗΕ é igual a ΗΔ; logo, tamén ΗΕ é igual a ΕΔ; logo, o triángulo ΕΗΔ é equilátero; logo, tamén os seus tres ángulos, ΕΗΔ, ΗΔΕ e ΔΕΗ, son iguais entre si, posto que os ángulos da base dos triángulos isósceles son iguais entre si[91]; e os tres ángulos do triángulo son iguais a dous rectos[92]; logo, o ángulo ΕΗΔ é a terceira parte de dous rectos.

[90] Proposición III, 1.
[91] Proposición I, 5.
[92] Proposición I, 32.

De xeito semellante poderase demostrar tamén que ΔΗΓ é a terceira parte de dous rectos.

E, dado que a recta ΓΗ levantada sobre ΕΒ fai os ángulos adxacentes ΕΗΓ e ΓΗΒ iguais a dous rectos[93], logo, o restante ΓΗΒ é a terceira parte de dous rectos; logo, os ángulos ΕΗΔ, ΔΗΓ e ΓΗΒ son iguais entre si; de xeito que tamén os ángulos ΒΗΑ, ΑΗΖ e ΖΗΕ opostos polos vértices a eles son iguais[94].

Logo os seis ángulos, ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ e ΖΗΕ, son iguais entre si.

E os ángulos iguais están sobre circunferencias iguais[95]; logo as seis circunferencias, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ e ΖΑ, son iguais entre si.

E as rectas iguais están tendidas baixo circunferencias iguais[96]; logo, as seis rectas son iguais entre si; logo, o hexágono ΑΒΓΔΕΖ é equilátero.

E digo que tamén equiángulo.

Pois, dado que a circunferencia ΖΑ é igual á circunferencia ΕΔ, engádase a ambas a circunferencia ΑΒΓΔ; logo, ΖΑΒΓΔ enteira é igual a ΕΔΓΒΑ enteira; e o ángulo ΖΕΔ está sobre a circunferencia ΖΑΒΓΔ, mentres que o ángulo ΑΖΕ sobre a circunferencia ΕΔΓΒΑ; logo, o ángulo ΑΖΕ é igual a ΔΕΖ[97].

De xeito semellante poderase demostrar que tamén os ángulos restantes do hexágono ΑΒΓΔΕΖ son iguais cada un a cada un dos ángulos ΑΖΕ e ΖΕΔ; logo, o hexágono ΑΒΓΔΕΖ é equiángulo. E foi demostrado que tamén equilátero; e queda inscrito no círculo ΑΒΓΔΕΖ.

Logo, no círculo dado, queda inscrito un hexágono equilátero e equiángulo; o que, xustamente, era preciso facer.

93 Proposición I, 13.
94 Proposición I, 15.
95 Proposición III, 26.
96 Proposición III, 29.
97 Proposición III, 27.

Corolario[98].- Polo tanto, a partir disto é evidente que o lado do hexágono é igual ó radio do círculo.

De xeito semellante ó do pentágono, se trazamos tanxentes ó círculo polos puntos de división do círculo, circunscribirase ó círculo un hexágono equilátero e equiángulo consonte o dito para o pentágono. E ademais, por medios semellantes ós descritos para o pentágono, inscribiremos un círculo no hexágono dado e circunscribirémolo; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 16

No círculo dado, inscribir un pentadecágono equilátero e equiángulo[99].

Sexa o círculo dado ΑΒΓΔ; é preciso, entón, inscribir no círculo ΑΒΓΔ un pentadecágono equilátero e equiángulo.

Inscríbase no círculo ΑΒΓΔ o lado ΑΓ dun triángulo equilátero inscrito nel[100] e o lado ΑΒ dun pentágono equilátero[101]; logo, tal como o círculo ΑΒΓΔ está composto de quince segmentos iguais, así a circunferencia ΑΒΓ, que é a terceira parte do círculo, estará composta de cinco, e a circunferencia ΑΒ, que é a quinta parte do círculo, estarao de tres; logo, a restante ΒΓ, de dous iguais.

---

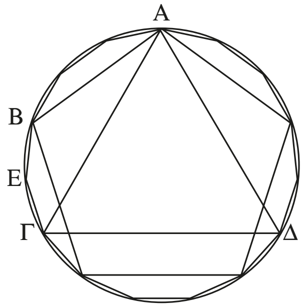
98 Véxase a Nota 83 (Proposición I, 15. Corolario). Este corolario, sen dúbidas en canto á súa atribución a Euclides, non segue a estrutura máis usual e a apostila —«o que, xustamente, era preciso facer»— figura ó final da proposición e tamén do corolario; isto mesmo pasará no caso do corolario da Proposición XII, 17. Por outra parte, no caso do corolario da Proposición VIII, 2 e do da Proposición X, 3, que tampouco presentan dúbidas en canto á súa atribución a Euclides, a apostila figura ó final da proposición e o corolario non ten apostila.

99 O enunciado desta proposición propón inscribir un pentadecágono equilátero e equiángulo nunha circunferencia dada, equivalente ó enunciado da Proposición IV, 6 —para o cadrado— ou da Proposición IV, 11 —para o pentágono—. Cando acaba de facer o que anuncia, inclúe a apostila final «o que, xustamente, era preciso facer». Porén, continúa explicando como se pode circunscribir un pentadecágono a unha circunferencia e tamén como se pode inscribir ou circunscribir unha circunferencia nun pentadecágono, co que estende ó caso do pentadecágono ás construcións das Proposicións IV, 7; IV, 8 e IV, 9 —para o caso do cadrado— ou IV, 12; IV, 13 e IV, 14 —para o caso do pentágono— e finaliza coa repetición da apostila final «o que, xustamente, era preciso facer».

100 Proposición IV, 2.

101 Proposición IV, 11.

Córtese ΒΓ á metade por Ε[102]; logo, cada unha das circunferencias ΒΕ e ΕΓ é a quinceava parte do círculo ΑΒΓΔ.



Logo, se, despois de trazar ΒΕ e ΕΓ, axustamos[103] ó círculo ΑΒΓΔ sucesivamente rectas iguais a elas, estará inscrito nel un pentadecágono equilátero e equiángulo; o que, xustamente, era preciso facer.

De xeito semellante ó do pentágono, se trazamos tanxentes ó círculo polas divisións do círculo, circunscribirase ó círculo un pentadecágono equilátero e equiángulo. E ademais, por medio de demostracións semellantes ás do pentágono, inscribiremos un círculo no pentadecágono dado e circunscribirémolo; o que, xustamente, era preciso facer[104].

102 Proposición III, 30.

103 Definición IV, 7; Proposición IV, 1.

104 Os matemáticos gregos sabían cortar á metade un arco de circunferencia e coñecían a construción dos polígonos regulares de 3 e 5 lados. En consecuencia, podían construír os polígonos regulares con $2^r n$ lados con $r \geqslant 0$ e $n = 3, 4, 5$ e 15. Gauss, en 1796, constrúe o polígono regular de 17 lados e en *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) formula unha condición suficiente para poder construír un polígono regular de n lados: «Un polígono regular de n lados pode construírse con regra e compás se n é o produto dunha potencia de 2 e calquera produto de primos de Fermat distintos». Gauss conxectura que esta condición tamén é necesaria, o que foi probado por Pierre Wantzel en 1836, facendo uso da Teoría de Galois de extensións alxébricas de corpos. Richelot, en 1832, constrúe o polígono regular de 257 lados e Johann Gustav Hermes, despois de dedicarlle dez anos da súa vida, en 1894, completa á construción do polígono regular de 65537 lados; os seus manuscritos sobreviviron ós bombardeos da biblioteca de Göttingen. A teoría de Galois resolve o problema de forma moito máis sinxela. En resumo, só podemos construír con regra e compás os polígonos de n lados se $n = 2^r p_1 \ldots p_s$ con $r \geqslant 0$ e $p_1, \ldots, p_s$ primos de Fermat distintos ($p_i = 2^{m_i} + 1$) . Só se coñecen 5 primos de Fermat —3, 5, 17, 257 e 65537— e conxectúrase que non hai máis. Así un polígono regular de n lados pódese construír con regra e compás se n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, ... e non se pode construír se n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, ...

LIBRO V

DEFINICIÓNS

1. Parte é unha magnitude dunha magnitude, a menor da maior, cando mide á maior[1].
2. Múltiplo é a maior da menor cando é medida pola menor.
3. Razón é unha certa relación respecto do tamaño[2] de dúas magnitudes homoxéneas.
4. Dise que gardan razón entre si magnitudes que, multiplicadas, poden superar unha á outra[3].
5. Dise que unhas magnitudes están na mesma razón —unha primeira cunha segunda e unha terceira cunha cuarta— cando, respectivamente, en calquera multiplicación, os múltiplos iguais da primeira e da terceira, tomados sucesivamente, superan simultaneamente ou son iguais simultaneamente ou son inferiores simultaneamente ós múltiplos iguais da segunda e da cuarta[4].
6. As magnitudes que gardan a mesma razón chámense proporcionais[5].

---

[1] Nesta definición, igual que nas Definicións VII, 3 e VII, 4 e a diferenza do libro I, o concepto de parte está restrinxido ó caso en que pode medir (é submúltiplo) á magnitude maior. Véxase Nota 135 (Proposición I, 27).

[2] Κατὰ πηλικότητα: expresión controvertida ó longo da historia das traducións e estudios do texto euclidiano ata o punto de que algúns consideran que se trata dunha interpolación, hipótese non avalada polos manuscritos (véxase Heath). O substantivo πηλικότητα, que Euclides só volve utilizar en VI, 5, está escasamente documentado e, por tanto, a súa interpretación é difícil; deriva dun adxectivo que significa «que grande», polo que pertence ó campo semántico de «tamaño», tradución que adoptamos. Os Pitagóricos consideraban que, dadas dúas magnitudes, sempre había unha «parte» común que podía «medir» ás dúas (no sentido da Definición V, 1 que acabamos de ver). O descubrimento dos irracionais, números inconmensurables, ($\sqrt{2}$ como diagonal do cadrado de lado 1) bota por terra este principio —non existe ningún «patrón» que poida medir o lado e a diagonal— e puxo en crise os fundamentos do seu pensamento. O concepto de razón deste libro V é aplicable a dúas magnitudes calquera, aínda que algunha ou as dúas sexan inconmensurables, pois sempre é posible que un múltiplo dunha supere á outra (Definición V, 14).

[3] Hai interpretacións diversas desta definición. A opinión xeral é que exclúe a posibilidade da existencia dunha razón entre unha magnitude finita e outra infinita.

[4] Dúas magnitudes a:b están na mesma razón que outras dúas c:d se, para calquera números naturais m e n, se verifica [$ma > nb$ e $mc > nd$] ou [$ma = nb$ e $mc = nd$] ou [$ma < nb$ e $mc < nd$].

[5] Euclides utiliza aquí un adverbio, ἀνάλογον «en proporción», en lugar do adxectivo ó que recorremos na tradución.

7. Dos múltiplos iguais[6], cando un determinado múltiplo da primeira supera a un determinado múltiplo da segunda, mentres que o múltiplo da terceira non supera ó múltiplo da cuarta, entón dise que a primeira garda maior razón coa segunda que a terceira coa cuarta.
8. Unha proporción entre tres termos[7] é a menor posible.
9. Cando tres magnitudes son proporcionais, dise que a primeira coa terceira garda razón duplicada[8] da que garda coa segunda.
10. Cando catro magnitudes son proporcionais, dise que a primeira coa cuarta garda razón triplicada da que garda coa segunda, e sempre sucesivamente de xeito semellante, sexa cal sexa a proporción[9].
11. Chámanse magnitudes correspondentes as antecedentes coas antecedentes e as consecuentes coas consecuentes.
12. Razón alterna[10] é a toma do antecedente en relación co antecedente e o consecuente en relación co consecuente.
13. Razón inversa é a toma do consecuente como antecedente en relación ó antecedente como consecuente[11].

---

[6] Refírese ós múltiplos da Definición 5 (múltiplos iguais da primeira e terceira e outros múltiplos iguais da segunda e cuarta): $a{:}b$ maior que $c{:}d$ se existen dous números naturais n, m tal que $na > mb$, $nc \leqslant md$.

[7] Uso diferente de ὅρος respecto á Definición I, 14, «límite».

[8] Διπλασίων «duplicada» vs. διπλάσιον «dobre»; a mesma raíz co sufixo de comparativo especialízase para a proporción xeométrica (véxase a nota seguinte).

[9] Os gregos chamaban razón duplicada e triplicada á que é, respectivamente, o cadrado e o cubo da razón. Aínda que non o diga explicitamente, tanto as tres magnitudes da Definición V, 9 como as catro da Definición V, 10 están en proporción continua. Se temos unha proporción $a{:}b{:}c$, entón $a/b = b/c = s$ e polo tanto $a = bs$, $b = cs$ e entón $a/c = bs/c = css/c = s^2$ e $a/c = s^2$. A magnitude a garda coa magnitude c unha razón duplicada da que garda con b. Se $a{:}b{:}c{:}d$ son proporcionais, entón $a/b = b/c = c/d = s$ e $a/d = bs/d = css/d = s^3$ e a magnitude a garda coa magnitude d unha razón triplicada da que garda con b.

[10] Adverbio anteriormente usado para referirse a ángulos —véxase Nota 134 (Proposición I, 37)—. Realmente hai que falar de razóns alternas, en plural. Para falar de razón alterna necesitamos dúas razóns e, a partir delas, $a{:}b$ e $c{:}d$ temos dúas razóns alternas. $a{:}c$ e $b{:}d$. Da proporción $a{:}b{::}c{:}d$ deducimos a proporción das razóns alternas $a{:}c{::}b{:}d$ —Proposición V, 16.

[11] A razón $a{:}b$ proporciónanos a razón inversa $b{:}a$. Da proporción $a{:}b{::}c{:}d$ deducimos a proporción $b{:}a{::}d{:}c$ —Proposición V, 7. Corolario.

14. Composición dunha razón é a toma do antecedente xunto co consecuente como unidade en relación co propio consecuente[12].
15. Separación dunha razón é a toma do exceso polo que o antecedente excede ó consecuente en relación co propio consecuente[13].
16. Conversión dunha razón é a toma do antecedente en relación co exceso polo que o antecedente excede ó consecuente[14].
17. Hai razón por igualdade[15] cando, habendo varias magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón, sucede que, como nas primeiras magnitudes a primeira é á última, así, nas segundas magnitudes a primeira é á última; ou doutro xeito: a toma dos extremos prescindindo dos medios[16].
18. [17]Hai proporción perturbada[18] cando, habendo tres magnitudes e outras en igual número a elas, sucede que, como nas primeiras magnitudes a antecedente é á consecuente, así nas segundas magnitudes a antecedente é á consecuente, mentres que nas primeiras magnitudes a consecuente é a algunha outra, así nas segundas, algunha outra é á antecedente.

---

[12] Por composición, a razón $a:b$ proporciónanos a razón $(a + b):b$. Da proporción $a:b::c:d$, por composición das razóns, deducimos a proporción $(a + b):b::(c + d):d$.

[13] Separación dunha razón é un proceso inverso á composición. Se $a > b$, por separación, a razón $a:b$ proporciónanos a razón $(a - b):b$. Da proporción $a:b::c:d$ por separación das razóns deducimos a proporción $(a - b):b::(c - d):d$.

[14] Por conversión, a razón $a:b$ proporciónanos a razón $a:(a - b)$. Da proporción $a:b::c:d$ por conversión das razóns deducimos a proporción $a:(a - b)::c:(c - d)$. As proposicións V, 17; V, 18 e V, 19 tratan das relacións entre as razóns por composición, separación e conversión.

[15] Δι᾽ ἴσου: o texto grego non precisa con respecto a que é esa igualdade —algo similar ó que ocorre na Definición I, 4—, pero dado que a continuación define a que vai aplicar este termo, dedúcese que se refire a «igual número de termos intermedios».

[16] Se temos n magnitudes $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ e outras tantas $b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n$ tal que $a_1:a_2::b_1:b_2$, $a_2:a_3::b_2:b_3$, ..., $a_{n-1}:a_n:: b_{n-1}:b_n$, entón $a_1:a_n::b_1:b_n$.

[17] Antes desta definición, algúns manuscritos presentan unha definición para «razón ordenada»; Heiberg considera que é unha interpolación e Heath precisa que debe ser posterior a Teón.

[18] Do verbo ταράσσω, «axitar»; «perturbada» é o termo fixado pola tradición a partir da tradución latina «perturbata». Hai unha proporción perturbada cando temos tres magnitudes a_1, a_2 e a_3 e outras tres b_1, b_2 e b_3 tal que $a_1:a_2::b_2:b_3$ e $a_2:a_3::b_1:b_2$.

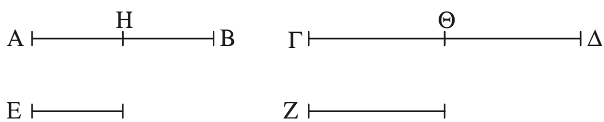
PROPOSICIÓN 1

***Se hai varias magnitudes, cada unha múltiplo igual respectivamente de varias magnitudes en igual número, cantas veces unha magnitude é múltiplo da outra, tantas veces tamén serán múltiplo todas de todas*[19].**

Sexan varias magnitudes, ΑΒ e ΓΔ, cada unha múltiplo igual respectivamente de Ε e Ζ, varias magnitudes en igual número; digo que cantas veces é múltiplo ΑΒ de Ε, tantas veces tamén serán múltiplo ΑΒ e ΓΔ de Ε e Ζ.

Pois ben, dado que ΑΒ é múltiplo de Ε igual que ΓΔ de Ζ, logo, cantas magnitudes hai en ΑΒ iguais a Ε, tantas tamén en ΓΔ iguais a Ζ.

Divídase ΑΒ nas magnitudes ΑΗ e ΗΒ iguais a Ε, mentres que ΓΔ nas magnitudes ΓΘ e ΘΔ iguais a Ζ; entón, a cantidade de ΑΗ e ΗΒ será igual á cantidade de ΓΘ e ΘΔ.



E, dado que ΑΗ é igual a Ε, e ΓΘ a Ζ, logo, ΑΗ é igual a Ε, e ΑΗ e ΓΘ a Ε e Ζ[20].

Entón, polo mesmo, tamén ΗΒ é igual a Ε, e ΗΒ e ΘΔ a Ε e Ζ[21]; logo, cantas magnitudes hai en ΑΒ iguais a Ε, tantas tamén en ΑΒ e ΓΔ iguais a Ε e Ζ; logo, cantas veces é múltiplo ΑΒ de Ε, tantas veces tamén serán múltiplo ΑΒ e ΓΔ de Ε e Ζ.

Logo, se hai varias magnitudes, cada unha múltiplo igual respectivamente de varias magnitudes en igual número, cantas veces unha magnitude é múltiplo da outra, tantas veces tamén serán múltiplo todas de todas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

19 Se a, b e c, d son catro magnitudes con $a = mc$ e $b = md$, sendo m un número natural, entón $(a + b) = m(c + d)$. O mesmo para n magnitudes. Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

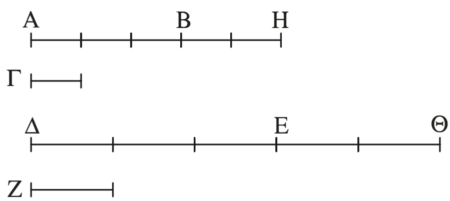
20 ΑΗ é igual a Ε mentres que ΑΗ e ΓΘ igual a Ε e Ζ. Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

21 ΗΒ é igual a Ε mentres que ΗΒ e ΘΔ igual a Ε e Ζ.

PROPOSICIÓN 2

Se unha primeira magnitude é múltiplo dunha segunda igual que unha terceira dunha cuarta, mentres que unha quinta é múltiplo da segunda igual que unha sexta da cuarta, tamén a primeira e a quinta sumadas serán múltiplo da segunda igual que a terceira mais a sexta da cuarta*[22]*.

Pois ben, sexa a primeira magnitude, AB, múltiplo da segunda, Γ, igual que a terceira, ΔE, da cuarta, Z, e sexa tamén a quinta, BH, múltiplo da segunda, Γ, igual que a sexta, EΘ, da cuarta, Z; digo que tamén a primeira e a quinta sumadas, AH, serán múltiplo da segunda, Γ, igual que a terceira mais a sexta, ΔΘ, da cuarta, Z.



Pois ben, dado que AB é múltiplo de Γ igual que ΔE de Z, logo, cantas magnitudes hai en AB iguais a Γ, tantas tamén en ΔE iguais a Z.

Entón, polo mesmo, tamén cantas magnitudes hai en BH iguais a Γ, tantas tamén en EΘ iguais a Z; logo, cantas magnitudes hai en AH enteira iguais a Γ, tantas tamén en ΔΘ enteira iguais a Z; logo, cantas veces AH é múltiplo de Γ, tantas veces tamén ΔΘ será múltiplo de Z.

Logo, tamén a primeira e a quinta sumadas, AH, serán múltiplo da segunda igual que a terceira mais a sexta, ΔΘ, da cuarta, Z.

[22] Se hai seis magnitudes a, b, c, d, e e f tal que $a = mb$, $c = md$, $e = nb$, $f = nd$, sendo m e n dous números naturais, entón existe un número natural, k, tal que $(a + e) = kb$, $(c + f) = kd$.

Logo, se unha primeira magnitude é múltiplo dunha segunda igual que unha terceira dunha cuarta, mentres que unha quinta é múltiplo da segunda igual que unha sexta da cuarta, tamén a primeira e a quinta sumadas serán múltiplo da segunda igual que a terceira mais a sexta da cuarta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

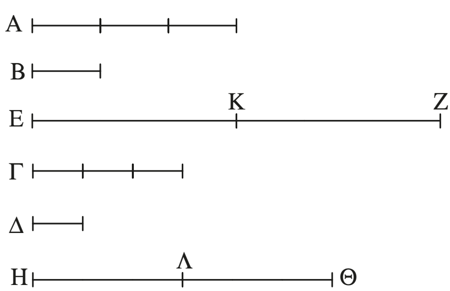
PROPOSICIÓN 3

Se unha primeira magnitude é múltiplo dunha segunda igual que unha terceira dunha cuarta e se toman múltiplos iguais da primeira e da terceira, tamén, por igualdade, cada unha das dúas magnitudes tomadas será múltiplo igual, respectivamente, unha da segunda e outra da cuarta*[23]*.

Pois ben, sexa a primeira magnitude, A, múltiplo da segunda, B, igual que a terceira, Γ, da cuarta, Δ, e EZ e HΘ múltiplos iguais de A e Γ; digo que EZ é múltiplo de B igual que HΘ de Δ.

Pois ben, dado que EZ é múltiplo de A igual que HΘ de Γ, logo, cantas magnitudes hai en EZ iguais a A tantas tamén en HΘ iguais a Γ.

Divídase EZ nas magnitudes EK e KZ iguais a A, mentres que HΘ, nas magnitudes HΛ e ΛΘ iguais a Γ; entón, a cantidade de EK e KZ será igual á cantidade de HΛ e ΛΘ.



[23] Se temos catro magnitudes *a*, *b*, *c*, *d* tal que $a = mb$ e $c = md$, sendo *m* un número natural, entón para calquera número natural, *n*, existe un número natural, *k*, tal que $na = kb$ e $nc = kd$.

E, dado que A é múltiplo de B igual que Γ de Δ e que EK é igual a A, e HΛ a Γ, logo, EK é múltiplo de B igual que HΛ de Δ.

Entón, polo mesmo, KZ é múltiplo de B igual que ΛΘ de Δ.

Entón, dado que a primeira, EK, é múltiplo da segunda, B, igual que a terceira, HΛ, da cuarta, Δ, e tamén, a quinta, KZ, é múltiplo da segunda, B, igual que a sexta, ΛΘ, da cuarta, Δ, logo, tamén a primeira e a quinta sumadas, EZ, son múltiplo da segunda, B, igual que a terceira mais a sexta, HΘ, da cuarta, Δ[24].

Logo, se unha primeira magnitude é múltiplo dunha segunda igual que unha terceira dunha cuarta e se toman múltiplos iguais da primeira e da terceira, tamén, por igualdade, cada unha das dúas magnitudes tomadas será múltiplo igual, respectivamente, unha da segunda e outra da cuarta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

Se unha primeira magnitude garda a mesma razón cunha segunda que unha terceira cunha cuarta, tamén os múltiplos iguais da primeira e da terceira gardarán a mesma razón cos múltiplos iguais da segunda e da cuarta, en calquera multiplicación, tomados sucesivamente[25].

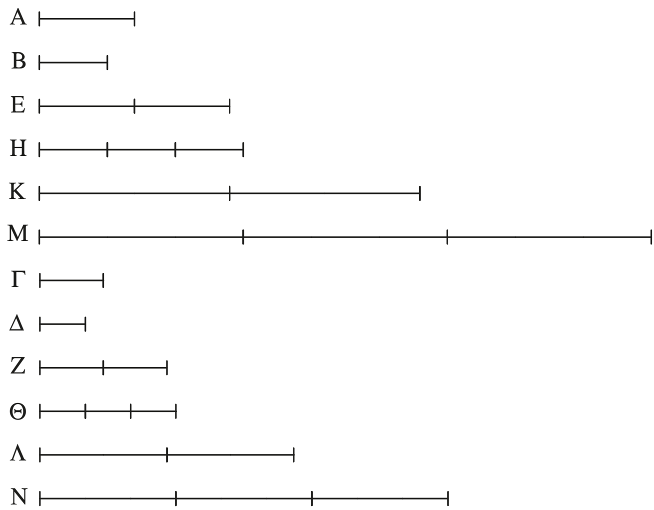
Pois ben, garde a mesma razón a primeira magnitude, A, coa segunda, B, que a terceira, Γ, coa cuarta, Δ, e tómense E e Z, múltiplos iguais de A e Γ, e H e Θ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de B e Δ; digo que como E é a H, así Z a Θ.

Pois ben, tómense K e Λ, múltiplos iguais de E e Z, e M e N outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de H e Θ.

---

24 Proposición V, 2.

25 Se temos catro magnitudes *a*, *b*, *c*, *d* tal que *a*:*b*::*c*:*d*, entón para calquera números naturais, *m* e *n*, *ma*:*nb*::*mc*:*nd*.



E, dado que E é múltiplo igual de A que Z de Γ e que se tomaron K e Λ, múltiplos iguais de E e Z, logo, K é múltiplo de A igual que Λ de Γ[26].

Entón, polo mesmo, M é múltiplo de B igual que N de Δ. E, posto que, como A é a B, así Γ a Δ e que se tomaron K e Λ, múltiplos iguais de A e Γ, e M e N outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de B e Δ, logo, se K supera a M, supera tamén Λ a N, e, se é igual, é igual e, se é menor, é menor[27].

E K e Λ son múltiplos iguais de E e Z, mentres que M e N son outros múltiplos, tomados ó azar, de H e Θ ; logo, como E é a H, así Z a Θ.

Logo, se unha primeira magnitude garda a mesma razón cunha segunda que unha terceira cunha cuarta, tamén os múltiplos iguais da primeira e da terceira gardarán a mesma razón cos múltiplos iguais da segunda e da cuarta, en calquera multiplicación, tomados sucesivamente; o que, xustamente, era preciso demostrar.

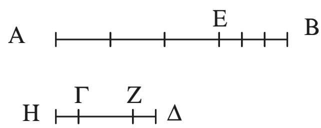
---

26 Proposición V, 3.
27 Definición V, 5.

PROPOSICIÓN 5

Se unha magnitude é múltiplo doutra magnitude igual que unha parte quitada é doutra parte quitada*[28]*, tamén a restante será múltiplo da restante igual que a magnitude enteira é da enteira*[29]*.

Pois ben, sexa a magnitude AB múltiplo da magnitude ΓΔ igual que a parte quitada, AE, da parte quitada, ΓZ; digo que tamén a restante, EB, será múltiplo da restante, ZΔ, igual que AB enteira de ΓΔ enteira.



Pois ben, cantas veces AE é múltiplo de ΓZ, tantas veces resulte tamén EB múltiplo de ΓH[30].

E, dado que AE é múltiplo de ΓZ igual que EB de HΓ, logo, AE é múltiplo de ΓZ igual que AB de HZ[31].

E AE suponse[32] múltiplo de ΓZ igual que AB de ΓΔ.

Logo, AB é múltiplo igual tanto de HZ como de ΓΔ; logo, HZ é igual a ΓΔ.

Quítese a ambas ΓZ; logo, a restante, HΓ, é igual á restante, ZΔ.

E, dado que AE é múltiplo de ΓZ igual que EB de HΓ, e HΓ é igual a ΔZ, logo, AE é múltiplo de ΓZ igual que EB de ZΔ.

Pero AE suponse múltiplo de ΓZ igual que AB de ΓΔ; logo, EB é múltiplo de ZΔ igual que AB de ΓΔ.

Logo, tamén a restante, EB, será múltiplo da restante, ZΔ, igual que AB enteira é de ΓΔ enteira.

---

28 Enténdese, «a que se lle quite á primeira magnitude da que se lle quite á segunda».

29 Sexan dúas magnitudes a e b ás que se lle quitan, respectivamente, c e d. Se $a = mb$ e $c = md$, sendo m un número natural, entón $(a - c) = m(b - d)$.

30 Constrúe ΓH tal que EB é múltiplo de ΓH tantas veces como AE de ΓZ.

31 Proposición V, 1.

32 Aquí o verbo simple, κεῖμαι, «poñer» co mesmo significado que o composto, ὑποκεῖμαι, «supoñer».

Logo, se unha magnitude é múltiplo doutra magnitude igual que unha parte quitada é doutra parte quitada, tamén a restante será múltiplo da restante igual que a magnitude enteira é da enteira; o que, xustamente, era preciso demostrar.

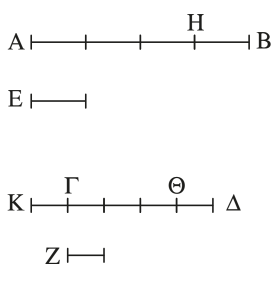
PROPOSICIÓN 6

***Se dúas magnitudes son múltiplos iguais doutras dúas magnitudes e unhas magnitudes calquera que se lle quiten son múltiplos iguais desas mesmas, as restantes tamén ou son iguais ás mesmas ou múltiplos iguais delas*[33].**

Pois ben, sexan dúas magnitudes AB e ΓΔ múltiplos iguais doutras dúas magnitudes, E e Z, e sexan as que se lle quitan AH e ΓΘ múltiplos iguais das mesmas, E e Z; digo que as restantes, HB e ΘΔ, ou son iguais a E e Z ou múltiplos iguais delas.

Pois ben, primeiro, sexa HB igual a E; digo que tamén ΘΔ é igual a Z.

Pois ben, póñase ΓK igual a Z. Dado que AH é múltiplo de E igual que ΓΘ de Z e que HB é igual a E, e KΓ a Z, logo, AB é múltiplo de E igual que KΘ de Z[34].



E suponse que AB é múltiplo de E igual que ΓΔ de Z; logo, KΘ é múltiplo de Z igual que ΓΔ de Z.

---

[33] Sexan dúas magnitudes a e b ás que se lle quitan, respectivamente, c e d. Se $a = me$, $b = mf$, $c = ne$, $d = nf$, sendo m e n dous números naturais, entón $(a - c) = e$ e $(b - d) = f$, ou $(a - c) = ke$ e $(b - d) = kf$ para un número natural, k.

[34] Proposición V, 2.

Entón, dado que tanto ΚΘ como ΓΔ son múltiplos iguais de Z, logo, ΚΘ é igual a ΓΔ.

Quítese a ambas ΓΘ; logo, a restante, ΚΓ, é igual á restante, ΘΔ.

Pero Z é igual a ΚΓ; logo, tamén ΘΔ é igual a Z.

En consecuencia, se HB é igual a E, tamén ΘΔ será igual a Z.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén, se HB é múltiplo de E, o mesmo múltiplo será tamén ΘΔ de Z[35].

Logo, se dúas magnitudes son múltiplos iguais doutras dúas magnitudes e unhas magnitudes calquera que se lle quiten son múltiplos iguais desas mesmas, as restantes tamén ou son iguais ás mesmas ou múltiplos iguais delas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

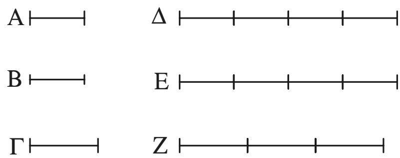
As magnitudes iguais gardan a mesma razón cunha mesma magnitude e unha mesma magnitude coas magnitudes iguais.

Sexan A e B magnitudes iguais, e Γ outra magnitude, ó azar; digo que tanto A como B gardan a mesma razón con Γ, e Γ tanto con A como con B.

Pois ben, tómense Δ e E múltiplos iguais de A e B, e Z, outro múltiplo, ó azar, de Γ .

Entón, dado que Δ é múltiplo de A igual que E de B, e A é igual a B, logo, tamén Δ é igual a E.

[35] Se HB non é igual a E, entón HB é múltiplo de E (Proposición V, 5.). Pois ben, póñase ΓΚ múltiplo de Z igual que HB é múltiplo de E. Dado que AH é múltiplo de E igual que ΓΘ de Z, e que HB é múltiplo de E igual que ΚΓ de Z, logo, AB é múltiplo de E igual que ΚΘ de Z (Proposición V, 2.). E suponse que AB é múltiplo de E igual que ΓΔ de Z; logo, ΚΘ é múltiplo de Z igual que ΓΔ de Z. Entón, dado que cada unha das dúas, ΚΘ e ΓΔ, é múltiplo igual de Z, logo, ΚΘ é igual a ΓΔ. Quítese a ambas ΓΘ; logo, a restante, ΚΓ, é igual á restante ΘΔ. Pero ΓΚ múltiplo de Z igual que HB é múltiplo de E; logo, tamén ΘΔ múltiplo de Z igual que HB é múltiplo de E. En consecuencia, se HB é múltiplo de E, tamén ΘΔ será múltiplo igual de Z.



E Z é outra magnitude ó azar. Logo, se Δ supera a Z, tamén E supera a Z e, se é igual, é igual e, se é menor, menor.

E Δ e E son múltiplos iguais de A e B, e Z outro múltiplo ó azar de Γ. Logo, como A é a Γ, así B a Γ[36].

E digo que tamén Γ garda a mesma razón tanto con A como con B.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que Δ é igual a E; e Z é outra magnitude; logo, se Z supera a Δ, supera tamén a E e, se é igual, é igual e, se menor, menor.

E Z é múltiplo de Γ, mentres que Δ e E son outros múltiplos iguais ó azar de A e B; logo, como Γ é a A, así Γ a B.

Logo, as magnitudes iguais gardan a mesma razón cunha mesma magnitude e unha mesma magnitude coas magnitudes iguais.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se unhas magnitudes son proporcionais[37], tamén serán proporcionais á inversa[38]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 8

Das magnitudes desiguais, a maior garda unha razón maior cunha mesma magnitude que a menor. E unha mesma magnitude garda unha razón maior coa menor que coa maior.

Sexan AB e Γ magnitudes desiguais e sexa AB a maior, e Δ outra, ó azar; digo que AB garda unha razón maior con Δ que Γ con Δ, e Δ garda unha razón maior con Γ que con AB.

---

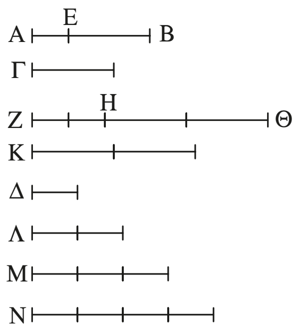
36 Definición V, 5.

37 Definición V, 6.

38 Definición V, 13.

Pois ben, dado que AB é maior que Γ, póñase BE igual a Γ; entón, a menor de entre AE e EB, multiplicada, será algunha vez maior que Δ[39].

Sexa, primeiro, AE menor que EB, multiplíquese AE, e ZH, que é maior que Δ, sexa múltiplo seu e, cantas veces ZH é múltiplo de AE, tantas veces resulte tamén HΘ múltiplo de EB, e K de Γ; tómese Λ, dobre que Δ, e M, triplo, e, sucesivamente co incremento dun, ata que o múltiplo tomado de Δ resulte por primeira vez maior que K. Tómese e sexa N, cuádruplo que Δ e por primeira vez maior que K.



Entón, dado que K é menor por primeira vez que N, logo, K non é menor que M.

E, dado que ZH é múltiplo de AE igual que HΘ de EB, logo, ZH é múltiplo de AE igual que ZΘ de AB[40].

E ZH é múltiplo de AE igual que K de Γ; logo, ZΘ é múltiplo de AB igual que K de Γ.

Logo ZΘ e K son múltiplos iguais de AB e Γ.

Asemade, dado que HΘ é múltiplo igual de EB que K de Γ e que EB é igual a Γ, logo, tamén HΘ é igual a K; e K non é menor que M; logo, HΘ tampouco é menor que M.

E ZH é maior que Δ; logo, ZΘ enteira é maior que Δ e M xuntas; pero Δ e M xuntas son iguais a N, posto que, efectiva-

39 Definición V, 4.
40 Proposición V, 1.

mente, M é triplo que Δ, e M e Δ xuntas son cuádruplo que Δ, e N é tamén cuádruplo que Δ; logo, M e Δ xuntas son iguais a N.

Pero ZΘ é maior que M e Δ; logo, ZΘ supera a N; pero K non supera a N.

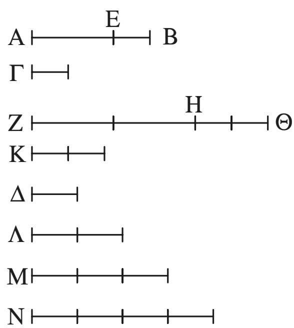
E ZΘ e K son múltiplos iguais de AB e Γ, mentres que N é outro múltiplo ó azar de Δ; logo, AB garda unha razón maior con Δ que Γ con Δ[41].

Digo agora que tamén Δ garda unha razón maior con Γ que Δ con AB.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que N supera a K, mentres que N non supera a ZΘ.

E N é múltiplo de Δ, mentres que ZΘ e K son outros múltiplos iguais ó azar de AB e Γ; logo, Δ garda unha razón maior con Γ que Δ con AB.

Sexa agora AE maior que EB. Entón, a menor, EB, multiplicada, será algunha vez maior que Δ.



Multiplíquese e sexa HΘ múltiplo de EB e maior que Δ; e, cantas veces HΘ é múltiplo de EB, tantas veces resulte tamén ZH múltiplo de AE, e K de Γ.

De xeito semellante poderemos demostrar que ZΘ e K son múltiplos iguais de AB e Γ; de xeito semellante, tómese N, múl-

41 Definición V, 7.

tiplo de Δ e, por primeira vez, maior que ZH; de xeito que, de novo, ZH non é menor que M.

E HΘ é maior que Δ; logo ZΘ enteiro supera a Δ e M, isto é, a N.

Pero K non supera a N, posto que, efectivamente, tamén ZH, que é maior que HΘ, isto é, que K, non supera a N.

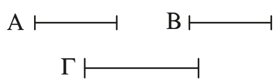
E igualmente, seguindo o de arriba, rematamos a demostración.

Logo, das magnitudes desiguais, a maior garda unha razón maior cunha mesma magnitude que a menor; e unha mesma magnitude garda unha razón maior coa menor que coa maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 9

As magnitudes que gardan a mesma razón cunha mesma magnitude son iguais entre si; e aquelas coas que unha mesma magnitude garda a mesma razón son iguais.

Pois ben, garden tanto A como B a mesma razón con Γ; digo que A é igual a B.



Pois se non, tanto A como B non gardarían a mesma razón con Γ[42]; pero gárdana; logo A é igual a B.

Garde agora Γ a mesma razón tanto con A como con B; digo que A é igual a B.

Pois se non, Γ non gardaría a mesma razón tanto con A como con B; pero gárdaa; logo A é igual a B.

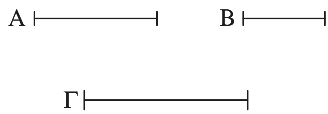
Logo, as magnitudes que gardan a mesma razón cunha mesma magnitude son iguais entre si; e aquelas coas que unha mesma magnitude garda a mesma razón son iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[42] Proposición V, 8.

PROPOSICIÓN 10

Das magnitudes que gardan razón cunha mesma, é maior aquela que garda unha razón maior; e é menor aquela coa que a mesma magnitude garda unha razón maior.

Pois ben, garde A unha razón maior con Γ que B con Γ; digo que A é maior que B.



Pois se non, A é igual a B ou menor.

Pero, de feito, A non é igual a B; pois, se fose, tanto A como B gardarían a mesma razón con Γ[43]. Pero non a gardan; logo, A non é igual a B.

E tampouco é menor A que B; pois, se fose, A gardaría unha razón menor con Γ que B con Γ[44]. Pero non a garda; logo, A non é menor que B; e foi demostrado que tampouco igual; logo, A é maior que B.

Garde, agora, Γ unha razón maior con B que Γ con A; digo que B é menor que A.

Pois se non, ou é igual ou maior. Pero, de feito, B non é igual a A; pois, se fose, Γ gardaría a mesma razón tanto con A como con B. Pero non a garda; logo, A non é igual a B.

E tampouco é maior B que A; pois, se fose, Γ gardaría unha razón menor con B que con A. Pero non a garda; logo, B non é maior que A. E foi demostrado que tampouco igual; logo, B é menor que A.

Logo, das magnitudes que gardan razón cunha mesma, é maior aquela que garda unha razón maior; e é menor aquela coa que a mesma garda unha razón maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

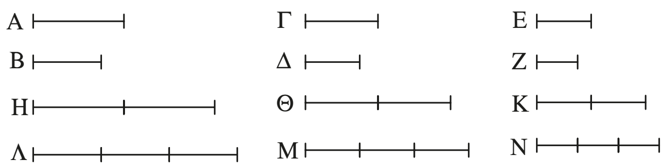
43 Proposición V, 7.
44 Proposición V, 8.

PROPOSICIÓN 11

As razóns idénticas a unha mesma tamén son idénticas entre si.

Pois ben, como Α é a Β, sexa así Γ a Δ, e como Γ a Δ, así Ε a Ζ; digo que como Α é a Β, así Ε a Ζ.

Pois ben, tómense Η, Θ e Κ múltiplos iguais de Α, Γ e Ε, e Λ, Μ e Ν outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Β, Δ e Ζ.



E, posto que, como Α é a Β, así Γ a Δ e que de Α e Γ se tomaron os múltiplos iguais Η, Θ, e de Β e Δ outros múltiplos iguais, Λ e Μ, tomados ó azar, logo, se Η supera a Λ, supera tamén Θ a Μ e, se é igual é igual e, se é inferior, inferior[45].

Asemade, posto que, como Γ é a Δ, así Ε a Ζ, e que se tomaron Θ e Κ múltiplos iguais de Γ e Ε, e Μ e Ν outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Δ e Ζ, logo, se Θ supera a Μ, supera tamén Κ a Ν e, se é igual é igual e, se é menor, menor.

Pero se superaba Θ a Μ, superaba tamén Η a Λ e, se era igual, era igual e, se menor, menor; en consecuencia, tamén se Η supera a Λ, supera tamén Κ a Ν e, se é igual, é igual e, se menor, menor.

E Η e Κ son múltiplos iguais de Α e Ε, mentres que Λ e Ν son outros múltiplos iguais de Β e Ζ tomados ó azar; logo, como Α é a Β, así Ε a Ζ.

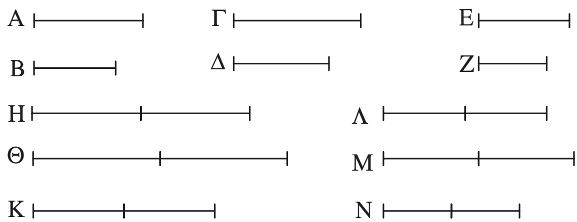
Logo, as razóns idénticas a unha mesma tamén son idénticas entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[45] Definición V, 5.

PROPOSICIÓN 12

Se hai varias magnitudes proporcionais, como unha das antecedentes é a unha das consecuentes, así serán todas as antecedentes a todas as consecuentes*[46]*.

Sexan varias magnitudes proporcionais, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ: como Α é a Β, así Γ a Δ, e Ε a Ζ; digo que como Α é a Β, así Α, Γ e Ε a Β, Δ e Ζ.



Pois ben, tómense Η, Θ e Κ, múltiplos iguais de Α, Γ e Ε, e Λ, Μ e Ν outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Β, Δ e Ζ.

E, posto que, como Α é a Β, así Γ a Δ, e Ε a Ζ e que se tomaron Η, Θ e Κ múltiplos iguais de Α, Γ e Ε, e Λ, Μ e Ν outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Β, Δ e Ζ, logo, se Η supera a Λ, supera tamén Θ a Μ e Κ a Ν e, se é igual é igual e, se é menor, menor[47].

En consecuencia, tamén se Η supera a Λ, superan tamén Η, Θ e Κ a Λ, Μ e Ν e, se é igual, son iguais e, se menor, menores.

E tanto Η como Η, Θ e Κ son múltiplos iguais de Α e de Α, Γ e Ε, posto que, en efecto, se hai varias magnitudes, cada unha múltiplo igual respectivamente de varias magnitudes en igual número, cantas veces unha magnitude é múltiplo da outra, tantas veces tamén serán múltiplo todas de todas[48].

Entón, polo mesmo, tanto Λ como Λ, Μ e Ν son múltiplos iguais de Β e de Β, Δ e Ζ; logo, como Α é a Β, así Α, Γ e Ε a Β, Δ e Ζ.

Logo, se hai varias magnitudes proporcionais, como unha das antecedentes é a unha das consecuentes, así serán todas as

---

[46] Se $a{:}b{::}g{:}d{::}e{:}z$, entón $a{:}b{::}(a + g + e){:}(b + d + z)$.

[47] Definición V, 5.

[48] Proposición V, 1.

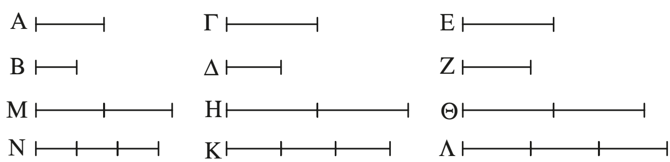
antecedentes a todas as consecuentes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13

Se unha primeira magnitude garda cunha segunda a mesma razón que unha terceira cunha cuarta, e a terceira garda coa cuarta unha razón maior que unha quinta cunha sexta, tamén a primeira gardará coa segunda unha razón maior que a quinta coa sexta.

Pois ben, garde a primeira magnitude, A, coa segunda, B, a mesma razón que a terceira, Γ, coa cuarta, Δ, e a terceira, Γ, garde coa cuarta, Δ, maior razón que a quinta, E, coa sexta, Z; digo que tamén a primeira, A, gardará coa segunda, B, unha razón maior que a quinta, E, coa sexta, Z.

Pois ben, dado que hai uns múltiplos iguais de Γ e E, e outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Δ e Z, e que o múltiplo de Γ supera ó múltiplo de Δ, mentres que o múltiplo de E non supera ó múltiplo de Z[49], tómense e sexan H e Θ múltiplos iguais de Γ e E, e K e Λ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Δ e Z, de xeito que H supere a K, mentres que Θ non supere a Λ; e cantas veces é H múltiplo de Γ tantas veces sexa tamén M de A, e cantas veces K de Δ, sexa tantas veces tamén N de B.



E, posto que, como A é a B, así Γ a Δ e que se tomaron M e H múltiplos iguais de A e Γ, mentres que N e K outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de B e Δ, logo, se M supera a N, supera tamén H a K e, se é igual é igual e, se é menor, menor[50].

49 Definición V, 7.
50 Definición V, 5.

Pero H supera a K; logo, supera tamén M a N.

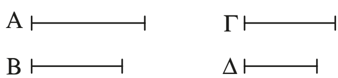
Pero Θ non supera a Λ; e M e Θ son múltiplos iguais de A e E, e N e Λ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de B e Z; logo, A garda unha razón maior con B que E con Z.

Logo, se unha primeira magnitude garda cunha segunda a mesma razón que unha terceira cunha cuarta, e a terceira garda coa cuarta unha razón maior que unha quinta cunha sexta, tamén a primeira gardará coa segunda unha razón maior que a quinta coa sexta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

Se unha primeira magnitude garda cunha segunda a mesma razón que unha terceira cunha cuarta, e a primeira é maior que a terceira, tamén a segunda será maior que a cuarta, e se é igual, será igual e, se menor, menor.

Pois ben, garde a primeira magnitude, A, coa segunda, B, a mesma razón que a terceira, Γ, coa cuarta Δ, e sexa A maior que Γ; digo que B é maior que Δ.



Pois, dado que A é maior que Γ, e B outra magnitude tomada ó azar, logo, A garda unha razón maior con B que Γ con B[51].

E, como A é a B, así Γ a Δ; logo, tamén Γ garda unha razón maior con Δ que Γ con B[52].

E aquela coa que unha mesma magnitude garda unha razón maior é menor[53]; logo, Δ é menor que B; en consecuencia, B é maior que Δ.

De xeito semellante poderemos demostrar que se A é igual que Γ, B será tamén igual a Δ, e se A é menor que Γ, B será tamén menor que Δ.

51 Proposición V, 8.
52 Proposición V, 13.
53 Proposición V, 10.

Logo, se unha primeira magnitude garda cunha segunda a mesma razón que unha terceira cunha cuarta, e a primeira é maior que a terceira, tamén a segunda será maior que a cuarta, e se é igual, será igual e se menor, menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

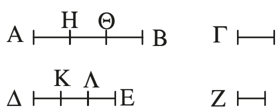
PROPOSICIÓN 15

***As partes*[54] *gardan a mesma razón que os seus múltiplos*[55] *iguais, tomados sucesivamente*[56].**

Pois ben, sexa AB múltiplo de Γ igual que ΔE de Z; digo que como Γ é a Z, así AB a ΔE.

Pois ben, dado que AB é múltiplo de Γ igual que ΔE de Z, logo, cantas magnitudes hai en AB iguais a Γ, tantas tamén en ΔE iguais a Z.

Divídase AB nas magnitudes AH, HΘ e ΘB iguais a Γ, mentres que ΔE nas magnitudes ΔK, KΛ e ΛE iguais a Z; entón, a cantidade de AH, HΘ e ΘB será igual á cantidade de ΔK, KΛ e ΛE.



E, dado que AH, HΘ e ΘB son iguais entre si e que ΔK, KΛ e ΛE tamén son iguais entre si, logo, como AH é a ΔK, así HΘ a KΛ, e ΘB a ΛE[57].

Logo, como unha das antecedentes a unha das consecuentes, así serán todas as antecedentes a todas as consecuentes[58]; logo, como AH é a ΔK, así AB a ΔE.

E AH é igual a Γ, e ΔK a Z; logo, como Γ é a Z, así AB a ΔE.

---

54 Definición V, 1.
55 Definición V, 2.
56 Se $a = mc$ e $b = md$, sendo m un número natural, entón $a:b::c:d$.
57 Proposición V, 7.
58 Proposición V, 12.

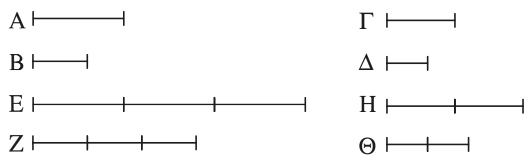
Logo, as partes, tomadas sucesivamente, gardan a mesma razón que os seus múltiplos iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

Se catro magnitudes son proporcionais[59] tamén serán proporcionais por alternancia.

Sexan catro magnitudes proporcionais A, B, Γ e Δ: como A é a B, así Γ a Δ; digo que tamén serán proporcionais por alternancia: como A é a Γ, así B a Δ.

Pois ben, tómense E e Z múltiplos iguais de A e B, e H e Θ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Γ e Δ.



E, dado que E é múltiplo de A igual que Z de B e as partes gardan a mesma razón que os seus múltiplos iguais[60], logo, como A a B, así é E a Z.

E como A a B, así Γ a Δ; logo, tamén como Γ a Δ, así E a Z[61].

Asemade, dado que H e Θ son múltiplos iguais de Γ e Δ, logo, como Γ a Δ, así H a Θ.

E como Γ a Δ, así E a Z; logo, tamén como E a Z, así H a Θ.

E se catro magnitudes son proporcionais e a primeira é maior que a terceira, tamén a segunda será maior que a cuarta, e se é igual, será igual e, se menor, menor[62]. Logo, se E supera a H, supera tamén Z a Θ e, se é igual, é igual e, se menor, menor.

E E e Z son múltiplos iguais de A e B, e H e Θ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Γ e Δ; logo, como A é a Γ, así B a Δ[63].

---

59 Definición V, 6.
60 Proposición V, 15.
61 Proposición V, 11.
62 Proposición V, 14.
63 Definición V, 5.

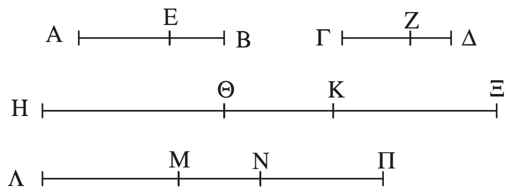
Logo, se catro magnitudes son proporcionais tamén serán proporcionais por alternancia; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 17

Se unhas magnitudes son proporcionais por composición, tamén serán proporcionais por separación[64].

Sexan as magnitudes proporcionais por composición AB, BE, ΓΔ e ΔZ: como AB é a BE, así ΓΔ a ΔZ; digo que tamén serán proporcionais por separación: como AE a EB, así ΓZ a ΔZ.

Pois ben, tómense HΘ, ΘK, ΛM e MN múltiplos iguais de AE, EB, ΓZ e ZΔ, e KΞ e NΠ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de EB e ZΔ.



E, dado que HΘ é múltiplo de AE igual que ΘK de EB, logo, HΘ é múltiplo de AE igual que HK de AB[65].

E HΘ é múltiplo de AE igual que ΛM de ΓZ; logo, HK é múltiplo de AB igual que ΛM de ΓZ.

Asemade, dado que ΛM é múltiplo de ΓZ igual que MN de ZΔ, logo, ΛM é múltiplo de ΓZ igual que ΛN de ΓΔ.

E ΛM era múltiplo de ΓZ igual que HK de AB; logo, HK é múltiplo de AB igual que ΛN de ΓΔ.

Logo, HK e ΛN son múltiplos iguais de AB e ΓΔ.

---

64 Se $(a + b):b::(c + d):d$ entón $a:b::c:d$. Esta proposición utiliza as definicións V, 14 e V, 15 nas que aparecían os substantivos σύνθησις —composición— e διαίρησις —separación—; aquí emprega participios de verbos, συγκείμενα e διαιρηθέντα, cuxo significado corresponde ós substantivos da definición.

65 Proposición V, 1.

Asemade, dado que ΘK é múltiplo de EB igual que MN de ZΔ, e KΞ tamén é múltiplo de EB igual que NΠ de ZΔ, tamén a suma ΘΞ é múltiplo de EB igual que MΠ de ZΔ[66].

E, dado que, como AB é a BE, así ΓΔ a ΔZ, e que se tomaron HK e ΛN múltiplos iguais de AB e ΓΔ, e ΘΞ e MΠ múltiplos iguais de EB e ZΔ , logo, se HK supera a ΘΞ, supera tamén ΛN a MΠ e, se é igual, é igual, e, se menor, menor[67].

Supere, entón, HK a ΘΞ e, se se quita a ambos ΘK, logo, supera tamén HΘ a KΞ.

Pero se HK superaba a ΘΞ, superaba tamén ΛN a MΠ; logo, supera tamén ΛN a MΠ e, se se quita a ambos MN, supera tamén ΛM a NΠ; en consecuencia, se HΘ supera a KΞ, supera tamén ΛM a NΠ.

De xeito semellante poderemos demostrar que se HΘ é igual a KΞ, será igual tamén ΛM a NΠ, e, se menor, menor.

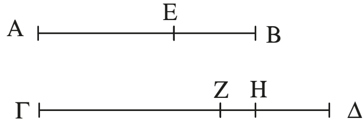
E HΘ e ΛM son múltiplos iguais de AE e ΓZ, mentres que KΞ e NΠ, outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de EB e ZΔ; logo, como AE é a EB, así ΓZ a ZΔ.

Logo, se unhas magnitudes son proporcionais por composición, tamén serán proporcionais por separación; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

***Se unhas magnitudes son proporcionais por separación, tamén serán proporcionais por composición*[68].**

Sexan as magnitudes proporcionais por separación AE, EB, ΓZ e ZΔ: como AE é a EB, así ΓZ a ZΔ; digo que tamén serán proporcionais por composición: como AB a BE, así ΓΔ a ZΔ.



[66] Proposición V, 2.
[67] Definición V, 5.
[68] Definición V, 14.

Pois se ΓΔ non é a ΔZ como AB a BE, ΓΔ será ou ben a unha magnitude menor que ΔZ ou a unha maior como AB a BE[69].

Sexa primeiro proporcional a unha menor, ΔH.

E, dado que, como AB é a BE, así ΓΔ a ΔH, son magnitudes proporcionais por composición; en consecuencia, tamén serán proporcionais por separación[70].

Logo, como AE a EB, así ΓH a HΔ.

E suponse tamén que, como AE é a EB, así ΓZ a ZΔ. Logo, tamén, como ΓH a HΔ, así ΓZ a ZΔ[71].

E a primeira, ΓH, é maior que a terceira, ΓZ; logo, tamén a segunda, HΔ, é maior que a cuarta, ZΔ[72].

Pero tamén, menor; o que, sen dúbida, é imposible; logo, como AB a BE, non é así ΓΔ a unha magnitude menor que ZΔ.

De xeito semellante poderemos demostrar que tampouco é proporcional a unha maior; logo, é proporcional a ela mesma.

Logo, se unhas magnitudes son proporcionais por separación, tamén serán proporcionais por composición; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 19

***Se, como o todo é ó todo, así a parte quitada é á parte quitada, tamén o restante será ó restante, como o todo é ó todo*[73].**

Pois ben, como o todo, AB, é ó todo, ΓΔ, sexa así a parte quitada, AE, á parte quitada, ΓZ; digo que tamén o restante, EB, será ó restante, ZΔ, como o todo, AB, é ó todo, ΓΔ.

---

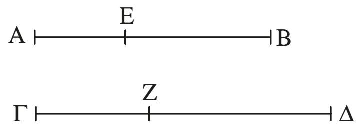
69 Dá por suposto a existencia dun cuarto termo proporcional. Diversos editores e estudosos dos *Elementos* optaron pola suposición desa existencia a modo de axioma. Outros optaron por facer unha proba que non necesitase ese suposto ou por probar antes a existencia dese cuarto termo proporcional (HEATH, II, páxina 170).

70 Proposición V, 17.

71 Proposición V, 11.

72 Proposición V, 14.

73 Sexan dúas magnitudes a e b ás que se lle quitan, respectivamente, c e d. Se $a{:}b{::}c{:}d$, entón $a{:}b{::}(a-c){:}(b-d)$.



Pois dado que, como AB é a ΓΔ, así AE a ΓZ, tamén, por alternancia, como BA a AE, así ΔΓ a ΓZ[74].

E, dado que, por composición, son magnitudes proporcionais, tamén por separación serán proporcionais[75]: como BE a EA, así ΔZ a ΓZ; e, por alternancia, como BE a ΔZ, así EA a ZΓ.

Pero como AE é a ΓZ, así se supón que o todo, AB, é ó todo, ΓΔ. Logo, tamén o restante, EB, será ó restante, ZΔ, como o todo, AB, é ó todo, ΓΔ[76].

Logo, se, como o todo é ó todo, así a parte quitada é á parte quitada, tamén o restante será ó restante, como o todo é ó todo; o que, xustamente, era preciso demostrar.[77]

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se unhas magnitudes son proporcionais por composición, tamén serán proporcionais por conversión[78]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 20

Se hai tres magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas están tamén na mesma razón, e se, por igualdade, a primeira é maior que a terceira, tamén a cuarta será maior que a sexta e, se é igual, igual, e, se menor, menor.

Sexan as magnitudes A, B e Γ, e outras en igual número a elas Δ, E e Z, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están na

74 Proposición V, 16.

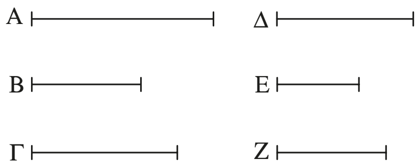
75 Proposición V, 17.

76 Proposición V, 11.

77 A continuación os manuscritos inclúen un parágrafo que Heiberg considera que é unha interpolación posterior a Euclides, tendo en conta que se supón que os corolarios non precisan explicación: «E dado que foi demostrado que, como AB a ΓΔ, así EB a ZΔ e, por alternancia, como AB a BE, así ΓΔ a ZΔ, logo, por composición, son magnitudes proporcionais; e foi demostrado que como BA é a AE, así ΔΓ a ΓZ; e é por conversión.»

78 Definición V, 16.

mesma razón: como A é a B, así Δ a E, mentres que, como B a Γ, así E a Z, e, por igualdade, sexa A maior que Γ; digo que tamén Δ será maior que Z e, se é igual, igual, e, se menor, menor.



Pois, dado que A é maior que Γ, e B outra magnitude, e que a maior garda unha razón maior cunha mesma magnitude que a menor[79], logo, A garda unha razón maior con B que Γ con B.

Pero como A é a B, así Δ a E e, como Γ a B, por inversión, así Z a E[80]; logo, tamén Δ garda unha razón maior con E que Z con E[81].

E, das que gardan razón cunha mesma magnitude a que garda unha razón maior é maior[82].

Logo, Δ é maior que Z.

De xeito semellante poderemos demostrar que, se A é igual a Γ, tamén Δ será igual a Z e, se menor, menor.

Logo, se hai tres magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón, e se, por igualdade, a primeira é maior que a terceira, tamén a cuarta será maior que a sexta e, se é igual, igual e, se menor, menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

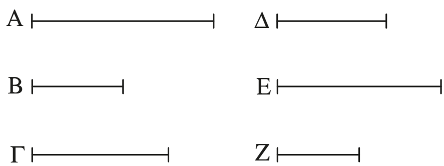
PROPOSICIÓN 21

Se hai tres magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón e se a proporción entre elas é perturbada, e se, por igualdade, a primeira é maior que a terceira,

79 Proposición V, 8.
80 Proposición V, 7. Corolario.
81 Proposición V, 13.
82 Proposición V, 10.

tamén a cuarta será maior que a sexta e, se é igual, igual e, se menor, menor.

Sexan tres magnitudes Α, Β e Γ e outras en igual número a elas Δ, Ε e Ζ, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón, e sexa a proporción entre elas perturbada: como Α é a Β, así Ε a Ζ, mentres que, como Β a Γ, así Δ a Ε, e, por igualdade, sexa Α maior que Γ; digo que tamén Δ será maior que Ζ e, se é igual, igual e, se menor, menor.



Pois, dado que Α é maior que Γ, e Β outra magnitude, logo, Α garda unha razón maior con Β que Γ con Β[83].

Pero como Α é a Β, así Ε a Ζ e como Γ a Β, por inversión, así Ε a Δ[84]; logo, tamén Ε garda unha razón maior con Ζ que Ε con Δ[85].

E é menor aquela coa que a mesma magnitude garda unha razón maior[86]; logo, Ζ é menor que Δ; logo, Δ é maior que Ζ.

De xeito semellante poderemos demostrar que, se Α é igual a Γ, tamén Δ será igual a Ζ e, se menor, menor.

Logo, se hai tres magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón, e se a proporción entre elas é perturbada, e se, por igualdade, a primeira é maior que a terceira, tamén a cuarta será maior que a sexta e, se é igual, igual e, se menor, menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

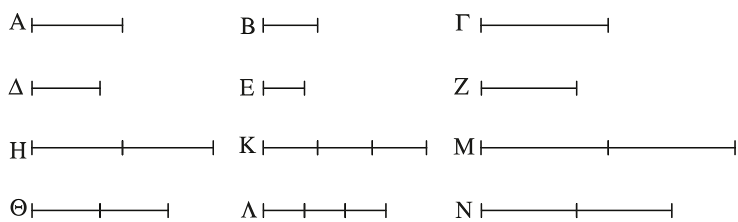
83 Proposición V, 8.
84 Proposición V, 7. Corolario.
85 Proposición V, 13.
86 Proposición V, 10.

PROPOSICIÓN 22

Se hai varias magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón, tamén, por igualdade, estarán na mesma razón.

Sexan varias magnitudes Α, Β e Γ e outras en igual número a elas Δ, Ε e Ζ, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están na mesma razón: como Α é a Β, así Δ a Ε, mentres que, como Β a Γ, así Ε a Ζ; digo que tamén, por igualdade, estarán na mesma razón.

Pois ben, tómense Η e Θ, múltiplos iguais de Α e Δ, mentres que Κ e Λ, outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Β e Ε e, ademais, Μ e Ν, outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Γ e Ζ.



E, dado que como Α é a Β, así Δ a Ε e que se tomaron Η e Θ múltiplos iguais de Α e Δ, e Κ e Λ outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Β e Ε, logo, como Η é a Κ, así Θ a Λ[87].

Entón, polo mesmo, tamén como Κ a Μ, así Λ a Ν.

Entón, dado que Η, Κ e Μ son tres magnitudes e Θ, Λ e Ν outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están tamén na mesma razón, logo, por igualdade, se Η supera a Μ, supera tamén Θ a Ν e, se é igual, é igual e, se menor, menor[88].

E Η e Θ son múltiplos iguais de Α e Δ, mentres que Μ e Ν son outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Γ e Ζ . Logo, como Α é a Γ, así Δ a Ζ[89].

87 Proposición V, 4.
88 Proposición V, 20.
89 Definición V, 5.

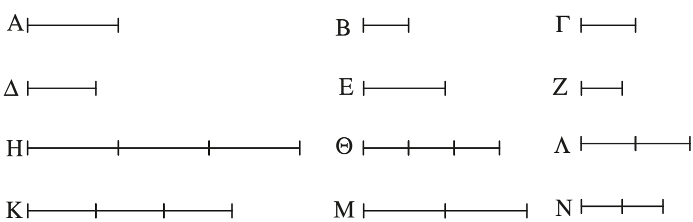
Logo, se hai varias magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están na mesma razón, tamén, por igualdade, estarán na mesma razón; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 23

Se hai tres magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están na mesma razón e a proporción entre elas é perturbada, tamén, por igualdade, estarán na mesma razón.

Sexan tres magnitudes Α, Β e Γ e outras en igual número a elas Δ, Ε e Ζ, as cales ó tomalas de dúas en dúas, están na mesma razón, e sexa a proporción entre elas perturbada: como Α é a Β, así Ε a Ζ, mentres que como Β a Γ, así Δ a Ε; digo que como Α é a Γ, así Δ a Ζ.

Tómense Η, Θ e Κ, múltiplos iguais de Α, Β e Δ, mentres que Λ, Μ e Ν, outros múltiplos iguais, tomados ó azar, de Γ, Ε e Ζ.



E, dado que Η e Θ son múltiplos iguais de Α e Β e as partes gardan a mesma razón que os seus múltiplos iguais[90], logo, como Α é a Β, así Η a Θ.

Entón, polo mesmo, tamén como Ε a Ζ, así Μ a Ν; e como Α a Β, así Ε a Ζ; logo, tamén como Η a Θ, así Μ a Ν[91].

E, dado que como Β é a Γ, así Δ a Ε, tamén, por alternancia, como Β a Δ, así Γ a Ε[92].

90 Proposición V, 15.
91 Proposición V, 11.
92 Proposición V, 16.

E, dado que Θ e K son múltiplos iguais de B e Δ, e as partes gardan a mesma razón que os seus múltiplos iguais, logo, como B é a Δ, así Θ a K.

Pero como B é a Δ, así Γ a E; logo, tamén como Θ a K, así Γ a E.

Asemade, dado que Λ e M son múltiplos iguais de Γ e E, logo, como Γ é a E, así Λ a M.

Pero como Γ é a E, así Θ a K; logo, tamén como Θ é a K, así Λ a M e, por alternancia, como Θ é a Λ, K é a M.

E foi demostrado tamén que como H a Θ, así M a N.

Entón, dado que H, Θ e Λ son tres magnitudes e K, M e N outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están na mesma razón e a proporción entre elas é perturbada, logo, por igualdade, se H supera a Λ, supera tamén K a N e, se é igual, é igual e, se menor, menor[93].

E H e K son múltiplos iguais de A e Δ, mentres que Λ e N, de Γ e Z. Logo, como A é a Γ, así Δ a Z[94].

Logo, se hai tres magnitudes e outras en igual número a elas, as cales, ó tomalas de dúas en dúas, están na mesma razón e a proporción entre elas é perturbada, tamén, por igualdade, estarán na mesma razón; o que, xustamente, era preciso demostrar.

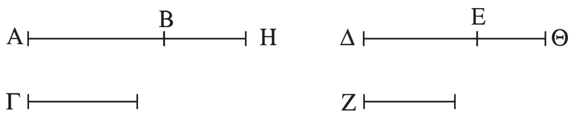
PROPOSICIÓN 24

Se unha primeira magnitude garda a mesma razón cunha segunda que unha terceira cunha cuarta, e unha quinta garda a mesma razón coa segunda que unha sexta coa cuarta, tamén a primeira e a quinta sumadas gardarán a mesma razón coa segunda que a terceira mais a sexta coa cuarta.

Pois ben, garde a mesma razón a primeira magnitude, AB, coa segunda, Γ, que a terceira, ΔE, coa cuarta, Z, e garde tamén

[93] Proposición V, 21.
[94] Definición V, 5.

a quinta, BH, a mesma razón coa segunda, Γ, que a sexta, EΘ, coa cuarta, Z; digo que tamén a primeira e a quinta sumadas, AH, gardarán a mesma razón coa segunda, Γ, que a terceira mais a sexta, ΔΘ, coa cuarta, Z.



Pois ben, dado que, como BH é a Γ, así EΘ a Z, logo, por inversión, como Γ é a BH, así Z a EΘ[95].

Entón, dado que, como AB é a Γ, así ΔE a Z, mentres que como Γ a BH, así Z a EΘ, logo, por igualdade, como AB é a BH, así ΔE a EΘ[96].

E posto que son magnitudes proporcionais por separación, serán tamén proporcionais por composición[97]; logo, como AH é a HB, así ΔΘ a ΘE.

E tamén, como BH é a Γ, así EΘ a Z; logo, por igualdade, como AH é a Γ, así ΔΘ a Z.

Logo, se unha primeira magnitude garda a mesma razón cunha segunda que unha terceira cunha cuarta, e unha quinta garda a mesma razón coa segunda que unha sexta coa cuarta, tamén a primeira e a quinta sumadas gardarán a mesma razón coa segunda que a terceira mais a sexta coa cuarta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 25

Se catro magnitudes son proporcionais, a maior delas mais a menor son maiores que as dúas restantes.

Sexan catro magnitudes proporcionais AB, ΓΔ, E e Z: como AB é a ΓΔ, así E a Z; sexa a maior delas AB e a menor Z; digo que AB e Z son maiores que ΓΔ e E.

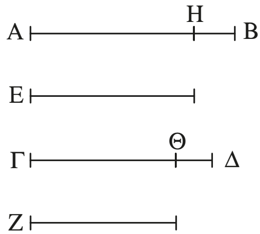
---

[95] Proposición V, 7. Corolario.

[96] Proposición V, 22.

[97] Proposición V, 18.

Pois ben, póñase AH igual a E, e ΓΘ igual a Z.



Entón, dado que como AB é a ΓΔ, así E a Z, mentres que E é igual a AH, e Z a ΓΘ, logo, como AB é a ΓΔ, así AH a ΓΘ.

E, dado que, como o todo, AB, é ó todo, ΓΔ, así a parte quitada, AH, é á parte quitada, ΓΘ, logo, tamén o restante, HB, será ó restante, ΘΔ, como o todo, AB, ó todo, ΓΔ[98].

E AB é maior que ΓΔ; logo, tamén HB é maior que ΘΔ[99].

E, dado que AH é igual a E, mentres que ΓΘ a Z, logo, AH e Z son iguais a ΓΘ e E[100].

E, se, sendo HB e ΘΔ desiguais e HB maior, se engaden AH e Z a HB e se engaden ΓΘ e E a ΘΔ, conclúese que AB e Z son maiores que ΓΔ e E.

Logo, se catro magnitudes son proporcionais, a maior delas mais a menor son maiores que as dúas restantes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

98 Proposición V, 19.

99 Definición V, 5.

100 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

LIBRO VI

DEFINICIÓNS

1. Figuras rectilíneas semellantes son as que teñen os ángulos iguais un a un e proporcionais os lados[1] dos ángulos iguais.
2. Hai figuras reciprocamente proporcionais cando hai razóns antecedentes e consecuentes en cada unha das dúas figuras[2].
3. Dise que unha recta é cortada en razón extrema e media cando, como ela enteira é ó segmento maior, así o maior é ó menor[3].
4. Altura de toda figura é a perpendicular trazada dende o vértice ata a base.
5. Dise que unha razón está composta de razóns cando os tamaños das razóns multiplicados por si mesmos fan unha razón.[4]

---

[1] Véxase a Nota 93 (Proposición II, 12).

[2] Aínda que a definición aparece nos manuscritos, a súa autenticidade é posta en dúbida dende antigo, xa que non se utiliza en ningunha proposición. En canto á expresión grega ἀντιπεπονθότα σχήματα, Mª Luísa Puertas C. fronte ás traducións tradicionais que adoptamos, na súa tradución ó castelán propón «figuras inversamente relacionadas» baseándose en que Euclides para «proporción por inversión» utiliza sempre ἀνάπαλιν. En calquera caso, deixando de lado a súa autenticidade e a imposibilidade de dar co sentido exacto que tería, a definición perde a súa razón de ser xa que Euclides non fai uso dela. Na Proposición VI, 14 volve aparecer ἀντιπεπόνθασιν, que traducimos por «inversamente proporcionais», aplicado a dous pares de rectas —os lados ΔΒ e ΒΖ do paralelogramo ΑΔΒΖ e os lados ΒΕ e ΗΒ do paralelogramo ΓΗΒΕ son inversamente proporcionais pois, como ΔΒ é a ΒΕ, así ΗΒ a ΒΖ—. Na proposición XI, 34 aparece de novo ἀντιπεπόνθασιν para as bases e alturas de dous paralelepípedos iguais; na Proposición XII, 9 para as bases e alturas de pirámides iguais que teñen triángulos como bases e na Proposición XII, 15 para bases e alturas de conos e cilindros iguais.

[3] Esta é a coñecida como «sección áurea» dun segmento: Dividir un segmento en dúas partes *a* e *b* tal que (a + b):a::a:b. A razón áurea vale $(1 + \sqrt{5})/2$. Os lados do rectángulo da Proposición II, 11 gardan esta razón áurea $(a + b)b = a^2$, é un «rectángulo áureo».

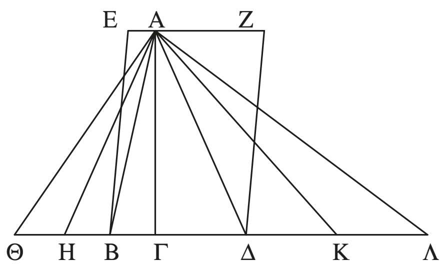
[4] Esta definición é considerada unha interpolación polos editores; aparece nos manuscritos pero en distintos lugares e no manuscrito *P*, o considerado por Heiberg máis fiable, foi engadida na marxe. Non se debe confundir «razón composta de razóns» con «composición dunha razón» (Definición V, 14).

PROPOSICIÓN 1

Os triángulos e os paralelogramos que teñen a mesma altura[5] son entre si como as bases.

Sexan os triángulos ΑΒΓ e ΑΓΔ e os paralelogramos ΕΓ e ΓΖ coa mesma altura ΑΓ[6]; digo que como a base ΒΓ é á base ΓΔ, así o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΑΓΔ, e o paralelogramo ΕΓ ó paralelogramo ΓΖ.

Pois ben, prolónguese ΒΔ en ambos sentidos ata os puntos Θ e Λ e póñanse as rectas ΒΗ e ΗΘ, cantas se queiran, iguais á base ΒΓ, mentres que as rectas ΔΚ e ΚΛ, cantas se queiran, iguais á base ΓΔ, e únanse ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ e ΑΛ.



E, dado que ΓΒ, ΒΗ e ΗΘ son iguais entre si, tamén son iguais entre si os triángulos ΑΘΗ, ΑΗΒ e ΑΒΓ[7]. Logo, cantas veces é múltiplo a base ΘΓ da base ΒΓ, tantas veces é múltiplo tamén o triángulo ΑΘΓ do triángulo ΑΒΓ.

---

5 En grego «que están baixo a mesma altura», como se a altura sustentase a figura.

6 A demostración dá por suposto que o lado ΑΓ é a altura dos dous triángulos e a gráfica responde a esa descrición. Isto esixe que ΑΓ sexa un lado común ós dous triángulos e que sexa perpendicular ás súas bases, cando no enunciado non hai ningún tipo de restrición sobre os triángulos. Heath propón a omisión de ΑΓ: «Sexan os triángulos ΑΒΓ e ΑΓΔ e os paralelogramos ΕΓ e ΓΖ coa mesma altura» onde Teón propón outra lectura «a perpendicular de Α a ΒΔ». Isto mellora a demostración, pois non obriga a que ΑΓ sexa a altura e, polo tanto, os triángulos non teñen que ser rectángulos pero, ó manter dous vértices comúns —Α e Γ—, os dous triángulos seguen tendo un lado común, ΑΓ, que tampouco é unha esixencia do enunciado. Efectivamente, a proposición é certa para a situación xeral do enunciado: para triángulos ΑΒΓ e Α′ΓΔ e paralelogramos ΕΓ e ΓΖ que teñan a mesma altura —Β, Γ, Δ están en liña recta e Ε, Α, Α′, Ζ están nunha liña recta paralela—. A demostración pode ser a mesma utilizando unha gráfica con dous grupos de triángulos, segundo que o vértice superior sexa Α ou Α′ —Α para os triángulos nos que intervén os puntos Θ, Η e Β e Α′ para aqueles nos que intervén os puntos Δ, Κ e Λ.

7 Proposición I, 38.

Entón, polo mesmo, cantas veces é múltiplo a base ΛΓ da base ΓΔ, tantas veces é múltiplo tamén o triángulo ΑΛΓ do triángulo ΑΓΔ; e se a base ΘΓ é igual á base ΓΛ, é igual tamén o triángulo ΑΘΓ ó triángulo ΑΓΛ e, se a base ΘΓ supera á base ΓΛ, supera tamén o triángulo ΑΘΓ ó triángulo ΑΓΛ e, se é menor, menor[8].

Habendo, entón, catro magnitudes —dúas bases, ΒΓ e ΓΔ, e dous triángulos, ΑΒΓ e ΑΓΔ—, tomáronse múltiplos iguais da base ΒΓ e do triángulo ΑΒΓ —a base ΘΓ e o triángulo ΑΘΓ—, mentres que da base ΓΔ e do triángulo ΑΔΓ outros múltiplos iguais ó azar —a base ΛΓ e o triángulo ΑΛΓ—; e queda demostrado que, se a base ΘΓ supera á base ΓΛ, supera tamén o triángulo ΑΘΓ ó triángulo ΑΛΓ e, se é igual, é igual e, se menor, menor; logo, como a base ΒΓ é á base ΓΔ, así o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΑΓΔ[9].

E, dado que o paralelogramo ΕΓ é o dobre que o triángulo ΑΒΓ[10] e o paralelogramo ΖΓ é o dobre que o triángulo ΑΓΔ, e as partes gardan a mesma razón que os seus múltiplos iguais[11], logo, como o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΑΓΔ, así o paralelogramo ΕΓ é ó paralelogramo ΖΓ.

Entón, dado que se demostrou que, como a base ΒΓ é á base ΓΔ, así o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΑΓΔ e, como o triángulo ΑΒΓ ó triángulo ΑΓΔ, así o paralelogramo ΕΓ é ó paralelogramo ΓΖ, tamén, logo, como a base ΒΓ é á base ΓΔ, así o paralelogramo ΕΓ ó paralelogramo ΖΓ[12].

Logo, os triángulos e os paralelogramos que teñen a mesma altura son entre si como as bases; o que, xustamente, era preciso demostrar.

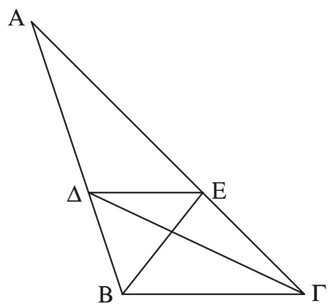
8 Xeneralización da Proposición I, 38.
9 Definición V, 5.
10 Proposición I, 41.
11 Proposición V, 15.
12 Proposición V, 11.

PROPOSICIÓN 2

Se se traza unha recta paralela[13] a un dos lados dun triángulo, cortará proporcionalmente os lados do triángulo; e se os lados do triángulo son cortados proporcionalmente, a recta que une os puntos de corte será paralela ó lado restante do triángulo.

Pois ben, trácese ΔΕ paralela a un dos lados, a ΒΓ, do triángulo ΑΒΓ; digo que como ΒΔ é a ΔΑ, así ΓΕ a ΕΑ.

Pois ben, trácense ΒΕ e ΓΔ.



Logo, o triángulo ΒΔΕ é igual ó triángulo ΓΔΕ —pois está sobre a mesma base ΔΕ e entre as mesmas paralelas, ΔΕ e ΒΓ[14]—; e ΑΔΕ é outro triángulo.

E as magnitudes iguais gardan a mesma razón cunha mesma[15]; logo, como o triángulo ΒΔΕ é ó triángulo ΑΔΕ, así o triángulo ΓΔΕ é ó triángulo ΑΔΕ.

Pero como o triángulo ΒΔΕ é ó triángulo ΑΔΕ, así ΒΔ a ΔΑ —pois tendo a mesma altura, a perpendicular trazada dende Ε ata ΑΒ, son entre si como as súas bases[16].

Entón, polo mesmo, como o triángulo ΓΔΕ é a ΑΔΕ, así ΓΕ a ΕΑ; logo, tamén como ΒΔ é a ΔΑ, así ΓΕ a ΕΑ[17].

---

[13] Aquí obsérvase a orixe da palabra «paralela», utilizando non o adxectivo senón o sintagma preposicional: «unha recta que vai á carón doutra»; o significado técnico exacto é o que dá na Definición I, 23 —véxase a Nota 12 (Definición I, 23).

[14] Proposición I, 38.

[15] Proposición V, 7.

[16] Proposición VI, 1.

[17] Proposición V, 11.

Agora córtense proporcionalmente os lados AB e AΓ do triángulo ABΓ: como BΔ a ΔA, así ΓE a EA, e únase ΔE; digo que ΔE é paralela a BΓ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, dado que, como BΔ é a ΔA, así ΓE a EA, pero como BΔ a AΔ, así o triángulo BΔE ó triángulo AΔE, mentres que, como ΓE a EA, así o triángulo ΓΔE ó triángulo AΔE, logo, tamén como o triángulo BΔE é ó triángulo AΔE, así o triángulo ΓΔE ó triángulo AΔE.

Logo, tanto BΔE como ΓΔE gardan a mesma razón con AΔE.

Logo, o triángulo BΔE é igual ó triángulo ΓΔE[18]; e están sobre a mesma base ΔE.

Pero os triángulos iguais e que están sobre a mesma base están tamén entre as mesmas paralelas[19].

Logo, ΔE é paralela a BΓ.

Logo, se se traza unha recta paralela a un dos lados dun triángulo, cortará proporcionalmente os lados do triángulo; e se os lados do triángulo son cortados proporcionalmente, a recta que une os puntos de corte será paralela ó lado restante do triángulo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

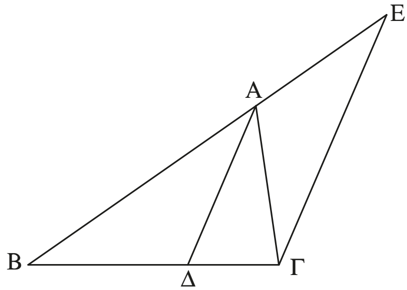
PROPOSICIÓN 3

Se o ángulo dun triángulo se corta á metade e a recta que corta o ángulo corta tamén a base, os segmentos da base gardarán a mesma razón que os restantes lados do triángulo; e se os segmentos da base gardan a mesma razón que os restantes lados do triángulo, a recta unida dende o vértice ata o punto de corte cortará á metade o ángulo do triángulo.

Sexa o triángulo ABΓ e córtese á metade o ángulo BAΓ coa recta AΔ; digo que como BΔ é a ΓΔ, así BA a AΓ.

18 Proposición V, 9.
19 Proposición I, 39.

Pois ben, trácese ΓΕ por Γ paralela a ΔΑ[20], e ΒΑ, prolongada, atópese con ela en Ε[21].



E, dado que a recta ΑΓ incidiu nas paralelas ΑΔ e ΕΓ, logo, tamén o ángulo ΑΓΕ é igual a ΓΑΔ[22].

Pero o ángulo ΓΑΔ suponse igual a ΒΑΔ; logo, ΒΑΔ é igual a ΑΓΕ.

Asemade, dado que a recta ΒΑΕ incidiu nas paralelas ΑΔ e ΕΓ, o ángulo exterior ΒΑΔ é igual ó interior ΑΕΓ.

E foi demostrado tamén que ΑΓΕ é igual a ΒΑΔ; logo, tamén o ángulo ΑΓΕ é igual a ΑΕΓ; en consecuencia, tamén o lado ΑΕ é igual ó lado ΑΓ[23].

E, dado que ΑΔ queda trazada paralela a un dos lados, ΕΓ, do triángulo ΒΓΕ, logo, proporcionalmente, como ΒΔ é a ΔΓ, así ΒΑ a ΑΕ[24].

Pero ΑΕ é igual a ΑΓ; logo, como ΒΔ é a ΔΓ, así ΒΑ a ΑΓ.

Agora, como ΒΔ é a ΔΓ, sexa así ΒΑ a ΑΓ, e únase ΑΔ; digo que o ángulo ΒΑΓ queda cortado á metade pola recta ΑΔ.

Pois, feitas as mesmas construcións, dado que, como ΒΔ é a ΔΓ, así é ΒΑ a ΑΓ, pero tamén como ΒΔ a ΔΓ, así é ΒΑ a ΑΕ —pois ΑΔ queda trazada paralela a un lado, ΕΓ, do triángulo ΒΓΕ— logo, tamén como ΒΑ a ΑΓ, así é ΒΑ a ΑΕ[25].

---

20 Proposición I, 31.
21 Postulado 5 e Proposición I, 17.
22 Proposición I, 29.
23 Proposición I, 6.
24 Proposición VI, 2.
25 Proposición V, 11.

Logo, ΑΓ é igual a ΑΕ[26]; en consecuencia, tamén o ángulo ΑΕΓ é igual a ΑΓΕ[27].

Pero o ángulo ΑΕΓ é igual ó exterior ΒΑΔ, mentres que ΑΓΕ é igual ó alterno ΓΑΔ; logo, tamén ΒΑΔ é igual a ΓΑΔ.

Logo, o ángulo ΒΑΓ queda cortado á metade pola recta ΑΔ.

Logo, se o ángulo dun triángulo se corta á metade e a recta que corta o ángulo corta tamén a base, os segmentos da base gardarán a mesma razón que os restantes lados do triángulo; e se os segmentos da base gardan a mesma razón que os restantes lados do triángulo, a recta unida dende o vértice ata o punto de corte cortará á metade o ángulo do triángulo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

***Dos triángulos de ángulos iguais, os lados*[28] *que conteñen os ángulos iguais son proporcionais e os que están tendidos baixo os ángulos iguais son correspondentes*[29].**

Sexan ΑΒΓ e ΔΓΕ triángulos de ángulos iguais que teñen o ángulo ΑΒΓ igual a ΔΓΕ, ΒΑΓ a ΓΔΕ e, ademais, ΑΓΒ a ΓΕΔ; digo que, dos triángulos ΑΒΓ e ΔΓΕ, os lados que conteñen os ángulos iguais son proporcionais e os que están tendidos baixo os ángulos iguais, correspondentes.

Pois ben, póñase ΒΓ en liña recta con ΓΕ.

E, dado que os ángulos ΑΒΓ e ΑΓΒ[30] son menores que dous rectos[31], e ΑΓΒ é igual a ΔΕΓ, logo, os ángulos ΑΒΓ e ΔΕΓ son menores que dous rectos; logo, ΒΑ e ΕΔ prolongadas atoparanse.

Prolónguense e atópense en Ζ.

---

26 Proposición V, 9.

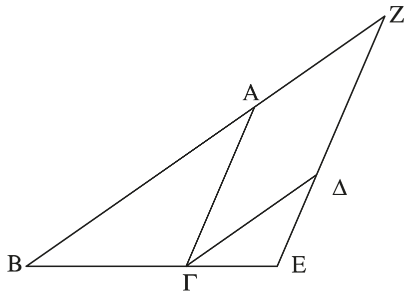
27 Proposición I, 5.

28 Véxase Nota 93 (Proposición II,12).

29 Definición V, 11.

30 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

31 Proposición I, 17.



E, dado que o ángulo ΔΓΕ é igual a ΑΒΓ, ΒΖ é paralela a ΓΔ[32].

Asemade, dado que ΑΓΒ é igual a ΔΕΓ, ΑΓ é paralela a ΖΕ.

Logo, ΖΑΓΔ é un paralelogramo; logo, ΖΑ é igual a ΔΓ, e ΑΓ a ΖΔ[33].

E, dado que ΑΓ queda trazada paralela a un dos lados, ΖΕ, do triángulo ΖΒΕ, logo, como ΒΑ é a ΑΖ, así ΒΓ a ΓΕ[34].

Pero ΑΖ é igual a ΓΔ; logo, como ΒΑ a ΓΔ, así ΒΓ é a ΓΕ, e, por alternancia, como ΑΒ é a ΒΓ, así ΔΓ a ΓΕ[35].

Asemade, dado que ΓΔ é paralela a ΒΖ, logo, como ΒΓ é a ΓΕ, así ΖΔ a ΔΕ.

Pero ΖΔ é igual a ΑΓ; logo, como ΒΓ é a ΓΕ, así ΑΓ a ΔΕ e, por alternancia, como ΒΓ a ΓΑ, así ΓΕ a ΕΔ.

Entón, dado que foi demostrado que, como ΑΒ é a ΒΓ, así ΔΓ a ΓΕ, e como ΒΓ a ΓΑ, así ΓΕ a ΕΔ, logo, por igualdade, como ΒΑ a ΑΓ, así ΓΔ a ΔΕ[36].

Logo, dos triángulos de ángulos iguais, os lados que conteñen ángulos iguais son proporcionais e os que están tendidos baixo os ángulos iguais son correspondentes; o que xustamente, era preciso demostrar.

---

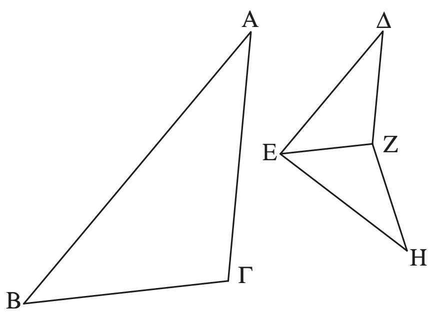
32 Proposición I, 28.
33 Proposición I, 34.
34 Proposición VI, 2.
35 Proposición V, 16.
36 Proposición V, 22.

PROPOSICIÓN 5

Se dous triángulos teñen os lados proporcionais serán de ángulos iguais e terán iguais os ángulos baixo os que están tendidos os lados correspondentes.

Sexan dous triángulos ΑΒΓ e ΔΕΖ que teñen os lados proporcionais: como ΑΒ é a ΒΓ, así ΔΕ a ΕΖ, e, como ΒΓ é a ΓΑ, así ΕΖ a ΖΔ, e, ademais, como ΒΑ a ΑΓ, así ΕΔ a ΔΖ; digo que ΑΒΓ é un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo ΔΕΖ e terán iguais os ángulos baixo os que están tendidos os lados correspondentes: ΑΒΓ a ΔΕΖ, e ΒΓΑ a ΕΖΔ, e, ademais, ΒΑΓ a ΕΔΖ.

Pois ben, constrúase na recta ΕΖ e nos seus puntos Ε e Ζ o ángulo ΖΕΗ igual ó ángulo ΑΒΓ, e o ángulo ΕΖΗ igual a ΑΓΒ[37]; logo, o ángulo restante, Α, é igual ó ángulo restante, Η[38].



Logo, o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΕΗΖ.

Logo, dos triángulos ΑΒΓ e ΕΗΖ, os lados que conteñen os ángulos iguais son proporcionais e os que están tendidos baixo os ángulos iguais son correspondentes[39]; logo, como ΑΒ é a ΒΓ, así ΗΕ a ΕΖ.

Pero como ΑΒ é a ΒΓ, suponse que así ΔΕ a ΕΖ; logo, como ΔΕ a ΕΖ, así é ΗΕ a ΕΖ[40].

Logo, tanto ΔΕ como ΗΕ gardan a mesma razón con ΕΖ; logo, ΔΕ é igual a ΗΕ[41].

---

37 Proposición I, 23.
38 Proposición I, 32.
39 Proposición VI, 4.
40 Proposición V, 11.
41 Proposición V, 9.

Entón, polo mesmo, tamén ΔZ é igual a HZ.

Entón, dado que ΔE é igual a EH, e EZ, común, os dous lados ΔE e EZ son iguais ós dous lados HE e EZ; e a base ΔZ é igual á base ZH; logo, o ángulo ΔEZ é igual a HEZ[42], o triángulo ΔEZ é igual ó triángulo HEZ, e os restantes ángulos son iguais ós restantes ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais[43].

Logo, tamén o ángulo ΔZE é igual a HZE, e EΔZ a EHZ.

E, dado que ZEΔ é igual a HEZ, pero HEZ a ABΓ, logo, tamén o ángulo ABΓ é igual a ΔEZ.

Entón, polo mesmo, tamén o ángulo AΓB é igual a ΔZE e, ademais, o ángulo A é igual a Δ; logo, ABΓ é un triángulo de ángulos iguais ós do triángulo ΔEZ.

Logo, se dous triángulos teñen os lados proporcionais serán de ángulos iguais e terán iguais os ángulos baixo os que están tendidos os lados correspondentes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

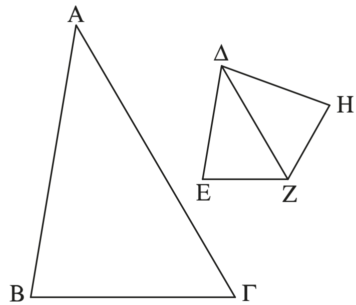
***Se dous triángulos teñen un ángulo dun igual a un ángulo do outro e proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais, os triángulos serán de ángulos iguais e terán iguais os ángulos baixo os que están tendidos os lados correspondentes*[44].**

Sexan dous triángulos ABΓ e ΔEZ que teñen o ángulo BAΓ igual ó ángulo EΔZ, e proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais: como BA é a AΓ, así EΔ a ΔZ; digo que o triángulo ABΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔEZ e terá o ángulo ABΓ igual a ΔEZ, e AΓB a ΔZE.

Pois ben, constrúase na recta ΔZ e nos seus puntos Δ e Z o ángulo ZΔH igual a un dos dous ángulos, BAΓ ou EΔZ, e ΔZH

42 Proposición I, 8.
43 Proposición I, 4.
44 Definición V, 11.

igual a ΑΓΒ[45]; logo, o ángulo restante, Β, é igual ó ángulo restante, Η[46].



Logo, o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΗΖ. Logo, proporcionalmente, como ΒΑ é a ΑΓ, así ΗΔ a ΔΖ[47].

E suponse tamén que, como ΒΑ é a ΑΓ, así ΕΔ a ΔΖ; logo, tamén como ΕΔ a ΔΖ, así ΗΔ a ΔΖ.

Logo, ΕΔ é igual a ΔΗ[48], e ΔΖ, común; logo, os dous lados ΕΔ e ΔΖ son iguais ós outros dous, ΗΔ e ΔΖ; e o ángulo ΕΔΖ é igual ó ángulo ΗΔΖ; logo, a base ΕΖ é igual á base ΗΖ, o triángulo ΔΕΖ é igual ó triángulo ΗΔΖ, e os restantes ángulos serán iguais ós restantes ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais [49].

Logo, ΔΖΗ é igual a ΔΖΕ, e ΔΗΖ a ΔΕΖ.

Pero ΔΖΗ é igual a ΑΓΒ; logo, tamén ΑΓΒ é igual a ΔΖΕ.

E suponse tamén que ΒΑΓ é igual a ΕΔΖ; logo, tamén o ángulo restante, Β, é igual ó ángulo restante, Ε; logo o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΕΖ.

Logo, se dous triángulos teñen un ángulo dun igual a un ángulo do outro e proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais, os triángulos serán de ángulos iguais e terán iguais os ángulos baixo os que están tendidos os lados correspondentes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

45 Proposición I, 23.
46 Proposición I, 32.
47 Proposición VI, 4.
48 Proposición V, 9.
49 Proposición I, 4.

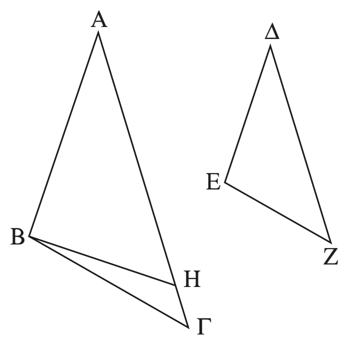
PROPOSICIÓN 7

Se dous triángulos teñen un ángulo dun igual a un ángulo do outro e proporcionais os lados que conteñen os outros ángulos, e cada un dos restantes, simultaneamente menor ou non menor que un recto, os triángulos serán de ángulos iguais e terán iguais os ángulos que conteñen os lados que son proporcionais.

Sexan dous triángulos ΑΒΓ e ΔΕΖ que teñen o ángulo ΒΑΓ igual ó ángulo ΕΔΖ e proporcionais os lados que conteñen os outros ángulos: como ΑΒ é a ΒΓ, así ΔΕ a ΕΖ; e teñan, primeiro, cada un dos restantes, Γ e Ζ, simultaneamente menor que un recto; digo que o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΕΖ, o ángulo ΑΒΓ será igual a ΔΕΖ e o ángulo restante, é dicir, Γ, igual a Ζ.

Pois se ΑΒΓ non é igual a ΔΕΖ, un deles é maior.

Sexa ΑΒΓ maior. E constrúase na recta ΑΒ e no seu punto Β o ángulo ΑΒΗ igual ó ángulo ΔΕΖ[50].



E, dado que o ángulo Α é igual a Δ, e o ángulo ΑΒΗ a ΔΕΖ, logo, o restante, ΑΗΒ, é igual ó restante, ΔΖΕ[51].

Logo, o triángulo ΑΒΗ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΕΖ. Logo, como ΑΒ é a ΒΗ, así ΔΕ a ΕΖ[52].

---

50 Proposición I, 23.
51 Proposición I, 32.
52 Proposición VI, 4.

E, como ΔE a EZ, así suponse que AB é a BΓ; logo, AB garda a mesma razón tanto con BΓ como con BH[53]; logo, BΓ é igual a BH[54].

En consecuencia, tamén o ángulo Γ é igual ó ángulo BHΓ[55].

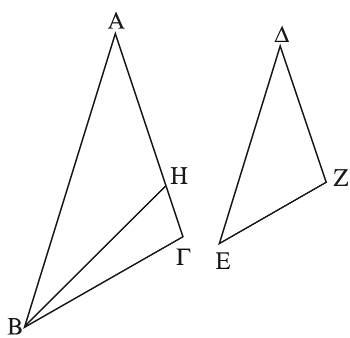
Pero suponse que Γ é menor que un recto; logo, BHΓ é tamén menor que un recto; en consecuencia, o ángulo adxacente a el, AHB, é maior que un recto[56]. E foi demostrado que é igual a Z; logo, tamén Z é maior que un recto. E suponse que menor que un recto; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, ABΓ non é desigual a ΔEZ; logo, é igual.

Pero tamén A é igual a Δ; logo, o ángulo restante, Γ, é igual ó restante, Z.

Logo, o triángulo ABΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔEZ.

Agora supóñase que cada un dos ángulos Γ e Z non é menor que un recto; digo agora que tamén así o triángulo ABΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔEZ.



Pois, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que BΓ é igual a BH; en consecuencia, tamén o ángulo Γ é igual a BHΓ. Pero Γ non é menor que un recto; logo, BHΓ tampouco é menor que un recto. Entón, os dous ángulos do triángulo BHΓ non son menores que un recto; o que, sen dúbida, é imposible[57].

53 Proposición V, 11.
54 Proposición V, 9.
55 Proposición I, 5.
56 Proposición I, 13.
57 Proposición I, 17.

Logo, asemade, o ángulo ΑΒΓ non é desigual a ΔΕΖ; logo, é igual. Pero tamén Α é igual a Δ; logo, o ángulo restante, Γ, é igual ó ángulo restante, Ζ.

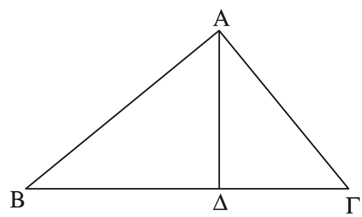
Logo, o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΕΖ.

Logo, se dous triángulos teñen un ángulo dun igual a un ángulo do outro e proporcionais os lados que conteñen os outros ángulos e cada un dos restantes, simultaneamente menor ou non menor que un recto, os triángulos serán de ángulos iguais e terán iguais os ángulos que conteñen os lados que son proporcionais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 8

Se nun triángulo rectángulo se traza unha perpendicular dende o ángulo recto ata a base, os triángulos da[58] perpendicular son semellantes ó triángulo enteiro e entre si.

Sexa o triángulo rectángulo ΑΒΓ co ángulo recto ΒΑΓ e trácese a perpendicular ΑΔ dende Α ata ΒΓ; digo que cada un dos triángulos ΑΒΔ e ΑΔΓ é semellante a ΑΒΓ enteiro e tamén entre si.



Pois, dado que ΒΑΓ é igual a ΑΔΒ —pois un e outro son rectos[59]— e o ángulo Β é común ós dous triángulos, a ΑΒΓ e ΑΒΔ, logo, o restante, ΑΓΒ, é igual ó restante, ΒΑΔ[60]; logo, o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΑΒΔ.

58 Con respecto ó uso da preposición πρός indicando sempre contacto pero en distintos contextos, véxase Nota 126 (Proposición I, 26). Aquí refírese ós triángulos que comparten un lado, a perpendicular.

59 Definición I, 10.

60 Proposición I, 32.

Logo, como o lado ΒΓ que está tendido baixo o ángulo recto[61] do triángulo ΑΒΓ é ó lado que está tendido baixo o ángulo recto do triángulo ΑΒΔ, así o propio lado ΑΒ que está tendido baixo o ángulo Γ do triángulo ΑΒΓ é ó lado ΒΔ que está tendido baixo o ángulo igual ΒΑΔ do triángulo ΑΒΔ e, tamén, o lado ΑΓ ó lado ΑΔ que está tendido baixo o ángulo Β común ós dous triángulos[62].

Logo, o triángulo ΑΒΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΑΒΔ e ten proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais. Logo, o triángulo ΑΒΓ é semellante ó triángulo ΑΒΔ[63].

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén o triángulo ΑΒΓ é semellante ó triángulo ΑΔΓ. Logo, cada un dos triángulos ΑΒΔ e ΑΔΓ é semellante ó triángulo ΑΒΓ enteiro.

Digo agora que tamén son semellantes entre si os triángulos ΑΒΔ e ΑΔΓ.

Pois dado que o ángulo recto ΒΔΑ é igual ó ángulo recto ΑΔΓ, pero tamén se demostrou que ΒΑΔ é igual a Γ, logo, tamén o ángulo restante, Β, é igual ó ángulo restante, ΔΑΓ; logo, o triángulo ΑΒΔ é de ángulos iguais ós do triángulo ΑΔΓ.

Logo, como o lado ΒΔ que está tendido baixo o ángulo ΒΑΔ do triángulo ΑΒΔ é ó lado ΔΑ que está tendido baixo o ángulo Γ do triángulo ΑΔΓ, igual ó ángulo ΒΑΔ, así o propio lado ΑΔ que está tendido baixo o ángulo Β do triángulo ΑΒΔ é ó lado ΔΓ que está tendido baixo o ángulo ΔΑΓ do triángulo ΑΔΓ, igual a Β e, tamén, o lado ΒΑ a ΑΓ, estando os dous tendidos baixo os ángulos rectos; logo, o triángulo ΑΒΔ é semellante ó triángulo ΑΔΓ.

Logo, se nun triángulo rectángulo se traza unha perpendicular dende o ángulo recto ata a base, os triángulos da perpendicular son semellantes ó triángulo enteiro e entre si.

---

[61] Aquí o que hoxe chamamos «hipotenusa»; evitamos esta tradución xa que Euclides usa o termo aínda que non se trate de triángulos rectángulos. Véxase Nota 38 (Proposición I, 4).

[62] Proposición VI, 4.

[63] Definición VI, 1.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se nun triángulo rectángulo se traza unha perpendicular dende o ángulo recto ata a base, a recta trazada é media proporcional dos segmentos da base[64]; o que, xustamente, era preciso demostrar.[65]

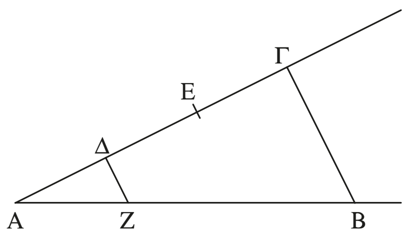
PROPOSICIÓN 9

Da recta dada, cortar a parte que se pida.

Sexa a recta dada ΑΒ; é preciso, entón, cortar de ΑΒ a parte que se pida.

Pídase, pois, a terceira parte. E lévese dende Α unha recta ΑΓ que, xunto con ΑΒ, conteña un ángulo ó azar. Tómese o punto Δ ó azar en ΑΓ, e póñanse as rectas ΔΕ e ΕΓ iguais a ΑΔ[66].

Únase ΒΓ e por Δ, paralela a ela, trácese ΔΖ[67].



Entón, dado que ΖΔ queda trazada paralela a ΒΓ, un dos lados do triángulo ΑΒΓ, logo, proporcionalmente, como ΓΔ é a ΔΑ, así ΒΖ a ΖΑ[68].

E ΓΔ é o dobre que ΔΑ; logo, tamén ΒΖ é o dobre que ΖΑ; logo, ΒΑ é o triplo que ΑΖ.

Logo, da recta dada ΑΒ, queda cortada a terceira parte, ΑΖ, que se pedía; o que, xustamente, era preciso facer.

[64] Un segmento da base é á recta trazada como a recta trazada é ó outro segmento.

[65] Nalgúns manuscritos aparece a continuación esta frase: «e, ademais o lado do segmento é media proporcional da base e dun calquera dos segmentos», —a base é a un calquera dos lados como ese lado é ó segmento dese lado—. Heiberg considera que é unha interpolación, a pesares de que aparece no manuscrito *P*.

[66] Proposición I, 3.

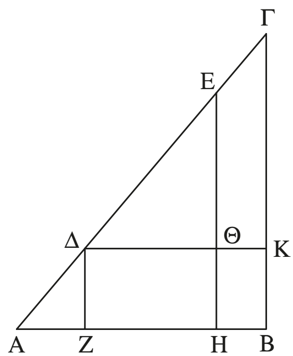
[67] Proposición I, 31.

[68] Proposición VI, 2.

PROPOSICIÓN 10

Cortar a recta dada non cortada de xeito semellante á recta dada cortada.

Sexa a recta dada non cortada AB, e AΓ a cortada polos puntos Δ e E, póñanse de xeito que conteñan un ángulo ó azar, únase ΓB e, polos puntos Δ e E, trácense ΔZ e EH paralelas a BΓ e, polo punto Δ, trácese ΔΘK paralela a AB[69].



Logo, tanto ZΘ como ΘB son paralelogramos; logo, ΔΘ é igual a ZH, mentres que ΘK a HB[70].

E, dado que a recta ΘE queda trazada paralela a KΓ, un dos lados do triángulo ΔKΓ, logo, proporcionalmente, como ΓE é a EΔ, así KΘ a ΘΔ[71].

E KΘ é igual a BH, mentres que ΘΔ a HZ.

Logo, como ΓE é a EΔ, así BH a HZ.

Asemade, dado que ZΔ queda trazada paralela a HE, un dos lados do triángulo AHE, logo, proporcionalmente, como EΔ é a ΔA, así HZ a ZA.

E tamén foi demostrado que, como ΓE é a EΔ, así BH a HZ; logo, como ΓE é a EΔ, así BH a HZ, mentres que como EΔ a ΔA, así HZ a ZA.

---

69 Proposición I, 31.

70 Proposición I, 34.

71 Proposición VI, 2

Logo, a recta dada non cortada AB queda cortada de xeito semellante á recta dada cortada AΓ; o que, xustamente, era preciso facer.

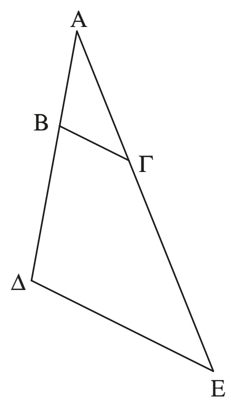
PROPOSICIÓN 11

***Dadas dúas rectas, achar unha terceira proporcional*[72].**

Sexan as dúas rectas dadas BA e AΓ, e póñanse contendo un ángulo ó azar.

É preciso, entón, dadas BA e AΓ, achar unha terceira proporcional.

Prolónguense, pois, ata os puntos Δ e E, póñase BΔ igual a AΓ[73] e únase BΓ, e, polo punto Δ, paralela a ela, trácese ΔE[74].



Entón, dado que BΓ queda trazada paralela a ΔE, un dos lados do triángulo AΔE, logo, proporcionalmente, como AB é a BΔ, así AΓ a ΓE[75].

E BΔ é igual a AΓ. Logo, como AB é a AΓ, así AΓ a ΓE.

Logo, dadas dúas rectas BA e AΓ, queda achada unha terceira proporcional a elas, ΓE; o que, xustamente, era preciso facer.

---

72 A primeira recta dada é á segunda recta dada como esta segunda é a unha terceira (esta terceira proporcional é a recta que queremos achar).

73 Proposición I, 3.

74 Proposición I, 31.

75 Proposición VI, 2.

PROPOSICIÓN 12

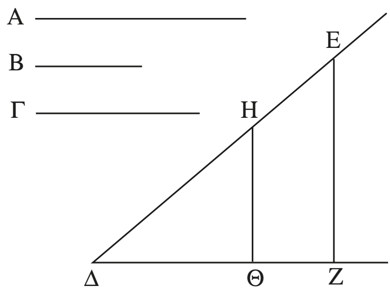
Dadas tres rectas, achar unha cuarta proporcional[76].

Sexan as tres rectas dadas Α, Β e Γ.

É preciso, entón, dadas Α, Β e Γ, achar unha cuarta proporcional.

Tómense as dúas rectas ΔΕ e ΔΖ que conteñen o ángulo ΕΔΖ; e póñase ΔΗ igual a Α, mentres que ΗΕ igual a Β e, tamén, ΔΘ igual a Γ[77]; e, unida ΗΘ, trácese ΕΖ paralela a ela por Ε[78].

Entón, dado que ΗΘ queda trazada paralela a ΕΖ, un dos lados do triángulo ΔΕΖ, logo, como ΔΗ é a ΗΕ, así ΔΘ a ΘΖ[79].



Pero ΔΗ é igual a Α, ΗΕ a Β, e ΔΘ a Γ. Logo, como Α é a Β, así Γ a ΘΖ

Logo, dadas tres rectas, Α, Β e Γ, queda achada unha cuarta proporcional, ΘΖ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 13

Dadas dúas rectas, achar unha media proporcional.

Sexan as dúas rectas dadas ΑΒ e ΒΓ; é preciso, entón, dadas ΑΒ e ΒΓ, achar unha media proporcional.

---

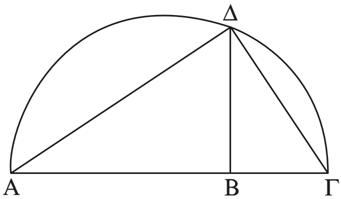
76 A primeira recta dada é á segunda recta dada como a terceira é a unha cuarta (esta cuarta proporcional é a recta que queremos achar).

77 Proposición I, 3.

78 Proposición I, 31.

79 Proposición VI, 2.

Póñanse en liña recta[80], debúxese sobre ΑΓ o semicírculo ΑΔΓ[81], trácese ΒΔ[82] a partir do punto Β en ángulo recto coa recta ΑΓ, e trácense ΑΔ e ΔΓ.



Dado que ΑΔΓ é un ángulo nun semicírculo, é recto[83].

E, dado que no triángulo rectángulo ΑΔΓ dende o ángulo recto ata a base queda trazada a perpendicular ΔΒ, logo, ΔΒ é unha media proporcional dos segmentos da base ΑΒ e ΒΓ[84].

Logo, dadas dúas rectas, ΑΒ e ΒΓ, queda achada unha media proporcional, ΔΒ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 14

Dos paralelogramos iguais e de ángulos iguais, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; e dos paralelogramos de ángulos iguais, aqueles que teñen os lados que conteñen os ángulos iguais inversamente proporcionais, son iguais.

Sexan ΑΒ e ΒΓ paralelogramos iguais e de ángulos iguais que teñen iguais os ángulos con vértice[85] Β, e póñanse en liña recta ΔΒ e ΒΕ[86]; logo, ΖΒ e ΒΗ están tamén en liña recta[87]; digo que, de ΑΒ e ΒΓ, son inversamente proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais, é dicir, que como ΔΒ é a ΒΕ, así ΗΒ a ΒΖ.

80 Nota 31 (Proposición I, 3).

81 Proposición I, 10 e Postulado 3.

82 Proposición I, 11.

83 Proposición III, 31.

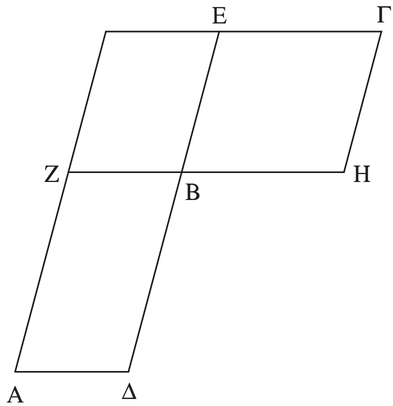
84 Proposición VI, 8. Corolario.

85 Véxase a Nota 118 (Proposición I, 24). Traducimos neste caso «con vértice» por referirse a máis dun ángulo.

86 Nota 31 (Proposición I, 3); Proposición I, 23; Proposición I, 31 e Proposición I, 35.

87 Proposición I, 14.

Pois ben, complétese o paralelogramo ZE.



Entón, dado que o paralelogramo AB é igual ó paralelogramo BΓ, mentres que ZE, outro, logo, como AB é a ZE, así BΓ a ZE[88].

Pero como AB é a ZE, así o lado ΔB ó lado BE e, como BΓ a ZE, así o lado HB ó lado BZ[89]; logo, tamén como ΔB a BE, así HB a BZ[90].

Logo, dos paralelogramos AB e BΓ, son inversamente proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais.

Agora, como ΔB é a BE, sexa así HB a BZ; digo que o paralelogramo AB é igual ó paralelogramo BΓ.

Pois, dado que, como ΔB é a BE, así HB a BZ, pero como ΔB a BE, así o paralelogramo AB ó paralelogramo ZE, mentres que como HB a BZ, así o paralelogramo BΓ ó paralelogramo ZE, logo, tamén como AB a ZE, así BΓ a ZE; logo, o paralelogramo AB é igual ó paralelogramo BΓ[91].

Logo, dos paralelogramos iguais e de ángulos iguais, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; e dos paralelogramos de ángulos iguais, aqueles que teñen os lados que conteñen os ángulos iguais inversamente proporcionais, son iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

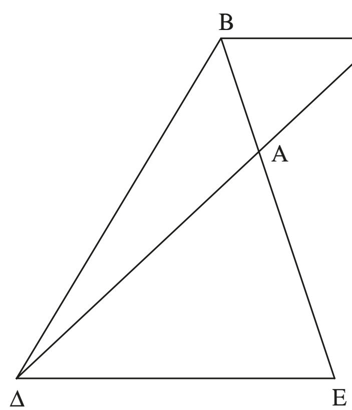
88 Proposición V, 7.
89 Proposición VI, 1.
90 Proposición V, 11.
91 Proposición V, 9.

PROPOSICIÓN 15

Dos triángulos iguais e que teñen un ángulo dun igual a un do outro, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; e son iguais aqueles triángulos que teñen un ángulo dun igual a un do outro, cuxos lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais.

Sexan ΑΒΓ e ΑΔΕ triángulos iguais que teñen un ángulo dun igual a un do outro: ΒΑΓ a ΔΑΕ; digo que dos triángulos ΑΒΓ e ΑΔΕ, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais, é dicir, que como ΓΑ é a ΑΔ, así ΕΑ a ΑΒ.

Pois ben, fágase de xeito que ΓΑ estea en liña recta con ΑΔ[92]; logo, tamén ΕΑ está en liña recta con ΑΒ[93]. E únase ΒΔ.



Entón, dado que o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΑΔΕ, e ΒΑΔ, outro, logo, como o triángulo ΓΑΒ é ó triángulo ΒΑΔ, así o triángulo ΕΑΔ é ó triángulo ΒΑΔ[94].

Pero como ΓΑΒ é a ΒΑΔ, así ΓΑ a ΑΔ[95], mentres que como ΕΑΔ a ΒΑΔ, así ΕΑ a ΑΒ.

Logo, tamén como ΓΑ a ΑΔ, así ΕΑ a ΑΒ[96].

---

92 Nota 31 (Proposición I, 3).
93 Proposición I, 14.
94 Proposición V, 7.
95 Proposición VI, 1.
96 Proposición V, 11.

Logo, dos triángulos ΑΒΓ e ΑΔΕ, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais.

Sexan, agora, inversamente proporcionais os lados dos triángulos ΑΒΓ e ΑΔΕ, e como ΓΑ a ΑΔ, sexa así ΕΑ a ΑΒ; digo que o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΑΔΕ.

Pois ben, unida de novo ΒΔ, dado que, como ΓΑ é a ΑΔ, así ΕΑ a ΑΒ, pero como ΓΑ a ΑΔ, así o triángulo ΑΒΓ ó triángulo ΒΑΔ[97], mentres que como ΕΑ é a ΑΒ, así o triángulo ΕΑΔ ó triángulo ΒΑΔ, logo, como o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΒΑΔ, así o triángulo ΕΑΔ ó triángulo ΒΑΔ.

Logo, tanto ΑΒΓ como ΕΑΔ gardan a mesma razón con ΒΑΔ. Logo, o triángulo ΑΒΓ é igual ó triángulo ΕΑΔ[98].

Logo, dos triángulos iguais e que teñen un ángulo dun igual a un do outro, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; e son iguais aqueles triángulos que teñen un ángulo dun igual a un do outro, cuxos lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

***Se catro rectas son proporcionais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos*[99] *é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polas do medio; e se o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polas do medio, as catro rectas serán proporcionais*[100].**

Sexan as catro rectas proporcionais ΑΒ, ΓΔ, Ε e Ζ : como ΑΒ é a ΓΔ así Ε a Ζ; digo que o paralelogramo de ángulos rectos

---

97 Proposición VI, 1.

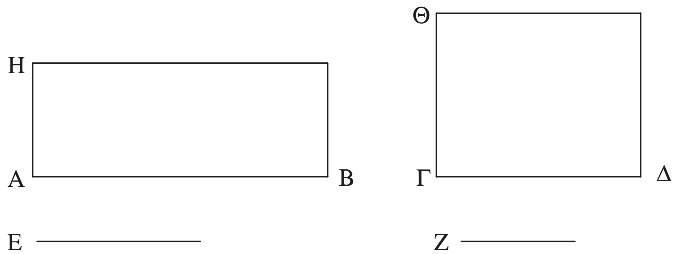
98 Proposición V, 9.

99 Estase referindo ás rectas que están nos termos medios e extremos da proporción. Tendo en conta que a área dun paralelogramo de ángulos rectos (rectángulo) é igual ó produto dos lados, esta proposición proba que $a:b::c:d$ é equivalente a que o produto de medios é igual o produto de extremos, $ad = bc$.

100 Esta Proposición VI, 16 é un caso particular da Proposición VI, 14 pois que catro rectas sexan proporcionais, $a:b::c:d$, equivale a que os lados do paralelogramo de ángulos rectos contido polas rectas dos extremos, *a* e *d,* e os do paralelogramo de ángulos rectos contido polas rectas do medio, *b* e *c,* sexan inversamente proporcionais.

contido por AB e Z é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΔ e E.

Dende os puntos A e Γ, trácense AH e ΓΘ en ángulo recto coas rectas AB e ΓΔ[101], e póñase AH igual a Z, e ΓΘ igual a E[102]. E complétense os paralelogramos BH e ΔΘ[103].



E, dado que como AB é a ΓΔ, así E a Z, mentres que E é igual a ΓΘ, e Z a AH, logo, como AB é a ΓΔ, así ΓΘ a AH[104].

Logo, dos paralelogramos BH e ΔΘ, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais.

E son iguais aqueles paralelogramos de ángulos iguais cuxos lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais[105]; logo, o paralelogramo BH é igual ó paralelogramo ΔΘ.

E BH é o contido por AB e Z —pois AH é igual a Z—; e ΔΘ é o contido por ΓΔ e E —pois E é igual a ΓΘ—; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e Z é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΔ e E.

Sexa agora o paralelogramo de ángulos rectos contido por AB e Z igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido por ΓΔ e E; digo que as catro rectas serán proporcionais: como AB a ΓΔ así E a Z.

101 Proposición I, 11.
102 Proposición I, 3.
103 Proposición I, 31.
104 Proposición V, 9.
105 Proposición VI, 14.

Pois, feitas as mesmas construcións, dado que o contido por ΑΒ e Ζ é igual ó contido por ΓΔ e Ε, que o contido por ΑΒ e Ζ é ΒΗ —pois ΑΗ é igual a Ζ— e que o contido por ΓΔ e Ε é ΔΘ —pois ΓΘ é igual a Ε—, logo, ΒΗ é igual a ΔΘ. E son de ángulos iguais. E, dos paralelogramos iguais e de ángulos iguais, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; logo, como ΑΒ é a ΓΔ, así ΓΘ a ΑΗ.

Pero ΓΘ é igual a Ε e ΑΗ a Ζ; logo, como ΑΒ é a ΓΔ, así Ε a Ζ.

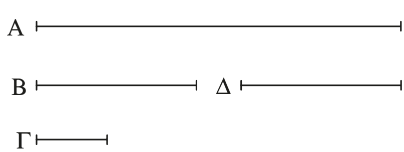
Logo, se catro rectas son proporcionais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polas do medio; e se o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polas do medio, as catro rectas serán proporcionais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 17

Se tres rectas son proporcionais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó cadrado da do medio; e se o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó cadrado da do medio, as tres rectas serán proporcionais.

Sexan Α, Β e Γ tres rectas proporcionais: como Α é a Β, así Β a Γ; digo que o paralelogramo de ángulos rectos contido por Α e Γ é igual ó cadrado de Β.

Póñase Δ igual a Β.



E, dado que como Α é a Β, así Β a Γ, mentres que Β é igual a Δ, logo, como Α a Β, así Δ a Γ[106].

[106] Proposición V, 9.

E, se catro rectas son proporcionais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polas rectas dos extremos é igual ó paralelogramo de ángulos rectos contido polas do medio[107]; logo, o contido por Α e Γ é igual ó contido por Β e Δ.

Pero o contido por Β e Δ é o cadrado de Β —pois Β é igual a Δ—; logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por Α e Γ é igual ó cadrado de Β.

Sexa agora o contido por Α e Γ igual ó cadrado de Β; digo que como Α é a Β, así Β a Γ.

Pois, feitas as mesmas construcións, dado que o contido por Α e Γ é igual ó cadrado de Β, pero o cadrado de Β é o contido por Β e Δ —pois Β é igual a Δ—, logo, o contido por Α e Γ é igual ó contido por Β e Δ.

E se o contido polas dos extremos é igual ó contido polas do medio, as catro rectas son proporcionais.

Logo, como Α é a Β, así Δ a Γ. Pero Β é igual a Δ; logo, como Α a Β, así Β a Γ.

Logo, se tres rectas son proporcionais, o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó cadrado da do medio; e se o paralelogramo de ángulos rectos contido polas dos extremos é igual ó cadrado da do medio, as tres rectas serán proporcionais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

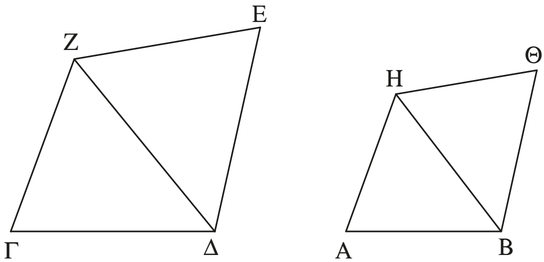
A partir da recta dada, debuxar unha figura rectilínea semellante[108] e situada de xeito semellante á figura rectilínea dada.

Sexa a recta dada ΑΒ e a figura rectilínea dada ΓΕ; é preciso, entón, a partir da recta ΑΒ debuxar unha figura rectilínea semellante e situada de xeito semellante á figura rectilínea ΓΕ[109].

Únase ΔΖ e constrúase na recta ΑΒ e nos seus puntos Α e Β o ángulo ΗΑΒ igual ó ángulo Γ, mentres que ΑΒΗ igual ó

[107] Proposición VI, 16.
[108] Definición VI, 1.
[109] Nota 232 (Proposición I, 45).

ángulo ΓΔΖ[110]. Logo, o ángulo restante ΓΖΔ é igual ó ángulo ΑΗΒ[111]; logo, o triángulo ΖΓΔ é de ángulos iguais ós do triángulo ΗΑΒ.



Logo, proporcionalmente, como ΖΔ é a ΗΒ, así ΖΓ a ΗΑ, e ΓΔ a ΑΒ[112].

Asemade, constrúase na recta ΒΗ e nos puntos Β e Η o ángulo ΒΗΘ igual ó ángulo ΔΖΕ, e o ángulo ΗΒΘ igual a ΖΔΕ[113]. Logo, o ángulo restante, Ε, é igual ó ángulo restante, Θ[114].

Logo, o triángulo ΖΔΕ é de ángulos iguais ós do triángulo ΗΘΒ; logo, proporcionalmente, como ΖΔ é a ΗΒ, así ΖΕ a ΗΘ, e ΕΔ a ΘΒ.

E foi demostrado tamén que, como ΖΔ é a ΗΒ, así ΖΓ a ΗΑ, e ΓΔ a ΑΒ; logo, tamén como ΖΓ a ΑΗ, así ΓΔ a ΑΒ, e ΖΕ a ΗΘ, e tamén ΕΔ a ΘΒ[115].

E, dado que o ángulo ΓΖΔ é igual a ΑΗΒ, mentres que ΔΖΕ a ΒΗΘ, logo, o ángulo ΓΖΕ enteiro é igual a ΑΗΘ enteiro. Polo mesmo, tamén o ángulo ΓΔΕ é igual a ΑΒΘ.

Pero tamén o ángulo Γ é igual a Α, mentres que Ε é igual a Θ.

Logo, ΑΘ é de ángulos iguais ós de ΓΕ; e teñen proporcionais os seus lados que conteñen os ángulos iguais; logo, a figura rectilínea ΑΘ é semellante á figura rectilínea ΓΕ.

---

110 Proposición I, 23.
111 Proposición I, 32.
112 Proposición VI, 4.
113 Proposición I, 23.
114 Proposición I, 32.
115 Proposición V, 11.

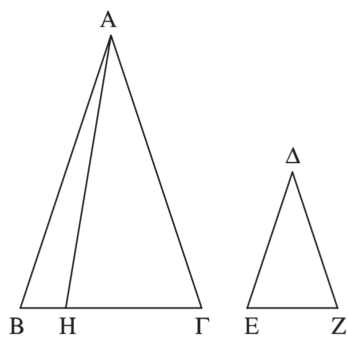
Logo, a partir da recta dada AB, queda debuxada unha figura rectilínea AΘ semellante e situada de xeito semellante á figura rectilínea dada ΓE; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 19

Os triángulos semellantes están entre si en razón duplicada dos lados correspondentes.

Sexan ABΓ e ΔEZ triángulos semellantes que teñen o ángulo B igual ó ángulo E e, como AB é a BΓ, así ΔE a EZ, de xeito que BΓ é correspondente con EZ[116]; digo que o triángulo ABΓ garda co triángulo ΔEZ razón duplicada da que garda BΓ con EZ.

Pois ben, tómese BH, unha terceira proporcional de BΓ e EZ[117], de xeito que como BΓ a EZ, así EZ a BH; e únase AH.



Entón, dado que como AB é a BΓ, así ΔE a EZ, logo, por alternancia, como AB é a ΔE, así BΓ a EZ[118].

Pero como BΓ é a EZ, así EZ a BH. Logo, tamén como AB a ΔE, así EZ a BH[119].

Logo, dos triángulos ABH e ΔEZ, os lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais; e son iguais

[116] Definición V, 11.
[117] Proposición VI, 11.
[118] Proposición V, 16.
[119] Proposición V, 11.

aqueles triángulos que teñen un ángulo dun igual a un do outro, cuxos lados que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais. Logo, o triángulo ABH é igual ó triángulo ΔEZ[120].

E, dado que como BΓ é a EZ, así EZ a BH e se tres rectas son proporcionais, a primeira garda coa terceira razón duplicada da que garda coa segunda[121], logo, BΓ garda con BH razón duplicada da que garda ΓB con EZ.

E como ΓB é a BH, así o triángulo ABΓ ó triángulo ABH[122]; logo, o triángulo ABΓ garda co triángulo ABH razón duplicada da que garda BΓ con EZ.

Pero o triángulo ABH é igual ó triángulo ΔEZ. Logo, tamén o triángulo ABΓ garda co triángulo ΔEZ razón duplicada da que garda BΓ con EZ[123].

Logo, os triángulos semellantes están entre si en razón duplicada dos lados correspondentes.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se tres rectas son proporcionais, como a primeira é á terceira, así a figura construída a partir da primeira é á figura[124] construída a partir da segunda, semellante e debuxada de xeito semellante[125]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

120 Proposición VI, 15.

121 Definición V, 9.

122 Proposición VI, 1.

123 Proposición V, 7.

124 Os manuscritos presentan εἶδος «figura», palabra que Teón corrixe en *τρίγωνον*, «triángulo» dado o problema de interpretación de «figura» por «triángulo». Neste corolario está claro que a palabra «figura» se refire a «triángulo». Non podemos utilizar os argumentos da Proposicións I, 45 —Nota 232 (Proposición I, 45)— ou Proposición VI, 18, no sentido de que Euclides formula un enunciado xeral (figura rectilínea arbitraria) e só fai a demostración para o caso particular (triángulo) xa que a demostración do caso xeral non pode deducirse por aplicación reiterada dos argumentos utilizados no caso particular e sobre todo porque o caso xeral é consecuencia da Proposición VI, 20 que segue. Teón, ademais de corrixir este corolario, inclúe o enunciado do caso xeral como Corolario da Proposición VI, 20.

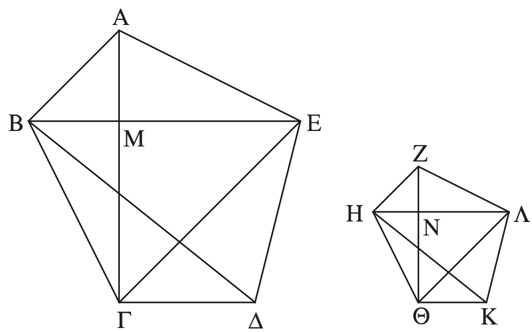
125 Nos manuscritos aparece a continuación esta frase: «posto que foi demostrado que como ΓB é a BH, así o triángulo ABΓ ó triángulo ABH, é dicir, ΔEZ». Heiberg considera que é unha interpolación.

PROPOSICIÓN 20

Os polígonos semellantes divídense en triángulos semellantes, iguais en cantidade e en razón*[126] *semellante ós polígonos enteiros, e un polígono garda co outro polígono razón duplicada da que garda o lado correspondente co lado correspondente*[127]*.

Sexan ΑΒΓΔΕ e ΖΗΘΚΛ polígonos semellantes e sexa ΑΒ correspondente con ΖΗ; digo que os polígonos ΑΒΓΔΕ e ΖΗΘΚΛ divídense en triángulos semellantes, iguais en cantidade e en razón semellante ós polígonos enteiros, e o polígono ΑΒΓΔΕ garda co polígono ΖΗΘΚΛ razón duplicada da que garda ΑΒ con ΖΗ.

Trácense ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ e ΛΘ.



E, dado que o polígono ΑΒΓΔΕ é semellante ó polígono ΖΗΘΚΛ, o ángulo ΒΑΕ é igual a ΗΖΛ. E como ΒΑ é a ΑΕ, así ΗΖ a ΖΛ[128].

Entón, dado que ΑΒΕ e ΖΗΛ son dous triángulos que teñen un ángulo dun igual a un ángulo do outro e proporcionais os

---

[126] Uso de ὁμόλογος co dativo comparativo τοῖς ὅλοις, «de razón semellante a» diferente ó da Definición V, 11 aplicado en xeral a magnitudes «correspondentes» ou concretamente, nesta mesma proposición, a «lados». Dado o cambio de significado, Euclides explica na mesma proposición este novo uso: «Digo que están tamén en razón semellante ós polígonos enteiros, é dicir, ...»

[127] Ó igual que na Proposición I, 45 fai unha formulación xeral, para dous polígonos semellantes calquera, e só fai a proba para dous pentágonos, sen facer referencia ó caso xeral dado que a proba é similar. Nota 232 (Proposición I, 45).

[128] Definición VI, 1.

lados que conteñen os ángulos iguais, logo, o triángulo ABE é de ángulos iguais ós do triángulo ZHΛ[129]; en consecuencia, tamén semellante[130]; logo, o ángulo ABE é igual a ZHΛ.

E tamén o ángulo ABΓ enteiro é igual a ZHΘ enteiro pola semellanza dos polígonos; logo, o ángulo EBΓ restante é igual a ΛHΘ.

E, dado que pola semellanza dos triángulos ABE e ZHΛ, como EB é a BA, así ΛH a HZ, pero, tamén pola semellanza dos polígonos, como AB é a BΓ, así ZH a HΘ, logo, por igualdade, como EB é a BΓ, así ΛH a HΘ[131], e os lados que conteñen os ángulos iguais, EBΓ e ΛHΘ, son proporcionais; logo, o triángulo EBΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΛHΘ; en consecuencia, tamén o triángulo EBΓ é semellante ó triángulo ΛHΘ.

Entón, polo mesmo, tamén o triángulo EΓΔ é semellante ó triángulo ΛΘK. Logo, os polígonos semellantes ABΓΔE e ZHΘKΛ quedan divididos en triángulos semellantes e iguais en cantidade.

Digo que están tamén en razón semellante ós polígonos enteiros, é dicir, de tal xeito que os triángulos son proporcionais, os antecedentes son ABE, EBΓ e EΓΔ e os seus consecuentes ZHΛ, ΛΘH e ΛΘK, e que o polígono ABΓΔE garda co polígono ZHΘKΛ razón duplicada da que garda o lado correspondente co lado correspondente, é dicir, AB con ZH.

Pois ben, trácense AΓ e ZΘ. E, dado que, por semellanza dos polígonos, o ángulo ABΓ é igual a ZHΘ e como AB é a BΓ, así ZH a HΘ, o triángulo ABΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ZHΘ. Logo, o ángulo BAΓ é igual a HZΘ e BΓA a HΘZ.

E, dado que o ángulo BAM é igual a HZN, e tamén o ángulo ABM é igual a ZHN, logo, o ángulo AMB restante é igual ó ángulo ZNH restante[132]; logo, o triángulo ABM é de ángulos iguais ós do triángulo ZHN.

---

129 Proposición VI, 6.
130 Proposición VI, 4.
131 Proposición V, 22. Definición V, 17.
132 Proposición I, 32.

De xeito semellante poderemos demostrar tamén que o triángulo ΒΜΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΗΝΘ.

Logo, proporcionalmente, como ΑΜ é a ΜΒ, así ΖΝ a ΝΗ, mentres que, como ΒΜ é a ΜΓ, así ΗΝ a ΝΘ; en consecuencia tamén, por igualdade, como ΑΜ a ΜΓ, así ΖΝ a ΝΘ[133].

Pero como ΑΜ é a ΜΓ, así ΑΒΜ a ΜΒΓ, e ΑΜΕ a ΕΜΓ —pois son entre si como as bases[134].

Logo, tamén como un dos antecedentes é a un dos consecuentes, así todos os antecedentes a todos os consecuentes; logo, como o triángulo ΑΜΒ é a ΒΜΓ, así ΑΒΕ a ΓΒΕ[135].

Pero como ΑΜΒ é a ΒΜΓ, así ΑΜ a ΜΓ; logo, tamén como ΑΜ a ΜΓ, así o triángulo ΑΒΕ ó triángulo ΕΒΓ[136].

Entón, polo mesmo, tamén como ΖΝ é a ΝΘ, así o triángulo ΖΗΛ ó triángulo ΗΛΘ.

E como ΑΜ é a ΜΓ, así ΖΝ a ΝΘ; logo, tamén como o triángulo ΑΒΕ é ó triángulo ΒΕΓ, así o triángulo ΖΗΛ ó triángulo ΗΛΘ e, por alternancia, como o triángulo ΑΒΕ é ó triángulo ΖΗΛ, así o triángulo ΒΕΓ ó triángulo ΗΛΘ[137].

De xeito semellante poderemos demostrar, unha vez unidas ΒΔ e ΗΚ, que tamén como o triángulo ΒΕΓ é ó triángulo ΛΗΘ, así o triángulo ΕΓΔ ó triángulo ΛΘΚ.

E, dado que, como o triángulo ΑΒΕ é ó triángulo ΖΗΛ, así ΕΒΓ a ΛΗΘ, e tamén ΕΓΔ a ΛΘΚ, logo, tamén como un dos antecedentes a un dos consecuentes, así todos os antecedentes a todos os consecuentes; logo, como o triángulo ΑΒΕ é ó triángulo ΖΗΛ, así o polígono ΑΒΓΔΕ ó polígono ΖΗΘΚΛ.

Pero o triángulo ΑΒΕ garda co triángulo ΖΗΛ razón duplicada da que garda o lado correspondente ΑΒ co lado correspondente ΖΗ —pois os triángulos semellantes están en razón duplicada dos lados correspondentes[138].

---

133 Proposición V, 22.
134 Proposición VI, 1.
135 Proposición V, 12.
136 Proposición V, 11.
137 Proposición V, 16.
138 Proposición VI, 19.

Logo, tamén o polígono ΑΒΓΔΕ garda co polígono ΖΗΘΚΛ razón duplicada da que garda o lado correspondente ΑΒ co lado correspondente ΖΗ.

Logo, os polígonos semellantes divídense en triángulos semellantes, iguais en cantidade e en razón semellante ós polígonos enteiros, e o polígono garda co outro polígono razón duplicada da que garda o lado correspondente co lado correspondente.

Corolario.- E tamén do mesmo xeito, no caso dos cuadriláteros semellantes poderase demostrar que están en razón duplicada dos lados correspondentes. E tamén foi demostrado dos triángulos; de xeito que tamén as figuras rectilíneas semellantes en xeral están en razón duplicada dos lados correspondentes[139]; o que, xustamente, era preciso demostrar.[140]

PROPOSICIÓN 21

As figuras semellantes á mesma figura rectilínea son tamén semellantes entre si.

Pois ben, sexa cada unha das figuras rectilíneas Α e Β semellante a Γ; digo que tamén Α é semellante a Β.

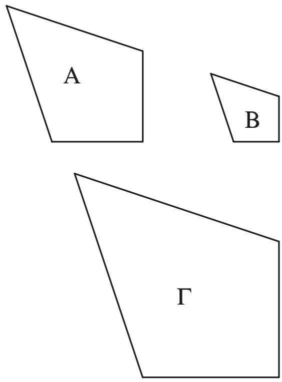
Pois ben, dado que Α é semellante a Γ, é tamén de ángulos iguais ós dela e teñen proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais. Asemade, dado que Β é semellante a Γ, tamén é de ángulos iguais ós dela e teñen proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais[141]. Logo, cada unha das figuras Α e

[139] Ó igual que na Proposición I, 45 fai unha formulación xeral, para dous polígonos semellantes calquera, e só fai a proba para dous pentágonos, aínda que neste caso dá unha xustificación da demostración do caso xeral neste corolario. Nota 232 (Proposición I, 45).

[140] Nos manuscritos aparece un segundo corolario: «E, se de ΑΒ e ΖΗ tomamos Ξ, unha terceira proporcional, ΒΑ garda razón duplicada con Ξ da que garda ΑΒ con ΖΗ. Pero, o polígono garda co outro polígono ou o cuadrilátero co outro cuadrilátero, razón duplicada da que garda o lado correspondente co lado correspondente, é dicir, ΑΒ con ΖΗ. E foi demostrado isto tamén dos triángulos; en consecuencia, en xeral, é evidente que, se tres rectas son proporcionais, como a primeira é á terceira, así a figura construída a partir da primeira é á construída a partir da segunda, semellante e debuxada de xeito semellante». Heiberg considera que é unha interpolación.

[141] Definición VI, 1.

B é de ángulos iguais ós de Γ e teñen proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais[142].



Logo A é semellante a B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

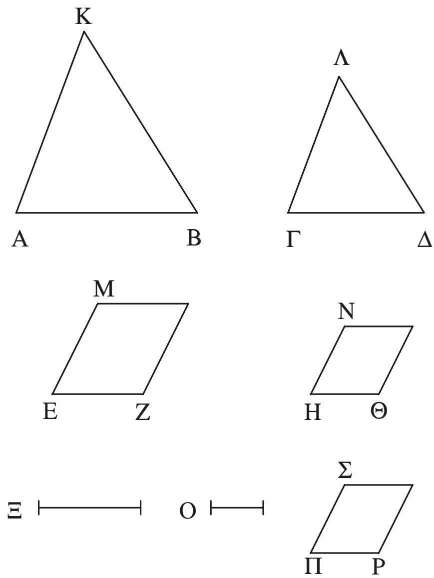
PROPOSICIÓN 22

Se catro rectas son proporcionais, tamén as figuras rectilíneas construídas a partir delas, semellantes e debuxadas de xeito semellante, serán proporcionais; e se as figuras rectilíneas construídas a partir delas, semellantes e debuxadas de xeito semellante, son proporcionais, tamén as propias rectas serán proporcionais.

Sexan AB, ΓΔ, EZ e HΘ catro rectas proporcionais —como AB é a ΓΔ, así EZ a HΘ— e debúxense a partir de AB e ΓΔ as figuras rectilíneas KAB e ΛΓΔ, semellantes e situadas de xeito semellante, mentres que, a partir de EZ e HΘ, as figuras rectilíneas MZ e NΘ, semellantes e situadas de xeito semellante; digo que como KAB é a ΛΓΔ, así MZ a NΘ.

Pois ben, tómese Ξ, unha terceira proporcional de AB e ΓΔ, mentres que O, unha terceira proporcional de EZ e HΘ[143].

[142] Proposición V, 11.
[143] Proposición VI, 11.



E, dado que como AB é a ΓΔ, así EZ a HΘ, mentres que como ΓΔ a Ξ, así HΘ a O[144], logo, por igualdade, como AB é a Ξ, así EZ a O[145].

Pero como AB é a Ξ, así tamén KAB a ΛΓΔ[146], mentres que como EZ é a O, así MZ a NΘ[147]; logo, tamén como KAB é a ΛΓΔ, así MZ a NΘ.

Agora, como KAB a ΛΓΔ, sexa así MZ a NΘ; digo que tamén como AB é a ΓΔ, así EZ a HΘ.

Pois se como AB a ΓΔ, non é así EZ a HΘ, sexa EZ a ΠP como AB a ΓΔ[148] e, a partir de ΠP, debúxese a figura rectilínea ΣP, semellante e situada de xeito semellante a unha das dúas, MZ ou NΘ[149].

Entón, dado que como AB é a ΓΔ, así EZ a ΠP, e quedan debuxadas a partir de AB e ΓΔ, semellantes e situadas de xeito semellante, KAB e ΛΓΔ, mentres que MZ e ΣP, semellantes e

144 Proposición V, 11.
145 Proposición V, 22.
146 Proposición VI, 19. Corolario.
147 Proposición VI, 20. Corolario.
148 Proposición VI, 12.
149 Proposición VI, 18. Proposición VI, 21.

situadas de xeito semellante, a partir de ΕΖ e ΠΡ, logo, como ΚΑΒ é a ΛΓΔ, así ΜΖ a ΣΡ[150].

Pero suponse tamén que como ΚΑΒ é a ΛΓΔ, así ΜΖ a ΝΘ; logo, tamén como ΜΖ é a ΣΡ, así ΜΖ a ΝΘ. Logo, ΜΖ garda a mesma razón tanto con ΝΘ como con ΣΡ; logo, ΝΘ é igual a ΣΡ[151]. E é semellante e está situada de xeito semellante a ela; logo, ΗΘ é igual a ΠΡ[152].

E, dado que como ΑΒ é a ΓΔ, así ΕΖ a ΠΡ, e ΠΡ é igual a ΗΘ, logo, como ΑΒ é a ΓΔ, así ΕΖ a ΗΘ[153].

Logo, se catro rectas son proporcionais, tamén as figuras rectilíneas construídas a partir delas, semellantes e debuxadas de xeito semellante, serán proporcionais; e se as figuras rectilíneas construídas a partir delas, semellantes e debuxadas de xeito semellante, son proporcionais, tamén as propias rectas serán proporcionais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 23

Os paralelogramos de ángulos iguais gardan entre si a razón composta dos[154] lados.

Sexan ΑΓ e ΓΖ paralelogramos de ángulos iguais que teñen o ángulo ΒΓΔ igual a ΕΓΗ; digo que o paralelogramo ΑΓ garda co paralelogramo ΓΖ a razón composta dos lados.

---

[150] Primeira parte da demostración desta mesma Proposición VI, 22.

[151] Proposición V, 9.

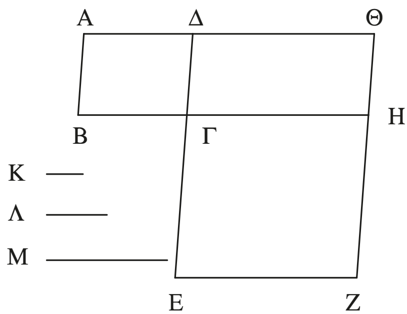
[152] Este paso da demostración (se ΝΘ é igual e semellante e está situada de xeito semellante a ΣΡ, entón ΗΘ é igual a ΠΡ) asúmese sen proba. En todo caso, a Proposición V, 14 permite afirmar que, se temos dúas figuras rectilíneas semellantes e situadas de xeito semellante, entón, se un lado da primeira é maior que o lado correspondente da segunda, todos os lados da primeira son maiores que os lados correspondentes da segunda. Nos manuscritos aparece un lema que proba este paso: «Que, se unhas figuras rectilíneas son iguais e semellantes, os seus lados correspondentes son iguais entre si, demostrarémolo así: Sexan ΝΘ e ΣΡ figuras rectilíneas iguais e semellantes, e como ΘΗ é a ΗΝ sexa así ΡΠ a ΠΣ; digo que ΡΠ é igual a ΘΗ. Pois se non son iguais, unha delas é maior. Sexa maior ΡΠ que ΘΗ. E, dado que como ΡΠ é a ΠΣ así ΘΗ a ΗΝ e, por alternancia, como ΡΠ a ΘΗ así ΠΣ a ΗΝ, e ΠΡ é maior que ΘΗ, logo, tamén é maior ΠΣ que ΗΝ; en consecuencia, tamén ΡΣ é maior que ΘΝ. Pero tamén igual; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, non é desigual ΠΡ a ΗΘ. Logo, igual; o que, xustamente, era preciso demostrar.». Heiberg considera que é unha interpolación.

[153] Proposición V, 7.

[154] En grego di exactamente «a razón composta dos lados»; Heath intúe que se trata dunha escrita descoidada onde debería repetir o artigo τῶν, «a razón composta das dos lados».

Pois ben, fágase de xeito que ΒΓ estea en liña recta con ΓΗ; logo, ΔΓ está en liña recta con ΓΕ[155].

Complétese o paralelogramo ΔΗ, tómese unha recta Κ e, como ΒΓ é a ΓΗ, resulte así Κ a Λ[156], mentres que, como ΔΓ é a ΓΕ, así Λ a Μ.



Logo, as razóns de Κ con Λ e de Λ con Μ son as mesmas que as razóns dos lados: de ΒΓ con ΓΗ e de ΔΓ con ΓΕ.

Pero a razón de Κ con Μ está composta pola razón de Κ con Λ e da de Λ con Μ[157]; en consecuencia, tamén Κ garda con Μ a razón composta dos lados.

E, dado que, como ΒΓ a ΓΗ, así o paralelogramo ΑΓ a ΓΘ[158], pero como ΒΓ a ΓΗ, así Κ a Λ, logo, tamén como Κ é a Λ, así ΑΓ a ΓΘ[159]. Asemade, dado que como ΔΓ é a ΓΕ, así o paralelogramo ΓΘ a ΓΖ, pero como ΔΓ a ΓΕ, así Λ a Μ, logo, tamén como Λ a Μ, así o paralelogramo ΓΘ ó paralelogramo ΓΖ.

Entón, dado que foi demostrado que, como Κ é a Λ, así o paralelogramo ΑΓ ó paralelogramo ΓΘ, mentres que como Λ a Μ, así o paralelogramo ΓΘ ó paralelogramo ΓΖ, logo, por igualdade, como Κ a Μ, así ΑΓ ó paralelogramo ΓΖ[160].

E Κ garda con Μ a razón composta dos lados; logo, tamén ΑΓ garda con ΓΖ a razón composta dos lados.

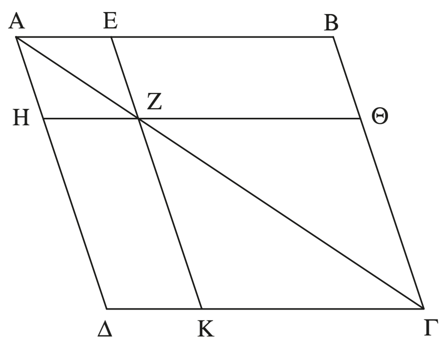
155 Construción análoga á da Proposición VI, 14.
156 Proposición VI, 12.
157 Véxase a Nota 4 (Definición VI, 5).
158 Proposición VI, 1.
159 Proposición V, 11.
160 Proposición V, 22.

Logo, os paralelogramos de ángulos iguais gardan entre si a razón composta dos lados; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 24

De todo paralelogramo, os paralelogramos que están ós lados da diagonal son semellantes ó paralelogramo enteiro e entre si.

Sexa o paralelogramo ΑΒΓΔ e o seu diámetro ΑΓ, e sexan ΕΗ e ΘΚ paralelogramos que están ós lados de ΑΓ; digo que cada un dos paralelogramos ΕΗ e ΘΚ é semellante a ΑΒΓΔ enteiro e entre si.



Pois ben, dado que queda trazada ΕΖ paralela a ΒΓ —un dos lados do triángulo ΑΒΓ—, proporcionalmente, como ΒΕ é a ΕΑ, así ΓΖ a ΖΑ[161]. Asemade, dado que queda trazada ΖΗ paralela a ΓΔ —un dos lados do triángulo ΑΓΔ—, proporcionalmente, como ΓΖ é a ΖΑ, así ΔΗ a ΗΑ.

Pero foi demostrado que como ΓΖ é a ΖΑ, así tamén ΒΕ a ΕΑ; logo, tamén como ΒΕ a ΕΑ, así ΔΗ a ΗΑ[162], logo tamén, por composición, como ΒΑ a ΑΕ, así ΔΑ a ΑΗ[163] e, por alternancia, como ΒΑ a ΑΔ, así ΕΑ a ΑΗ[164].

[161] Proposición VI, 2.
[162] Proposición V, 11.
[163] Proposición V, 18.
[164] Proposición V, 16.

Logo, dos paralelogramos ΑΒΓΔ e ΕΗ, os lados que conteñen o ángulo común, ΒΑΔ, son proporcionais.

E, dado que ΗΖ é paralela a ΔΓ, o ángulo ΑΖΗ é igual a ΔΓΑ[165]; e o ángulo ΔΑΓ é común ós dous triángulos ΑΔΓ e ΑΗΖ; logo, o triángulo ΑΔΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΑΗΖ[166].

Entón, polo mesmo, tamén o triángulo ΑΓΒ é de ángulos iguais ós do triángulo ΑΖΕ; e o paralelogramo ΑΒΓΔ enteiro é de ángulos iguais ós do paralelogramo ΕΗ.

Logo, proporcionalmente, como ΑΔ é a ΔΓ, así ΑΗ a ΗΖ, mentres que como ΔΓ é a ΓΑ, así ΗΖ a ΖΑ, e como ΑΓ a ΓΒ, así ΑΖ a ΖΕ, e, ademais, como ΓΒ é a ΒΑ, así ΖΕ a ΕΑ[167].

E, dado que foi demostrado que, como ΔΓ é a ΓΑ, así ΗΖ a ΖΑ, mentres que como ΑΓ a ΓΒ, así ΑΖ a ΖΕ, logo, por igualdade, como ΔΓ é a ΓΒ, así ΗΖ a ΖΕ[168].

Logo, dos paralelogramos ΑΒΓΔ e ΕΗ, os lados que conteñen os ángulos iguais son proporcionais; logo, o paralelogramo ΑΒΓΔ é semellante ó paralelogramo ΕΗ[169].

Entón, polo mesmo, tamén o paralelogramo ΑΒΓΔ é semellante ó paralelogramo ΚΘ; logo, cada un dos paralelogramos ΕΗ e ΘΚ é semellante ó paralelogramo ΑΒΓΔ; logo, cada un dos paralelogramos ΕΗ e ΘΚ é semellante ó paralelogramo ΑΒΓΔ. E as figuras semellantes á mesma figura rectilínea son tamén semellantes entre si[170]; logo, tamén o paralelogramo ΕΗ é semellante ó paralelogramo ΘΚ.

Logo, de todo paralelogramo, os paralelogramos que están ós lados da diagonal son semellantes ó paralelogramo enteiro e entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

165 Proposición I, 29.
166 Proposición I, 32.
167 Proposición VI, 4.
168 Proposición V, 22.
169 Definición VI, 1.
170 Proposición VI, 21.

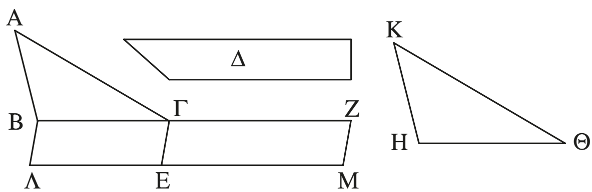
PROPOSICIÓN 25

Construír unha figura á vez semellante á figura rectilínea dada e igual a outra dada.

Sexa ΑΒΓ a figura rectilínea dada, semellante á cal se ten que construír outra, e Δ aquela á que ten que ser igual; é preciso, entón, que a mesma figura sexa semellante a ΑΒΓ e igual a Δ.

Pois ben, aplíquese[171] en ΒΓ o paralelogramo ΒΕ igual ó triángulo ΑΒΓ[172], e en ΓΕ, o paralelogramo ΓΜ igual a Δ no ángulo ΖΓΕ que é igual a ΓΒΛ[173]. Logo, ΒΓ está en liña recta con ΓΖ, mentres que ΛΕ con ΕΜ[174].

Tómese ΗΘ, media proporcional de ΒΓ e ΓΖ[175], e, a partir de ΗΘ, debúxese ΚΗΘ semellante e situada de xeito semellante a ΑΒΓ[176].



E, dado que, como ΒΓ é a ΗΘ, así ΗΘ a ΓΖ, e que, se tres rectas son proporcionais, como a primeira é á terceira, así a figura construída a partir da primeira é á figura construída a partir da segunda, semellante e debuxada de xeito semellante[177], logo, como ΒΓ é a ΓΖ, así o triángulo ΑΒΓ ó triángulo ΚΗΘ.

Pero tamén como ΒΓ é a ΓΖ, así o paralelogramo ΒΕ ó paralelogramo ΕΖ[178]. Logo, tamén como o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΚΗΘ, así o paralelogramo ΒΕ ó paralelogramo ΕΖ[179].

---

171 Para o verbo παραβάλλω, véxase a Nota 221 da Proposición I, 44.
172 Proposición I, 44.
173 Proposición I, 45.
174 Proposición I, 14 e Proposición I, 29.
175 Proposición VI, 13.
176 Proposición VI, 18.
177 Proposición VI, 19. Corolario.
178 Proposición VI, 1.
179 Proposición V, 11.

Logo, por alternancia, como o triángulo ΑΒΓ é ó paralelogramo ΒΕ, así o triángulo ΚΗΘ ó paralelogramo ΕΖ[180].

Pero o triángulo ΑΒΓ é igual ó paralelogramo ΒΕ; logo, tamén o triángulo ΚΗΘ é igual ó paralelogramo ΕΖ[181].

Pero o paralelogramo ΕΖ é igual a Δ; logo, tamén ΚΗΘ é igual a Δ. E ΚΗΘ é tamén semellante a ΑΒΓ.

Logo, queda construída unha figura á vez semellante á figura rectilínea dada e igual a outra dada; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 26

Se dun paralelogramo se corta un paralelogramo semellante e situado de xeito semellante ó paralelogramo enteiro, cun ángulo común a el, este está ós lados da mesma diagonal que o paralelogramo enteiro*[182]*.

Pois ben, do paralelogramo ΑΒΓΔ quítese o paralelogramo ΑΖ semellante e situado de xeito semellante a ΑΒΓΔ, cun ángulo común a el, ΔΑΒ; digo que ΑΒΓΔ está ós lados da mesma diagonal que ΑΖ.

Supoñamos que non, entón, se é posible, sexa a súa diagonal ΑΘΓ e, unha vez prolongada ΗΖ, lévese ata Θ e, por Θ, trácese ΘΚ paralela a unha das dúas, ΑΔ ou ΒΓ[183].

Entón, dado que ΑΒΓΔ está ós lados da mesma diagonal que ΚΗ, logo, como ΔΑ é a ΑΒ, así ΗΑ a ΑΚ[184].

E tamén, pola semellanza de ΑΒΓΔ e ΕΗ, como ΔΑ é a ΑΒ, así ΗΑ a ΑΕ[185]; logo, tamén como ΗΑ a ΑΚ, así ΗΑ a ΑΕ[186].

---

[180] Proposición V, 16.

[181] A Proposición V, 14 permite esta afirmación sen necesidade de utilizar a alternancia: se ΑΒΓ é a ΚΗΘ como ΒΕ a ΕΖ, entón, se ΑΒΓ é igual a ΒΕ, tamén ΚΗΘ é igual a ΕΖ.

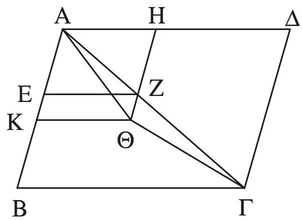
[182] O resultado é o recíproco do da Proposición VI, 24 e parece lóxico que aparecera despois desta proposición xa que non é necesaria a Proposición VI, 25 para a súa demostración.

[183] Proposición I, 31.

[184] Proposición VI, 24.

[185] Definición VI, 1.

[186] Proposición V, 11.



Logo, HA garda a mesma razón tanto con AK como con AE. Logo, AE é igual a AK[187], a menor á maior; o cal, sen dúbida é imposible.

Logo, en ningún caso ΑΒΓΔ non está ós lados da mesma diagonal que AZ; logo, o paralelogramo ΑΒΓΔ está ós lados da mesma diagonal que o paralelogramo AZ.

Logo, se dun paralelogramo se corta un paralelogramo semellante e situado de xeito semellante ó paralelogramo enteiro, cun ángulo común a el, este está ós lados da mesma diagonal que o paralelogramo enteiro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 27

De todos os paralelogramos que se aplican na mesma recta e que son inferiores en figuras paralelogramas semellantes e situadas de xeito semellante á debuxada a partir da metade da recta, o maior é o que se aplica a partir da metade da recta, que é semellante á falta.[188]

Sexa a recta AB, córtese á metade por Γ[189], e aplíquese na recta AB o paralelogramo ΑΔ que é inferior na figura paralelograma ΔΒ debuxada a partir da metade de AB, é dicir, ΓΒ; digo que, de todos os paralelogramos aplicados en AB e que son inferiores nas figuras semellantes e situadas de xeito semellante a ΔΒ, a maior é ΑΔ.

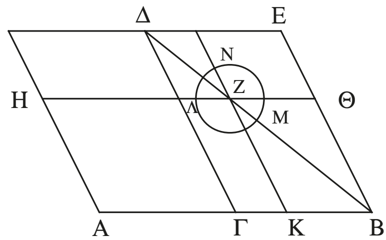
---

[187] Proposición V, 9.

[188] Esta proposición clarifica o διορισμός da seguinte Proposición VI, 28 e proba que, cando non se dá a restrición, non é posible construír un paralelogramo que cumpra as condicións que establece a proposición.

[189] Proposición I, 10.

Pois ben, aplíquese o paralelogramo AZ na recta AB que é inferior na figura paralelograma ZB semellante e situada de xeito semellante a ΔB; digo que AΔ é maior que AZ.



Pois, dado que o paralelogramo ΔB é semellante ó paralelogramo ZB[190], están ós lados da mesma diagonal. Trácese a súa diagonal ΔB e remátese o debuxo da figura.

Entón, dado que ΓZ é igual a ZE[191], e ZB, común[192], logo, ΓΘ enteiro é igual a KE enteiro.

Pero ΓΘ é igual a ΓH, posto que tamén AΓ a ΓB[193]. Logo, tamén HΓ é igual a EK.

Engádase a ambos ΓZ; logo, AZ enteiro é igual ó gnomon ΛMN; en consecuencia, o paralelogramo ΔB, é dicir, AΔ, é maior que o paralelogramo AZ.

Logo, de todos os paralelogramos que se aplican na mesma recta e que son inferiores en figuras paralelogramas semellantes e situadas de xeito semellante á debuxada a partir da metade da recta, o maior é o que foi aplicado a partir da metade da recta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 28

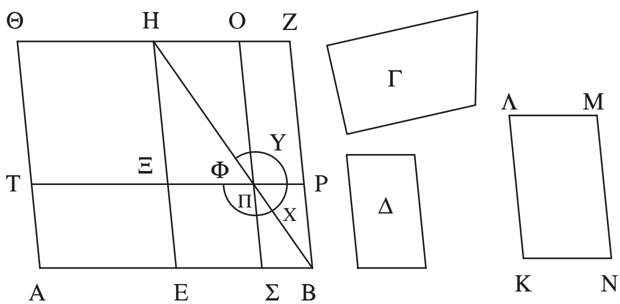
Aplicar na recta dada un paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada, o cal sexa inferior nunha figura

[190] Proposición VI, 26.
[191] Proposición I, 43.
[192] ZB é común ós paralelogramos ΓΘ e KE.
[193] Proposición VI, 1.

***paralelograma semellante a unha dada; pero*[194] *é preciso que a figura rectilínea dada non sexa maior que o debuxado a partir da metade da recta, semellante á falta*[195].**

Sexa AB a recta dada, Γ a figura rectilínea dada igual á cal se ten que aplicar outra en AB que non sexa maior que o paralelogramo debuxado a partir da metade de AB, semellante á falta, e Δ ó que ten que ser semellante a falta.

Córtese AB á metade polo punto E[196] e, a partir de EB, debúxese EBZH, semellante e situado de xeito semellante a Δ[197], e complétese o paralelogramo AH.



Entón, se AH é igual a Γ, quedaría feito o que se pediu —pois na recta dada AB queda aplicado o paralelogramo AH

[194] Na Proposición I, 22 aparece o que é, segundo Heath, o primeiro διορισμός dos *Elementos*. Aquí temos outro caso claro de διορισμός. Se non se cumpre esta restrición, non é posible facer a construción xa que non existe o exceso polo que HB é maior que Γ e non se pode construír a figura ΚΛΜΝ. En todo caso xa xustificou na Proposición VI, 27 que se non se cumpre tal restrición non é posible «Aplicar na recta dada un paralelogramo igual á figura rectilínea dada, que sexa inferior nunha figura paralelograma semellante á dada».

[195] Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44). A Proposición I, 44 resolve o problema de «aplicar» nunha recta dada un paralelogramo igual a un triángulo dado. Ese procedemento permite, mediante a súa reiteración para cada un dos triángulos en que se divide unha figura rectilínea, aplicar na recta dada un paralelogramo igual a unha figura rectilínea arbitraria. Nesta Proposición VI, 28 constrúe un paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada ó que «lle falta» unha figura paralelograma semellante a unha dada para ser un paralelogramo aplicado na recta. Na Proposición VI, 29 constrúe un paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada que «excede» a liña nunha figura paralelograma semellante a unha dada (o paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada é a unión dun paralelogramo aplicado na recta mais un paralelogramo semellante a un dado, aplicado nunha prolongación da recta).

[196] Proposición I, 10.

[197] Proposición VI, 18.

igual á figura rectilínea dada Γ, sendo inferior na figura paralelograma HB que é semellante a Δ.

Pero se non, sexa ΘE maior que Γ. E ΘE é igual a HB[198]; logo, HB tamén é maior que Γ.

Entón, constrúase KΛMN igual a ese exceso polo que HB é maior que Γ, e, á vez, semellante e situado de xeito semellante a Δ[199].

Pero Δ é semellante a HB; logo, tamén KM é semellante a HB[200].

Sexa KΛ correspondente con HE, mentres que ΛM con HZ. E, dado que HB é igual a Γ e KM, logo, HB é maior que KM; logo, tamén HE é maior que KΛ, mentres que HZ maior que ΛM[201].

Póñase HΞ igual a KΛ, mentres que HO igual a ΛM[202], e complétese o paralelogramo ΞHOΠ[203]; logo, tamén HΠ é semellante a KM. Logo, tamén HΠ é semellante a HB; logo, HΠ está ós lados da mesma diagonal que HB[204].

Sexa a súa diagonal HΠB e remátese o debuxo da figura.

Entón, dado que BH é igual a Γ e KM, parte das cales, HΠ, é igual a KM, logo, o gnomon ΥΧΦ restante é igual ó restante Γ.

E, dado que OP é igual a ΞΣ[205], engádase a ambos ΠB; logo, OB enteiro é igual a ΞB enteiro.

Pero ΞB é igual a TE, posto que tamén o lado AE é igual ó lado EB[206]; logo, tamén TE é igual a OB.

---

198 Proposición VI, 1.

199 Proposición VI, 25.

200 Proposición VI, 21.

201 Este paso da demostración (se temos dous paralelogramos semellantes, o primeiro maior que o segundo, entón os lados do primeiro son maiores que os correspondentes do segundo) asúmese sen proba. Véxase a Nota 152 (Proposición VI, 22).

202 Proposición I, 3.

203 Proposición I, 31.

204 Proposición VI, 26.

205 Proposición I, 43.

206 Proposición I, 36.

Engádase a ambos ΞΣ; logo, ΤΣ enteiro é igual ó gnomon ΦΧΥ enteiro.

Pero o gnomon ΦΧΥ demostrouse que é igual a Γ; logo, tamén ΤΣ é igual a Γ.

Logo, na recta dada ΑΒ queda aplicado o paralelogramo ΣΤ igual á figura rectilínea dada Γ, inferior na figura paralelograma ΠΒ que é semellante a Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 29

***Aplicar na recta dada un paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada, o cal exceda nunha figura paralelograma semellante á dada*[207].**

Sexa ΑΒ a recta dada, Γ a figura rectilínea dada igual á cal se ten que aplicar outra en ΑΒ, e Δ ó que ten que ser semellante o exceso; é preciso, entón, aplicar na recta ΑΒ un paralelogramo igual á figura rectilínea Γ, que exceda nunha figura paralelograma semellante a Δ.

Córtese ΑΒ á metade por Ε[208] e, a partir de ΕΒ, debúxese o paralelogramo ΒΖ, semellante e situado de xeito semellante a Δ[209], e constrúase ΗΘ igual a ΒΖ e Γ xuntos, e á vez, semellante e situado de xeito semellante a Δ[210].

E sexa ΚΘ correspondente con ΖΛ, mentres que ΚΗ con ΖΕ.

---

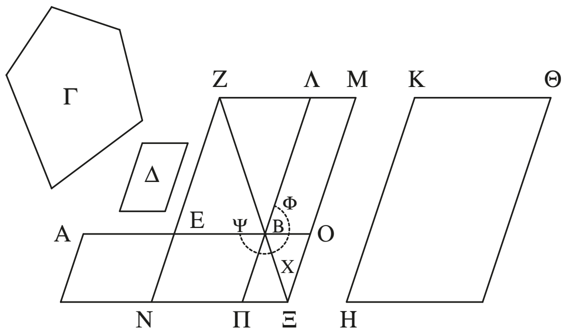
[207] Se a é a lonxitude dunha recta e c é a área dunha figura rectilínea dada, na Proposición I, 44 calcula x tal que $ax = c$ —resolve unha ecuación de primeiro grao—. Se, nas proposicións 28 e 29 deste libro VI, supoñemos que o paralelogramo que falta ou supera é semellante a un cadrado de lado x —de área x^2—, entón, se a recta ten lonxitude a e a figura rectilínea ten área c, temos que construír un rectángulo de área $(a - x)x = c$, na Proposición VI, 28, ou un rectángulo de área $(a + x)x = c$, na Proposición VI, 29. É dicir, trátase de resolver as ecuacións de segundo grado $x^2 - ax + c = 0$ ou $x^2 + ax - c = 0$, para a e c números reais positivos. É claro que no segundo caso sempre ten unha solución real positiva —ademais doutra negativa— e, no primeiro caso, para que teña solucións reais —as dúas serán positivas—, é necesario que $(a/2)^2$ sexa maior ou igual que c, que é a condición imposta polo διορισμός, avalado pola Proposición VI, 27.

[208] Proposición I, 10.

[209] Proposición VI, 18.

[210] Proposición VI, 25.

E, dado que HΘ é maior que ZB, logo, tamén KΘ é maior que ZΛ, mentres que KH que ZE[211].



Prolónguense ZΛ e ZE, sexa ZΛM igual a KΘ, mentres que ZEN igual a KH[212], e complétese MN[213]; logo, MN é igual e semellante a HΘ.

Pero HΘ é semellante a EΛ; logo, tamén MN é semellante a EΛ[214]; logo, EΛ está ós lados da mesma diagonal que MN[215].

Trácese a súa diagonal ZΞ e remátese o debuxo da figura.

Dado que HΘ é igual a EΛ e Γ, pero HΘ é igual a MN, logo, tamén MN é igual a EΛ e Γ.

Quítese a ambos EΛ; logo, o gnomon ΨXΦ restante é igual a Γ.

E, dado que AE é igual a EB, tamén AN é igual a NB[216], é dicir, a ΛO[217].

Engádase a ambos EΞ; logo, AΞ enteiro é igual ó gnomon ΦXΨ.

Pero o gnomon ΦXΨ é igual a Γ; logo, tamén AΞ é igual a Γ.

Logo, na recta dada AB queda aplicado o paralelogramo AΞ igual á figura rectilínea dada Γ, o cal excede na figura paralelo-

211 Véxase a Nota 201 (Proposición VI, 28).
212 Proposición I, 3.
213 Proposición I, 31.
214 Proposición VI, 21.
215 Proposición VI, 26.
216 Proposición I, 36.
217 Proposición I, 43.

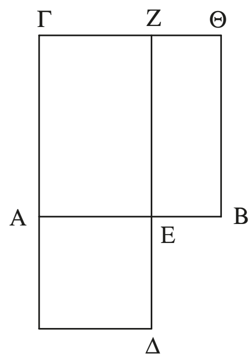
grama ΠΟ que é semellante a Δ, posto que tamén ΟΠ é semellante a ΕΛ[218]; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 30

Cortar a recta finita dada en razón extrema e media.

Sexa a recta finita dada AB; é preciso, entón, cortar a recta AB en razón extrema e media.

Debúxese a partir de AB o cadrado ΒΓ[219]e aplíquese en ΑΓ o paralelogramo ΓΔ igual a ΒΓ que exceda na figura ΑΔ semellante a ΒΓ[220].



E ΒΓ é un cadrado; logo, tamén é un cadrado ΑΔ.

E, dado que ΒΓ é igual a ΓΔ, quítese a ambos ΓΕ; logo, o restante, ΒΖ, é igual ó restante, ΑΔ.

E tamén é de ángulos iguais ós del; logo, os lados de ΒΖ e ΑΔ que conteñen os ángulos iguais son inversamente proporcionais[221]; logo, como ΖΕ é a ΕΔ, así ΑΕ a ΕΒ.

Pero ΖΕ é igual a ΑΒ, mentres que ΕΔ a ΑΕ. Logo, como ΒΑ é a ΑΕ, así ΑΕ a ΕΒ.

Pero ΑΒ é maior que ΑΕ; logo, tamén ΑΕ é maior que ΕΒ[222].

218 Proposición VI, 24.
219 Proposición I, 46.
220 Proposición VI, 29.
221 Proposición VI, 14.
222 Proposición V, 14.

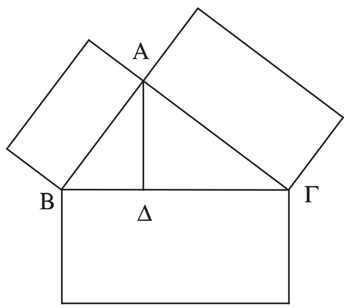
Logo, a recta AB queda cortada en razón extrema e media por E, e o seu segmento maior é AE; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 31

Nos triángulos rectángulos, a figura construída a partir do lado que está tendido baixo o ángulo recto*[223] *é igual ás figuras semellantes e debuxadas de xeito semellante a partir dos lados que conteñen o ángulo recto*[224]*.

Sexa o triángulo rectángulo ΑΒΓ co ángulo recto ΒΑΓ; digo que a figura construída a partir de ΒΓ é igual ás figuras semellantes e debuxadas de xeito semellante a partir de ΒΑ e ΑΓ.

Trácese a perpendicular ΑΔ[225].



Entón, dado que, no triángulo rectángulo ΑΒΓ, dende o ángulo recto Α, queda trazada ΑΔ perpendicular á base ΒΓ, os triángulos da perpendicular, ΑΒΔ e ΑΔΓ, son semellantes a ΑΒΓ enteiro e entre si[226].

E, dado que ΑΒΓ é semellante a ΑΒΔ, logo, como ΓΒ é a ΒΑ, así ΑΒ a ΒΔ[227].

---

223 Véxase Nota 61 (Proposición VI, 8).

224 O Teorema de Pitágoras —Proposición I, 47— é un caso particular desta Proposición VI, 31 se a figura que construímos a partir da hipotenusa é un cadrado (e, polo tanto, tamén son cadrados as figuras semellantes e debuxadas de xeito semellante a partir dos lados que conteñen o ángulo recto).

225 Proposición I, 12.

226 Proposición VI, 8.

227 Definición VI, 1.

E, dado que tres rectas son proporcionais, como a primeira é á terceira, así a figura construída a partir da primeira é á construída a partir da segunda, semellante e debuxada de xeito semellante[228].

Entón, polo mesmo, tamén como ΒΓ é a ΓΔ, así a figura construída a partir de ΒΓ á construída a partir de ΓΑ.

En consecuencia, tamén como ΒΓ é a ΒΔ e ΔΓ, así a figura construída a partir de ΒΓ é ás semellantes e debuxadas de xeito semellante a partir de ΒΑ e ΑΓ[229].

Pero ΒΓ é igual a ΒΔ e ΔΓ; logo, tamén a figura construída a partir de ΒΓ é igual ás figuras semellantes e debuxadas de xeito semellante a partir de ΒΑ e ΑΓ[230].

Logo, nos triángulos rectángulos, a figura construída a partir do lado que está tendido baixo o ángulo recto é igual ás figuras semellantes e debuxadas de xeito semellante a partir dos lados que conteñen o ángulo recto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 32

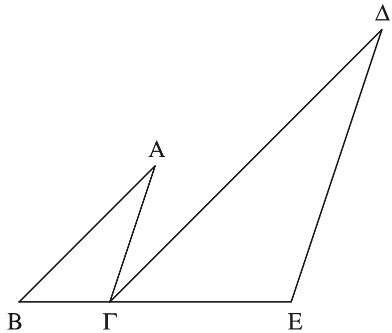
Se dous triángulos que teñen dous lados dun proporcionais a dous lados do outro se poñen unidos por un ángulo de xeito que os seus lados correspondentes sexan tamén paralelos, os restantes lados dos triángulos estarán en liña recta.

Sexan dous triángulos, ΑΒΓ e ΔΓΕ, que teñen os dous lados ΒΑ e ΑΓ proporcionais ós dous lados ΔΓ e ΔΕ —como ΑΒ a ΑΓ, así ΔΓ a ΔΕ—, e ΑΒ paralela a ΔΓ, e ΑΓ a ΔΕ; digo que ΒΓ está en liña recta con ΓΕ.

Pois ben, dado que ΑΒ é paralela a ΔΓ e a recta ΑΓ incidiu nelas, os ángulos alternos ΒΑΓ e ΑΓΔ son iguais entre si[231].

---

228 Proposición VI, 19. Corolario.
229 Proposición V, 7. Corolario e Proposición V, 24.
230 Proposición V, 9.
231 Proposición I, 29.



Entón, polo mesmo tamén ΓΔE é igual a AΓΔ.

En consecuencia, tamén BAΓ é igual a ΓΔE.

E, dado que ABΓ e ΔΓE son dous triángulos que teñen o ángulo A igual ó ángulo Δ, e proporcionais os lados que conteñen os ángulos iguais —como BA é a AΓ, así ΓΔ a ΔE—, logo, o triángulo ABΓ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΓE[232]; logo, o ángulo ABΓ é igual a ΔΓE.

E foi demostrado tamén que AΓΔ é igual a BAΓ; logo, AΓE enteiro é igual ós dous, ABΓ e BAΓ; engádase a ambos AΓB; logo, AΓE e AΓB son iguais a BAΓ, AΓB e ΓBA.

Pero BAΓ, ABΓ e AΓB son iguais a dous rectos[233]; logo, tamén AΓE e AΓB son iguais a dous rectos.

Logo, as dúas rectas BΓ e ΓE que non están polo mesmo lado fan os ángulos adxacentes AΓE e AΓB iguais a dous rectos coa recta AΓ e no seu punto Γ; logo, BΓ está en liña recta con ΓE[234].

Logo, se dous triángulos que teñen dous lados dun proporcionais a dous lados do outro se poñen unidos por un ángulo de xeito que os seus lados correspondentes sexan tamén paralelos, os restantes lados dos triángulos estarán en liña recta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

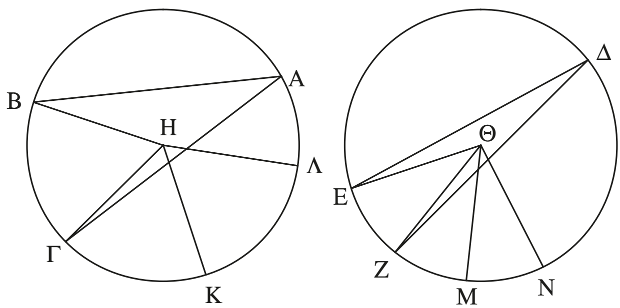
232 Proposición VI, 6.
233 Proposición I, 32.
234 Proposición I, 14.

PROPOSICIÓN 33

***Nos círculos iguais, os ángulos gardan a mesma razón que as circunferencias nas que están, tanto se están nos centros como se están nas circunferencias*[235].**

Sexan ΑΒΓ e ΔΕΖ círculos iguais e sexan ΒΗΓ e ΕΘΖ ángulos nos seus centros, Η e Θ, mentres que ΒΑΓ e ΕΔΖ, ángulos nas circunferencias; digo que como a circunferencia ΒΓ é á circunferencia ΕΖ, así o ángulo ΒΗΓ a ΕΘΖ, e ΒΑΓ a ΕΔΖ.

Pois ben, póñanse seguidas tantas circunferencias ΓΚ, ΚΛ como se queira iguais á circunferencia ΒΓ, e tantas circunferencias ΖΜ e ΜΝ como se queira iguais á circunferencia ΕΖ, e trácense ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ e ΘΝ.



Entón, dado que as circunferencias ΒΓ, ΓΚ e ΚΛ son iguais entre si, tamén son iguais entre si os ángulos ΒΗΓ, ΓΗΚ e ΚΗΛ[236]; logo, cantas veces a circunferencia ΒΛ é múltiplo de ΒΓ, tantas veces tamén o ángulo ΒΗΛ é múltiplo de ΒΗΓ; entón, polo mesmo, tamén cantas veces a circunferencia ΝΕ é múltiplo de ΕΖ, tantas veces tamén o ángulo ΝΘΕ é múltiplo de ΕΘΖ.

Logo, se a circunferencia ΒΛ é igual á circunferencia ΕΝ, tamén o ángulo ΒΗΛ é igual que ΕΘΝ e, se a circunferencia ΒΛ é maior que a circunferencia ΕΝ, tamén o ángulo ΒΗΛ é maior que ΕΘΝ e, se menor, menor[237].

235 Nota 90 (Proposición III, 20).

236 Proposición III, 27.

237 Dedución directa da demostración da Proposición III, 27.

Entón, habendo catro magnitudes, dúas circunferencias, ΒΓ e ΕΖ, e dous ángulos, ΒΗΓ e ΕΘΖ, da circunferencia ΒΓ e do ángulo ΒΗΓ tomáronse múltiplos iguais, —a circunferencia ΒΛ e o ángulo ΒΗΛ—, mentres que, da circunferencia ΕΖ e do ángulo ΕΘΖ, a circunferencia ΕΝ e o ángulo ΕΘΝ. E queda demostrado que, se a circunferencia ΒΛ supera á circunferencia ΕΝ, tamén o ángulo ΒΗΛ supera ó ángulo ΕΘΝ e, se é igual, é igual e, se menor, menor. Logo, como a circunferencia ΒΓ é a ΕΖ, así o ángulo ΒΗΓ é a ΕΘΖ[238].

Pero como o ángulo ΒΗΓ é a ΕΘΖ, así ΒΑΓ a ΕΔΖ; pois cada un é o dobre que o outro[239].

Logo, tamén como a circunferencia ΒΓ é á circunferencia ΕΖ, así o ángulo ΒΗΓ a ΕΘΖ, e ΒΑΓ a ΕΔΖ.

Logo, nos círculos iguais, os ángulos gardan a mesma razón que as circunferencias nas que están, tanto se están nos centros como se están nas circunferencias; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[238] Definición V, 5.

[239] Proposición III, 20 e Proposición V, 15.

DEFINICIÓNS

1. Unidade é aquilo segundo o cal se lle chama unha a cada unha das cousas que existen.
2. Número é a pluralidade composta de unidades.
3. Parte é un número dun número, o menor do maior, cando mide ó maior[1].
4. Partes, cando non o mide[2].
5. Múltiplo é o maior do menor cando é medido polo menor.
6. Número par é o que se divide en dúas partes iguais[3].
7. Número impar é o que non se divide en dúas partes iguais ou difire dun número par nunha unidade.
8. Número par un número par de veces é o medido por un número par segundo un número par[4].
9. Impar un número par de veces é o medido por un par segundo un número impar[5].[6]
10. Número impar un número impar de veces é o medido por un número impar segundo un número impar[7].
11. Número primo[8] é o medido por unha única unidade.

---

[1] Un número *a* é parte dun número *b* se *a* divide a *b*. Equivale a divisor.

[2] Sobreenténdase o anterior «un número menor dun maior».

[3] Véxase a Nota 7 (Definición I, 17).

[4] Produto de dous números pares.

[5] Produto dun número par e un número impar. As definicións 8 e 9 non son excluíntes. Hai números, por exemplo o 12, que son «par un número par de veces», 12 = 2x6, e tamén «impar un número par de veces», 12 = 4x3. Os críticos de Euclides sostén que esta clasificación de Euclides é errónea e chaman «número par un número par de veces» ós números que son potencias de 2 co que as dúas definicións se exclúen mutuamente. De todas formas non cabe dúbida de que a definición de Euclides é intencionada tal como queda de manifesto na Proposición IX, 32 ó probar que un determinado tipo de números son só «par un número par de veces» e na Proposición IX, 34 ó probar que hai números que son «par un número par de veces» e «impar un número par de veces».

[6] A continuación nos manuscritos aparece a seguinte definición que Heiberg considera que é unha interpolación: «Par un número impar de veces é o medido por un número impar segundo o número par». Non hai diferencia real entre os números «impar un número par de veces» e os números «par un número impar de veces».

[7] Produto de dous números impares.

[8] Πρῶτος, cuxa tradución latina *primus* é a que consolidou a tradición, quere dicir «primeiro»; segundo Aristóteles (Anal. Post. II, 13) significa «o que non está composto de

12. Números primos entre si son os medidos por unha única unidade como medida común.
13. Número composto é o medido por algún número.
14. Números compostos entre si son os medidos por algún número como medida común.
15. Dise que un número multiplica a un número cando o multiplicado se suma tantas veces como unidades hai naquel e resulta un número.
16. Cando dous números ó multiplicárense entre si fan un número, o produto[9] chámase plano e os números que se multiplican entre si, os seus lados.
17. Cando tres números ó multiplicárense entre si fan un número, o produto é un sólido e os números que se multiplican entre si, os seus lados.
18. Número cadrado é o multiplicado por el mesmo ou contido por dous números iguais.
19. Cubo é o multiplicado por el mesmo dúas veces ou contido por tres números iguais
20. Hai números proporcionais cando o primeiro é múltiplo igual ou é a mesma parte ou as mesmas partes do segundo que o terceiro do cuarto.
21. Números planos e sólidos semellantes son os que teñen os lados proporcionais.
22. Número perfecto é o que é igual ás súas propias partes[10].

---

números»; Nicómaco explica o seu uso neste contexto porque a estes números só se chega coa composición de unidades e a unidade é o *primeiro* número.

[9] En grego γενόμενος quere dicir «que chega a ser»; traducirémolo polo participio irregular «produto», que é a palabra que a tradición consolidou para «o que chega a ser ó multiplicar dous números e a partir deles». Máis adiante, como se sinalou en moitos outros casos, Euclides simplificará a expresión e dirá só «o produto de .... e....» —Proposición VII, 19— ou incluso «o de ... e ...» —Proposición VII, 24.

[10] Un número é perfecto se é igual á suma dos seus divisores.

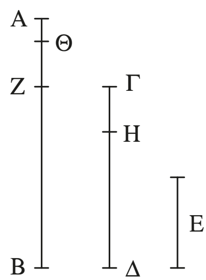
PROPOSICIÓN 1

Tomados dous números desiguais, ó ir quitando sucesivamente o menor do maior, se o resto non mide nunca ó anterior a el mesmo ata que quede unha unidade, os números do principio serán primos entre si.

Pois ben, sendo AB e ΓΔ dous números desiguais, ó ir quitando sucesivamente o menor do maior, fágase que o que quede non mida nunca ó anterior a el mesmo ata que quede unha unidade; digo que AB e ΓΔ son primos entre si, é dicir, que unha única unidade mide a AB e ΓΔ.

Pois se AB e ΓΔ non son primos entre si, algún número mediraos.

Mídaos e sexa E; E ΓΔ, medindo a BZ, deixe a ZA menor que el mesmo, mentres que AZ, medindo a ΔH, deixe a HΓ menor que el mesmo, e HΓ, medindo a ZΘ, deixe a unidade ΘA.



Entón, dado que E mide a ΓΔ, e ΓΔ mide a BZ, logo, tamén E mide a BZ[11]; pero mide tamén ó total, BA; logo, tamén medirá ó resto, AZ[12].

Pero AZ mide a ΔH; logo, tamén E mide a ΔH; e mide tamén ó total, ΔΓ; logo, tamén medirá ó resto, ΓH; e ΓH mide a ZΘ; logo, tamén E mide a ZΘ; e mide tamén ó total, ZA; logo, tamén medirá á unidade restante, AΘ, aínda que é un número; o que, sen dúbida, é imposible.

---

[11] Está aceptando como Noción Común que se hai tres números a, b e c tal que a mide a b e b mide a c, entón a mide a c.

[12] Está aceptando como Noción Común que si si hai tres números a, b e c e a mide a b e a $(b + c)$, entón a mide a c.

Logo, ningún número medirá ós números AB e ΓΔ; logo, AB e ΓΔ son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 2

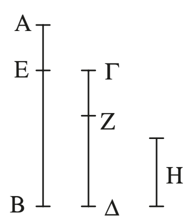
Dados dous números non primos entre si, atopar a súa máxima medida común.

Sexan AB e ΓΔ os dous números non primos entre si dados. É preciso, entón, atopar a máxima medida común de AB e ΓΔ.

Entón, se ΓΔ mide a AB e se mide tamén a si mesmo, logo, ΓΔ é medida común de ΓΔ e AB. E é evidente que tamén a máxima; pois ningunha máis grande que ΓΔ medirá a ΓΔ.

E, se ΓΔ non mide a AB, ó ir quitando sucesivamente o menor de entre AB e ΓΔ do maior, quedará un número que medirá ó anterior a el mesmo[13]. Pois non quedará unha unidade; E se non fose así, AB e ΓΔ serán primos entre si[14]; o que, xustamente, se supón que non.

Logo, algún número quedará que medirá ó anterior a el mesmo. E ΓΔ, medindo a BE, deixe a EA menor que el mesmo[15], mentres que EA, medindo a ΔZ, deixe a ZΓ menor que el mesmo, e ΓZ mida a AE.



[13] Este método coñécese como algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo común divisor. O último resto non nulo desas divisións sucesivas é o máximo común divisor. Se ese resto é unha unidade, entón son primos entre si (Proposición VII, 1).

[14] Proposición VII, 1.

[15] En versión actual, ó dividir BA por ΓΔ dá un cociente, BE/ΓΔ («ΓΔ medindo a BE»), que non é relevante na demostración, e un resto EA. A continuación, divide o divisor polo resto, ΓΔ por EA, e dá como cociente ΔZ/EA («EA medindo a ΔZ») e, como resto, ZΓ. Repite o mesmo proceso e supón que, ó dividir EA entre ZΓ, dá resto cero («ΓZ mida a AE») e, polo tanto, ZΓ, o último resto non nulo, é o máximo común divisor.

Entón, dado que ΓZ mide a AE, e AE mide a ΔZ, logo, tamén ΓZ medirá a ΔZ; e mídese tamén a si mesmo; logo, tamén medirá ó total, ΓΔ.

E ΓΔ mide a BE; logo, tamén ΓZ mide a BE; e mide tamén a EA; logo, tamén medirá ó total, BA; e mide tamén a ΓΔ; logo, tamén ΓZ mide a AB e ΓΔ.

Logo, ΓZ é medida común de AB e ΓΔ.

Entón, digo que tamén é a máxima. Pois se ΓZ non é a máxima medida común de AB e ΓΔ, algún número que sexa maior que ΓZ medirá a AB e ΓΔ.

Mídaos e sexa H. E, dado que H mide a ΓΔ e ΓΔ mide a BE, logo, tamén H mide a BE; e mide tamén ó total, BA; logo, tamén medirá ó resto, AE. E AE mide a ΔZ; logo, tamén H medirá a ΔZ; e mide tamén ó total, ΔΓ; logo, tamén medirá ó resto ΓZ, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible; logo, ningún número que sexa maior que ΓZ medirá ós números AB e ΓΔ; logo, ΓZ é a máxima medida común de AB e ΓΔ.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se un número mide a dous números, tamén medirá á súa máxima medida común; o que, xustamente, era preciso demostrar[16].

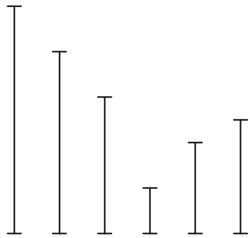
PROPOSICIÓN 3

Dados tres números non primos entre si, atopar a súa máxima medida común.

Sexan A, B e Γ os tres números non primos entre si dados; é preciso, entón, atopar a máxima medida común de A, B e Γ.

[16] Como xa indicamos —Véxase a Nota 83 (Proposición I, 15. Corolario)— Euclides acaba as demostracións cunha apostila final «o que xustamente, era preciso facer/demostrar» segundo sexa un *problema* ou un *teorema*. Esta diferenciación desaparece nos libros de aritmética, VII, VIII e IX, nos que Euclides considera que os números non se constrúen, atópanse —utiliza o verbo εὑρίσκω—. Así o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo común divisor de dous números ou de tres números —Proposición VII, 2 e VII, 3— ou o método de cálculo do mínimo común múltiplo —Proposición VII, 34— finalizan con «o que, xustamente, era preciso demostrar», a pesar de que poden clasificarse como problemas.

Pois ben, tómese Δ a máxima medida común dos dous, de A e B[17]; entón, Δ ou mide ou non mide a Γ.



Mídao, primeiro; pero mide tamén a A e B; logo, Δ mide a A, B e Γ; logo, Δ é medida común de A, B e Γ.

Digo agora que tamén a máxima. Pois se Δ non é a máxima medida común de A, B e Γ, algún número que sexa maior que Δ medirá ós números A, B e Γ. Mídaos e sexa E. Entón, dado que E mide a A, B e Γ, logo, tamén medirá a A e B; logo, tamén medirá á máxima medida común de A e B[18]; e Δ é a máxima medida común de A e B; logo, E mide a Δ, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible; logo, ningún número que sexa maior que Δ medirá ós números A, B e Γ; logo, Δ é a máxima medida común de A, B e Γ.

Agora non mida Δ a Γ; digo, primeiro, que Γ e Δ non son primos entre si.

Pois, dado que A, B e Γ non son primos entre si, algún número mediraos. Entón, o que mida a A, B e Γ tamén medirá a A e B, e medirá a Δ, a máxima medida común de A e B; pero mide tamén a Γ; logo, algún número medirá ós números Δ e Γ; logo, Δ e Γ non son primos entre si.

Tómese, entón, E, a súa máxima medida común.

E, dado que E mide a Δ, mentres que Δ mide a A e B, logo, tamén E mide a A e B; e mide tamén a Γ; logo, E mide a A, B e Γ; logo, E é medida común de A, B e Γ.

Digo agora que tamén a máxima.

17 Proposición VII, 2.

18 Proposición VII, 2. Corolario.

Pois se E non é a máxima medida común de A, B e Γ, algún número que sexa maior que E medirá ós números A, B e Γ. Mídaos e sexa Z. E, dado que Z mide a A, B e Γ, tamén mide a A e B; logo, tamén medirá á máxima medida común de A e B. E Δ é a máxima medida común de A e B; logo, Z mide a Δ; e mide tamén a Γ; logo, Z mide a Δ e Γ; logo, tamén medirá á máxima medida común de Δ e Γ. E E é a máxima medida común de Δ e Γ; logo, Z mide a E, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningún número que sexa maior que E medirá ós números A, B e Γ; logo, E é a máxima medida común de A, B e Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

Todo número ou é parte ou partes de todo número, o menor do maior.

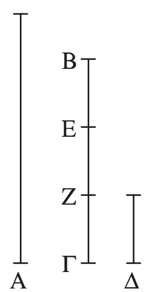
Sexan dous números A e BΓ, e sexa BΓ o menor; digo que BΓ ou é parte ou partes de A.

Pois ben, A e BΓ ou son primos entre si ou non.

Sexan, primeiro, A e BΓ primos entre si. Entón, se se divide BΓ nas unidades que hai nel, cada unha das unidades de BΓ será unha parte de A; en consecuencia, BΓ é partes de A.

Agora non sexan A e BΓ primos entre si; entón, BΓ ou mide ou non mide a A.

Se, efectivamente, BΓ mide a A, BΓ é parte de A.



Pero se non, tómese Δ, máxima medida común de A e BΓ[19], e divídase BΓ en BE, EZ e ZΓ, iguais a Δ.

[19] Proposición VII, 2.

E, dado que Δ mide a A, Δ é parte de A; pero Δ é igual a cada un dos números ΒΕ, ΕΖ e ΖΓ; logo, tamén cada un dos números ΒΕ, ΕΖ e ΖΓ é parte de A; en consecuencia, ΒΓ é partes de A.

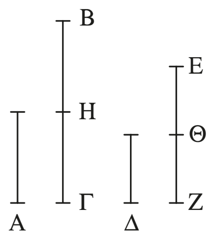
Logo, todo número ou é parte ou partes de todo número, o menor do maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5[20]

***Se un número é parte dun número e outro é a mesma parte doutro, tamén a suma duns será a mesma parte da suma dos outros que exactamente un do outro*[21].**

Pois ben, sexa A parte de ΒΓ, e outro número Δ a mesma parte de ΕΖ que A de ΒΓ; digo que tamén a suma de A e Δ é a mesma parte da suma de ΒΓ e ΕΖ que exactamente A de ΒΓ.

Pois, dado que a parte que é A de ΒΓ, a mesma parte é tamén Δ de ΕΖ, logo, cantos números iguais a A hai en ΒΓ, tantos números iguais a Δ hai tamén en ΕΖ.



Divídase ΒΓ en ΒΗ e ΗΓ iguais a A, mentres que ΕΖ en ΕΘ e ΘΖ iguais a Δ; entón, a cantidade de ΒΗ e ΗΓ será igual á cantidade de ΕΘ e ΘΖ. E, dado que ΒΗ é igual a A, mentres que ΕΘ a Δ, logo, tamén ΒΗ e ΕΘ son iguais a A e Δ. Entón, polo mesmo, tamén ΗΓ e ΘΖ, a A e Δ. Logo, cantos números iguais a A hai en ΒΓ, tantos hai tamén en ΒΓ e ΕΖ iguais a A e Δ. Logo, cantas veces ΒΓ é múltiplo de A[22], tantas veces é tamén múlti-

[20] Véxase a Proposición V, 1 para magnitudes.

[21] Se a, b, c, d son catro números e $a = (1/n)b$, $c = (1/n)d$, entón $(a + c) = (1/n)(b + d)$. Véxase a Proposición V, 1.

[22] Definición VII, 5.

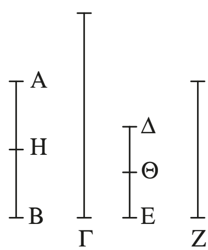
plo a suma de ΒΓ e ΕΖ da suma de Α e Δ. Logo, a parte que é Α de ΒΓ, a mesma parte é tamén a suma de Α e Δ da suma de ΒΓ e ΕΖ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se un número é partes dun número e outro é as mesmas partes doutro, tamén a suma duns será as mesmas partes da suma dos outros que exactamente un do outro*[23]*.

Pois ben, sexa o número ΑΒ partes do número Γ, e outro número ΔΕ as mesmas partes de Ζ que ΑΒ de Γ; digo que tamén a suma de ΑΒ e ΔΕ é as mesmas partes da suma de Γ e Ζ que exactamente ΑΒ de Γ.

Pois, dado que as mesmas partes que é partes ΑΒ de Γ tamén é ΔΕ de Ζ, logo, cantas partes de Γ hai en ΑΒ, tanta partes de Ζ hai tamén en ΔΕ.



Divídase ΑΒ nas partes ΑΗ e ΗΒ de Γ, mentres que ΔΕ nas partes ΔΘ e ΘΕ de Ζ; entón, a cantidade de ΑΗ e ΗΒ será igual á cantidade de ΔΘ e ΘΕ.

E, dado que a parte que é ΑΗ de Γ, a mesma parte é tamén ΔΘ de Ζ[24], logo, a parte que é ΑΗ de Γ, a mesma parte é tamén a suma de ΑΗ e ΔΘ da suma de Γ e Ζ[25].

---

23 Se a, b, c, d son catro números e $a = (m/n)b$, $c = (m/n)d$, entón $(a + c) = (m/n)(b + d)$.

24 Está aceptando como Noción Común que, se hai tres números a_1, b_1 e $c1$ e outros tres a_2, b_2, c_2 tal que b_1 é o mesmo múltiplo de a_1 que b_2 de a_2 e c_1 é o mesmo múltiplo de b_1 que c_2 de b_2, entón c_1 é o mesmo múltiplo de a_1 que c_2 de a_2.

25 Proposición VII, 5.

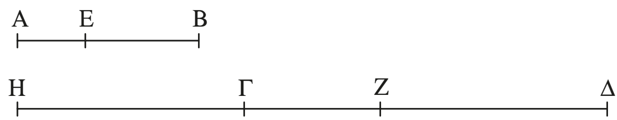
Entón, polo mesmo, tamén a parte que é HB de Γ, a mesma parte é tamén a suma de HB e ΘE da suma de Γ e Z. Logo, as mesmas partes que é partes AB de Γ é tamén a suma de AB e ΔE da suma de Γ e Z; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7[26]

Se un número é parte dun número, a mesma que un restado[27] dun restado, tamén o resto será a mesma parte do resto que o total do total[28].

Pois ben, sexa o número AB parte do número ΓΔ, a mesma que o restado AE do restado ΓZ; digo que tamén o resto EB é a mesma parte do resto ZΔ que o total AB do total ΓΔ.

Pois ben, a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte sexa tamén EB de ΓH.



E, dado que a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte é tamén EB de ΓH, logo, a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte é tamén AB de HZ[29].

Pero a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte suponse tamén que é AB de ΓΔ; logo, a parte que é AB de HZ, a mesma parte é tamén de ΓΔ; logo, HZ é igual a ΓΔ. Réstese a ambos ΓZ; logo, o resto HΓ é igual ó resto ZΔ.

E, dado que a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte é tamén EB de HΓ, e HΓ, igual a ZΔ, logo, a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte é tamén EB de ZΔ.

---

26 Véxase a Proposición V, 5 para magnitudes.

27 Ata aquí o verbo ἀφαιρέω, referíndose a magnitudes en xeral ou a figuras e rectas, sempre o traducimos por «quitar» ou «cortar», do mesmo xeito que, xeralmente, λοιπός por «restante» e ὅλος por «enteiro»; ó referirse a números, parece máis oportuno empregar a terminoloxía usada habitualmente para operacións numéricas: «restar», «resto» e «total» respectivamente.

28 Se a, b, c, d son catro números, $c < a$, $d < b$ e $a = (1/n)b$, $c = (1/n)d$, entón $(a - c) = (1/n)(b - d)$.

29 Proposición VII, 5.

Pero a parte que é AE de ΓZ, a mesma parte é tamén AB de ΓΔ; logo, tamén o resto EB é a mesma parte do resto ZΔ que o total AB do total ΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

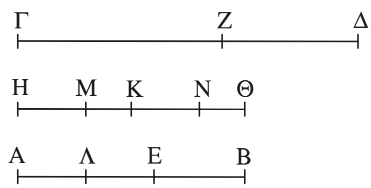
PROPOSICIÓN 8

Se un número é partes dun número, as mesmas que un restado dun restado, tamén o resto será as mesmas partes do resto que o total do total*[30]*.

Pois ben, sexa o número AB partes do número ΓΔ, as mesmas que o restado AE do restado ΓZ; digo que tamén o resto EB é as mesmas partes do resto ZΔ que o total AB do total ΓΔ.

Pois ben, póñase HΘ igual a AB. Logo, as partes que é HΘ de ΓΔ, as mesmas partes é tamén AE de ΓZ.

Divídase HΘ nas partes HK e KΘ de ΓΔ, e AE nas partes AΛ e ΛE de ΓZ; entón, a cantidade de HK e KΘ será igual á cantidade de AΛ e ΛE.



E, dado que a parte que é HK de ΓΔ, a mesma parte é tamén AΛ de ΓZ, e ΓΔ é maior que ΓZ, logo, tamén HK é maior que AΛ[31].

Póñase HM igual a AΛ. Logo, a parte que é HK de ΓΔ, a mesma parte é tamén HM de ΓZ.

Logo, tamén o resto MK é a mesma parte do resto ZΔ que o total HK do total ΓΔ[32].

Asemade, dado que a parte que é KΘ de ΓΔ, a mesma parte é tamén EΛ de ΓZ, e ΓΔ é maior que ΓZ, logo, tamén ΘK é maior que EΛ.

---

30 Se a, b, c, d son catro números, $c < a$, $d < b$ e $a = (m/n)b$, $c = (m/n)d$, entón $(a - c) = (m/n)(b - d)$.

31 Proposición VII, 4.

32 Proposición VII, 7.

Póñase KN igual a EΛ. Logo, a parte que é KΘ de ΓΔ, a mesma parte é tamén KN de ΓZ; logo, tamén o resto NΘ é a mesma parte do resto ZΔ que o total KΘ do total ΓΔ.

E foi demostrado tamén que o resto MK é a mesma parte do resto ZΔ que o total HK do total ΓΔ; logo, tamén, a suma de MK e NΘ é as mesmas partes de ΔZ que o total ΘH do total ΓΔ[33].

E a suma de MK e NΘ é igual a EB, mentres que ΘH a BA; logo, tamén, o resto EB é as mesmas partes do resto ZΔ que o total AB do total ΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 9[34]

Se un número é parte dun número e outro é a mesma parte doutro, tamén, por alternancia*[35]*, a parte ou partes que é o primeiro do terceiro, a mesma parte ou partes será o segundo do cuarto*[36]*.

Pois ben, sexa o número A parte do número BΓ e outro, Δ, a mesma parte doutro, EZ, que A de BΓ; digo que tamén, por alternancia, a parte ou partes que é A de Δ, a mesma parte ou partes é tamén BΓ de EZ.

Pois, dado que a parte que é A de BΓ, a mesma parte é Δ de EZ, logo, cantos números iguais a A hai en BΓ, tantos iguais a Δ hai tamén en EZ.

Divídase BΓ en BH e HΓ iguais a A, mentres que EZ en EΘ e ΘZ iguais a Δ; entón, a cantidade de BH e HΓ será igual á cantidade de EΘ e ΘZ.

E, dado que BH e HΓ son números iguais entre si, que tamén EΘ e ΘZ son números iguais entre si e que a cantidade de BH e HΓ é igual á cantidade de EΘ e ΘZ, logo, a parte ou partes que é BH de EΘ, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén

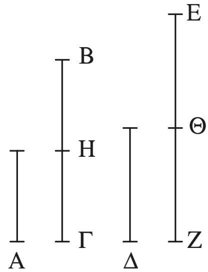
33 Proposición VII, 6.

34 Véxase a Proposición V, 16 para magnitudes.

35 Definición V, 12.

36 Se *a*, *b*, *c*, *d* son catro números, e $a = (1/n)b$, $c = (1/n)d$, $a = (m/k)c$, entón $b = (m/k)d$.

ΗΓ de ΘΖ; en consecuencia, tamén a parte ou partes que é ΒΗ de ΕΘ, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén a suma ΒΓ da suma ΕΖ[37].



Pero ΒΗ é igual a Α, mentres que ΕΘ a Δ; logo, a parte ou partes que é Α de Δ, a mesma parte ou partes é tamén ΒΓ de ΕΖ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 10

Se un número é partes dun número e outro é as mesmas partes doutro, tamén, por alternancia*[38]*, as partes ou parte que é o primeiro do terceiro, as mesmas partes ou a mesma parte será tamén o segundo do cuarto*[39]*.

Pois ben, sexa o número ΑΒ partes do número Γ, e outro, ΔΕ, as mesmas partes doutro, Ζ; digo que tamén, por alternancia, as partes ou parte que é ΑΒ de ΔΕ, as mesmas partes ou a mesma parte é tamén Γ de Ζ.

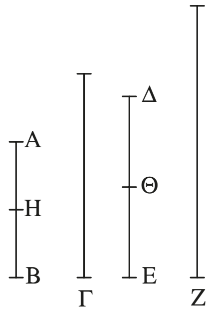
Pois, dado que as partes que é ΑΒ de Γ, as mesmas partes é tamén ΔΕ de Ζ, logo, cantas partes de Γ hai en ΑΒ, tantas partes tamén de Ζ en ΔΕ.

Divídase ΑΒ nas partes ΑΗ e ΗΒ de Γ, mentres que ΔΕ nas partes ΔΘ e ΘΕ de Ζ; entón, a cantidade de ΑΗ e ΗΒ será igual á cantidade de ΔΘ e ΘΕ.

37 Proposición VII, 5 ou Proposición VII, 6.

38 Definición V, 12.

39 Se *a*, *b*, *c*, *d* son catro números, e $a = (m/n)b$, $c = (m/n)d$, $a = (r/s)c$, entón $b = (r/s)d$.



E, dado que a parte que é AH de Γ, a mesma parte é tamén ΔΘ de Z, tamén, por alternancia, a parte ou partes que é AH de ΔΘ, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén Γ de Z[40]; polo mesmo, entón, tamén a parte ou partes que é HB de ΘE, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén Γ de Z; en consecuencia, tamén[41] as partes ou parte que é AB de ΔE, as mesmas partes ou a mesma parte é tamén Γ de Z[42]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 11

***Se, como o total é ó total, así o restado ó restado, tamén como o total é ó total o resto será ó resto*[43].**

Como o total AB é ó total ΓΔ, sexa así o restado AE ó restado ΓZ; digo que tamén como o total AB é ó total ΓΔ, o resto EB será ó resto ZΔ.

Dado que, como AB é a ΓΔ, así AE a ΓZ, logo, a parte ou partes que é AB de ΓΔ[44], a mesma parte ou as mesmas partes é

40 Proposición VII, 9.

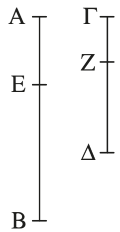
41 Todos os manuscritos excepto *P*, que o ten na marxe, presentan a continuación esta frase que é considerada unha interpolación por Heiberg: «a parte ou partes que é AH de ΔΘ, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén HB de ΘE; logo, tamén a parte ou partes que é AH de ΔΘ, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén AB de ΔE; pero foi demostrado que a parte ou partes que é AH de ΔΘ, a mesma parte ou as mesmas partes é Γ de Z e logo».

42 Proposición VII, 5 e Proposición VII, 6.

43 O enunciado é exactamente igual ó da Proposición V, 19; para a diferente tradución, véxase a Nota 27 (Proposición VII, 7). Sexan dous números a e b ós que se lle restan, respectivamente, c e d. Se $a:b :: c:d$, entón $a:b :: (a - c) : (b - d)$.

44 A gráfica é inconsistente coa demostración, na que se supón que o primeiro número é menor que o segundo —Definición VII, 3—. Para resolver o caso en que o primeiro número

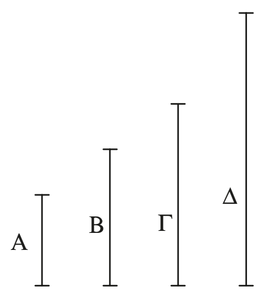
tamén AE de ΓZ[45]. Logo, tamén o resto EB é a mesma parte ou partes de ZΔ que AB de ΓΔ[46]. Logo, como EB é a ZΔ, así AB a ΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.



PROPOSICIÓN 12

***Se hai varios números proporcionais, como un dos antecedentes é a un dos consecuentes, así serán todos os antecedentes a todos os consecuentes*[47].**

Sexan varios números proporcionais A, B, Γ e Δ: como A é a B, así Γ a Δ; digo que como A é a B, así A e Γ a B e Δ.



é maior que o segundo é necesario ter en conta outras posibilidades da Definición VII, 20. Véxase Heat, Vol. II, pag. 312.

45 Definición VII, 20.

46 Proposición VII, 7 e Proposición VII, 8.

47 Se *a*:*b*::c:*d,* entón *a*:*b*::(*a* + *c*):(*b* + *d*). Correspóndese coa Proposición V, 12 para magnitudes. Como na Proposición V, 12 e moitas outras veces, Euclides fai un enunciado xeral que serve para calquera cantidade de pares de números. Neste caso só fai a proba con dous pares mentres que na demostración da Proposición V, 12 utilizou tres pares de magnitudes. Cos argumentos utilizados na proba, dá por bos os enunciados da Proposición VII, 5 e Proposición VII, 6 para calquera cantidade de pares de números a pesar de que só os enunciou para dous pares.

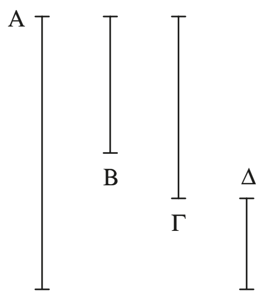
Pois, dado que como A é a B, así Γ a Δ, logo, a parte ou partes que é A de B, a mesma parte ou partes é tamén Γ de Δ[48].

Logo, tamén a suma de A e Γ é a mesma parte ou as mesmas partes da suma de B e Δ que A de B[49]. Logo, como A é a B, así A e Γ a B e Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13

***Se catro números son proporcionais, tamén serán proporcionais por alternancia*[50].**

Sexan A, B, Γ e Δ catro números proporcionais: como A é a B así Γ a Δ; digo que tamén serán proporcionais por alternancia: como A a Γ así B a Δ.



Pois, dado que como A é a B, así Γ a Δ, logo, a parte ou partes que é A de B, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén Γ de Δ[51].

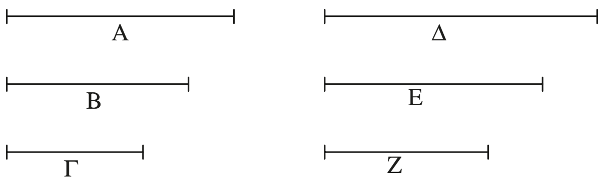
Logo, por alternancia, a parte ou partes que é A de Γ, a mesma parte ou as mesmas partes é tamén B de Δ[52]. Logo, como A é a Γ, así B a Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

48 Definición VII, 20.
49 Proposición VII, 5 e Proposición VII, 6.
50 Se *a:b::c:d*, entón *a:c::b:d.* Correspóndese coa Proposición V, 16.
51 Definición VII, 20.
52 Proposición VII, 10.

PROPOSICIÓN 14

***Se hai varios números e outros en igual cantidade a eles, os cales, ó tomalos de dous en dous, están tamén na mesma razón, tamén, por igualdade, estarán na mesma razón*[53].**

Sexan varios números A, B e Γ, e outros en igual cantidade a eles Δ, E e Z, os cales, ó tomalos de dous en dous, están na mesma razón: como A é a B, así Δ a E, mentres que, como B a Γ, así E a Z; digo que tamén, por igualdade, como A é a Γ, así Δ a Z.



Pois, dado que como A é a B, así Δ a E, logo, por alternancia, como A é a Δ, así B a E[54].

Asemade, dado que como B é a Γ, así E a Z, logo, por alternancia, como B é a E, así Γ a Z.

Pero, como B é a E, así A a Δ; logo, tamén como A a Δ, así Γ a Z[55]; logo, por alternancia, como A é a Γ, así Δ a Z; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[53] Correspóndese coa Proposición V, 22. Esta proba baséase na Proposición VII, 13 que se corresponde coa Proposición V, 16. Non é posible trasladar as probas da Proposición VII, 13 e da Proposición VII, 14 ás correspondentes proposicións do libro V, porque a Definición VII, 20 limita o tipo de números que poden intervir nunha proporción —non se pode falar de proporción entre un número racional e un irracional— e isto permite demostracións máis simples, mentres que as magnitudes do libro V non están suxeitas a esta restrición.

[54] Proposición VII, 13.

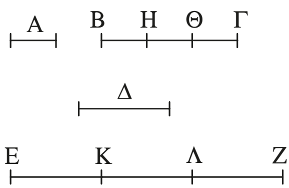
[55] No caso dos números non necesita unha proposición equivalente á Proposición V, 11 para magnitudes. O concepto de magnitudes proporcionais —Definición V, 5 e Definición V, 6— simplifícase para números na Definición VII, 20.

PROPOSICIÓN 15

Se unha unidade mide a un número, e outro número mide as mesmas veces a algún outro número, tamén, por alternancia, a unidade medirá as mesmas veces ó terceiro número que o segundo ó cuarto[56].

Pois ben, mida a unidade Α a un número ΒΓ, e outro número Δ mida as mesmas veces a outro número ΕΖ; digo que, por alternancia, a unidade Α mide as mesmas veces ó número Δ que ΒΓ a ΕΖ.

Pois, dado que a unidade Α mide ó número ΒΓ as mesmas veces que Δ a ΕΖ, logo, cantas unidades hai en ΒΓ, tantos números iguais a Δ hai tamén en ΕΖ. Divídase ΒΓ nas súas unidades ΒΗ, ΗΘ e ΘΓ, mentres que ΕΖ en ΕΚ, ΚΛ e ΛΖ iguais a Δ.



Entón a cantidade de ΒΗ, ΗΘ e ΘΓ será igual á cantidade de ΕΚ, ΚΛ e ΛΖ.

E, dado que as unidades ΒΗ, ΗΘ e ΘΓ son iguais entre si, que os números ΕΚ, ΚΛ e ΛΖ son tamén iguais entre si e que a cantidade das unidades ΒΗ, ΗΘ e ΘΓ é igual á cantidade dos números ΕΚ, ΚΛ e ΛΖ, logo, como a unidade ΒΗ ó número ΕΚ, así será a unidade ΗΘ ó número ΚΛ e a unidade ΘΓ ó número ΛΖ[57].

Logo, tamén como un dos antecedentes a un dos consecuentes, así serán todos os antecedentes a todos os consecuentes[58]; logo, como a unidade ΒΗ é ó número ΕΚ, así ΒΓ a ΕΖ.

---

56 Caso particular da Proposición VII, 9 se consideramos que o primeiro número é unha unidade.

57 Definición VII, 20.

58 Proposición VII, 12.

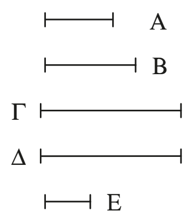
Pero a unidade BH é igual á unidade A, e o número EK ó número Δ. Logo, como a unidade A é ó número Δ, así BΓ a EZ. Logo, a unidade A mide ó número Δ as mesmas veces que BΓ a EZ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

Se dous números, ó multiplicárense entre si, fan uns números, os produtos daqueles serán iguais entre si[59].

Sexan dous números A e B, e A ó multiplicar a B faga Γ, mentres que B ó multiplicar a A faga Δ; digo que Γ é igual a Δ.

Pois, dado que A ó multiplicar a B fixo Γ, logo, B mide a Γ segundo as unidades de A[60].



Pero mide tamén a unidade E ó número A segundo as súas unidades; logo, a unidade E mide ó número A as mesmas veces que B a Γ.

Logo, por alternancia, a unidade E mide ó número B as mesmas veces que A a Γ[61].

Asemade, dado que B ó multiplicar a A fixo Δ, logo A mide a Δ segundo as unidades de B.

Pero mide tamén a unidade E a B segundo as súas unidades; logo, a unidade E mide ó número B as mesmas veces que A a Δ.

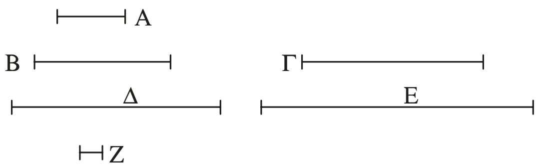
Pero a unidade E medía ó número B as mesmas veces que A a Γ; logo, A mide as mesmas veces tanto a Γ como a Δ. Logo, Γ é igual a Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

59 Propiedade conmutativa da multiplicación.
60 Definición VII, 15.
61 Proposición VII, 15.

PROPOSICIÓN 17

Se un número, ó multiplicar a dous números, fai uns números, os produtos daqueles gardarán a mesma razón que os multiplicados*[62]*.

Pois ben, o número Α, ó multiplicar ós dous números Β e Γ, faga Δ e Ε; digo que como Β é a Γ, así Δ a Ε.



Pois, dado que Α ó multiplicar a Β fixo Δ, logo, Β mide a Δ segundo as unidades de Α[63].

Pero mide tamén a unidade Ζ ó número Α segundo as súas unidades; logo, a unidade Ζ mide ó número Α as mesmas veces que Β a Δ. Logo, como a unidade Ζ é ó número Α, así Β a Δ[64].

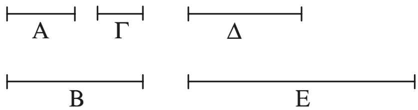
Entón, polo mesmo, tamén como a unidade Ζ é ó número Α, así Γ a Ε; logo, tamén como Β é a Δ, así Γ a Ε.

Logo, por alternancia, como Β é a Γ, así Δ a Ε[65]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

Se dous números, ó multiplicar a un número, fan uns números, os produtos daqueles gardarán a mesma razón que os multiplicadores.

Pois ben, dous números Α e Β, ó multiplicar a un número Γ, fagan Δ e Ε; digo que, como Α é a Β, así Δ a Ε.



---

62 Se a, b, c, d, e son cinco números e $d = ab$, $e = ac$, entón $b:c::d:e$.

63 Definición VII, 15.

64 Definición VII, 20.

65 Proposición VII, 13.

Pois ben, dado que A ó multiplicar a Γ fixo Δ, logo, tamén Γ ó multiplicar a A fixo Δ[66]. Entón, polo mesmo, tamén Γ ó multiplicar a B fixo E.

Entón, o número Γ, ó multiplicar ós dous números A e B, fixo Δ e E.

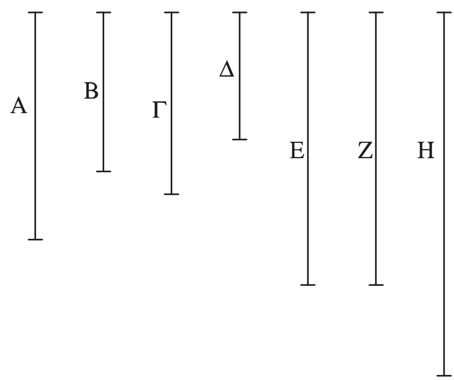
Logo, como A é a B, así Δ a E[67]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 19

Se catro números son proporcionais, o produto do primeiro e do cuarto será igual ó produto do segundo e do terceiro; e se o produto do primeiro e do cuarto é igual ó produto do segundo e do terceiro, os catro números serán proporcionais[68].

Sexan catro números proporcionais A, B, Γ e Δ: como A é a B, así Γ a Δ; e A ó multiplicar a Δ faga E, mentres que B ó multiplicar a Γ faga Z; digo que E é igual a Z.

Pois ben, A ó multiplicar a Γ faga H.



66 Proposición VII, 16.

67 Proposición VII, 17.

68 Se *a*, *b*, *c*, *d* son catro números, entón *a*:*b*::*c*:*d* se, e só se, *ad* = *bc*. Catro números son proporcionais se, e só se, o produto de medios é igual ó produto de extremos. Correspóndese coa Proposición VI, 16.

Entón, dado que A ó multiplicar a Γ fixo H e ó multiplicar a Δ fixo E, entón o número A ó multiplicar ós dous números Γ e Δ fixo H e E. Logo, como Γ é a Δ, así H a E[69].

Pero, como Γ é a Δ, así A a B; logo, tamén como A a B, así H a E.

Asemade, dado que A ó multiplicar a Γ fixo H, pero, efectivamente, tamén B ó multiplicar a Γ fixo Z, entón, os dous números A e B, ó multiplicar a un número Γ, fixeron H e Z. Logo, como A é a B, así H a Z[70].

Pero tamén, como A é a B, así H a E; logo, tamén, como H a E, así H a Z.

Logo, H garda a mesma razón tanto con E como con Z; logo, E é igual a Z.

Sexa agora E igual a Z; digo que como A é a B, así Γ a Δ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, dado que E é igual a Z, logo, como H é a E, así H a Z[71].

Pero, como H é a E, así Γ a Δ, mentres que, como H a Z, así A a B.

Logo, tamén, como A é a B, así Γ a Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 20

Os números menores dos que gardan a mesma razón que eles miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón —o maior ó maior e o menor ó menor.

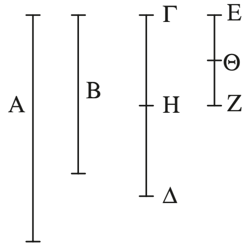
Pois ben, sexan ΓΔ e EZ os números menores dos que gardan a mesma razón que A e B; digo que ΓΔ mide as mesmas veces a A que EZ a B.

Pois ben, ΓΔ non é partes de A; pois ben, se é posible, séxao; logo, tamén, EZ é as mesmas partes de B que ΓΔ de A[72].

---

69 Proposición VII, 17.
70 Proposición VII, 18.
71 Proposición V, 7.
72 Proposición VII, 13 e Definición VII, 20.

Logo, cantas partes hai en ΓΔ de A, tantas partes hai tamén en EZ de B.



Divídase ΓΔ nas partes ΓH e HΔ de A, mentres que EZ nas partes EΘ e ΘZ de B; entón, a cantidade de ΓH e HΔ será igual á cantidade de EΘ e ΘZ.

E, dado que os números ΓH e HΔ son iguais entre si, e EΘ e ΘZ son tamén números iguais entre si, e é igual a cantidade de ΓH e HΔ á cantidade de EΘ e ΘZ, logo, como ΓH é a EΘ, así HΔ a ΘZ. Logo, tamén como un dos antecedentes a un dos consecuentes, así serán todos os antecedentes a todos os consecuentes[73].

Logo, como ΓH é a EΘ, así ΓΔ a EZ; logo, ΓH e EΘ, sendo menores que eles, están na mesma razón que ΓΔ e EZ; o que, sen dúbida, é imposible —pois suponse que ΓΔ e EZ son os menores dos que gardan a mesma razón que eles.

Logo, ΓΔ non é partes de A; logo, é parte[74]. E EZ é a mesma parte de B que ΓΔ de A; logo, ΓΔ mide a A as mesmas veces que EZ a B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 21

Os números primos entre si son os menores dos que gardan a mesma razón que eles.

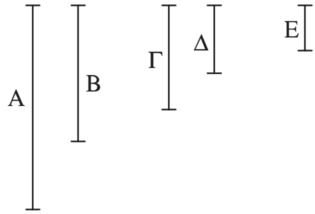
Sexan A e B números primos entre si; digo que A e B son os menores dos que gardan a mesma razón que eles.

---

73 Proposición VII, 12.

74 Proposición VII, 4.

Pois se non, haberá algúns números menores que A e B que estean na mesma razón que A e B. Sexan Γ e Δ.



Entón, dado que os números menores dos que gardan a mesma razón miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[75] —o maior ó maior e o menor ó menor—, é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente, logo, Γ mide a A as mesmas veces que Δ a B.

Entón, cantas veces Γ mide a A, haxa tantas unidades en E.

Logo, tamén Δ mide a B segundo as unidades de E. E, dado que Γ mide a A segundo as unidades de E, logo, tamén E mide a A segundo as unidades de Γ[76]. Entón, polo mesmo, E tamén mide a B segundo as unidades de Δ.

Logo, E mide a A e B que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible[77].

Logo, non haberá ningúns números menores que A e B que estean na mesma razón que A e B.

Logo, A e B son os menores dos que gardan a mesma razón que eles; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 22

Os números menores dos que gardan a mesma razón que eles son primos entre si.

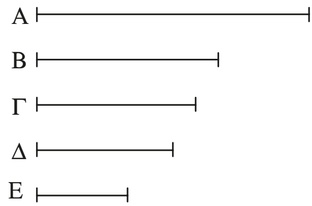
Sexan A e B os números menores dos que gardan a mesma razón que eles; digo que A e B son primos entre si.

Pois se non son primos entre si, algún número mediraos.

---

75 Proposición VII, 20.
76 Proposición VII, 16.
77 Definición VII, 12.

Mídaos e sexa Γ. E cantas veces Γ mide a A, haxa tantas unidades en Δ, mentres que cantas veces Γ mide a B, haxa tantas unidades en E.



Dado que Γ mide a A segundo as unidades de Δ, logo, Γ ó multiplicar a Δ fixo A[78]. Entón, polo mesmo, tamén Γ ó multiplicar a E fixo B.

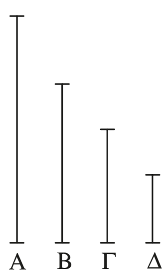
Entón, o número Γ ó multiplicar ós dous números Δ e E fixo A e B; logo, como Δ é a E, así A a B[79]; logo, Δ e E, sendo menores que eles, están na mesma razón que A e B; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningún número medirá ós números A e B. Logo, A e B son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 23

Se dous números son primos entre si, o número que mide a un deles será primo con respecto ó que queda.

Sexan A e B dous números primos entre si, e mida a A un número Γ; digo que Γ e B son primos entre si.



[78] Definición VII, 15.
[79] Proposición VII, 17.

Pois se Γ e Β non son primos entre si, algún número medirá a Γ e Β[80]. Mídaos e sexa Δ.

Dado que Δ mide a Γ, mentres que Γ mide a Α, logo, tamén Δ mide a Α.

Pero mide tamén a Β; logo, Δ mide a Α e Β que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, ningún número medirá a Γ e Β.

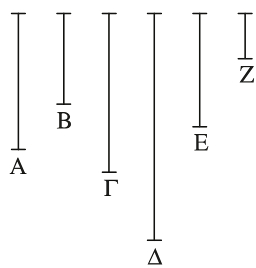
Logo, Γ e Β son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 24

Se dous números son primos con respecto a un número, tamén o produto daqueles será primo con respecto ó mesmo.

Pois ben, sexan os dous números Α e Β primos con respecto a un número Γ e ó multiplicar Α a Β faga Δ; digo que Γ e Δ son primos entre si.

Pois se Γ e Δ non son primos entre si, un número medirá a Γ e Δ[81]. Mídaos e sexa Ε.



E, dado que Γ e Α son primos entre si e un número Ε mide a Γ, logo, Α e Ε son primos entre si[82].

Entón, cantas veces Ε mide a Δ, haxa tantas unidades en Ζ; logo, tamén Ζ mide a Δ segundo as unidades de Ε[83].

80 Definición VII, 12.
81 Definición VII, 12.
82 Proposición VII, 23.
83 Proposición VII, 16.

Logo, E ó multiplicar a Z fixo Δ. Pero, efectivamente, tamén A ó multiplicar a B fixo Δ; logo, o produto[84] de E e Z é igual ó de A e B.

Pero se o produto dos extremos é igual ó dos medios, os catro números son proporcionais[85]; logo, como E é a A, así B a Z.

Pero A e E son primos, e os primos tamén son os menores[86], e os números menores dos que gardan a mesma razón que eles miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón —o maior ó maior e o menor ó menor[87], é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, E mide a B.

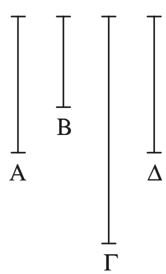
Pero mide tamén a Γ; logo, E mide a B e Γ que son primos entre si; o que, sen dúbida é imposible. Logo, ningún número medirá ós números Γ e Δ.

Logo, Γ e Δ son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 25

Se dous números son primos entre si, o produto dun deles[88] será primo con respecto ó que queda.

Sexan A e B dous números primos entre si e A ó multiplicarse a si mesmo faga Γ; digo que B e Γ son primos entre si.



[84] Nota 9 (Definición VII, 16): en grego «o de Ε e Ζ».
[85] Proposición VII, 19.
[86] Proposición VII, 21.
[87] Proposición VII, 20.
[88] Sobreenténdese, «multiplicado por si mesmo». Esta proposición é un caso particular da anterior ó tomar un número repetido que sexa primo con respecto a outro.

Pois ben, fágase Δ igual a A. Dado que A e B son primos entre si, mentres que A igual a Δ, logo, tamén Δ e B son primos entre si.

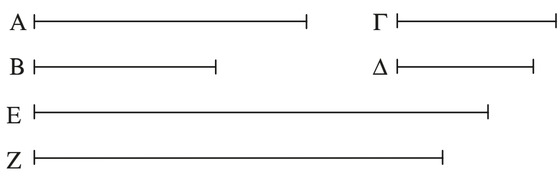
Logo, tanto Δ como A son primos con respecto a B; logo, tamén o produto de Δ e A será primo con respecto a B[89]. Pero o número produto de Δ e A é Γ.

Logo, Γ e B son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 26

Se dous números son primos con respecto a dous números —un e outro con respecto a cada un deles—, tamén os produtos daqueles serán primos entre si.

Pois ben, sexan A e B dous números primos con respecto a dous números Γ e Δ —un e o outro con respecto a cada un deles—, e A ó multiplicar a B faga E, mentres que Γ ó multiplicar a Δ faga Z; digo que E e Z son primos entre si.



Pois, dado que tanto A como B son primos con respecto a Γ, logo, tamén o produto de A e B será primo con respecto a Γ[90].

Pero o produto de A e B é E; logo, tamén E e Γ son primos entre si. Entón, polo mesmo, tamén Δ e E son primos entre si.

Logo, tanto Γ como Δ son primos con respecto a E. Logo, tamén o produto de Γ e Δ será primo con respecto a E.

Pero o produto de Γ e Δ é Z. Logo, E e Z son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

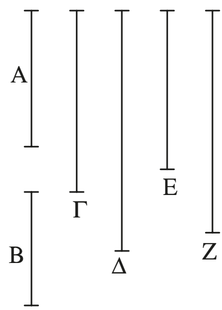
89 Proposición VII, 24.
90 Proposición VII, 24.

PROPOSICIÓN 27

Se dous números son primos entre si e cada un ó multiplicarse a si mesmo fai un número, os produtos daqueles serán primos entre si e, se os do principio ó multiplicar ós produtos fan uns números, tamén aqueles serán primos entre si*[91]*.

Sexan A e B dous números primos entre si, e A ó multiplicarse a si mesmo faga Γ, mentres que ó multiplicar a Γ faga Δ e, por outra parte, B ó multiplicarse a si mesmo faga E, mentres que ó multiplicar a E faga Z; digo que tanto Γ e E como Δ e Z son primos entre si.

Pois dado que A e B son primos entre si, e A ó multiplicarse a si mesmo fixo Γ, logo, Γ e B son primos entre si[92].



Entón, dado que Γ e B son primos entre si, e B ó multiplicarse a si mesmo fixo E, logo, Γ e E son primos entre si.

Asemade, dado que A e B son primos entre si, e B ó multiplicarse a si mesmo fixo E, logo, A e E son primos entre si.

Entón, dado que os dous números A e Γ son primos con respecto ós dous números B e E —un e o outro con respecto a cada un— logo, tamén o produto de A e Γ é primo con respecto ó produto de B e E[93].

---

[91] Nos manuscritos aparece a seguinte frase que Heiberg considera que é unha interpolación: «e sempre ocorre isto con respecto ós extremos».

[92] Proposición VI, 25.

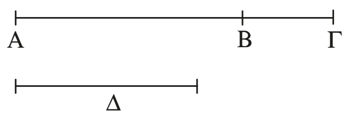
[93] Proposición VI, 26.

E Δ é o produto de A e Γ, mentres que Z o de B e E. Logo, Δ e Z son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 28

Se dous números son primos entre si, tamén a súa suma será número primo con respecto a cada un deles; e, se a suma é número primo con respecto a un calquera deles, tamén os números do principio serán primos entre si.

Pois ben, súmense os dous números primos entre si AB e BΓ; digo que a suma, AΓ, é número primo tanto con respecto a AB como a BΓ.



Pois se non son primos entre si ΓA e AB, algún número medirá a ΓA e AB. Mídaos e sexa Δ.

Entón, dado que Δ mide a ΓA e AB, logo, tamén medirá ó resto[94], BΓ. Pero mide tamén a BA; logo Δ mide a AB e BΓ que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible[95].

Logo, ningún número medirá ós números ΓA e AB; logo, ΓA e AB son primos entre si.

Entón, polo mesmo, tamén AΓ e ΓB son primos entre si. Logo, ΓA é primo tanto con respecto a AB como a BΓ.

Sexan agora ΓA e AB primos entre si; digo que tamén AB e BΓ son primos entre si.

Pois se AB e BΓ non son primos entre si, algún número medirá a AB e BΓ. Mídaos e sexa Δ.

E, dado que Δ mide tanto a AB como a BΓ, logo, tamén medirá ó total ΓA.

94 Nota 12 (Proposición VII, 1).
95 Definición VII, 12.

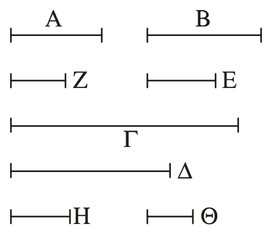
Pero mide tamén a AB; logo, Δ mide a ΓA e AB que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningún número medirá ós números AB e BΓ; logo, AB e BΓ son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 29

Todo número primo é primo con respecto a todo número ó que non mide.

Sexa o número primo A e non mida a B; digo que B e A son primos entre si.



Pois se B e A non son primos entre si, mediraos algún número. Mídaos Γ.

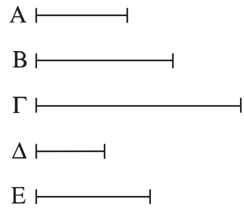
Dado que Γ mide a B pero A non mide a B, logo, Γ non é o mesmo que A. E, dado que Γ mide a B e A, logo, tamén, non sendo o mesmo que el, mide a A que é primo; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningún número medirá a B e A. Logo, A e B son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 30

Se dous números ó multiplicárense entre si fan un e algún número primo mide ó produto daqueles, tamén medirá a un dos do principio.

Pois ben, os dous números A e B ó multiplicárense entre si fagan Γ, e a Γ mídao un número primo, Δ; digo que Δ mide a un dos números A ou B.



Pois ben, non mida a A; e Δ é primo; logo, A e Δ son primos entre si[96].

E, cantas veces mide Δ a Γ, tantas unidades haxa en E.

Entón, dado que Δ mide a Γ segundo as unidades de E, logo, Δ ó multiplicar a E fixo Γ[97].

Pero, efectivamente, tamén A ó multiplicar a B fixo Γ; logo, o produto de Δ e E é igual ó de A e B.

Logo, como Δ é a A, así B a E[98].

Pero Δ e A son primos[99] e os primos tamén son os menores[100], e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[101] —o maior ó maior e o menor ó menor, é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, Δ mide a B.

De xeito semellante poderemos demostrar que, se non mide a B, medirá a A.

Logo, Δ mide a un dos números A ou B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 31

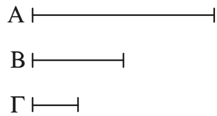
Todo número composto é medido por algún número primo.

Sexa o número composto A; digo que A é medido por algún número primo.

---

96 Proposición VII, 29.
97 Definición VII, 15.
98 Proposición VII, 19.
99 Δ e A son primos entre si.
100 Proposición VII, 21.
101 Proposición VII, 20.

Pois ben, dado que A é un número composto, medirao algún número. Mídao e sexa B.



E, se B é primo, resultaría o proposto.

Pero se é composto, medirao algún número.

Mídao e sexa Γ. E, dado que Γ mide a B, e B mide a A, logo, tamén Γ mide a A. E, se Γ é primo, resultaría o proposto. Pero se é composto, algún número medirao.

Entón, ó continuar tal investigación, atoparase algún número primo que o medirá. Pois se non se atopa, medirán ó número A infinitos números, dos cales cada un será menor que o outro; o que, sen dúbida, é imposible nos números.

Logo, atoparase algún número primo que medirá ó anterior a el mesmo, que tamén medirá a A.

Logo, todo número composto é medido por algún número primo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 32

Todo número ou é primo ou é medido por algún número primo.

Sexa o número A; digo que A ou é primo ou é medido por algún número primo.

Entón, se A é primo, resultaría o proposto.

Pero se é composto, medirao algún número primo[102].

[102] Proposición VII, 31.

Logo, todo número ou é primo ou é medido por algún número primo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

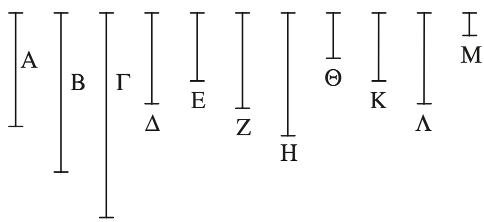
PROPOSICIÓN 33

Dados varios números, atopar os menores dos que gardan a mesma razón que eles.

Sexan varios números dados A, B e Γ; é preciso, entón, atopar os menores dos que gardan a mesma razón que A, B e Γ.

Pois ben A, B e Γ ou son primos entre si ou non. Se, efectivamente, A, B e Γ son primos entre si, son os menores dos que gardan a mesma razón que eles[103].

Pero se non, tómese Δ, a máxima medida común de A, B e Γ[104], e cantas veces Δ mide a cada un dos números A, B e Γ, haxa tantas unidades en cada un dos números E, Z e H.



Logo, tamén cada un dos números E, Z e H mide respectivamente a cada un dos números A, B e Γ segundo as unidades de Δ[105]. Logo, E, Z e H miden as mesmas veces a A, B e Γ; logo, E, Z e H está na mesma razón que A, B e Γ[106].

Digo agora que tamén son os menores[107].

Pois, se E, Z e H non son os menores dos que gardan a mesma razón que A, B e Γ, haberá números menores que E, Z e H que estean na mesma razón que A, B e Γ.

103 Proposición VII, 21.
104 Proposición VII, 3.
105 Proposición VII, 16.
106 Proposición VII, 18.
107 Sobreenténdese, «que están na mesma razón que A, B e Γ».

Sexan Θ, K e Λ; logo, Θ mide a A as mesmas veces que cada un dos números K e Λ respectivamente a cada un dos números B e Γ[108].

Pero cantas veces Θ mide a A, haxa tantas unidades en M; logo, tamén cada un dos números K e Λ mide a cada un dos números B e Γ respectivamente segundo as unidades de M.

E, dado que Θ mide a A segundo as unidades de M, logo, tamén M mide a A segundo as unidades de Θ. Entón, polo mesmo, M tamén mide a cada un dos números B e Γ respectivamente segundo as unidades de cada un dos números K e Λ; logo, M mide a A, B e Γ.

E, dado que Θ mide a A segundo as unidades de M, logo, Θ ó multiplicar a M fixo A[109]. Entón, polo mesmo, tamén E ó multiplicar a Δ fixo A.

Logo, o produto de E e Δ é igual ó de Θ e M. Logo, como E é a Θ, así M a Δ[110].

Pero E é maior que Θ. Logo, tamén M é maior que Δ[111]. E mide a A, B e Γ; o que, sen dúbida, é imposible; pois suponse que Δ é a máxima medida común de A, B e Γ.

Logo, non haberá ningúns números menores que E, Z e H que estean na mesma razón que A, B e Γ.

Logo, E, Z e H son os menores dos que gardan a mesma razón que A, B e Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 34

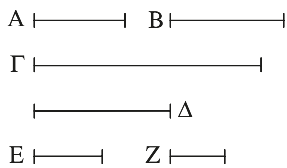
Dados dous números, atopar o número menor ó que miden.

Sexan os dous números dados A e B; é preciso, entón, atopar o número menor ó que miden.

Pois ben, A e B ou son primos entre si ou non.

[108] Proposición VII, 20.
[109] Definición VII, 15.
[110] Proposición VII, 19.
[111] Proposición VII, 13 e Proposición V, 14.

Sexan, primeiro, A e B primos entre si, e A ó multiplicar a B faga Γ; logo, tamén B ó multiplicar a A fai Γ[112]. Logo A e B miden a Γ[113].



Digo agora que tamén é o menor[114].

Pois se non, medirán A e B a algún número que sexa menor que Γ. Midan a Δ.

E, cantas veces A mide a Δ, haxa tantas unidades en E, mentres que cantas veces B mide a Δ, haxa tantas unidades en Z; logo, A ó multiplicar a E fai Δ, mentres que B ó multiplicar a Z fai Δ; logo, o produto de A e E é igual ó de B e Z. Logo, como A é a B, así Z a E[115].

Pero A e B son primos[116], e os primos tamén son os menores[117], e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[118] —o maior ó maior e o menor ó menor—; logo, B mide a E como o consecuente ó consecuente.

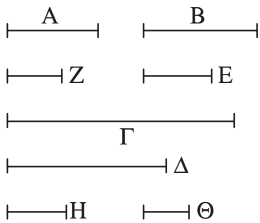
E, dado que A ó multiplicar a B e E fai Γ e Δ, logo, como B é a E, así Γ a Δ[119].

Pero B mide a E; logo, tamén Γ mide a Δ[120], o maior ó menor; o que, sen dúbida é imposible.

Logo, A e B non miden a ningún número que sexa menor que Γ. Logo, Γ é medido por A e B, e é o menor.

[112] Proposición VII, 16.
[113] Definición VII, 15.
[114] Sobreenténdese «ó que miden».
[115] Proposición VII, 19.
[116] Sobreenténdese «entre si».
[117] Proposición VII, 21.
[118] Proposición VII, 20.
[119] Proposición VII, 17.
[120] Definición VII, 21.

Non sexan agora A e B primos entre si, e tómense Z e E, os números menores dos que gardan a mesma razón que A e B[121]; logo, o produto de A e E é igual ó de B e Z.



E A ó multiplicar a E faga Γ; logo, tamén B ó multiplicar a Z fai Γ; logo, A e B miden a Γ.

Digo agora que tamén é o menor.

Pois se non, A e B medirán a algún número que sexa menor que Γ. Midan a Δ.

E, cantas veces A mide a Δ, haxa tantas unidades en H, mentres que cantas veces B mide a Δ, haxa tantas unidades en Θ.

Logo, A ó multiplicar a H fai Δ, mentres que B ó multiplicar a Θ fai Δ. Logo, o produto de A e H é igual ó de B e Θ; logo, como A é a B, así Θ a H.

Pero como A é a B, así Z a E. Logo, tamén como Z a E, así Θ a H.

Pero Z e E son os menores, e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón —o maior ó maior e o menor ó menor—; logo, E mide a H.

E, dado que A ó multiplicar a E e H fai Γ e Δ, logo, como E é a H, así Γ a Δ.

Pero E mide a H; logo, tamén Γ mide a Δ, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, A e B non medirán a ningún número que sexa menor que Γ.

Logo, Γ é medido por A e B, e é o menor; o que, xustamente, era preciso demostrar[122].

---

121 Proposición VII, 33.

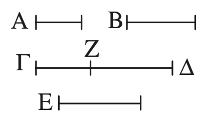
122 Proba que, se a, b son dous números e d = m.c.d.(a, b), entón m.c.m.(a, b) = $a(b/d)$ = $(a/d)b$. É dicir $ab = dg$, sendo d = m.c.d.(a, b) e g = m.c.m.(a, b).

PROPOSICIÓN 35

Se dous números miden a algún número, tamén o número menor medido por eles medirá ó mesmo.

Pois ben, dous números A e B midan a un número ΓΔ e ó menor, E; digo que tamén E mide a ΓΔ.

Pois se E non mide a ΓΔ, deixe E, medindo a ΔZ, a ΓZ menor que el mesmo.



E, dado que A e B miden a E, e E mide a ΔZ, logo, tamén A e B medirán a ΔZ.

E miden tamén ó total, ΓΔ; logo, tamén medirán ó resto, ΓZ, que é menor que E; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, non ocorre que E non mida a ΓΔ; logo, mídeo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

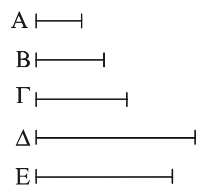
PROPOSICIÓN 36

Dados tres números, atopar o número menor ó que miden.

Sexan os tres números dados A, B e Γ; é preciso, entón, atopar o número menor ó que miden.

Pois ben, tómese Δ, o número menor medido polos dous números A e B[123].

Entón Γ ou mide a Δ ou non o mide. Mídao, primeiro.



[123] Proposición VII, 34.

Pero A e B miden tamén a Δ; logo, A, B e Γ miden a Δ.

Digo agora que tamén é o menor.

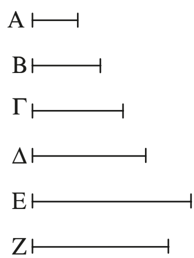
Pois se non, medirán A, B e Γ a un número que sexa menor que Δ. Midan a E.

Dado que A, B e Γ miden a E, logo, tamén A e B miden a E. Logo, tamén o número menor medido por A e B medirá a E[124].

Pero o número menor medido por A e B é Δ; logo, Δ medirá a E, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo A, B e Γ non medirán a ningún número que sexa menor que Δ; logo, Δ é o menor ó que miden A, B e Γ.

Agora, ademais, non mida Γ a Δ, e tómese E, o número menor medido por Γ e Δ.



Dado que A e B miden a Δ, pero Δ mide a E, logo, tamén A e B miden a E.

Pero tamén Γ mide a E; logo, tamén A, B e Γ miden a E.

Digo agora que tamén é o menor.

Pois se non, A, B e Γ medirán a algún que sexa menor que E. Midan a Z.

Dado que A, B e Γ miden a Z, logo, tamén A e B miden a Z; logo, tamén o número menor medido por A e B medirá a Z.

E o número menor medido por A e B é Δ; logo, Δ mide a Z.

Pero tamén mide Γ a Z; logo, Δ e Γ miden a Z; en consecuencia, tamén o número menor medido por Δ e Γ medirá a Z.

Pero o número menor medido por Γ e Δ é E; logo, E mide a Z, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

[124] Proposición VII, 35.

Logo A, B e Γ non medirán a ningún número que sexa menor que E.

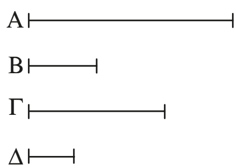
Logo, E é medido por A, B e Γ, e é o menor; o que, xustamente, era preciso demostrar[125].

PROPOSICIÓN 37

Se un número é medido por algún número, o número medido terá unha parte homónima[126] do que o mide.

Pois ben, sexa medido o número A por un número, B; digo que A ten unha parte homónima de B.

Pois cantas veces B mide a A, haxa tantas unidades en Γ.



Dado que B mide a A segundo as unidades de Γ e que a unidade Δ mide tamén ó número Γ segundo as súas unidades, logo, a unidade Δ mide as mesmas veces ó número Γ que B a A.

Logo, por alternancia, a unidade Δ mide ó número B as mesmas veces que Γ a A[127]; logo, a parte que é a unidade Δ do número B, a mesma parte é tamén Γ de A.

Pero a unidade Δ é parte do número B homónima del; logo, tamén Γ é parte de A homónima de B.

En consecuencia, A ten a parte Γ que é homónima de B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

125 Proba que se *a*, *b*, *c* son tres números e *d* = m.c.m.(*a*, *b*), entón m.c.m.(*a*, *b*, *c*) = m.c.m.(*d*, *c*).

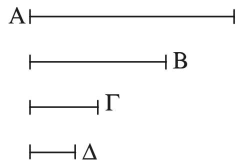
126 ὁμώνιμον, «de igual nome». Se B mide a A entón hai un número Γ, homónimo de B, que mide a A. É dicir, Γ sumado B veces dá A. Por exemplo, se 4 mide a A, hai una parte de A, Γ, tal que Γ + Γ + Γ + Γ = A. Γ é parte de A homónima de 4.

127 Proposición VII, 15.

PROPOSICIÓN 38

Se un número ten unha parte calquera, será medido por un número homónimo da parte.

Pois ben, teña A unha parte calquera, B, e sexa o número Γ homónimo da parte B; digo que Γ mide a A.



Pois, dado que B é parte de A homónima de Γ e que a unidade Δ é tamén parte de Γ homónima del, logo, a parte que é a unidade Δ do número Γ, a mesma parte é tamén B de A; logo, a unidade Δ mide ó numero Γ as mesmas veces que B a A.

Logo, por alternancia, a unidade Δ mide ó número B as mesmas veces que Γ a A[128].

Logo, Γ mide a A; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 39

Atopar un número que, sendo o menor, teña as partes dadas.

Sexan as partes dadas A, B e Γ; é preciso, entón atopar un número que, sendo o menor, teña as partes A, B e Γ.

Pois ben, sexan Δ, E e Z números homónimos das partes A, B e Γ, e tómese H, o número menor medido por Δ, E e Z[129].

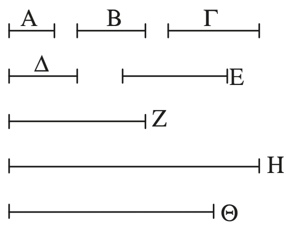
Logo, H ten partes homónimas de Δ, E e Z[130].

Pero A, B e Γ son partes homónimas de Δ, E e Z; logo, H ten as partes A, B e Γ.

Digo agora que tamén é o menor.

---

[128] Proposición VII, 15.
[129] Proposición VII, 36.
[130] Proposición VII, 37.



Pois se non, haberá algún número menor que H que terá as partes A, B e Γ. Sexa Θ.

Dado que Θ ten as partes A, B e Γ, logo, Θ será medido polos números homónimos das partes A, B e Γ[131].

Pero Δ, E e Z son números homónimos das partes A, B e Γ; logo, Θ é medido por Δ, E e Z. E é menor que H; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, non haberá ningún número menor que H que teña as partes A, B e Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

131 Proposición VII, 38.

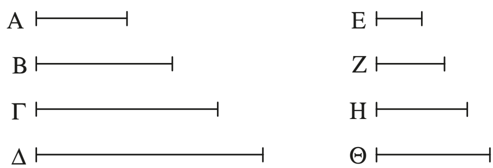
LIBRO VIII

PROPOSICIÓN 1

Se cantos números se queira son continuamente proporcionais*[1] *e os seus extremos son primos entre si, son os menores dos que gardan a mesma razón que eles.

Sexan A, B, Γ e Δ varios números continuamente proporcionais e os seus extremos, A e Δ, sexan primos entre si; digo que A, B, Γ e Δ son os menores dos que gardan a mesma proporción que eles.

Pois se non, sexan E, Z, H e Θ menores que A, B, Γ e Δ, estando na mesma razón que eles.



E, dado que A, B, Γ e Δ están na mesma razón que E, Z, H e Θ, e que a súa cantidade é igual á cantidade de E, Z, H e Θ, logo, por igualdade, como A é a Δ, E a Θ[2].

Pero A e Δ son primos, e os primos tamén os menores[3], e os números menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón —o maior, ó maior e o menor ó menor[4], é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente.

Logo, A mide a E, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo E, Z, H e Θ, sendo menores que A, B, Γ e Δ, non están na mesma razón que eles.

1 Coincide co concepto actual de «progresión xeométrica».
2 Proposición VII, 14.
3 Proposición VII, 21.
4 Proposición VII, 20.

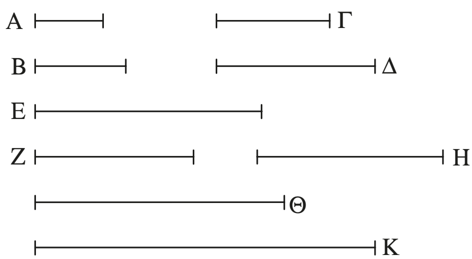
Logo, A, B, Γ e Δ son os menores dos que gardan a mesma razón que eles; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 2

Atopar cantos números un propoña, os menores continuamente proporcionais na razón dada.

Sexa a razón dada nos números menores a de A con B[5]; é preciso, entón, atopar cantos números un propoña, os menores continuamente proporcionais na razón de A con B.

Propóñanse catro: A ó multiplicarse a si mesmo faga Γ, mentres que ó multiplicar a B faga Δ, e ademais, B ó multiplicarse a si mesmo faga E e, ademais, A ó multiplicar a Γ, Δ e E faga Z, H e Θ, mentres que B ó multiplicar a E faga K.



E, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai Γ, mentres que ó multiplicar a B fai Δ, logo, como A é a B, así Γ a Δ[6].

Asemade, dado que A ó multiplicar a B fai Δ, mentres que B ó multiplicarse a si mesmo fai E, logo, cada un dos números A e B, ó multiplicar a B fai Δ e E respectivamente. Logo, como A é a B, así Δ a E[7].

Pero como A a B, así Γ a Δ; logo, tamén como Γ a Δ, Δ a E[8].

E, dado que A ó multiplicar a Γ e Δ fai Z e H, logo, como Γ é a Δ, así Z a H.

---

5 Proposición VII, 33.
6 Proposición VII, 17.
7 Proposición VII, 18.
8 Véxase a Nota 55 (Proposición VII, 14).

Pero como Γ a Δ, así era A a B; logo, tamén como A a B, Z a H.

Asemade, dado que A ó multiplicar a Δ e E fai H e Θ, logo, como Δ é a E, H a Θ.

Pero, como Δ a E, A a B. Logo, tamén como A a B, así H a Θ.

E, dado que A e B ó multiplicaren a E fan Θ e K, logo, como A é a B, así Θ a K.

Pero como A a B, así Z a H, e H a Θ. Logo, tamén como Z a H, así H a Θ, e Θ a K; logo, Γ, Δ e E, e Z, H, Θ e K son proporcionais na razón de A con B.

Digo agora que tamén son os menores. Pois dado que A e B son os menores dos que gardan a mesma razón que eles e os menores dos que gardan a mesma razón son primos entre si[9], logo, A e B son primos entre si.

E, cada un dos números A e B ó multiplicarse a si mesmo fai Γ e E respectivamente, mentres que ó multiplicar a cada un dos números Γ e E fai Z e K respectivamente; logo, Γ e E, e Z e K son tamén primos entre si[10].

E, se varios números son continuamente proporcionais e os seus extremos son primos entre si, son os menores dos que gardan a mesma razón que eles[11].

Logo, tamén Γ, Δ e E, e Z, H, Θ e K son os menores dos que gardan a mesma razón que A e B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se tres números continuamente proporcionais son os menores dos que gardan a mesma razón que eles, os seus extremos son cadrados e, se son catro, cubos[12].

---

9 Proposición VII, 22.

10 Proposición VII, 27.

11 Proposición VIII, 1.

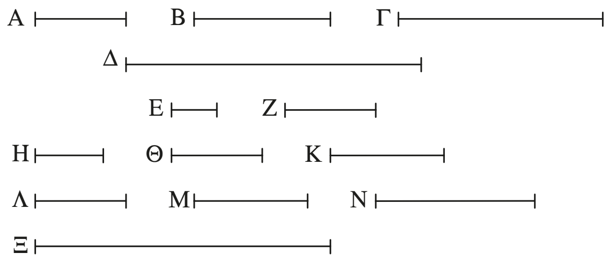
12 Probou que os menores que gardan a mesma razón que p con q —sendo p e q primos entre si— son p^2, pq e q^2 se son tres, e p^3, p^2q, pq^2 e q^3 se son catro. Dá por probado que, en xeral, son p^n, $p^{(n-1)}q$, ..., $pq^{(n-1)}$, q^n se son $n + 1$.

PROPOSICIÓN 3

Se varios números continuamente proporcionais son os menores dos que gardan a mesma razón que eles, os seus extremos son primos entre si.

Sexan Α, Β, Γ e Δ varios números continuamente proporcionais, os menores dos que gardan a mesma razón que eles; digo que os seus extremos, Α e Δ, son primos entre si.

Pois ben, tómense por unha parte Ε e Ζ, os dous números menores na razón de Α, Β, Γ e Δ, por outra, os tres números Η, Θ e Κ, e sucesivamente co incremento dun ata que a cantidade tomada resulte igual á cantidade de Α, Β, Γ e Δ. Tómense e sexan Λ, Μ, Ν e Ξ[13].



E, dado que Ε e Ζ son os menores dos que gardan a mesma razón que eles, son primos entre si[14].

E dado que cada un dos números Ε e Ζ ó multiplicarse a si mesmo fai Η e Κ respectivamente, mentres que ó multiplicar a cada un dos números Η e Κ fai Λ e Ξ respectivamente[15], logo, tamén Η e Κ, e Λ e Ξ son primos entre si[16].

E, dado que Α, Β, Γ e Δ son os menores dos que gardan a mesma razón que eles, pero tamén Λ, Μ, Ν e Ξ son os menores dos que están na mesma razón que Α, Β, Γ e Δ, e a cantidade de Α, Β, Γ e Δ é igual á cantidade de Λ, Μ, Ν e Ξ, logo, cada un dos números Α, Β, Γ e Δ é igual a Λ, Μ, Ν e Ξ respectivamente; logo, Α é igual a Λ, mentres que Δ a Ξ.

---

13 Proposición VIII, 2.
14 Proposición VII, 22.
15 Proposición VIII, 2. Corolario.
16 Proposición VII, 27.

E Λ e Ξ son primos entre si. Logo, tamén A e Δ son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

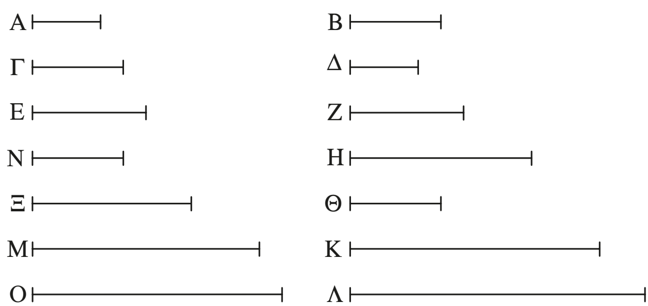
Dadas varias razóns nos números menores, atopar os números menores continuamente proporcionais nas razóns dadas.

Sexan as razóns dadas nos números menores a de A con B, a de Γ con Δ, e, ademais, a de E con Z; é preciso, entón, atopar os números menores continuamente proporcionais na razón de A con B, na de Γ con Δ e, ademais, na de E con Z[17].

Pois ben, tómese H, o número menor medido por B e Γ[18]. E, cantas veces B mide a H, tantas veces tamén mida A a Θ, e cantas veces Γ mide a H, tantas veces tamén mida Δ a K.

Pero E ou mide ou non mide a K.

Mídao primeiro. E, cantas veces mide E a K, tantas veces tamén mida Z a Λ.



E, dado que A mide a Θ as mesmas veces que B a H, logo, como A é a B, así Θ a H[19]. Entón, polo mesmo, tamén como Γ a Δ, así H a K e, ademais, como E a Z, así K a Λ; logo, Θ, H, K e

[17] Aínda que en grego utiliza a mesma palabra, ἐξῆς «continuamente», é claro que aquí non pode referirse a unha progresión xeométrica pois a razón cambia para cada termo. Refírese a que, se temos diferentes razóns A/B, Γ/Δ, E/Z, ..., podemos atopar os números Θ, H, K, Λ, ... —un máis que o número de razóns de partida— con Θ/H = A/B, H/K = Γ/Δ, K/Λ = E/Z, ... e tal que Θ, H, K, Λ, ... son os menores que verifican esas proporcións.

[18] Proposición VII, 34.

[19] Proposición VII, 13 e Definición VII, 20.

Λ son continuamente proporcionais na razón de A con B, na de Γ con Δ e, ademais, na de E con Z.

Digo que tamén son os menores. Pois se Θ, H, K e Λ non son os menores continuamente proporcionais nas razóns de A con B, na de Γ con Δ e na de E con Z, sexan N, Ξ, M e O.

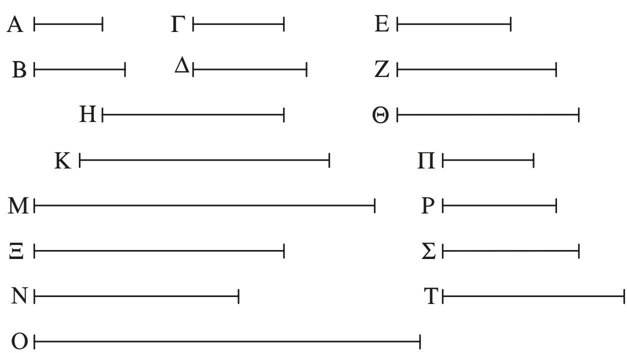
E, dado que como A é a B, así N a Ξ, mentres que A e B son os menores, e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón —o maior ó maior e o menor ó menor[20], é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—, logo, B mide a Ξ.

Entón, polo mesmo, tamén Γ mide a Ξ; logo, B e Γ miden a Ξ; logo, tamén o menor medido por B e Γ medirá a Ξ[21].

E H é o menor medido por B e Γ; logo, H mide a Ξ, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, non haberá ningúns números menores que Θ, H, K e Λ continuamente na razón de A con B, na de Γ con Δ e, ademais, na de E con Z.

Non mida agora E a K. E tómese M, o menor número medido por E e K.



E, cantas veces K mide a M, tantas veces tamén cada un dos números Θ e H mida a N e Ξ respectivamente e, cantas veces E mide a M, tantas veces tamén Z mida a O.

20 Proposición VII, 20.
21 Proposición VII, 35.

Dado que Θ mide a N as mesmas veces que H a Ξ, logo, como Θ é a H, así N a Ξ.

Pero como Θ é a H, así A a B; logo, tamén como A é a B, así N a Ξ.

Entón polo mesmo, tamén como Γ a Δ, así Ξ a M.

Asemade, dado que E mide as mesmas veces a M que Z a O, logo, como E é a Z, así M a O; logo, N, Ξ, M e O son continuamente proporcionais nas razóns de A con B, de Γ con Δ e, ademais, de E con Z.

Digo agora que tamén son os menores nas razóns AB, ΓΔ e EZ[22].

Pois se non, haberá algúns números menores que N, Ξ, M e O continuamente proporcionais nas razóns AB, ΓΔ e EZ.

Sexan Π, P, Σ e T. E, dado que como Π é a P, así A a B, mentres que A e B son os menores, e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón que eles —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—, logo, B mide a P.

Entón, polo mesmo, tamén Γ mide a P; logo, B e Γ miden a P. Logo, tamén o menor medido por B e Γ medirá a P. E o menor medido por B e Γ é H; logo, H mide a P. E como H é a P, así K a Σ[23]; logo, tamén K mide a Σ[24].

Pero mide tamén E a Σ; logo, E e K miden a Σ. Logo, tamén o menor medido por E e K medirá a Σ.

E o menor medido por E e K é M; logo, M mide a Σ, o maior ó menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, non haberá ningúns números menores que N, Ξ, M e O continuamente proporcionais nas razóns de A con B, de Γ con Δ e, ademais, de E con Z; logo, N, Ξ, M e O son os menores continuamente proporcionais nas razóns AB, ΓΔ e EZ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

22 Simplificación da expresión completa que utilizara ata aquí «a razón de A con B, de Γ con Δ e de E con Z».

23 Proposición VII, 13.

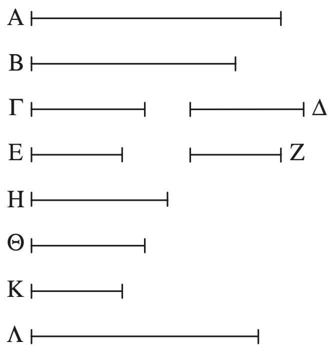
24 Definición VII, 20.

PROPOSICIÓN 5

***Os números planos gardan entre si a razón composta dos seus lados*[25].**

Sexan os números planos A e B e sexan os números Γ e Δ os lados de A, mentres que E e Z os de B[26]; digo que A garda con B unha razón composta dos seus lados.

Pois ben, dadas as razóns que gardan Γ con E, e Δ con Z, tómense H, Θ e K, os números menores continuamente nas razóns ΓE e ΔZ, de xeito que, como Γ é a E, así H a Θ, mentres que como Δ a Z, así Θ a K[27]. E, Δ ó multiplicar a E faga Λ.



E, dado que Δ ó multiplicar a Γ fai A, mentres que ó multiplicar a E fai Λ, logo, como Γ é a E, así A a Λ[28].

Pero, como Γ a E, así H a Θ; logo, tamén como H a Θ, así A a Λ.

Asemade, dado que E ó multiplicar a Δ fai Λ[29], pero tamén, efectivamente, ó multiplicar a Z fai B, logo, como Δ é a Z, así Λ a B.

Pero como Δ a Z, así Θ a K; logo, tamén como Θ a K, así Λ a B.

Pero, foi demostrado tamén que, como H a Θ, así A a Λ; logo, por igualdade, como H é a K, A a B[30], pero H garda con K a

---

25 Véxase a Nota 154 (Proposición VI, 23).
26 Definición VII, 16.
27 Proposición VIII, 4.
28 Proposición VII, 17.
29 Proposición VII, 16.
30 Proposición VII, 14.

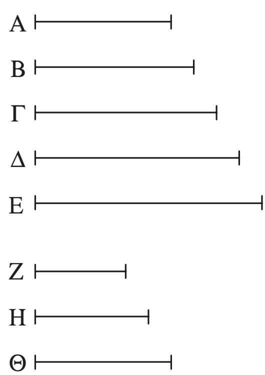
razón composta dos seus lados[31]; logo, tamén A garda con B a razón composta dos seus lados; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se varios números son continuamente proporcionais e o primeiro non mide ó segundo, tampouco ningún outro medirá a ningún.

Sexan A, B, Γ, Δ e E varios números continuamente proporcionais, e A non mida a B; digo que tampouco ningún outro medirá a ningún.

Efectivamente é evidente que A, B, Γ, Δ e E non se miden sucesivamente entre si; pois nin sequera A mide a B; digo agora que ningún outro medirá a ningún.



Pois se é posible, mida A a Γ. E cantos son A, B e Γ, tómense tantos Z, H e Θ, os números menores dos que gardan a mesma razón que A, B e Γ[32].

E, dado que Z, H e Θ están na mesma razón que A, B e Γ e que a cantidade de A, B e Γ é igual á cantidade de Z, H e Θ, logo, por igualdade, como A é a Γ, así Z a Θ[33].

---

31 Definición VI, 5 e Proposición VI, 23.

32 Proposición VII, 33.

33 Proposición VII, 14.

E, dado que como A é a B, así Z a H, e A non mide a B, logo, non mide tampouco Z a H[34]; logo, Z non é unha unidade; pois a unidade mide a todo número.

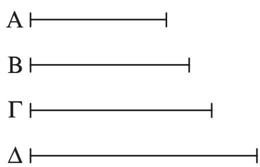
E Z e Θ son primos entre si[35]. E, como Z é a Θ, así A a Γ; logo, A tampouco mide a Γ.

De xeito semellante poderemos demostrar que tampouco ningún outro medirá a ningún; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Se varios números son continuamente proporcionais e o primeiro mide ó último, tamén medirá ó segundo.

Sexan A, B, Γ e Δ varios números continuamente proporcionais e mida A a Δ; digo que tamén A mide a B.



Pois se A non mide a B tampouco ningún outro medirá a ningún[36]; pero A mide a Δ. Logo, tamén A mide a B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 8

Se entre dous números caen números en proporción continua[37], cantos números caen entre eles en proporción continua, tantos tamén caerán en proporción continua entre os que gardan a mesma razón que eles.

---

[34] Definición VII, 20.

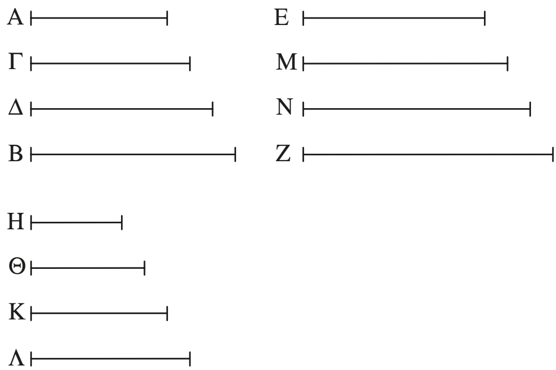
[35] Proposición VIII, 3.

[36] Proposición VIII, 6.

[37] O significado de κατὰ τὸ συνεχῆς ἀνάλογον, «en proporción continua», é o mesmo que o da expresión que utilizara ata aquí, ἑξῆς ἀνάλογον, que traducimos por «continuamente proporcionais».

Pois ben, entre os dous números A e B caian os números Γ e Δ en proporción continua, e fágase que, como A a B, así E a Z; digo que cantos números caen entre A e B en proporción continua, tantos tamén caerán entre E e Z en proporción continua.

Pois cantos sexan en cantidade A, B, Γ e Δ, tómense tantos H, Θ, K e Λ, os números menores dos que gardan a mesma razón que A, Γ, Δ e B[38]; logo, os seus extremos, H e Λ, son primos entre si[39].



E, dado que A, Γ, Δ e B están na mesma razón que H, Θ, K e Λ, e a cantidade de A, Γ, Δ e B é igual á cantidade de H, Θ, K e Λ, logo, por igualdade, como A é a B, así H a Λ[40].

Pero como A a B, así E a Z; logo, tamén como H a Λ, así E a Z.

Pero H e Λ son primos, e os primos tamén os menores[41], e os números menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[42] —o maior ó maior e o menor ó menor, é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—. Logo, H mide a E as mesmas veces que Λ a Z.

Agora, cantas veces H mide a E, tantas veces tamén mida cada un dos números Θ e K a M e N respectivamente; logo, H,

---

38 Proposición VII, 33.
39 Proposición VIII, 3.
40 Proposición VII, 14.
41 Proposición VII, 21.
42 Proposición VII, 20.

Θ, K e Λ miden as mesmas veces a E, M, N e Z. Logo, H, Θ, K e Λ están na mesma razón que E, M, N e Z[43].

Pero H, Θ, K e Λ están na mesma razón que A, Γ, Δ e B; logo, tamén A, Γ, Δ e B están na mesma razón que E, M, N e Z.

Pero A, Γ, Δ e B son continuamente proporcionais; logo, tamén E, M, N e Z son continuamente proporcionais.

Logo, cantos números caen entre A e B en proporción continua, tantos números tamén caen entre E e Z en proporción continua; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 9

Se dous números son primos entre si e entre eles caen números en proporción continua, cantos números caen entre eles en proporción continua, tantos tamén caerán en proporción continua entre cada un deles e a unidade.

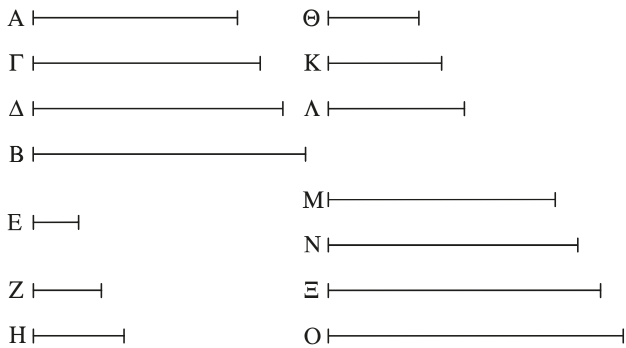
Sexan A e B dous números primos entre si, caian entre eles Γ e Δ en proporción continua e déixese aparte a unidade E; digo que cantos números caen entre A e B en proporción continua, tantos tamén caerán entre cada un dos números A e B e a unidade en proporción continua.

Pois ben, tómense por unha parte Z e H, os dous números menores que están na razón de A, Γ, Δ e B[44], por outra, os tres números Θ, K e Λ, e sucesivamente aumentando un ata que a cantidade deles resulte igual á cantidade de A, Γ, Δ e B[45]. Tómense e sexan M, N, Ξ e O.

Entón é evidente que Z ó multiplicarse a si mesmo fai Θ, mentres que ó multiplicar a Θ fai M e, por outra parte, H ó multiplicarse a si mesmo fai Λ, mentres que ó multiplicar a Λ fai O[46].

---

43 Definición VII, 20 e Proposición VII, 13.
44 Proposición VII, 33.
45 Proposición VIII, 2.
46 Proposición VIII, 2. Corolario.



E, dado que M, N, Ξ e O son os menores dos que gardan a mesma razón que Z e H, pero A, Γ, Δ e B son tamén os menores dos que gardan a mesma razón[47] que Z e H, e que a cantidade de M, N, Ξ e O é igual á cantidade de A, Γ, Δ e B, logo, cada un de M, N, Ξ e O é igual a A, Γ, Δ e B respectivamente.

Logo, M é igual a A, mentres que O a B. E, dado que Z ó multiplicarse a si mesmo fai Θ, logo, Z mide a Θ segundo as unidades de Z[48]. Pero a unidade E mide tamén a Z segundo as súas unidades; logo, a unidade E mide ó número Z as mesmas veces que Z a Θ. Logo, como a unidade E é ó número Z, así Z a Θ[49].

Asemade, dado que Z ó multiplicar a Θ fai M, logo, Θ mide a M segundo as unidades de Z.

Pero tamén a unidade E mide ó número Z segundo as súas unidades; logo, a unidade E mide ó número Z as mesmas veces que Θ a M. Logo, como a unidade E é ó número Z, así Θ a M.

Pero foi demostrado tamén que, como a unidade E é ó número Z, así Z a Θ; logo, tamén como a unidade E ó número Z, así Z a Θ, e Θ a M.

Pero M é igual a A; logo, como a unidade E é ó número Z, así Z a Θ, e Θ a A.

47 Proposición VIII, 1.
48 Definición VII, 15.
49 Proposición VII, 20.

Entón, polo mesmo, tamén como a unidade E ó número H, así H a Λ, e Λ a B.

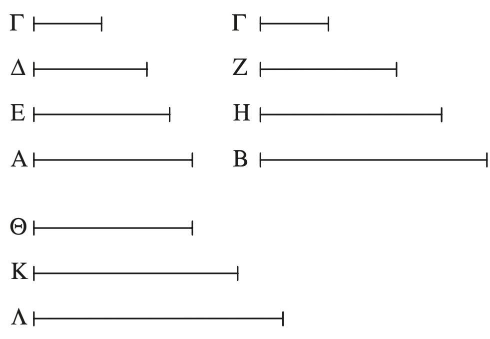
Logo, cantos números caen entre A e B en proporción continua, tantos números caen entre cada un dos números A e B e a unidade E en proporción continua; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 10

Se entre cada un de dous números e a unidade caen números en proporción continua, cantos números caen entre cada un deles e a unidade en proporción continua, tantos tamén caerán en proporción continua entre eles.

Pois ben, caian tanto os números Δ e E como Z e H en proporción continua entre os números A e B e a unidade Γ; digo que cantos números caen entre cada un dos números A e B e a unidade Γ en proporción continua, tantos tamén caerán entre A e B en proporción continua.

Pois ben, Δ ó multiplicar a Z faga Θ, mentres que cada un dos números Δ e Z ó multiplicar a Θ faga K e Λ respectivamente.



E, dado que como a unidade Γ é ó número Δ, así Δ a E, logo, a unidade Γ mide ó número Δ as mesmas veces que Δ a E[50].

[50] Definición VII, 20.

Pero a unidade Γ mide ó número Δ segundo as unidades de Δ, logo, tamén o número Δ mide a E segundo as unidades de Δ; logo, Δ ó multiplicarse a si mesmo fai E.

Asemade, dado que, como Γ é ó número Δ, así E a A, logo, a unidade Γ mide ó número Δ as mesmas veces que E a A. Pero a unidade Γ mide ó número Δ segundo as unidades de Δ; logo, tamén E mide a A segundo as unidades de Δ; logo, Δ ó multiplicar a E fai A.

Entón, polo mesmo, tamén Z ó multiplicarse a si mesmo fai H, mentres que ó multiplicar a H fai B.

E, dado que Δ ó multiplicarse a si mesmo fai E, mentres que ó multiplicar a Z fai Θ, logo, como Δ é a Z, así E a Θ[51].

Entón, polo mesmo, tamén como Δ a Z, así Θ a H[52]. Logo, tamén como E a Θ, así Θ a H.

Asemade, dado que Δ ó multiplicar a cada un dos números E e Θ fai A e K respectivamente, logo, como E é a Θ, así A a K.

Pero como E a Θ, así Δ a Z; logo, tamén como Δ a Z, así A a K.

Asemade, dado que cada un dos números Δ e Z ó multiplicar a Θ fai a K e Λ respectivamente, logo, como Δ é a Z, así K a Λ.

Pero, como Δ a Z, así A a K; logo, tamén como A a K, así K a Λ.

Ademais, dado que Z ó multiplicar a cada un dos números Θ e H fai Λ e B respectivamente, logo, como Θ é a H, así Λ a B.

Pero como Θ a H, así Δ a Z; logo, tamén como Δ a Z, así Λ a B.

Pero foi demostrado tamén que como Δ é a Z, así A a K, e K a Λ; logo, tamén como A a K, así K a Λ, e Λ a B. Logo, A, K, Λ e B están en proporción continua.

Logo, cantos números caen entre cada un dos números A e B e a unidade Γ en proporción continua, tantos tamén caerán entre A e B en proporción continua; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

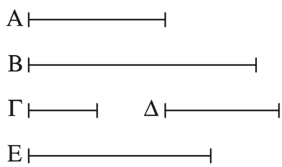
51 Proposición VII, 17. (ΔxΔ = E, ΔxZ = Θ).

52 Proposición VII, 18. (ΔxZ = Θ, ZxZ = H). A expresión «polo mesmo» manifesta que Euclides, aínda que fixo dúas proposicións separadas, ten interiorizada a propiedade conmutativa —Proposición VII, 16— e considera equivalentes as proposicións VII, 17 e VII, 18.

PROPOSICIÓN 11

Entre dous números cadrados[53] hai un número que é media proporcional, e o cadrado garda co cadrado razón duplicada[54] da que garda o lado co lado[55].

Sexan os números cadrados A e B, e o lado de A sexa Γ[56], mentres que Δ o de B; digo que, entre A e B hai un número que é media proporcional, e A garda con B razón duplicada da que garda Γ con Δ.



Pois ben, Γ ó multiplicar a Δ faga E. E, dado que A é un cadrado e Γ é o seu lado, logo, Γ ó multiplicarse a si mesmo fai A. Entón, polo mesmo, tamén Δ ó multiplicarse a si mesmo fai B.

Entón, dado que Γ ó multiplicar a cada un dos números Γ e Δ fai A e E respectivamente, logo, como Γ é a Δ, así A a E[57].

Entón, polo mesmo, tamén como Γ a Δ, así E a B[58].

Logo, tamén como A a E, así E a B. Logo, entre A e B hai un número que é media proporcional.

Digo agora que tamén A garda razón duplicada con B da que Γ garda con Δ.

Pois, dado que A, E e B son tres números proporcionais, logo, A garda razón duplicada con B da que garda A con E.

Pero, como A a E, así Γ a Δ. Logo, A garda razón duplicada con B da que garda o lado Γ con Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

53 Definición VII, 18.

54 Definición V, 9.

55 Dados $a = c^2$ e $b = d^2$, existe e ($e = cd$), tal que $a/e = e/b$ e $c^2/d^2 = (c/d)^2$.

56 Definición VII, 16.

57 Proposición VII, 17.

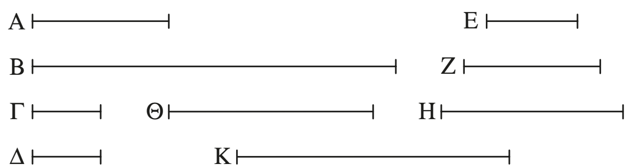
58 Proposición VII, 18.

PROPOSICIÓN 12

Entre dous números cubos[59] hai dous números que son media proporcional, e o cubo garda co cubo razón triplicada[60] da que garda o lado co lado[61].

Sexan dous números cubos A e B, e o lado de A sexa Γ, mentres que Δ o de B; digo que, entre A e B hai dous números que son media proporcional, e A garda con B razón triplicada da que garda Γ con Δ.

Pois ben, Γ ó multiplicarse a si mesmo faga E, mentres que ó multiplicar a Δ faga Z, e Δ ó multiplicarse a si mesmo faga H, mentres que cada un dos números Γ e Δ ó multiplicar a Z faga Θ e K respectivamente.



E, dado que A é un cubo, Γ é o seu lado e Γ ó multiplicarse a si mesmo fai E, logo, Γ ó multiplicarse a si mesmo fai E, pero ó multiplicar a E fai A. Entón, polo mesmo, tamén Δ ó multiplicarse a si mesmo fai H, pero ó multiplicar a H fai B.

E, dado que Γ ó multiplicar a cada un dos números Γ e Δ fai E e Z respectivamente, logo, como Γ é a Δ, así E a Z[62].

Entón, polo mesmo, tamén como Γ a Δ, así Z a H[63].

Asemade, dado que Γ ó multiplicar a cada un dos números E e Z fai A e Θ respectivamente, logo, como E é a Z, así A a Θ.

Pero como E a Z, así Γ a Δ; logo, tamén como Γ a Δ, así A a Θ.

Asemade, dado que cada un dos números Γ e Δ ó multiplicar a Z fai Θ e K respectivamente, logo, como Γ a Δ, así Θ a K.

Asemade, dado que Δ ó multiplicar a cada un dos números Z e H fai K e B respectivamente, logo, como Z a H, así K a B.

---

59 Definición VII, 19.

60 Definición V, 10.

61 Dados $a = c^3$ e $b = d^3$, existen q e k ($q = c^2d$, $k = cd^2$) tal que $a/q = q/k = k/b$ e $c^3/d^3 = (c/d)^3$.

62 Proposición VII, 17.

63 Proposición VII, 18.

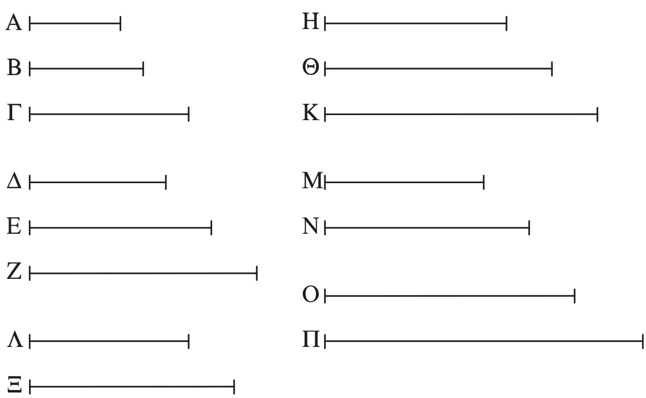
Pero como Z a H, así Γ a Δ; logo, tamén como Γ a Δ, así A a Θ, Θ a K, e K a B. Logo, entre A e B, hai dous números, Θ e K, que son media proporcional.

Digo agora que tamén A garda razón triplicada con B da que garda Γ con Δ. Pois, dado que A, Θ, K e B son catro números proporcionais, logo, A garda razón triplicada con B da que garda A con Θ. Pero, como A a Θ, así Γ a Δ; logo, tamén A garda razón triplicada con B da que garda Γ con Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13

Se cantos números se queira son continuamente proporcionais[64] e cada un ó multiplicarse a si mesmo fai un número, os seus produtos serán proporcionais; e, se os do principio ó multiplicaren ós produtos fan algúns números, tamén estes mesmos serán proporcionais[65].

Sexan A, B e Γ cantos números se queira continuamente proporcionais —como A a B, así B a Γ— e A, B e Γ ó multiplicárense a si mesmos fagan Δ, E e Z, mentres que ó multiplicaren a Δ, E e Z fagan H, Θ e K; digo que Δ, E e Z, e H, Θ e K son continuamente proporcionais.



[64] Están en progresión xeométrica.

[65] Nos manuscritos aparece a mesma frase que na Proposición VII, 27 considerada por Heiberg interpolación: «e sempre ocorre isto con respecto ós extremos».

Pois ben, A ó multiplicar a B faga Λ, mentres que cada un dos números A e B ó multiplicar a Λ faga M e N respectivamente. E, asemade, B ó multiplicar a Γ faga Ξ, mentres que cada un dos números B e Γ ó multiplicar a Ξ faga O e Π respectivamente.

De xeito semellante ó de arriba poderemos demostrar que Δ, Λ e E, e H, M e N e Θ son continuamente proporcionais na razón de A con B e, ademais, E, Ξ e Z, e Θ, O, Π e K son continuamente proporcionais na razón de B con Γ[66].

E, como A é a B, así B a Γ; logo, tamén Δ, Λ e E están na mesma razón que E, Ξ e Z e, ademais, H, M, N e Θ que Θ, O, Π e K.

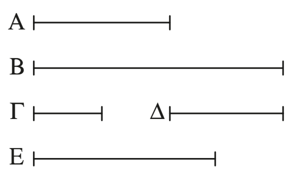
E a cantidade de Δ, Λ e E é igual á cantidade de E, Ξ e Z, mentres que a de H, M, N e Θ á de Θ, O, Π e K; logo, por igualdade, como Δ é a E, así E a Z, mentres que como H a Θ, así Θ a K[67]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

Se un cadrado[68] mide a un cadrado, tamén o lado[69] medirá ó lado; e, se o lado mide ó lado, tamén o cadrado medirá ó cadrado.

Sexan os números cadrados A e B, sexan Γ e Δ os seus lados, e A mida a B; digo que tamén Γ mide a Δ.

Pois ben, Γ ó multiplicar a Δ faga E; logo, A, E e B son continuamente proporcionais na razón de Γ con Δ[70].



66 Véxase tamén a Nota 12 (Proposición VIII, 2. Corolario)
67 Proposición VII, 14.
68 Definición VII, 18.
69 Definición VII, 16.
70 Proposición VIII, 11.

E, dado que A, E e B son continuamente proporcionais e A mide a B, logo, tamén A mide a E[71].

E, como A é a E, así Γ a Δ; logo, tamén Γ mide a Δ[72].

Asemade, agora mida Γ a Δ; digo que tamén A mide a B.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que A, E e B son continuamente proporcionais na razón de Γ con Δ.

E, dado que como Γ é a Δ, así A a E, pero Γ mide a Δ, logo, tamén A mide a E.

E A, E e B son continuamente proporcionais; logo, tamén A mide a B.

Logo, se un cadrado mide a un cadrado, tamén o lado medirá ó lado; e, se o lado mide ó lado, tamén o cadrado medirá ó cadrado; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 15

Se un número cubo*[73] *mide a un número cubo, tamén o lado*[74] *medirá ó lado; e, se o lado mide ó lado, tamén o cubo medirá ó cubo.

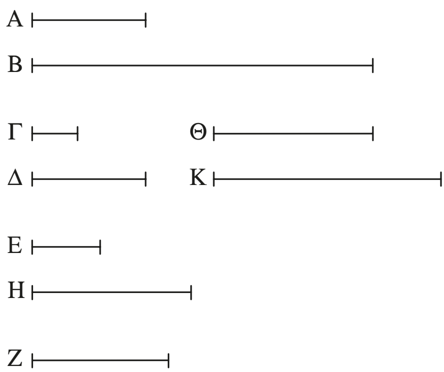
Pois ben, o número cubo A mida ó número cubo B, e o lado de A sexa Γ, mentres que Δ o de B; digo que Γ mide a Δ.

Pois ben, Γ ó multiplicarse a si mesmo faga E, mentres que Δ ó multiplicarse a si mesmo faga H e, ademais, Γ ó multiplicar a Δ faga Z, e cada un dos números Γ e Δ ó multiplicar a Z faga Θ e K respectivamente.

Entón é evidente que E, Z e H, e A, Θ, K e B son continuamente proporcionais na razón de Γ con Δ[75].

E, dado que A, Θ, K e B son continuamente proporcionais e A mide a B, logo, tamén mide a Θ[76].

71 Proposición VIII, 7.
72 Definición VII, 20.
73 Definición VII, 19.
74 Definición VII, 16.
75 Véxase tamén a Nota 12 (Proposición VIII, 2. Corolario)
76 Proposición VIII, 7.



E como A é a Θ, así Γ a Δ. Logo, tamén Γ mide a Δ[77].

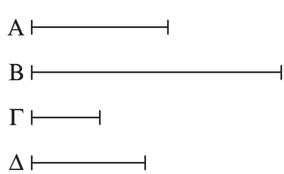
Mida agora Γ a Δ; digo que tamén A medirá a B.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que A, Θ, K e B son continuamente proporcionais na razón de Γ con Δ. E, dado que Γ mide a Δ e, como Γ é a Δ, así A a Θ, logo, tamén A mide a Θ; en consecuencia, tamén A mide a B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

Se un número cadrado[78] non mide a un número cadrado, tampouco o lado[79] medirá ó lado; e, se o lado non mide ó lado, tampouco o cadrado medirá ó cadrado.

Sexan os números cadrados A e B, sexan Γ e Δ os seus lados, e A non mida a B; digo que tampouco Γ mide a Δ.



Pois se Γ mide a Δ, medirá tamén A a B[80].

[77] Definición VII, 20.
[78] Definición VII, 18.
[79] Definición VII, 16.
[80] Proposición VIII, 14.

Pero non mide A a B; logo, tampouco Γ medirá a Δ.

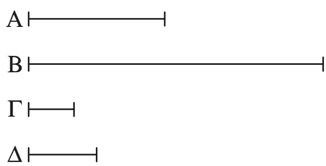
Non mida agora Γ a Δ; digo que tampouco A medirá a B. Pois se A mide a B, medirá tamén Γ a Δ.

Pero Γ non mide a Δ; logo, tampouco A medirá a B; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 17

Se un número cubo[81] non mide a un número cubo, tampouco o lado[82] medirá ó lado; e, se o lado non mide ó lado, tampouco o cubo medirá ó cubo.

Pois ben, o número cubo A non mida ó número cubo B, sexa Γ o lado de A, e Δ o de B; digo que Γ non medirá a Δ.



Pois, se Γ mide a Δ, medirá tamén A a B[83].

Pero non mide A a B; logo, tampouco Γ mide a Δ.

Non mida agora Γ a Δ; digo que tampouco A medirá a B.

Pois, se A mide a B, medirá tamén Γ a Δ.

Pero Γ non mide a Δ; logo, tampouco medirá A a B; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

Entre dous números planos semellantes[84], hai un número que é media proporcional e o plano garda co plano razón duplicada[85] da que garda o lado correspondente co lado correspondente[86].

---

81 Definición VII, 19.

82 Definición VII, 16.

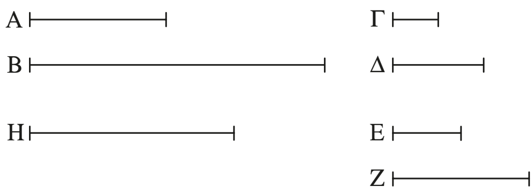
83 Proposición VIII, 15.

84 Definición VII, 21.

85 Definición V, 9.

86 Se $a = dz$, $b = eh$, con $d/z = e/h$, entón existe c tal que $a/c = c/b$ e $a/b = (d/e)^2 = (z/h)^2$. A Proposición VIII, 11 é un caso particular desta proposición.

Sexan A e B dous números planos semellantes e sexan os números Γ e Δ os lados de A, mentres que E e Z os de B. E, dado que planos semellantes son os que teñen os lados proporcionais, logo, como Γ é a Δ, así E a Z; digo, entón que, entre A e B, hai un número que é media proporcional, e A garda razón duplicada con B da que garda Γ con E, ou Δ con Z, é dicir, da que garda o lado correspondente co lado correspondente.



E, dado que como Γ é a Δ, así E a Z, logo, por alternancia, como Γ é a E, Δ a Z[87].

E dado que A é plano e Γ e Δ os seus lados, logo, Δ ó multiplicar a Γ fai A[88]. Entón, polo mesmo, tamén E ó multiplicar a Z fai B. Agora Δ ó multiplicar a E faga H.

E, dado que Δ ó multiplicar a Γ fai A, mentres que ó multiplicar a E fai H, logo, como Γ é a E, así A a H[89].

Pero, como Γ a E, así Δ a Z; logo, tamén como Δ a Z, así A a H.

Asemade, dado que E ó multiplicar a Δ fai H, mentres que ó multiplicar a Z fai B, logo, como Δ é a Z, así H a B.

Pero foi demostrado tamén que, como Δ a Z, así A a H; logo, tamén como A a H, así H a B. Logo, A, H e B son continuamente proporcionais. Logo, entre A e B, hai un número que é media proporcional.

Digo agora que tamén A garda razón duplicada con B da que garda o lado correspondente co lado correspondente, é dicir, da que garda Γ con E, ou Δ con Z.

---

[87] Proposición VII, 13.
[88] Proposición VII, 16.
[89] Proposición VII, 17.

Pois, dado que A, H e B son continuamente proporcionais, A garda razón duplicada con B da que garda con H.

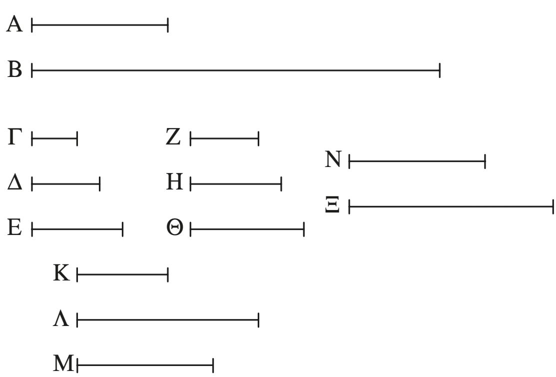
E como A é a H, así Γ a E, e Δ a Z. Logo, tamén A garda razón duplicada con B da que garda Γ con E, ou Δ con Z; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 19

Entre dous números sólidos semellantes[90], caen dous números que son media proporcional; e o sólido garda co sólido semellante razón triplicada[91] da que garda o lado correspondente co lado correspondente[92].

Sexan A e B dous números sólidos semellantes e sexan Γ, Δ e E os lados de A, mentres que Z, H e Θ os de B.

E, dado que sólidos semellantes son os que teñen os lados proporcionais, logo, como Γ é a Δ, así Z a H e, como Δ a E, así H a Θ.



Digo que, entre A e B, caen dous números que son media proporcional, e A garda razón triplicada con B da que garda Γ con Z, Δ con H e, ademais, E con Θ.

90 Definición VII, 21.

91 Definición V, 10.

92 Se $a = cde$, $b = zhq$, con $c/d = z/h$ e $d/e = h/q$, entón existen n e x tal que $a/n = n/x$, $n/x = x/b$ e $a/b = (c/z)^3 = (d/h)^3 = (e/q)^3$. A Proposición VIII, 12 é un caso particular desta proposición.

Pois ben, Γ ó multiplicar a Δ faga K, mentres que Z ó multiplicar a H faga Λ.

E, dado que Γ e Δ están na mesma razón que Z e H e que o produto de Γ e Δ é K, mentres que Λ o de Z e H, logo, K e Λ son números planos semellantes; logo, entre K e Λ, hai un número que é media proporcional[93]. Sexa M.

Logo, M é o produto de Δ e Z, como foi demostrado no teorema anterior a este.

E, dado que Δ ó multiplicar a Γ fai K[94], mentres que ó multiplicar a Z fai M, logo, como Γ é a Z, así K a M[95].

Pero como K a M, M a Λ. Logo, K, M e Λ son continuamente proporcionais na razón de Γ con Z.

E, dado que como Γ é a Δ, así Z a H, logo, por alternancia, como Γ é a Z, así Δ a H[96]. Entón, tamén polo mesmo, como Δ a H, así E a Θ.

Logo, K, M e Λ son continuamente proporcionais na razón de Γ con Z, na de Δ con H e, ademais, na de E con Θ.

Agora, cada un dos números E e Θ ó multiplicar a M faga N e Ξ respectivamente.

E, dado que A é sólido e os seus lados son Γ, Δ e E, logo, E ó multiplicar ó produto de Γ e Δ fai A. Pero o produto de Γ e Δ é K; logo, E ó multiplicar a K fai A.

Entón, polo mesmo, tamén Θ ó multiplicar a Λ fai B.

E, dado que E ó multiplicar a K fai A, pero tamén, efectivamente, ó multiplicar a M fai N, logo, como K é a M, así A a N.

Pero, como K a M, así Γ a Z, Δ a H e, ademais, E a Θ; logo, tamén como Γ a Z, Δ a H, e E a Θ, así A a N.

Asemade, dado que cada un dos números E e Θ ó multiplicar a M fai N e Ξ respectivamente, logo, como E é a Θ, así N a Ξ[97].

93 Proposición VIII, 18.
94 Proposición VII, 16.
95 Proposición VII, 17.
96 Proposición VII, 13.
97 Proposición VII, 18.

Pero como E a Θ, así Γ a Z, e Δ a H; logo, tamén como Γ a Z, Δ a H, e E a Θ, así A a N, e N a Ξ.

Asemade, dado que Θ ó multiplicar a M fai Ξ, pero tamén, efectivamente, ó multiplicar a Λ fai B, logo, como M é a Λ, así Ξ a B.

Pero como M a Λ, así Γ a Z, Δ a H, e E a Θ. Logo, tamén como Γ a Z, Δ a H, e E a Θ, así non só Ξ a B senón tamén A a N, e N a Ξ. Logo, A, N, Ξ e B son continuamente proporcionais nas razóns ditas dos lados.

Digo que tamén A garda razón triplicada con B da que garda o lado correspondente co lado correspondente, é dicir, da que garda o número Γ con Z, ou Δ con H e, ademais, E con Θ.

Pois, dado que A, N, Ξ e B son catro números continuamente proporcionais, logo, A garda razón triplicada con B da que garda A con N.

Pero foi demostrado que, como A a N, así Γ a Z, Δ a H e, ademais, E a Θ.

Logo, tamén A garda razón triplicada con B da que garda o lado correspondente co lado correspondente, é dicir, da que garda o número Γ con Z, Δ con H e, ademais, E con Θ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 20

Se, entre dous números, cae un número que é media proporcional, os números serán planos semellantes[98].[99]

Pois ben, entre dous números A e B, caia o número Γ que sexa media proporcional; digo que A e B son números planos semellantes.

Tómense Δ e E, os números menores dos que gardan a mesma razón que A e Γ[100]; logo, Δ mide a A as mesmas veces que E a Γ[101].

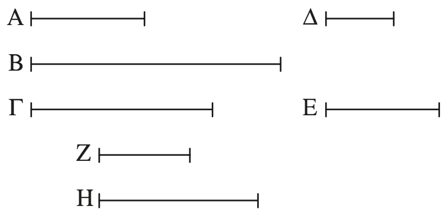
---

[98] Definición VII, 21.

[99] Recíproca da Proposición VIII, 18. Se $a/c = c/b$, entón existen d, z, e, h tal que $a = dz$, $b = eh$, $d/z = e/h$.

[100] Proposición VII, 33.

[101] Proposición VII, 20.



Entón, cantas veces mide Δ a A, tantas unidades haxa en Z; logo, Z ó multiplicar a Δ fai A[102].

En consecuencia, A é plano e os seus lados, Δ e Z[103].

Asemade, dado que Δ e E son os números menores dos que gardan a mesma razón que Γ e B, logo, Δ mide a Γ as mesmas veces que E a B. Entón, cantas veces E mide a B, tantas unidades haxa en H. Logo, E mide a B segundo as unidades de H; logo, H ó multiplicar a E fai B.

Logo, B é plano e os seus lados son E e H.

Logo, A e B son números planos.

Digo agora que tamén semellantes.

Pois, dado que Z ó multiplicar a Δ fai A, mentres que ó multiplicar a E fai Γ[104], logo, como Δ é a E, así A a Γ[105], é dicir, Γ a B.

Asemade, dado que E ó multiplicar a cada un dos números Z e H fai Γ e B respectivamente, logo, como Z é a H, así Γ a B.

Pero como Γ a B, así Δ a E; logo, tamén, como Δ a E, así Z a H.

E, por alternancia, como Δ a Z, así E a H[106].

Logo, A e B son números planos semellantes —pois os seus lados son proporcionais—; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[102] Definición VII, 15.
[103] Definición VII, 16.
[104] Pois Δ mide a A as mesmas veces que E a Γ.
[105] Proposición VII, 17.
[106] Proposición VII, 13.

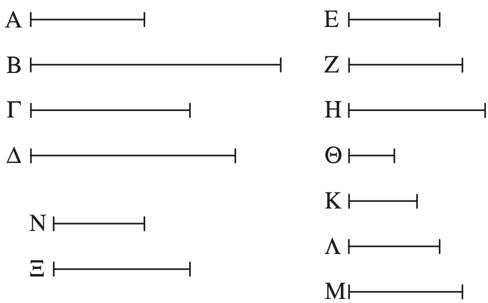
PROPOSICIÓN 21

***Se, entre dous números, caen dous números que son media proporcional, os números son sólidos semellantes*[107].[108]**

Pois ben, entre dous números A e B, caian dous números, Γ e Δ, que sexan media proporcional; digo que A e B son sólidos semellantes.

Pois ben, tómense tres números E, Z e H, os menores dos que gardan a mesma razón que A, Γ e Δ[109]; logo, os seus extremos, E e H, son primos entre si[110].

E, dado que, entre E e H, cae un número, Z, que é media proporcional, logo, E e H son números planos semellantes[111]. Sexan, entón, Θ e K os lados de E, mentres que Λ e M os de H.



Logo, é evidente a partir do anterior a isto[112] que E, Z e H son continuamente proporcionais na razón de Θ con Λ e na de K con M.

E, dado que E, Z e H son os menores dos que gardan a mesma razón que A, Γ e Δ, e a cantidade de E, Z e H é igual á cantidade de A, Γ e Δ, logo, por igualdade, como E é a H, así A a Δ[113].

Pero, E e H son primos, e os primos tamén os menores[114], e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma

107 Definición VII, 21.

108 Recíproca da Proposición VIII, 19. Se $a/c = c/d = d/b$, entón existen q, k, n, l, m, x tal que $a = qkn$, $b = lmx$, $q/l = k/m = n/x$.

109 Proposición VIII, 2.

110 Proposición VIII, 3.

111 Proposición VIII, 20.

112 Véxase a demostración da Proposición VIII, 20.

113 Proposición VII, 14.

114 Proposición VII, 21.

razón que eles —o maior, ó maior e o menor ó menor[115], é dicir, o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, E mide a A as mesmas veces que H a Δ.

Entón, cantas veces E mide a A tantas unidades haxa en N. Logo, N ó multiplicar a E fai A[116].

Pero E é o produto de Θ e K; logo, N ó multiplicar ó produto de Θ e K fai A.

Logo, A é sólido, e os seus lados son Θ, K e N.

Asemade, dado que E, Z e H son os menores dos que gardan a mesma razón que Γ, Δ e B, logo, E mide a Γ as mesmas veces que H a B. Entón, cantas veces E mide a Γ, tantas unidades haxa en Ξ.

Logo, H mide a B segundo as unidades de Ξ; logo, Ξ ó multiplicar a H fai B.

Pero H é o produto de Λ e M; logo, Ξ ó multiplicar ó produto de Λ e M fai B.

Logo, B é sólido e os seus lados son Λ, M e Ξ; logo, A e B son sólidos.

Digo que tamén son semellantes.

Pois, dado que N e Ξ ó multiplicaren a E fan A e Γ, logo, como N é a Ξ, A a Γ[117], é dicir E a Z.

Pero, como E a Z, Θ a Λ, e K a M; logo, tamén, como Θ a Λ, así K a M, e N a Ξ.

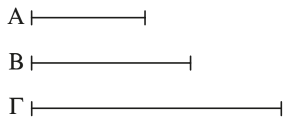
E Θ, K e N son os lados de A, mentres que Ξ, Λ e M os lados de B. Logo, A e B son números sólidos semellantes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 22

Se tres números son continuamente proporcionais e o primeiro é cadrado*[118]*, tamén o terceiro será cadrado.

[115] Proposición VII, 20.
[116] Definición VII, 15.
[117] Proposición VII, 18.
[118] Definición VII, 18.

Sexan A, B e Γ tres números continuamente proporcionais e o primeiro, A, sexa cadrado; digo que tamén o terceiro, Γ, é cadrado.



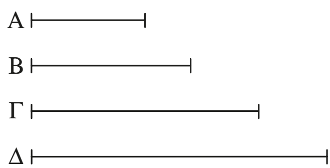
Pois, dado que, entre A e Γ, o número B é media proporcional, logo, A e Γ son planos semellantes[119].

Pero A é cadrado; logo tamén é cadrado Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 23

Se catro números son continuamente proporcionais e o primeiro é cubo[120], tamén o cuarto será cubo.

Sexan A, B, Γ e Δ catro números continuamente proporcionais e A sexa cubo; digo que tamén Δ é cubo.



Pois, dado que, entre A e Δ, os números B e Γ son media proporcional, logo, A e Δ son números sólidos semellantes[121].

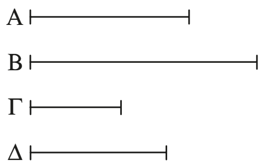
Pero A é cubo; logo, tamén é cubo Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 24

Se dous números gardan entre si a razón que garda un número cadrado[122] cun número cadrado e o primeiro é cadrado, tamén o segundo será cadrado.

[119] Proposición VIII, 20.
[120] Definición VII, 19.
[121] Proposición VIII, 21.
[122] Definición VII, 18.

Pois ben, dous números A e B garden entre si a razón que garda o número cadrado Γ co número cadrado Δ, e A sexa cadrado; digo que tamén B é cadrado.



Pois ben, dado que Γ e Δ son cadrados, logo, Γ e Δ son planos semellantes[123]. Logo, entre Γ e Δ, cae un número que é media proporcional[124].

E, como Γ é a Δ, A a B; logo, tamén, entre A e B, cae un número que é media proporcional[125].

E A é cadrado; logo, tamén B é cadrado[126]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 25

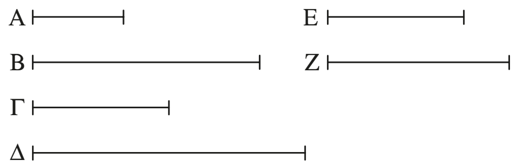
Se dous números gardan entre si a razón que garda un número cubo*[127] *cun número cubo e o primeiro é cubo, tamén o segundo será cubo.

Pois ben, dous números A e B garden entre si a razón que garda o número cubo Γ co número cubo Δ, e A sexa cubo; digo que tamén B é cubo.

Pois ben, dado que Γ e Δ son cubos, Γ e Δ son sólidos semellantes[128]; logo, entre Γ e Δ, caen dous números que son media proporcional[129].

---

123 Definición VII, 21.
124 Proposición VIII, 18.
125 Proposición VIII, 8.
126 Proposición VIII, 22.
127 Definición VII, 19.
128 Definición VII, 21.
129 Proposición VIII, 19.



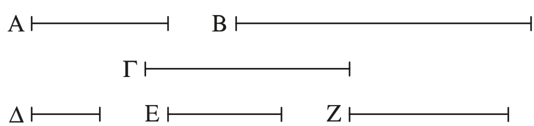
Pero, cantos caen no medio de Γ e Δ en proporción continua, tantos tamén entre os que gardan a mesma razón que eles[130]; en consecuencia, tamén, entre A e B, caen dous números que son media proporcional. Caian E e Z.

Entón dado que os catro números, A, E, Z e B, son continuamente proporcionais e A é cubo, logo, tamén é cubo B[131]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 26

Os números planos semellantes[132] gardan entre si a razón que garda un número cadrado[133] cun número cadrado[134].

Sexan A e B números planos semellantes; digo que A garda con B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado



[130] Proposición VIII, 8.

[131] Proposición VIII, 23.

[132] Definición VII, 21.

[133] Definición VII, 18.

[134] Euclides non inclúe o recíproco desta Proposición VIII, 26 (se dous números gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, entón son planos semellantes) que se dá como válido nos libros que seguen —Proposición IX, 10 e o Lema que segue á Proposición X, 9—, aínda que en ámbolos dous casos hai dúbidas da súa autenticidade. Unha demostración podería ser a seguinte: Se A e B son números e Γ e Δ números cadrados e A é a B como Γ é a Δ, entón entre Γ e Δ cae un número que é media proporcional —Proposición VIII, 18— e entón entre A e B cae un número que é media proporcional —Proposición VIII, 8— e entón A e B son planos semellantes —Proposición VIII, 20.

Pois ben, dado que A e B son planos semellantes, logo, entre A e B, cae un número que é media proporcional[135].

Caia, sexa Γ, e tómense Δ, E e Z, os números menores dos que gardan a mesma razón que A, Γ e B[136]; logo, os seus extremos, Δ e Z, son cadrados[137].

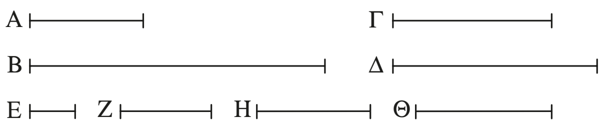
E, dado que como Δ é a Z, así A a B[138] e que Δ e Z son cadrados, logo, A garda con B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 27

Os números sólidos semellantes*[139] *gardan entre si a razón que garda un número cubo*[140] *cun número cubo.

Sexan A e B números sólidos semellantes; digo que A garda con B a razón que garda un número cubo cun número cubo.

Pois ben, dado que A e B son sólidos semellantes, logo, entre A e B, caen dous números que son media proporcional[141].



Caian Γ e Δ, e tómense E, Z, H e Θ, os números menores dos que gardan a mesma razón que A, Γ, Δ e B[142], iguais a eles en cantidade; logo, os seus extremos, E e Θ son cubos[143].

E como E é a Θ, así A a B; logo, tamén A garda con B a razón que garda un número cubo cun número cubo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

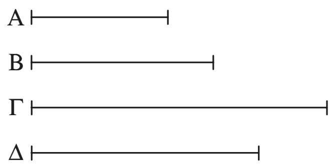
---

135 Proposición VIII, 18.
136 Proposición VIII, 2.
137 Proposición VIII, 2. Corolario.
138 Proposición VII, 14.
139 Definición VII, 21.
140 Definición VII, 19.
141 Proposición VIII, 19.
142 Proposición VIII, 2.
143 Proposición VIII, 2. Corolario.

PROPOSICIÓN 1

Se dous números planos semellantes[1] ó multiplicárense entre si fan un número, o produto será cadrado[2].

Sexan A e B dous números planos semellantes, e A ó multiplicar a B faga Γ; digo que Γ é cadrado.



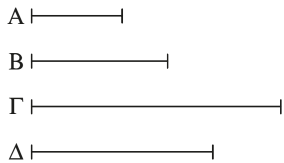
Pois ben, A ó multiplicarse a si mesmo faga Δ. Logo, Δ é cadrado. Entón, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai Δ, mentres que ó multiplicar a B fai Γ, logo, como A é a B, así Δ a Γ[3]. E, dado que A e B son números planos semellantes, logo, entre A e B, cae un número media proporcional[4]. Pero se entre dous números caen números en proporción continua, cantos números caen entre eles, tantos tamén entre os que gardan a mesma proporción[5]; en consecuencia, tamén, entre Δ e Γ, cae un número media proporcional. E Δ é cadrado; logo, tamén Γ é cadrado[6]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 2

Se dous números ó multiplicárense entre si fan un cadrado[7], son números planos semellantes[8].

[1] Definición VII, 21.
[2] Definición VII, 18.
[3] Proposición VII, 17.
[4] Proposición VIII, 18.
[5] Proposición VIII, 8.
[6] Proposición VIII, 22.
[7] Definición VII, 18.
[8] Definición VII, 21.

Sexan A e B dous números, e A ó multiplicar a B faga o cadrado Γ; digo que A e B son números planos semellantes.



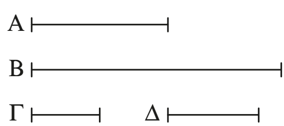
Pois ben, A ó multiplicarse a si mesmo faga Δ; logo, Δ é cadrado. E, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai Δ, mentres que ó multiplicar a B fai Γ, logo, como A é a B, así Δ a Γ[9]. E, dado que Δ é cadrado pero tamén Γ, logo, Δ e Γ son planos semellantes. Logo, entre Δ e Γ, cae un número media proporcional[10]. E, como Δ é a Γ, así A a B; logo, entre A e B, cae un número media proporcional[11].

Pero, se entre dous números cae un media proporcional, son números planos semellantes; logo, A e B son planos semellantes[12]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 3

Se un número cubo[13] ó multiplicarse a si mesmo fai un número, o produto será cubo.

Pois ben, o número cubo A ó multiplicarse a si mesmo faga B; digo que B é cubo.



Pois ben, tómese Γ, o lado de A, e, ó multiplicarse Γ a si mesmo, faga Δ. Entón é evidente que Γ ó multiplicar a Δ fai A.

---

9 Proposición VII, 17.
10 Proposición VIII, 18.
11 Proposición VIII, 8.
12 Proposición VIII, 20.
13 Definición VII, 19.

E, dado que Γ ó multiplicarse a si mesmo fai Δ, logo, Γ mide a Δ segundo as súas unidades[14].

Pero tamén, efectivamente, a unidade mide a Γ segundo as súas unidades; logo, como a unidade é a Γ, Γ a Δ[15]. Asemade, dado que Γ ó multiplicar a Δ fai A, logo, Δ mide a A segundo as unidades de Γ.

Pero tamén a unidade mide a Γ segundo as súas unidades; logo, como a unidade é a Γ, Δ a A. Pero, como a unidade a Γ, Γ a Δ; logo, tamén, como a unidade a Γ, así Γ a Δ, e Δ a A. Logo, entre a unidade e A, caen dous números, Γ e Δ, media proporcional en proporción continua.

Asemade, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai B, logo, A mide a B segundo as súas unidades. Pero tamén a unidade mide a A segundo as súas unidades; logo, como a unidade é a A, A a B. Pero entre a unidade e A, caen dous números media proporcional; logo, tamén entre A e B caerán dous números media proporcional[16]. E se entre dous números caen dous media proporcional e o primeiro é cubo, tamén o segundo será cubo[17]. E A é cubo; logo, tamén B é cubo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

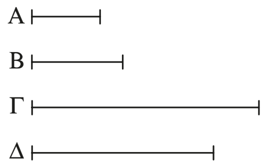
Se un número cubo ó multiplicar a un número cubo fai un número, o produto será cubo.

Pois ben, o número cubo A ó multiplicar ó número cubo B faga Γ; digo que Γ é cubo.

Pois ben, A ó multiplicarse a si mesmo faga Δ; logo, Δ é cubo[18].

---

14 Definición VII, 15.
15 Definición VII, 20.
16 Proposición VIII, 8.
17 Proposición VIII, 23.
18 Proposición IX, 3.



E, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai Δ, mentres que ó multiplicar a B fai Γ, logo, como A é a B, así Δ a Γ[19].

E, dado que A e B son cubos, A e B son sólidos semellantes[20].

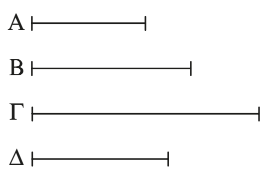
Logo, entre A e B caen dous números media proporcional[21]; en consecuencia tamén, entre Δ e Γ, caerán dous números media proporcional[22].

E Δ é cubo; logo, tamén Γ e cubo[23]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

Se un número cubo ó multiplicar a un número fai un número cubo, tamén o multiplicado será cubo.

Pois ben, o número cubo A ó multiplicar a un número B faga o número cubo Γ; digo que B é cubo.



Pois ben, A ó multiplicarse a si mesmo faga Δ; logo, Δ é cubo[24].

E, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai Δ, mentres que ó multiplicar a B fai Γ, logo, como A é a B, Δ a Γ[25].

---

19 Proposición VII, 17.
20 Definición VII, 21.
21 Proposición VIII, 19.
22 Proposición VIII, 8.
23 Proposición VIII, 23.
24 Proposición IX, 3.
25 Proposición VII, 17.

E dado que Δ e Γ son cubos, son sólidos semellantes[26].

Logo, entre Δ e Γ, caen dous números media proporcional[27].

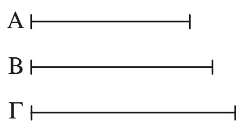
E, como Δ é a Γ, así A a B; logo, tamén, entre A e B, caen dous números media proporcional[28].

E A é cubo; logo, tamén B é cubo[29]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se un número ó multiplicarse a si mesmo fai un cubo, tamén el mesmo será cubo.

Pois ben, o número A ó multiplicarse a si mesmo faga o número cubo B; digo que tamén A é cubo.



Pois ben, A ó multiplicar a B faga Γ.

Entón, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai B, mentres que ó multiplicar a B fai Γ, logo, Γ é cubo[30].

E, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai B, logo, A mide a B segundo as súas unidades[31].

Pero tamén a unidade mide a A segundo as súas unidades. Logo, como a unidade é a A, así A a B[32].

E, dado que A ó multiplicar a B fai Γ, logo, B mide a Γ segundo as unidades de A[33].

Pero tamén a unidade mide a A segundo as súas unidades. Logo, como a unidade é a A, así B a Γ.

26 Definición VII, 21.
27 Proposición VIII, 19.
28 Proposición VIII, 8.
29 Proposición VIII, 23.
30 Definición VII, 19.
31 Definición VII, 15.
32 Definición VII, 20.
33 Proposición VII, 16.

Pero como a unidade a A, así A a B; logo, tamén como A a B, B a Γ.

E, dado que B e Γ son cubos, son sólidos semellantes[34].

Logo, entre B e Γ hai dous números media proporcional[35].

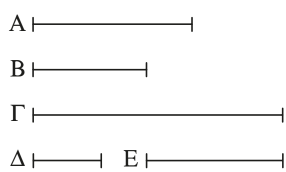
E como B é a Γ, A a B. Logo, tamén, entre A e B hai dous números media proporcional[36].

E B é cubo; logo, tamén A é cubo[37]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Se un número composto ó multiplicar a un número fai un número, o produto será sólido.

Pois ben, o número composto A ó multiplicar a un número B faga Γ; digo que Γ é sólido.



Pois ben, dado que A é composto, será medido por algún número[38].

Sexa medido por Δ e, cantas veces Δ mide a A, tantas unidades haxa en E.

Entón, dado que Δ mide a A segundo as unidades de E, logo, E ó multiplicar a Δ fai A[39].

---

34 Definición VII, 21.

35 Proposición VIII, 19.

36 Proposición VIII, 8.

37 Proposición VIII, 23. Aínda que o enunciado e a demostración desta Proposición VIII, 23 se limitan ó caso en que temos catro números continuamente proporcionais, sendo o primeiro un número cubo, a demostración tamén é válida se o que é cubo é o último: Se *a*, *b*, *c*, *d* son catro números continuamente proporcionais, entón *a* e *d* son sólidos semellantes —Proposición VIII, 21— e, polo tanto, se *a* é cubo, *d* é cubo (e se *d* é cubo, *a* é cubo).

38 Definición VII, 13.

39 Definición VII, 15.

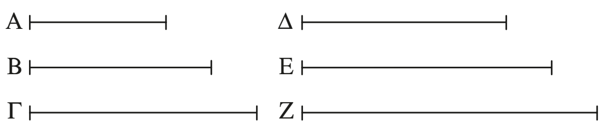
E, dado que A ó multiplicar a B fai Γ, mentres que A é o produto de Δ e E, logo, o produto de Δ e E ó multiplicar a B fai Γ.

Logo, Γ é sólido e os seus lados son Δ, E e B[40]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 8

Se varios números a partir dunha unidade son continuamente proporcionais, o terceiro a partir da unidade e os que deixan un no medio serán cadrados, mentres que o cuarto e os que deixan dous no medio, cubos, e o sétimo e os que deixan cinco no medio, cubos e cadrados simultaneamente[41].

Sexan A, B, Γ, Δ, E e Z varios números a partir dunha unidade continuamente proporcionais; digo que B, o terceiro a partir da unidade, e todos os que deixan un no medio son cadrados, mentres que Γ, o cuarto, e todos que deixan dous no medio, cubos, e Z, o sétimo, e todos que deixan cinco no medio, cubos e cadrados simultaneamente.



Pois ben, dado que como a unidade é a A, así A a B, logo, a unidade mide ó número A as mesmas veces que A a B[42].

Pero a unidade mide ó número A segundo as súas unidades. Logo, tamén A mide a B segundo as unidades de A.

Logo, A ó multiplicarse a si mesmo fai B[43]; logo, B é cadrado.

---

[40] Definición VII, 17.

[41] Se temos a progresión xeométrica 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, ... entón a^2, a^4, a^6, ..., que deixan un no medio, son cadrados; os termos a^3, a^6, a^9, ..., que deixan dous no medio, son cubos; e os termos a^6, a^{12}, a^{18}, ..., que deixan 5 no medio, son cadrados e cubos simultaneamente.

[42] Definición VII, 20.

[43] Definición VII, 15.

E, dado que B, Γ e Δ son continuamente proporcionais e B é cadrado, logo, tamén Δ é cadrado[44].

Entón, polo mesmo, tamén Z é cadrado.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén todos os que deixan un no medio son cadrados.

Digo agora que tamén o cuarto a partir da unidade, Γ, é cubo, e todos os que deixan dous no medio.

Pois ben, dado que como a unidade é a A, así B a Γ, logo, a unidade mide ó número A as mesmas veces que B a Γ.

Pero a unidade mide ó número A segundo as unidades de A; logo, tamén B mide a Γ segundo as unidades de A; logo, A ó multiplicar a B fai Γ.

Entón, dado que A ó multiplicarse a si mesmo fai B e ó multiplicar a B fai Γ, logo, Γ é cubo[45].

E, dado que Γ, Δ, E e Z son continuamente proporcionais, e Γ é cubo, logo, tamén Z é cubo[46].

Pero foi demostrado que tamén cadrado; logo, o sétimo a partir da unidade é cubo e cadrado.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén todos os que deixan cinco no medio son cubos e cadrados; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 9

Se varios números a partir dunha unidade están en proporción continua e o seguinte á unidade é cadrado, tamén todos os restantes serán cadrados. E se o seguinte á unidade é cubo, tamén todos restantes serán cubos.

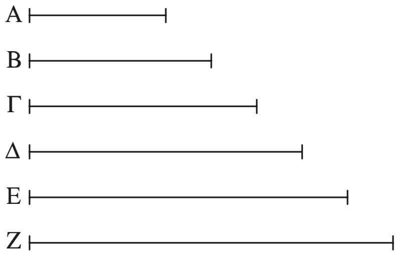
Sexan A, B, Γ, Δ, E e Z cantos números se queira a partir dunha unidade continuamente proporcionais, e A, o seguinte á unidade, sexa cadrado; digo que tamén todos os restantes serán cadrados.

---

44 Proposición VIII, 22.

45 Definición VII, 19.

46 Proposición VIII, 23.



Efectivamente, queda demostrado que o terceiro a partir da unidade, B, e todos os que deixan un no medio son cadrados[47]; digo que tamén todos os restantes son cadrados.

Pois, dado que A, B e Γ son continuamente proporcionais e A é cadrado, tamén Γ é cadrado[48].

Asemade, dado que B, Γ e Δ son continuamente proporcionais e B é cadrado, tamén Δ é cadrado.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén todos os restantes son cadrados.

Sexa agora A cubo; digo que tamén os restantes son cubos.

Efectivamente, queda demostrado que Γ, o cuarto a partir da unidade, e todos os que deixan dous no medio son cubos[49].

Digo que tamén todos os restantes son cubos.

Pois ben, dado que, como a unidade é a A, así A a B, logo, a unidade mide a A as mesmas veces que A a B[50].

Pero a unidade mide a A segundo as súas unidades; logo, tamén A mide a B segundo as súas unidades; logo, A ó multiplicarse a si mesmo fai B[51]. E A é cubo. Pero se un número cubo ó multiplicarse a si mesmo fai algún número, o produto é cubo[52]; logo, tamén B é cubo.

E, dado que os catro, A, B, Γ e Δ, son continuamente proporcionais e A é cubo, logo, tamén Δ é cubo[53].

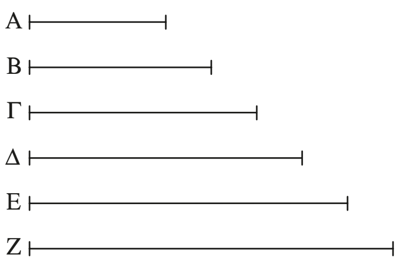
47 Proposición IX, 8.
48 Proposición VIII, 22.
49 Proposición IX, 8.
50 Definición VII, 20.
51 Definición VII, 15.
52 Proposición IX, 3.
53 Proposición VIII, 23.

Polo mesmo, tamén E é cubo e, de xeito semellante, todos os restantes son cubos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 10

Se varios números a partir dunha unidade son continuamente proporcionais e o seguinte á unidade non é cadrado, tampouco ningún outro será cadrado excepto o terceiro a partir da unidade e todos os que deixan un no medio. E, se o seguinte á unidade non é cubo, tampouco ningún outro será cubo excepto o cuarto a partir da unidade e todos os que deixan dous no medio.

Sexan A, B, Γ, Δ, E e Z cantos números se queira a partir dunha unidade continuamente proporcionais e A, o seguinte á unidade, non sexa cadrado; digo que tampouco ningún outro será cadrado excepto o terceiro a partir da unidade e os que deixan un no medio.



Pois ben, se é posible, sexa Γ cadrado.

Pero tamén B é cadrado[54]; logo, B e Γ gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[55].

E, como B é a Γ, A a B; logo, A e B gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; en consecuencia, A e B son planos semellantes[56]. E B é cadrado; logo, tamén A é cadrado; o que, xustamente, se supuxo que non.

---

[54] Proposición IX, 8.

[55] Heiberg pon en dúbida a autenticidade desta frase.

[56] Nota 134 (Proposición VIII, 26). Heiberg tamén pon en dúbida a autenticidade desta frase pois podía utilizar a Proposición VIII, 24 mellor que a Proposición VIII, 26. Esta

Logo, Γ non é cadrado.

De xeito semellante poderemos demostrar que tampouco ningún outro é cadrado excepto o terceiro a partir da unidade e os que deixan un no medio.

Non sexa agora A cubo; digo que tampouco ningún outro será cubo excepto o cuarto a partir da unidade e os que deixan dous no medio.

Pois ben, se é posible, sexa Δ cubo.

Pero tamén Γ é cubo —pois é o cuarto a partir da unidade[57]—. E como Γ é a Δ, B a Γ; logo, B garda con Γ a razón que garda un cubo cun cubo; e Γ é cubo ; logo, tamén B é cubo[58].

E, dado que como a unidade é a A, A a B, e que a unidade mide a A segundo as súas unidades, logo, tamén A mide a B segundo as súas unidades[59]; logo, A ó multiplicarse a si mesmo fai o número cubo B[60].

Pero se un número ó multiplicarse a si mesmo fai un cubo, tamén el mesmo será cubo[61]. Logo, tamén A é cubo; o que, xustamente, se supón que non.

Logo, Δ non é cubo.

De xeito semellante poderemos demostrar que tampouco ningún outro é cubo excepto o cuarto a partir da unidade e os que deixan dous no medio; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

sospeita de Heiberg toma aínda máis forza cando observamos que máis adiante, nesta mesma Proposición IX, 10, para os números cubos, basea o argumento na Proposición VIII, 25 sen recorrer á Proposición VIII, 27. Centrándonos no caso dos números cadrados, dado que B é cadrado e que A e B gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, a Proposición VIII, 24 permite concluír que A é cadrado. Sen embargo o que fai o texto é utilizar ó recíproco da Proposición VIII, 26 —Nota 134 desa Proposición VIII, 26— para, a partir de que «A e B gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado», concluír que «A e B son planos semellantes» e, a partir de que B é cadrado e A e B son planos semellantes, concluír que A é cadrado.

57 Proposición IX, 8.

58 Proposición VIII, 25.

59 Definición VII, 20.

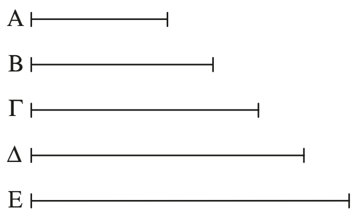
60 Definición VII, 15.

61 Proposición IX, 6.

PROPOSICIÓN 11

Se varios números a partir da unidade son continuamente proporcionais, o menor mide ó maior segundo un dos que hai entre os números proporcionais.

Sexan B, Γ, Δ e E varios números a partir da unidade A continuamente proporcionais; digo que B, o menor de B, Γ, Δ e E, mide a E segundo un de entre Γ e Δ.



Pois ben, dado que como a unidade A é a B, así Δ a E, logo, a unidade A mide ó número B as mesmas veces que Δ a E[62]; logo, por alternancia, a unidade A mide a Δ as mesmas veces que B a E[63].

Pero a unidade A mide a Δ segundo as súas unidades; logo, tamén B mide a E segundo as unidades de Δ; en consecuencia, B, o menor, mide a E, o maior, segundo un número dos que hai entre os números continuamente proporcionais.

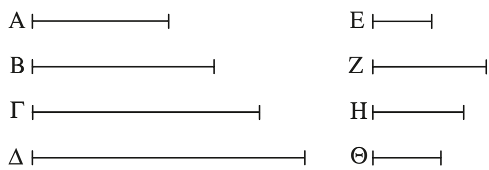
Corolario.- E é evidente que, o mesmo lugar que ocupa o que mide a partir dunha unidade, ocúpao tamén aquel segundo o cal ese mide a partir do medido cara o anterior a el; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 12

Se varios números a partir dunha unidade son continuamente proporcionais, por cantos números primos sexa medido o último, polos mesmos tamén será medido o seguinte á unidade.

Sexan A, B, Γ e Δ cantos números proporcionais se queira a partir dunha unidade; digo que por cantos números primos sexa medido Δ, polos mesmos tamén será medido A.

62 Definición VII, 20.
63 Proposición VII, 15.



Pois ben, sexa medido Δ por un número primo E; digo que E mide a A.

Supoñamos que non; e E é primo, e todo número primo é primo con respecto a todo aquel ó que non mide[64]; logo, E e A son primos entre si.

E, dado que E mide a Δ, mídao segundo Z; logo, E ó multiplicar a Z fai Δ[65]; asemade, dado que A mide a Δ segundo as unidades de Γ[66], logo, A ó multiplicar a Γ fai Δ.

Pero tamén, efectivamente, E ó multiplicar a Z fai Δ; logo, o produto de A e Γ é igual ó de E e Z. Logo, como A é a E, Z a Γ[67].

Pero A e E son primos, e os primos tamén os menores[68], e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[69] —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, E mide a Γ.

Mídao segundo H; logo, E ó multiplicar a H fai Γ. Pero, efectivamente, polo anterior a isto, tamén A ó multiplicar a B fai Γ[70].

Logo, o produto de A e B é igual ó de E e H. Logo, como A é a E, H a B. Pero A e E son primos, e os primos tamén os menores, e os números menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón que eles —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, E mide a B. Mídao segundo Θ; logo, E ó multiplicar a Θ fai B.

Pero tamén, efectivamente, A ó multiplicarse a si mesmo fai B[71]; logo, o produto de E e Θ é igual ó cadrado de A. Logo,

---

64 Proposición VII, 29.
65 Definición VII, 15.
66 Proposición IX, 11.
67 Proposición VII, 19.
68 Proposición VII, 21.
69 Proposición VII, 20.
70 Proposición IX, 11.
71 Véxase o desenvolvemento da demostración da Proposición IX, 8.

como E é a A, A a Θ. Pero A e E son primos, e os primos tamén os menores, e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, E mide a A como o antecedente ó antecedente.

Pero tamén, efectivamente, non o mide; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, non son primos entre si E e A. Logo, son compostos[72]. Pero os compostos son medidos por algún número.

E, dado que E suponse primo, e o número primo non é medido por ningún outro número máis que por si mesmo, logo, E mide a A e E; en consecuencia, E mide a A.

Pero mide tamén a Δ; logo, E mide a A e a Δ.

De xeito semellante poderemos demostrar que por cantos números primos sexa medido Δ, polos mesmos tamén será medido A; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13

Se varios números a partir dunha unidade son continuamente proporcionais e o seguinte á unidade é primo, o maior non será medido por ningún outro fóra dos que hai entre os números proporcionais.

Sexan A, B, Γ e Δ varios números a partir dunha unidade continuamente proporcionais, e A, o seguinte á unidade, sexa primo; digo que Δ, o maior deles, non será medido por ningún outro fóra de A, B e Γ.

Pois ben, se é posible, sexa medido por E e non sexa E o mesmo que ningún de entre A, B e Γ.

[72] Definición VII, 14.

Entón é evidente que E non é primo. Pois se E é primo e mide a Δ, tamén medirá a A[73] que é primo non sendo o mesmo que el; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, E non é primo. Logo, composto. E todo número composto é medido por algún número primo[74]; logo, E é medido por algún número primo.

Digo agora que non será medido por ningún outro primo excepto A. Pois se E é medido por outro e E mide a Δ, logo, tamén aquel medirá a Δ; en consecuencia, tamén medirá a A[75], que é primo non sendo o mesmo que el; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, A mide a E e , dado que E mide a Δ, mídao segundo Z.

Digo que Z non é o mesmo que ningún de entre A, B e Γ. Pois se Z é o mesmo que un de entre A, B e Γ e mide a Δ segundo E, logo, tamén un de entre A, B e Γ mide a Δ segundo E.

Pero un de entre A, B e Γ mide a Δ segundo algún de entre A, B e Γ[76]; logo, tamén E é o mesmo que un de entre A, B e Γ; o que, xustamente, se supón que non.

Logo, Z non é o mesmo que ningún de entre A, B e Γ.

De xeito semellante poderemos demostrar que Z é medido por A, demostrando, asemade, que Z non é primo. Pois se o é e mide a Δ, tamén medirá a A que é primo, non sendo o mesmo que el; o que, sen dúbida, é imposible; logo, non é primo Z; logo, composto. Pero todo número composto é medido por algún número primo; logo, Z é medido por algún número primo.

Digo agora que non será medido por ningún outro primo excepto A. Pois se algún outro primo mide a Z, e Z mide a Δ, logo, tamén aquel medirá a Δ; en consecuencia, tamén medirá a A que é primo non sendo o mesmo que el; o que, sen dúbida,

73 Proposición IX, 12.
74 Proposición VII, 31.
75 Proposición IX, 12.
76 Proposición IX, 11.

é imposible. Logo, A mide a Z. E, dado que E mide a Δ segundo Z, logo, E ó multiplicar a Z fai Δ[77].

Pero, tamén, efectivamente, A ó multiplicar a Γ fai Δ; logo, o produto de A e Γ é igual ó de E e Z.

Logo, proporcionalmente, como A é a E, así Z a Γ[78].

Pero A mide a E; logo, tamén Z mide a Γ[79]. Mídao segundo H.

Do mesmo xeito poderemos demostrar que H non é o mesmo que ningún de entre A e B, e que é medido por A.

E, dado que Z mide a Γ segundo H, logo, Z ó multiplicar a H fai Γ. Pero tamén, efectivamente, A ó multiplicar a B fai Γ; logo, o produto de A e B é igual ó de Z e H. Logo, proporcionalmente, como A a Z, H a B.

Pero A mide a Z; logo, tamén H mide a B. Mídao segundo Θ.

De xeito semellante poderemos demostrar que Θ non é o mesmo que A. E, dado que H mide a B segundo Θ, logo, H ó multiplicar a Θ fai B.

Pero, tamén, efectivamente, A ó multiplicarse a si mesmo fai B[80]; logo, o produto de Θ e H é igual ó cadrado de A.

Logo, como Θ é a A, A a H. Pero A mide a H; logo, tamén Θ mide a A, que é primo non sendo o mesmo que el; o que, xustamente, é absurdo.

Logo, Δ, o maior, non será medido por ningún outro número fóra de A, B e Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

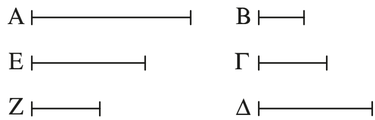
PROPOSICIÓN 14

Se un número é o menor medido por números primos, non será medido por ningún outro número primo fóra dos que o medían dende o principio.

Pois ben, sexa A o número menor medido polos números primos B, Γ e Δ; digo que A non será medido por ningún outro número primo fóra de B, Γ e Δ.

---

77 Definición VII, 15.
78 Proposición VII, 19.
79 Definición VII, 20.
80 Véxase o desenvolvemento da demostración da Proposición IX, 8.



Pois ben, se é posible, sexa medido polo número primo E, e E non sexa o mesmo que ningún de entre B, Γ e Δ.

E, dado que E mide a A, mídao segundo Z; logo, E ó multiplicar a Z fai A[81].

E A é medido polos números primos B, Γ e Δ. Pero se dous números ó multiplicarse entre si fan algún número e algún número primo mide ó produto deles, tamén medirá a un dos do principio[82]; logo, B, Γ e Δ medirán a un de entre E e Z.

Agora ben, non medirán a E; pois E é primo e non é o mesmo que ningún de entre B, Γ e Δ. Logo, medirán a Z que é menor que A; o que, sen dúbida, é imposible. Pois suponse que A é o menor medido por B, Γ e Δ.

Logo, non haberá número primo que mida a A fóra de B, Γ e Δ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

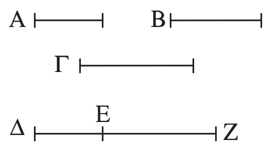
PROPOSICIÓN 15

Se tres números continuamente proporcionais son os menores dos que gardan a mesma razón que eles, dous calquera sumados son primos con respecto ó restante.

Sexan A, B e Γ tres números continuamente proporcionais, os menores dos que gardan a mesma razón que eles; digo que de entre A, B e Γ, dous calquera sumados son primos con respecto ó restante: A e B con respecto a Γ, B e Γ con respecto a A e, tamén, A e Γ con respecto a B.

Pois ben, tómense os dous números ΔE e EZ, os números menores dos que gardan a mesma razón que A, B e Γ[83].

81 Definición VII, 15.
82 Proposición VII, 30.
83 Proposición VII, 33.



É evidente que ΔE ó multiplicarse a si mesmo fai A, mentres que ó multiplicar a EZ fai B e, ademais, que EZ ó multiplicarse a si mesmo fai Γ[84].

E, dado que ΔE e EZ son os menores, son primos entre si[85].

E, se dous números son primos entre si, tamén a súa suma é primo con respecto a un e outro[86]; logo, tamén ΔZ é primo con respecto tanto a ΔE como a EZ.

Pero tamén, efectivamente, ΔE é primo con respecto a EZ; logo, ΔZ e ΔE son primos con respecto a EZ. E, se dous números son primos con respecto a un número, tamén o seu produto é primo con respecto ó restante[87]; en consecuencia, o produto de ZΔ e ΔE é primo con respecto a EZ; en consecuencia, tamén o produto de ZΔ e ΔE é primo con respecto ó cadrado de EZ[88].

Pero o produto de ZΔ e ΔE é o cadrado de ΔE xunto co produto de ΔE e EZ[89]; logo, o cadrado de ΔE xunto co produto de ΔE e EZ é primo con respecto ó cadrado de EZ. E o cadrado de ΔE é A, mentres que o produto de ΔE e EZ é B, e o cadrado de EZ é Γ; logo, A e B sumados son primos con respecto a Γ; de xeito semellante poderemos demostrar que tamén B e Γ son primos con respecto a A[90].

Digo que tamén A e Γ son primos con respecto a B.

Pois ben, dado que ΔZ é primo con respecto tanto a ΔE como a EZ, tamén o cadrado de ΔZ é primo con respecto ó produto de ΔE e EZ.

---

[84] Véxase a Nota 12 (Proposición VIII, 2. Corolario).

[85] Proposición VII, 22.

[86] Proposición VII, 28.

[87] Proposición VII, 24.

[88] Proposición VII, 25.

[89] Proposición II, 3.

[90] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

Pero os cadrados de ΔE e EZ xunto con dúas veces o produto de ΔE e EZ son iguais ó cadrado de ΔZ[91]; logo, tamén os cadrados de ΔE e EZ xunto con dúas veces o produto de ΔE e EZ son primos con respecto ó produto de ΔE e EZ.

Por separación, os cadrados de ΔE e EZ xunto cunha vez o produto de ΔE e EZ son primos con respecto ó produto de ΔE e EZ[92]. Logo tamén, por separación, os cadrados de ΔE e EZ son primos con respecto ó produto de ΔE e EZ.

E o cadrado de ΔE é A, mentres que o produto de ΔE e EZ é B, e o cadrado de EZ, Γ.

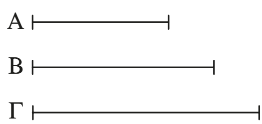
Logo, A e Γ sumados son primos con respecto a B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

Se dous números son primos entre si, como o primeiro é ó segundo, así non será o segundo a ningún outro.

Pois ben, sexan A e B dous números primos entre si; digo que como A é a B, así B a ningún outro.

Pois se é posible, como A a B, sexa B a Γ.



Pero A e B son primos, e os primos tamén os menores[93], e os números menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[94] —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; logo, A mide a B como antecedente a antecedente.

Pero tamén se mide a si mesmo; logo, A mide a A e B que son primos entre si, o que, sen dúbida, é absurdo.

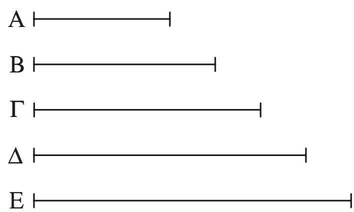
Logo, como A a B, así non será B a Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[91] Proposición II, 4.
[92] Proposición VII, 28.
[93] Proposición VII, 21.
[94] Proposición VII, 13. Proposición VII, 20.

PROPOSICIÓN 17

Se cantos números se queira son continuamente proporcionais e os seus extremos son primos entre si, como o primeiro ó segundo, así non será o último a algún outro.

Sexan A, B, Γ e Δ cantos números se queira continuamente proporcionais, e os seus extremos, A e Δ, sexan primos entre si; digo que como A é a B, así Δ a ningún outro.



Pois se é posible, como A a B, sexa así Δ a E; logo, por alternancia, como A é a Δ, B a E[95].

Pero A e Δ son primos, e os primos tamén os menores[96], e os números menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[97] —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—. Logo, A mide a B.

E, como A é a B, así B a Γ. Logo, tamén B mide a Γ[98]; en consecuencia, tamén A mide a Γ.

E, dado que como B é a Γ, Γ a Δ, e B mide a Γ, logo, tamén Γ mide a Δ.

Pero A medía a Γ; en consecuencia, tamén A mide a Δ. Pero tamén se mide a si mesmo. Logo, A mide a A e Δ que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, como A é a B, así Δ non será a algún outro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

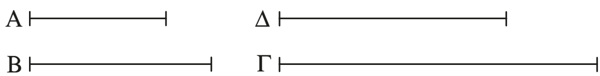
95 Proposición VII, 13.
96 Proposición VII, 21.
97 Proposición VII, 20.
98 Definición VII, 20.

PROPOSICIÓN 18

Dados dous números, pescudar se é posible achar un terceiro proporcional a eles.

Sexan os dous números dados A e B, e sexa preciso pescudar se é posible atopar un terceiro proporcional a eles.

Non sexan, agora, A e B primos entre si, e B ó multiplicarse a si mesmo faga Γ; entón A mide ou non mide a Γ.



Mídao, primeiro, segundo Δ; logo, A ó multiplicar a Δ fai Γ.

Pero, tamén, efectivamente, B ó multiplicarse a si mesmo fai Γ; logo, o produto de A e Δ é igual ó cadrado de B. Logo, como A é a B, así B a Δ[99]; logo, queda achado Δ, un número terceiro proporcional a A e B.

Agora no mida A a Γ; digo que é imposible atopar un número terceiro proporcional a A e B.

Pois ben, se é posible, atópese Δ. Logo, o produto de A e Δ é igual ó cadrado de B.

Pero o cadrado de B é Γ; logo, o produto de A e Δ é igual a Γ.

En consecuencia, A ó multiplicar a Δ fai Γ; logo, A mide a Γ segundo Δ. Pero, efectivamente, tamén se supón que non o mide; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, non é posible achar un número terceiro proporcional a A e B, cando A non mide a Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 19

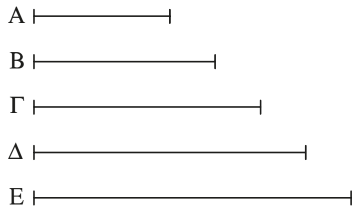
Dados tres números, pescudar cando é posible achar un cuarto proporcional a eles.

Sexan os tres números dados A, B e Γ, e sexa preciso pescudar cando é posible achar un cuarto proporcional a eles.

---

[99] Proposición VII, 19.

Entón, ou non son continuamente proporcionais e os seus extremos son primos entre si, ou son continuamente proporcionais e os seus extremos non son primos entre si, ou nin son continuamente proporcionais nin os seus extremos son primos entre si, ou, incluso, son continuamente proporcionais e os seus extremos son primos entre si.



Entón se A, B e Γ son continuamente proporcionais e os seus extremos, A e Γ, son primos entre si, queda demostrado que é imposible achar un número cuarto proporcional a eles[100].

Agora, non sexan A, B e Γ continuamente proporcionais, sendo outra vez os extremos primos entre si; digo que tamén así é imposible achar un cuarto proporcional a eles[101].

Pois ben, se é posible, áchese Δ, de xeito que, como A é a B, Γ a Δ, e resulte que, como B a Γ, Δ a E.

E, dado que como A é a B, Γ a Δ, mentres que como B a Γ, Δ a E, logo, por igualdade, como A a Γ, Γ a E[102].

Pero A e Γ son primos, e os primos tamén os menores[103], e os menores miden ós que gardan a mesma razón[104] —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente.

Logo, A mide a Γ como antecedente a antecedente. Pero tamén se mide a si mesmo; logo, A mide a A e Γ que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible.

---

100 Proposición IX, 17.

101 Esta afirmación é falsa: a pesar de que os números 3, 6, 5 non son continuamente proporcionais e 3 e 5 son primos entre si, o número 10 é cuarto proporcional a eles. Se A divide a B, existe Δ. A proba deste caso é incorrecta pois dá por suposto que, se A, B e Γ non son continuamente proporcionais cos extremos primos entre si e Δ é o cuarto proporcional, entón existe E tal que, como B é a Γ, Δ é a E. Se A e Γ son primos entre si e A é a B como Γ a Δ, entón non existe E tal que Δ é a E como B a Γ. As probas para os outros tres casos son correctas.

102 Proposición VII, 14.

103 Proposición VII, 21.

104 Proposición VII, 20.

Logo, non é posible achar un cuarto proporcional a A, B e Γ.

Agora sexan outra vez A, B e Γ continuamente proporcionais, pero A e Γ non sexan primos entre si; digo que é posible achar un cuarto proporcional a eles.

Pois ben, B ó multiplicar a Γ faga Δ; logo, A ou mide ou non mide a Δ.

Mídao primeiro segundo E; logo, A ó multiplicar a E fai Δ. Pero, tamén, efectivamente, B ó multiplicar a Γ fai Δ; logo, o produto de A e E é igual ó de B e Γ.

Logo, proporcionalmente, como A é a B, Γ a E[105]; logo, queda achado E, cuarto proporcional de A, B e Γ.

Non mida agora A a Δ; digo que é imposible achar un número cuarto proporcional de A, B e Γ.

Pois ben, se é posible, áchese E; logo, o produto de A e E é igual ó de B e Γ.

Pero o produto de B e Γ é Δ; logo, tamén o produto de A e E é igual a Δ.

Logo, A ó multiplicar a E fai Δ; logo, A mide a Δ segundo E; en consecuencia, A mide a Δ.

Pero, asemade, non o mide; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, non é posible achar un número cuarto proporcional de A, B e Γ, cando A non mide a Δ.

Agora, nin sexan A, B e Γ continuamente proporcionais nin os extremos sexan primos entre si. E B ó multiplicar a Γ faga Δ.

De xeito semellante poderemos demostrar que, se A mide a Δ, é posible achar un número proporcional a eles, pero se non o mide, imposible; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 20

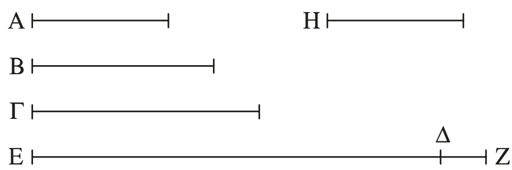
Os números primos son máis que toda cantidade proposta de números primos[106].

Sexan os números primos propostos A, B e Γ; digo que hai máis números primos que A, B e Γ.

[105] Proposición VII, 19.

[106] Hai infinitos números primos.

Pois ben, tómese o menor medido por A, B e Γ[107], sexa ΔE, e engádase a unidade ΔZ a ΔE.



Entón EZ ou é primo ou non.

Sexa, primeiro, primo; logo, quedan atopados os números primos A, B, Γ e EZ, máis que A, B e Γ.

Agora non sexa EZ primo; logo, é medido por algún número primo[108].

Sexa medido polo número primo H; digo que E non é o mesmo que ningún de entre A, B e Γ.

Pois ben, se é posible, séxao. Pero A, B e Γ miden a ΔE; logo, tamén H medirá a ΔE.

Pero tamén mide a EZ; e H, sendo un número, medirá á unidade restante, ΔZ; o que, sen dúbida, é absurdo.

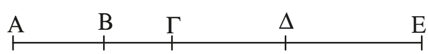
Logo, E non é o mesmo que un de entre A, B e Γ. E suponse primo.

Logo, quedan atopados A, B, Γ e H, máis números primos que a cantidade proposta, A, B e Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 21

Se se suman varios números pares, o total é par.

Pois ben, súmense AB, BΓ, ΓΔ e ΔE, varios números pares; digo que AE, o total, é par.



---

107 Proposición VII, 36. Esta Proposición VII, 36 proporciona o mínimo común múltiplo de tres números, pero a demostración pode estenderse ó cálculo do mínimo común múltiplo dun número calquera de números.

108 Proposición VII, 31.

Pois dado que tanto AB como BΓ, ΓΔ e ΔE son pares, teñen metade[109]; en consecuencia, tamén AE, o total, ten metade.

Pero número par é o que se divide á metade; logo AE é par; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 22

Se se suman varios números impares e a súa cantidade é par, o total será par.

Pois ben, súmense AB, BΓ, ΓΔ e ΔE, cantos números impares se queira, pares en cantidade; digo que AE, o total, é par.

Pois dado que tanto AB como BΓ, ΓΔ e ΔE son impares, restada unha unidade de cada un deles, cada un dos restantes será par[110]; en consecuencia, tamén a suma deles será par[111].

Pero é tamén par a cantidade de unidades. Logo, AE, o total, é par; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 23

Se se suman varios números impares e a súa cantidade é impar, tamén o total será impar.

Pois ben, súmense AB, BΓ e ΓΔ, varios números impares cuxa cantidade é impar; digo que tamén AΔ, o total, é impar.

Réstese de ΓΔ a unidade ΔE; logo, ΓE, o resto, é par[112].

Pero é tamén par ΓA[113]; logo, tamén AE, o total, é par.

E ΔE é unha unidade. Logo, AΔ é impar; o que, xustamente, era preciso demostrar.

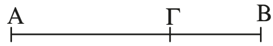
---

[109] Definición VII, 6.
[110] Definición VII, 7.
[111] Proposición IX, 21.
[112] Definición VII, 7.
[113] Proposición IX, 22.

PROPOSICIÓN 24

Se dun número par se resta un número par, o resto será par.

Pois ben, réstese o número par ΒΓ do número par ΑΒ; digo que o resto, ΓΑ, é par.



Pois, dado que ΑΒ é par, ten unha metade[114].

Entón, polo mesmo, tamén ΒΓ ten unha metade; en consecuencia, tamén o resto, ΓΑ, ten unha metade, logo, ΑΓ é par; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 25

Se dun número par se resta un número impar, o resto será impar.

Pois ben, réstese o número impar ΒΓ do número par ΑΒ; digo que o resto, ΓΑ, é impar.

Pois ben, réstese a unidade ΓΔ de ΒΓ; logo, ΔΒ é par[115].

Pero tamén é par ΑΒ; logo, tamén ΑΔ, o resto, é par[116].

E ΓΔ é unha unidade; logo, ΓΑ é impar; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 26

Se dun número impar se resta un número impar, o resto será par.

Pois ben, réstese o número impar ΒΓ do número impar ΑΒ; digo que o resto, ΓΑ, é par.

114 Definición VII, 6.
115 Definición VII, 7.
116 Proposición IX, 24.

Pois, dado que AB é impar, réstese a unidade BΔ; logo AΔ, o resto, é par[117].

Entón, polo mesmo, tamén ΓΔ é par; en consecuencia, tamén ΓA, o resto, é par[118]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 27

Se dun número impar se resta un número par, o resto será impar.

Pois ben, réstese o número par BΓ do número impar AB; digo que o resto, ΓA, é impar.

Réstese a unidade AΔ; logo, ΔB é par.

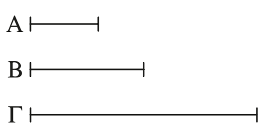
Pero tamén BΓ é par; logo, tamén ΓΔ, o resto, é par[119].

Logo, ΓA, impar[120]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 28

Se un número impar ó multiplicar a un par fai un, o produto será par.

Pois ben, o número impar A ó multiplicar ó par B faga Γ; digo que Γ é par.



Pois, dado que A ó multiplicar a B fai Γ, logo, Γ está composto de tantos iguais a B como unidades hai en A[121].

E B é par; logo, Γ está composto de pares.

117 Definición VII, 7.
118 Proposición IX, 24.
119 Proposición IX, 24.
120 Definición VII, 7.
121 Definición VII, 15.

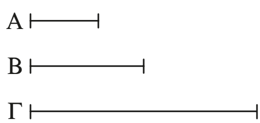
Pero se varios números pares se suman, o total é par[122].

Logo Γ é par; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 29

Se un número impar ó multiplicar a un número impar fai un, o produto será impar.

Pois ben, o número impar A ó multiplicar ó impar B faga Γ; digo que Γ é impar.



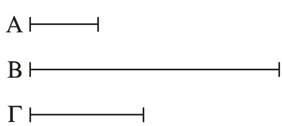
Pois ben, dado que A ó multiplicar a B fai Γ, logo, Γ está composto de tantos iguais a B como unidades hai en A[123].

E tanto A como B son impares; logo, Γ está composto de números impares cuxo número é impar. En consecuencia, Γ é impar[124]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 30

Se un número impar mide a un número par, medirá tamén á súa metade.

Pois ben, mida o número impar A ó par B; digo que tamén medirá á súa metade.



Pois, dado que A mide a B, mídao segundo Γ; digo que Γ non é impar.

Pois ben, se é posible, séxao.

---

[122] Proposición IX, 21.

[123] Definición VII, 15.

[124] Proposición IX, 23.

E, dado que A mide a B segundo Γ, logo, A ó multiplicar a Γ fai B.

Logo, B está composto de números impares cuxa cantidade é impar[125]. Logo, B é impar[126]; o que, sen dúbida, é absurdo —pois suponse par.

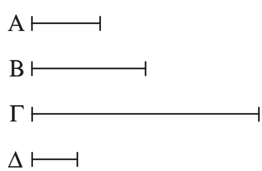
Logo, Γ non é impar; logo, Γ é par.

En consecuencia, A mide a B un número par de veces. Entón, polo mesmo, tamén medirá á súa metade; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 31

Se un número impar é primo con respecto a algún número, tamén será primo con respecto ó dobre del.

Pois ben, sexa o número impar A primo con respecto a un número B, mentres que Γ sexa o dobre que B; digo que A é primo con respecto a Γ.



Pois, se non son primos, un número mediraos.

Mídaos e sexa Δ.

E A é impar; logo, é impar tamén Δ[127].

E, dado que Δ, sendo impar, mide a Γ, e Γ é par, logo, tamén medirá á metade de Γ[128].

Pero a metade de Γ é B; logo, Δ mide a B.

Pero tamén mide a A. Logo, Δ mide a A e B que son primos entre si; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, non ocorre que A non é primo con respecto a Γ.

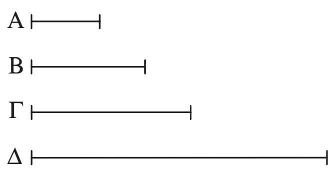
125 Definición VII, 15.
126 Proposición IX, 23.
127 Proposición IX, 22.
128 Proposición IX, 30.

Logo, A e Γ son primos entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 32

Cada un dos números duplicados a partir dunha díade só é par un número par de veces*[129]*.

Pois ben, a partir da díade A, resulten B, Γ e Δ, cantos números duplicados se queira; digo que B, Γ e Δ só son pares un número par de veces.



Efectivamente, é evidente que tanto B como Γ e Δ son pares un número par de veces —pois foron duplicados a partir dunha díade—; digo que tamén só son pares un número par de veces.

Pois ben, tómese unha unidade.

Pois, dado que varios números a partir dunha unidade son continuamente proporcionais, e A, o seguinte a partir da unidade, é primo, Δ, o maior de entre A, B, Γ e Δ, non será medido por ningún outro fóra de A, B e Γ[130].

E, tanto A como B e Γ son pares; logo, Δ é só par un número par de veces.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén tanto B como Γ só son pares un número par de veces; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

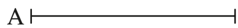
[129] Todos os números que se obtén por duplicación de forma continua do número dous —todas as potencias de 2: 2^2, 2^3, ..., 2^n, ...— só poden obterse como produto de dous pares («Par un número par de veces», Definición VII, 8). Non son iguais ó produto dun número impar por un número par («Impar un número par de veces», Definición VII, 9) nin ó produto dun impar por un impar (« impar un número impar de veces», Definición VII, 10).

[130] Proposición IX, 13.

PROPOSICIÓN 33

Se un número ten impar a metade, só será impar un número par de veces*[131]*.

Pois ben, o número A teña a metade impar; digo que A só é impar un número par de veces.



Efectivamente é evidente que é impar un número par de veces; pois a súa metade, sendo impar, mídeo un número par de veces.

Digo agora que tamén só é impar un número par de veces.

Pois se A é tamén par un número par de veces[132], será medido por un número par segundo un número par; en consecuencia, a súa metade, sendo impar, será medida por un número par; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, A só é impar un número par de veces; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 34

Se un número non é dos duplicados a partir dunha díade nin ten a metade impar*[133]*, é par un número par de veces*[134] *e impar un número par de veces*[135]*.

Pois ben, o número A non sexa dos duplicados a partir dunha díade nin teña a metade impar; digo que A é par un número par de veces e impar un número par de veces.

Efectivamente é evidente que A é par un número par de veces —pois non ten a metade impar.

Digo agora que tamén é impar un número par de veces.

---

[131] Definición VII, 9.

[132] Definición VII, 8.

[133] Un número que non é potencia de 2 e a súa metade é par.

[134] Definición VII, 8.

[135] Definición VII, 9.

Pois se dividimos A á metade, e a súa metade á metade, e facemos iso continuamente, chegaremos a un número impar que medirá a A segundo un número par.

Pois se non, chegaremos a unha díade e A será dos duplicados a partir dunha díade; o que, xustamente, se supón que non.

En consecuencia, A é impar un número par de veces.

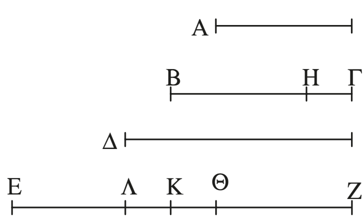
Pero foi demostrado que tamén é par un número par de veces.

Logo, A é par un número par de veces e impar un número impar de veces; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 35

Se cantos números se queira son continuamente proporcionais e se restan do segundo e do último números iguais ó primeiro, como o exceso do segundo é ó primeiro, así será o exceso do último a todos os anteriores a el mesmo*[136]*.

Sexan A, ΒΓ, Δ e EZ cantos números se queira continuamente proporcionais empezando dende o menor, A, e réstese de ΒΓ e de EZ tanto BH como ZΘ, iguais cada un a A; digo que como ΗΓ é a A, así EΘ a A, ΒΓ e Δ[137].



Pois ben, fágase ZK igual a ΒΓ, e ZΛ igual a Δ.

E, dado que ZK é igual a ΒΓ, parte dos cales, ZΘ, é igual a BH, logo, ΘK, o resto, é igual a ΗΓ, o resto.

---

136 Esta proposición proporciona o cálculo da suma de n termos dunha progresión xeométrica. Se temos unha progresión xeométrica de razón r: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1} entón $(a_2 - a_1)/a_1 = (a_{n+1} - a_1)/(a_1 + a_2 + ... + a_n)$. Tendo en conta que $a_i = a_1 r^{i-1}$ se denotamos $S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n)$, temos que $S_n = a_1(r^n - 1)/(r - 1)$.

137 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

E, dado que como EZ é a Δ, así Δ a BΓ, e BΓ a A[138], mentres que Δ é igual a ZΛ, BΓ a ZK, e A a ZΘ, logo, como EZ é a ZΛ, así ΛZ a ZK, e ZK a ZΘ.

Por separación, como EΛ a ΛZ, así ΛK a ZK, e KΘ a ZΘ[139].

Logo, tamén, como un dos antecedentes é a un dos consecuentes, así todos os antecedentes a todos os consecuentes[140]; logo, como KΘ a ZΘ, así EΛ, ΛK e KΘ a ΛZ, ZK e ΘZ.

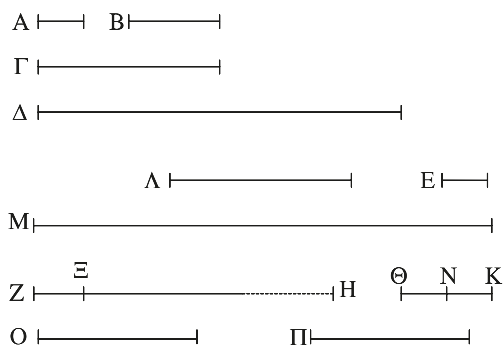
Pero KΘ é igual a ΓH, mentres que ZΘ a A, e ΛZ, ZK e ΘZ a Δ, BΓ e A; logo, como ΓH é a A, así EΘ a Δ, BΓ e A.

Logo, como o exceso do segundo é ó primeiro, así o exceso do último a todos os anteriores a el mesmo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 36

Se a partir dunha unidade se mostran varios números continuamente en proporción duplicada ata que a suma total resulte número primo, e o total multiplicado polo último fai un número, o produto será perfecto.

Pois ben, a partir dunha unidade móstrense A, B, Γ e Δ, cantos números se queira en proporción duplicada ata que a suma total resulte número primo, sexa E igual ó total, e E ó multiplicar a Δ faga ZH; digo que ZH é perfecto.



138 Proposición VII, 13.

139 Proposición VII, 11 en combinación coa Proposición VII, 13.

140 Proposición VII, 12.

Pois ben, cantos son en cantidade Α, Β, Γ e Δ, tómense tantos números, Ε, ΘΚ, Λ e Μ, a partir de Ε en proporción duplicada; logo, por igualdade, como Α é a Δ, así Ε a Μ[141]. Logo, o produto de Ε e Δ é igual ó de Α e Μ[142].

E o produto de Ε e Δ é ΖΗ; logo, tamén o produto de Α e Μ é ΖΗ. Logo, Α ó multiplicar a Μ fai ΖΗ; logo, Μ mide a ΖΗ segundo as unidades de Α[143].

E Α é unha díade; logo, ΖΗ é o dobre que Μ. Pero tamén Μ, Λ, ΘΚ e Ε son sucesivamente dobres uns dos outros.

Logo, Ε, ΘΚ, Λ, Μ e ΖΗ son continuamente proporcionais en proporción duplicada.

Réstese agora do segundo, ΘΚ, e do último, ΖΗ, tanto ΘΝ como ΖΞ, cada un igual ó primeiro, a Ε; logo, como o exceso do segundo número é ó primeiro, así o exceso do último a todos os anteriores a el mesmo[144]. Logo, como ΝΚ é a Ε, así ΞΗ a Μ, Λ, ΚΘ e Ε[145].

E ΝΚ é igual a Ε; logo, tamén ΞΗ é igual a Μ, Λ, ΘΚ e Ε. Pero tamén ΖΞ é igual a Ε, e Ε a Α, Β, Γ, Δ e a unidade[146]. Logo, o total, ΖΗ, é igual a Ε, ΘΚ, Λ e Μ mais Α, Β, Γ, Δ e a unidade[147]; e é medido por eles.

Digo que, ademais, ΖΗ non será medido por ningún outro fóra de Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ e a unidade.

Pois ben, se é posible, mida Ο a ΖΗ, e Ο non sexa o mesmo que ningún de entre Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ e Μ.

E, cantas veces Ο mide a ΖΗ, tantas unidades haxa en Π; logo, Π ó multiplicar a Ο fai ΖΗ.

Pero, tamén, efectivamente, Ε ó multiplicar a Δ fai ΖΗ; logo, como Ε é a Π, Ο a Δ[148]. E, dado que Α, Β, Γ e Δ son continua-

141 Proposición VII, 14.

142 Proposición VII, 19.

143 Definición VII, 15.

144 Proposición IX, 35.

145 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

146 Ε é igual a suma de Α, Β, Γ, Δ e a unidade.

147 ΖΗ é igual a suma dos nove sumandos Ε, ΘΚ, Λ, Μ, Α, Β, Γ, Δ e a unidade.

148 Proposición VII, 19.

mente proporcionais a partir dunha unidade, logo, Δ non será medido por ningún outro número fóra de A, B e Γ[149].

E suponse que O non é o mesmo que ningún de entre A, B e Γ; logo, O non medirá a Δ.

Pero, como O a Δ, E a Π; logo, tampouco E mide a Π[150].

E E é primo; e todo número primo é primo con respecto a todo aquel ó que non mide[151]. Logo, E e Π son primos entre si.

E os primos son tamén os menores[152], e os menores miden as mesmas veces ós que gardan a mesma razón[153] —o antecedente ó antecedente e o consecuente ó consecuente—; e como E é a Π, O a Δ; logo, E mide a O as mesmas veces que Π a Δ.

Pero Δ non é medido por ningún outro fóra de A, B e Γ; logo, Π é o mesmo que un de entre A, B e Γ.

Sexa o mesmo que B. E cantos son en cantidade B, Γ e Δ, a partir de E tómense tantos E, ΘK e Λ. E E, ΘK e Λ están na mesma razón que B, Γ e Δ; logo, por igualdade, como B é a Δ, E a Λ[154].

Logo, o produto de B e Λ é igual ó de Δ e E[155]; pero, o produto de Δ e E é igual ó de Π e O; logo, tamén o produto de Π e O é igual ó de B e Λ.

Logo, como Π é a B, Λ a O.

E Π é o mesmo que B; logo, tamén Λ é o mesmo que O; o que, sen dúbida, é imposible —pois suponse que O non é o mesmo que ningún dos números tomados.

Logo, ningún número medirá a ZH, fóra de A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M e a unidade.

E foi demostrado que ZH é igual a A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M e a unidade.

E un número perfecto é o que é igual as súas propias partes[156]; logo, ZH é perfecto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

149 Proposición IX, 13.
150 Definición VII, 20.
151 Proposición VII, 29.
152 Proposición VII, 21.
153 Proposición VII, 20.
154 Proposición VII, 14.
155 Proposición VII, 19.
156 Definición VII, 22.

LIBRO X

DEFINICIÓNS 1

1. Chámanse magnitudes conmensurables[1] as medidas pola mesma medida, e inconmensurables aquelas das que non é posible que haxa medida común[2].
2. As rectas son conmensurables en cadrado[3] cando os seus cadrados son medidos pola mesma área, e inconmensurables cando non é posible que haxa unha área que sexa medida común para os seus cadrados.
3. Suposto isto, demóstrase que hai rectas infinitas en cantidade conmensurables e inconmensurables —unhas en lonxitude só e outras tamén en cadrado— cunha recta proposta. Entón chámese expresable[4] a recta proposta, e as conmensurables con ela ou en lonxitude e cadrado ou só en cadrado, expresables, mentres que as inconmensurables con ela chámense non expresables[5].

---

[1] «Conmensurable» é a tradución fixada pola tradición a partir do latín para o termo grego σύμμετρος; o helenismo máis próximo, «simétrico/-a», aplicouse a outros significados.

[2] A definición de «conmensurable» e «inconmensurable» é aplicable a pares de magnitudes. Se a e b son magnitudes conmensurables e d é unha medida común, entón existen dous números naturais m e n tal que $a = dm$, $b = dn$ e $a:b::m:n$ que é equivalente a que $an = bm$. Logo que a e b sexan magnitudes conmensurables equivale a que existan dous números naturais m e n tal que $a:b::m:n$ que equivale a que $an = bm$ e a que $a/m = b/n$. Véxase a Proposición X, 5.

[3] A palabra grega empregada é δύναμις, «capacidade para algo»; na nosa tradución, seguimos a Heath quen sinala que, na xeometría grega, esta palabra ten o significado técnico de «potencia ó cadrado», é dicir, unha capacidade concreta. Tanto o substantivo δύναμις como o verbo correspondente δύναμαι, aparecen no texto euclidiano cos seus significados orixinarios —«capacidade» e «ter a capacidade de»— restrinxidos, expresando só a operación xeométrica derivada da capacidade dunha recta para xerar un cadrado. As nosas traducións axustaranse sempre a estes significados técnicos, con algunhas variantes debidas ó contexto.

[4] Con «expresable» e «non expresable» traducimos respectivamente ῥητός e ἄλογος, fronte a «racional» e «irracional» das traducións tradicionais. Ῥητός, «expresable», é menos restritivo que o concepto actual de número racional, xa que para que dúas magnitudes sexan «expresables» —segundo Euclides— basta con que os seus cadrados garden a mesma razón que dous números enteiros. En canto a ἄλογος, o seu significado propio é tanto «inexpresable» como «irracional»; optamos polo primeiro porque aquí está usado en oposición a ῥητός; ademais, como xa queda dito, o concepto «racional» actual difire do euclidiano.

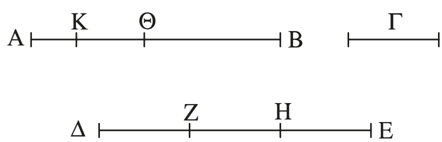
[5] Toma unha liña recta como referencia inicial á que chama expresable; as demais rectas son expresables ou non expresables con respecto á liña recta que tomou como refe-

4. E o cadrado da recta proposta chámese expresable, e as áreas conmensurables con este, expresables, mentres que as inconmensurables con este, non expresables, e as rectas que os producen[6], non expresables —se as áreas son cadrados, os propios lados, mentres que se son algunhas outras figuras rectilíneas, as rectas que constrúen cadrados iguais a elas.

PROPOSICIÓN 1

Tomadas dúas magnitudes desiguais, se da maior se quita unha maior que a metade e, da que queda, unha maior que a metade e se fai iso sucesivamente, quedará unha magnitude que será menor que a magnitude menor tomada.

Sexan AB e Γ dúas magnitudes desiguais, das cales, AB é a maior; digo que, se de AB se quita unha maior que a metade e, da que queda, unha maior que a metade, e se fai iso sucesivamente, quedará unha magnitude que será menor que a magnitude Γ.



Pois ben, Γ multiplicada será algunha vez maior que AB[7].

Multiplíquese, sexa ΔE múltiplo de Γ e maior que AB, divídase ΔE en ΔZ, ZH e HE iguais a Γ, de AB quítese BΘ, maior que a metade, mentres que de AΘ, ΘK, maior que a metade, e fágase iso sucesivamente ata que as divisións de AB cheguen a ser iguais en número ás divisións de ΔE.

rencia. Se a é a recta inicial, unha recta b é expresable se $b{:}a{::}m{:}n$ ou $b^2{:}a^2{::}m{:}n$, con m e n números naturais. É dicir $b = a(m/n)$, se a e b son conmensurables, ou $b = a\sqrt{m/n}$, non sendo m/n un cadrado, se a e b son conmensurables só en cadrado.

[6] É dicir, as rectas que teñen a capacidade de dar lugar a eses cadrados, segundo o uso técnico mencionado do verbo δύναμαι —véxase a Nota 3 (Definición X, 1.2).

[7] Definición V, 4.

Entón, sexan AK, KΘ e ΘB divisións que son iguais en cantidade a ΔZ, ZH e HE; e, dado que ΔE é maior que AB e que de ΔE se quitou EH, menor que a metade, mentres que de AB, BΘ, maior que a metade, logo, a restante HΔ é maior que a restante ΘA.

E, dado que HΔ é maior que ΘA e que de HΔ se quitou a metade, HZ, mentres que de ΘA, ΘK, unha magnitude maior que a metade, logo, a restante ΔZ é maior que a restante AK.

Pero ΔZ é igual a Γ; logo, tamén, Γ é maior que AK. Logo, AK é menor que Γ.

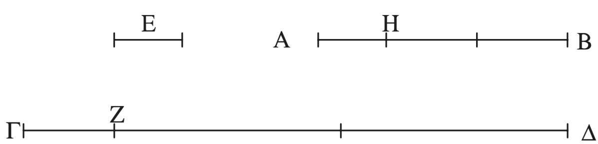
Logo, da magnitude AB, queda a magnitude AK que é menor que a menor magnitude proposta, Γ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

De xeito semellante poderase demostrar tamén se o quitado son metades[8].

PROPOSICIÓN 2

Se, ó ir quitando sucesivamente de dúas magnitudes desiguais a menor da maior, a que queda nunca mide á anterior a ela mesma, as magnitudes serán inconmensurables.

Pois ben, sendo AB e ΓΔ dúas magnitudes desiguais, e AB a menor, ó ir quitando sucesivamente a menor da maior, non mida nunca a que queda á anterior a ela mesma; digo que as magnitudes AB e ΓΔ serán inconmensurables.



Pois, se son conmensurables, algunha magnitude mediraas[9]. Mídaas, se é posible, e sexa E; e AB, ó medir a ZΔ, deixe ΓZ menor que ela mesma, mentres que ΓZ, ó medir a BH, deixe AH

[8] É a única vez que inclúe un comentario, despois da apostila final, para indicar un resultado alternativo.

[9] Definición X. 1.1.

menor que ela mesma, e ocorra iso sempre ata que quede unha magnitude que sexa menor que E.

Ocorra iso e quede AH menor que E. Entón, dado que E mide a AB pero AB mide a ΔZ, logo, tamén E medirá a ZΔ. Pero mide tamén a ΓΔ enteira; logo, tamén medirá á restante, ΓZ.

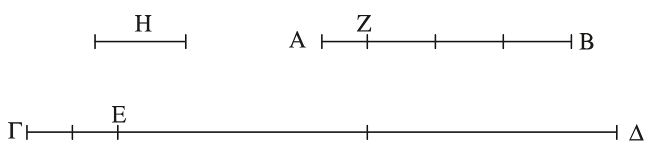
Pero ΓZ mide a BH; logo, tamén E mide a BH. Pero mide tamén a AB enteira; logo, tamén medirá á restante, AH —a maior á menor—; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningunha magnitude medirá ás magnitudes AB e ΓΔ; logo, son inconmensurables as magnitudes AB e ΓΔ. Logo, se de dúas magnitudes desiguais etc[10].

PROPOSICIÓN 3

Dadas dúas magnitudes conmensurables, atopar a súa máxima medida común.

Sexan AB e ΓΔ as dúas magnitudes conmensurables dadas, das cales AB é a menor; é preciso, entón, atopar a máxima medida común de AB e ΓΔ.



Pois ben, a magnitude AB ou mide a ΓΔ ou non. Entón, se a mide e se mide tamén a si mesma, logo, AB é medida común de AB e ΓΔ. E é evidente que tamén a máxima; pois a AB non a medirá unha maior que a magnitude AB.

Non mida agora AB a ΓΔ. E, ó ir quitando sucesivamente a menor da maior, a que queda medirá algunha vez á anterior a ela mesma por non ser inconmensurables AB e ΓΔ[11]; e AB, medindo a EΔ, deixe a EΓ menor que ela mesma, mentres que

10 A primeira vez que aparece esta fórmula para a conclusión da proposición.

11 Proposición X, 2.

ΕΓ, medindo a ZB, deixe a AZ menor que ela mesma, e AZ mida a ΓΕ.

Entón, dado que AZ mide a ΓΕ pero ΓΕ mide a ZB, logo, tamén AZ medirá a ZB. Pero mídese tamén a ela mesma; logo, tamén AZ medirá a AB enteira.

Pero AB mide a ΔΕ; logo, tamén AZ medirá a ΕΔ. Pero mide tamén a ΓΕ; logo, tamén mide a ΓΔ enteira; logo, AZ é medida común de AB e ΓΔ.

Digo agora que tamén a máxima.

Pois se non, haberá algunha magnitude maior que AZ que medirá a AB e ΓΔ. Sexa H.

Entón, dado que H mide a AB pero AB mide a ΕΔ, logo, tamén H medirá a ΕΔ. Pero mide tamén a ΓΔ enteira; logo, tamén H medirá á restante, ΓΕ. Pero ΓΕ mide a ZB; logo, tamén H medirá a ZB. Pero mide tamén a AB enteira e medirá á restante, AZ, a maior á menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningunha magnitude maior que AZ medirá a AB e ΓΔ; logo, AZ é a máxima medida común de AB e ΓΔ.

Logo, dadas dúas magnitudes conmensurables, AB e ΓΔ, queda atopada a máxima medida común; o que, xustamente, era preciso demostrar.

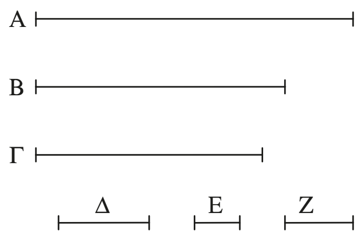
Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se unha magnitude mide a dúas magnitudes, tamén medirá á súa máxima medida común.

PROPOSICIÓN 4

Dadas tres magnitudes conmensurables, atopar a súa máxima medida común*[12]*.

Sexan A, B e Γ as tres magnitudes conmensurables dadas; é preciso, entón, atopar a máxima medida común de A, B e Γ.

12 Nótese o paralelismo das proposicións 2, 3 e 4 deste libro X coas proposicións 1, 2 e 3 do libro VII.



Pois ben, tómese a máxima medida común de dúas, A e B, e sexa Δ[13]; entón, Δ ou mide ou non a Γ.

Mídaa, primeiro; entón, dado que Δ mide a Γ e mide tamén a A e B, logo, Δ mide a A, B e Γ; logo, Δ é medida común de A, B e Γ.

E é evidente que tamén a máxima —pois ningunha maior que a magnitude Δ mide a A e B.

Agora non mida Δ a Γ; digo, primeiro, que Γ e Δ son conmensurables.

Pois, dado que A, B e Γ son conmensurables, mediraas algunha magnitude que evidentemente tamén medirá a A e B. En consecuencia, tamén medirá á máxima medida común de A e B, a Δ[14].

E mide tamén a Γ; en consecuencia, a magnitude dita medirá a Γ e Δ; logo, Γ e Δ son conmensurables[15].

Tómese entón a súa máxima medida común e sexa E. Entón, dado que E mide a Δ, mentres que Δ mide a A e B, logo, tamén E medirá a A e B; e mide tamén a Γ; logo, E mide a A, B e Γ; logo, E é medida común de A, B e Γ.

Digo agora que tamén a máxima.

Pois ben, se é posible, sexa Z unha magnitude maior que E, e mida a A, B e Γ.

E, dado que Z mide a A, B e Γ, tamén medirá a A e B, e medirá á máxima medida común de A e B.

---

13 Proposición X, 3.

14 Proposición X, 3. Corolario.

15 Definición X, 1.1.

E a máxima medida común de A e B é Δ; logo, Z mide a Δ; pero mide tamén a Γ; logo, Z mide a Γ e Δ; logo, Z tamén medirá á máxima medida común de Γ e Δ.

Pero é E; logo, Z medirá a E, a maior á menor; o que, sen dúbida é imposible.

Logo, ningunha maior que a magnitude E mide a A, B e Γ; logo, E é a máxima medida común de A, B e Γ, se non mide Δ a Γ, pero se a mide, a propia Δ.

Logo, dadas tres magnitudes conmensurables, queda atopada a máxima medida común.

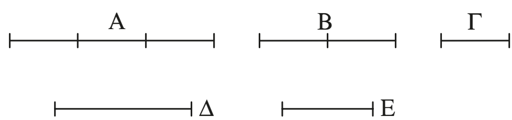
Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se unha magnitude mide a tres magnitudes, tamén medirá á súa máxima medida común.

Entón, de xeito semellante, tamén se poderá achar a máxima medida común de máis, e o corolario estenderase. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

As magnitudes conmensurables gardan entre si a razón que garda un número cun número.

Sexan A e B magnitudes conmensurables; digo que A garda con B a razón que garda un número cun número.



Pois ben, dado que A e B son conmensurables, algunha magnitude mediraas. Mídaas e sexa Γ.

E, cantas veces Γ mide a A, tantas unidades haxa en Δ, mentres que, cantas veces Γ mide a B, tantas unidades haxa en E.

Entón, dado que Γ mide a A segundo as unidades de Δ e, tamén, a unidade mide a Δ segundo as súas unidades, logo, a unidade mide ó número Δ as mesmas veces que a magnitude Γ á

A; logo como Γ é a A, así a unidade a Δ[16]; logo, á inversa, como A a Γ, así Δ á unidade[17].

Asemade, dado que Γ mide a B segundo as unidades de E, e tamén a unidade mide a E segundo as súas unidades, logo, a unidade mide a E as mesmas veces que Γ a B; logo, como Γ é a B, así a unidade a E.

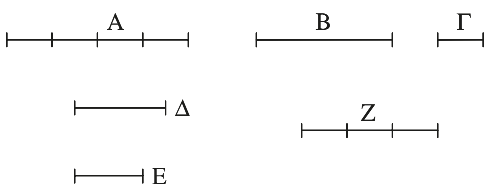
Pero foi demostrado tamén que como A a Γ, Δ á unidade; logo, por igualdade, como A é a B, así o número Δ a E[18].

Logo, as magnitudes conmensurables A e B gardan entre si a razón que garda o número Δ co número E; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se dúas magnitudes gardan entre si a razón que garda un número cun número, as magnitudes serán conmensurables.

Pois ben, garden entre si as dúas magnitudes A e B a razón que garda o número Δ co número E; digo que as magnitudes A e B son conmensurables.



Pois ben, divídase A en tantas magnitudes iguais como unidades hai en Δ, e sexa Γ igual a unha delas; estea composta Z de tantas magnitudes iguais a Γ como unidades hai en E.

---

16 Proposición V, 15; Proposición V, 16 e Definición VII, 20. Euclides dá dúas definicións independentes para o concepto de proporción: a Definición V, 6 para magnitudes e a Definición VII, 20 para números. Para a proba desta Proposición X, 5 dá por suposto que a proporción entre números é un caso particular da proporción entre magnitudes.

17 Proposición V, 7. Corolario.

18 Proposición V, 22.

Entón, dado que, cantas unidades hai en Δ, tantas magnitudes iguais a Γ hai tamén en A, logo, a parte que a unidade é de Δ, a mesma parte é tamén Γ de A; logo, como Γ é a A, así a unidade a Δ[19].

Pero a unidade mide ó número Δ; logo, tamén mide Γ a A. E, dado que como Γ é a A, así a unidade ó número Δ, logo, á inversa, como A a Γ, así o número Δ á unidade[20].

Asemade, dado que cantas unidades hai en E, tantas hai tamén en Z iguais a Γ, logo, como Γ é a Z, así a unidade ó número E[21].

Pero foi demostrado tamén que como A a Γ, así Δ á unidade; logo, por igualdade, como A é a Z, así Δ a E[22].

Pero como Δ a E, así é A a B; logo, tamén como A a B, así tamén a Z[23].

Logo, A garda a mesma razón tanto con B como con Z; logo, é igual B a Z[24].

Pero Γ mide a Z; logo, mide tamén a B. Pero efectivamente, tamén a A; logo, Γ mide a A e B. Logo, é conmensurable A con B.

Logo, se dúas magnitudes entre si etc.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se hai dous números —como Δ e E— e unha recta —como A—, é posible facer que a recta sexa a unha recta, así como o número Δ ó número E.

Pero se tamén se toma unha media proporcional entre A e Z[25] —como B[26]—, como A é a Z, así será o cadrado de A ó de B, é dicir, que, como a primeira á terceira, así a construída a

19 Definición VII, 20.

20 Proposición V, 7. Corolario.

21 Definición VII, 20.

22 Proposición V, 22.

23 Proposición V, 11.

24 Proposición V, 9.

25 Z é a recta que acaba de afirmar que é posible facer tal que A é a Z como o número Δ ó número E.

26 Proposición VI, 13.

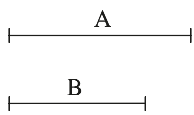
partir da primeira á construída a partir da segunda, semellante e debuxada de xeito semellante[27].

Pero como A a Z, así é o número Δ ó número E; logo, resultou tamén que, como o número Δ ó número E, así a figura a partir da recta A a aquela a partir da recta B; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

As magnitudes inconmensurables non gardan entre si a razón que garda un número cun número.

Sexan A e B magnitudes inconmensurables; digo que A non garda con B a razón que garda un número cun número.



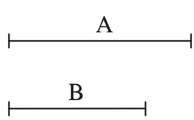
Pois se A garda con B a razón que garda un número cun número, será conmensurable A con B[28]. Pero non é; logo, A non garda con B a razón que garda un número cun número.

Logo, as magnitudes inconmensurables non gardan entre si a razón etc.

PROPOSICIÓN 8

Se dúas magnitudes non gardan entre si a razón que garda un número cun número, as magnitudes serán inconmensurables.

Non garden entre si as dúas magnitudes A e B a razón que garda un número cun número; digo que son inconmensurables as magnitudes A e B.



[27] Proposición VI, 19. Corolario.

[28] Proposición X, 6.

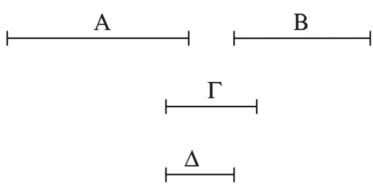
Pois, se son conmensurables, A gardará con B a razón que garda un número cun número[29]. Pero non a garda. Logo, son inconmensurables as magnitudes A e B.

Logo, se dúas magnitudes entre si etc.

PROPOSICIÓN 9

Os cadrados de rectas conmensurables en lonxitude gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; e os cadrados que gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado tamén terán os lados conmensurables en lonxitude. Pero os cadrados das rectas inconmensurables en lonxitude non gardan entre si a razón que un número cadrado cun número cadrado; e os cadrados que non gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado tampouco terán os lados conmensurables en lonxitude.

Pois ben, sexan A e B conmensurables en lonxitude; digo que o cadrado de A garda co cadrado de B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado.



Pois ben, dado que é conmensurable A con B en lonxitude, logo, A garda con B a razón que garda un número cun número[30]. Garde a que garda Γ con Δ.

Entón, dado que, como A é a B, así Γ a Δ, pero a do cadrado de A co cadrado de B é razón duplicada da razón de A con B —pois as figuras semellantes están en razón duplicada dos

29 Proposición X, 5.
30 Proposición X, 5.

lados correspondentes[31]—, e dado que a do cadrado de Γ co cadrado de Δ é razón duplicada da de Γ con Δ —pois entre dous números cadrados hai un número que é media proporcional e o cadrado garda co cadrado razón duplicada da que garda o lado co lado[32]—, logo, tamén, como o cadrado de A é ó cadrado de B, así o cadrado de Γ ó cadrado de Δ.

Agora, como o cadrado de A ó de B, sexa así o cadrado de Γ ó cadrado de Δ; digo que é conmensurable A con B en lonxitude.

Pois, dado que, como o cadrado de A é ó de B, así o cadrado de Γ ó de Δ, pero a do cadrado de A co cadrado de B é razón duplicada da razón de A con B, mentres que a do cadrado de Γ co número cadrado do número Δ é razón duplicada da razón do número Γ co número Δ, logo, tamén como A é a B, así Γ a Δ.

Logo, A garda con B a razón que o número Γ co número Δ; logo, é conmensurable A con B en lonxitude[33].

Sexa agora inconmensurable A con B en lonxitude; digo que o cadrado de A non garda co de B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado.

Pois se o cadrado de A garda co de B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, será conmensurable A con B. Pero non é; logo, o cadrado de A non garda co de B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado.

Por outra parte, agora, o cadrado de A non garde co de B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; digo que é inconmensurable A con B en lonxitude.

Pois se é conmensurable A con B, o cadrado de A gardará co cadrado de B a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Pero non a garda; logo, non é conmensurable A con B en lonxitude.

Logo, os cadrados das conmensurables en lonxitude etc[34].

---

31 Proposición VI, 20. Corolario.
32 Proposición VIII, 11.
33 Proposición X, 6.
34 Un escolio atribúe a Teeteto este teorema.

Corolario.- E será evidente a partir do demostrado que as conmensurables en lonxitude sempre o son tamén en cadrado, pero as en cadrado non sempre o son tamén en lonxitude[35].

Lema[36]

Está demostrado nos libros de aritmética que os números planos semellantes gardan entre si a mesma razón que garda un número cadrado cun número cadrado[37], e que, se dous números gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, son planos semellantes[38]. E é evidente a partir disto que os números planos non semellantes, é dicir, os que non teñen os lados proporcionais, non gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado

[35] Nalgúns manuscritos aparecen a continuación uns parágrafos que Heiberg e Heath consideran espurios por superfluos e non do estilo de Euclides. Por tratarse dun texto longo e que aparece nos manuscritos considerados máis próximos ó autor, achegamos a tradución: «se ben é verdade que os cadrados das rectas conmensurables en lonxitude gardan a razón que garda un número cadrado cun número cadrado e os que gardan a razón que garda un número cun número son conmensurables. En consecuencia, as rectas conmensurables en lonxitude non son só conmensurables en lonxitude senón tamén en cadrado. Asemade, dado que os cadrados que gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, foi demostrado que son conmensurables en lonxitude e conmensurables en cadrado por gardar os cadrados a razón que garda un número cun número, logo, os cadrados que non gardan a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, senón só a que garda un número cun número, eses cadrados serán conmensurables en cadrado pero xa non tamén en lonxitude; en consecuencia, os conmensurables en lonxitude, sempre tamén en cadrado, pero os conmensurables en cadrado non sempre tamén en lonxitude, a non ser que garden tamén a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Digo agora que as rectas inconmensurables en lonxitude non sempre tamén en cadrado, posto que as conmensurables en cadrado poden non gardar a razón que garda un número cadrado cun número cadrado e, por iso, sendo conmensurables en cadrado, son inconmensurables en lonxitude. En consecuencia, as inconmensurables en lonxitude sempre tamén o son en cadrado, pero, sendo inconmensurables en lonxitude, poden ser, en cadrado, inconmensurables e conmensurables. Pero as inconmensurables en cadrado, sempre tamén en lonxitude son inconmensurables; pois se son conmensurables en lonxitude, serán tamén conmensurables en cadrado. Pero supuxéronse tamén inconmensurables; o que, sen dúbida, é absurdo. Logo, as inconmensurables en cadrado, sempre tamén en lonxitude.»

[36] Heiberg mantén o lema tanto no seu texto como na súa tradución ó latín, aínda que na proposición 10 indica que ten dúbidas da súa atribución a Euclides. Heath atetiza este lema, baseándose en que o mesmo contén o recíproco da Proposición VIII, 26 que xa foi usado na demostración da Proposición IX, 10 —véxase a Nota 134 (Proposición VIII, 26) e a Nota 56 (Proposición IX, 10).

[37] Proposición VIII, 26.

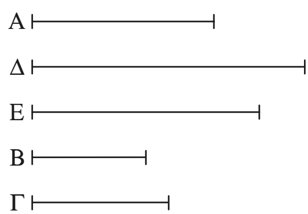
[38] Recíproco da Proposición VIII, 26. Véxase a Nota 134 (Proposición VIII, 26).

—pois se a gardan, serán planos semellantes; o que, xustamente, se supón que non—. Logo, os planos non semellantes non gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado.

PROPOSICIÓN 10

Achar dúas rectas inconmensurables cunha recta proposta, unha só en lonxitude, outra tamén en cadrado.

Sexa a recta proposta A; é preciso, entón, achar dúas rectas inconmensurables con A, unha só en lonxitude, outra tamén en cadrado.



Pois ben, tómense dous números B e Γ que non garden entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, é dicir, non planos semellantes, e resulte que, como B a Γ, así o cadrado de A ó cadrado de Δ[39] —pois aprendémolo[40]—; logo, o cadrado de A é conmensurable co cadrado de Δ[41].

E, dado que B non garda con Γ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, o cadrado de A non garda con Δ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable A con Δ en lonxitude[42].

39 Proposición X, 6. Corolario.

40 É a única vez que aparece unha apreciación como esta —ἐμάθομεν γάρ «pois aprendémolo»— nos *Elementos*, aínda que si aparece, referíndose ós *Elementos*, na *Sectio Canonis* —obra atribuída a Euclides na que se fai un estudio matemático da música—. Podería ser unha interpolación feita por un estudante da obra. Por outra parte, este dato é un dos que serven de xustificación para dicir que esta proposición non é de Euclides.

41 Proposición X, 6.

42 Proposición X, 9.

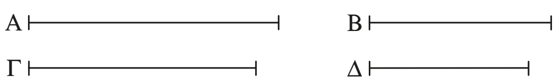
Tómese, entre A e Δ, a media proporcional E[43]; logo, como A é a Δ, así o cadrado de A ó de E[44]. Pero é inconmensurable A con Δ en lonxitude; logo, é inconmensurable tamén o cadrado de A co cadrado de E[45]; logo, é inconmensurable A con E en cadrado[46].

Logo, quedan achadas as dúas rectas Δ e E inconmensurables coa recta dada A —unha, Δ, en lonxitude só, outra, E, en cadrado e, evidentemente, en lonxitude.[47]

PROPOSICIÓN 11

Se catro magnitudes son proporcionais e a primeira é conmensurable coa segunda, tamén a terceira será conmensurable coa cuarta; e, se a primeira é inconmensurable coa segunda, tamén a terceira será inconmensurable coa cuarta.

Sexan A, B, Γ e Δ catro magnitudes proporcionais —como A a B, así Γ a Δ— e sexa A conmensurable con B; digo que tamén Γ será conmensurable con Δ.



Pois ben, dado que A é conmensurable con B, logo, A garda con B a razón que garda un número cun número[48].

E, como A é a B, así Γ a Δ; logo, tamén Γ garda con Δ a razón que garda un número cun número[49]; logo, Γ é conmensurable con Δ[50].

---

43 Proposición VI, 13.

44 Definición V, 9.

45 Para esta afirmación precisa un resultado posterior: Proposición X, 11.

46 Definición X, 1.2.

47 Véxase a Nota 36 (Proposición X, 9). Heath dá varias razóns polas que non considera euclidiana esta proposición: por unha parte, razóns de contido —precísase a proposición seguinte para unha parte da demostración—, por outra, razóns de estilo —véxase a Nota 40 desta proposición— e, por último, a transmisión manuscrita —no manuscrito *P* figura o número 10 ó principio da Proposición X, 11 polo que se sospeita que esta Proposición X, 10 non tiña número.

48 Proposición X, 5.

49 Proposición V, 11.

50 Proposición X, 6.

Agora sexa A inconmensurable con B; digo que tamén Γ será inconmensurable con Δ.

Pois ben, dado que A é inconmensurable con B, logo, A non garda con B a razón que garda un número cun número[51].

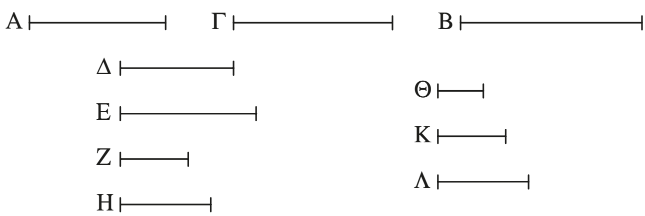
E, como A é a B, así Γ a Δ; logo, tampouco Γ garda con Δ a razón que garda un número cun número; logo, Γ é inconmensurable con Δ[52].

Logo, se catro magnitudes etc.

PROPOSICIÓN 12

As magnitudes conmensurables coa mesma magnitude tamén son conmensurables entre si.

Pois ben, sexan tanto A como B conmensurables con Γ; digo que tamén A é conmensurable con B.



Pois ben, dado que A é conmensurable con Γ, logo, A garda con Γ a razón que garda un número cun número[53]. Garde a que garda Δ con E.

Asemade, dado que Γ é conmensurable con B, logo, Γ garda con B a razón que garda un número cun número. Garde a que garda Z con H.

E, dadas varias razóns —a que gardan Δ con E, e Z con H—, tómense os números Θ, K e Λ continuamente[54] nas razóns dadas; de modo que, como Δ é a E, así Θ a K, mentres que como Z a H, así K a Λ[55].

---

[51] Proposición X, 7.
[52] Proposición X, 8.
[53] Proposición X, 5.
[54] Para o uso de ἑξῆς véxase a Nota 17 (Proposición VIII, 4).
[55] Proposición VIII, 4.

Entón, dado que, como Α é a Γ, así Δ a Ε, pero, como Δ a Ε, así Θ a Κ, logo, tamén como Α é a Γ, así Θ a Κ[56].

Asemade, dado que, como Γ é a Β, así Ζ a Η, pero, como Ζ a Η, así Κ a Λ, logo, tamén, como Γ a Β, así Κ a Λ.

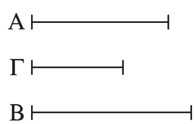
Pero tamén como Α é a Γ, así Θ a Κ; logo, por igualdade, como Α é a Β, así Θ a Λ[57]. Logo, Α garda con Β a razón que garda o número Θ co número Λ; logo, é conmensurable Α con Β[58].

Logo, as magnitudes conmensurables coa mesma magnitude tamén son conmensurables entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13

Se dúas magnitudes son conmensurables e unha delas é inconmensurable cunha magnitude, tamén a restante será inconmensurable coa mesma.

Sexan Α e Β dúas magnitudes conmensurables, e unha delas, Α, sexa inconmensurable con outra, Γ; digo que tamén a restante, Β, é inconmensurable con Γ.



Pois ben, se Β é conmensurable con Γ, pero tamén Α é conmensurable con Β, logo, tamén Α é conmensurable con Γ[59].

Pero tamén inconmensurable; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, non é conmensurable Β con Γ; logo, inconmensurable.

Logo, se dúas magnitudes son conmensurables etc.

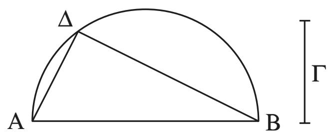
---

56 Proposición V, 11.
57 Proposición V, 22.
58 Proposición X, 6.
59 Proposición X, 12.

LEMA

***Dadas dúas rectas desiguais, atopar en canto é maior o cadrado da maior que o da menor*[60].**

Sexan AB e Γ as dúas rectas desiguais dadas, das cales, sexa AB a maior; é preciso, entón, atopar en canto é maior o cadrado de AB que o de Γ.



Debúxese sobre AB o semicírculo AΔB[61], axústese nel AΔ igual a Γ[62] e únase ΔB.

É evidente, entón, que o ángulo AΔB é recto[63] e que o cadrado de AB é maior que o de AΔ, é dicir, que o de Γ, no cadrado de ΔB[64].

De xeito semellante tamén, dadas dúas rectas, atópase a recta cuxo cadrado é equivalente ós seus cadrados así[65]:

Sexan AΔ e ΔB as dúas rectas dadas e sexa preciso atopar a que, ó cadrado, é equivalente ós seus cadrados[66].

Pois ben, fágase que sexa recto o ángulo contido por AΔ e ΔB[67], e únase AB; está claro, de novo, que o cadrado de AΔ e ΔB é equivalente ó cadrado de AB; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

60 Sobre o significado orixinal de δύναμαι e a súa evolución ó significado técnico matemático, véxase Nota 3 (Definición X, 1.2).

61 Proposición I, 10 e Postulado 3.

62 Proposición IV, 1.

63 Proposición III, 31.

64 Proposición I, 47.

65 Se a e b son dúas rectas, con $a < b$, esta primeira parte do lema expón o método para calcular unha recta c tal que $c^2 = b^2 - a^2$. A continuación, aínda que non figura no enunciado inicial, calcula, para dúas rectas calquera a e b, unha recta c tal que $c^2 = b^2 + a^2$. É dicir, indica como calcular a raíz cadrada da suma e diferenza de cadrados.

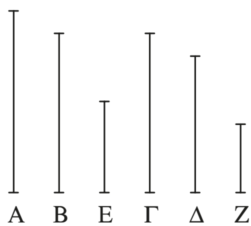
66 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

67 Proposición I, 11.

PROPOSICIÓN 14

Se catro rectas son proporcionais e o cadrado da primeira é maior que o da segunda no cadrado dunha conmensurable con aquela, tamén o cadrado da terceira será maior que o da cuarta no cadrado dunha conmensurable con aquela. E, se o cadrado da primeira é maior que o da segunda no cadrado dunha inconmensurable con aquela, tamén o cadrado da terceira será maior que o da cuarta no cadrado dunha inconmensurable con aquela.

Sexan A, B, Γ e Δ catro rectas proporcionais —como A a B, así Γ a Δ— e o cadrado de A sexa maior que o de B no cadrado de E, mentres que o cadrado de Γ sexa maior que o de Δ no cadrado de Z; digo que, se A é conmensurable con E, tamén é conmensurable Γ con Z e, se é inconmensurable A con E, tamén é inconmensurable Γ con Z.



Pois ben, dado que como A é a B, así Γ a Δ, logo, tamén como o cadrado de A é ó cadrado de B, así o de Γ ó de Δ[68].

Pero o cadrado de E xunto co de B é igual ó de A, mentres que o de Δ xunto co de Z é igual ó de Γ.

Logo, como o cadrado de E xunto co de B é ó de B, así o de Δ xunto co de Z ó de Δ; logo, por separación, como o cadrado de E é ó de B, así o de Z ó de Δ[69]; logo, tamén como E é a B, así Z a Δ[70]; logo, por inversión, como B é a E, así Δ a Z[71].

[68] Proposición VI, 22.
[69] Proposición V, 17.
[70] Proposición VI, 22.
[71] Proposición V, 7. Corolario.

Pero tamén, como A é a B, así Γ a Δ; logo, por igualdade, como A é a E, así Γ a Z[72].

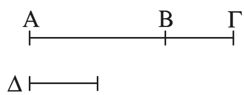
Entón, se é conmensurable A con E, é tamén conmensurable Γ con Z e, se é inconmensurable A con E, é tamén inconmensurable Γ con Z[73].

Logo, se, etc.

PROPOSICIÓN 15

Se se suman dúas magnitudes conmensurables, tamén a total será conmensurable con cada unha delas; e, se a total é conmensurable cunha delas, tamén as magnitudes do principio serán conmensurables.

Pois ben, súmense as dúas magnitudes conmensurables AB e BΓ; digo que tamén a total, AΓ, é conmensurable tanto con AB como con BΓ.



Pois ben, dado que AB e BΓ son conmensurables, algunha magnitude mediraas[74]. Mídaas e sexa Δ.

Entón, dado que Δ mide a AB e BΓ, tamén medirá á total AΓ. Pero mide tamén a AB e BΓ. Logo, Δ mide a AB, BΓ e AΓ; logo, é conmensurable AΓ tanto con AB como con BΓ.

Sexa agora conmensurable AΓ con AB; digo que tamén AB e BΓ son conmensurables.

Pois ben, dado que AΓ e AB son conmensurables, algunha magnitude mediraas. Mídaas e sexa Δ.

Entón, dado que Δ mide a ΓA e AB, logo, tamén medirá á restante, BΓ. Pero mide tamén a AB; logo, Δ medirá a AB e BΓ; logo, son conmensurables AB e BΓ.

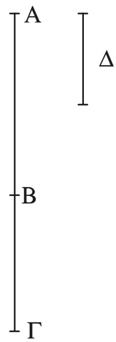
Logo, se dúas magnitudes etc.

72 Proposición V, 22.
73 Proposición X, 11.
74 Definición X, 1.1.

PROPOSICIÓN 16

Se se suman dúas magnitudes inconmensurables, tamén a total será inconmensurable con cada unha delas; e, se a total é inconmensurable cunha delas, tamén as magnitudes do principio serán inconmensurables.

Pois ben, súmense as dúas magnitudes inconmensurables AB e BΓ; digo que tamén a total, AΓ, é inconmensurable tanto con AB como con BΓ.



Pois, se non son inconmensurables ΓA e AB, algunha magnitude mediraas. Mídaas, se é posible, e sexa Δ[75].

Entón, dado que Δ mide a ΓA e AB, logo, medirá tamén á restante BΓ.

Pero mide tamén a AB. Logo, Δ mide a AB e BΓ. Logo, son conmensurables AB e BΓ. Pero supuxérase que tamén inconmensurables; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, ningunha magnitude medirá a ΓA e AB; logo, son inconmensurables ΓA e AB.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén AΓ e ΓB son inconmensurables.

Logo, AΓ é inconmensurable tanto con AB como con BΓ.

Sexa agora AΓ inconmensurable cunha de entre AB e BΓ.

[75] Definición X, 1.1.

Séxao primeiro con AB; digo que tamén AB e BΓ son inconmensurables.

Pois, se son conmensurables, algunha magnitude mediraas. Mídaas e sexa Δ.

Entón, dado que Δ mide a AB e BΓ, logo, tamén medirá á total, AΓ.

Pero mide tamén a AB; logo, Δ mide a ΓA e AB. Logo, son conmensurables ΓA e AB.

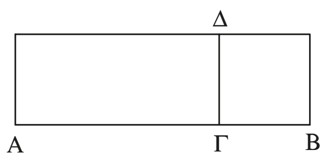
Pero supuxérase que tamén inconmensurables; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, ningunha magnitude medirá a AB e BΓ; logo, son inconmensurables AB e BΓ.

Logo, se dúas magnitudes etc.

Lema

Se se aplica nunha recta un paralelogramo inferior nunha figura cadrada, o aplicado é igual ó contido[76] polos segmentos da recta resultantes da aplicación.

Pois ben, na recta AB aplíquese o paralelogramo AΔ inferior na figura cadrada ΔB[77]; digo que AΔ é igual ó contido por AΓ e ΓB.



E é evidente por si mesmo; pois, dado que ΔB é un cadrado, é igual ΔΓ a ΓB; e AΔ é o contido por AΓ e ΓΔ, é dicir, o contido por AΓ e ΓB.

Logo, se a unha recta etc.

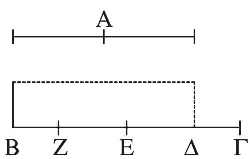
[76] Sobre as expresións braquilóxicas en Euclides para referirse a distintos elementos xeométricos, véxase a Nota 10 (Proposición II, 1).

[77] Proposición VI, 28.

PROPOSICIÓN 17

***Se dúas rectas son desiguais e na maior se aplica un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, inferior nunha figura cadrada, e se a divide en conmensurables en lonxitude, o cadrado da maior é maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela. E, se o cadrado da maior é maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela e na maior se aplica un igual á cuarta parte do cadrado da menor, inferior nunha figura cadrada, divídea en conmensurables en lonxitude*[78].**

Sexan A e BΓ dúas rectas desiguais das que BΓ é a maior, aplíquese en BΓ un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, A, é dicir, ó cadrado da metade de A, inferior nunha figura cadrada[79], e sexa o contido por BΔ e ΔΓ[80], e sexa conmensurable BΔ con ΔΓ en lonxitude; digo que o cadrado de BΓ é maior que o de A no cadrado dunha conmensurable con aquela.



Pois ben, córtese BΓ á metade polo punto E e póñase EZ igual a ΔE. Logo, a restante, ΔΓ, é igual a BZ. E, dado que a recta BΓ queda cortada en partes iguais por E, mentres que en desiguais por Δ, logo, o paralelogramo de ángulos rectos contido por BΔ e ΔΓ xunto co cadrado de EΔ é igual ó cadrado de EΓ[81].

[78] Esta proposición determina baixo que condicións a ecuación cuadrática $x(b - x) = c^2/4$ ten unha solución conmensurable con b (x:b::m:n, con m e n números naturais). Dada a ecuación $x^2 - bx + c^2/4 = 0$, entón x, b son conmensurables se, e só se, b e $\sqrt{b^2 - c^2}$ son conmensurables (b sería a lonxitude da recta maior e c a da recta menor).

[79] Proposición VI, 28

[80] Lema previo.

[81] Proposición II, 5.

Tamén no que atinxe ós cuádruplos; logo, catro veces o contido por BΔ e ΔΓ xunto co cuádruplo do cadrado de ΔE é igual a catro veces o cadrado de EΓ.

Pero o cadrado de A é igual ó cuádruplo do contido por BΔ e ΔΓ, mentres que o cadrado de ΔZ é igual ó cuádruplo do cadrado de ΔE —pois ΔZ é o dobre que ΔE.

Pero o cadrado de BΓ é igual ó cuádruplo do cadrado de EΓ —pois, asemade, BΓ é o dobre que ΓE.

Logo, os cadrados de A e ΔZ son iguais ó cadrado de BΓ; en consecuencia, o cadrado de BΓ é maior que o de A no cadrado de ΔZ; logo, o cadrado de BΓ é maior que o de A no cadrado de ΔZ.

Cómpre demostrar que tamén é conmensurable BΓ con ΔZ.

Pois, dado que é conmensurable BΔ con ΔΓ en lonxitude, logo, é conmensurable tamén BΓ con ΓΔ en lonxitude[82].

Pero ΓΔ é conmensurable con ΓΔ e BZ[83] en lonxitude —pois é igual ΓΔ a BZ—. Logo, tamén BΓ é conmensurable con BZ e ΓΔ en lonxitude[84]; en consecuencia, tamén é conmensurable BΓ con ZΔ en lonxitude[85]; logo, o cadrado de BΓ é maior que o de A no cadrado dunha conmensurable con aquela.

Sexa agora o cadrado de BΓ maior que o de A no cadrado dunha conmensurable con aquela, aplíquese en BΓ un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de A, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por BΔ e ΔΓ.

Cómpre demostrar que é conmensurable BΔ con ΔΓ en lonxitude.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que o cadrado de BΓ é maior que o de A no cadrado de ZΔ.

Pero o cadrado de BΓ é maior que o de A no cadrado dunha conmensurable con aquela.

---

82 Proposición X, 15.

83 Proposición X, 6. Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

84 Proposición X, 12.

85 Proposición X, 16.

Logo, é conmensurable ΒΓ con ΖΔ en lonxitude; en consecuencia, tamén ΒΓ é conmensurable co restante, a suma de ΒΖ e ΔΓ, en lonxitude.

Pero a suma de ΒΖ e ΔΓ é conmensurable con ΔΓ.

En consecuencia, tamén é conmensurable ΒΓ con ΔΓ en lonxitude; logo, tamén, por separación, é conmensurable ΒΔ con ΔΓ en lonxitude[86].

Logo, se dúas rectas son desiguais etc.

PROPOSICIÓN 18

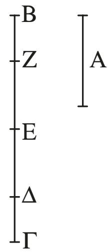
Se dúas rectas son desiguais e na maior se aplica un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, inferior nunha figura cadrada, e se a divide en inconmensurables, o cadrado da maior será maior que o da menor no cadrado dunha inconmensurable con aquela. E, se o cadrado da maior é maior que o da menor no cadrado dunha inconmensurable con aquela e, na maior, se aplica un igual á cuarta parte do cadrado da menor, inferior nunha figura cadrada, divídea en inconmensurables[87].

Sexan Α e ΒΓ dúas rectas desiguais das que ΒΓ é a maior, aplíquese en ΒΓ un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, Α, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por ΒΔΓ[88], e sexa inconmensurable ΒΔ con ΔΓ en lonxitude; digo que o cadrado de ΒΓ é maior que o de Α no cadrado dunha inconmensurable con aquela.

86 Proposición X, 16.

87 Esta proposición determina baixo que condicións a ecuación cuadrática $x(b - x) = c^2/4$ ten unha solución inconmensurable con $b - x$. Dada a ecuación $x^2 - bx + c^2/4 = 0$, entón x, $b - x$ son inconmensurables se, e só se, b e $\sqrt{b^2 - c^2}$ son inconmensurables (b sería a lonxitude da recta maior e c a da recta menor).

88 Lema anterior á Proposición X, 17. Paralelogramo de ángulos rectos contido polas rectas ΒΔ e ΔΓ. Sobre as expresións braquilóxicas en Euclides para referirse a distintos elementos xeométricos, véxase a Nota 10 (Proposición II, 1).



Pois ben, feitas as mesmas construcións do anterior, de xeito semellante poderemos demostrar que o cadrado de ΒΓ é maior que o de A no cadrado de ΖΔ[89].

Cómpre demostrar que é inconmensurable ΒΓ con ΔΖ en lonxitude.

Pois ben, dado que é inconmensurable ΒΔ con ΔΓ en lonxitude, logo, é tamén inconmensurable ΒΓ con ΓΔ en lonxitude[90].

Pero ΔΓ é conmensurable coa suma de ΒΖ e ΔΓ[91]; logo, tamén ΒΓ é inconmensurable coa suma de ΒΖ e ΔΓ[92].

En consecuencia, tamén ΒΓ é inconmensurable coa restante, ΖΔ, en lonxitude[93]; e o cadrado de ΒΓ é maior que o de A no cadrado de ΖΔ; logo, o cadrado de ΒΓ é maior que o de A no cadrado dunha inconmensurable con aquela.

Sexa agora o cadrado de ΒΓ maior que o de A no cadrado dunha inconmensurable con aquela, aplíquese en ΒΓ un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de A, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por ΒΔ e ΔΓ. Cómpre demostrar que é inconmensurable ΒΔ con ΔΓ en lonxitude.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, de xeito semellante poderemos demostrar que o cadrado de ΒΓ é maior que o de A no cadrado de ΖΔ.

---

89 Proposición X, 17.
90 Proposición X, 16.
91 Proposición X, 6.
92 Proposición X, 13.
93 Proposición X, 16.

Pero o cadrado de ΒΓ é maior que o de Α no cadrado dunha inconmensurable con aquela; logo, é inconmensurable ΒΓ con ΖΔ en lonxitude.

En consecuencia, tamén ΒΓ é inconmensurable coa restante, a suma de ΒΖ e ΔΓ.

Pero a suma de ΒΖ e ΔΓ é conmensurable con ΔΓ en lonxitude; logo, tamén ΒΓ é inconmensurable con ΔΓ en lonxitude; en consecuencia tamén, por separación, ΒΔ é inconmesurable con ΔΓ en lonxitude[94].

Logo, se dúas rectas son etc.

Lema[95]

Dado que queda demostrado que as conmensurables en lonxitude sempre tamén en cadrado, pero as conmensurables en cadrado non sempre tamén en lonxitude[96], senón que poden ser en lonxitude tanto conmensurables como inconmensurables, é evidente que, se unha é conmensurable en lonxitude cunha determinada expresable, chámase expresable e conmensurable con ela non só en lonxitude senón tamén en cadrado —posto que as conmensurables en lonxitude sempre tamén en cadrado.

Pero, se unha é conmensurable en cadrado cunha determinada expresable, se o é tamén en lonxitude, chámase, tamén neste caso, expresable e conmensurable con ela, tanto en lonxitude como en cadrado; e se, por outra parte, unha que é conmensurable en cadrado cunha determinada expresable, é inconmensurable con ela en lonxitude, chámase, tamén neste caso, expresable só conmensurable en cadrado.

---

94 Proposición X, 16.

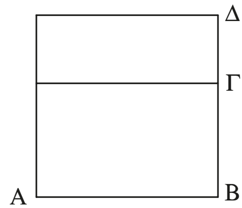
95 Heath non considera auténtico este Lema por «prolixo e innecesario». Ademais, relaciónao cunha parte do enunciado da proposición seguinte que tamén pon en cuestión —véxase a Nota 98 (Proposición X, 19)—. Porén, Heiberg non dubida da súa autenticidade aínda que si relega ó *Appendix* unha parte da Proposición na que Heath aprecia tamén certa relación co Lema.

96 Proposición X, 9. Corolario.

PROPOSICIÓN 19

O paralelogramo de ángulos rectos*[97] *contido por rectas expresables conmensurables en lonxitude, segundo algún dos modos anteditos*[98]*, é expresable.

Pois ben, sexa contido o paralelogramo de ángulos rectos ΑΓ polas rectas expresables ΑΒ e ΒΓ, conmensurables en lonxitude; digo que ΑΓ é expresable.



Pois ben, debúxese o cadrado ΑΔ a partir de ΑΒ[99]; logo, ΑΔ é expresable[100].

E, dado que é conmensurable ΑΒ con ΒΓ en lonxitude e que é igual ΑΒ que ΒΔ, logo, é conmensurable ΒΔ con ΒΓ en lonxitude.

E, como ΒΔ é a ΒΓ, así ΔΑ a ΑΓ[101]. Logo, é conmensurable ΔΑ con ΑΓ[102].

Pero ΔΑ é expresable; logo, é expresable tamén ΑΓ.

Logo, o contido por expresables conmensurables etc.

---

97 Véxase a Nota 3 (Proposición II, 1). Euclides, cando fala de «conmensurables só en cadrado», algunhas veces omite a palabra «rectas» e fala de «unhas conmensurables só en cadrado», dando por suposto que conmensurables só en cadrado é aplicable unicamente a rectas. Da mesma forma, algunhas veces, cando fala de «rectas que conteñen unha área (paralelogramo)», omite a palabra «área» e fala de «que conteñen unha (un)». Nós axustarémonos ó texto orixinal, salvo que consideremos necesario explicitar algunha das palabras para facilitar a compresión do texto.

98 A orde de palabras en grego indica que «nalgún dos modos anteditos» refírese a «conmensurables en lonxitude», o cal non é coherente co concepto de conmensurabilidade ata aquí utilizado; sería aceptable esta frase referida a «expresables» —como aparece na Proposición seguinte— pero lingüisticamente é dificilmente aceptable. Por elo e pola referencia ó Lema da Proposición anterior, Heath considera que deben suprimirse estas palabras. A edición de J. L. Heiberg e H. Menge, porén, non as pon en cuestión.

99 Proposición I, 46.

100 Definición X, 1.4.

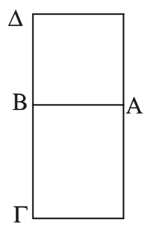
101 Proposición VI, 1.

102 Proposición X, 11.

PROPOSICIÓN 20

***Se se aplica un paralelogramo expresable nunha expresable, fai en anchura unha expresable e conmensurable en lonxitude con aquela na que está aplicado*[103].**

Pois ben, aplíquese ΑΓ, expresable, en ΑΒ, expresable asemade nalgún dos modos anteditos[104], facendo en anchura ΒΓ; digo que ΒΓ é expresable e conmensurable con ΒΑ en lonxitude.



Pois ben, debúxese o cadrado ΑΔ a partir de ΑΒ[105]; logo, é expresable ΑΔ[106].

Pero tamén é expresable ΑΓ; logo, é conmensurable ΔΑ con ΑΓ. E, como ΔΑ é a ΑΓ, así ΔΒ a ΒΓ[107].

Logo, é conmensurable ΔΒ con ΒΓ[108]; pero ΔΒ é igual a ΒΑ; logo, tamén é conmensurable ΑΒ con ΒΓ.

Pero ΑΒ é expresable; logo, é tamén expresable ΒΓ, e conmensurable con ΑΒ en lonxitude.

Logo, se un expresable se aplica nunha expresable etc.

PROPOSICIÓN 21

O paralelogramo de ángulos rectos contido por rectas expresables conmensurables só en cadrado é non expre-

---

103 Como consecuencia, o paralelogramo de ángulos rectos contido por expresable e non expresable non é expresable.

104 Aquí refírese, sen dúbida, a «expresable».

105 Proposición I, 46.

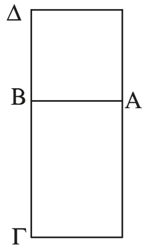
106 Definición X, 1.4.

107 Proposición VI, 1.

108 Proposición X, 11.

sable, e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable; chámese medial[109]

Pois ben, sexa contido o paralelogramo de ángulos rectos ΑΓ polas rectas expresables ΑΒ e ΒΓ, conmensurables só en cadrado; digo que ΑΓ é non expresable, e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable; chámese medial.



Pois ben, debúxese o cadrado ΑΔ a partir de ΑΒ; logo, ΑΔ é expresable[110].

E, dado que é tamén inconmensurable ΑΒ con ΒΓ en lonxitude —pois suponse conmensurables só en cadrado— e ΑΒ é igual a ΒΔ, logo, é inconmensurable ΔΒ con ΒΓ en lonxitude.

E, como ΔΒ é a ΒΓ, así ΑΔ a ΑΓ[111]; logo, é inconmensurable ΔΑ con ΑΓ[112].

Pero ΔΑ é expresable; logo, ΑΓ é non expresable; en consecuencia, tamén a recta cuxo cadrado é equivalente a ΑΓ é non expresable; chámese medial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[109] Se a é a recta ΑΒ e b a recta ΒΓ, entón a área do rectángulo ΑΓ é igual a ab e a recta cuxo cadrado é igual a ΑΓ será l con $ab = l^2$ e polo tanto $a:l::l:b$ e l é a media proporcional entre as rectas a e b. Como ademais a e b son conmensurables só en cadrado, $b = a\sqrt{m / n}$, non sendo m/n un cadrado con m e n números enteiros, e $l^2 = ab = a^2\sqrt{m / n}$ e $l = a\sqrt[4]{m / n}$. Véxase a Nota 5 (Definición X, 1.3).

[110] Definición X, 1.4.

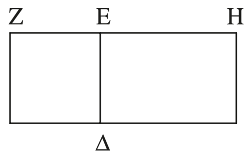
[111] Proposición VI, 1.

[112] Proposición X, 11.

Lema

Se hai dúas rectas, como a primeira é á segunda, así o cadrado da primeira ó contido polas dúas rectas.

Sexan as dúas rectas ZE e EH; digo que como ZE é a EH, así o cadrado de ZE ó contido por ZE e EH.



Pois ben, debúxese o cadrado ΔZ a partir de ZE e complétese HΔ.

Entón, dado que, como ZE é a EH, así ZΔ a ΔH[113], e que ZΔ é o cadrado de ZE, mentres que ΔH o contido por ΔE e EH, é dicir, o contido por ZE e EH, logo, como ZE é a EH, así o cadrado de ZE ó contido por ZE e EH.

E, de xeito semellante, como o contido por HE e EZ ó cadrado de EZ, é dicir, como HΔ a ZΔ, así HE a EZ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

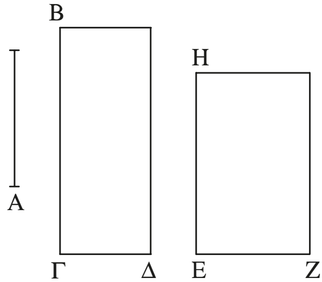
PROPOSICIÓN 22

O cadrado dunha medial aplicado nunha expresable fai en anchura unha recta expresable e inconmensurable en lonxitude con aquela na que se aplica.

Sexa A medial e ΓB expresable, e aplíquese en BΓ a área de ángulos rectos BΔ igual ó cadrado de A, facendo en anchura ΓΔ[114]; digo que ΓΔ é expresable e inconmensurable con ΓB en lonxitude.

Pois ben, dado que A é medial, o seu cadrado é equivalente á área contida por expresables conmensurables só en cadrado[115]; sexa o seu cadrado equivalente a HZ[116].

[113] Proposición VI, 1.
[114] Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
[115] Proposición X, 21.
[116] En consecuencia, EZ e HE son expresables, conmensurables só en cadrado.



Pero tamén é o seu cadrado equivalente a BΔ; logo, é igual BΔ a HZ. Pero é tamén de ángulos iguais ós del; e, dos paralelogramos iguais e de ángulos iguais, os lados que conteñen os ángulos iguais son reciprocamente proporcionais[117]; logo, proporcionalmente, como BΓ é a EH, así EZ a ΓΔ.

Logo, tamén como o cadrado de BΓ é ó de EH, así o de EZ ó de ΓΔ[118].

Pero é conmensurable o cadrado de ΓB co de EH —pois cada un deles é expresable—; logo, é tamén conmensurable o cadrado de EZ co de ΓΔ[119].

Pero o cadrado de EZ é expresable; logo, o de ΓΔ é tamén expresable[120]; logo, ΓΔ é expresable[121].

E, dado que é inconmensurable EZ con EH en lonxitude — pois son conmensurables só en cadrado—, e, como EZ a EH, así o cadrado de EZ ó contido por ZE e EH[122], logo, é inconmensurable o cadrado de EZ co contido por ZE e EH.

Pero é conmensurable o cadrado de ΓΔ co de EZ —pois son expresables en cadrado—, e é conmensurable o contido por ΔΓ e ΓB co contido por ZE e EH —pois son iguais ó cadrado de A—; logo, é inconmensurable tamén o cadrado de ΓΔ co contido por ΔΓ e ΓB[123].

117 Proposición VI, 14.
118 Proposición VI, 22.
119 Proposición X, 11.
120 Definición X, 1.4.
121 Definición X, 1.3.
122 Lema previo.
123 Proposición X, 13.

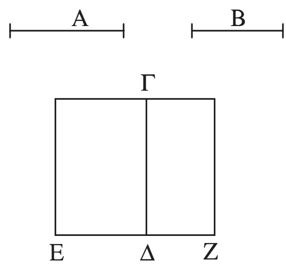
Pero, como o cadrado de ΓΔ ó contido por ΔΓ e ΓΒ, así é ΔΓ a ΓΒ; logo, é inconmensurable ΔΓ con ΓΒ en lonxitude.

Logo, ΓΔ é expresable e inconmensurable con ΓΒ en lonxitude; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 23

A conmensurable coa medial é medial.

Sexa A medial e sexa B conmensurable con A; digo que tamén B é medial.



Pois ben, tómese a recta expresable ΓΔ e aplíquese en ΓΔ a área de ángulos rectos ΓΕ igual ó cadrado de A[124], facendo en anchura ΕΔ; logo, ΕΔ é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[125].

E aplíquese en ΓΔ a área de ángulos rectos ΓΖ igual ó cadrado de B, facendo en anchura ΔΖ.

Entón, dado que é conmensurable A con B, é tamén conmensurable o cadrado de A co de B.

Pero ΕΓ é igual ó cadrado de A, mentres que ΓΖ é igual ó de B; logo, é conmensurable ΕΓ con ΓΖ.

E, como ΕΓ é a ΓΖ, así ΕΔ a ΔΖ[126]; logo, é conmensurable ΕΔ con ΔΖ en lonxitude[127].

Pero ΕΔ é expresable e inconmensurable con ΔΓ en lonxitude; logo, tamén ΔΖ é expresable e inconmensurable con ΔΓ

---

[124] Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

[125] Proposición X, 22.

[126] Proposición VI, 1.

[127] Proposición X, 11.

en lonxitude; logo, ΓΔ e ΔZ son expresables conmensurables só en cadrado[128].

Pero aquela cuxo cadrado é equivalente ó contido por expresables conmensurables só en cadrado é medial[129].

Logo, aquela cuxo cadrado é equivalente ó contido por ΓΔ e ΔZ é medial; e o cadrado de B é equivalente ó contido por ΓΔ e ΔZ; logo, B é medial.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que aquela que é conmensurable coa área medial é medial[130].

Do mesmo xeito que o antedito con respecto ás expresables[131], tamén, con respecto ás mediais, resulta que a conmensurable coa medial en lonxitude chámase medial e conmensurable con ela non só en lonxitude senón tamén en cadrado, posto que, en xeral, as conmensurables en lonxitude, sempre tamén en cadrado. Pero, se unha é conmensurable coa medial en cadrado, se tamén o é en lonxitude, chámanse, tamén neste caso, mediais e conmensurables en lonxitude e cadrado, pero, se só en cadrado, chámanse mediais conmensurables só en cadrado[132].

PROPOSICIÓN 24

O paralelogramo de ángulos rectos contido por rectas mediais conmensurables en lonxitude segundo algún dos modos[133] anteditos é medial.

---

[128] Definición X, 1.3.

[129] Proposición X, 21.

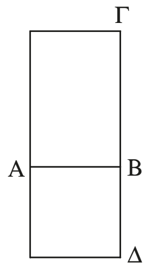
[130] Aínda que a noción de medial aparece ligada ás rectas —Proposición X, 21—, Euclides estende a noción de medial ás áreas e fala de área medial como a área que equivale ó cadrado dunha recta medial. Conclúe, no corolario, que se unha área é conmensurable con outra área medial, entón a primeira área tamén é medial. Aquí algúns manuscritos presentan un parágrafo que Heiberg considera «escuro e sen dúbida falso»: «Pois o cadrado das rectas que son conmensurables en cadrado —das que unha é medial— é equivalente ó cadrado delas; en consecuencia, tamén a restante é medial».

[131] Lema previo a la Proposición X, 19.

[132] No corolario —de cuxa autenticidade dubida Heaht— pon de manifesto que, se unha recta é conmensurable só en cadrado cunha medial, é medial.

[133] Aquí xa non é posible relacionar estas palabras máis que con «conmensurables en lonxitude», o cal non ten sentido —véxase a Nota 98 (Proposición X, 19)—. Por elo, Heath considera que non son de Euclides.

Pois ben, sexa contido o paralelogramo de ángulos rectos ΑΓ polas rectas mediais conmensurables en lonxitude ΑΒ e ΒΓ; digo que ΑΓ é medial[134].



Pois ben, debúxese a partir de ΑΒ o cadrado ΑΔ; logo, ΑΔ é medial.

E, dado que é conmensurable ΑΒ con ΒΓ, mentres que ΑΒ é igual a ΒΔ, logo, é tamén conmensurable ΔΒ con ΒΓ en lonxitude; en consecuencia, tamén ΔΑ é conmensurable con ΑΓ[135].

Pero ΔΑ é medial; logo, é medial tamén ΑΓ[136]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 25

O paralelogramo de ángulos rectos contido por rectas mediais conmensurables só en cadrado ou é expresable ou medial.

Pois ben, sexa contido o paralelogramo de ángulos rectos ΑΓ polas rectas mediais conmensurables só en cadrado ΑΒ e ΒΓ; digo que ΑΓ ou é expresable ou medial.

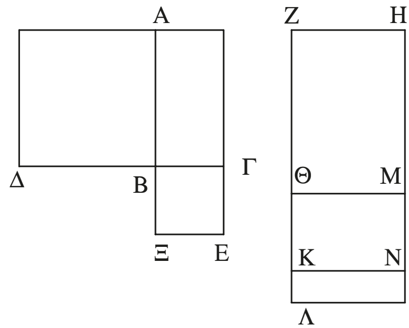
Pois ben, debúxense, a partir de ΑΒ e ΒΓ, os cadrados ΑΔ e ΒΕ; logo, tanto ΑΔ como ΒΕ son mediais.

---

[134] Véxase a Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).

[135] Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

[136] Proposición X, 23. Corolario.



Tómese a expresable ΖΗ e aplíquese en ΖΗ o paralelogramo de ángulos rectos ΗΘ igual a ΑΔ, facendo en anchura ΖΘ[137], por outra parte, aplíquese en ΘΜ o paralelogramo de ángulos rectos ΜΚ igual a ΑΓ, facendo en anchura ΘΚ, e, ademais, aplíquese en ΚΝ, de xeito semellante, ΝΛ igual a ΒΕ, facendo en anchura ΚΛ; logo, ΖΘ, ΘΚ e ΚΛ están en liña recta.

Entón, dado que tanto ΑΔ como ΒΕ son mediais, e que ΑΔ é igual a ΗΘ, mentres que ΒΕ a ΝΛ, logo, tanto ΗΘ como ΝΛ son mediais. E están aplicadas na recta expresable ΖΗ; logo, tanto ΖΘ como ΚΛ son expresables e inconmensurables con ΖΗ en lonxitude[138].

E, dado que é conmensurable ΑΔ con ΒΕ, logo, é tamén conmensurable ΗΘ con ΝΛ. E, como ΗΘ é a ΝΛ, así ΖΘ a ΚΛ[139]; logo, é conmensurable ΖΘ con ΚΛ en lonxitude[140].

Logo, ΖΘ e ΚΛ son expresables conmensurables en lonxitude; logo, o contido por ΖΘ e ΚΛ é expresable[141].

E, dado que ΔΒ é igual a ΒΑ, mentres que ΞΒ a ΒΓ, logo, como ΔΒ é a ΒΓ, así ΑΒ a ΒΞ.

Pero, como ΔΒ a ΒΓ, así ΔΑ a ΑΓ; por outra parte, como ΑΒ a ΒΞ, así ΑΓ a ΓΞ; logo, como ΔΑ a ΑΓ, así ΑΓ a ΓΞ.

137 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
138 Proposición X, 22.
139 Proposición VI, 1.
140 Proposición X, 11.
141 Proposición X, 19.

Pero AΔ é igual a HΘ, mentres que AΓ a MK, e ΓΞ a NΛ; logo, como HΘ a MK, así MK a NΛ; logo, tamén como ZΘ é a ΘK, así ΘK a KΛ[142]; logo, o contido por ZΘ e KΛ é igual ó cadrado de ΘK[143].

Pero o contido por ZΘ e KΛ é expresable; logo, é tamén expresable o cadrado de ΘK; logo, ΘK é expresable. E, se é conmensurable con ZH en lonxitude, ΘN é expresable; pero, se é inconmensurable con ZH en lonxitude, KΘ e ΘM son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΘN é medial[144].

Logo, ΘN ou é expresable ou é medial.

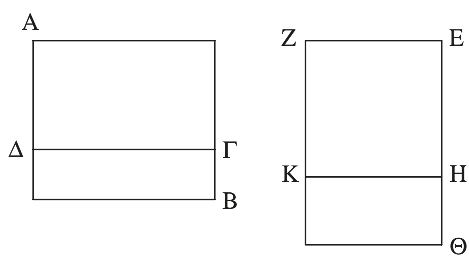
Pero ΘN é igual a AΓ; logo, AΓ ou é expresable ou é medial.

Logo, o contido por mediais conmensurables só en cadrado tamén etc.

PROPOSICIÓN 26

Medial non supera a medial en expresable.

Pois ben, se é posible, a medial AB supere á medial AΓ na expresable ΔB, tómese a recta expresable EZ, aplíquese en EZ o paralelogramo de ángulos rectos ZΘ igual a AB[145], facendo en anchura EΘ, e quítese ZH, igual a AΓ; logo, o restante, BΔ, é igual ó restante KΘ.



Pero ΔB é expresable; logo, KΘ é tamén expresable.

---

142 Proposición V, 11.

143 Proposición VI, 17.

144 Proposición X, 21.

145 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

Entón, dado que tanto AB como AΓ son mediais, e que AB é igual a ZΘ, mentres que AΓ a ZH, logo, tamén son mediais tanto ZΘ como ZH.

E están aplicados na expresable EZ; logo, tanto ΘE como EH son mediais e inconmensurables con EZ en lonxitude[146].

E, dado que ΔB é expresable e é igual a KΘ, logo, KΘ é tamén expresable. E está aplicado en EZ; logo, HΘ é expresable e conmensurable con EZ en lonxitude[147].

Pero tamén EH é expresable e inconmensurable con EZ en lonxitude; logo, é inconmensurable EH con HΘ en lonxitude[148].

E, como EH é a HΘ, así o cadrado de EH ó contido por EH e HΘ[149]; logo, é inconmensurable o cadrado de EH co contido por EH e HΘ[150].

Pero os cadrados de EH e HΘ son conmensurables co cadrado de EH —pois ambos son expresables—; pero dúas veces o contido por EH e HΘ é conmensurable co contido por EH e HΘ —pois é o dobre que el[151]—; logo, son inconmensurables os cadrados de EH e HΘ con dúas veces o contido por EH e HΘ; logo, a suma dos cadrados de EH e HΘ e dúas veces o contido por EH e HΘ —que é xustamente o cadrado de EΘ[152]— é inconmensurable cos cadrados de EH e HΘ[153].

Pero os cadrados de EH e HΘ son expresables; logo, o cadrado de EΘ é non expresable[154].

Logo, EΘ é non expresable. Pero tamén expresable; o que, sen dúbida, é imposible.

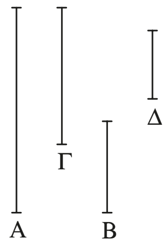
Logo, medial non supera a medial en expresable.

[146] Proposición X, 22.
[147] Proposición X, 20.
[148] Proposición X, 13.
[149] Lema previo a Proposición X, 22.
[150] Proposición X, 11.
[151] Proposición X, 6.
[152] Proposición II, 4.
[153] Proposición X, 16.
[154] Definición X, 1.4.

PROPOSICIÓN 27

Atopar mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa expresable.

Tómense dúas expresables, A e B, conmensurables só en cadrado, cóllase Γ, media proporcional entre A e B[155], e resulte que, como A a B, así Γ a Δ[156].



E, dado que A e B son expresables conmensurables só en cadrado, logo, o contido por A e B, é dicir, o cadrado de Γ[157], é medial[158]. Logo, Γ é medial[159].

E, dado que, como A é a B, así Γ a Δ, mentres que A e B son conmensurables só en cadrado, logo, tamén Γ e Δ son conmensurables só en cadrado[160]. E Γ é medial; logo, tamén Δ é medial[161].

Logo, Γ e Δ son mediais conmensurables só en cadrado. Digo que tamén conteñen unha expresable.

Pois, dado que como A é a B, así Γ a Δ, logo, por alternancia, como A é a Γ, B a Δ[162]. Pero, como A a Γ, Γ a B; logo, tamén como Γ a B, así B a Δ[163]; logo, o contido por Γ e Δ é igual ó cadrado de B.

155 Proposición VI, 13.
156 Proposición VI, 12.
157 Proposición VI, 17.
158 Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).
159 Proposición X, 21.
160 Proposición X, 11.
161 Proposición X, 23. Corolario.
162 Proposición V, 16.
163 Proposición V, 11.

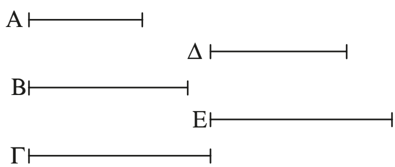
Pero o cadrado de B é expresable. Logo, tamén o contido por Γ e Δ é expresable.

Logo, quedan atopadas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido é expresable; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 28

Atopar mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa medial.

Tómense A, B e Γ, expresables conmensurables só en cadrado, cóllase Δ, media proporcional entre A e B[164], e resulte que, como B a Γ, así Δ a E[165].



Dado que A e B son expresables conmensurables só en cadrado, logo, o contido por A e B, é dicir, o cadrado de Δ[166], é medial[167]. Logo, Δ é medial[168].

E, dado que B e Γ son conmensurables só en cadrado e, como B é a Γ, Δ a E, logo, tamén Δ e E son conmensurables só en cadrado[169]. Pero Δ é medial; logo, tamén é medial E; logo, Δ e E son mediais conmensurables só en cadrado.

Digo agora que tamén conteñen unha medial. Pois, dado que, como B é a Γ, Δ a E, logo, por alternancia, como B a Δ, Γ a E[170]. Pero como B a Δ, Δ a A[171]; logo, tamén, como Δ a A, Γ a E[172]; logo, o contido por A e Γ é igual ó contido por Δ e E[173].

---

164 Proposición VI, 13.
165 Proposición VI, 12.
166 Proposición VI, 17.
167 Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).
168 Proposición X, 21.
169 Proposición X, 11.
170 Proposición V, 16.
171 Proposición V, 7. Corolario.
172 Proposición V, 11.
173 Proposición VI, 16.

Pero o contido por Α e Γ é medial[174]; logo, tamén é medial o contido por Δ e Ε.

Logo, quedan atopadas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido é medial; o que, xustamente era preciso demostrar.

Lema 1

***Atopar dous números cadrados de xeito que tamén a súa suma sexa cadrado*[175].**

Tómense dous números ΑΒ e ΒΓ, e sexan pares ou impares[176].

E dado que, se dun número par se resta un número par e, se dun impar un impar, o resto é par, logo, o resto ΑΓ é par[177]. E divídase ΑΓ á metade por Δ.

Sexan tamén ΑΒ e ΒΓ ou planos semellantes[178] ou cadrados que tamén eles mesmos son planos semellantes; logo, o produto de ΑΒ e ΒΓ xunto co cadrado de ΓΔ é igual ó cadrado de ΒΔ[179].

---

174 Proposición X, 21.

175 Utilizará varias veces resultados directos deste lema:

1) Existen dous números de xeito que a súa suma garda con cada un deles a razón que garda un número cadrado cun número cadrado —consecuencia directa do enunciado.

2) Existen dous números cadrados de xeito que a súa diferenza non é un cadrado —último parágrafo da demostración do lema.

3) Existen dous números de xeito que a súa suma garda cun deles a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, mentres que co outro non garda a razón que garda un número cadrado cun número cadrado —consecuencia directa do último parágrafo da demostración do lema.

176 Definición VII, 6 e Definición VII, 7.

177 Proposición IX, 24 e Proposición IX, 26.

178 Definición VII, 21.

179 Proposición II, 6.

E o produto de AB e ΒΓ é cadrado, posto que, precisamente, foi demostrado que, se dous números planos semellantes ó multiplicárense entre si fan un número, o produto é cadrado[180].

Logo, quedan achados dous números cadrados: o produto de AB e ΒΓ, e o cadrado de ΓΔ, os cales, sumados, fan o cadrado de ΒΔ.

E é evidente que quedan achados, asemade, dous cadrados —o de ΒΔ e o de ΓΔ— de xeito que a súa diferenza —o produto de AB e ΒΓ— é cadrado, cando AB e ΒΓ son números planos semellantes.

Pero, cando non son planos semellantes, quedan achados dous cadrados —o de ΒΔ e o de ΔΓ— cuxa diferenza —o produto de AB e ΒΓ— non é cadrado[181]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Lema 2

Atopar dous números cadrados de xeito que a súa suma non sexa cadrado[182].

Pois ben, sexa o produto de AB e ΒΓ, como dixemos, cadrado, ΓΑ sexa par, e divídase ΓΑ á metade por Δ.

É evidente que o cadrado produto de AB e ΒΓ xunto co cadrado de ΓΔ é igual ó cadrado de ΒΔ[183].

Réstese a unidade ΔΕ; logo, o produto de AB e ΒΓ xunto co cadrado de ΓΕ é menor que o cadrado de ΒΔ.

[180] Proposición IX, 1.

[181] Proposición IX, 2.

[182] Utilizará varias veces un resultado directo deste lema: Existen dous números de xeito que a súa suma non garda con ningún deles a razón que garda un número cadrado cun número cadrado.

[183] Lema anterior.

Entón, digo que o cadrado produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE non será cadrado.

Pois, se é cadrado, ou é igual ó cadrado de BE ou menor que o cadrado de BE, pero xa non maior, para que non sexa cortada a unidade.

Sexa, se é posible, primeiro, o produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE igual ó cadrado de BE, e sexa HA o dobre que a unidade ΔE.

Entón, dado que o total AΓ é o dobre que o total ΓΔ, parte do cal, AH, é o dobre que ΔE, logo, tamén o resto HΓ é o dobre que o resto EΓ[184]; logo, queda cortado á metade HΓ por E. Logo, o produto de HB e BΓ xunto co cadrado de ΓE é igual ó cadrado de BE[185].

Pero tamén se supón que o produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE é igual ó cadrado de BE; logo, o produto de HB e BΓ xunto co cadrado de ΓE é igual ó produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE. E, se se resta a ambos o cadrado de ΓE, conclúese que AB é igual a HB[186]; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, o produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE non é igual ó cadrado de BE.

Digo agora que tampouco é menor que o cadrado de BE.

Pois ben, se é posible, sexa igual ó cadrado de BZ, e sexa ΘA o dobre que ΔZ.

E concluirase outra vez que ΘΓ é o dobre que ΓZ; de xeito que tamén ΓΘ foi cortado á metade por Z e, por iso, o produto de ΘB e BΓ xunto co cadrado de ZΓ resulta igual ó de BZ.

Pero tamén se supón que o produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE é igual ó cadrado de BZ; en consecuencia, tamén o produto de ΘB e BΓ xunto co cadrado de ΓZ será igual ó produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE; o que, sen dúbida é absurdo.

---

184 Proposición VII, 11.

185 Proposición II, 6.

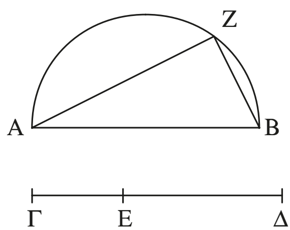
186 Proposición VII, 18.

Logo, o produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE non é igual a un menor que o cadrado de BE. Pero foi demostrado que tampouco é igual ó cadrado de BE. Logo, o produto de AB e BΓ xunto co cadrado de ΓE non é cadrado. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 29

Atopar dúas expresables conmensurables só en cadrado, de xeito que o cadrado da maior sexa maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude.

Pois ben, tómese unha expresable AB e os dous números cadrados ΓΔ e ΔE, de xeito que a súa diferenza, ΓE, non sexa cadrado[187], debúxese en AB o semicírculo AZB, fágase que, como ΔΓ a ΓE, así o cadrado de BA ó cadrado de AZ[188] e únase ZB.



Dado que, como o cadrado de BA é ó de AZ, así ΔΓ a ΓE, logo, o cadrado de BA garda co de AZ a razón que o número ΔΓ co número ΓE; logo, é conmensurable o cadrado de BA co de AZ[189].

Pero o cadrado de AB é expresable[190]; logo, tamén é expresable o de AZ; logo, tamén é expresable AZ[191].

---

187 Lema I previo a esta Proposición X, 29. Aínda que o enunciado do lema está restrinxido ó caso en que a suma dos dous números cadrados é un cadrado, na demostración tamén indica como atopar dous números cadrados de forma que a súa diferenza non sexa un cadrado.

188 Proposición X, 6. Corolario.

189 Proposición X, 6.

190 Definición X, 1.4.

191 Definición X, 1.3.

E, dado que ΔΓ non garda con ΓΕ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[192], logo, tampouco o cadrado de BA garda co de AZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado.

Logo, é inconmensurable AB con AZ en lonxitude[193]; logo, BA e AZ son expresables conmensurables só en cadrado.

E, dado que, como ΔΓ é a ΓΕ, así o cadrado de BA ó de AZ, logo, por conversión, como ΓΔ a ΔΕ, así o cadrado de AB ó de BZ[194].

Pero ΓΔ garda con ΔΕ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tamén o cadrado de AB garda co de BZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é conmensurable AB con BZ en lonxitude[195].

E o cadrado de AB é igual ós de AZ e ZB[196]; logo, o cadrado de AB é maior que o de AZ no de BZ, conmensurable con aquela.

Logo, quedan atopadas dúas expresables conmensurables só en cadrado, BA e AZ, de xeito que o cadrado da maior, AB, é maior que o da menor, AZ, no cadrado de BZ, conmensurable con aquela en lonxitude; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 30

Atopar dúas expresables conmensurables só en cadrado, de xeito que o cadrado da maior sexa maior que o da menor no cadrado dunha inconmensurable con aquela en lonxitude .

Pois ben, tómese a expresable AB e os dous números cadrados ΓΕ e ΕΔ, de xeito que a súa suma ΓΔ non sexa cadrado[197],

---

192 Proposición IX, 2.

193 Proposición X, 9.

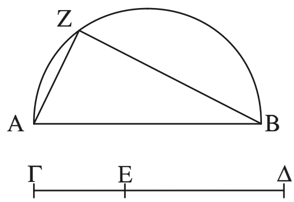
194 $\Gamma\Delta:(\Gamma\Delta - \Gamma E)::AB^2:(AB^2 - AZ^2)$ pola Proposición V, 19. Corolario; a Proposición III, 31 asegura que o ángulo con vértice en Z é recto e polo tanto $AB^2 - AZ^2 = BZ^2$ pola Proposición I, 47.

195 Proposición X, 9.

196 Proposición I, 47.

197 Lema 2 previo á Proposición X, 29.

debúxese en AB o semicírculo AZB, fágase que, como ΔΓ a ΓE, así o cadrado de BA ó cadrado de AZ[198], e únase ZB.



De xeito semellante á anterior a esta poderemos demostrar que BA e AZ son expresables conmensurables só en cadrado.

E, dado que, como ΔΓ é a ΓE, así o cadrado de BA ó de AZ, logo, por conversión, como ΓΔ a ΔE, así o cadrado de AB ó de BZ[199].

Pero ΓΔ non garda con ΔE a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[200]; logo, tampouco o cadrado de AB garda co de BZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable AB con BZ en lonxitude[201]. E o cadrado de AB é maior que o de AZ no cadrado de ZB[202], inconmensurable con aquela en lonxitude.

Logo, AB e AZ son expresables conmensurables só en cadrado, e o cadrado de AB é maior que o de AZ no cadrado de ZB, inconmensurable con aquela en lonxitude; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 31

***Atopar dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa expresable, de xeito que o cadrado da maior sexa maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude*[203].**

198 Proposición X, 6. Corolario.

199 Nota 194 (Proposición X, 29).

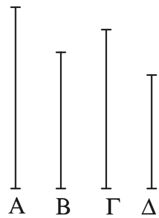
200 Proposición IX, 2.

201 Proposición X, 9.

202 Proposición I, 47.

203 Aínda que non está incluído no enunciado, a última frase da demostración pon de manifesto que tamén se poden atopar dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo

Pois ben, tómense as dúas expresables A e B conmensurables só en cadrado, de xeito que o cadrado de A, que é a maior, sexa maior que o da menor, B, no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude[204].



E sexa o cadrado de Γ igual ó contido por A e B. Pero o contido por A e B é medial[205]; logo, tamén o cadrado de Γ é medial; logo, tamén Γ é medial.

E sexa o contido por Γ e Δ igual ó cadrado de B[206]. Pero o cadrado de B é expresable; logo, tamén o contido por Γ e Δ é expresable.

E, dado que, como A é a B, así o contido por A e B ó cadrado de B[207], pero o cadrado de Γ é igual ó contido por A e B, mentres que o contido por Γ e Δ é igual ó cadrado de B, logo, como A a B, así o cadrado de Γ ó contido por Γ e Δ.

Pero, como o cadrado de Γ ó contido por Γ e Δ, así Γ a Δ; logo, tamén como A a B, así Γ a Δ[208].

Pero A é conmensurable con B só en cadrado; logo, tamén Γ é conmensurable con Δ só en cadrado[209]. E Γ é medial; logo, tamén Δ é medial[210].

E, dado que, como A é a B, Γ a Δ, mentres que o cadrado de A é maior que o de B no cadrado dunha conmensurable

contido sexa expresable, de xeito que o cadrado da maior sexa maior que o da menor no cadrado dunha inconmensurable en lonxitude con aquela.

204 Proposición X, 29.

205 Proposición X, 21 e Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).

206 Proposición VI, 12 e Proposición VI, 16.

207 Lema previo a Proposición X, 22.

208 Proposición V, 11.

209 Proposición X, 11.

210 Proposición X, 23.

con aquela, logo, tamén o cadrado de Γ é maior que o de Δ no cadrado dunha conmensurable con Γ[211].

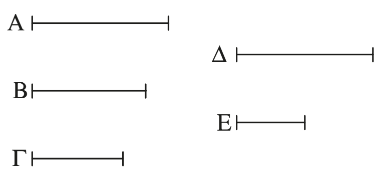
Logo, quedan atopadas as dúas mediais conmensurables só en cadrado Γ e Δ, cuxo contido é expresable, e o cadrado de Γ é maior que o de Δ no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude .

De xeito semellante poderase demostrar tamén que[212] no cadrado dunha inconmensurable, cando o cadrado de A sexa maior que o de B no cadrado dunha inconmensurable con aquela[213].

PROPOSICIÓN 32

Atopar dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa medial, de xeito que o cadrado da maior sexa maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela.

Pois ben, tómense tres expresables, A, B e Γ, conmensurables só en cadrado, de xeito que o cadrado de A sexa maior que o de Γ no cadrado dunha conmensurable con aquela[214], e sexa o cadrado de Δ igual ó contido por A e B[215].



Logo, o cadrado de Δ é medial; logo, Δ é tamén medial[216].

Pero sexa o contido por Δ e E igual ó contido por B e Γ[217].

E, dado que, como o contido por A e B é ó contido por B e Γ, así A a Γ[218], pero o cadrado de Δ é igual ó contido por A e

[211] Proposición X, 14.
[212] Enténdase «o cadrado de Γ é maior que o de Δ».
[213] Proposición X, 30.
[214] Proposición X, 29.
[215] Proposición VI, 13 e Proposición VI, 17.
[216] Proposición X, 21.
[217] Proposición VI, 12 e Proposición VI, 16.
[218] Proposición VI, 1.

B, mentres que o contido por Δ e E é igual ó contido por B e Γ, logo, como A é a Γ, así o cadrado de Δ ó contido por Δ e E.

Pero, como o cadrado de Δ ó contido por Δ e E, así Δ a E; logo, tamén como A a Γ, así Δ a E.

Pero A é conmensurable con Γ en cadrado. Logo, tamén Δ é conmensurable con E só en cadrado[219].

Pero Δ é medial; logo, E é tamén medial[220].

E, dado que, como A é a Γ, Δ a E, mentres que o cadrado de A é maior que o de Γ no cadrado dunha conmensurable con aquela, logo, tamén o cadrado de Δ será maior que o de E no cadrado dunha conmensurable con Δ[221].

Digo agora que é tamén medial o contido por Δ e E. Pois, dado que o contido por B e Γ é igual ó contido por Δ e E, e o contido por B e Γ é medial[222],[223] logo, é tamén medial o contido por Δ e E.

Logo, quedan atopadas Δ e E, dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido é medial, de xeito que o cadrado da maior é maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela.

De xeito semellante, asemade, poderase demostrar tamén que[224] no cadrado dunha inconmensurable, cando o cadrado de A sexa maior que o de Γ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[225].

Lema

Sexa o triángulo rectángulo* ΑΒΓ *co ángulo* Α *recto, e trácese a perpendicular* ΑΔ*; digo que o contido por* ΓΒΔ[226] *é

[219] Proposición X, 11.

[220] Proposición X, 23.

[221] Proposición X, 14.

[222] Proposición X, 21.

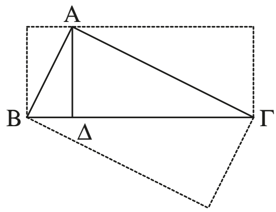
[223] Algúns manuscritos presentan aquí esta frase: «pois B e Γ son expresables conmensurables só en cadrado»; Heiberg e Heath atetízana.

[224] Enténdase «o cadrado de Δ é maior que o de E».

[225] Proposición X, 30.

[226] No texto grego figura «o contido por ΓΒΔ» ou «o contido por ΒΓΔ» para referirse ó paralelogramo de ángulos rectos contido polas rectas ΓΒ e ΒΔ (ΒΓ e ΓΔ) sen repetir a letra Β (Γ) e sen comas entre as letras. Heiberg, no aparato crítico, indica que algúns manuscritos presentan ΓΒ e ΒΔ (ΒΓ e ΓΔ) e nun deles apréciase que foi corrixido ΓΒΔ por ΓΒ, ΒΔ. Sobre

***igual ó cadrado de* BA*, mentres que o contido por* BΓΔ *é igual ó cadrado de* ΓA*, o contido por* BΔ *e* ΔΓ *é igual ó cadrado de* AΔ*, e, ademais, o contido por* BΓ *e* AΔ *é igual ó contido por* BA *e* AΓ.**



E, primeiro, digo que o contido por ΓBΔ é igual ó cadrado de BA.

Pois, dado que nun triángulo rectángulo queda trazada a perpendicular AΔ dende o ángulo recto ata a base, logo, os triángulos ABΔ e AΔΓ son semellantes a ABΓ enteiro e entre si[227].

E, dado que o triángulo ABΓ é semellante ó triángulo ABΔ, logo, como ΓB é a BA, así BA a BΔ[228]; logo, o contido por ΓBΔ é igual ó cadrado de AB[229].

Entón, polo mesmo, tamén o contido por BΓΔ é igual ó cadrado de AΓ.

E, dado que, se nun triángulo rectángulo se traza unha perpendicular dende o ángulo recto ata a base, a recta trazada é media proporcional entre os segmentos da base[230], logo, como BΔ é a ΔA, así AΔ a ΔΓ; logo, o contido por BΔ e ΔΓ é igual ó cadrado de ΔA.

Digo que tamén o contido por BΓ e AΔ é igual ó contido por BA e AΓ. Pois, dado que, como dixemos, ABΓ é semellante a

as expresións braquilóxicas en Euclides para referirse a distintos elementos xeométricos, véxase a Nota 10 (Proposición II, 1).

227 Proposición VI, 8.

228 Proposición VI, 4.

229 Proposición VI, 17.

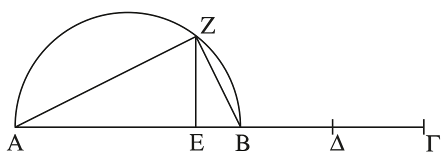
230 Proposición VI, 8. Corolario.

ABΔ, logo, como BΓ é a ΓA, así BA a AΔ[231].[232] Logo, o contido por BΓ e AΔ é igual ó contido por BA e AΓ[233]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 33

Atopar dúas rectas inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos seus cadrados expresable, pero o contido por elas, medial.

Pois ben, tómense dúas expresables, AB e BΓ, conmensurables só en cadrado, de xeito que o cadrado da maior, AB, sexa maior que o da menor, BΓ, no cadrado dunha inconmensurable con aquela[234], córtese BΓ á metade por Δ, aplíquese en AB un paralelogramo igual ó cadrado tanto de BΔ como de ΔΓ, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por AEB[235]; debúxese en AB o semicírculo AZB, trácese EZ en ángulo recto con AB[236] e únanse AZ e ZB.



E, dado que AB e BΓ son rectas desiguais e o cadrado de AB é maior que o de BΓ no cadrado dunha inconmensurable con aquela, mentres que, en AB, queda aplicado un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de BΓ, é dicir, ó cadrado da súa metade, inferior nunha figura cadrada, e fai o contido por AEB[237], logo, é inconmensurable AE con EB[238].

---

231 Proposición VI, 4.

232 Algúns manuscritos presentan aquí esta frase: «Pero se catro rectas son proporcionais, o contido polos extremos é igual ó contido polos medios»; Heiberg e Heath atetízana.

233 Proposición VI, 16.

234 Proposición X, 30.

235 Proposición VI, 28. Véxase a Nota 226 do Lema previo.

236 Proposición I, 11.

237 Véxase a Nota 226 do Lema previo.

238 Proposición X, 18.

E, como AE é a EB, así o contido por BA e AE ó contido por AB e BE[239], mentres que o contido por BA e AE igual ó cadrado de AZ, e o contido por AB e BE ó cadrado de BZ[240]; logo, é inconmensurable o cadrado de AZ co cadrado de ZB; logo, AZ e ZB son inconmensurables en cadrado[241].

E, dado que AB é expresable, logo, é tamén expresable o cadrado de AB; en consecuencia, tamén a suma dos cadrados de AZ e ZB é expresable[242].

E, dado que, asemade, o contido por AE e EB é igual ó cadrado de EZ, pero suponse que o contido por AE e EB tamén é igual ó cadrado de BΔ, logo, ZE é igual a BΔ; logo, BΓ é o dobre que ZE; en consecuencia, tamén o contido por AB e BΓ é conmensurable co contido por AB e EZ[243].

Pero o contido por AB e BΓ é medial[244]; logo, é tamén medial o contido por AB e EZ[245].

Pero o contido por AB e EZ é igual ó contido por AZ e ZB[246]; logo, é tamén medial o contido por AZ e ZB. Pero foi demostrado tamén que a suma dos seus cadrados é expresable.

Logo, quedan atopadas dúas rectas inconmensurables en cadrado, AZ e ZB, que fan a suma dos seus cadrados expresable, pero o contido por elas, medial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

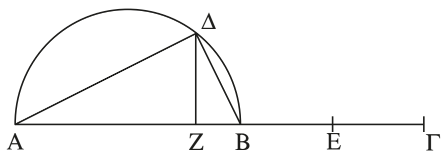
PROPOSICIÓN 34

Atopar dúas rectas inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos seus cadrados medial, pero o contido por elas, expresable.

Pois ben, tómense dúas mediais, AB e BΓ, conmensurables só en cadrado, cuxo contido é expresable, de xeito que

239 Proposición VI, 1.
240 Proposición III, 31 e Lema previo a esta Proposición X, 33.
241 Definición X, 1.2.
242 Proposición 1, 47.
243 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
244 Proposición X, 21.
245 Proposición X, 23. Corolario.
246 Lema previo a esta Proposición X, 33.

o cadrado de AB sexa maior que o de BΓ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[247], debúxese en AB o semicírculo AΔB, córtese BΓ á metade por E, e aplíquese en AB un paralelogramo igual ó cadrado de BE inferior nunha figura cadrada, o contido por AZB[248]; logo, é inconmensurable AZ con ZB en lonxitude[249]. Trácese ZΔ dende Z en ángulo recto con AB[250] e únanse AΔ e ΔB.



Dado que é inconmensurable AZ con ZB, logo, é tamén inconmensurable o contido por BA e AZ co contido por AB e BZ[251].

Pero o contido por BA e AZ é igual ó cadrado de AΔ, mentres que o contido por AB e BZ ó cadrado de ΔB[252]; logo, é tamén inconmensurable o cadrado de AΔ co de ΔB.

E, dado que o cadrado de AB é medial, logo, é tamén medial a suma dos cadrados de AΔ e ΔB[253].

E, dado que BΓ é o dobre que ΔZ[254], logo, tamén o contido por AB e BΓ é o dobre que o contido por AB e ZΔ[255].

Pero o contido por AB e BΓ é expresable; logo, é tamén expresable o contido por AB e ZΔ[256].

Pero o contido por AB e ZΔ é igual ó contido por AΔ e ΔB[257]; en consecuencia, o contido por AΔ e ΔB é expresable.

---

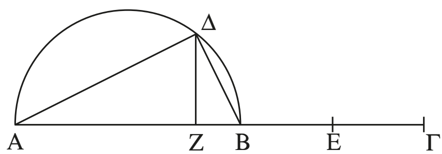
247 Nota 203 (Proposición X, 31).
248 Proposición VI, 28. Véxase a Nota 226 do Lema previo á Proposición X, 33.
249 Proposición X, 18.
250 Proposición I, 11.
251 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
252 Proposición III, 31 e Lema previo á Proposición X, 33.
253 Proposición 1, 47.
254 Véxase a demostración da Proposición X, 33.
255 Proposición VI, 1.
256 Proposición X, 6.
257 Lema previo á Proposición X, 33.

Logo, quedan atopadas dúas rectas inconmensurables en cadrado, AΔ e ΔB, que fan a suma dos seus cadrados medial, pero o contido por elas, expresable; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 35

Atopar dúas rectas inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos seus cadrados medial, e o contido por elas, medial, e, ademais, inconmensurable co cadrado que é a suma dos seus cadrados.

Tómense dúas mediais conmensurables só en cadrado, AB e BΓ, cuxo contido sexa medial, de xeito que o cadrado de AB sexa maior que o cadrado de BΓ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[258], debúxese en AB o semicírculo AΔB e o demais resulte semellante ó de arriba.



E, dado que é inconmensurable AZ con ZB en lonxitude[259], é tamén inconmensurable AΔ con ΔB en cadrado[260].

E, dado que o cadrado de AB é medial, logo, é tamén medial a suma dos cadrados de AΔ e ΔB[261].

E, dado que o contido por AZ e ZB é igual ó cadrado tanto de BE como de ΔZ[262], logo, BE é igual a ΔZ; logo, BΓ é o dobre que ZΔ; en consecuencia, tamén o contido por AB e BΓ é o dobre que o contido por AB e ZΔ[263].

258 Proposición X, 32.
259 Proposición X, 18.
260 Lema previo á Proposición X, 33 e Proposición X, 11.
261 Proposición III, 31 e Proposición I, 47.
262 Lema previo á Proposición X, 33.
263 Proposición VI, 1.

Pero o contido por AB e BΓ é medial; logo, é tamén medial o contido por AB e ZΔ[264]. E é igual ó contido por AΔ e ΔB[265]; logo, é tamén medial o contido por AΔ e ΔB.

E, dado que é inconmensurable AB con BΓ en lonxitude, pero conmensurable ΓB con BE, logo, é tamén inconmensurable AB con BE en lonxitude[266]; en consecuencia, tamén o cadrado de AB é inconmensurable co contido por AB e BE[267].

Pero o cadrado de AΔ xunto co de ΔB é igual ó cadrado de AB[268], mentres que o contido por AB e ZΔ, é dicir, o contido por AΔ e ΔB, é igual ó contido por AB e BE; logo, é inconmensurable a suma dos cadrados de AΔ e ΔB co contido por AΔ e ΔB.

Logo, quedan atopadas dúas rectas, AΔ e ΔB, inconmensurables en cadrado, que fan a suma dos seus cadrados medial, e o contido por elas, medial, e, ademais, inconmensurable coa suma[269] dos seus cadrados; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 36

Se se suman dúas expresables conmensurables só en cadrado, a recta enteira é non expresable; chámese binomial[270].

Pois ben, súmense dúas expresables conmensurables só en cadrado, AB e BΓ; digo que a recta enteira, AΓ, é non expresable.

---

264 Proposición X, 23. Corolario.

265 Lema previo á Proposición X, 33.

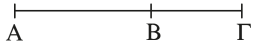
266 Proposición X, 13.

267 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

268 Proposición I, 47.

269 Aínda que no enunciado da proposición pon de manifesto que a suma dos cadrados das rectas que vai atopar, AΔ e ΔB, é un cadrado —polo teorema de Pitágoras, coincide co cadrado de AB—, omite este matiz na conclusión.

270 O significado de ἐκ δύο ὀνομάτων é «a partir de dous nomes»; tomamos para a nosa tradución a palabra técnica que a tradición adoptou, «binomial». Se *a* é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— as rectas de lonxitude a $(1+\sqrt{q})$, sendo *q* un número racional que non é un cadrado, son binomiais. Nas proposicións X, 36 a X, 41 introduce seis tipos de rectas non expresables, cada unha das cales se descompón como suma de dúas rectas que verifican determinadas condicións; nas proposicións X, 42 a X, 47 proba que estas descomposicións son únicas.



Pois, dado que é inconmensurable AB con BΓ en lonxitude —pois son conmensurables só en cadrado—, mentres que, como AB a BΓ, así o contido por ABΓ[271] ó cadrado de BΓ[272], logo, é inconmensurable o contido por AB e BΓ co cadrado de BΓ[273]. Pero dúas veces o contido por AB e BΓ é conmensurable co contido por AB e BΓ[274], mentres que o cadrado de AB xunto co de BΓ é conmensurable co cadrado de BΓ —pois AB e BΓ son expresables conmensurables só en cadrado[275].

Logo, dúas veces o contido por AB e BΓ é inconmensurable co cadrado de AB xunto co de BΓ[276].

E, por composición[277], dúas veces o contido por AB e BΓ xunto co cadrado de AB e o de BΓ, é dicir, o cadrado de AΓ[278], é inconmensurable coa suma dos cadrados de AB e BΓ[279].

Pero a suma dos cadrados de AB e BΓ é expresable; logo, o cadrado de AΓ é non expresable[280]; en consecuencia, tamén AΓ é non expresable[281]; chámese binomial; o que xustamente era preciso demostrar.

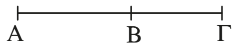
PROPOSICIÓN 37

Se se suman dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa expresable, a recta enteira é non expresable; chámese primeira bimedial[282].

---

[271] Véxase a Nota 226 (Lema previo a Proposición X, 33).
[272] Proposición VI, 1.
[273] Proposición X, 11.
[274] Proposición X, 6.
[275] Proposición X, 15.
[276] Proposición X, 13.
[277] Proposición V, 18.
[278] Proposición II, 4.
[279] Proposición X, 16.
[280] Definición X, 1.4.
[281] Definición X, 1.4.
[282] A tradución de ἐκ δύο μέσων πρώτη é «primeira de dúas mediais» pero tomamos a palabra técnica que a tradición adoptou, «primeira bimedial». Se *a* é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, a Proposición X, 27 permite afirmar que as rectas que

Pois ben, súmense dúas mediais conmensurables só en cadrado, AB e BΓ, cuxo contido sexa expresable[283]; digo que a recta enteira, AΓ, é non expresable.



Pois, dado que é inconmensurable AB con BΓ en lonxitude, logo, tamén os cadrados de AB e BΓ son inconmensurables con dúas veces o contido por AB e BΓ[284]; e, por composición[285], os cadrados de AB e BΓ xunto con dúas veces o contido por AB e BΓ, que é xustamente o cadrado de AΓ[286], é inconmensurable co contido por AB e BΓ[287].

Pero o contido por AB e BΓ é expresable —pois suponse que o que contén AB e BΓ é expresable—; logo, é non expresable o cadrado de AΓ[288]; logo, é non expresable AΓ; chámese primeira bimedial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 38

Se se suman dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa medial, a recta enteira é non expresable; chámese segunda bimedial[289].

Pois ben, súmense dúas mediais conmensurables só en cadrado, AB e BΓ, cuxo contido sexa medial[290]; digo que AΓ é non expresable

---

miden $a\sqrt[4]{q}\,(1+\sqrt{q})$, sendo q un número racional que non é un cadrado, son rectas do tipo «primeira bimedial».

283 Proposición X, 27.

284 Lema previo á Proposición X, 22; Proposición X, 11; Proposición X, 13 e Proposición X, 6.

285 Proposición V, 18.

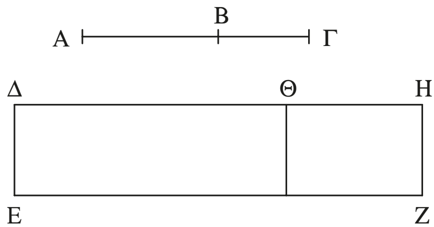
286 Proposición II, 4.

287 Proposición V, 18 e Proposición X, 13.

288 Definición X, 1.4.

289 A tradución de ἐκ δύο μέσων δευτέρα é «segunda de dúas mediais» pero tomamos a palabra técnica que a tradición adoptou, «segunda bimedial». Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, a Proposición X, 28 permite afirmar que as rectas que miden $a\sqrt[4]{q}\,(1+\sqrt{k})$, sendo q e k números racionais tal que q, k e qk non son cadrados, son rectas do tipo «segunda bimedial».

290 Proposición X, 28.



Pois ben, tómese a expresable ΔE e, en ΔE, aplíquese ΔZ, igual ó cadrado de AΓ, facendo en anchura ΔH[291].

E, dado que o cadrado de AΓ é igual ó cadrado de AB xunto co de BΓ e dúas veces o contido por AB e BΓ[292], entón, en ΔE, aplíquese EΘ igual ós cadrados de AB e BΓ; logo, o restante, ΘZ, é igual a dúas veces o contido por AB e BΓ.

E, dado que tanto AB como BΓ son mediais, logo é tamén medial o cadrado de AB xunto co de BΓ[293].

Pero suponse que dúas veces o contido por AB e BΓ é tamén medial.

E EΘ é igual ó cadrado de AB xunto co de BΓ, mentres que ZΘ igual a dúas veces o contido por AB e BΓ; logo, tanto EΘ como ΘZ son mediais. E están aplicadas na expresable ΔE; logo, tanto ΔΘ como ΘH son expresables e inconmensurables en lonxitude con ΔE[294].

Entón, dado que AB é inconmensurable con BΓ en lonxitude e que, como AB é a BΓ, así o cadrado de AB ó contido por AB e BΓ[295], logo, é inconmensurable o cadrado de AB co contido por AB e BΓ[296].

Pero a suma dos cadrados de AB e BΓ é conmensurable co cadrado de AB[297], mentres que dúas veces o contido por AB e BΓ é conmensurable co contido por AB e BΓ[298]. Logo, é incon-

291 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
292 Proposición II, 4.
293 Proposición X, 6 e Proposición X, 23. Corolario.
294 Proposición X, 22.
295 Lema previo á Proposición X, 22.
296 Proposición X, 11.
297 Proposición X, 15.
298 Proposición X, 6.

mensurable a suma dos cadrados de AB e BΓ con dúas veces o contido por AB e BΓ[299].

Pero EΘ é igual ó cadrado de AB xunto co de BΓ, mentres que ΘZ é igual a dúas veces o contido por AB e BΓ. Logo, é inconmensurable EΘ con ΘZ; en consecuencia, tamén é inconmensurable ΔΘ con ΘH en lonxitude[300].

Logo, ΔΘ e ΘH son expresables conmensurables só en cadrado. En consecuencia, ΔH é non expresable[301].

Pero ΔE é expresable; e o paralelogramo de ángulos rectos contido por non expresable e expresable é non expresable[302]; logo, a área ΔZ é non expresable e a recta cuxo cadrado é equivalente a ela é non expresable[303].

Pero o cadrado de AΓ é equivalente a ΔZ; logo, AΓ é non expresable; chámese segunda bimedial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 39

***Se se suman dúas rectas inconmensurables en cadrado que fan expresable a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, medial, a recta enteira é non expresable; chámese maior*[304].**

Pois ben, súmense dúas rectas inconmensurables en cadrado, AB e BΓ, que cumpran o proposto[305]; digo que AΓ é non expresable.

---

299 Proposición X, 13.

300 Proposición VI, 1.

301 Proposición X, 36.

302 Proposición X, 20.

303 Definición X, 1.4.

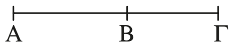
304 O adxectivo «maior» —utilizado en repetidas ocasións nos *Elementos* co seu significado común en grego— adquire agora un significado técnico limitado por Euclides neste enunciado a un tipo de recta. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, a Proposición X, 33 permite afirmar que as rectas que miden

$$a\left(\sqrt{\left(1 + q / \sqrt{1 + q^2}\right) / 2} + \sqrt{\left(1 - q / \sqrt{1 + q^2}\right) / 2}\right),$$

sendo q un número racional tal que $1 + q^2$ non é un cadrado, son rectas do tipo «maior». Son as rectas cuxa razón coa recta a de partida é igual a suma das raíces positivas da ecuación cuártica $x^4 - x^2 + 1/4(1 + q^2) = 0$.

305 Proposición X, 33.

Pois, dado que o contido por ΑΒ e ΒΓ é medial, tamén dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é medial[306].



Pero a suma dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ é expresable; logo, dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é inconmensurable coa suma dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ; en consecuencia, tamén os cadrados de ΑΒ e ΒΓ xunto con dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ, que é xustamente o cadrado de ΑΓ, é inconmensurable coa suma dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ[307]; logo, o cadrado de ΑΓ é non expresable[308]. En consecuencia, tamén ΑΓ é non expresable e chámese maior. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 40

Se se suman dúas rectas inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, expresable, a recta enteira é non expresable; chámese recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial[309].

Pois ben, súmense dúas rectas inconmensurables en cadrado, ΑΒ e ΒΓ, que cumpran o proposto[310]; digo que ΑΓ é non expresable.

Pois, dado que a suma dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ é medial, e dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ, expresable[311], logo, a suma

[306] Proposición X, 6 e Proposición X, 23. Corolario.

[307] Proposición X, 16. Algúns manuscritos presentan aquí esta frase: «Pero a suma dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ é expresable»; Heiberg e Heath atetízana.

[308] Definición X, 1.4.

[309] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, as proposicións 30, 31 e 34 permiten afirmar que as rectas que miden

$$a\left(\sqrt{(\sqrt{1+q^2}+q)/2\,(1+q^2)}+\sqrt{(\sqrt{1+q^2}-q)/2\,(1+q^2)}\right)$$

sendo q un número racional tal que $1 + q^2$ non é un cadrado, son do tipo «rectas cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial». Son as rectas cuxa razón coa recta a de partida é igual a suma das raíces positivas da ecuación cuártica $x^4 - (1/\sqrt{1+q^2})\, x^2 + (1/4\,(1+q^2)^2) = 0$. O nome reflexa o feito de que o cadrado que ten por lado unha recta deste tipo é suma dunha área expresable mais unha área medial.

[310] Proposición X, 34.

[311] Proposición X, 6.

dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ; en consecuencia, tamén o cadrado de ΑΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ[312]; pero dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é expresable; logo, o cadrado de ΑΓ é non expresable.

Logo, ΑΓ é non expresable; chámese recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial[313]. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 41

Se se suman dúas rectas inconmensurables en cadrado que fagan medial a suma dos seus cadrados e medial o contido por elas, ademais de inconmensurable coa suma dos seus cadrados, a recta enteira é non expresable; chámese recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais[314].

---

312 Proposición II, 4 e Proposición X, 16.

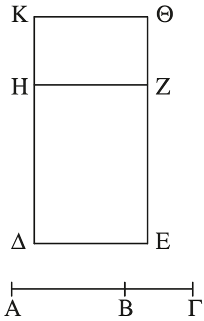
313 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

314 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, as proposicións X, 30, X, 32 e X, 35 permiten afirmar que as rectas que miden

$$a\sqrt[4]{k}\,\left(\sqrt{(1 + q/\sqrt{1 + q^2})/2} + \sqrt{(1 - q/\sqrt{1 + q^2})/2}\right),$$

sendo q , k números racionais tales que k, $(1+ q^2)$, $k(1 + q^2)$ non son cadrados, son do tipo «rectas cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais». Son as rectas cuxa razón coa recta a de partida é igual á suma das raíces positivas da ecuación cuártica $x^4 - \sqrt{k}\, x^2 + k/4\,(1 + q^2) = 0$. O nome reflexa o feito de que o cadrado que ten por lado unha recta deste tipo é suma de dúas áreas mediais.

Pois ben, súmense dúas rectas inconmensurables en cadrado, ΑΒ e ΒΓ que cumpran o proposto[315]; digo que ΑΓ é non expresable.



Tómese a expresable ΔΕ e, en ΔΕ, aplíquese ΔΖ igual ó cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ[316], e ΗΘ igual a dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ; logo, ΔΘ enteiro é igual ó cadrado de ΑΓ[317].

E, dado que a suma dos cadrados de ΑΒ e ΒΓ é medial e é igual a ΔΖ, logo, ΔΖ é tamén medial[318]. E está aplicado na expresable ΔΕ; logo, ΔΗ é expresable e inconmensurable con ΔΕ en lonxitude[319].

Entón, polo mesmo, tamén ΗΚ é expresable e inconmensurable con ΗΖ en lonxitude, é dicir, con ΔΕ[320]. E, dado que o cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ[321], é inconmensurable ΔΖ con ΗΘ; en consecuencia, tamén é inconmensurable ΔΗ con ΗΚ[322].

E son expresables; logo, ΔΗ e ΗΚ son expresables conmensurables só en cadrado[323]; logo, ΔΚ, a chamada binomial, é non expresable[324].

315 Proposición X, 35.
316 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
317 Proposición II, 4.
318 Proposición X, 23. Corolario.
319 Proposición X, 22.
320 Proposición I, 34.
321 Proposición X, 13.
322 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
323 Definición X, 1.3.
324 Proposición X, 36.

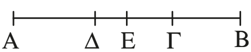
Pero ΔE é expresable; logo, ΔΘ é non expresable[325], e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable[326].

Pero o cadrado de AΓ é equivalente a ΘΔ; logo, AΓ é non expresable; chámese recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais. O que, xustamente, era preciso demostrar.

Lema

E que as non expresables ditas se dividen dun só xeito nas rectas das que se compoñen cumprindo as ideas propostas[327] poderemos demostralo agora, despois de expoñer primeiro o lema seguinte:

Tómese a recta AB e córtese, enteira, en partes desiguais por cada un dos puntos Γ e Δ, e supóñase AΓ maior que ΔB; digo que o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é maior que o de AΔ xunto co de ΔB.



Pois ben, córtese AB á metade por E.

E, dado que AΓ é maior que ΔB, quítese a ambos ΔΓ; logo, a restante, AΔ, é maior que a restante ΓB.

Pero AE é igual a EB; logo, é menor ΔE que EΓ; logo, os puntos Γ e Δ non distan igual da bisección. E, dado que o contido por AΓ e ΓB xunto co cadrado de EΓ é igual ó cadrado de EB[328], pero tamén, efectivamente, o contido por AΔ e ΔB xunto co cadrado de ΔE é igual ó cadrado de EB, logo, o contido por AΓ e ΓB xunto co cadrado de EΓ é igual ó contido por AΔ e ΔB xunto co cadrado de ΔE; destes, o cadrado de ΔE é menor que

325 Proposición X, 20.

326 Definición X, 1.4.

327 O texto grego é ambiguo xa que a palabra εἴδη ten un significado moi impreciso: «aspecto, figura, forma...» ; Heath entende que se refire ós «tipos de rectas sen razón expresable» mentres que Heiberg, na súa tradución ó latín, opta por «o proposto» entendendo que é unha variante da expresión que aparece en X, 39 que nós traducimos por «cumprindo o proposto».

328 Proposición II, 5.

o de EΓ; logo, tamén o restante, contido por AΓ e ΓB, é menor que o contido por AΔ e ΔB.

En consecuencia, tamén dúas veces o contido por AΓ e ΓB é menor que dúas veces o contido por AΔ e ΔB.

Logo, tamén o restante, a suma dos cadrados de AΓ e ΓB, é maior que a suma dos cadrados de AΔ e ΔB; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 42

A binomial divídese por un só punto nos seus termos.

Sexa a binomial AB dividida nos seus termos por Γ; logo, AΓ e ΓB son expresables conmensurables só en cadrado[329]; digo que AB non se divide por ningún outro punto en dúas expresables conmensurables só en cadrado.

Pois ben, se é posible, divídase tamén por Δ, de xeito que tamén AΔ e ΔB sexan expresables conmensurables só en cadrado.

Entón, é evidente que AΓ non é a mesma que ΔB. Pois ben, se é posible, séxao. Entón, será tamén AΔ a mesma que ΓB. E, como AΓ a ΓB, así será BΔ a ΔA, e AB estará dividida tamén por Δ do mesmo xeito que a división por Γ; o que, precisamente, se supón que non. Logo, AΓ non é a mesma que ΔB[330].

Entón, por iso, tampouco os puntos Γ e Δ distan o mesmo da bisección.

[329] Proposición X, 36.

[330] Neste parágrafo pon de manifesto a posibilidade, evidente, de que AΓ sexa igual a ΔB e ΓB igual a AΔ.

Logo, no que o cadrado de AΓ xunto co de ΓB difire do de AΔ xunto co de ΔB, niso difire tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB de dúas veces o contido por AΓ e ΓB, por ser, tanto o cadrado de AΓ e o de ΓB xunto con dúas veces o contido por AΓ e ΓB, como o cadrado de AΔ e o de ΔB xunto con dúas veces o contido por AΔ e ΔB, o mesmo que o cadrado de AB[331].

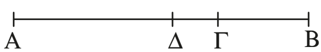
Pero o cadrado de AΓ xunto co de ΓB difire do de AΔ xunto co de ΔB en expresable —pois ambos son expresables[332]—. Logo, tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB difire de dúas veces o contido por AΓ e ΓB en expresable, sendo mediais[333]; o que, sen dúbida, é absurdo —pois medial non supera a medial en expresable[334].

Logo, a binomial non se divide por un punto e por outro; logo, só por un; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 43

A primeira bimedial divídese por un só punto.

Sexa a primeira bimedial AB dividida por Γ, de xeito que AΓ e ΓB sexan mediais conmensurables só en cadrado que conteñan expresable[335]; digo que AB non se divide por outro punto.



Pois se é posible, divídase tamén por Δ, de xeito que tamén AΔ e ΔB sexan mediais conmensurables só en cadrado que conteñan expresable.

Entón, dado que, no que difire dúas veces o contido por AΔ e ΔB de dúas veces o contido por AΓ e ΓB, niso difire o cadrado de AΓ xunto co de ΓB do de AΔ xunto co de ΔB, mentres que dúas veces o contido por AΔ e ΔB difire de dúas veces o contido

331 Proposición II, 4.
332 Proposición X, 15.
333 Proposición X, 21.
334 Proposición X, 26.
335 Proposición X, 37.

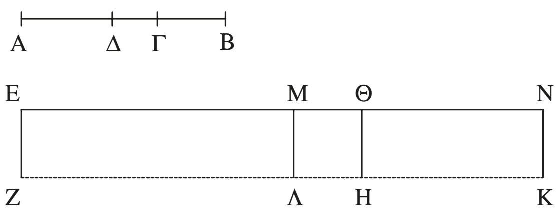
por ΑΓ e ΓΒ en expresable —pois ambos son expresables[336]—; logo, difire tamén en expresable o cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ do de ΑΔ xunto co de ΔΒ, sendo mediais; o que, sen dúbida, é absurdo[337].

Logo, a primeira bimedial non se divide por un punto e por outro nos seus termos; logo, só por un; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 44

A segunda bimedial divídese por un só punto.

Sexa a segunda bimedial ΑΒ dividida por Γ, de xeito que ΑΓ e ΓΒ sexan mediais conmensurables só en cadrado que conteñan medial[338]; é evidente, entón, que Γ non está na bisección, porque non son conmensurables en lonxitude; digo que ΑΒ non se divide por ningún outro punto.



Pois se é posible, divídase tamén por Δ, de xeito que ΑΓ non sexa a mesma que ΔΒ senón que, segundo o suposto, sexa ΑΓ maior —entón, é evidente que tamén os cadrados de ΑΔ e ΔΒ, como demostramos arriba, son menores que os de ΑΓ e ΓΒ[339]—, e de xeito que ΑΔ e ΔΒ sexan mediais conmensurables só en cadrado que conteñan medial.

Tómese a expresable ΕΖ, aplíquese en ΕΖ o paralelogramo de ángulos rectos ΕΚ igual ó cadrado de ΑΒ[340], e, por outra

336 Definición X, 1.4 e Proposición X, 15.
337 Proposición X, 26.
338 Proposición X, 38.
339 Lema previo á Proposición X, 42.
340 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

parte, quítese EH, igual ó cadrado de AΓ xunto co de ΓB; logo, o restante ΘK é igual a dúas veces o contido por AΓ e ΓB[341]. Asemade, quítese EΛ, igual ó cadrado de AΔ xunto co de ΔB —o que, xustamente, se demostrou que era menor que o de AΓ xunto co de ΓB—; logo, tamén o restante MK é igual a dúas veces o contido por AΔ e ΔB.

E, dado que tamén o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é medial, logo, EH é medial[342].

E está aplicado na expresable EZ; logo, EΘ é expresable e inconmensurable con EZ en lonxitude[343].

Entón, polo mesmo, tamén ΘN é expresable e inconmensurable con EZ en lonxitude.

E, dado que AΓ e ΓB son mediais conmensurables só en cadrado, logo, é inconmensurable AΓ con ΓB en lonxitude[344]. E, como AΓ é a ΓB, así o cadrado de AΓ ó contido por AΓ e ΓB[345]; logo, é inconmensurable o cadrado de AΓ co contido por AΓ e ΓB[346].

Pero o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é conmensurable co de AΓ —pois son conmensurables en cadrado AΓ e ΓB[347]—. Pero dúas veces o contido por AΓ e ΓB é conmensurable co contido por AΓ e ΓB[348]. Logo, tamén o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é inconmensurable con dúas veces o contido por AΓ e ΓB[349].

Pero EH é igual ó cadrado de AΓ xunto co de ΓB, mentres que ΘK, igual a dúas veces o contido por AΓ e ΓB; logo, é inconmensurable EH con ΘK; en consecuencia, tamén EΘ é inconmensurable con ΘN en lonxitude[350]; e son expresables; logo, EΘ e ΘN son expresables conmensurables só en cadrado[351].

341 Proposición II, 4.
342 Proposición X, 15 e Proposición X, 23. Corolario.
343 Proposición X, 22.
344 Definición X, 1.2.
345 Proposición VI, 1.
346 Proposición X, 11.
347 Proposición X, 15.
348 Proposición X, 6.
349 Proposición X, 13.
350 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
351 Definición X, 1.3.

Pero, se se suman dúas expresables conmensurables só en cadrado, a recta enteira, a chamada binomial, é non expresable[352]; logo, EN é binomial dividida por Θ.

Segundo o mesmo, poderase demostrar tamén que EM e MN son expresables conmensurables só en cadrado; e EN será binomial dividida por un e outro punto, por Θ e M[353].

E EΘ non é a mesma que MN porque o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é maior que o de AΔ xunto co de ΔB. Pero o cadrado de AΔ xunto co de ΔB é maior que dúas veces o contido por AΔ e ΔB[354]; logo, tamén o cadrado de AΓ xunto co de ΓB, é dicir, EH, é moito maior que dúas veces o contido por AΔ e ΔB, é dicir, MK; en consecuencia, tamén EΘ é maior que MN.

Logo, EΘ non é a mesma que MN; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 45

A maior divídese polo mesmo único punto.

Sexa a maior AB dividida por Γ, de xeito que AΓ e ΓB sexan inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos cadrados de AΓ e ΓB expresable, mentres que, o contido por AΓ e ΓB, medial[355]; digo que AB non se divide por outro punto.

[352] Proposición X, 36.

[353] Véxase a Proposición X, 42.

[354] A afirmación é consecuencia inmediata da Proposición II, 7: Se temos dúas rectas $a < b$, con $b = a + c$, entón $(a + c)^2 + a^2 = 2(a + c)a + c^2$, polo que $(a + c)^2 + a^2 > 2(a + c)a$, é dicir $b^2 + a^2 > 2ba$. O enunciado do resultado, nesta proposición, antes de que apareza de forma explícita como un lema posterior (Lema previo á Proposición X, 60), fai que Heath e Heiberg consideren que é probable que ese lema sexa unha interpolación.

[355] Proposición X, 39.

Pois se é posible, divídase tamén por Δ, de xeito que tamén AΔ e ΔB sexan inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos cadrados de AΔ e ΔB expresable, mentres que o contido por elas medial.

E, dado que, no que difire o cadrado de AΓ xunto co de ΓB do de AΔ xunto co de ΔB, niso difire tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB de dúas veces o contido por AΓ e ΓB[356], pero o cadrado de AΓ xunto co de ΓB supera en expresable ós de AΔ e ΔB —pois ambos son expresables[357]—, logo, tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB supera en expresable a dúas veces o contido por AΓ e ΓB, sendo mediais; o que, sen dúbida, é absurdo[358].

Logo, a maior non se divide por un punto e por outro; logo, divídese polo mesmo único punto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 46

A recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial divídese por un só punto.

Sexa a recta AB, cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial, dividida por Γ, de xeito que AΓ e ΓB sexan inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos cadrados de AΓ e ΓB medial, mentres que dúas veces o contido por AΓ e ΓB expresable[359]; digo que AB non se divide por outro punto.

356 Proposición II, 4.
357 Proposición X, 15.
358 Proposición X, 26.
359 Proposición X, 40.

Pois se é posible, divídase tamén por Δ, de xeito que tamén AΔ e ΔB sexan inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos cadrados de AΔ e ΔB medial, mentres que dúas veces o contido por AΔ e ΔB expresable.

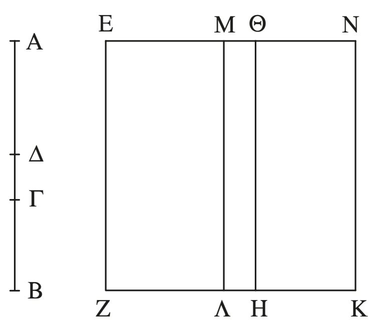
Entón, dado que, no que difire dúas veces o contido por AΓ e ΓB de dúas veces o contido por AΔ e ΔB, niso difire tamén o cadrado de AΔ xunto co de ΔB do de AΓ xunto co de ΓB, mentres que dúas veces o contido por AΓ e ΓB supera a dúas veces o contido por AΔ e ΔB en expresable[360], logo, tamén o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera ó de AΓ xunto co de ΓB en expresable, sendo mediais; o que, sen dúbida, é absurdo[361].

Logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial non se divide por un punto e por outro. Logo, divídese por un punto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 47

A recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais divídese por un só punto.

Sexa a recta AB dividida por Γ, de xeito que AΓ e ΓB sexan inconmensurables en cadrado que fagan a suma dos cadrados de AΓ e ΓB medial, e o contido por AΓ e ΓB medial, e, ademais, inconmensurable coa suma dos seus cadrados[362]; digo que AB non se divide por outro punto, cumprindo o proposto.



360 Proposición X, 15.
361 Proposición X, 26.
362 Proposición X, 41.

Pois se é posible, divídase por Δ, de xeito que, de novo, é evidente que ΑΓ non é a mesma que ΔΒ, senón que, segundo o suposto, ΑΓ é maior; tómese a expresable ΕΖ e, en ΕΖ, aplíquese ΕΗ igual ó cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ, e ΘΚ igual a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[363]; logo, ΕΚ enteiro é igual ó cadrado de ΑΒ[364].

Asemade, en ΕΖ, aplíquese ΕΛ igual ó cadrado de ΑΔ xunto co de ΔΒ; logo, o restante, dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ, é igual ó restante, ΜΚ.

E, dado que se supón que a suma dos cadrados de ΑΓ e ΓΒ é medial, logo, tamén é medial ΕΗ.

E está aplicado na expresable ΕΖ; logo, ΘΕ é expresable e inconmensurable con ΕΖ en lonxitude[365].

Entón, polo mesmo, tamén ΘΝ é expresable e inconmensurable con ΕΖ en lonxitude.

E, dado que a suma dos cadrados de ΑΓ e ΓΒ é inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ, logo, tamén ΕΗ é inconmensurable con ΗΝ; en consecuencia, tamén ΕΘ é inconmensurable con ΘΝ[366]. E son expresables; logo, ΕΘ e ΘΝ son expresables conmensurables só en cadrado[367]; logo, ΕΝ é binomial divida por Θ[368].

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén se divide por Μ.

E non é a mesma ΕΘ que ΜΝ; logo, a binomial queda dividida por un e outro punto; o que, sen dúbida, é absurdo[369].

Logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais non se divide por un e outro punto; logo, só se divide por un.

363 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
364 Proposición II, 4.
365 Proposición X, 22.
366 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
367 Definición X, 1.3.
368 Proposición X, 36.
369 Proposición X, 42.

DEFINICIÓNS[370] *2*

1. Supostas unha expresable e unha binomial dividida nos seus termos, na que o cadrado do termo maior é maior que o do menor no cadrado dunha conmensurable con el mesmo en lonxitude, se o termo maior é conmensurable en lonxitude coa expresable suposta, chámese primeira binomial.
2. Pero se o termo menor é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, chámese segunda binomial.
3. E se ningún dos termos é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, chámese terceira binomial.
4. Asemade, se o cadrado do termo maior é maior no cadrado dunha inconmensurable con aquel en lonxitude, se, ademais, o termo maior é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, chámese cuarta binomial.
5. Pero se o é o menor, quinta.
6. E, se nin un nin outro, sexta.

PROPOSICIÓN 48

Atopar a primeira binomial[371]

Tómense dous números ΑΓ e ΓΒ de xeito que a suma deles, ΑΒ, garde con ΒΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, mentres que con ΓΑ non garde a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[372], tómese unha

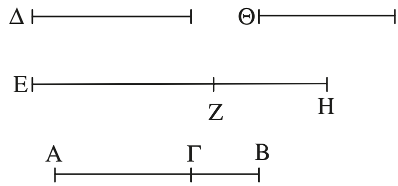
---

[370] Dentro deste segundo bloque de definicións do libro X de distintos tipos de rectas binomiais, as tres primeiras corresponden a rectas binomiais nas que o cadrado do termo maior é maior que o do menor no cadrado dunha conmensurable con el mesmo en lonxitude e as tres últimas a rectas nas que o cadrado do termo maior é maior que o do menor no cadrado dunha inconmensurable con el mesmo en lonxitude.

[371] Sexan m, n dous números naturais tal que $m/(m+n)$ non é un cadrado racional e $n/(m+n)$ é un cadrado —Véxase a Nota 175 (Lema 1 previo a Proposición X, 29)—. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e $q^2 = n/(m+n)$, as rectas de lonxitude $ak(1+\sqrt{1-q^2})$ —sendo k un racional arbitrario— son primeiras binomiais. Véxase a Nota 784 (Proposición X, 85).

[372] Véxase a Nota 175 (Lema 1 previo á Proposición X, 29).

expresable, Δ, e sexa EZ conmensurable con Δ en lonxitude. Logo, tamén EZ é expresable[373].



E resulte que, como BA a AΓ, así o cadrado de EZ ó de ZH[374].

Pero AB garda con AΓ a razón que garda un número cun número; logo, tamén o cadrado de EZ garda co de ZH a razón que garda un número cun número. En consecuencia, é conmensurable o cadrado de EZ co de ZH[375]. E EZ é expresable; logo, tamén é expresable ZH.

E, dado que BA non garda con AΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de EZ garda co de ZH a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable EZ con ZH en lonxitude[376].

Logo, EZ e ZH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, EH é binomial[377].

Digo que é tamén primeira.

Pois, dado que, como o número BA é a AΓ, así o cadrado de EZ ó de ZH, mentres que BA é maior que AΓ, logo, tamén o cadrado de EZ é maior que o de ZH[378].

Entón, sexa o cadrado de ZH xunto co de Θ igual ó de EZ[379]. E, dado que como BA é a AΓ, así o cadrado de EZ ó de ZH, logo, por conversión, como AB é a BΓ, así o cadrado de EZ ó de Θ[380].

---

373 Definición X, 1.3.
374 Proposición X, 6. Corolario.
375 Proposición X, 6.
376 Proposición X, 9.
377 Proposición X, 36.
378 Proposición V, 14.
379 Lema previo á proposición X, 14.
380 Definición V, 16 e Proposición V, 19. Corolario.

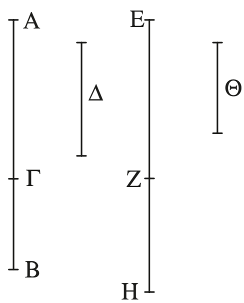
Pero AB garda con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tamén o cadrado de EZ garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[381]. Logo, EZ é conmensurable con Θ en lonxitude[382]; logo, o cadrado de EZ é maior que o de ZH no cadrado dunha conmensurable con aquela. E EZ e ZH son expresables, e EZ conmensurable con Δ en lonxitude.

Logo, EH é primeira binomial[383]; o que xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 49

Atopar a segunda binomial[384]

Tómense dous números AΓ e ΓB de xeito que a suma deles, AB, garde con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, mentres que con AΓ non garde a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[385], tómese a expresable Δ, e EZ sexa conmensurable con Δ en lonxitude. Logo, EZ é expresable.



[381] Proposición V, 11.

[382] Proposición X, 9.

[383] Definición X, 2.1.

[384] Sexan m, n dous números naturais tal que $m/(m + n)$ non é un cadrado racional e $n/(m + n)$ é un cadrado —Véxase a Nota 175 (Lema 1 previo a Proposición X, 29)—. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e $q^2 = n/(m + n)$, as rectas de lonxitude

$$ak(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}})$$

—sendo k un racional arbitrario— son segundas binomiais. Véxase a Nota 795 (Proposición X, 86).

[385] Véxase a Nota 175 (Lema 1 previo á Proposición X, 29).

Resulte tamén que, como o número ΓA a AB, así o cadrado de EZ ó de ZH[386]; logo, o cadrado de EZ é conmensurable co de ZH[387]; logo, tamén é expresable ZH. E, dado que o número ΓA non garda con AB a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, tampouco o cadrado de EZ garda co de ZH a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable EZ con ZH en lonxitude[388].

Logo, EZ e ZH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, EH é binomial.

Cómpre demostrar agora que é tamén segunda.

Pois, dado que, por inversión, como o número BA é a AΓ, así o cadrado de HZ ó de ZE[389], mentres que BA é maior que AΓ, logo, tamén o cadrado de HZ é maior que o de ZE[390].

Sexa o cadrado de EZ xunto co de Θ igual ó de HZ[391]; logo, por conversión, como AB é a BΓ, así o cadrado de ZH ó de Θ[392].

Pero AB garda con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tamén o cadrado de ZH garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[393].

Logo, é conmensurable ZH con Θ en lonxitude[394]; en consecuencia, o cadrado de ZH é maior que o de ZE no cadrado dunha conmensurable con aquela.

E ZH e ZE son expresables conmensurables só en cadrado, e o termo menor, EZ, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, Δ.

Logo, EH é segunda binomial[395]; o que xustamente, era preciso demostrar.

---

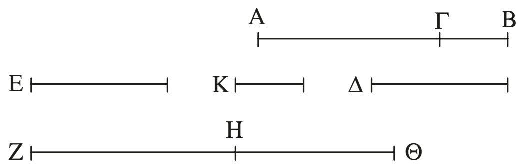
386 Proposición X, 6. Corolario.
387 Proposición X, 6.
388 Proposición X, 9.
389 Proposición V, 7. Corolario.
390 Proposición V, 14.
391 Lema previo á proposición X, 14.
392 Proposición V, 19. Corolario.
393 Proposición V, 11.
394 Proposición X, 9.
395 Definición X, 2.2.

PROPOSICIÓN 50

Atopar a terceira binomial[396]

Tómense dous números ΑΓ e ΓΒ de xeito que a suma deles, ΑΒ, garde con ΒΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, mentres que con ΑΓ non garde a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[397].

Tómese outro número calquera non cadrado, Δ, e que non garde nin con ΒΑ nin con ΑΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; tómese unha recta expresable Ε e resulte que, como Δ a ΑΒ, así o cadrado de Ε ó de ΖΗ[398].



Logo, o cadrado de Ε é conmensurable co de ΖΗ[399]; e Ε é expresable; logo, tamén é expresable ΖΗ.

E, dado que Δ non garda con ΑΒ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, tampouco o cadrado de Ε garda co de ΖΗ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable Ε con ΖΗ en lonxitude[400].

Resulte, asemade que, como o número ΒΑ é a ΑΓ, así o cadrado de ΖΗ ó de ΗΘ; logo é conmensurable o cadrado de ΖΗ co de ΗΘ.

Pero ΖΗ é expresable; logo, tamén é expresable ΗΘ.

---

[396] Sexan m, n dous números naturais tal que $(n + m)/n$ é un cadrado racional e $(n + m)/m$ non é un cadrado —Véxase a Nota 175 (Lema 1 previo a Proposición X, 29)—, s un terceiro número natural que non é un cadrado e tal que s/m e $s/(n + m)$ non son cadrados. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— $q^2 = n/(n + m)$ e $k = (n + m)/s$, as rectas de lonxitude $a\sqrt{k}(1 + \sqrt{1 - q^2})$ son terceiras binomiais. Véxase a Nota 806 (Proposición X, 87).

[397] Véxase a Nota 175 (Lema 1 previo á Proposición X, 29).

[398] Proposición X, 6. Corolario.

[399] Proposición X, 6.

[400] Proposición X, 9.

E, dado que BA non garda con AΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, tampouco o cadrado de ZH garda co de ΘH a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable ZH con HΘ en lonxitude.

Logo ZH e HΘ son expresables conmensurables só en cadrado[401]; logo, ZΘ é binomial[402].

Digo agora que é tamén terceira.

Pois, dado que, como Δ é a AB, así o cadrado de E ó de ZH, mentres que como BA a AΓ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, por igualdade, como Δ é a AΓ, así o cadrado de E ó de HΘ[403].

Pero Δ non garda con AΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de E garda co de HΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable E con HΘ en lonxitude.

E, dado que, como BA é a AΓ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, o cadrado de ZH é maior que o de HΘ[404].

Sexa, entón, o cadrado de HΘ xunto co de K igual ó de ZH[405]; logo, por conversión, como AB é a BΓ, así o cadrado de ZH ó de K[406].

Pero AB garda con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tamén o cadrado de ZH garda co de K a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é conmensurable ZH con K en lonxitude[407]; logo, o cadrado de ZH é maior que o de HΘ no cadrado dunha conmensurable con aquela.

E ZH e HΘ son expresables conmensurables só en cadrado, e ningunha delas é conmensurable con E en lonxitude.

Logo, ZΘ é terceira binomial[408]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

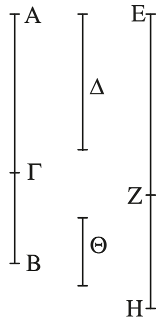
---

401 Definición X, 1.3.
402 Proposición X, 36.
403 Proposición V, 22.
404 Proposición V, 14.
405 Lema previo á Proposición X, 14.
406 Definición V, 16 e Proposición V, 19. Corolario
407 Proposición X, 9.
408 Definición X, 2.3.

PROPOSICIÓN 51

Atopar a cuarta binomial[409]

Tómense dous números ΑΓ e ΓΒ de xeito que ΑΒ non garde con ΒΓ nin con ΑΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[410]. Tómese a expresable Δ e sexa ΕΖ conmensurable en lonxitude con Δ. Logo, tamén ΕΖ é expresable.



E resulte que, como o número ΒΑ a ΑΓ, así o cadrado de ΕΖ ó de ΖΗ[411].

Logo, o cadrado de ΕΖ é conmensurable co de ΖΗ[412]; logo, tamén ΖΗ é expresable. E, dado que ΒΑ non garda con ΑΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, tampouco o cadrado de ΕΖ garda co de ΖΗ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable en lonxitude ΕΖ con ΖΗ[413]. Logo, ΕΖ e ΖΗ son expresables conmensurables só en cadrado[414]; en consecuencia, ΕΗ é binomial[415].

Digo agora que é tamén cuarta.

Pois, dado que, como ΒΑ é a ΑΓ, así o cadrado de ΕΖ ó de ΖΗ, logo, tamén o cadrado de ΕΖ é maior que o de ΖΗ[416].

---

[409] Sexan *m*, *n* dous números naturais tal que *(n + m)/n*, *(n + m)/m* non son cadrados racionais —Véxase a Nota 182 (Lema 2 previo á Proposición X, 29)—. Se *a* é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e $q = n/m$, as rectas de lonxitude $ak(1 + 1 / \sqrt{1 + q})$ —sendo *k* un racional arbitrario— son cuartas binomiais. Véxase a Nota 817 (Proposición X, 88).

[410] Véxase a Nota 182 (Lema 2 previo á Proposición X, 29).

[411] Proposición X, 6. Corolario.

[412] Proposición X, 6.

[413] Proposición X, 9.

[414] Definición X, 1.3.

[415] Proposición X, 36.

[416] Proposición V, 14.

Entón, sexa o cadrado de ZH xunto co de Θ igual ó de EZ[417]; logo, por conversión, como o número AB é a BΓ, así o cadrado de EZ ó de Θ[418].

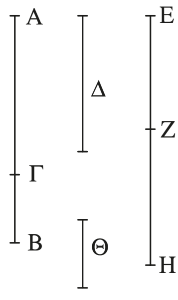
Pero AB non garda con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de EZ garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable EZ con Θ en lonxitude[419]; logo, o cadrado de EZ é maior que o de HZ no cadrado dunha inconmensurable con aquela. E EZ e ZH son expresables conmensurables só en cadrado, e é conmensurable EZ con Δ en lonxitude.

Logo, EH é cuarta binomial[420]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 52

Atopar a quinta binomial[421]

Tómense dous números AΓ e ΓB, de xeito que AB non garde con ningún deles a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[422], tómese unha recta expresable, Δ, e EZ sexa conmensurable con Δ. Logo, EZ é expresable.



[417] Lema previo á Proposición X, 14.

[418] Definición V, 16 e Proposición V, 19. Corolario

[419] Proposición X, 9.

[420] Definición X, 2.4.

[421] Sexan *m*, *n* dous números naturais tal que *(m + n)/m*, *(m + n)/n* non son cadrados racionais —Véxase a Nota 182 (Lema 2 previo á Proposición X, 29)—. Se *a* é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e $q = n/m$, as rectas de lonxitude $ak(1 + \sqrt{1 + q})$ —sendo *k* un racional arbitrario— son quintas binomiais. Véxase a Nota 827 (Proposición X, 89).

[422] Véxase a Nota 182 (Lema 2 previo á Proposición X, 29).

E resulte que, como ΓA a AB, así o cadrado de EZ ó de ZH[423].

Pero ΓA non garda con AB a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de EZ garda co de ZH a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, EZ e ZH son expresables conmensurables só en cadrado[424]; logo, EH é binomial[425].

Digo agora que é tamén quinta.

Pois, dado que, como ΓA é a AB, así o cadrado de EZ ó de ZH, por inversión, como BA a AΓ, así o cadrado de ZH ó de ZE[426]; logo, o cadrado de HZ é maior que o de ZE[427].

Entón, sexa o cadrado de EZ xunto co de Θ igual ó de HZ[428]; logo, por conversión, como o número AB é a BΓ, así o cadrado de HZ ó de Θ[429].

Pero AB non garda con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de ZH garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable ZH con Θ en lonxitude[430]; en consecuencia, o cadrado de ZH é maior que o de ZE no cadrado dunha inconmensurable con aquela. E HZ e ZE son expresables conmensurables só en cadrado, e o termo menor, EZ, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada Δ.

Logo, EH é quinta binomial[431]; o que xustamente, era preciso demostrar.

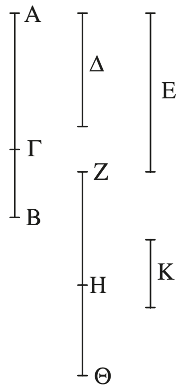
423 Proposición X, 6. Corolario.
424 Proposición X, 9.
425 Proposición X, 36.
426 Proposición V, 7. Corolario.
427 Proposición V, 14.
428 Lema previo á Proposición X, 14.
429 Proposición V, 19. Corolario.
430 Proposición X, 9.
431 Definición X, 2.5.

PROPOSICIÓN 53

Atopar a sexta binomial[432]

Tómense dous números ΑΓ e ΓΒ de xeito que ΑΒ non garde con ningún deles a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[433].

Sexa tamén outro número Δ que non sexa cadrado e non garde nin con ΒΑ nin con ΑΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; tómese unha recta expresable Ε e resulte que, como Δ a ΑΒ, así o cadrado de Ε ó de ΖΗ[434].



Logo, o cadrado de Ε é conmensurable co de ΖΗ[435]; e Ε é expresable; logo, tamén ΖΗ é expresable[436].

E, dado que Δ non garda con ΑΒ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de Ε garda co de ΖΗ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable Ε con ΖΗ en lonxitude[437].

---

[432] Sexan m, n dous números naturais tal que $(n + m)/n$, $(n + m)/m$ non son cadrados racionais —Véxase a Nota 182 (Lema 2 previo a Proposición X, 29)—, s un terceiro número natural que non é un cadrado e tal que s/m e $s/(n + m)$ non son cadrados. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, $k = (n + m)/s$ e $q = m/s$, as rectas de lonxitude $a(\sqrt{k} + \sqrt{q})$ son sextas binomiais. Véxase a Nota 838 (Proposición X, 90).

[433] Véxase a Nota 182 (Lema 2 previo á Proposición X, 29).

[434] Proposición X, 6. Corolario.

[435] Proposición X, 6.

[436] Definición X, 1.3.

[437] Proposición X, 9.

Resulte asemade que, como BA a AΓ, así o cadrado de ZH ó de HΘ. Logo, o cadrado de ZH é conmensurable co de ΘH; logo, o cadrado de ΘH é expresable; logo, ΘH é expresable.

E, dado que BA non garda con AΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, tampouco o cadrado de ZH garda co de HΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable ZH con HΘ en lonxitude.

Logo, ZH e HΘ son expresables conmensurables só en cadrado; en consecuencia, ZΘ é binomial[438].

Cómpre demostrar agora que é tamén sexta.

Pois, dado que, como Δ é a AB, así o cadrado de E ó de ZH, pero tamén como BA a AΓ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, por igualdade, como Δ é a AΓ, así o cadrado de E ó de HΘ[439].

Pero Δ non garda con AΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de E garda co de HΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable E con HΘ en lonxitude.

Pero foi demostrado tamén que é inconmensurable con ZH, logo, tanto ZH como HΘ son inconmensurables con E en lonxitude.

E, dado que, como BA é a AΓ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, o cadrado de ZH é maior que o de HΘ.

Sexa, entón, o cadrado de HΘ xunto co de K igual ó de ZH[440]; logo, por conversión, como AB a BΓ, así o cadrado de ZH ó de K[441].

Pero AB non garda con BΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; en consecuencia, tampouco o cadrado de ZH garda co de K a razón que garda un número cadrado cun número cadrado. Logo, é inconmensurable ZH con K en lonxitude; logo, o cadrado de ZH é maior que o de HΘ no cadrado dunha inconmensurable con aquela.

438 Proposición X, 36.
439 Proposición V, 22.
440 Lema previo á Proposición X, 14.
441 Proposición V, 19. Corolario.

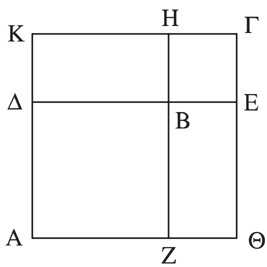
E ZH e HΘ son expresables conmensurables só en cadrado, e ningunha delas é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada E.

Logo, ZΘ é sexta binomial[442]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

LEMA

Sexan os dous cadrados AB e BΓ, e póñanse de xeito que ΔB estea en liña recta con BE; logo, está tamén en liña recta ZB con BH[443].

E complétese o paralelogramo AΓ; digo que AΓ é cadrado, que ΔH é media proporcional entre AB e BΓ, e, ademais, que ΔΓ é media proporcional entre AΓ e ΓB[444].



Pois ben, dado que ΔB é igual a BZ, mentres que BE a BH, logo, ΔE enteira é igual a ZH enteira.

Pero ΔE é igual tanto a AΘ como a KΓ, mentres que ZH é igual tanto a AK como a ΘΓ[445]; logo, tamén, AΘ e KΓ son iguais respectivamente a AK e a ΘΓ. Logo, o paralelogramo AΓ é equilátero; e é tamén de ángulos rectos; logo, AΓ é cadrado.

E, dado que, como ZB é a BH, así ΔB a BE, pero como ZB a BH, así AB a ΔH, mentres que, como ΔB a BE, así ΔH a BΓ[446], logo, tamén como AB a ΔH, así ΔH a BΓ[447].

---

[442] Definición X, 2.6.

[443] Proposición I, 14.

[444] Dados dous cadrados, o rectángulo determinado por un lado de cada cadrado é media proporcional entre os dous cadrados.

[445] Proposición I, 34.

[446] Proposición VI, 1.

[447] Proposición V, 11.

Logo, ΔH é media proporcional entre AB e BΓ.

Digo agora que tamén ΔΓ é media proporcional entre AΓ e ΓB.

Pois, dado que, como AΔ é a ΔK, así KH a HΓ —pois son iguais respectivamente— e, por composición, como AK a KΔ, así KΓ a ΓH[448], pero como AK a KΔ, así AΓ a ΓΔ, mentres que, como KΓ a ΓH, así ΔΓ a ΓB, logo, tamén como AΓ a ΔΓ, asi ΔΓ a BΓ[449].

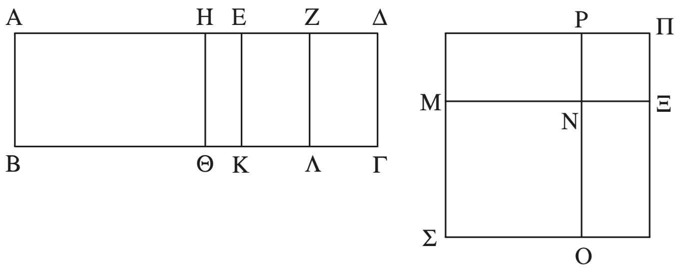
Logo, ΔΓ é media proporcional entre AΓ e ΓB; o que se propuxo demostrar.

PROPOSICIÓN 54

***Se unha área está contida por expresable e primeira binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada binomial*[450].**

Pois ben, sexa a área AΓ contida pola expresable AB e a primeira binomial AΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AΓ é unha non expresable, a chamada binomial.

Pois, dado que AΔ é primeira binomial, divídase nos seus termos por E e sexa o termo maior AE.



[448] Proposición V, 18.

[449] Proposición V, 11.

[450] Se consideramos unha recta primeira binomial $ka(1 + \sqrt{1 - q^2})$ —Nota 371 (Proposición X, 48)— e unha expresable *ak'* , entón

$$\sqrt{a^2 (k'k)(1 + \sqrt{1 - q^2})} = a\sqrt{\left(\frac{k'k}{2}\right)(1 + q)} + a\sqrt{\left(\frac{k'k}{2}\right)(1 - q)}$$

é unha recta binomial —Proposición X, 36—. A raíz cadrada dunha primeira binomial é binomial. Véxase a Nota 849 (Proposición X, 91).

É evidente, entón, que AE e EΔ son expresables conmensurables só en cadrado, que o cadrado de AE é maior que o de EΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela, e que AE é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada AB[451].

Córtese EΔ á metade polo punto Z. E, dado que o cadrado de AE é maior que o de EΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela, logo, se se aplica na maior AE un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, é dicir, ó cadrado de EZ, inferior nunha figura cadrada, divídea en conmensurables[452].

Aplíquese, entón, en AE, o contido por AH e HE, igual ó cadrado de EZ; logo, é conmensurable AH con EH en lonxitude.

E lévense HΘ, EK e ZΛ dende H, E e Z, paralelas a unha das dúas, AB ou ΓΔ; constrúase o cadrado ΣN igual ó paralelogramo AΘ, mentres que NΠ igual a HK[453] e fágase de xeito que MN estea en liña recta con NΞ; logo, tamén PN está en liña recta con NO[454]. E complétese o paralelogramo ΣΠ; logo, ΣΠ é un cadrado[455].

E, dado que o contido por AH e HE é igual ó cadrado de EZ, logo, como AH é a EZ, así ZE a EH[456]; logo, tamén como AΘ a EΛ, EΛ a KH[457]; logo, EΛ é media proporcional entre AΘ e HK.

Pero AΘ é igual a ΣN, mentres que HK igual a NΠ; logo, entre ΣN e NΠ é media proporcional EΛ.

Pero entre os mesmos ΣN e NΠ é tamén media proporcional MP[458]; logo, é igual EΛ a MP; en consecuencia, tamén é igual a OΞ[459].

451 Definición X, 2.1.
452 Proposición X, 17.
453 Proposición II, 14.
454 Proposición I, 14.
455 Lema previo.
456 Proposición VI, 17.
457 Proposición VI, 1.
458 Lema previo.
459 Proposición I, 43.

Pero son tamén iguais AΘ e HK a ΣN e NΠ[460]; logo, AΓ enteiro é igual a ΣΠ enteiro, é dicir, ó cadrado de MΞ; logo, o cadrado de MΞ é equivalente a AΓ.

Digo que MΞ é binomial.

Pois, dado que é conmensurable AH con HE, é tamén conmensurable AE tanto con AH como con HE[461].

Pero suponse que tamén AE é conmensurable con AB, logo, tamén AH e HE son conmensurables con AB[462].

E AB é expresable; logo, son tamén expresables tanto AH como HE; logo, son expresables tanto AΘ como HK, e AΘ é conmensurable con HK[463]. Pero AΘ é igual a ΣN, mentres que HK a NΠ; logo, tamén ΣN e NΠ, é dicir, os cadrados de MN e NΞ, son expresables e conmensurables.

E, dado que é inconmensurable AE con EΔ en lonxitude, pero AE é conmensurable con AH, mentres que ΔE conmensurable con EZ, logo, tamén é inconmensurable AH con EZ[464]; en consecuencia, tamén é inconmensurable AΘ con EΛ[465].

Pero AΘ é igual a ΣN, mentres que EΛ a MP; logo, tamén é inconmensurable ΣN con MP. Pero como ΣN a MP, ON a NP; logo, é inconmensurable ON con NP[466].

Pero é igual ON a MN, mentres que NP a NΞ; logo, é inconmensurable MN con NΞ. E o cadrado de MN é conmensurable co de NΞ, e cada un deles, expresable; logo, MN e NΞ son expresables conmensurables só en cadrado.

Logo MΞ é binomial[467] e o seu cadrado é equivalente a AΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[460] Neste caso tamén é certo que AΘ e HK son iguais a ΣN e NΠ respectivamente, pero esta é a expresión usual de Euclides para indicar que a suma de AΘ e HK é igual á suma de ΣN e NΠ. Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

[461] Proposición X, 15.

[462] Proposición X, 12.

[463] Proposición X, 19.

[464] Proposición X, 13.

[465] Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

[466] Proposición X, 11.

[467] Proposición X, 36.

PROPOSICIÓN 55

Se unha área está contida por expresable e segunda binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada primeira bimedial*[468]*.

Pois ben, sexa a área ΑΒΓΔ contida pola expresable ΑΒ e a segunda binomial ΑΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΓ é primeira bimedial.

Pois, dado que ΑΔ é segunda binomial, divídase nos seus termos por Ε de xeito que o termo maior sexa ΑΕ; logo, ΑΕ e ΕΔ son expresables conmensurables só en cadrado, o cadrado de ΑΕ é maior que o de ΕΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela, e o termo menor, ΕΔ, é conmensurable con ΑΒ en lonxitude [469].

Córtese ΕΔ á metade por Ζ e, en ΑΕ, aplíquese o contido por ΑΗΕ[470], igual ó cadrado de ΕΖ, inferior nunha figura cadrada[471]; logo, é conmensurable ΑΗ con ΕΗ en lonxitude[472].

Lévense ΗΘ, ΕΚ e ΖΛ dende Η, Ε e Ζ, paralelas a ΑΒ e ΓΔ; constrúase, por unha parte, o cadrado ΣΝ igual ó paralelogramo ΑΘ, por outra, o cadrado ΝΠ igual a ΗΚ, e fágase de xeito que ΜΝ estea en liña recta con ΝΞ; logo, tamén ΡΝ está en liña recta con ΝΟ[473]. E complétese o cadrado ΣΠ[474]; é evidente, entón, a partir do antes demostrado, que ΜΡ é media proporcional entre ΣΝ e ΝΠ e que é igual a ΕΛ, e que o cadrado de ΜΞ é equivalente á área ΑΓ[475].

---

[468] Se consideramos unha recta segunda binomial $ak(1 + \frac{1}{\sqrt{1-q^2}})$ —Nota 384 (Proposición X, 49)— e unha expresable ak', entón

$$\sqrt{a^2(k'k)(1 + \frac{1}{\sqrt{1-q^2}})} = a\sqrt{\left(\frac{k'k}{2}\right)\frac{1+q}{\sqrt{1-q^2}}} + a\sqrt{\left(\frac{k'k}{2}\right)\frac{1-q}{\sqrt{1-q^2}}}$$

é unha recta primeira bimedial —Proposición X, 37—. A raíz cadrada dunha segunda binomial é primeira bimedial. Véxase a Nota 873 (Proposición X, 92).

[469] Definición X, 2.2.

[470] Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

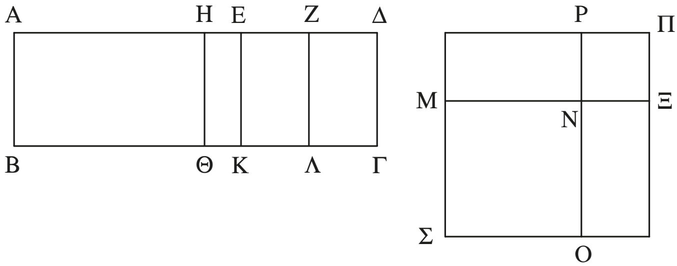
[471] Proposición VI, 28.

[472] Proposición X, 17.

[473] Proposición I, 14.

[474] Lema previo á Proposición X, 54.

[475] Véxase a demostración da Proposición X, 54.



Cómpre demostrar agora que MΞ é primeira bimedial.

Dado que é inconmensurable AE con EΔ en lonxitude, mentres que EΔ conmensurable con AB, logo, é inconmensurable AE con AB[476].

E, dado que é conmensurable AH con EH, é tamén conmensurable AE tanto con AH como con HE[477].

Pero AE é inconmensurable con AB en lonxitude; logo, tamén AH e HE son inconmensurables con AB.

Logo, BA, AH e HE[478] son expresables conmensurables só en cadrado; en consecuencia, tanto AΘ como HK son mediais[479]; en consecuencia, tamén tanto ΣN como NΠ son mediais[480]. Logo, MN e NΞ son tamén mediais. E, dado que AH é conmensurable con HE en lonxitude, é tamén conmensurable AΘ con HK[481], é dicir, ΣN con NΠ, é dicir, o cadrado de MN co de NΞ.

E, dado que AE é inconmensurable con EΔ en lonxitude, pero AE é conmensurable con AH, mentres que EΔ conmensurable con EZ, logo, é inconmensurable AH con EZ[482]; en consecuencia, tamén é inconmensurable AΘ con EΛ, é dicir,

---

476 Proposición X, 13.

477 Proposición X, 15.

478 BA, AH e HE son expresables e os pares de rectas BA, AH e BA, HE son conmensurables só en cadrado (AH é conmensurable con EH).

479 Proposición X, 21.

480 Proposición X, 23. Corolario.

481 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

482 Proposición X, 13.

ΣN con MP, é dicir, ON con NP[483], é dicir, é inconmensurable en lonxitude MN con NΞ.

Pero foi demostrado tamén que MN e NΞ son mediais e conmensurables en cadrado; logo, MN e NΞ son mediais conmensurables só en cadrado.

Digo agora que tamén conteñen expresable. Pois, dado que se supón que ΔE é conmensurable tanto con AB como con EZ, logo, tamén EZ é conmensurable con EK. E cada unha delas é expresable; logo, é expresable EΛ[484], é dicir, MP; pero MP é o contido por MNΞ.

Pero, se se suman dúas mediais conmensurables só en cadrado cuxo contido sexa expresable, a recta enteira é non expresable e chámase primeira bimedial[485].

Logo, MΞ é primeira bimedial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 56

Se unha área está contida por expresable e terceira binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada segunda bimedial[486].

Pois ben, sexa a área ABΓΔ contida pola expresable AB e pola terceira binomial AΔ dividida por E nos seus termos, dos cales, AE é o maior; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AΓ é unha non expresable, a chamada segunda bimedial.

Pois ben, fáganse as mesmas construcións que nas de antes[487].

---

483 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

484 Proposición X, 19.

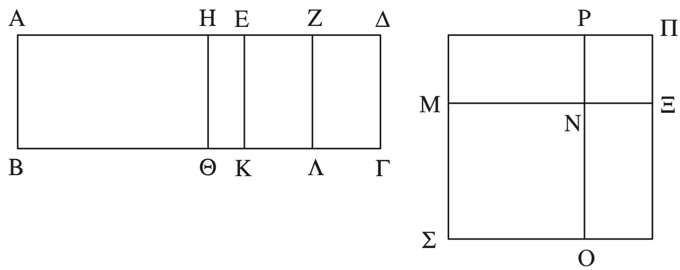
485 Proposición X, 37.

486 Se consideramos unha recta terceira binomial $a\sqrt{k}(1 + \sqrt{1 - q^2})$ —Nota 396 (Proposición X, 50)— e unha expresable *ak'*, entón

$$\sqrt{a^2\, k'\sqrt{k}\,(1 + \sqrt{1 - q^2})} = a\sqrt{\frac{k'\sqrt{k}}{2}(1 + q)} + a\sqrt{\frac{k'\sqrt{k}}{2}(1 - q)}$$

é unha recta segunda bimedial. A raíz cadrada dunha terceira binomial é segunda bimedial —Proposición X, 38—. Véxase a Nota 895 (Proposición X, 93).

487 Véxase a demostración da Proposición X, 54 ou X, 55.



E, dado que ΑΔ é terceira binomial, logo, ΑΕ e ΕΔ son expresables conmensurables só en cadrado, o cadrado de ΑΕ é maior que o de ΕΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela, e nin ΑΕ nin ΕΔ son conmensurables con ΑΒ en lonxitude[488].

De xeito semellante ó antes demostrado poderemos demostrar que ΜΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΓ e que ΜΝ e ΝΞ son mediais conmensurables só en cadrado; en consecuencia, ΜΞ é bimedial.

Cómpre demostrar agora que é tamén segunda.

Dado que é inconmensurable ΔΕ con ΑΒ en lonxitude, é dicir, con ΕΚ, mentres que conmensurable ΔΕ con ΕΖ, logo, é inconmensurable ΕΖ con ΕΚ en lonxitude[489]. E son expresables; logo, ΖΕ e ΕΚ son expresables conmensurables só en cadrado.

Logo, é medial ΕΛ[490], é dicir, ΜΡ. E está contido por ΜΝΞ[491]; logo, é medial o contido por ΜΝΞ. Logo ΜΞ é segunda bimedial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 57

Se unha área está contida por expresable e cuarta binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada maior[492].

---

488 Definición X, 2.3.

489 Proposición X, 13.

490 Proposición X, 21.

491 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

492 Se consideramos unha recta cuarta binomial $ak(1 + 1 / \sqrt{1 + q})$ —Nota 409 (Proposición X, 51)— e unha expresable *ak'*, entón

$$\sqrt{a^2\, kk'\,(1 + 1/\sqrt{1 + q})} \;=\; a\sqrt{\frac{k'k}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{q}{1+q}}\right)} \;+\; a\sqrt{\frac{k'k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{q}{1+q}}\right)}$$

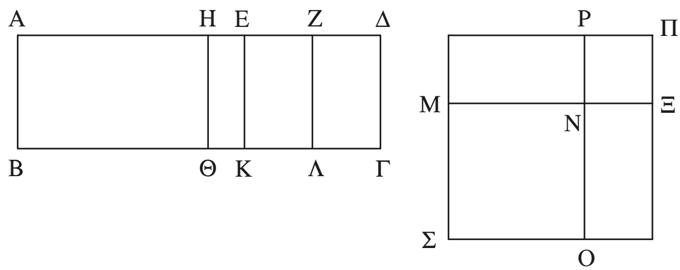
é unha recta maior. A raíz cadrada dunha cuarta binomial é maior —Proposición X, 39—. Véxase a Nota 921 (Proposición X, 94).

Pois ben, sexa a área ΑΓ contida pola expresable ΑΒ e pola cuarta binomial ΑΔ dividida por Ε nos seus termos, dos cales, ΑΕ sexa o maior; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΓ é unha non expresable, a chamada maior.

Pois, dado que ΑΔ é cuarta binomial, logo, ΑΕ e ΕΔ son expresables conmensurables só en cadrado, o cadrado de ΑΕ é maior que o de ΕΔ no cadrado dunha inconmensurable con aquela, e ΑΕ conmensurable con ΑΒ en lonxitude[493].

Córtese ΔΕ á metade por Ζ e, en ΑΕ, aplíquese o paralelogramo contido por ΑΗ e ΗΕ, igual ó cadrado de ΕΖ[494]; logo, é inconmensurable ΑΗ con ΗΕ en lonxitude [495].

Lévense ΗΘ, ΕΚ e ΖΛ paralelas a ΑΒ, e o demais resulte o mesmo que as anteriores a esta[496]; é evidente, entón, que ΜΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente a ΑΓ.



Cómpre demostrar agora que ΜΞ é unha non expresable, a chamada maior.

Dado que ΑΗ é inconmensurable con ΕΗ en lonxitude, tamén é inconmensurable ΑΘ con ΗΚ, é dicir ΣΝ con ΝΠ; logo, ΜΝ e ΝΞ son inconmensurables en cadrado.

E, dado que ΑΕ é conmensurable con ΑΒ en lonxitude, é expresable ΑΚ[497]; e é igual ó cadrado de ΜΝ xunto co de ΝΞ; logo, é expresable tamén a suma dos cadrados de ΜΝ e ΝΞ. E,

493 Definición X, 2.4.
494 Proposición VI, 28.
495 Proposición X, 18.
496 Véxase a demostración da Proposición X, 54 ou X, 55.
497 Proposición X, 19.

dado que é inconmensurable ΔE con AB en lonxitude, é dicir, con EK, pero ΔE é conmensurable con EZ, logo, tamén é inconmensurable EZ con EK en lonxitude[498].

Logo, EK e EZ son expresables conmensurables só en cadrado.

Logo, é medial ΛE[499], é dicir, MP. E está contido por MN e NΞ; logo, é medial o contido por MN e NΞ. E a suma dos cadrados de MN e NΞ é expresable, e son inconmensurables en cadrado MN e NΞ.

Pero, se se suman dúas rectas inconmensurables en cadrado que fan expresable a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, medial, a recta enteira é non expresable; chámase maior[500].

Logo, MΞ é unha non expresable, a chamada maior, e o seu cadrado é equivalente á área AΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 58

***Se unha área está contida por expresable e quinta binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial*[501].**

Pois ben, sexa a área AΓ contida pola expresable AB e pola quinta binomial AΔ dividida por E nos seus termos, de xeito que o termo maior sexa AE; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AΓ é unha non expresable, a chamada recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

---

498 Proposición X, 13.

499 Proposición X, 21.

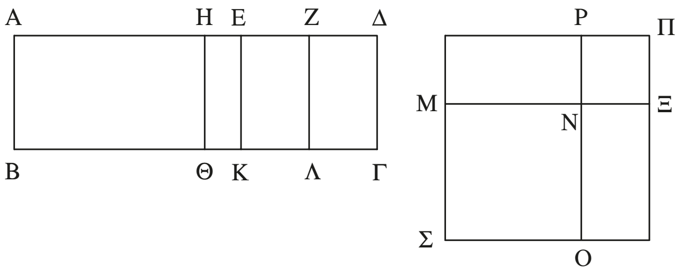
500 Proposición X, 39.

501 Se consideramos unha recta quinta binomial $ak(1 + \sqrt{1+q})$ —Nota 421 (Proposición X, 52)— e unha expresable ak', entón

$$\sqrt{a^2 kk'(1 + \sqrt{1+q})} = a\sqrt{\frac{k'k}{2}(\sqrt{1+q} + \sqrt{q})} + a\sqrt{\frac{k'k}{2}(\sqrt{1+q} - \sqrt{q})}$$

é unha recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial —Proposición X, 40—. A raíz cadrada dunha quinta binomial é recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial. Véxase a Nota 937 (Proposición X, 95).

Pois ben, fáganse as mesmas construcións que no demostrado antes[502]; é evidente, entón, que ΜΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΓ.



Cómpre demostrar agora que ΜΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

Pois, dado que é inconmensurable ΑΗ con ΗΕ[503], logo, é inconmensurable tamén ΑΘ con ΘΕ[504], é dicir, o cadrado de ΜΝ co de ΝΞ; logo, ΜΝ e ΝΞ son inconmensurables en cadrado[505].

E, dado que ΑΔ é quinta binomial e ΕΔ o seu segmento menor, logo, é conmensurable ΕΔ con ΑΒ en lonxitude[506].

Pero ΑΕ con ΕΔ é inconmensurable; logo, tamén é inconmensurable en lonxitude ΑΒ con ΑΕ[507]. Logo, é medial ΑΚ[508], é dicir, a suma dos cadrados de ΜΝ e ΝΞ.

E, dado que é conmensurable ΔΕ con ΑΒ en lonxitude, é dicir, con ΕΚ, pero é conmensurable ΔΕ con ΕΖ, logo, tamén ΕΖ é conmensurable con ΕΚ[509].

E ΕΚ é expresable; logo, tamén ΕΛ[510], é dicir, ΜΡ, é dicir, o contido por ΜΝΞ[511] é expresable; logo, ΜΝ e ΝΞ son inconmensurables en cadrado que fan a suma dos seus cadrados medial, mentres que o contido por elas, expresable.

502 Proposicións X, 54 á X, 57.
503 Proposición X, 18.
504 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
505 Definición X, 1.2.
506 Definición X, 2.5.
507 Proposición X, 13.
508 Proposición X, 21.
509 Proposición X, 12.
510 Proposición X, 19.
511 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

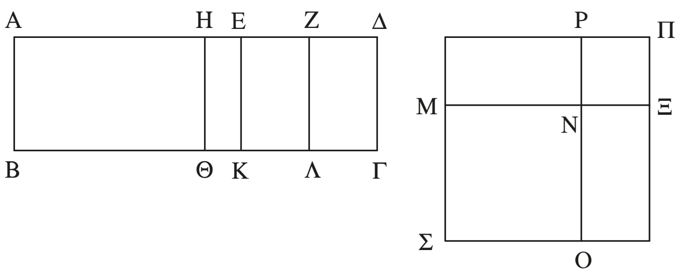
Logo, ΜΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial[512], e o seu cadrado é equivalente á área ΑΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 59

Se unha área está contida por expresable e sexta binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais[513].

Pois ben, sexa a área ΑΒΓΔ contida pola expresable ΑΒ e a sexta binomial ΑΔ dividida por Ε nos seus termos, de xeito que o termo maior sexa ΑΕ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΓ é a recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.

Fáganse as mesmas construcións que no antes demostrado[514]; é evidente, entón, que ΜΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΓ e que é inconmensurable ΜΝ con ΝΞ en cadrado.



512 Proposición X, 40.

513 Se consideramos unha recta sexta binomial $a(\sqrt{k}+\sqrt{q})$ —Nota 432 (Proposición X, 53)— e unha expresable ak', entón

$$\sqrt{a^2 k'(\sqrt{k}+\sqrt{q})} = a\sqrt{\frac{k'}{2}(\sqrt{k}+\sqrt{k-q})} + a\sqrt{\frac{k'}{2}(\sqrt{k}-\sqrt{k-q})}$$

é unha recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais. A raíz cadrada dunha sexta binomial é recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais —Proposición X, 41—. Véxase a Nota 948 (Proposición X, 96).

514 Proposicións X, 54 a X, 58.

E, dado que é inconmensurable EA con AB en lonxitude[515], logo, EA e AB son expresables conmensurables só en cadrado. Logo, é medial AK[516], é dicir, a suma dos cadrados de MN e NΞ.

Asemade, dado que é inconmensurable EΔ con AB en lonxitude, logo, tamén é inconmensurable ZE con EK[517]; logo, ZE e EK son expresables conmensurables só en cadrado; logo, é medial EΛ[518], é dicir, MP, é dicir o contido por MNΞ[519].

E, dado que é inconmensurable AE con EZ, tamén é inconmensurable AK con EΛ[520].

Pero AK é a suma dos cadrados de MN e NΞ, mentres que EΛ é o contido por MNΞ; logo, é inconmensurable a suma dos cadrados de MNΞ co contido por MNΞ. E un e outro son mediais, e MN e NΞ son inconmensurables en cadrado.

Logo, MΞ é a recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais[521] e o seu cadrado é equivalente a AΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Lema[522]

Se unha liña recta se corta en partes desiguais, os cadrados das partes desiguais son maiores que dúas veces o paralelogramo de ángulos rectos contido polas partes desiguais.

Sexa a recta AB, córtese en partes desiguais por Γ e sexa AΓ a maior; digo que o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é maior que dúas veces o contido por AΓ e ΓB.

515 Definición X, 2.6.
516 Proposición X, 21.
517 Proposición X, 13.
518 Proposición X, 21.
519 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).
520 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
521 Proposición X, 41.
522 Este lema aparece nos manuscritos pero Heiberg considera que se trata dunha interpolación por telo utilizado xa tacitamente na Proposición X, 44. Heath é da mesma opinión. Véxase a Nota 354 (Proposición X, 44).

Pois ben, córtese AB á metade por Δ. Entón, dado que unha liña recta queda cortada en partes iguais por Δ e en desiguais por Γ, logo, o contido por AΓ e ΓB xunto co cadrado de ΓΔ é igual ó cadrado de AΔ[523]; en consecuencia, o contido por AΓ e ΓB é menor que o cadrado de AΔ; logo, dúas veces o contido por AΓ e ΓB é menor que o dobre do cadrado de AΔ.

Pero o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é o dobre que o de AΔ xunto co de ΔΓ[524]; logo, o cadrado de AΓ xunto co de ΓB é maior que dúas veces o contido por AΓ e ΓB; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 60

O cadrado da binomial aplicado nunha expresable fai en anchura a primeira binomial[525].

Sexa a binomial AB dividida nos seus termos por Γ, de xeito que o termo maior sexa AΓ, tómese a expresable ΔE e, en ΔE, aplíquese ΔEZH igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΔH; digo que ΔH é primeira binomial.

Pois ben, en ΔE, aplíquese ΔΘ igual ó cadrado de AΓ, e KΛ igual ó cadrado de BΓ; logo, o restante, dúas veces o contido por AΓ e ΓB, é igual a MZ[526].

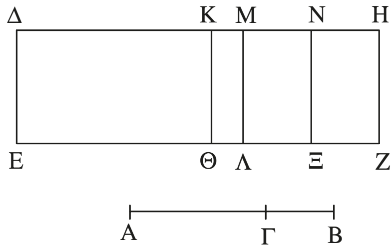
---

523 Proposición II, 5.

524 Proposición II, 9.

525 Dada unha expresable, o cadrado dunha binomial é igual ó rectángulo contido pola expresable e unha primeira binomial. Recíproco da Proposición X, 54 na que probou que o rectángulo contido por unha expresable e unha primeira binomial é igual ó cadrado dunha binomial.

526 Proposición II, 4.



Córtese MH á metade por N e lévese NΞ paralela. Logo, tanto MΞ como NZ son iguais a unha vez o contido por AΓB[527]. E, dado que AB é unha binomial dividida nos seus termos por Γ, logo, AΓ e ΓB son expresables conmensurables só en cadrado[528]; logo, os cadrados de AΓ e ΓB son expresables e conmensurables entre si; en consecuencia, tamén a suma dos cadrados de AΓ e ΓB[529]. E é igual a ΔΛ; logo, é expresable ΔΛ. E está aplicado na expresable ΔE; logo, é expresable ΔM e conmensurable con ΔE en lonxitude[530].

Asemade, dado que AΓ e ΓB son expresables conmensurables só en cadrado, logo, dúas veces o contido por AΓ e ΓB[531], é dicir, MZ, é medial. E está aplicado na expresable MΛ; logo, tamén é expresable MH e inconmensurable con MΛ[532], é dicir, con ΔE, en lonxitude.

Pero é tamén expresable MΔ e conmensurable en lonxitude con ΔE; logo, é inconmensurable ΔM con MH en lonxitude[533]. E son expresables; logo, ΔM e MH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, é binomial ΔH.

Cómpre demostrar agora que é tamén primeira.

527 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

528 Proposición X, 36.

529 Proposición X, 15. Sobreenténdese «é expresable». A edición crítica de J. L. Heiberg e H. Menge recolle as seguintes frases que presentan aquí algúns manuscritos aínda que as consideran espurias: «é conmensurable cos cadrados de AΓ e ΓB; logo, é expresable a suma de AΓ e ΓB.»

530 Proposición X, 20.

531 Proposición X, 21 e Proposición X, 23. Corolario.

532 Proposición X, 22.

533 Proposición X, 13.

Dado que o contido por ΑΓΒ é media proporcional entre os cadrados de ΑΓ e ΓΒ[534], logo, tamén entre ΔΘ e ΚΛ, é media proporcional ΜΞ.

Logo, como ΔΘ é a ΜΞ, así ΜΞ a ΚΛ, é dicir, como ΔΚ a ΜΝ, ΜΝ a ΜΚ[535]; logo, o contido por ΔΚ e ΚΜ é igual ó cadrado de ΜΝ[536].

E, dado que é conmensurable o cadrado de ΑΓ co de ΓΒ, é tamén conmensurable ΔΘ con ΚΛ[537]; en consecuencia tamén é conmensurable ΔΚ con ΚΜ[538].

E, dado que o cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ é maior que dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[539], logo, é tamén maior ΔΛ que ΜΖ; en consecuencia, tamén ΔΜ é maior que ΜΗ[540].

E o contido por ΔΚ e ΚΜ é igual ó cadrado de ΜΝ, é dicir, á cuarta parte do cadrado de ΜΗ, e é conmensurable ΔΚ con ΚΜ. Pero, se dúas rectas son desiguais e, na maior, se aplica un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, inferior nunha figura cadrada e, se a divide en conmensurables, o cadrado da maior é maior que o da menor no cadrado dunha conmensurable con aquela[541]; logo, o cadrado de ΔΜ é maior que o de ΜΗ no cadrado dunha conmensurable con aquela. E ΔΜ e ΜΗ son expresables, e ΔΜ, o termo maior, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΔΕ.

Logo, ΔΗ é primeira binomial[542]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

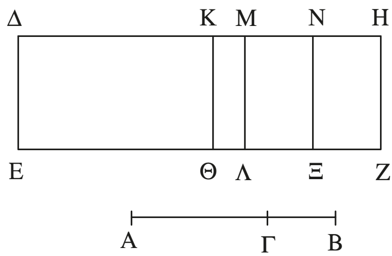
534 Lema previo á Proposición X, 54.
535 Proposición VI, 1.
536 Proposición VI, 17.
537 Proposición X, 11.
538 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
539 Lema previo.
540 Proposición VI, 1 e Proposición V, 14.
541 Proposición X, 17.
542 Definición X, 2.1.

PROPOSICIÓN 61

***O cadrado da primeira bimedial aplicado nunha expresable fai en anchura a segunda binomial*[543].**

Sexa a primeira bimedial AB dividida por Γ nas súas mediais, das cales a maior sexa AΓ, tómese a expresable ΔE e, en ΔE, aplíquese o paralelogramo ΔZ igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΔH; digo que ΔH é segunda binomial.

Pois ben, fáganse as mesmas construcións que nas anteriores[544].



E, dado que AB é primeira bimedial dividida por Γ, logo, AΓ e ΓB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen expresable[545]; en consecuencia, tamén os cadrados de AΓ e ΓB son mediais[546]; logo, é medial ΔΛ[547]. E está aplicado na expresable ΔE; logo, MΔ é expresable e inconmensurable con ΔE en lonxitude[548].

Asemade, dado que dúas veces o contido por AΓ e ΓB é expresable, é tamén expresable MZ. E está aplicado na expresable MΛ; logo, MH é tamén expresable e conmensurable en lonxitude con MΛ[549], é dicir, con ΔE; logo, é inconmensurable

[543] Dada unha expresable, o cadrado dunha primeira bimedial é igual ó rectángulo contido pola expresable e unha segunda binomial. Recíproco da Proposición X, 55 na que probou que o rectángulo contido por unha expresable e unha segunda binomial é igual ó cadrado dunha primeira bimedial.

[544] Proposición X, 60.

[545] Proposición X, 37.

[546] Proposición X, 23. Corolario.

[547] Proposición X, 15 e Proposición X, 23. Corolario.

[548] Proposición X, 22.

[549] Proposición X, 20.

ΔM con MH en lonxitude[550]. E son expresables; logo, ΔM e MH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΔH é binomial[551].

Cómpre demostrar agora que é tamén segunda.

Pois, dado que o cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ é maior que dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[552], logo, tamén é maior ΔΛ que MZ; en consecuencia, tamén ΔM, maior que MH[553].

E, dado que é conmensurable o cadrado de ΑΓ co de ΓΒ, é tamén conmensurable ΔΘ con ΚΛ; en consecuencia, tamén é conmensurable ΔΚ con ΚΜ[554].

E o contido por ΔΚΜ[555] é igual ó cadrado de MN; logo, o cadrado de ΔM é maior que o de MH no cadrado dunha conmensurable con aquela[556]. E MH é conmensurable con ΔΕ en lonxitude.

Logo, ΔH é segunda binomial.

PROPOSICIÓN 62

O cadrado da segunda bimedial aplicado nunha expresable fai en anchura a terceira binomial[557].

Sexa a segunda bimedial ΑΒ dividida nas súas mediais por Γ, de xeito que o segmento maior sexa ΑΓ, mentres que ΔΕ sexa unha expresable, e aplíquese en ΔΕ o paralelogramo ΔΖ igual ó cadrado de ΑΒ, facendo en anchura ΔΗ; digo que ΔΗ é terceira binomial.

Fáganse as mesmas construcións que no antes demostrado[558].

550 Proposición X, 13.

551 Proposición X, 36.

552 Lema previo á Proposición X, 60.

553 Proposición VI, 1 e Proposición V, 14.

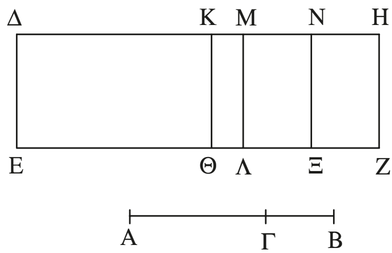
554 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

555 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

556 Proposición X, 17.

557 Dada unha expresable, o cadrado dunha segunda bimedial é igual ó rectángulo contido pola expresable e unha terceira binomial. Recíproco da Proposición X, 56 na que probou que o rectángulo contido por unha expresable e unha terceira binomial é igual ó cadrado dunha segunda bimedial.

558 Proposición X, 60.



E, dado que AB é segunda bimedial dividida por Γ, logo, AΓ e ΓB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen medial[559]; en consecuencia, tamén a suma dos cadrados de AΓ e ΓB é medial[560]. E é igual a ΔΛ; logo, é tamén medial ΔΛ. E está aplicado na expresable ΔE; logo, MΔ é tamén expresable e inconmensurable con ΔE en lonxitude[561].

Polo mesmo, entón, tamén MH é expresable e inconmensurable con MΛ, é dicir, con ΔE en lonxitude.

Logo, tanto ΔM como MH son expresables e inconmensurables con ΔE en lonxitude. E, dado que é inconmensurable AΓ con ΓB en lonxitude, mentres que, como AΓ a ΓB, así o cadrado de AΓ ó contido por AΓB[562], logo, é tamén inconmensurable o cadrado de AΓ co contido por AΓB[563].

En consecuencia, tamén a suma dos cadrados de AΓ e ΓB é inconmensurable con dúas veces o contido por AΓB[564], é dicir, ΔΛ con MZ; en consecuencia, tamén é inconmensurable ΔM con MH[565]. E son expresables; logo, ΔH é binomial[566].

Cómpre demostrar que é tamén terceira.

De xeito semellante ás anteriores[567] poderemos concluír que ΔM é maior que MH, que ΔK conmensurable con KM e que

559 Proposición X, 38.

560 Proposición X, 15 e Proposición X, 23. Corolario.

561 Proposición X, 22.

562 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

563 Proposición X, 11.

564 Proposición X, 12 e Proposición X, 13.

565 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

566 Proposición X, 36.

567 Proposición X, 60 e Proposición X, 61.

o contido por ΔKM é igual ó cadrado de MN; logo, o cadrado de ΔM é maior que o de MH no cadrado dunha conmensurable con aquela.

E nin ΔM nin MH son conmensurables con ΔE en lonxitude.

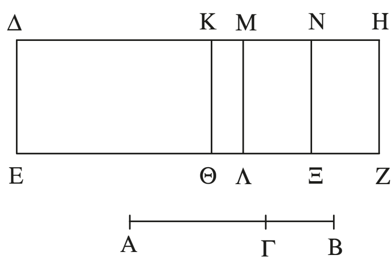
Logo, ΔH é terceira binomial[568]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 63

O cadrado da maior aplicado nunha expresable fai en anchura a cuarta binomial[569].

Sexa a maior AB dividida por Γ, de xeito que AΓ sexa maior que ΓB, mentres que ΔE expresable, e aplíquese en ΔE o paralelogramo ΔZ igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΔH; digo que ΔH é cuarta binomial.

Fáganse as mesmas construcións que no antes demostrado[570].



E, dado que AB é unha maior dividida por Γ, AΓ e ΓB son inconmensurables en cadrado que fan expresable a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, medial[571]; entón, dado que a suma dos cadrados de AΓ e ΓB é expresable, logo

568 Definición X, 2.3.

569 Dada unha expresable, o cadrado dunha recta maior é igual ó rectángulo contido pola expresable e unha cuarta binomial. Recíproco da Proposición X, 57 na que probou que o rectángulo contido por unha expresable e unha cuarta binomial é igual ó cadrado dunha recta maior.

570 Proposición X, 60.

571 Proposición X, 39.

ΔΛ é expresable; logo, ΔM é tamén expresable e conmensurable con ΔE en lonxitude[572].

Asemade, dado que dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ, é dicir, MZ, é medial[573] e está na expresable MΛ, logo, MH é tamén expresable e inconmensurable con ΔE en lonxitude[574]; logo é tamén inconmensurable ΔM con MH en lonxitude[575]. Logo, ΔM e MH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΔH é binomial[576].

Cómpre demostrar que é tamén cuarta.

De xeito semellante ás anteriores poderemos demostrar que ΔM é maior que MH e que o contido por ΔKM[577] é igual ó cadrado de MN.

Entón, dado que é inconmensurable o cadrado de ΑΓ co de ΓΒ, logo, ΔΘ é inconmensurable con KΛ; en consecuencia, tamén é inconmensurable ΔK con KM[578].

Pero, se dúas rectas son desiguais e, na maior, se aplica un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado da menor, inferior nunha figura cadrada, e se a divide en inconmensurables en lonxitude, o cadrado da maior será maior que o da menor no cadrado dunha inconmensurable con aquela en lonxitude[579]; logo, o cadrado de ΔM é maior que o de MH no cadrado dunha inconmensurable con aquela. E ΔM e MH son expresables conmensurables só en cadrado; e ΔM é conmensurable coa expresable dada ΔE.

Logo, ΔH é cuarta binomial[580]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

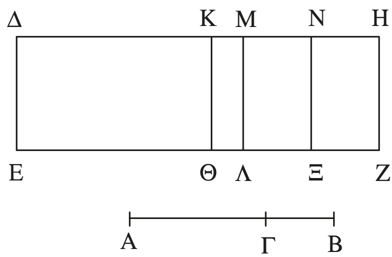
572 Proposición X, 20.
573 Proposición X, 23. Corolario.
574 Proposición X, 22.
575 Proposición X, 13.
576 Proposición X, 36.
577 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).
578 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
579 Proposición X, 18.
580 Definición X, 2.4.

PROPOSICIÓN 64

O cadrado da recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial aplicado nunha expresable fai en anchura a quinta binomial[581].

Sexa AB a recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial, dividida por Γ nas súas rectas de xeito que AΓ sexa a maior, tómese a expresable ΔE e, en ΔE, aplíquese ΔZ igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΔH; digo que ΔH é quinta binomial.

Fáganse as mesmas construcións que nas anteriores[582].



Entón, dado que AB é unha recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial, dividida por Γ, logo, AΓ e ΓB son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, expresable[583]; entón, dado que a suma dos cadrados de AΓ e ΓB é medial, logo ΔΛ é medial; en consecuencia, ΔM é expresable e inconmensurable en lonxitude con ΔE[584].

Asemade, dado que dúas veces o contido por AΓB[585], é dicir, MZ, é expresable, logo, MH é expresable e conmensurable con ΔE[586]; logo é inconmensurable ΔM con MH[587].

---

581 Dada unha expresable, o cadrado dunha recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial é igual ó rectángulo contido pola expresable e unha quinta binomial. Recíproco da Proposición X, 58 na que probou que o rectángulo contido por unha expresable e unha quinta binomial é igual ó cadrado dunha recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

582 Proposición X, 60.

583 Proposición X, 40.

584 Proposición X, 22.

585 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

586 Proposición X, 20.

587 Proposición X, 13.

Logo, ΔM e MH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΔH é binomial[588].

Digo agora que é tamén quinta.

Pois ben, de xeito semellante poderase demostrar que o contido por ΔKM é igual ó cadrado de MN, e que é inconmensurable ΔK con KM en lonxitude[589]; logo, o cadrado de ΔM é maior que o de MH no cadrado dunha inconmensurable con aquela[590]. E ΔM e MH son conmensurables só en cadrado e a menor, MH, é conmensurable con ΔE en lonxitude.

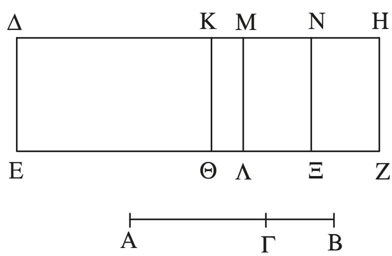
Logo, ΔH é quinta binomial[591]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 65

O cadrado da recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais aplicado nunha expresable fai en anchura a sexta binomial[592].

Sexa AB a recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais, dividida por Γ, e sexa ΔE expresable. E, en ΔE, aplíquese ΔZ igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΔH; digo que ΔH é sexta binomial.

Fáganse as mesmas construcións que nas anteriores[593].



[588] Proposición X, 36.

[589] Proposición X, 63.

[590] Proposición X, 18.

[591] Definición X, 2.5.

[592] Dada unha expresable, o cadrado dunha recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais é igual ó rectángulo contido pola expresable e unha sexta binomial. Recíproco da Proposición X, 59 na que probou que o rectángulo contido por unha expresable e unha sexta binomial é igual ó cadrado dunha recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.

[593] Proposición X, 60.

E, dado que AB é unha recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais, dividida por Γ, logo, ΑΓ e ΓΒ son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, o contido por elas, medial, e, ademais, a suma dos seus cadrados inconmensurable co contido por elas[594]; en consecuencia, segundo o antes demostrado, tanto ΔΛ como MZ son mediais[595].

E están aplicados na expresable ΔE; logo, tanto ΔM como MH son expresables e inconmensurables con ΔE en lonxitude[596].

E, dado que a suma dos cadrados de ΑΓ e ΓΒ é inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ, logo, é inconmensurable ΔΛ con MZ. Logo, é inconmensurable ΔM con MH[597]; logo, ΔM e MH son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΔH é binomial[598].

Digo agora que é tamén sexta.

Asemade, de xeito semellante poderemos demostrar agora que o contido por ΔKM[599] é igual ó cadrado de MN e que é inconmensurable en lonxitude ΔK con KM[600]; polo mesmo, entón, o cadrado de ΔM é maior que o de MH no cadrado dunha inconmensurable con aquela en lonxitude [601]. E nin ΔM nin MH son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada ΔE.

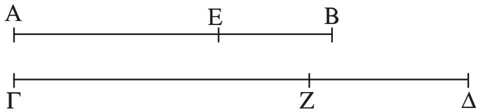
Logo, ΔH é sexta binomial[602]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 66

A conmensurable en lonxitude coa binomial é ela tamén binomial e a mesma na orde.

Sexa a binomial AB e sexa ΓΔ conmensurable en lonxitude con AB; digo que ΓΔ é binomial e a mesma que AB na orde.

594 Proposición X, 41.
595 Proposición X, 60.
596 Proposición X, 22.
597 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
598 Proposición X, 36.
599 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).
600 Proposición X, 63.
601 Proposición X, 18.
602 Definición X, 2.6.



Pois, dado que AB é binomial, divídase nos seus termos por E e sexa o termo maior AE; logo, AE e EB son expresables conmensurables só en cadrado[603].

Resulte que, como AB a ΓΔ, así AE a ΓZ[604]; logo, tamén, a restante EB é á restante ZΔ como AB a ΓΔ[605].

Pero é conmensurable AB con ΓΔ en lonxitude. Logo, tamén é conmensurable AE con ΓZ, e EB con ZΔ[606]. E AE e EB son expresables; logo, son tamén expresables ΓZ e ZΔ[607].

E, como AE é a ΓZ, EB a ZΔ[608]. Logo, por alternancia, como AE é a EB, ΓZ a ZΔ[609].

Pero AE e EB son conmensurables só en cadrado; logo, tamén ΓZ e ZΔ son conmensurables só en cadrado. E son expresables; logo, ΓΔ é binomial.

Digo agora que tamén é a mesma que AB na orde.

Pois o cadrado de AE é maior que o de EB ou ben no cadrado dunha conmensurable con aquela ou no dunha inconmensurable.

Entón, se o cadrado de AE é maior que o de EB no cadrado dunha conmensurable con aquela, tamén será o cadrado de ΓZ maior que o de ZΔ no cadrado dunha conmensurable con ΓZ[610].

E, se é conmensurable AE coa expresable tomada, tamén será ΓZ conmensurable con ela[611] e, por iso, tanto AB como ΓΔ son primeiras binomiais[612], é dicir, as mesmas na orde.

---

603 Proposición X, 36.
604 Proposición VI, 12 e Proposición V, 14.
605 Proposición V, 19.
606 Proposición X, 11.
607 Definición X, 1.3.
608 Proposición V, 11.
609 Proposición V, 16.
610 Proposición X, 14.
611 Proposición X, 12.
612 Definición X, 2.1.

Pero, se EB é conmensurable coa expresable dada, tamén ZΔ é conmensurable con ela, e, por iso, asemade, será a mesma que AB na orde —pois unha e outra serán segundas binomiais[613].

Pero se nin AE nin EB son conmensurables coa expresable tomada, nin ΓZ nin ZΔ serán conmensurables con ela[614], e unha e outra son terceiras[615].

Pero, se o cadrado de AE é maior que o de EB no cadrado dunha inconmensurable con aquela, tamén o cadrado de ΓZ é maior que o de ZΔ no cadrado dunha inconmensurable con ΓZ[616].

E, se AE é conmensurable coa expresable tomada, tamén ΓZ é conmensurable con ela, e unha e outra son cuartas[617].

Pero, se o é EB, tamén ZΔ, e unha e outra, quintas[618].

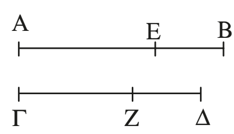
Pero, se nin AE nin EB son conmensurables coa expresable tomada, tampouco o son nin ΓZ nin ZΔ e cada unha delas será sexta[619].

En consecuencia, a conmensurable en lonxitude coa binomial é binomial e a mesma na orde; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 67

A conmensurable en lonxitude coa bimedial é ela tamén bimedial e a mesma na orde.

Sexa a bimedial AB e sexa ΓΔ conmensurable en lonxitude con AB; digo que ΓΔ é bimedial e a mesma que AB na orde.



[613] Definición X, 2.2.
[614] Proposición X, 13.
[615] Definición X, 2.3.
[616] Proposición X, 14.
[617] Definición X, 2.4.
[618] Definición X, 2.5.
[619] Definición X, 2.6.

Pois, dado que AB é bimedial, divídase nas mediais por E; logo, AE e EB son mediais conmensurables só en cadrado[620].

E resulte que, como AB a ΓΔ, AE a ΓZ[621]; logo, tamén a restante EB é á restante ZΔ como AB a ΓΔ[622].

Pero é conmensurable AB con ΓΔ en lonxitude. Logo, tamén son conmensurables AE e EB con ΓZ e ZΔ respectivamente[623]. E AE e EB son mediais; logo, son tamén mediais ΓZ e ZΔ[624].

E, dado que, como AE é a EB, ΓZ a ZΔ[625], mentres que AE e EB son conmensurables só en cadrado, tamén ΓZ e ZΔ son conmensurables só en cadrado. Pero foi demostrado que tamén mediais; logo, ΓΔ é bimedial.

Digo agora que tamén é a mesma que AB na orde.

Pois dado que, como AE é a EB, ΓZ a ZΔ, logo, tamén como o cadrado de AE ó contido por AEB[626], así o cadrado de ΓZ ó contido por ΓZΔ[627]; por alternancia, como o cadrado de AE ó de ΓZ, así o contido por AEB ó contido por ΓZΔ.

Pero o cadrado de AE é conmensurable co de ΓZ; logo, tamén o contido por AEB é conmensurable co contido por ΓZΔ.

Entón, se é expresable o contido por AEB, tamén é expresable o contido por ΓZΔ[628]. E se medial, medial, e cada unha delas, segunda[629].

E, por iso, será ΓΔ a mesma que AB na orde; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

620 Proposición X, 37 e Proposición X, 38.

621 Proposición VI, 12 e Proposición V, 14.

622 Proposición V, 19.

623 Proposición X, 11.

624 Proposición X, 23.

625 Proposición V, 11 e Proposición V, 16.

626 Véxase Nota 226 (Lema previo á Proposición X, 33).

627 Lema previo á Proposición X, 22.

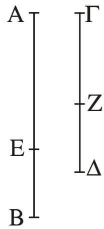
628 Heiberg atetiza esta frase que aparece aquí en varios manuscritos: «e por iso é primeira bimedial».

629 Proposición X, 23. Corolario; Proposición X, 37; Proposición X, 38.

PROPOSICIÓN 68

A conmensurable coa maior é ela tamén maior.

Sexa a maior AB e sexa ΓΔ conmensurable con AB; digo que ΓΔ é maior.



Divídase AB por E; logo, AE e EB son inconmensurables en cadrado que fan expresable a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, medial[630]; e resulte o mesmo que nas anteriores[631].

E, dado que, como AB é a ΓΔ, así AE a ΓZ, e EB a ZΔ, logo, tamén, como AE a ΓZ, así EB a ZΔ[632].

Pero é conmensurable AB con ΓΔ. Logo, tamén son conmensurables AE e EB con ΓZ e ZΔ respectivamente[633].

E, dado que como AE é a ΓZ, así EB a ZΔ, tamén, por alternancia, como AE a EB, así ΓZ a ZΔ[634], logo, tamén, por composición, como AB é a BE, así ΓΔ a ΔZ[635]; logo, tamén, como o cadrado de AB ó de BE, así o cadrado de ΓΔ ó de ΔZ[636].

De xeito semellante poderemos demostrar agora que tamén, como o cadrado de AB ó de AE, así o de ΓΔ ó de ΓZ.

Logo, tamén, como o cadrado de AB ó de AE xunto co de EB, así o de ΓΔ ó de ΓZ xunto co de ZΔ; logo, tamén, por alternan-

630 Proposición X, 39.
631 Proposición X, 66 e Proposición X, 67.
632 Proposición V, 11.
633 Proposición X, 11.
634 Proposición V, 16.
635 Proposición V, 18.
636 Proposición VI, 20.

cia, como o cadrado de AB ó de ΓΔ, así o de AE xunto co de EB ó de ΓZ xunto co de ZΔ[637].

Pero o cadrado de AB é conmensurable co de ΓΔ; logo, tamén é conmensurable o cadrado de AE xunto co de EB co de ΓZ xunto co de ZΔ[638].

E os cadrados de AE e EB a un tempo[639] son expresables e os de ΓZ e ZΔ a un tempo son expresables.

E de xeito semellante, tamén dúas veces o contido por AE e EB é conmensurable con dúas veces o contido por ΓZ e ZΔ.

E dúas veces o contido por AE e EB é medial; logo, tamén dúas veces o contido por ΓZ e ZΔ é medial[640].

Logo, son inconmensurables en cadrado ΓZ e ZΔ[641], que fan expresable a suma dos seus cadrados a un tempo[642], pero medial dúas veces o contido por elas; logo, ΓΔ enteira é unha non expresable, a chamada maior[643].

Logo, a conmensurable coa maior é maior; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 69

A conmensurable coa recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial é ela tamén recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

Sexa AB a recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial, e sexa ΓΔ conmensurable con AB; cómpre demostrar que tamén ΓΔ é recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

---

637 Proposición V, 16.

638 Proposición X, 11.

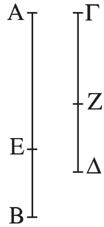
639 Aínda que a expresión τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB «os cadrados de AE e EB», xa a ven utilizando para indicar «a suma dos cadrados de AE e EB», aquí engade o adverbio ἅμα «a un tempo» para resaltar que cada un dos cadrados é non expresable por separado, pero a suma dos mesmos é expresable.

640 Proposición X, 23. Corolario.

641 Proposición X, 13.

642 O adverbio é redundante xa que o concepto de suma xa aparece indicado.

643 Proposición X, 39.



Divídase AB nas súas rectas por E; logo, AE e EB son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, mentres que o contido por elas, expresable[644]; e fáganse as mesmas construcións que nas anteriores[645].

De xeito semellante poderemos demostrar agora que tamén ΓZ e ZΔ son inconmensurables en cadrado e que a suma dos cadrados de AE e EB, conmensurable coa suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ, mentres que o contido por AE e EB co contido por ΓZ e ZΔ; en consecuencia, tamén a suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ é medial[646], mentres que o contido por ΓZ e ZΔ, expresable.

Logo, ΓΔ é recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 70

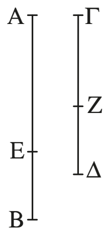
A conmensurable coa recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais é recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.

Sexa AB a recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais, e ΓΔ, conmensurable con AB; cómpre demostrar que tamén ΓΔ é unha recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.

Pois ben, dado que AB é unha recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais, divídase nas súas rectas por E; logo, AE e EB son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, o contido por elas, medial, e, ademais, a

[644] Proposición X, 40.
[645] Proposición X, 66 e Proposición X, 68.
[646] Proposición X, 23. Corolario.

suma dos cadrados de AE e EB, inconmensurable co contido por AE e EB[647]; e fáganse as mesmas construcións que nas anteriores[648].



De xeito semellante agora poderemos demostrar que tamén ΓZ e ZΔ son inconmensurables en cadrado e que a suma dos cadrados de AE e EB, conmensurable coa suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ, pero o contido por AE e EB co contido por ΓZ e ZΔ; en consecuencia, tamén a suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ é medial[649], o contido por ΓZ e ZΔ, medial, e, ademais, a suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ, inconmensurable co contido por ΓZ e ZΔ[650].

Logo, o cadrado de ΓΔ é equivalente a dúas mediais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 71

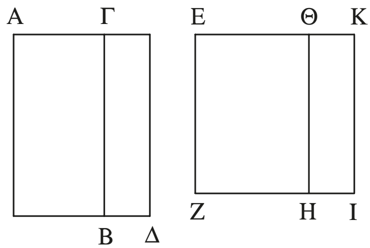
Sumadas área expresable e medial, resultan catro non expresables: ou ben binomial ou primeira bimedial ou maior ou recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

Sexa a expresable AB e a medial ΓΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AΔ ou ben é binomial ou primeira bimedial ou maior ou recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial.

[647] Proposición X, 41.
[648] Proposición X, 66 e Proposición X, 68.
[649] Proposición X, 23. Corolario.
[650] Proposición X, 13.

Pois ben, AB é ou maior que ΓΔ ou menor.

Sexa primeiro maior; tómese a expresable EZ, e, en EZ, aplíquese EH igual a AB, facendo en anchura EΘ; e, en EZ, aplíquese ΘI igual a ΔΓ, facendo en anchura ΘK.



E, dado que AB é expresable e é igual a EH, logo, é tamén expresable EH. E está aplicado en EZ, facendo en anchura EΘ; logo, EΘ é expresable e conmensurable con EZ en lonxitude[651].

Asemade, dado que é medial ΓΔ e é igual a ΘI, logo, é tamén medial ΘI. E está aplicado na expresable EZ, facendo en anchura ΘK; logo, é expresable ΘK e inconmensurable con EZ en lonxitude[652].

E, dado que é medial ΓΔ, mentres que AB, expresable, logo, é inconmensurable AB con ΓΔ[653]; en consecuencia, tamén EH é inconmensurable con ΘI.

Pero, como EH a ΘI, así é EΘ a ΘK[654]; logo, tamén é inconmensurable EΘ con ΘK en lonxitude[655].

E son ambas expresables; logo, EΘ e ΘK son expresables conmensurables só en cadrado; logo, EK é binomial dividida por Θ[656].

E, dado que é maior AB que ΓΔ, mentres que AB igual a EH, e ΓΔ a ΘI, logo, é tamén maior EH que ΘI; logo, tamén EΘ é maior que ΘK[657].

[651] Proposición X, 20.
[652] Proposición X, 22.
[653] Proposición X, 21.
[654] Proposición VI, 1.
[655] Proposición X, 11.
[656] Proposición X, 36.
[657] Proposición V, 14.

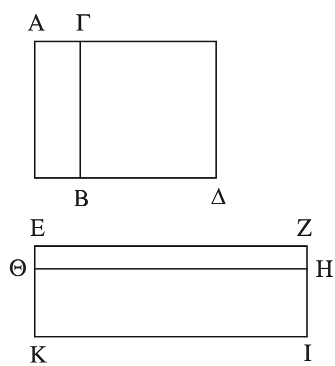
Entón, ou ben o cadrado de EΘ é maior que o de ΘK no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude ou no dunha inconmensurable.

Séxao primeiro no cadrado dunha conmensurable con aquela.

E a maior ΘE é conmensurable coa expresable tomada EZ; logo, EK é primeira binomial[658]. E EZ é expresable; pero, se unha área está contida por expresable e primeira binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é binomial[659]. Logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a EI é binomial; en consecuencia, tamén a recta cuxo cadrado é equivalente a AΔ é binomial.

Sexa agora o cadrado de EΘ maior que o de ΘK no cadrado dunha inconmensurable con aquela; e a maior, EΘ, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada EZ; logo, EK é cuarta binomial[660]. Pero EZ é expresable; pero, se unha área está contida por expresable e cuarta binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é unha non expresable, a chamada maior[661]; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área EI é maior; en consecuencia, tamén a recta cuxo cadrado é equivalente a AΔ é maior.

Sexa agora menor AB que ΓΔ; logo, tamén EH é menor que ΘI; en consecuencia, tamén EΘ é menor que ΘK[662].



[658] Definición X, 2.1.
[659] Proposición X, 54.
[660] Definición X, 2.4.
[661] Proposición X, 57.
[662] Proposición VI, 1 e Proposición V, 14.

Pero o cadrado de ΘK ou é maior que o de EΘ no cadrado dunha conmensurable con aquela ou no dunha inconmensurable.

Séxao, primeiro, no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude; e a menor, EΘ, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada EZ; logo, EK é segunda binomial[663]. Pero EZ é expresable; pero, se unha área está contida por expresable e segunda binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é primeira bimedial[664]. Logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a EI é primeira bimedial; en consecuencia, tamén a recta cuxo cadrado é equivalente a AΔ é primeira bimedial.

Sexa agora o cadrado de ΘK maior que o de ΘE no cadrado dunha inconmensurable con aquela. E a menor, EΘ, é conmensurable coa expresable tomada EZ; logo, EK é quinta binomial[665]. Pero EZ é expresable. E, se unha área está contida por expresable e quinta binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é recta cuxo contido é equivalente a expresable e medial[666]. Logo, a recta cuxo contido é equivalente á área EI é recta cuxo contido é equivalente a expresable e medial; en consecuencia, tamén a recta cuxo contido é equivalente á área AΔ é recta cuxo contido é equivalente a expresable e medial.

Logo, sumadas área expresable e medial, resultan catro non expresables: ou ben binomial ou primeira bimedial ou maior ou recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 72

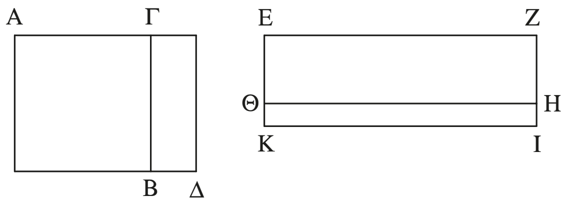
Sumadas dúas áreas mediais inconmensurables entre si, resultan as dúas restantes non expresables: ou segunda bimedial ou recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.

Pois ben, súmense dúas áreas mediais inconmensurables entre si, AB e ΓΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente

[663] Definición X, 2.2.
[664] Proposición X, 55.
[665] Definición X, 2.5.
[666] Proposición X, 58.

á área AΔ é ou ben segunda bimedial ou recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.

Pois, ou ben é maior AB que ΓΔ ou menor. Sexa, por exemplo, primeiro maior AB que ΓΔ; e tómese a expresable EZ e, en EZ, aplíquese EH igual a AB, facendo en anchura EΘ, mentres que ΘI igual a ΓΔ, facendo en anchura ΘK.



E, dado que tanto AB como ΓΔ son mediais, logo, tamén son mediais tanto EH como ΘI.

E están aplicados na expresable ZE, facendo en anchura EΘ e ΘK; logo, tanto EΘ como ΘK son expresables e inconmensurables con EZ en lonxitude[667].

E, dado que é inconmensurable AB con ΓΔ, e é igual AB a EH, mentres que ΓΔ a ΘI, logo, é inconmensurable tamén EH con ΘI. E, como EH a ΘI, así é EΘ a ΘK[668]; logo, é inconmensurable EΘ con ΘK en lonxitude[669]. Logo, EΘ e ΘK son expresables conmensurables só en cadrado[670]; logo, EK é binomial[671].

Pero o cadrado de EΘ ou ben é maior que o de ΘK no cadrado dunha conmensurable con aquela ou no dunha inconmensurable[672].

Séxao, primeiro, no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude; e nin EΘ nin ΘK son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada EZ; logo, EK é terceira binomial[673].

667 Proposición X, 22.
668 Proposición VI, 1.
669 Proposición X, 11.
670 Definición X, 1.3.
671 Proposición X, 36.
672 Proposición V, 14.
673 Definición X, 2.3.

Pero EZ é expresable; e, se unha área está contida por expresable e terceira binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é segunda bimedial[674]; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a EI, é dicir, a AΔ, é segunda bimedial.

Sexa agora o cadrado de EΘ maior que o de ΘK no cadrado dunha inconmensurable con aquela en lonxitude; e son inconmensurables en lonxitude con EZ tanto EΘ como ΘK; logo, EK é sexta binomial[675].

Pero, se unha área está contida por expresable e sexta binomial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais[676]; en consecuencia, tamén a recta cuxo cadrado é equivalente a AΔ é recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.[677]

Logo, sumadas dúas mediais inconmensurables entre si, resultan as dúas restantes non expresables: ou ben segunda bimedial ou recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais.[678]

A binomial e as non expresables seguintes non son as mesmas que a medial nin entre si. Pois o cadrado de medial aplicado en expresable fai en anchura expresable e inconmensurable en lonxitude con aquela na que está aplicado[679]. Pero o de binomial aplicado en expresable fai en anchura a primeira binomial[680]. E o de primeira bimedial aplicado en expresable fai en anchura a segunda binomial[681]. E o de segunda bimedial aplicado en expresable fai en anchura a terceira binomial[682]. E

[674] Proposición X, 56.

[675] Definición X, 2.6.

[676] Proposición X, 59.

[677] Heiberg atetiza esta frase que presenta a maioría de manuscritos: «De xeito semellante poderemos demostrar que se é menor AB que ΓΔ, a recta cuxo cadrado é equivalente á área AΔ ou é segunda bimedial ou recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais».

[678] Euclides omite a parte final da apostila «o que xustamente, era preciso demostrar». A continuación engade unha explicación adicional para xustificar que os seis tipos de rectas, é dicir, binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial e recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais — Proposición X, 36 a Proposición X, 41— son distintos entre si e distintos do das rectas mediais —Proposición X, 21.

[679] Proposición X, 22.

[680] Proposición X, 60.

[681] Proposición X, 61.

[682] Proposición X, 62.

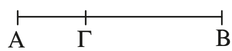
o de maior aplicado en expresable fai en anchura a cuarta binomial[683]. E o de recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial aplicado en expresable fai en anchura a quinta binomial[684]. E o de recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais aplicado en expresable fai en anchura a sexta binomial[685].

E as anchuras ditas difiren da primeira e entre si; da primeira, porque é expresable; unhas doutras, porque non son as mesmas na orde; en consecuencia, tamén as propias non expresables difiren unhas doutras.

PROPOSICIÓN 73

Se de expresable se quita expresable que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado, a restante é non expresable; chámese apótoma[686].

Pois ben, da expresable AB quítese a expresable BΓ que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado; digo que a restante, AΓ, é unha non expresable, a chamada apótoma.



Pois, dado que é inconmensurable AB con BΓ en lonxitude e que, como AB é a BΓ, así o cadrado de AB ó contido por AB e BΓ[687], logo, é inconmensurable o cadrado de AB co contido por AB e BΓ[688].

---

683 Proposición X, 63.

684 Proposición X, 64.

685 Proposición X, 65.

686 A palabra grega ἀποτομή significa «parte cortada de...»; Euclides aplica o termo a rectas que son o resultado da diferenza doutras dúas, fronte ás rectas explicadas ata o de agora, resultado da suma. Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, as rectas de lonxitude $a(1 - \sqrt{q})$ son apótomas, mentres que as de lonxitude $a(1 + \sqrt{q})$ son binomiais, sendo q un número racional que non é un cadrado —véxase a Proposición X, 36—. Da mesma forma que nas proposicións X, 36 a X, 41 introduce seis tipos de rectas non expresables, obtidas mediante a suma de dúas rectas que cumpren certas relacións, nas proposicións X, 73 a X, 78 introduce outros seis tipos de rectas que son o resultado da diferenza. Acaba esta segunda parte do libro X coas proposicións X, 79 a X, 84 nas que demostra a unicidade destas descomposicións para os seis tipos de rectas obtidas pola diferenza, da mesma forma que acabou a primeira parte coas proposicións X, 42 a X, 47 demostrando a unicidade da descomposición para as rectas obtidas mediante a suma.

687 Proposición VI, 1.

688 Proposición X, 11.

Pero o cadrado de AB xunto co de BΓ é conmensurable co de AB[689], mentres que dúas veces o contido por AB e BΓ é conmensurable co contido por AB e BΓ[690].

E, dado que, precisamente, o cadrado de AB xunto co de BΓ é igual a dúas veces o contido por AB e BΓ xunto co cadrado de ΓA[691], logo, tamén o cadrado de AB xunto co de BΓ é inconmensurable co restante, co cadrado de AΓ[692].

Pero o cadrado de AB xunto co de BΓ é expresable; logo, é non expresable AΓ; chámese apótoma. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 74

Se de medial se quita medial que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, contén expresable, a restante é non expresable; chámese primeira apótoma de medial[693].

Pois ben, da medial AB quítese a medial BΓ que é conmensurable con AB só en cadrado e que, xunto con AB, fai o contido por AB e BΓ expresable; digo que a recta restante, AΓ, é non expresable; chámese primeira apótoma de medial.

[689] Proposición X, 15.

[690] Proposición X, 6.

[691] Proposición II, 7.

[692] Proposición X, 13 e Proposición X, 16.

[693] Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e q é un número racional que non é un cadrado, as rectas de lonxitude $a\sqrt[4]{q}\,(1+\sqrt{q})$ son do tipo primeira bimedial —véxase a Proposición X, 37—, mentres que as de lonxitude $a\sqrt[4]{q}\,(1-\sqrt{q})$ ou $a\sqrt[4]{q}\,(\sqrt{q}-1)$, segundo que q sexa menor ou maior que 1, son do tipo primeira apótoma de medial.

Pois, dado que ΑΒ e ΒΓ son mediais, son tamén mediais os cadrados de ΑΒ e ΒΓ[694]. Pero dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é expresable; logo, o cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ[695]; logo, tamén é inconmensurable dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ co restante, o cadrado de ΑΓ, posto que tamén, se a enteira é inconmensurable cunha delas, tamén as magnitudes do principio serán inconmensurables[696].

Pero dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é expresable; logo, o cadrado de ΑΓ é non expresable[697]; logo, é non expresable ΑΓ; chámese primeira apótoma de medial.

PROPOSICIÓN 75

Se de medial se quita medial que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, contén medial, a restante é non expresable; chámese segunda apótoma de medial[698].

Pois ben, da medial ΑΒ quítese a medial ΓΒ que é conmensurable coa recta enteira ΑΒ só en cadrado e que, xunto coa recta enteira ΑΒ, contén o medial ΑΒ e ΒΓ[699]; digo que a recta restante, ΑΓ, é non expresable; chámese segunda apótoma de medial.

Pois ben, tómese a expresable ΔΙ e, en ΔΙ, aplíquese ΔΕ igual ó cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ[700], facendo en anchura ΔΗ, e, por outro lado, en ΔΙ, aplíquese ΔΘ igual a dúas veces o contido

[694] Véxase a Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).

[695] Proposición X, 21.

[696] Proposición II, 7 e Proposición X, 16.

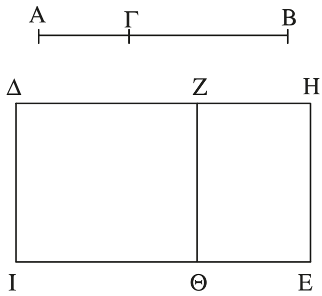
[697] Proposición X, 15.

[698] Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e q e k números racionais tal que q, k e qk non son cadrados, as rectas de lonxitude $a\sqrt[4]{q}(1+\sqrt{k})$ son do tipo primeira bimedial —véxase a Proposición X, 38— mentres que as de lonxitude $a\sqrt[4]{q}(1-\sqrt{k})$ ou $a\sqrt[4]{q}(\sqrt{k}-1)$, segundo que k sexa menor ou maior que 1, son do tipo segunda apótoma de medial.

[699] Proposición X, 28.

[700] Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

por ΑΒ e ΒΓ, facendo en anchura ΔΖ[701]; logo, o restante ΖΕ é igual ó cadrado de ΑΓ[702].



E, dado que o cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ é medial e conmensurable, logo, tamén é medial ΔΕ[703]. E está aplicado na expresable ΔΙ, facendo en anchura ΔΗ; logo, é expresable ΔΗ e inconmensurable con ΔΙ en lonxitude[704].

Asemade, dado que o contido por ΑΒ e ΒΓ é medial, logo, tamén dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é medial[705]. E é igual a ΔΘ; logo, tamén ΔΘ é medial. E está aplicado na expresable ΔΙ, facendo en anchura ΔΖ; logo, é expresable ΔΖ e inconmensurable en lonxitude con ΔΙ.

E, dado que ΑΒ e ΒΓ son conmensurables só en cadrado, logo, é inconmensurable ΑΒ con ΒΓ en lonxitude; logo, é tamén inconmensurable o cadrado de ΑΒ co contido por ΑΒ e ΒΓ[706].

Pero o cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ é conmensurable co cadrado de ΑΒ[707], mentres que dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é conmensurable co contido por ΑΒ e ΒΓ[708]; logo, dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ é inconmensurable co cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΓ[709]. Pero ΔΕ é igual ó cadrado de ΑΒ xunto co de

701 Lema previo á Proposición X, 60.
702 Proposición II, 7.
703 Proposición X, 15 e Proposición X, 23. Corolario.
704 Proposición X, 22.
705 Proposición X, 23. Corolario.
706 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
707 Proposición X, 15.
708 Proposición X, 6.
709 Proposición X, 13.

ΒΓ, mentres que ΔΘ, a dúas veces o contido por ΑΒ e ΒΓ; logo, é inconmensurable ΔΕ con ΔΘ.

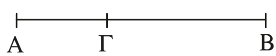
Pero como ΔΕ é a ΔΘ, así ΗΔ a ΔΖ[710]; logo, é inconmensurable ΗΔ con ΔΖ[711]. E ambas son expresables; logo, ΗΔ e ΔΖ son expresables conmensurables só en cadrado[712]; logo, ΖΗ é apótoma[713].

Pero ΔΙ é expresable, o contido por expresable e non expresable é non expresable[714], e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable[715]. E o cadrado de ΑΓ é equivalente a ΖΕ; logo, ΑΓ é non expresable; chámese segunda apótoma de medial. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 76

Se dunha recta se quita unha recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai expresable os seus cadrados a un tempo[716], mentres que o contido por elas, medial, a restante é non expresable; chámese menor[717].

Pois ben, da recta ΑΒ quítese a recta ΒΓ que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que cumpre o proposto[718]. Digo que a recta restante ΑΓ é unha non expresable, a chamada menor.



[710] Proposición VI, 1.

[711] Proposición X, 11.

[712] Definición X, 1.3.

[713] Proposición X, 73.

[714] Nota 103 (Proposición X, 20).

[715] Definición X, 1.4.

[716] Véxase a Nota 639 (Proposición X, 68).

[717] Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e q é un número racional tal que $1 + q^2$ non é un cadrado, as rectas de lonxitude

$$a\left(\sqrt{(1 + q / \sqrt{1 + q^2}) / 2} + \sqrt{(1 - q / \sqrt{1 + q^2}) / 2}\right)$$

son do tipo maior —véxase a Proposición X, 39—, mentres as de lonxitude

$$a\left(\sqrt{(1 + q / \sqrt{1 + q^2}) / 2} - \sqrt{(1 - q / \sqrt{1 + q^2}) / 2}\right)$$

son do tipo menor. Na Proposición XIII, 11 verá que o lado do pentágono regular inscrito nun círculo de radio r é unha recta do tipo menor, sendo $a=r\sqrt{5/2}$ e $q = 2$.

[718] Proposición X, 33.

Pois, dado que a suma dos cadrados de AB e BΓ é expresable e dúas veces o contido por AB e BΓ, medial, logo, o cadrado de AB xunto co de BΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por AB e BΓ[719]; e, por conversión, os cadrados de AB e BΓ son inconmensurables co restante, o cadrado de AΓ[720].

Pero o cadrado de AB xunto co de BΓ é expresable. Logo, o cadrado de AΓ é non expresable; logo, AΓ é non expresable[721]; chámese menor. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 77

***Se dunha recta se quita unha recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai medial a suma dos seus cadrados, mentres que dúas veces o contido por elas, expresable, a restante é non expresable; chámese a que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira*[722].**

Pois ben, da recta AB quítese a recta BΓ que é inconmensurable con AB en cadrado e que cumpre o proposto[723]; digo que a recta restante AΓ é unha non expresable, a antedita.

[719] Proposición X, 21.

[720] Proposición II, 7 e Proposición X, 16.

[721] Definición X, 1.4.

[722] Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3— e q é un número racional tal que $1 + q^2$ non é un cadrado, as rectas que miden

$$a\left(\sqrt{(\sqrt{1+q^2}+q)/2\,(1+q^2)}+\sqrt{(\sqrt{1+q^2}-q)/2\,(1+q^2)}\right)$$

son do tipo «rectas cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial» —véxase a Proposición X, 40—, mentres as de lonxitude

$$a\left(\sqrt{(\sqrt{1+q^2}+q)/2\,(1+q^2)}-\sqrt{(\sqrt{1+q^2}-q)/2\,(1+q^2)}\right)$$

son do tipo «recta que xunto con área expresable, fai medial a área enteira».

[723] Proposición X, 34.

Pois, dado que a suma dos cadrados de AB e BΓ é medial, e dúas veces o contido por AB e BΓ, expresable, logo, o cadrado de AB xunto co de BΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por AB e BΓ[724]; logo, tamén o restante, o cadrado de AΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por AB e BΓ[725].

E dúas veces o contido por AB e BΓ é expresable; logo, o cadrado de AΓ é non expresable; logo, AΓ é non expresable[726]; chámese a que, xunto con área expresable fai medial a área enteira. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 78

Se dunha recta se quita unha recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai medial a suma dos seus cadrados, mentres que dúas veces o contido por elas, medial, e, ademais, os seus cadrados inconmensurables con dúas veces o contido por elas, a restante é non expresable; chámese a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira[727]**.**

Pois ben, da recta AB quítese a recta BΓ que é inconmensurable con AB en cadrado e que cumpre o proposto[728]; digo que a recta restante, AΓ, é unha non expresable, a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira.

---

[724] Proposición X, 21.

[725] Proposición II, 7 e Proposición X, 16.

[726] Definición X, 1.4.

[727] Se a é a recta expresable de partida —Definición X, 1.3—, e q e k números racionais tales que k, $(1 + q^2)$, $k(1 + q^2)$ non son cadrados, as rectas que miden

$$a\sqrt[4]{k}\,\left(\sqrt{(1 + q / \sqrt{1 + q^2}) / 2} + \sqrt{(1 - q / \sqrt{1 + q^2}) / 2}\right)$$

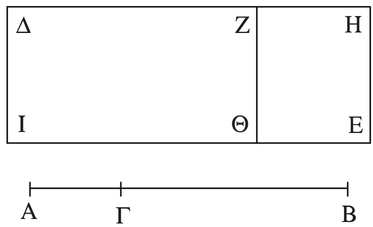
son do tipo «rectas cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais» —véxase a Proposición X, 41—, mentres as de lonxitude

$$a\sqrt[4]{k}\,\left(\sqrt{(1 + q / \sqrt{1 + q^2}) / 2} - \sqrt{(1 - q / \sqrt{1 + q^2}) / 2}\right)$$

son do tipo «recta que xunto con área medial, fai medial a área enteira.

[728] Proposición X, 35.

Pois ben, tómese a expresable ΔI e, en ΔI, aplíquese ΔE igual ó cadrado de AB xunto co de BΓ[729], facendo en anchura ΔH, e, por outro lado, quítese ΔΘ igual a dúas veces o contido por AB e BΓ[730]; logo, o restante, ZE, é igual ó cadrado de AΓ[731]; en consecuencia, o cadrado de AΓ é equivalente a ZE.



E, dado que a suma dos cadrados de AB e BΓ é medial e é igual a ΔE, logo, é medial ΔE.

E está aplicado na expresable ΔI, facendo en anchura ΔH; logo, é expresable ΔH e inconmensurable con ΔI en lonxitude[732].

Asemade, dado que dúas veces o contido por AB e BΓ é medial e é igual a ΔΘ, logo, ΔΘ é medial. E está aplicado na expresable ΔI, facendo en anchura ΔZ; logo, é expresable tamén ΔZ e inconmensurable con ΔI en lonxitude.

E, dado que o cadrado de AB xunto co de BΓ é inconmensurable con dúas veces o contido por AB e BΓ, logo, tamén é inconmensurable ΔE con ΔΘ.

Pero, como ΔE a ΔΘ, así é tamén ΔH a ΔZ[733]; logo, é inconmensurable ΔH con ΔZ[734].

E ambas son expresables; logo, HΔ e ΔZ son expresables conmensurables só en cadrado[735]. Logo, ZH é apótoma[736]; e ZΘ, expresable.

729 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

730 Lema previo á Proposición X, 60. Heiberg atetiza esta frase que presenta a maioría dos manuscritos: «facendo en anchura ΔZ»

731 Proposición II, 7.

732 Proposición X, 22.

733 Proposición VI, 1.

734 Proposición X, 11.

735 Definición X, 1.3.

736 Proposición X, 73.

Pero o contido por expresable e apótoma é non expresable[737], e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable[738]. E o cadrado de ΑΓ é equivalente a ΖΕ; logo, ΑΓ é non expresable; chámese a que, xunto con area medial, fai medial a área enteira. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 79

Á apótoma correspóndelle unha única recta expresable que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado.

Sexa a apótoma ΑΒ e ΒΓ a que lle corresponde; logo, ΑΓ e ΓΒ son expresables conmensurables só en cadrado[739]; digo que a ΑΒ ningunha outra expresable que sexa conmensurable coa recta enteira só en cadrado lle corresponde.

Pois se é posible, correspóndalle ΒΔ; logo, tamén ΑΔ e ΔΒ son expresables conmensurables só en cadrado.

E, dado que, no que o cadrado de ΑΔ xunto co de ΔΒ supera a dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ, niso supera tamén o cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ —pois ambas supérano no mesmo, no cadrado de ΑΒ[740]—; logo, por alternancia, no que os cadrados de ΑΔ e ΔΒ superan ós de ΑΓ e ΓΒ, niso supera dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ.

---

737 Nota 103 (Proposición X, 20).
738 Definición X, 1.4.
739 Proposición X, 73.
740 Proposición II, 7.

Pero o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera ó de AΓ xunto co de ΓB en expresable —pois ambos son expresables[741]—. Logo, tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB supera a dúas veces o contido por AΓ e ΓB en expresable; o que, sen dúbida, é imposible —pois ambos son mediais[742] e medial non supera a medial en expresable[743].

Logo, a AB ningunha outra expresable que sexa conmensurable coa recta enteira só en cadrado lle corresponde .

Logo, unha única expresable que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado correspóndelle á apótoma. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 80

Á primeira apótoma de medial só lle corresponde unha única recta medial que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, contén expresable.

Sexa AB a primeira apótoma de medial, e a AB correspóndalle BΓ; logo, AΓ e ΓB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen o expresable AΓ, ΓB[744]; digo que a AB ningunha outra medial lle corresponde que sexa conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, conteña expresable.

[741] Proposición X, 15.
[742] Proposición X, 21.
[743] Proposición X, 26.
[744] Proposición X, 74.

Pois, se é posible, correspóndalle tamén ΔB; logo, AΔ e ΔB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen o expresable AΔ, ΔB.

E, dado que, no que o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera a dúas veces o contido por AΔ e ΔB, niso supera tamén o cadrado de AΓ xunto co de ΓB a dúas veces o contido por AΓ e ΓB —pois supérano no mesmo, no cadrado de AB[745]—; logo, por alternancia, no que o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera ó de AΓ xunto co de ΓB, niso supera tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB a dúas veces o contido por AΓ e ΓB.

Pero dúas veces o contido por AΔ e ΔB supera a dúas veces o contido por AΓ e ΓB en expresable —pois ambos son expresables[746]—; logo, tamén o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera ó de AΓ xunto co de ΓB en expresable; o que, sen dúbida, é imposible —pois ambos son mediais, e medial non supera a medial en expresable[747].

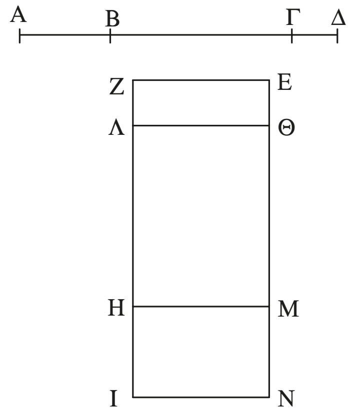
Logo, á primeira apótoma de medial só lle corresponde unha única recta medial que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, contén expresable. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 81

Á segunda apótoma de medial só lle corresponde unha única recta medial conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, contén medial.

Sexa AB a segunda apótoma de medial e BΓ a que lle corresponde; logo, AΓ e ΓB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen o medial AΓ, ΓB[748]; digo que a AB ningunha outra medial lle corresponderá que sexa conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, conteña medial.

[745] Proposición II, 7.
[746] Proposición X, 15.
[747] Proposición X, 26.
[748] Proposición X, 75.



Pois ben, se é posible, correspóndalle BΔ; logo, AΔ e ΔB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen o medial AΔ, ΔB.

Tómese a expresable EZ e, en EZ, aplíquese EH igual ó cadrado de AΓ xunto co de ΓB[749], facendo en anchura EM; e, por outro lado, quítese ΘH igual a dúas veces o contido por AΓ e ΓB, facendo en anchura ΘM; logo, o restante, EΛ, é igual ó cadrado de AB[750]; en consecuencia, o cadrado de AB é equivalente a EΛ.

Asemade, en EZ, aplíquese EI igual ós cadrados de AΔ e ΔB, facendo en anchura EN; pero tamén EΛ é igual ó cadrado de AB; logo, o restante, ΘI, é igual a dúas veces o contido por AΔ e ΔB.

E, dado que son mediais AΓ e ΓB, logo, son tamén mediais os cadrados de AΓ e ΓB[751]. E son iguais a EH[752]; logo, é tamén medial EH[753]. E está aplicado na expresable EZ, facendo en anchura EM; logo, EM é expresable e inconmensurable con EZ en lonxitude[754].

---

749 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

750 Proposición II, 7.

751 Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario.).

752 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

753 Proposición X, 15.

754 Proposición X, 22.

Asemade, dado que o contido por ΑΓ e ΓΒ é medial, tamén é medial dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[755]. E é igual a ΘΗ; logo, tamén ΘΗ é medial. E está aplicado na expresable ΕΖ, facendo en anchura ΘΜ; logo, tamén ΘΜ é expresable e inconmensurable con ΕΖ en lonxitude.

E, dado que ΑΓ e ΓΒ son conmensurables só en cadrado, logo, é inconmensurable ΑΓ con ΓΒ en lonxitude[756].

Pero como ΑΓ a ΓΒ, así é o cadrado de ΑΓ ó contido por ΑΓ e ΓΒ[757]; logo, é inconmensurable o cadrado de ΑΓ co contido por ΑΓ e ΓΒ[758].

Pero, o cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ é conmensurable co de ΑΓ, mentres que o contido por ΑΓ e ΓΒ é conmensurable con dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[759]. Logo, é inconmensurable o cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ con dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[760]. E ΕΗ é igual ó cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ, mentres que ΗΘ igual a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ; logo, é inconmensurable ΕΗ con ΘΗ.

Pero como ΕΗ a ΘΗ, así é ΕΜ a ΘΜ[761]; logo, é inconmensurable ΕΜ con ΜΘ en lonxitude. E ambas son expresables; logo, ΕΜ e ΜΘ son expresables conmensurables só en cadrado.

Logo, ΕΘ é apótoma; e ΘΜ, a que lle corresponde[762]. De xeito semellante poderemos demostrar que lle corresponde ΘΝ; logo, unha e outra recta, que son conmensurables coa recta enteira só en cadrado, correspóndenlle á apótoma. O que, sen dúbida, é imposible[763].

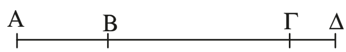
Logo, á segunda apótoma de medial correspóndelle só unha única medial que é conmensurable coa recta enteira só en cadrado e que, xunto coa recta enteira, contén medial. O que, xustamente, era preciso demostrar.

[755] Proposición X, 23. Corolario.
[756] Definición X, 1.3.
[757] Proposición VI, 1.
[758] Proposición X, 11.
[759] Proposición X, 6.
[760] Proposición X, 13.
[761] Proposición VI, 1.
[762] Proposición X, 73.
[763] Proposición X, 79.

PROPOSICIÓN 82

Á menor só lle corresponde unha única recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai expresable a suma dos seus cadrados, e dúas veces o contido por elas, medial.

Sexa a menor AB e sexa BΓ a que corresponde a AB; logo, AΓ e ΓB son inconmensurables en cadrado que fan expresable a suma dos seus cadrados, e dúas veces o contido por elas, medial[764]; digo que a AB non lle corresponderá ningunha outra recta que cumpra o proposto.



Pois ben, se é posible, correspóndalle BΔ; logo, AΔ e ΔB son inconmensurables en cadrado que cumpren o antedito. E, dado que, no que o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera ó de AΓ xunto co de ΓB, niso supera tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB a dúas veces o contido por AΓ e ΓB[765], mentres que o cadrado de AΔ xunto co de ΔB supera ó cadrado de AΓ xunto co de ΓB en expresable —pois son expresables ambos[766]—; logo, tamén dúas veces o contido por AΔ e ΔB supera en expresable a dúas veces o contido por AΓ e ΓB[767]; o que, sen dúbida, é imposible —pois son mediais ambos[768].

Logo, á menor correspóndelle só unha única recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que fai expresable os seus cadrados a un tempo[769], e dúas veces o contido por elas, medial. O que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[764] Proposición X, 76.

[765] Proposición II, 7. (AΔ – ΔB) = (AΓ – ΓB).

[766] Proposición X, 15.

[767] Proposición X, 11.

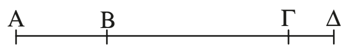
[768] Proposición X, 26.

[769] Véxase a Nota 639 (Proposición X, 68).

PROPOSICIÓN 83

Á que, xunto con area expresable, fai medial a área enteira só lle corresponde unha única recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai medial a suma dos seus cadrados, e dúas veces o contido por elas, expresable.

Sexa AB a que, xunto con area expresable, fai medial a área enteira, e a AB correspóndalle ΒΓ; logo, ΑΓ e ΓΒ son inconmensurables en cadrado que cumpren o antedito[770]; digo que a AB non lle corresponderá ningunha outra recta que cumpra o mesmo.



Pois ben, se é posible, correspóndalle ΒΔ; logo, ΑΔ e ΔΒ son rectas inconmensurables en cadrado que cumpren o antedito.

Entón, consonte o da anterior, dado que, no que o cadrado de ΑΔ xunto co de ΔΒ supera ó de ΑΓ xunto co de ΓΒ, niso tamén dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ supera a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ[771], mentres que dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ supera a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ en expresable —pois son expresables ambos[772]—; logo, tamén os cadrados de ΑΔ e ΔΒ superan ós de ΑΓ e ΓΒ en expresable[773]; o que, sen dúbida, é imposible —pois son mediais ambos[774].

Logo, a AB non lle corresponderá outra recta que sexa inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, cumpra o antedito. Logo, só lle corresponderá unha. O que, xustamente, era preciso demostrar.

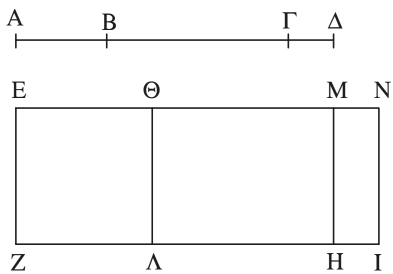
---

770 Proposición X, 77.
771 Nota 765 (Proposición X, 82).
772 Proposición X, 15.
773 Proposición X, 11.
774 Proposición X, 26.

PROPOSICIÓN 84

Á que, xunto con área medial, fai medial a área enteira só lle corresponde unha única recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai medial a suma dos seus cadrados, e dúas veces o contido por elas, medial, e, ademais, inconmensurable coa suma dos seus cadrados.

Sexa AB a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira, e ΒΓ a que lle corresponde; logo, ΑΓ e ΓΒ son inconmensurables en cadrado que cumpren o antedito[775]; digo que a AB non lle corresponderá ningunha outra recta que cumpra o antedito.



Pois ben, se é posible, correspóndalle ΒΔ, de xeito que tamén ΑΔ e ΔΒ sexan rectas inconmensurables en cadrado que fan medial os cadrados de ΑΔ e ΔΒ[776] a un tempo, dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ, medial, e, ademais, o cadrado de ΑΔ xunto co de ΔΒ inconmensurable con dúas veces o contido por ΑΔ e ΔΒ; tómese a expresable EZ e, en EZ, aplíquese EH igual ó cadrado de ΑΓ xunto co de ΓΒ[777], facendo en anchura EM, mentres que, en EZ, aplíquese ΘΗ igual a dúas veces o contido por ΑΓ e ΓΒ, facendo en anchura ΘΜ; logo, o restante, o cadrado de AB, é igual a ΕΛ[778]; logo, o cadrado de AB é equivalente a ΕΛ.

Asemade, en EZ, aplíquese EI igual ó cadrado de ΑΔ xunto co de ΔΒ, facendo en anchura EN. Pero tamén o cadrado de AB

[775] Proposición X, 78.
[776] Véxase a Nota 639 (Proposición X, 68).
[777] Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
[778] Proposición II, 7.

é igual a EΛ; logo, o restante, dúas veces o contido por AΔ e ΔB, é igual a ΘI.

E, dado que é medial a suma dos cadrados de AΓ e ΓB, e é igual a EH, logo, é medial tamén EH. E está aplicado na expresable EZ, facendo en anchura EM; logo, é expresable EM e inconmensurable en lonxitude con EZ[779].

Asemade, dado que dúas veces o contido por AΓ e ΓB é medial e é igual a ΘH, logo, é medial tamén ΘH. E está aplicado na expresable EZ, facendo en anchura ΘM. Logo, é expresable ΘM e inconmensurable con EZ en lonxitude.

E, dado que é inconmensurable o cadrado de AΓ xunto co de ΓB con dúas veces o contido por AΓ e ΓB, é inconmensurable tamén EH con ΘH; logo, tamén é inconmensurable EM con MΘ en lonxitude[780]. E son ambas expresables; logo, EM e MΘ son expresables conmensurables só en cadrado[781]; logo, EΘ é apótoma, e ΘM, a que lle corresponde[782].

De xeito semellante poderemos demostrar que EΘ, asemade, é apótoma, e que ΘN, a que lle corresponde.

Logo, unha e outra recta que son conmensurables coa recta enteira só en cadrado correspóndenlle á apótoma. O que, xustamente, foi demostrado que é imposible[783].

Logo, a AB ningunha outra recta lle corresponderá.

Logo, a AB só lle corresponde unha recta que é inconmensurable coa recta enteira en cadrado e que, xunto coa recta enteira, fai medial os seus cadrados a un tempo, e dúas veces o contido por elas, medial, e, ademais, os seus cadrados inconmensurables con dúas veces o contido por elas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[779] Proposición X, 22.
[780] Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
[781] Definición X, 1.3.
[782] Proposición X, 73.
[783] Proposición X, 79.

DEFINICIÓNS 3

1. Supostas unha expresable e unha apótoma, se o cadrado da recta enteira é maior que o da que lle corresponde no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude, e a recta enteira é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, chámese primeira apótoma.
2. Pero, se a que lle corresponde é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada e o cadrado da recta enteira é maior que o da que lle corresponde no cadrado dunha conmensurable con ela mesma, chámese segunda apótoma.
3. E, se ningunha das dúas é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada e, se o cadrado da recta enteira é maior que o da que lle corresponde no cadrado dunha conmensurable con aquela, chámese terceira apótoma.
4. Asemade, se o cadrado da recta enteira é maior que o da que lle corresponde no cadrado dunha inconmensurable con aquela, se ademais a recta enteira é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, chámese cuarta apótoma.
5. Pero, se o é a que lle corresponde, quinta.
6. E, se nin unha nin outra, sexta.

PROPOSICIÓN 85

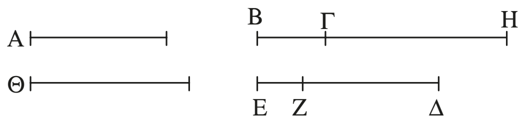
***Atopar a primeira apótoma*[784].**

Tómese a expresable A e sexa BH conmensurable en lonxitude con A; logo, tamén é expresable BH. E tómense dous números cadrados, ΔE e EZ, cuxa diferenza, ZΔ, non sexa cadrado; logo, tampouco EΔ garda con ΔZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[785].

---

784 Sexan m, n dous números naturais tal que $m^2 - n^2$ non é un cadrado. Se a é a recta expresable de partida e $q = n/m$, as rectas de lonxitude $ak(1 - \sqrt{1 - q^2})$ —sendo k un racional arbitrario— son primeiras apótomas. As de lonxitude $ak(1 + \sqrt{1 - q^2})$ son primeiras binomiais —Nota 371 (Proposición X, 48)—. Se tomamos a como a recta expresable de lonxitude 1, a primeira binomial e a primeira apótoma son as raíces da ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + k^2q^2 = 0$.

785 Véxase a Nota 175 (Lema 1, previo á Proposición X, 29).



E fágase que, como EΔ a ΔZ, así o cadrado de BH ó cadrado de HΓ[786]; logo, é conmensurable o cadrado de BH co de HΓ[787].

Pero o cadrado de BH é expresable; logo, tamén é expresable o de HΓ[788]; logo, tamén é expresable HΓ.

E, dado que EΔ non garda con ΔZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de BH garda co de HΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable BH con HΓ en lonxitude[789]. E ambas son expresables; logo, BH e HΓ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, BΓ é apótoma[790].

Digo agora que é tamén primeira.

Pois ben, sexa o cadrado de Θ aquilo no que é maior o cadrado de BH que o de HΓ[791].

E, dado que como EΔ é a ZΔ, así o cadrado de BH ó de HΓ, logo, por conversión, como ΔE a EZ, así o cadrado de HB ó de Θ[792].

Pero ΔE garda con EZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado —pois un e outro son cadrados—; logo, tamén o cadrado de HB garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é conmensurable BH con Θ en lonxitude[793].

E o cadrado de BH é maior que o de HΓ no cadrado de Θ; logo, o cadrado de BH é maior que o de HΓ no dunha conmensurable con aquela en lonxitude. E BH enteira é conmensurable

[786] Proposición X, 6. Corolario.
[787] Proposición X, 6.
[788] Proposición X, 11.
[789] Proposición X, 9.
[790] Proposición X, 73.
[791] Lema previo á Proposición X, 14.
[792] Proposición V, 19. Corolario.
[793] Proposición X, 9.

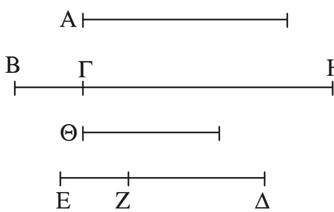
en lonxitude coa expresable tomada A. Logo, ΒΓ é primeira apótoma[794].

Logo, queda atopada a primeira apótoma ΒΓ; o que, xustamente, era preciso atopar.

PROPOSICIÓN 86

Atopar a segunda apótoma*[795]*.

Tómese a expresable A e sexa ΗΓ conmensurable con A en lonxitude. Logo, ΗΓ é expresable. E tómense dous números cadrados, ΔΕ e ΕΖ, cuxa diferenza, ΔΖ, non sexa cadrado[796]. E fágase que, como ΖΔ a ΔΕ, así o cadrado de ΓΗ ó cadrado de ΗΒ[797]; logo, é conmensurable o cadrado de ΓΗ co cadrado de ΗΒ[798].



Pero o cadrado de ΗΓ é expresable; logo, tamén é expresable o de ΗΒ[799]; logo, ΒΗ é expresable. E, dado que o cadrado de ΗΓ non garda co de ΗΒ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, ΓΗ é inconmensurable con ΗΒ en lonxi-

[794] Definición X, 3.1.

[795] Sexan m, n dous números naturais tal que $m^2 - n^2$ non é un cadrado. Se a é a recta expresable de partida e $q = n/m$, as rectas de lonxitude $a\,k\left(\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} - 1\right)$ —sendo k un racional arbitrario— son segundas apótomas. As de lonxitude $a\,k\left(\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} + 1\right)$ son segundas binomiais —Nota 384 (Proposición X, 49)—. Se tomamos a como a recta expresable de lonxitude 1, a segunda binomial e a segunda apótoma son as raíces da ecuación cuadrática $x^2 - 2k\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\,x + k^2\frac{q^2}{1-q^2} = 0.$

[796] Nota 175 (Lema 1, previo á Proposición X, 29).

[797] Proposición X, 6. Corolario.

[798] Proposición X, 6.

[799] Proposición X, 11.

tude[800]. E son ambas expresables; logo, ΓH e HB son expresables conmensurables só en cadrado; logo, BΓ é apótoma[801].

Digo agora que é tamén segunda.

Pois ben, sexa o cadrado de Θ aquilo no que é maior o cadrado de BH que o de HΓ[802].

Entón, dado que, como o cadrado de BH é ó de HΓ, así o número EΔ ó número ΔZ, logo, por conversión, como o cadrado de BH ó de Θ, así ΔE a EZ[803].

E tanto ΔE como EZ son cadrados; logo, o cadrado de BH garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é conmensurable BH con Θ en lonxitude[804].

E o cadrado de BH é maior que o de HΓ no cadrado de Θ; logo, o cadrado de BH é maior que o de HΓ no dunha conmensurable con aquela en lonxitude. E a que lle corresponde, ΓH, é conmensurable coa expresable tomada A. Logo, BΓ é segunda apótoma[805].

Logo, queda atopada a segunda apótoma BΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 87

Atopar a terceira apótoma[806].

Tómese a expresable A, tómense os tres números E, BΓ e ΓΔ que non gardan entre si a razón que garda un número cadrado

[800] Proposición X, 9.

[801] Proposición X, 73.

[802] Lema previo á Proposición X, 14.

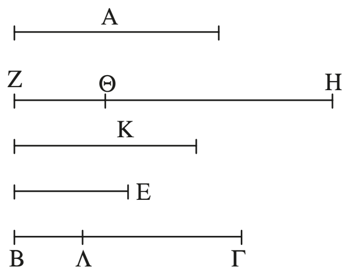
[803] Proposición V, 19. Corolario.

[804] Proposición X, 9.

[805] Definición X, 3.2.

[806] Sexan *m*, *n* dous números naturais tal que *(n + m)/n* é un cadrado racional e *(n + m)/m* non é un cadrado, *s* un terceiro número natural tal que *s/m* e s/(n + m) non son cadrados. Se *a* é a recta expresable de partida, $q^2 = n/(n + m)$ e $k = (n + m)/s$, as rectas de lonxitude $a\sqrt{k}(1 - \sqrt{1 - q^2})$ son terceiras apótomas. As de lonxitude $a\sqrt{k}(1 + \sqrt{1 - q^2})$ son terceiras binomiais —Nota 396 (Proposición X, 50)—. Se tomamos *a* como a recta expresable de lonxitude 1, a terceira binomial e a terceira apótoma son as raíces da ecuación cuadrática $x^2 - 2\sqrt{k}\ x + k\, q^2 = 0$.

cun número cadrado, ΓΒ garde con ΒΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, e fágase que, como Ε a ΒΓ, así o cadrado de Α ó cadrado de ΖΗ e, como ΒΓ a ΓΔ, así o cadrado de ΖΗ ó de ΗΘ[807].



Entón, dado que, como Ε é a ΒΓ, así o cadrado de Α ó cadrado de ΖΗ, logo, é conmensurable o cadrado de Α co cadrado de ΖΗ[808]. Pero o cadrado de Α é expresable. Logo, tamén é expresable o cadrado de ΖΗ; logo, ΖΗ é expresable[809].

E, dado que Ε non garda con ΒΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de Α garda co de ΖΗ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable Α con ΖΗ en lonxitude[810].

Asemade, dado que, como ΒΓ é a ΓΔ, así o cadrado de ΖΗ ó de ΗΘ, logo, o cadrado de ΖΗ é conmensurable co de ΗΘ. Pero o cadrado de ΖΗ é expresable; logo, tamén é expresable o de ΗΘ; logo, ΗΘ é expresable. E, dado que ΒΓ non garda con ΓΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de ΖΗ garda co de ΗΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable ΖΗ con ΗΘ en lonxitude.

807 Proposición X, 6. Corolario.
808 Proposición X, 6.
809 Definición X, 1.3.
810 Proposición X, 9.

E son ambas expresables; logo, ZH e HΘ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ZΘ é apótoma[811].

Digo agora que é tamén terceira.

Pois, dado que como E é a BΓ, así o cadrado de A ó de ZH, mentres que, como BΓ a ΓΔ, así o cadrado de ZH ó de ΘH, logo, por igualdade, como E é a ΓΔ, así o cadrado de A ó de ΘH[812].

Pero E non garda con ΓΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de A garda con de HΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable A con HΘ en lonxitude.

Logo, nin ZH nin HΘ son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada. Entón, sexa o cadrado de K aquilo no que é maior o cadrado de ZH que o de HΘ[813]. Entón, dado que, como BΓ é a ΓΔ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, por conversión, como BΓ a BΔ, así o cadrado de ZH ó de K[814].

Pero BΓ garda con BΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tamén o cadrado de ZH garda co de K a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é conmensurable ZH con K en lonxitude[815], e o cadrado de ZH é maior que o de HΘ no cadrado dunha conmensurable con aquela; e nin ZH nin HΘ son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada A; logo, ZΘ é terceira apótoma[816].

Logo, queda atopada a terceira apótoma ΘZ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

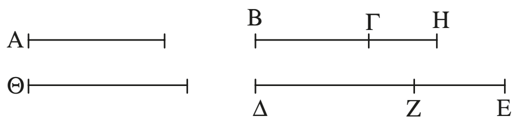
811 Proposición X, 73.
812 Proposición V, 22.
813 Lema previo á Proposición X, 14.
814 Proposición V, 19. Corolario.
815 Proposición X, 9.
816 Definición X, 3.3.

PROPOSICIÓN 88

Atopar a cuarta apótoma*[817]*.

Tómese a expresable A e sexa BH conmensurable en lonxitude con A. Logo, BH é expresable. E tómense os dous números ΔZ e ZE, de xeito que o total ΔE non garde nin con ΔZ nin con EZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[818].

E fágase que, como ΔE a EZ, así o cadrado de BH ó de HΓ[819]; logo, é conmensurable o cadrado de BH co de HΓ[820].



Pero o cadrado de BH é expresable; logo, tamén é expresable o de HΓ; logo, HΓ é expresable. E, dado que ΔE non garda con EZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de BH garda co de HΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable BH con HΓ en lonxitude[821].

E son ambas expresables; logo, BH e HΓ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, BΓ é apótoma[822].

Sexa, entón, o cadrado de Θ aquilo no que é maior o cadrado de BH que o de HΓ[823]. Entón, dado que, como ΔE é a EZ, así o

---

[817] Sexan m, n dous números naturais tal que $(n + m)/n$, $(n + m)/m$ non son cadrados racionais. Se a é a recta expresable de partida e $q = n/m$, as rectas de lonxitude $ak(1 - 1 / \sqrt{1 + q})$ —sendo k un racional arbitrario— son cuartas apótomas. As de lonxitude $ak(1 + 1 / \sqrt{1 + q})$ son cuartas binomiais —Nota 409 (Proposición X, 51)—. Se tomamos a como a recta expresable de lonxitude 1, a cuarta binomial e a cuarta apótoma son as raíces da ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + k^2 \dfrac{q}{1 + q} = 0$.

[818] Lema 2 previo á Proposición X, 29.

[819] Proposición X, 6. Corolario.

[820] Proposición X, 6.

[821] Proposición X, 9.

[822] Proposición X, 73. Algúns manuscritos presentan a continuación a frase que, consonte as demais proposicións desta serie, se esperaría: «Digo agora que é tamén cuarta». Heiberg atetízaa.

[823] Lema previo á Proposición X, 14.

cadrado de BH ó de HΓ, logo, tamén, por conversión, como EΔ é a ΔZ, así o cadrado de HB ó de Θ[824].

Pero EΔ non garda con ΔZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de HB garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable BH con Θ en lonxitude[825]. E o cadrado de BH é maior que o de HΓ no cadrado de Θ; logo, o cadrado de BH é maior que o de HΓ no dunha inconmensurable con aquela. E BH enteira é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada A. Logo, BΓ é cuarta apótoma[826].

Logo, queda atopada a cuarta apótoma BΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 89

Atopar a quinta apótoma[827]

Tómese a expresable A e sexa ΓH conmensurable en lonxitude con A. Logo, ΓH é expresable. E tómense os dous números ΔZ e ZE, de xeito que ΔE non garde, de novo, nin con ΔZ nin con ZE a razón que garda un número cadrado cun número cadrado[828].

E fágase que, como ZE a EΔ, así o cadrado de ΓH ó de HB[829].

Logo, é expresable tamén o cadrado de HB[830]; logo, tamén é expresable BH[831]. E, dado que como ΔE é a EZ, así o cadrado de BH ó de HΓ[832], mentres que ΔE non garda con EZ a razón que

824 Proposición V, 19. Corolario.

825 Proposición X, 9.

826 Definición X, 3.4.

827 Sexan m, n dous números naturais tal que $(m + n)/m$, $(m + n)/n$ non son cadrados racionais. Se a é a recta expresable de partida e $q = n/m$, as rectas de lonxitude $ak\,(\sqrt{1+q} - 1)$ —sendo k un racional arbitrario— son quintas apótomas. As de lonxitude $ak\,(\sqrt{1+q} + 1)$ son quintas binomiais —Nota 421 (Proposición X, 52)—. Se tomamos a como a recta expresable de lonxitude 1, a quinta binomial e a quinta apótoma son as raíces da ecuación cuadrática $x^2 - 2k\sqrt{1+q}\;x + k^2 q = 0$.

828 Lema 2 previo á Proposición X, 29.

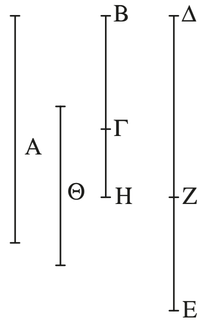
829 Proposición X, 6. Corolario.

830 Proposición X, 6.

831 Definición X, 1.3.

832 Proposición V, 7. Corolario.

garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de BH garda co de HΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable BH con HΓ en lonxitude[833].



E son ambas expresables; logo, BH e HΓ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, BΓ é apótoma[834].

Digo agora que é tamén quinta.

Pois ben, sexa o cadrado de Θ aquilo no que é maior o cadrado de BH que o de HΓ[835]. Entón, dado que, como o cadrado de BH é ó de HΓ, así ΔE a EZ, logo, por conversión, como EΔ a ΔZ, así o cadrado de BH ó de Θ[836].

Pero EΔ non garda con ΔZ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de BH garda co de Θ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable BH con Θ en lonxitude. E o cadrado de BH é maior que o de HΓ no cadrado de Θ; logo, o cadrado de HB é maior que o de HΓ no dunha inconmensurable con aquela en lonxitude. E a que lle corresponde, ΓH, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada A. Logo, BΓ é quinta apótoma[837].

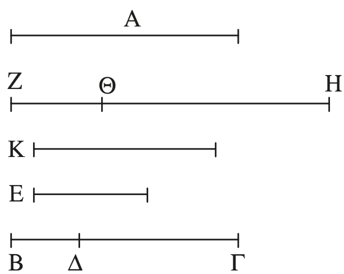
[833] Proposición X, 9.
[834] Proposición X, 73.
[835] Lema previo á Proposición X, 14.
[836] Proposición V, 19. Corolario.
[837] Definición X, 3.5.

Logo, queda atopada a quinta apótoma ΒΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 90

Atopar a sexta apótoma[838]

Tómese a expresable Α e os tres números Ε, ΒΓ e ΓΔ que non gardan entre si a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; e, ademais, ΓΒ non garde con ΒΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; e fágase que, como Ε a ΒΓ, así o cadrado de Α ó de ΖΗ, mentres que, como ΒΓ a ΓΔ, así o cadrado de ΖΗ ó de ΗΘ[839].



Entón, dado que, como Ε é a ΒΓ, así o cadrado de Α ó de ΖΗ, logo, o cadrado de Α é conmensurable co de ΖΗ[840]. Pero o cadrado de Α é expresable; logo, tamén é expresable o de ΖΗ; logo, tamén é expresable ΖΗ[841].

E, dado que Ε non garda con ΒΓ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de Α

[838] Sexan *m*, *n* dous números naturais tal que $(n + m)/n$, $(n + m)/m$ non son cadrados racionais, *s* un terceiro número natural que non é un cadrado e tal que s/m e $s/(n + m)$ non son cadrados. Se *a* é a recta expresable de partida, $k = (n + m)/s$ e $q = m/s$, as rectas de lonxitude $a(\sqrt{k} - \sqrt{q})$ son sextas apótomas. As de lonxitude $a(\sqrt{k} + \sqrt{q})$ son sextas binomiais —Nota 432 (Proposición X, 53)—. Se tomamos *a* como a recta expresable de lonxitude 1, a sexta binomial e a sexta apótoma son as raíces da ecuación cuadrática $x^2 - 2\sqrt{k}\ x + (k - q) = 0$.

[839] Proposición X, 6. Corolario.

[840] Proposición X, 6.

[841] Definición X, 1.3.

garda co de ZH a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable A con ZH en lonxitude[842].

Asemade, dado que, como ΒΓ é a ΓΔ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, o cadrado de ZH é conmensurable co de HΘ. Pero o cadrado de ZH é expresable; logo, é tamén expresable o cadrado de HΘ; logo, é tamén expresable HΘ. E, dado que ΒΓ non garda con ΓΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo, tampouco o cadrado de ZH garda co de HΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable ZH con HΘ en lonxitude.

E son ambas expresables; logo, ZH e HΘ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ZΘ é apótoma[843].

Digo agora que é tamén sexta.

Pois, dado que como E é a ΒΓ, así o cadrado de A ó de ZH, mentres que, como ΒΓ a ΓΔ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, por igualdade, como E é a ΓΔ, así o cadrado de A ó de HΘ[844].

Pero E non garda con ΓΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de A garda con de HΘ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable A con HΘ en lonxitude.

Logo, nin ZH nin HΘ son conmensurables en lonxitude coa expresable A. Entón, sexa o cadrado de K aquilo no que é maior o cadrado de ZH que o de HΘ[845]. Entón, dado que, como ΒΓ é a ΓΔ, así o cadrado de ZH ó de HΘ, logo, por conversión, como ΓΒ a ΒΔ, así o cadrado de ZH ó de K[846].

Pero ΓΒ non garda con ΒΔ a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, tampouco o cadrado de ZH garda co de K a razón que garda un número cadrado cun

842 Proposición X, 9.
843 Proposición X, 73.
844 Proposición V, 22.
845 Lema previo á Proposición X, 14.
846 Proposición V, 19. Corolario.

número cadrado; logo, é inconmensurable ZH con K en lonxitude[847]. E o cadrado de ZH é maior que o de HΘ no cadrado de K; logo, o cadrado de ZH é maior que o de HΘ no cadrado dunha inconmensurable con aquela; e nin ZH nin HΘ son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada A; logo, ZΘ é sexta apótoma[848].

Logo, queda atopada a sexta apótoma ZΘ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 91

***Se unha área está contida por expresable e primeira apótoma, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é apótoma*[849].**

Pois ben, sexa a área AB contida pola expresable AΓ e a primeira apótoma AΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é apótoma.

Pois, dado que AΔ é primeira apótoma, sexa ΔH a que lle corresponde[850]; logo, AH e HΔ son expresables conmensurables só en cadrado[851]. E AH enteira é conmensurable coa expresable tomada AΓ, e o cadrado de AH é maior que o de HΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude[852]; logo, se se aplica en AH un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ΔH, inferior nunha figura cadrada, divídea en conmensurables[853].

---

847 Proposición X, 9.

848 Definición X, 3.6.

849 Se consideramos unha recta primeira apótoma $ak\,(1 - \sqrt{1 - q^2})$ —Nota 784 (Proposición X, 85)— e unha expresable ak', entón

$$\sqrt{a^2\,(k'k)\,(1 - \sqrt{1 - q^2})} = a\sqrt{\left(\frac{k'k}{2}\right)(1 + q)} - a\sqrt{\left(\frac{k'k}{2}\right)(1 - q)}$$

é unha recta apótoma —Proposición X, 73—. A raíz cadrada dunha primeira apótoma é apótoma. Véxase a Nota 450 (Proposición X, 54).

850 Proposición X, 79.

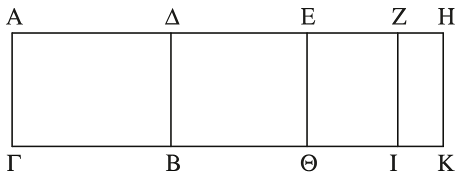
851 Proposición X, 73.

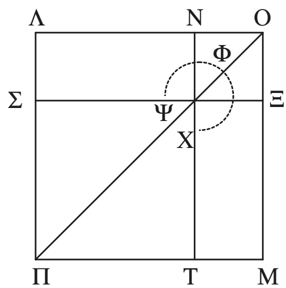
852 Definición X, 3.1.

853 Proposición X, 17.

Córtese ΔH á metade por E, aplíquese en AH un paralelogramo igual ó cadrado de EH, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por AZ e ZH; logo, é conmensurable AZ con ZH.

E lévense EΘ, ZI e HK polos puntos E, Z e H, paralelas a AΓ[854].





E, dado que é conmensurable AZ con ZH en lonxitude, logo, tamén AH é conmensurable tanto con AZ como con ZH en lonxitude[855].

Pero AH é conmensurable con AΓ; logo, tamén, tanto AZ como ZH son conmensurables con AΓ en lonxitude[856]. E AΓ é expresable; logo, tamén, tanto AZ como ZH son expresables; en consecuencia, tamén, tanto AI como ZK son expresables[857].

E, dado que é conmensurable ΔE con EH en lonxitude, logo, tamén, ΔH é conmensurable tanto con ΔE como con EH en lonxitude[858].

---

854 Proposición I, 31.
855 Proposición X, 15.
856 Proposición X, 12.
857 Proposición X, 19.
858 Proposición X, 15.

Pero ΔH é expresable e inconmensurable con AΓ en lonxitude; logo, tamén, tanto ΔE como EH son expresables e inconmensurables con AΓ en lonxitude[859]; logo, tanto ΔΘ como EK son mediais[860].

Póñase, agora, o cadrado ΛM igual a AI[861] e, por outro lado, quítese o cadrado NΞ, igual a ZK, co ángulo ΛOM común con el; logo, os cadrados ΛM e NΞ están ós lados da mesma diagonal[862]. Sexa a súa diagonal OP e remátese a figura.

Entón, dado que o paralelogramo de ángulos rectos contido por AZ e ZH é igual ó cadrado de EH, logo, como AZ é a EH, así EH a ZH[863]. Pero como AZ a EH, así AI a EK, mentres que, como EH a ZH, así é EK a KZ[864]; logo, entre AI e KZ, é media proporcional EK[865].

Pero tamén, entre ΛM e NΞ, é media proporcional MN —como foi demostrado nas anteriores[866]—, e AI é igual ó cadrado ΛM, mentres que KZ a NΞ; logo, tamén MN é igual a EK.

Pero EK é igual a ΔΘ, mentres que MN a ΛΞ[867]; logo, ΔK é igual ó gnomon ΨΦX[868] xunto con NΞ. Pero tamén é igual AK ó cadrado ΛM xunto con NΞ; logo, o restante AB é igual a ΣT. Pero ΣT é o cadrado de ΛN; logo, o cadrado de ΛN é igual a AB; logo, o cadrado de ΛN é equivalente a AB.

Digo agora que ΛN é apótoma.

Pois, dado que tanto AI como ZK son expresables e son iguais a ΛM e NΞ, logo, tamén, son expresables tanto ΛM como NΞ, é dicir, o cadrado tanto de ΛO como de ON; logo, tamén, tanto ΛO como ON son expresables[869].

---

[859] Proposición X, 13.
[860] Proposición X, 21 e Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).
[861] Proposición II, 14.
[862] Proposición VI, 26.
[863] Proposición VI, 17.
[864] Proposición VI, 1.
[865] Proposición V, 11.
[866] Lema previo á Proposición X, 54.
[867] Proposición I, 43.
[868] Definición II, 2.
[869] Definición X, 1.3.

Asemade, dado que ΔΘ é medial e é igual a ΛΞ, logo, é medial tamén ΛΞ. Entón, dado que ΛΞ é medial, mentres que ΝΞ, expresable, logo, é inconmensurable ΛΞ con ΝΞ; pero como ΛΞ a ΝΞ, así é ΛΟ a ΟΝ[870]; logo, é inconmensurable ΛΟ con ΟΝ en lonxitude[871]. E son ambas expresables; logo, ΛΟ e ΟΝ son expresables conmensurables só en cadrado.

Logo, ΛΝ é apótoma[872]. E o seu cadrado é equivalente á área AB; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é apótoma. Logo, se unha área está contida por expresable etc.

PROPOSICIÓN 92

***Se unha área está contida por expresable e segunda apótoma, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é primeira apótoma de medial*[873].**

Pois ben, sexa a área AB contida pola expresable ΑΓ e a segunda apótoma ΑΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é primeira apótoma de medial.

Pois ben, sexa ΔΗ a que corresponde a ΑΔ[874]; logo, ΑΗ e ΗΔ son expresables conmensurables só en cadrado, e a que lle corresponde, ΔΗ, é conmensurable coa expresable tomada ΑΓ, mentres que o cadrado de ΑΗ enteira é maior que o da que lle corresponde, ΗΔ, no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude[875]. Entón, dado que o cadrado de ΑΗ é maior que o de ΗΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela, logo, se se aplica en ΑΗ un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ΗΔ, inferior nunha figura cadrada, divídea en conmensurables[876].

---

870 Proposición VI, 1.

871 Proposición X, 11.

872 Proposición X, 73.

873 Se consideramos unha recta segunda apótoma $a\,k\,(\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}-1)$ —Nota 795 (Proposición X, 86)— e unha expresable *ak'*, entón

$$\sqrt{a^2\,(k'\,k)\,(\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}-1)} = a\sqrt{\left(\frac{k'\,k}{2}\right)\frac{1+q}{\sqrt{1-q^2}}} - a\sqrt{\left(\frac{k'\,k}{2}\right)\frac{1-q}{\sqrt{1-q^2}}}$$

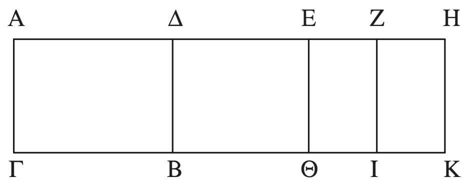
é unha recta primeira apótoma de medial —Proposición X, 74—. A raíz cadrada dunha segunda apótoma é primeira apótoma de medial. Véxase a Nota 468 (Proposición X, 55).

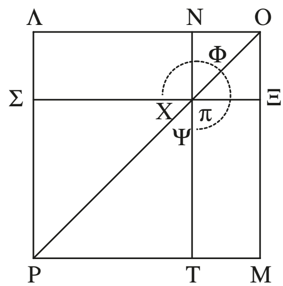
874 Proposición X, 79.

875 Definición X, 3.2.

876 Proposición X, 17.

Córtese, entón, ΔH á metade por E; aplíquese en AH un paralelogramo igual ó cadrado de EH, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por AZ e ZH; logo, é conmensurable AZ con ZH en lonxitude. Logo, tamén AH é conmensurable tanto con AZ como con ZH en lonxitude[877].





Pero AH é expresable e inconmensurable con AΓ en lonxitude; logo, tamén, tanto AZ como ZH son expresables e inconmensurables con AΓ en lonxitude[878]; logo, tanto AI como ZK son mediais[879].

Asemade, dado que é conmensurable ΔE con EH, logo, tamén ΔH é conmensurable tanto con ΔE como con EH[880].

Pero ΔH é conmensurable con AΓ en lonxitude[881]. Logo, tanto ΔΘ como EK son expresables[882].

Construúase, entón, o cadrado ΛM igual a AI[883] e, por outro lado, igual a ZK, quítese NΞ que está ós lados do mesmo ángulo,

877 Proposición X, 15.
878 Proposición X, 13.
879 Proposición X, 21.
880 Proposición X, 15.
881 Proposición X, 12. Algúns manuscritos presentan aquí esta frase: «Logo, tanto ΔE como EH son expresables e conmensurables en lonxitude con AΓ» ; Heiberg atetízaa.
882 Proposición X, 19.
883 Proposición II, 14.

ΛOM, que ΛM; logo, os cadrados ΛM e NΞ están ós lados da mesma diagonal[884]. Sexa a súa diagonal OP e remátese a figura.

Entón, dado que AI e ZK son mediais e son iguais ós cadrados de ΛO e ON, tamén os cadrados de ΛO e ON son mediais; logo, tamén ΛO e ON son mediais conmensurables só en cadrado[885].

E, dado que o contido por AZ e ZH é igual ó cadrado de EH, logo, como AZ é a EH, así EH a ZH[886]; pero como AZ a EH, así AI a EK; pero como EH a ZH, así é EK a ZK[887]; logo, entre AI e ZK, é media proporcional EK[888].

Pero tamén, entre os cadrados ΛM e NΞ, é media proporcional MN[889]; e AI é igual a ΛM, mentres que ZK a NΞ; logo, tamén MN é igual a EK.

Pero ΔΘ é igual a EK, mentres que ΛΞ, igual a MN[890]; logo, ΔK enteiro é igual ó gnomon ΨΦX xunto con NΞ.

Entón, dado que AK enteiro é igual a ΛM e NΞ[891], parte do cal, ΔK, é igual ó gnomon ΨΦX xunto con NΞ, logo, o restante AB é igual a TΣ. Pero TΣ é o cadrado de ΛN; logo, o cadrado de ΛN é igual á área AB; logo, o cadrado de ΛN é equivalente a AB.

Digo agora que ΛN é primeira apótoma de medial.

Pois, dado que EK é expresable e é igual a ΛΞ, logo, tamén é expresable ΛΞ, é dicir, o contido por ΛO e ON. Pero foi demostrado que NΞ é medial; logo, é inconmensurable ΛΞ con

---

884 Proposición VI, 26.

885 Hai un erro nesta conclusión; debería dicir: «ΛO e ON son conmensurables en cadrado», en vez de dicir, «conmensurables só en cadrado». En efecto, AZ é conmensurable en lonxitude con ZH, logo AI é conmensurable con ZK e, polo tanto, ΛM e NΞ son conmensurables; finalmente, como ΛM é o cadrado de ΛO e NΞ, o cadrado de NO, ΛO e ON son conmensurables en cadrado. De feito, case ó final da proposición, proba que ΛO e ON son inconmensurables en lonxitude, co que se completa a proba de que son conmensurables «só en cadrado». A transmisión do texto deixa constancia desta falla e das tentativas de solución. Así, os manuscritos teoninos presentan «e conmensurables entre si» referido a AI e ZK.

886 Proposición VI, 17.

887 Proposición VI, 1.

888 Proposición V, 11.

889 Lema previo á Proposición X, 54.

890 Proposición I, 43.

891 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

ΝΞ; pero como ΛΞ a ΝΞ, así é ΛΟ a ΟΝ[892]; logo, ΛΟ e ΟΝ son inconmensurables en lonxitude[893].

Logo, ΛΟ e ΟΝ son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen expresable.

Logo, ΛΝ é primeira apótoma de medial[894]. E, o seu cadrado é equivalente á área ΑΒ; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΒ é primeira apótoma de medial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 93

***Se unha área está contida por expresable e terceira apótoma, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é segunda apótoma de medial*[895].**

Pois ben, sexa a área ΑΒ contida pola expresable ΑΓ e a terceira apótoma ΑΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área ΑΒ é segunda apótoma de medial.

Pois ben, sexa ΔΗ a que corresponde a ΑΔ[896]; logo, ΑΗ e ΗΔ son expresables conmensurables só en cadrado, e nin ΑΗ nin ΗΔ son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada ΑΓ, mentres que o cadrado de ΑΗ enteira é maior que o da que lle corresponde, ΔΗ, no cadrado dunha conmensurable con aquela[897]. Entón, dado que o cadrado de ΑΗ é maior que o de ΗΔ no cadrado dunha conmensurable con aquela, logo, se se aplica en ΑΗ un paralelogramo igual á cuarta parte

[892] Proposición VI, 1.

[893] Proposición X, 11.

[894] Proposición X, 74.

[895] Se consideramos unha recta terceira apótoma $a\sqrt{k}\,(1-\sqrt{1-q^2})$ —Nota 806 (Proposición X, 87)— e unha expresable *ak'*, entón

$$\sqrt{a^2\,(k'\sqrt{k}\,(1-\sqrt{1-q^2})} = a\sqrt{\frac{k'\sqrt{k}}{2}(1+q)} - a\sqrt{\frac{k'\sqrt{k}}{2}(1-q)}$$

é unha recta segunda apótoma de medial —Proposición X, 75—. A raíz cadrada dunha terceira apótoma é segunda apótoma de medial. Véxase a Nota 486 (Proposición X, 56).

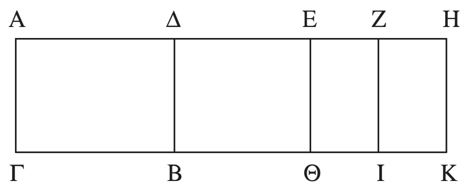
[896] Proposición X, 79.

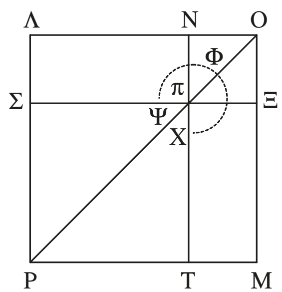
[897] Definición X, 3.3.

do cadrado de ΔH, inferior nunha figura cadrada, dividiraa en conmensurables[898].

Córtese, entón, ΔH á metade por E, aplíquese en AH un paralelogramo igual ó cadrado de EH, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por AZ e ZH.

E, polos puntos E, Z e H, lévense EΘ, ZI e HK paralelas a AΓ[899]; logo, son conmensurables AZ e ZH. Logo, tamén é conmensurable AI con ZK[900].





E, dado que AZ e ZH son conmensurables en lonxitude, logo, tamén, AH é conmensurable tanto con AZ como con ZH en lonxitude[901].

Pero AH é expresable e inconmensurable con AΓ en lonxitude; en consecuencia, tamén AZ e ZH[902]. Logo, tanto AI como ZK son mediais[903].

[898] Proposición X, 17.
[899] Proposición I, 31.
[900] Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
[901] Proposición X, 15.
[902] Proposición X, 13.
[903] Proposición X, 21.

Asemade, dado que é conmensurable ΔE con EH en lonxitude, logo, tamén ΔH é conmensurable tanto con ΔE como con EH en lonxitude[904].

Pero HΔ é expresable e inconmensurable con AΓ en lonxitude[905]; logo, tamén, tanto ΔE como EH son expresables e inconmensurables con AΓ en lonxitude; logo, tanto ΔΘ como EK son mediais[906].

E, dado que AH e HΔ son conmensurables só en cadrado, logo, é inconmensurable AH con HΔ en lonxitude. Pero AH é conmensurable con AZ en lonxitude, mentres que ΔH con EH; logo, é inconmensurable AZ con EH en lonxitude[907]. Pero como AZ a EH, así é AI a EK; logo, é inconmensurable AI con EK[908].

Constrúase, entón, o cadrado ΛM igual a AI[909] e, por outro lado, igual a ZK, quítese NΞ, que está ós lados do mesmo ángulo que ΛM; logo, ΛM e NΞ están ós lados da mesma diagonal[910]. Sexa a súa diagonal OP e remátese a figura.

Entón, dado que o contido por AZ e ZH é igual ó cadrado de EH, logo, como AZ é a EH, así EH a ZH[911]. Pero como AZ a EH, así AI a EK; por outra parte, como EH a ZH, así é EK a ZK[912]; logo, tamén, como AI a EK, así EK a ZK[913]; logo, entre AI e ZK, é media proporcional EK.

Pero tamén, entre os cadrados ΛM e NΞ, é media proporcional MN[914]; e AI é igual a ΛM, mentres que ZK a NΞ; logo, tamén EK é igual a MN.

---

904 Proposición X, 15.
905 Proposición X, 13.
906 Proposición X, 21.
907 Proposición X, 13.
908 Proposición X, 11.
909 Proposición II, 14.
910 Proposición VI, 26.
911 Proposición VI, 17.
912 Proposición VI, 1.
913 Proposición V, 11.
914 Lema previo á Proposición X, 54.

Pero MN é igual a ΛΞ[915], mentres que EK, igual a ΔΘ; logo, ΔK enteiro é igual ó gnomon ΨΦX xunto con NΞ.

E tamén é igual AK a ΛM e NΞ[916]; logo, o restante, AB, é igual a ΣT, é dicir, ó cadrado de ΛN; logo, o cadrado de ΛN é equivalente á área AB.

Digo que ΛN é segunda apótoma de medial.

Pois, dado que foi demostrado que AI e ZK son mediais e iguais ós cadrados de ΛO e ON, logo, tamén, tanto o cadrado de ΛO como o de ON son mediais; logo, son mediais tanto ΛO como ON[917].

E, dado que é conmensurable AI con ZK[918], logo, é tamén conmensurable o cadrado de ΛO co de ON.

Asemade, dado que foi demostrado que é inconmensurable AI con EK, logo, é tamén inconmensurable ΛM con MN, é dicir, o cadrado de ΛO co contido por ΛO e ON; en consecuencia, tamén ΛO é inconmensurable con ON[919]; logo, ΛO e ON son mediais conmensurables só en cadrado.

Digo agora que tamén conteñen medial.

Pois, dado que foi demostrado que EK é medial e igual ó contido por ΛO e ON, logo, tamén é medial o contido por ΛO e ON; en consecuencia, ΛO e ON son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen medial.

Logo, ΛN é segunda apótoma de medial[920]. E o seu cadrado é equivalente á área AB; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é segunda apótoma de medial; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

915 Proposición I, 43.

916 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

917 Véxase a Nota 130 (Proposición X, 23. Corolario).

918 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

919 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

920 Proposición X, 75.

PROPOSICIÓN 94

Se unha área está contida por expresable e cuarta apótoma, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é menor*[921]*.

Pois ben, sexa a área AB contida pola expresable ΑΓ e a cuarta apótoma ΑΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é menor.

Pois ben, sexa ΔΗ a que corresponde a ΑΔ; logo, AH e HΔ son expresables conmensurables só en cadrado, e AH é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΑΓ, mentres que o cadrado de AH enteira é maior que o da que lle corresponde, ΔΗ, no cadrado dunha inconmensurable en lonxitude con aquela[922]. Entón, dado que o cadrado de AH é maior que o de HΔ no cadrado dunha inconmensurable en lonxitude con aquela, logo, se se aplica en AH un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ΔΗ, inferior nunha figura cadrada, dividiraa en inconmensurables[923].

Córtese, entón, ΔΗ á metade por E, aplíquese en AH un paralelogramo igual ó cadrado de EH, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por AZ e ZH; logo, AZ é inconmensurable con ZH.

E, polos puntos E, Z e H, lévense EΘ, ZI e HK paralelas a ΑΓ[924] e ΒΔ; entón, dado que AH é expresable e conmensurable en lonxitude con ΑΓ, logo, AK enteiro é expresable[925].

---

[921] Se consideramos unha recta cuarta apótoma $a\,k\,(1 - 1/\sqrt{1+q})$ —Nota 817 (Proposición X, 88)— e unha expresable ak', entón

$$\sqrt{a^2\,kk'\,(1 - 1/\sqrt{1+q})} = a\sqrt{\frac{k'k}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{q}{1+q}}\right)} - a\sqrt{\frac{k'k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{q}{1+q}}\right)}$$

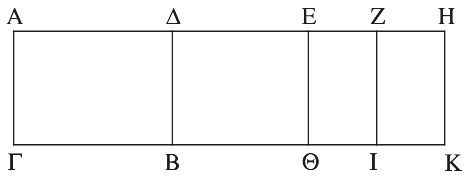
é unha recta menor —Proposición X, 76—. A raíz cadrada dunha cuarta apótoma é menor. Véxase a Nota 492 (Proposición X, 57).

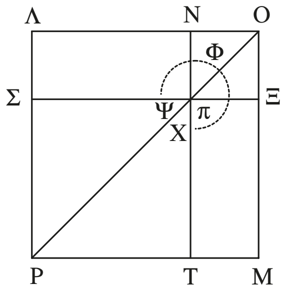
[922] Definición X, 3.4.

[923] Proposición X, 18.

[924] Proposición I, 31.

[925] Proposición X, 19.





Asemade, dado que é inconmensurable en lonxitude ΔΗ con ΑΓ e son ambas expresables, logo, ΔΚ é medial[926].

Asemade, dado que é inconmensurable en lonxitude ΑΖ con ΖΗ, logo, é tamén inconmensurable ΑΙ con ΖΚ[927].

Constrúase, entón, o cadrado ΛΜ igual a ΑΙ[928] e, por outro lado, igual a ΖΚ, quítese ΝΞ, que está ós lados do mesmo ángulo, ΛΟΜ; logo, os cadrados ΛΜ e ΝΞ están ós lados da mesma diagonal[929].

Sexa a súa diagonal ΟΡ e remátese a figura.

Entón, dado que o contido por ΑΖ e ΖΗ é igual ó cadrado de ΕΗ, logo, proporcionalmente, como ΑΖ é a ΕΗ, así ΕΗ a ΖΗ[930]. Pero, como ΑΖ a ΕΗ, así é ΑΙ a ΕΚ e, por outra parte, como ΕΗ a ΖΗ, así é ΕΚ a ΖΚ[931]; logo, entre ΑΙ e ΖΚ, é media proporcional ΕΚ[932].

Pero, tamén, entre os cadrados ΛΜ e ΝΞ, é media proporcional ΜΝ[933]; e ΑΙ é igual a ΛΜ, mentres que ΖΚ a ΝΞ; logo, tamén ΕΚ é igual a ΜΝ.

926 Proposición X, 21.
927 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
928 Proposición II, 14.
929 Proposición IV, 26.
930 Proposición VI, 17.
931 Proposición VI, 1.
932 Proposición V, 11.
933 Lema previo á Proposición X, 54.

Pero ΔΘ é igual a EK, mentres que ΛΞ, igual a MN[934]; logo, ΔK enteiro é igual ó gnomon ΨΦX[935] xunto con NΞ. Entón, dado que AK enteiro é igual ó cadrado ΛM xunto con NΞ, dos cales ΔK é igual ó gnomon ΨΦX xunto co cadrado NΞ, logo, o restante, AB, é igual a ΣT, é dicir, ó cadrado de ΛN; logo, o cadrado de ΛN é equivalente á área AB.

Digo que ΛN é unha non expresable, a chamada menor.

Pois, dado que AK é expresable e é igual ó cadrado de ΛO xunto co de ON, logo, tamén, a suma dos cadrados de ΛO e ON é expresable. Asemade, dado que ΔK é medial e que ΔK é igual a dúas veces o contido por ΛO e ON, logo, dúas veces o contido por ΛO e ON é medial.

E, dado que foi demostrado que é inconmensurable AI con ZK, logo, tamén é inconmensurable o cadrado de ΛO co cadrado de ON; logo, ΛO e ON son inconmensurables en cadrado que fan expresable a suma dos seus cadrados, e dúas veces o contido por elas, medial.

Logo, ΛN é unha non expresable, a chamada menor[936]; e o seu cadrado é equivalente á área AB; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 95

Se unha área está contida por expresable e quinta apótoma, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é a que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira[937].

Pois ben, sexa a área AB contida pola expresable AΓ e a quinta apótoma AΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equiva-

---

[934] Proposición I, 43.

[935] Definición II, 2.

[936] Proposición X, 76.

[937] Se consideramos unha recta quinta apótoma $ak\ (\sqrt{1+q}-1)$ —Nota 827 (Proposición X, 89)— e unha expresable *ak',* entón

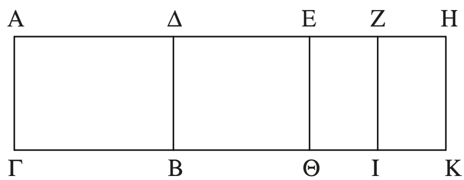
$$\sqrt{a^2\, kk'\ (\sqrt{1+q}-1)}\ =\ a\sqrt{\frac{k'k}{2}(\sqrt{1+q}+\sqrt{q})}\ -\ a\sqrt{\frac{k'k}{2}(\sqrt{1+q}-\sqrt{q})}$$

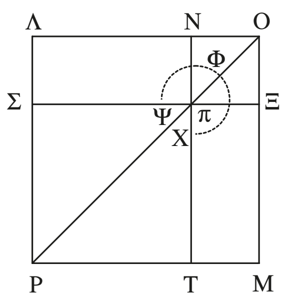
é unha recta que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira —Proposición X, 77—. A raíz cadrada dunha quinta apótoma é recta que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira. Véxase a Nota 501 (Proposición X, 58).

lente á área AB é a que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira.

Pois ben, sexa ΔH a que corresponde a AΔ[938]; logo, AH e HΔ son expresables conmensurables só en cadrado e a que lle corresponde, HΔ, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada AΓ, mentres que o cadrado de AH enteira é maior que o da que lle corresponde, ΔH, no cadrado dunha inconmensurable con aquela[939]. Logo, se se aplica en AH un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ΔH, inferior nunha figura cadrada, dividiraa en inconmensurables[940].

Córtese, entón, ΔH á metade por E e aplíquese en AH un paralelogramo igual ó cadrado de EH, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por AZ e ZH.





Logo, é inconmensurable en lonxitude AZ con ZH; e, dado que é inconmensurable en lonxitude AH con ΓA e son ambas expresables, logo, AK é medial[941].

[938] Proposición X, 79.
[939] Definición X, 3.5.
[940] Proposición X, 18.
[941] Proposición X, 21.

Asemade, dado que ΔH é expresable e conmensurable en lonxitude con ΑΓ, ΔK é expresable[942].

Constrúase, entón, o cadrado ΛM igual a AI[943] e, por outro lado, igual a ZK, quítese o cadrado NΞ, que está ós lados do mesmo ángulo, ΛOM; logo, os cadrados ΛM e NΞ están ós lados da mesma diagonal[944].

Sexa a súa diagonal OP e remátese a figura.

De xeito semellante poderemos demostrar que o cadrado de ΛN é equivalente á área AB[945].

Digo que ΛN é a que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira.

Pois, dado que foi demostrado que AK é medial e igual ó cadrado de ΛO xunto co de ON, logo, a suma dos cadrados de ΛO e de ON é medial.

Asemade, dado que ΔK é expresable e é igual a dúas veces o contido por ΛO e ON, tamén isto mesmo é expresable.

E, dado que é inconmensurable AI con ZK[946], logo, é tamén inconmensurable o cadrado de ΛO co de ON.

Logo, son inconmensurables en cadrado ΛO e ON que fan a suma dos seus cadrados medial, mentres que dúas veces o contido por elas, expresable.

Logo, a restante, ΛN, é unha non expresable, a chamada recta que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira[947].

E o seu cadrado é equivalente á área AB; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é recta que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

942 Proposición X, 19.

943 Proposición II, 14.

944 Proposición IV, 26.

945 Véxanse as proposicións X, 91 a X, 94 nas que proba que o cadrado de ΛN é equivalente á área AB, que AK é igual ós cadrados de ΛO e ON e que ΔK é igual a dúas veces o rectángulo contido por OΛ e ON.

946 Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.

947 Proposición X, 77.

PROPOSICIÓN 96

Se unha área está contida por expresable e sexta apótoma, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira*[948]*.

Pois ben, sexa a área AB contida pola expresable ΑΓ e a sexta apótoma ΑΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área AB é a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira.

Pois ben, sexa ΔΗ a que corresponde a ΑΔ[949]; logo, ΑΗ e ΗΔ son expresables conmensurables só en cadrado e ningunha delas é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΑΓ, mentres que o cadrado de ΑΗ enteira é maior que o da que lle corresponde, ΔΗ, no cadrado dunha inconmensurable con aquela en lonxitude[950]. Entón, dado que o cadrado de ΑΗ é maior que o de ΗΔ no cadrado dunha inconmensurable con aquela en lonxitude, logo, se se aplica en ΑΗ un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ΔΗ, inferior nunha figura cadrada, dividiraa en inconmensurables[951].

Córtese, entón, ΔΗ á metade por Ε, aplíquese en ΑΗ un paralelogramo igual ó cadrado de ΕΗ, inferior nunha figura cadrada, e sexa o contido por ΑΖ e ΖΗ.

Logo, é inconmensurable ΑΖ con ΖΗ en lonxitude; pero como ΑΖ a ΖΗ, así é ΑΙ a ΖΚ[952]; logo, é inconmensurable ΑΙ con ΖΚ[953].

---

948 Se consideramos unha recta sexta apótoma $a(\sqrt{k} - \sqrt{q})$ —Nota 838 (Proposición X, 90)— e unha expresable *ak'*, entón

$$\sqrt{a^2 k'(\sqrt{k} - \sqrt{q})} = a\sqrt{\frac{k'}{2}(\sqrt{k} + \sqrt{k-q})} - a\sqrt{\frac{k'}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-q})}$$

é unha recta que, xunto con área medial, fai medial a área enteira —Proposición X, 78—. A raíz cadrada dunha sexta apótoma é unha recta que, xunto con área medial, fai medial a área enteira. Véxase a Nota 513 (Proposición X, 59).

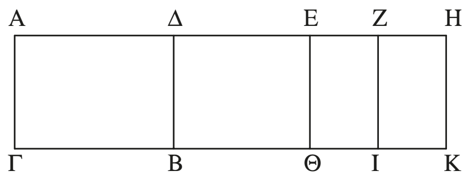
949 Proposición X, 79.

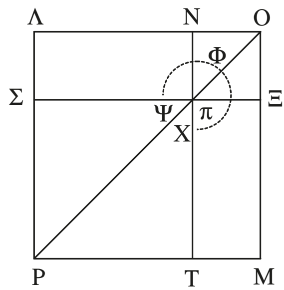
950 Definición X, 3.6.

951 Proposición X, 18.

952 Proposición VI, 1.

953 Proposición X, 11.





E, dado que ΑΗ e ΑΓ son expresables conmensurables só en cadrado, ΑΚ é medial[954]. Asemade, dado que ΑΓ e ΔΗ son expresables e inconmensurables en lonxitude, tamén ΔΚ é medial.

Entón, dado que ΑΗ e ΗΔ son conmensurables só en cadrado, logo, é inconmensurable ΑΗ con ΗΔ en lonxitude. Pero como ΑΗ a ΗΔ, así é ΑΚ a ΚΔ; logo, é inconmensurable ΑΚ con ΚΔ.

Constrúase, entón, o cadrado ΛΜ igual a ΑΙ e, por outro lado, igual a ΖΚ, quítese ΝΞ, que está ós lados do mesmo ángulo; logo, os cadrados ΛΜ e ΝΞ están ós lados da mesma diagonal[955].

Sexa a súa diagonal ΟΡ e remátese a figura.

De xeito semellante ós de arriba poderemos demostrar que o cadrado de ΛΝ é equivalente á área ΑΒ[956].

Digo que ΛΝ é a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira.

Pois, dado que foi demostrado que ΑΚ é medial e igual ó cadrado de ΛΟ xunto co de ΟΝ, logo, a suma dos cadrados de ΛΟ e de ΟΝ é medial.

954 Proposición X, 21.
955 Proposición X, 26.
956 Véxase a Nota 945 (Proposición X, 95).

Asemade, dado que foi demostrado que ΔK é medial e igual a dúas veces o contido por ΛO e ON, tamén, dúas veces o contido por ΛO e ON é medial.

E, dado que foi demostrado que é inconmensurable AK con ΔK, é tamén inconmensurable o cadrado de ΛO xunto co de ON con dúas veces o contido por ΛO e ON.

E, dado que é inconmensurable AI con ZK, logo é tamén inconmensurable o cadrado de ΛO co de ON; logo, ΛO e ON son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, e dúas veces o contido por elas, medial, e, ademais, os seus cadrados, inconmensurables con dúas veces o contido por elas.

Logo, ΛN, é unha non expresable, a chamada recta que, xunto con área medial, fai medial a área enteira[957].

E o seu cadrado é equivalente á área AB; logo, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é recta que, xunto con área medial, fai medial a área enteira; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 97

O cadrado de apótoma aplicado en expresable fai en anchura primeira apótoma.

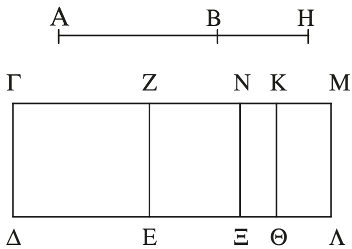
Sexa a apótoma AB, a expresable ΓΔ e, en ΓΔ, aplíquese o paralelogramo ΓE igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΓZ; digo que ΓZ é primeira apótoma.

Pois ben, sexa BH a que corresponde a AB[958]; logo, AH e HB son expresables conmensurables só en cadrado[959]. E, en ΓΔ, aplíquese ΓΘ, igual ó cadrado de AH[960], e KΛ igual ó cadrado de BH.

Logo, ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, parte do cal, ΓE, é igual ó cadrado de AB, logo, o restante, ZΛ, é igual a dúas veces o contido por AH e HB[961].

957 Proposición X, 78.
958 Proposición X, 79.
959 Proposición X, 73.
960 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
961 Proposición II, 7.

Córtese ZM á metade polo punto N[962] e, por N, lévese NΞ paralela a ΓΔ[963]; logo, tanto ZΞ como ΛN son iguais ó contido por AH e HB.



E, dado que os cadrados de AH e HB son expresables e ΔM igual ós cadrados de AH e HB, logo, ΔM é expresable. E está aplicado na expresable ΓΔ, facendo en anchura ΓM; logo, ΓM é expresable e conmensurable con ΓΔ en lonxitude[964].

Asemade, dado que dúas veces o contido por AH e HB é medial[965] e que ZΛ igual a dúas veces o contido por AH e HB, logo, ZΛ é medial. E está aplicado na expresable ΓΔ, facendo en anchura ZM; logo, ZM é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[966].

E, dado que os cadrados de AH e HB son expresables e dúas veces o contido por AH e HB, medial, logo, é inconmensurable o cadrado de AH xunto co de HB con dúas veces o contido por AH e HB.

E ΓΛ é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, mentres que ZΛ, a dúas veces o contido por AH e HB; logo, é inconmensurable ΔM con ZΛ. Pero como ΔM a ZΛ, así é ΓM a ZM[967]. Logo, é inconmensurable ΓM con ZM en lonxitude[968]. E son ambas expresables; logo, ΓM e MZ son expresables conmensurables só en cadrado.

[962] Proposición I, 10.
[963] Proposición I, 31.
[964] Proposición X, 20.
[965] Proposición X, 21 e Proposición X, 23. Corolario.
[966] Proposición X, 22.
[967] Proposición VI, 1.
[968] Proposición X, 11.

Logo, ΓΖ é apótoma[969].

Digo agora que é tamén primeira.

Pois, dado que, entre os cadrados de AH e HB, o contido por AH e HB é media proporcional[970] e que ΓΘ é igual ó cadrado de AH, mentres que ΚΛ, igual ó cadrado de BH, e ΝΛ ó contido por AH e HB, logo, tamén, entre ΓΘ e ΚΛ, é media proporcional ΝΛ; logo, como ΓΘ é a ΝΛ, así ΝΛ a ΚΛ. Pero como ΓΘ a ΝΛ, así é ΓΚ a ΝΜ; pero como ΝΛ a ΚΛ, así é ΝΜ a ΚΜ; logo, o contido por ΓΚ e ΚΜ é igual ó cadrado de ΝΜ[971], é dicir, á cuarta parte do cadrado de ΖΜ.

E, dado que é conmensurable o cadrado de AH co de HB, é conmensurable tamén ΓΘ con ΚΛ. Pero como ΓΘ a ΚΛ, así ΓΚ a ΚΜ; logo, é conmensurable ΓΚ con ΚΜ[972].

Entón, dado que ΓΜ e ΜΖ son dúas rectas desiguais, que o contido por ΓΚ e ΚΜ, igual á cuarta parte do cadrado de ΖΜ, inferior nunha figura cadrada, está aplicado en ΓΜ, e que ΓΚ é conmensurable con ΚΜ, logo, o cadrado de ΓΜ é maior que o de ΜΖ no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude[973].

E ΓΜ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΓΔ; logo, ΓΖ é primeira apótoma[974].

Logo, o cadrado de apótoma aplicado en expresable fai en anchura primeira apótoma; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 98

O cadrado de primeira apótoma de medial aplicado en expresable fai en anchura segunda apótoma

Sexa AB a primeira apótoma de medial, a expresable ΓΔ e, en ΓΔ, aplíquese ΓΕ, igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΓΖ; digo que ΓΖ é segunda apótoma.

---

969 Proposición X, 73.

970 Lema previo á Proposición X, 54.

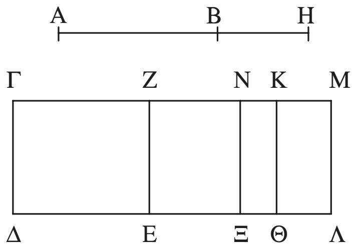
971 Proposición VI, 17.

972 Proposición X, 11.

973 Proposición X, 17.

974 Definición X, 3.1.

Pois ben, sexa BH a que corresponde a AB[975]; logo, AH e HB son mediais conmensurables só en cadrado que conteñen expresable[976]. E, en ΓΔ, aplíquese ΓΘ, igual ó cadrado de AH[977], facendo en anchura ΓK e, por outro lado, KΛ igual ó cadrado de HB, facendo en anchura KM.



Logo, ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB; logo, tamén ΓΛ é medial[978]. E está aplicado na expresable ΓΔ, facendo en anchura ΓM; logo ΓM é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[979].

E, dado que ΓΛ é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, parte do cal, o cadrado de AB, é igual a ΓE, logo, o restante, dúas veces o contido por AH e HB, é igual a ZΛ[980].

Pero dúas veces o contido por AH e HB é expresable; logo, ZΛ é expresable. E está aplicado na expresable ZE, facendo en anchura ZM; logo, ZM é expresable e conmensurable con ΓΔ en lonxitude[981].

Entón, dado que o cadrado de AH xunto co de HB, é dicir ΓΛ, é medial, mentres que dúas veces o contido por AH e HB, é dicir, ZΛ, expresable, logo, é inconmensurable ΓΛ con ZΛ[982].

975 Proposición X, 79.
976 Proposición X, 74.
977 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
978 Proposición X, 15 e Proposición X, 23. Corolario.
979 Proposición X, 22.
980 Proposición II, 7.
981 Proposición X, 20.
982 Proposición X, 23. Corolario.

Pero, como ΓΛ a ΖΛ, así é ΓΜ a ΖΜ[983]; logo, é inconmensurable ΓΜ con ΖΜ en lonxitude[984].

E son ambas expresables; logo, ΓΜ e ΜΖ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΓΖ é apótoma[985].

Digo agora que é tamén segunda.

Pois ben, córtese ΖΜ á metade por Ν[986] e lévese ΝΞ paralela a ΓΔ por Ν[987]; logo, tanto ΖΞ como ΝΛ son iguais ó contido por ΑΗ e ΗΒ.

E, dado que, entre os cadrados de ΑΗ e ΗΒ, o contido por ΑΗ e ΗΒ é media proporcional[988] e que o cadrado de ΑΗ é igual a ΓΘ, mentres que o contido por ΑΗ e ΗΒ a ΝΛ, e o cadrado de ΒΗ a ΚΛ, logo, tamén, entre ΓΘ e ΚΛ, é media proporcional ΝΛ; logo, como ΓΘ é a ΝΛ, así ΝΛ a ΚΛ. Pero como ΓΘ a ΝΛ, así é ΓΚ a ΝΜ e, como ΝΛ a ΚΛ, así é ΝΜ a ΜΚ; logo, como ΓΚ a ΝΜ, así é ΝΜ a ΚΜ[989]; logo, o contido por ΓΚ e ΚΜ é igual ó cadrado de ΝΜ[990], é dicir, á cuarta parte do cadrado de ΖΜ[991].

Entón, dado que ΓΜ e ΜΖ son dúas rectas desiguais, que o contido por ΓΚ e ΚΜ, igual á cuarta parte do cadrado de ΜΖ, inferior nunha figura cadrada, está aplicado na maior ΓΜ e que a divide en conmensurables, logo, o cadrado de ΓΜ é maior que o de ΜΖ no cadrado dunha conmensurable con aquela en lonxitude[992]. E a que lle corresponde, ΖΜ, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΓΔ; logo, ΓΖ é segunda apótoma[993].

---

983 Proposición VI, 1.

984 Proposición X, 11.

985 Proposición X, 73.

986 Proposición I, 10.

987 Proposición I, 31.

988 Lema previo á Proposición X, 54.

989 Proposición V, 11.

990 Proposición VI, 17.

991 Algúns manuscritos presentan aquí esta frase: «E, dado que é conmensurable o cadrado de ΑΗ co de ΗΒ, é conmensurable tamén ΓΘ con ΚΛ, é dicir, ΓΚ con ΚΜ.». Heiberg atetízaa.

992 Proposición X, 17.

993 Definición X, 3.2.

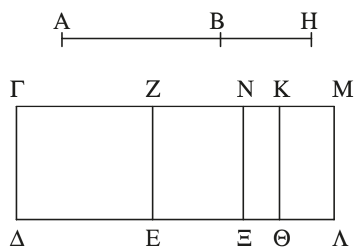
Logo, o cadrado de primeira apótoma de medial aplicado en expresable fai en anchura segunda apótoma; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 99

O cadrado de segunda apótoma de medial aplicado en expresable fai en anchura terceira apótoma

Sexa AB a segunda apótoma de medial, a expresable ΓΔ e, en ΓΔ, aplíquese ΓE, igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΓZ; digo que ΓZ é terceira apótoma.

Pois ben, sexa BH a que corresponde a AB[994]; logo, AH e HB son mediais conmensurables só en cadrado que contén medial[995]. E, en ΓΔ, aplíquese ΓΘ, igual ó cadrado de AH[996], facendo en anchura ΓK e, por outro lado, en KΘ, aplíquese KΛ, igual ó cadrado de BH, facendo en anchura KM.



Logo, ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, e os cadrados de AH e HB son mediais[997]; logo, tamén ΓΛ é medial[998]. E está aplicado na expresable ΓΔ, facendo en anchura ΓM; logo, ΓM é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[999].

---

994 Proposición X, 79.

995 Proposición X, 75.

996 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

997 Algúns manuscritos omiten esta última frase; a edición crítica de J. L. Heiberg e H. Menge mantena.

998 Proposición X, 15 e Proposición X, 23. Corolario.

999 Proposición X, 22.

E, dado que ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, parte do cal, ΓE, é igual ó cadrado de AB, logo, o restante, ΛZ, é igual a dúas veces o contido por AH e HB[1000].

Entón, córtese ZM á metade polo punto N[1001] e lévese NΞ paralela a ΓΔ[1002]; logo, tanto ZΞ como NΛ son iguais ó contido por AH e HB.

Pero o contido por AH e HB é medial; logo, tamén ZΛ é medial[1003]. E está aplicado na expresable EZ facendo en anchura ZM; logo, tamén ZM é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[1004].

E, dado que AH e HB son conmensurables só en cadrado, logo, é inconmensurable en lonxitude AH con HB; logo, é tamén inconmensurable o cadrado de AH co contido por AH e HB[1005].

Pero o cadrado de AH xunto co de HB é conmensurable co cadrado de AH, mentres que dúas veces o contido por AH e HB co contido por AH e HB; logo, o cadrado de AH xunto co de HB é inconmensurable con dúas veces o contido por AH e HB[1006].

Pero ΓΛ é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, mentres que ZΛ é igual a dúas veces o contido por AH e HB; logo, é inconmensurable ΓΛ con ZΛ.

Pero como ΓΛ a ZΛ, así é ΓM a ZM; logo, é inconmensurable ΓM con ZM en lonxitude[1007].

E son ambas expresables; logo, ΓM e MZ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΓZ é apótoma[1008].

Digo agora que é tamén terceira.

Pois, dado que é conmensurable o cadrado de AH co de HB, logo, é conmensurable tamén ΓΘ con KΛ; en consecuencia, tamén ΓK con KM.

[1000] Proposición II, 7.
[1001] Proposición I, 10.
[1002] Proposición I, 31.
[1003] Proposición X, 23. Corolario.
[1004] Proposición X, 22.
[1005] Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
[1006] Proposición X, 13.
[1007] Proposición X, 11.
[1008] Proposición X, 73.

E, dado que, entre os cadrados de AH e HB, é media proporcional o contido por AH e HB[1009] e que ΓΘ é igual ó cadrado de AH, mentres que KΛ ó de HB e, por outro lado, NΛ igual ó contido por AH e HB, logo, tamén, entre ΓΘ e KΛ, é media proporcional NΛ; logo, como ΓΘ é a NΛ, así NΛ a KΛ.

Pero como ΓΘ a NΛ, así é ΓK a NM, mentres que, como NΛ a KΛ, así é NM a KM; logo, como ΓK a MN, así é MN a KM[1010]; logo, o contido por ΓK e KM é igual ó cadrado de NM[1011], é dicir[1012], á cuarta parte do cadrado de ZM.

Entón, dado que ΓM e MZ son dúas rectas desiguais, que un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ZM, inferior nunha figura cadrada, está aplicado en ΓM e que a divide en conmensurables, logo, o cadrado de ΓM é maior que o de MZ no cadrado dunha conmensurable con aquela[1013]. E nin ΓM nin MZ son conmensurables en lonxitude coa expresable tomada ΓΔ; logo, ΓZ é terceira apótoma[1014].

Logo, o cadrado de segunda apótoma de medial aplicado en expresable fai en anchura terceira apótoma; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 100

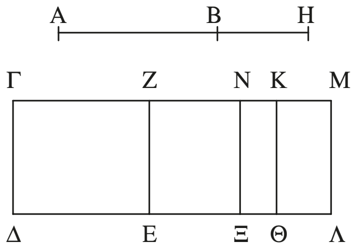
O cadrado de menor aplicado en expresable fai en anchura cuarta apótoma

Sexa a menor AB, a expresable ΓΔ e, na expresable ΓΔ, aplíquese ΓE, igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΓZ; digo que ΓZ é cuarta apótoma.

Pois ben, sexa BH a que corresponde a AB[1015]; logo, AH e HB son inconmensurables en cadrado que fan a suma dos cadrados

1009 Lema previo á Proposición X, 54.
1010 Proposición V, 11.
1011 Proposición VI, 17.
1012 A transmisión manuscrita do texto presenta dúbidas sobre a autenticidade destas palabras «ó cadrado de NM, é dicir»; non así Heiberg e Heath que as manteñen.
1013 Proposición X, 17.
1014 Definición X, 3.3.
1015 Proposición X, 79.

de AH e HB expresable, mentres que dúas veces o contido por AH e HB, medial[1016]. E, en ΓΔ, aplíquese ΓΘ, igual ó cadrado de AH[1017], facendo en anchura ΓK e, por outro lado, KΛ, igual ó cadrado de BH, facendo en anchura KM.



Logo, ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB. E a suma dos cadrados de AH e HB é expresable; logo, tamén ΓΛ é expresable. E está aplicado na expresable ΓΔ, facendo en anchura ΓM; logo, tamén ΓM é expresable e conmensurable con ΓΔ en lonxitude[1018].

E, dado que ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, parte do cal, ΓE é igual ó cadrado de AB, logo, o restante, ZΛ, é igual a dúas veces o contido por AH e HB[1019].

Córtese, entón, ZM á metade polo punto N[1020] e lévese NΞ paralela a ΓΔ[1021] ou MΛ, por N; logo, tanto ZΞ como NΛ son iguais ó contido por AH e HB.

E, dado que dúas veces o contido por AH e HB é medial e é igual a ZΛ, logo, tamén ZΛ é medial. E está aplicado na expresable ZE, facendo en anchura ZM; logo, tamén ZM é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[1022].

E, dado que a suma dos cadrados de AH e HB é expresable, mentres que dúas veces o contido por AH e HB, medial,

---

1016 Proposición X, 76.
1017 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
1018 Proposición X, 20.
1019 Proposición II, 7.
1020 Proposición I, 10.
1021 Proposición I, 31.
1022 Proposición X, 22.

o cadrado de AH xunto co de HB é inconmensurable con dúas veces o contido por AH e HB.

Pero ΓΛ é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, mentres que ZΛ, igual a dúas veces o contido por AH e HB; logo, é inconmensurable ΓΛ con ZΛ.

Pero, como ΓΛ a ZΛ, así é ΓM a MZ[1023]; logo, é inconmensurable ΓM con MZ en lonxitude[1024].

E son ambas expresables; logo, ΓM e MZ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΓZ é apótoma[1025].

Digo agora que é tamén cuarta.

Pois, dado que AH e HB son inconmensurables en cadrado, logo, é inconmensurable tamén o cadrado de AH co de HB. E, ΓΘ é igual ó cadrado de AH, mentres que KΛ, igual ó de HB. Logo, é inconmensurable ΓΘ con KΛ.

Pero, como ΓΘ a KΛ, así é ΓK a KM; logo, é inconmensurable ΓK con KM en lonxitude.

E, dado que, entre os cadrados de AH e HB, é media proporcional o contido por AH e HB[1026] e que o cadrado de AH é igual a ΓΘ, mentres que o de HB a KΛ, e o contido por AH e HB a NΛ, logo, entre ΓΘ e KΛ, é media proporcional NΛ; logo, como ΓΘ é a NΛ, así NΛ a KΛ.

Pero como ΓΘ a NΛ, así é ΓK a NM, mentres que, como NΛ a KΛ, así é NM a KM; logo, como ΓK a MN, así MN a KM[1027]; logo, o contido por ΓK e KM é igual ó cadrado de MN[1028], é dicir, á cuarta parte do cadrado de ZM.

Entón, dado que ΓM e MZ son dúas rectas desiguais, que o contido por ΓK e KM, igual á cuarta parte do cadrado de MZ, inferior nunha figura cadrada, está aplicado en ΓM, e que a divide en inconmensurables, logo, o cadrado de ΓM é maior que

1023 Proposición VI, 1.
1024 Proposición X, 11.
1025 Proposición X, 73.
1026 Lema previo á Proposición X, 54.
1027 Proposición V, 11.
1028 Proposición VI, 17.

o de MZ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[1029]. E ΓM enteira é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΓΔ; logo, ΓZ é cuarta apótoma[1030].

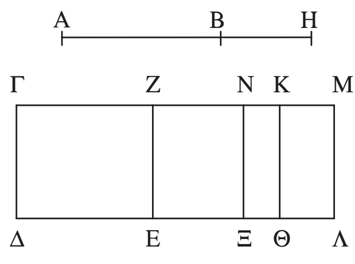
Logo, o cadrado de menor etc.

PROPOSICIÓN 101

O cadrado da que, xunto con área expresable, fai a área enteira medial, aplicado en expresable, fai en anchura quinta apótoma

Sexa AB a que, xunto con área expresable, fai a área enteira medial, sexa a expresable ΓΔ e, en ΓΔ, aplíquese ΓE, igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΓZ; digo que ΓZ é quinta apótoma.

Pois ben, sexa BH a que corresponde a AB[1031]; logo, AH e HB son rectas inconmensurables en cadrado que fan a suma dos seus cadrados medial, mentres que dúas veces o contido por elas, expresable[1032]. E, en ΓΔ, aplíquese ΓΘ, igual ó cadrado de AH[1033], e, por outro lado, KΛ, igual ó cadrado de HB.



Logo, ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB. E a suma dos cadrados de AH e HB, a un tempo, é medial; logo, ΓΛ é medial. E está aplicado na expresable ΓΔ, facendo en anchura ΓM; logo, ΓM é expresable e inconmensurable con ΓΔ[1034].

1029 Proposición X, 18.
1030 Definición X, 3.4.
1031 Proposición X, 79.
1032 Proposición X, 77.
1033 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
1034 Proposición X, 22.

E, dado que ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, parte do cal, ΓE, é igual ó cadrado de AB, logo, o restante, ZΛ, é igual a dúas veces o contido por AH e HB[1035].

Córtese, entón, ZM á metade por N[1036] e lévese NΞ paralela a ΓΔ[1037] ou MΛ, por N; logo, tanto ZΞ como NΛ son iguais ó contido por AH e HB.

E, dado que dúas veces o contido por AH e HB é expresable e igual a ZΛ, logo, tamén ZΛ é expresable. E está aplicado na expresable EZ, facendo en anchura ZM; logo, ZM é expresable e conmensurable con ΓΔ en lonxitude[1038].

E, dado que ΓΛ é medial, mentres que ZΛ, expresable, logo, é inconmensurable ΓΛ con ZΛ[1039].

Pero como ΓΛ a ZΛ, así ΓM a MZ[1040]; logo, é inconmensurable ΓM con MZ en lonxitude[1041].

E son ambas expresables; logo, ΓM e MZ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΓZ é apótoma[1042].

Digo agora que é tamén quinta.

Pois ben, de xeito semellante poderemos demostrar que o contido por ΓKM é igual ó cadrado de NM, é dicir, á cuarta parte do cadrado de ZM[1043].

E, dado que é inconmensurable o cadrado de AH co de HB, que o cadrado de AH é igual a ΓΘ e que o de HB a KΛ, logo, é inconmensurable ΓΘ con KΛ.

Pero como ΓΘ a KΛ, así ΓK a KM; logo, é inconmensurable ΓK con KM en lonxitude.

Entón, dado que ΓM e MZ son dúas rectas desiguais, que un paralelogramo igual á cuarta parte do cadrado de ZM, inferior

1035 Proposición II, 7.
1036 Proposición I, 10.
1037 Proposición I, 31.
1038 Proposición X, 20.
1039 Proposición X, 23. Corolario.
1040 Proposición VI, 1.
1041 Proposición X, 11.
1042 Proposición X, 73.
1043 Véxanse as demostracións das proposicións X, 97 a X, 100.

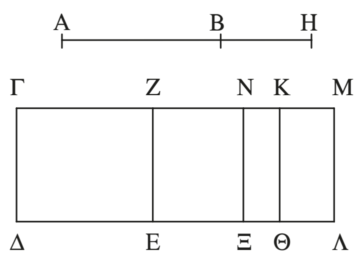
nunha figura cadrada, está aplicado en ΓM e que a divide en inconmensurables, logo, o cadrado de ΓM é maior que o de MZ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[1044]. E a que lle corresponde, ZM, é conmensurable coa expresable tomada ΓΔ; logo, ΓZ é quinta apótoma[1045]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 102

O cadrado da que, xunto con área medial, fai a área enteira medial, aplicado en expresable, fai en anchura sexta apótoma

Sexa AB a que, xunto con área medial, fai a área enteira medial, sexa a expresable ΓΔ e, en ΓΔ, aplíquese ΓE, igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΓZ; digo que ΓZ é sexta apótoma.

Pois ben, sexa BH a que corresponde a AB[1046]; logo, AH e HB son inconmensurables en cadrado que fan a suma dos seus cadrados medial, dúas veces o contido por AH e HB, medial e o cadrado de AH xunto co de HB, inconmensurable con dúas veces o contido por AH e HB[1047]. Entón, en ΓΔ, aplíquese ΓΘ, igual ó cadrado de AH[1048], facendo en anchura ΓK e, por outro lado, KΛ, igual ó cadrado de BH.



Logo, ΓΛ enteiro é igual ó cadrado de AH xunto co de HB; logo, tamén ΓΛ é medial. E está aplicado na expresable ΓΔ,

1044 Proposición X, 18.
1045 Definición X, 3.5.
1046 Proposición X, 79.
1047 Proposición X, 78.
1048 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

facendo en anchura ΓΜ; logo, tamén ΓΜ é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[1049].

Entón, dado que ΓΛ é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, parte do cal, ΓΕ, é igual ó cadrado de AB, logo, o restante, ΖΛ, é igual a dúas veces o contido por AH e HB[1050].

E, dúas veces o contido por AH e HB é medial; logo, tamén ΖΛ é medial. E está aplicado na expresable ΖΕ facendo en anchura ΖΜ; logo, tamén ΖΜ é expresable e inconmensurable con ΓΔ en lonxitude[1051].

E, dado que o cadrado de AH xunto co de HB é inconmensurable con dúas veces o contido por AH e HB, que ΓΛ é igual ó cadrado de AH xunto co de HB, mentres que ΖΛ, igual a dúas veces o contido por AH e HB, logo, é inconmensurable ΓΛ con ΖΛ.

Pero como ΓΛ a ΖΛ, así é ΓΜ a ΜΖ[1052]; logo, é inconmensurable ΓΜ con ΜΖ en lonxitude[1053].

E son ambas expresables; logo, ΓΜ e ΜΖ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΓΖ é apótoma[1054].

Digo agora que é tamén sexta.

Pois, dado que ΖΛ é igual a dúas veces o contido por AH e HB, córtese ΖΜ á metade por Ν[1055] e lévese ΝΞ paralela a ΓΔ por Ν[1056]; logo, tanto ΖΞ como ΝΛ son iguais ó contido por AH e HB.

E, dado que AH e HB son inconmensurables en cadrado, logo, é inconmensurable o cadrado de AH co de HB. Pero ΓΘ é igual ó cadrado de AH, mentres que ΚΛ, igual ó de HB. Logo, é inconmensurable ΓΘ con ΚΛ. Pero como ΓΘ a ΚΛ, así é ΓΚ a ΚΜ; logo, é inconmensurable ΓΚ con ΚΜ.

[1049] Proposición X, 22.
[1050] Proposición II, 7.
[1051] Proposición X, 22.
[1052] Proposición VI, 1.
[1053] Proposición X, 11.
[1054] Proposición X, 73.
[1055] Proposición I, 10.
[1056] Proposición I, 31.

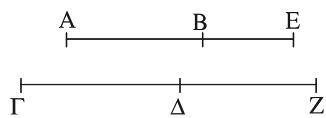
E, dado que, entre os cadrados de AH e HB, é media proporcional o contido por AH e HB[1057] e que, por unha parte, ΓΘ é igual ó cadrado de AH, por outra, KΛ igual ó de HB, e, ademais, NΛ igual ó contido por AH e HB, logo, tamén, entre ΓΘ e KΛ, é media proporcional NΛ; logo, como ΓΘ é a NΛ, así NΛ a KΛ.

Entón, polo mesmo, o cadrado de ΓM é maior que o de MZ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[1058]. E ningunha delas é conmensurable coa expresable tomada ΓΔ; logo, ΓZ é sexta apótoma[1059]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 103

A conmensurable en lonxitude coa apótoma é apótoma e a mesma na orde.

Sexa a apótoma AB e sexa ΓΔ conmensurable en lonxitude con AB; digo que tamén ΓΔ é apótoma e a mesma que AB na orde.



Pois ben, dado que AB é apótoma, sexa BE a que lle corresponde[1060]; logo, AE e EB son expresables conmensurables só en cadrado[1061].

E a razón de BE con ΔZ resulte a mesma que a de AB con ΓΔ[1062]; logo, tamén, como unha é a unha, todas a todas[1063]; logo, tamén, como AE enteira a ΓZ enteira, así AB a ΓΔ.

Pero AB é conmensurable con ΓΔ en lonxitude. Logo, tamén é conmensurable AE con ΓZ e BE con ΔZ[1064].

1057 Lema previo á Proposición X, 54.
1058 Proposición X, 18.
1059 Definición X, 3.6.
1060 Proposición X, 79.
1061 Proposición X, 73.
1062 Proposición VI, 12.
1063 Proposición V, 12.
1064 Proposición X, 11.

E AE e EB son expresables conmensurables só en cadrado; logo, tamén ΓZ e ZΔ son expresables conmensurables só en cadrado[1065].

Entón, dado que como AE é a ΓZ, así BE a ΔZ, logo, por alternancia, como AE é a EB, así ΓZ a ZΔ[1066].

Entón, o cadrado de AE ou ben é maior que o de EB no cadrado dunha conmensurable con aquela ou no dunha inconmensurable.

Entón, se o cadrado de AE é maior que o de EB no cadrado dunha conmensurable con aquela, tamén o cadrado de ΓZ será maior que o de ZΔ no cadrado dunha conmensurable con ΓZ[1067]. E, se AE é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, tamén ΓZ[1068], pero se BE, tamén ΔZ e, se nin AE nin EB tamén, nin ΓZ nin ZΔ[1069] .

Pero, se o cadrado de AE é maior no dunha inconmensurable con ela mesma, tamén o cadrado de ΓZ será maior que o de ZΔ no cadrado dunha inconmensurable con aquela[1070]. E, se é conmensurable en lonxitude AE coa expresable tomada, tamén ΓZ, mentres que se o é BE, tamén ΔZ, pero se nin AE nin EB, nin ΓZ nin ZΔ.

Logo, ΓΔ é apótoma e a mesma na orde que AB; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 104

A conmensurable con apótoma de medial é apótoma de medial e a mesma na orde.

Sexa a apótoma de medial AB e sexa ΓΔ conmensurable en lonxitude con AB; digo que tamén ΓΔ é apótoma de medial e a mesma que AB na orde.

1065 Proposición V, 16 e Proposición X, 11. Algúns manuscritos presentan aquí estas frases que Heiberg atetiza: «Logo, é apótoma ΓΔ. Digo agora que é tamén a mesma na orde que AB.»

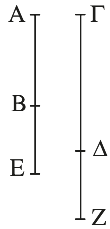
1066 Proposición V, 16.

1067 Proposición X, 14.

1068 Proposición X, 12.

1069 Proposición X, 13.

1070 Proposición X, 14.



Pois ben, dado que AB é apótoma de medial, sexa EB a que lle corresponde[1071]; logo, AE e EB son mediais conmensurables só en cadrado[1072].

E resulte que, como AB a ΓΔ, así BE a ΔZ[1073]; logo, tamén, é conmensurable AE con ΓZ, mentres que BE con ΔZ[1074].

Pero AE e EB son mediais conmensurables só en cadrado; logo, tamén ΓZ e ZΔ son mediais[1075] conmensurables só en cadrado[1076]; logo, ΓΔ é apótoma de medial[1077].

Digo agora que é tamén a mesma na orde que AB.

Dado que, como AE é a EB, así ΓZ a ZΔ[1078], logo, tamén, como o cadrado de AE ó contido por AE e EB, así o cadrado de ΓZ ó contido por ΓZ e ZΔ[1079].

Pero o cadrado de AE é conmensurable co de ΓZ; logo, é conmensurable o contido por AE e EB co contido por ΓZ e ZΔ[1080].

Entón, se é expresable o contido por AE e EB, será expresable tamén o contido por ΓZ e ZΔ[1081] e, se é medial o contido por AE e EB, é medial tamén o contido por ΓZ e ZΔ[1082].

1071 Proposición X, 80 e 81.

1072 Proposición X, 74 ou Proposición X, 75.

1073 Proposición VI, 12.

1074 Proposición V, 12 e Proposición X, 11.

1075 Proposición X, 23.

1076 Proposición V, 16 e Proposición X, 11.

1077 Proposición X, 74 ou Proposición X, 75.

1078 Algúns manuscritos presentan aquí estas frases que Heiberg atetiza: «pero como AE a EB, así o cadrado de AE ó contido por AE e EB, mentres que como ΓZ a ZΔ, así o cadrado de ΓZ ó contido por ΓZ e ZΔ»

1079 Proposición VI, 1. Algúns manuscritos presentan aquí estas frases que Heiberg atetiza: «e, por alternancia, como o cadrado de AE ó de ΓZ, así o contido por AE e EB ó contido por ΓZ e ZΔ».

1080 Proposición V, 16 e Proposición X, 11.

1081 Definición X, 1.4.

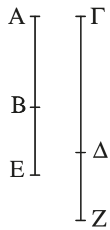
1082 Proposición X, 23. Corolario.

Logo, ΓΔ é apótoma de medial e a mesma na orde que AB; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 105

A conmensurable coa menor é menor.

Pois ben, sexa a menor AB e ΓΔ conmensurable con AB; digo que tamén ΓΔ é menor.



Pois ben, obtéñase o mesmo resultado que antes[1083]; e, dado que AE e EB son inconmensurables en cadrado[1084], logo, tamén ΓZ e ZΔ son inconmensurables en cadrado[1085].

Entón, dado que, como AE é a EB, así ΓZ a ZΔ[1086], logo, tamén, como o cadrado de AE ó de EB, así o de ΓZ ó de ZΔ[1087].

Logo, por composición, como o cadrado de AE xunto co de EB é ó de EB, así o de ΓZ xunto co de ZΔ ó de ZΔ[1088]; pero é conmensurable o cadrado de BE co de ΔZ; logo, é tamén conmensurable a suma dos cadrados de AE e de EB coa suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ[1089].

Pero a suma dos cadrados de AE e EB é expresable[1090]; logo, é expresable tamén a suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ[1091].

1083 Enténdase : «como AB a ΓΔ, así BE a ΔZ». Proposicións X, 103 e X, 104.
1084 Proposicións X, 76.
1085 Proposición X, 13.
1086 Proposición V, 12; Proposición V, 16.
1087 Proposición VI, 22.
1088 Proposición V, 18.
1089 Proposición V, 16 e Proposición X, 11.
1090 Proposicións X, 76.
1091 Definición X, 1.4.

Asemade, dado que, como o cadrado de AE é ó contido por AE e EB, así o cadrado de ΓZ ó contido por ΓZ e ZΔ[1092], mentres que o cadrado de AE é conmensurable co cadrado de ΓZ[1093], logo, é tamén conmensurable o contido por AE e EB co contido por ΓZ e ZΔ.

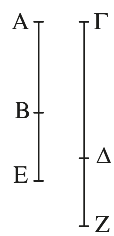
Pero o contido por AE e EB é medial[1094]; logo, é medial tamén o contido por ΓZ e ZΔ[1095]; logo, ΓZ e ZΔ son inconmensurables en cadrado que fan a suma dos seus cadrados expresable, mentres que o contido por elas, medial.

Logo, ΓΔ é menor; o que xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 106

A conmensurable coa que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira é recta que, xunto con expresable, fai medial a área enteira.

Pois ben, sexa AB a que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira e sexa ΓΔ conmensurable con AB; digo que tamén ΓΔ é recta que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira.



Pois ben, sexa BE a que corresponde con AB[1096]; logo, AE e EB son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos cadrados de AE e EB, mentres que o contido por elas, expresable[1097].

1092 Proposicións VI, 1.
1093 Proposicións V, 12 e Proposicións X, 11.
1094 Proposicións X, 76.
1095 Proposicións X, 23. Corolario.
1096 Proposicións X, 83.
1097 Proposicións X, 77.

E fáganse as mesmas construcións[1098].

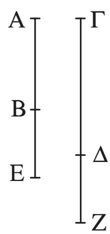
Entón, de xeito semellante ó anterior poderemos demostrar que ΓZ e ZΔ están na mesma razón que AE e EB, e que a suma dos cadrados de AE e EB é conmensurable coa suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ, mentres que o contido por AE e EB co contido por ΓZ e ZΔ[1099]; en consecuencia, tamén ΓZ e ZΔ son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ, mentres que o contido por elas, expresable.

Logo, ΓΔ é recta que, xunto con área expresable, fai medial a área enteira; o que xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 107

A conmensurable coa que, xunto con área medial, fai medial a área enteira é, tamén ela, recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira.

Sexa AB a que, xunto con área medial, fai medial a área enteira e sexa ΓΔ conmensurable con AB; digo que tamén ΓΔ é recta que, xunto con área medial, fai medial a área enteira.



Pois ben, sexa BE a que corresponde con AB[1100] e fáganse as mesmas construcións[1101]; logo, AE e EB son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, o contido por elas, medial e, ademais, a suma dos seus cadrados inconmensurable co contido por elas[1102].

1098 Enténdase : «como AB a ΓΔ, así BE a ΔZ». Proposicións X, 103 e X, 104.
1099 Véxase a demostración da Proposición X, 105.
1100 Proposicións X, 84.
1101 Enténdase : «como AB a ΓΔ, así BE a ΔZ». Proposicións X, 103 e X, 104.
1102 Proposicións X, 78.

E, como foi demostrado, AE e EB son conmensurables con ΓZ e ZΔ, e a suma dos cadrados de AE e EB coa suma dos cadrados de ΓZ e ZΔ, mentres que o contido por AE e EB co contido por ΓZ e ZΔ[1103]; logo, tamén ΓZ e ZΔ son inconmensurables en cadrado que fan medial a suma dos seus cadrados, o contido por elas, medial, e, ademais, a suma dos seus cadrados inconmensurable co contido por elas.

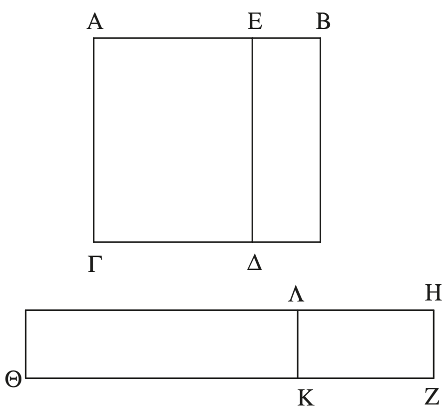
Logo, ΓΔ é recta que, xunto con área medial, fai medial a área enteira; o que xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 108

Se dunha área expresable se quita unha medial, a recta cuxo cadrado é equivalente á área restante resulta ser unha de dúas non expresables: ou apótoma ou menor.

Quítese da expresable BΓ a medial BΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área restante, EΓ, resulta ser unha de dúas non expresables: ou apótoma ou menor.

Pois ben, tómese a expresable ZH, e, por un lado, aplíquese en ZH o paralelogramo de ángulos rectos HΘ igual a BΓ[1104] e, por outro, quítese HK igual a ΔB; logo, o restante, EΓ, é igual a ΛΘ.



1103 Véxase a demostración da Proposición X, 105.
1104 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

Entón, dado que, por un lado, ΒΓ é expresable e ΒΔ medial, e por outro, ΒΓ igual a ΗΘ e ΒΔ a ΗΚ, logo, ΗΘ é expresable e ΗΚ medial. E están aplicados na expresable ΖΗ; logo, ΖΘ é expresable e conmensurable con ΖΗ en lonxitude[1105], mentres que ΖΚ, expresable e inconmensurable con ΖΗ en lonxitude[1106]; logo, é inconmensurable ΖΘ con ΖΚ en lonxitude[1107]. Logo, ΖΘ e ΖΚ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΚΘ é apótoma[1108] e ΚΖ a que lle corresponde.

Entón o cadrado de ΘΖ é maior que o de ΖΚ no cadrado dunha conmensurable ou non.

Séxao, primeiro, no cadrado dunha conmensurable.

E ΘΖ enteira é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΖΗ; logo, ΚΘ é primeira apótoma[1109]. Pero a recta cuxo cadrado é equivalente ó contido por expresable e primeira apótoma é apótoma[1110]. Logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a ΛΘ, é dicir, a ΕΓ, é apótoma.

Pero, se o cadrado de ΘΖ é maior que o de ΖΚ no cadrado dunha inconmensurable con aquela, e ΖΘ enteira é conmensurable en lonxitude con ΖΗ, a expresable tomada, ΚΘ, é cuarta apótoma[1111]. Pero a recta cuxo cadrado é equivalente ó contido por expresable e cuarta apótoma é menor[1112]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 109

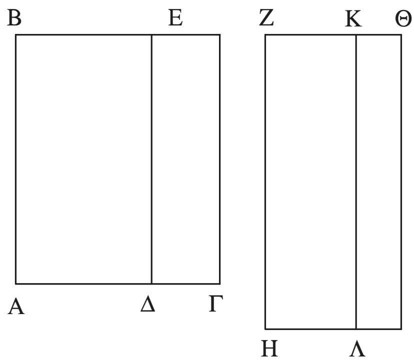
Se dunha área medial se quita unha expresable, resultan outras dúas rectas non expresables: ou primeira

1105 Proposicións X, 20.
1106 Proposicións X, 22.
1107 Proposicións X, 13.
1108 Proposicións X, 73.
1109 Definición X, 3.1.
1110 Proposicións X, 91.
1111 Definición X, 3.4.
1112 Proposicións X, 94.

apótoma de medial ou recta que, xunto con expresable, fai medial a área enteira .

Pois ben, quítese da medial ΒΓ a expresable ΒΔ; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente á área restante, ΕΓ, resulta ser unha de dúas non expresables: ou primeira apótoma de medial ou recta que, xunto con expresable, fai medial a área enteira.

Pois ben, tómese a expresable ΖΗ e aplíquense as áreas de xeito semellante[1113]. Entón, consecuentemente, ΖΘ é expresable e inconmensurable con ΖΗ en lonxitude[1114], mentres que ΚΖ, expresable e conmensurable con ΖΗ en lonxitude; logo, ΖΘ e ΖΚ son expresables conmensurables só en cadrado[1115]; logo, ΚΘ é apótoma e ΖΚ a que lle corresponde[1116].



Entón, o cadrado de ΘΖ é maior que o de ΖΚ no cadrado dunha conmensurable con aquela ou no dunha inconmensurable.

Entón, se o cadrado de ΘΖ é maior que o de ΖΚ no cadrado dunha conmensurable con aquela, e a que lle corresponde, ΖΚ, é conmensurable en lonxitude con ΖΗ, a expresable tomada, ΚΘ é segunda apótoma[1117]. Pero ΖΗ é expresable; en conse-

1113 Enténdase: «Aplíquese en ΖΗ o paralelogramo de ángulos rectos ΗΘ igual a ΒΓ e, por outro, quítese ΗΚ igual a ΔΒ». Proposición X, 108.

1114 Proposición X, 22.

1115 Proposición X, 13.

1116 Proposición X, 73.

1117 Definición X, 3.2.

cuencia, a recta cuxo cadrado é equivalente a ΛΘ, é dicir, a ΕΓ, é primeira apótoma de medial[1118].

Pero, se o cadrado de ΘΖ é maior que o de ΖΚ no cadrado dunha inconmensurable e a que lle corresponde, ΖΚ, é conmensurable en lonxitude con ΖΗ, a expresable tomada, ΚΘ, é quinta apótoma[1119]; en consecuencia, a recta cuxo cadrado é equivalente a ΕΓ é recta que, xunto con expresable, fai medial a área enteira[1120]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

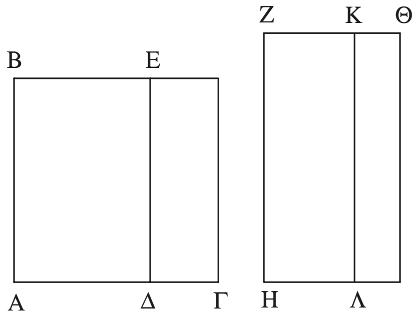
PROPOSICIÓN 110

Se dunha área medial se quita unha medial inconmensurable coa área enteira, resultan as dúas rectas non expresables restantes: ou segunda apótoma de medial ou recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira.

Pois ben, quítese, como nas construcións anteriores, da medial ΒΓ a medial ΒΔ inconmensurable coa área enteira; digo que a recta cuxo cadrado é equivalente a ΕΓ é unha de dúas non expresables: ou segunda apótoma de medial ou recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira.

Pois ben, dado que, tanto ΒΓ como ΒΔ son mediais e ΒΓ, inconmensurable con ΒΔ, consecuentemente, tanto ΖΘ como ΖΚ serán tamén expresables e inconmensurables con ΖΗ en lonxitude[1121]. E, dado que é inconmensurable ΒΓ con ΒΔ, é dicir, ΗΘ con ΗΚ, tamén é inconmensurable ΘΖ con ΖΚ[1122]; logo, ΖΘ e ΖΚ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, ΚΘ é apótoma[1123]

[1118] Proposición X, 92.
[1119] Definición X, 3.5.
[1120] Proposición X, 95.
[1121] Proposición X, 22.
[1122] Proposición VI, 1 e Proposición X, 11.
[1123] Proposición X, 73. Algúns manuscritos presentan aquí estas frases que Heiberg atetiza: «e ΖΚ, a que lle corresponde. Entón, o cadrado de ΖΘ é maior que o de ΖΚ no cadrado dunha conmensurable ou no dunha inconmensurable con aquela».



Entón, se o cadrado de ZΘ é maior que o de ZK no cadrado dunha conmensurable con aquela e nin ZΘ nin ZK son conmensurables en lonxitude con ZH, a expresable tomada, KΘ, é terceira apótoma[1124]. Pero KΛ é expresable, mentres que o paralelogramo de ángulos rectos contido por expresable e terceira apótoma é non expresable, e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable, chámase segunda apótoma de medial[1125]; en consecuencia, a recta cuxo cadrado é equivalente a ΛΘ, é dicir, a EΓ, é segunda apótoma de medial.

Pero, se o cadrado de ZΘ é maior que o de ZK no cadrado dunha inconmensurable con aquela, e nin ΘZ nin ZK son conmensurables con ZH en lonxitude, KΘ é sexta apótoma[1126]. Pero a recta cuxo cadrado é equivalente ó contido por expresable e sexta apótoma é recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira[1127].

Logo, a recta cuxo cadrado é equivalente a ΛΘ, é dicir, a EΓ, é recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira; o que, xustamente, era preciso demostrar.

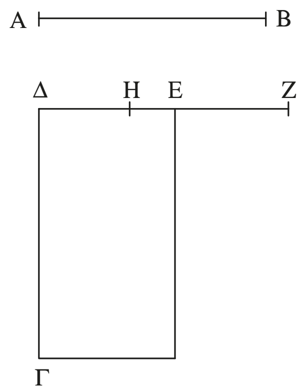
PROPOSICIÓN 111

A apótoma non é a mesma que a binomial.

Sexa a apótoma AB; digo que AB non é a mesma que a binomial.

1124 Definición X, 3.3.
1125 Proposición X, 93.
1126 Definición X, 3.6.
1127 Proposición X, 96.

Pois ben, se é posible, séxao; tómese a expresable ΔΓ e, en ΓΔ, aplíquese o paralelogramo de ángulos rectos ΓE igual ó cadrado de AB, facendo en anchura ΔE[1128].



Entón, dado que AB é apótoma, ΔE é primeira apótoma[1129]. Sexa EZ a que lle corresponde[1130]; logo, ΔZ e ZE son expresables conmensurables só en cadrado, o cadrado de ΔZ é maior que o de ZE no cadrado dunha conmensurable con aquela, e ΔZ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada ΔΓ[1131].

Asemade, dado que AB é binomial, logo, ΔE é primeira binomial[1132]. Divídase nos seus termos por H[1133] e sexa ΔH o termo maior; logo, ΔH e HE son expresables conmensurables só en cadrado, o cadrado de ΔH é maior que o de HE no cadrado dunha conmensurable con aquela, e o termo maior, ΔH, é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, ΔΓ[1134]. Logo, tamén ΔZ é conmensurable con ΔH en lonxitude[1135]; logo, tamén a restante, HZ, é conmensurable con ΔZ en lonxitude[1136].

1128 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

1129 Proposición X, 97.

1130 Proposición X, 79.

1131 Definición X, 3.1.

1132 Proposición X, 60.

1133 Proposición X, 42.

1134 Definición X, 2.1.

1135 Proposición X, 12.

1136 Proposición X, 15. Algúns manuscritos presentan aquí estas frases que Heiberg atetiza: «entón, dado que é conmensurable ΔZ con HZ e ΔZ é expresable, logo, é expresable tamén HZ. Entón dado que é conmensurable ΔZ con HZ en lonxitude».

Pero ΔZ é inconmensurable con EZ en lonxitude; logo, é tamén inconmensurable ZH con EZ en lonxitude[1137]. Logo, HZ e ZE son expresables conmensurables só en cadrado; logo, EH é apótoma[1138]. Pero tamén expresable; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, a apótoma non é a mesma que a binomial; o que, xustamente, era preciso demostrar[1139].

A apótoma e as non expresables que a seguen non son as mesmas que a medial nin unhas que as outras.

Pois ben, o cadrado de medial, aplicado en expresable, fai en anchura expresable e inconmensurable en lonxitude con aquela na que está aplicado[1140]; o cadrado de apótoma, aplicado en expresable, fai en anchura primeira apótoma[1141]; o cadrado de primeira apótoma de medial, aplicado en expresable, fai en anchura segunda apótoma[1142]; o cadrado de segunda apótoma de medial, aplicado en expresable, fai en anchura terceira apótoma[1143]; o cadrado de menor, aplicado en expresable, fai en anchura cuarta apótoma[1144]; o cadrado de recta que, xunto con expresable, fai medial a área enteira, aplicado en expresable, fai en anchura quinta apótoma[1145]; o cadrado de recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira, aplicado en expresable, fai en anchura sexta apótoma[1146].

Entón, dado que as anchuras ditas difiren da primeira e unhas das outras —da primeira, porque é expresable, e unhas das outras, porque non son as mesmas na orde—, é evidente

1137 Proposición X, 13.
1138 Proposición X, 73.
1139 Algúns manuscritos consideran Corolario o que segue.
1140 Proposición X, 22.
1141 Proposición X, 97.
1142 Proposición X, 98.
1143 Proposición X, 99.
1144 Proposición X, 100.
1145 Proposición X, 101.
1146 Proposición X, 102.

que tamén as propias non expresables difiren unhas das outras. E, dado que queda demostrado que a apótoma non é a mesma que a binomial[1147] e que, aplicadas en expresable, as seguintes á apótoma fan en anchura apótomas, cada unha consonte á súa propia orde, mentres que as seguintes á binomial, binomiais, tamén elas consonte á súa orde, logo, as seguintes á apótoma son unhas, as seguintes á binomial, outras diferentes, de xeito que, en orde, son en total trece non expresables:

Medial
Binomial
Primeira bimedial
Segunda bimedial
Maior
Recta cuxo cadrado é equivalente a expresable e medial
Recta cuxo cadrado é equivalente a dúas mediais
Apótoma
Primeira apótoma de medial
Segunda apótoma de medial
Menor
Recta que, xunto con expresable, fai medial a área enteira
Recta que, xunto con medial, fai medial a área enteira.

PROPOSICIÓN 112[1148]

O cadrado de expresable, aplicado en binomial, fai en anchura apótoma cuxos termos son conmensurables cos

[1147] Véxase esta mesma Proposición X, 111.

[1148] Heiberg considera que as catro últimas proposicións do libro X (X, 112 a X, 115) son unha interpolación anterior a Teón. Baséase en que os resultados destas proposicións aparecen despois da recapitulación que redondea a discusión sobre os trece tipos de rectas non expresables que figura ó final da Proposición X, 111. Por outro lado, non están conectadas co resto do tratamento que se fai dos trece tipos de rectas non expresables e non se usan nos tres libros que seguen sobre xeometría de sólidos. Considera que son teoremas antigos e pensa que poden atribuírse a Apolonio. Heath pon en dúbida a consideración de Heiberg de que non están conectadas co tratamento que se fai das trece rectas non expresables para as tres primeiras destas proposicións —X, 112; X, 113 e X, 114—, exclúe a X, 115: A proposición X, 111 mostra que unha binomial non pode ser tamén apótoma —$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ non pode ser igual a $\sqrt{a'} - \sqrt{b'}$— pero as proposicións X, 112 a X, 114 mostran que unha das dúas pode

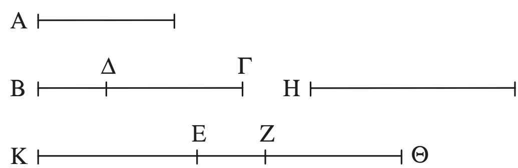
termos da binomial, ademais, gardan a mesma razón e, ademais, a apótoma resultante terá a mesma orde que a binomial.

Sexa A a expresable, ΒΓ a binomial cuxo termo maior sexa ΔΓ[1149], e sexa o contido por ΒΓ e ΕΖ igual ó cadrado de A[1150]; digo que ΕΖ é apótoma cuxos termos son conmensurables con ΓΔ e ΔΒ e gardan a mesma razón, e que, ademais, ΕΖ terá a mesma orde que ΒΓ.

Pois ben, sexa, asemade, o contido por ΒΔ e Η igual ó cadrado de A.

Entón, dado que o contido por ΒΓ e ΕΖ é igual ó contido por ΒΔ e Η, logo, como ΓΒ é a ΒΔ, así Η a ΕΖ[1151]. Pero ΓΒ é maior que ΒΔ; logo, tamén é maior Η que ΕΖ[1152].

Sexa ΕΘ igual a Η; logo, como ΓΒ é a ΒΔ, así ΘΕ a ΕΖ; logo, por separación, como ΓΔ é a ΒΔ, así ΘΖ a ΖΕ[1153].



usarse para racionalizar a outra. Se a, b, c son rectas expresables con $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$ e non conmensurables en lonxitude, na Proposición X, 112 proba que

$$\frac{a^2}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = q\sqrt{b} - q\sqrt{c},$$

sendo $q = n/m$ con n, m dous números naturais; na Proposición X, 113 proba que

$$\frac{a^2}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = q\sqrt{b} + q\sqrt{c},$$

sendo $q = n/m$, e na Proposición X, 114 proba que

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(q\sqrt{b} - q\sqrt{c})$$

é expresable. É claro que estas proposicións responden ós resultados alxébricos

$$\frac{a^2}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a^2}{b-c}(\sqrt{b}-\sqrt{c}),\quad \frac{a^2}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a^2}{b-c}(\sqrt{b}+\sqrt{c}),\quad (\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(q\sqrt{b}-q\sqrt{c}) = q\,(b-c)$$

e pon de manifesto a destreza dos matemáticos gregos no uso da «álxebra xeométrica».

1149 Proposición X, 42.

1150 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

1151 Proposición VI, 16.

1152 Proposición V, 14.

1153 Proposición V, 17.

Resulte que, como ΘZ a ZE, así ZK a KE[1154]; logo, tamén, ΘK enteira é a KZ enteira como ZK a KE —pois, como un dos antecedentes a un dos consecuentes, así todos os antecedentes a todos os consecuentes[1155].

Pero como ZK a KE, así é ΓΔ a ΔB[1156]; logo, tamén, como ΘK a KZ, así é ΓΔ a ΔB.

Pero o cadrado de ΓΔ é conmensurable co de ΔB[1157]; logo, é conmensurable tamén o cadrado de ΘK co de KZ[1158].

E, como o cadrado de ΘK ó de KZ, así ΘK a KE, dado que as tres rectas, ΘK, KZ e KE, son proporcionais[1159]. Logo, é conmensurable ΘK con KE en lonxitude; en consecuencia, tamén é conmensurable ΘE con EK en lonxitude[1160].

E, dado que o cadrado de A é igual ó contido por EΘ e BΔ, pero o cadrado de A é expresable, logo, tamén é expresable o contido por EΘ e BΔ. E está aplicado na expresable BΔ; logo, EΘ é expresable e conmensurable con BΔ en lonxitude[1161]; en consecuencia, tamén a conmensurable con ela, EK, é expresable e conmensurable con BΔ en lonxitude.

Entón, dado que, como ΓΔ é a ΔB, así ZK a KE, pero ΓΔ e ΔB son conmensurables só en cadrado, tamén ZK e KE son conmensurables só en cadrado[1162]. Pero KE é expresable; logo, tamén ZK é expresable[1163].

Logo, ZK e KE son expresables conmensurables só en cadrado; logo, EZ é apótoma[1164].

1154 Por ser BΔ < ΔΓ entón ΘZ > ZE e basta construír KE como a terceira proporcional de (ΘZ – ZE) e ZE pois, se (ΘZ – ZE) é a ZE como ZE a KE, entón, ΘZ é a ZE como ZK a KE. Proposicións VI, 11 e Proposición V, 18.

1155 Proposición V, 12.

1156 Proposición V, 11.

1157 Proposición X, 36.

1158 Proposición VI, 22 e Proposición X, 11.

1159 Definición V, 9.

1160 Proposición X, 15.

1161 Proposición X, 20.

1162 Proposición X, 11.

1163 Definición X, 1.3.

1164 Proposición X, 73.

Pero o cadrado de ΓΔ ou é maior que o de ΔB no cadrado dunha conmensurable con aquela ou no dunha inconmensurable.

Entón, se o cadrado de ΓΔ é maior que o de ΔB no dunha conmensurable, tamén será maior o cadrado de ZK que o de KE no dunha conmensurable con ZK[1165]. E, se ΓΔ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, tamén ZK; pero se o é BΔ, tamén KE; e, se nin ΓΔ nin ΔB, tampouco ZK nin KE[1166].

Pero, se o cadrado de ΓΔ é maior que o de ΔB no dunha inconmensurable con aquela, tamén será maior o cadrado de ZK que o de KE no dunha inconmensurable con ZK[1167]. E, se ΓΔ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, tamén ZK; pero se o é BΔ, tamén KE; e, se nin ΓΔ nin ΔB, tampouco ZK nin KE.

En consecuencia, ZE é apótoma cuxos termos ZK e KE son conmensurables cos termos ΓΔ e ΔB da binomial e gardan a mesma razón; e ten a mesma orde que BΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 113

O cadrado de expresable, aplicado en apótoma, fai en anchura binomial cuxos termos son conmensurables cos termos da apótoma e gardan a mesma razón; e, ademais, a binomial resultante ten a mesma orde que a apótoma.

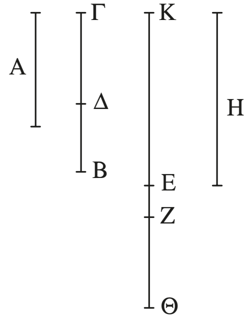
Sexa a expresable A, a apótoma BΔ, e sexa o contido por BΔ e KΘ igual ó cadrado de A[1168]; en consecuencia, o cadrado de A, aplicado na apótoma BΔ, fai en anchura KΘ; digo que KΘ é binomial cuxos termos son conmensurables cos termos de

1165 Proposición X, 14.
1166 Proposición X, 11 e Proposición X, 12.
1167 Proposición X, 14.
1168 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).

BΔ e gardan a mesma razón, e que, ademais, KΘ ten a mesma orde que BΔ.

Pois ben, sexa ΔΓ a que corresponde a BΔ[1169]; logo BΓ e ΓΔ son expresables conmensurables só en cadrado[1170].

Sexa tamén o contido por BΓ e H igual ó cadrado de A. Pero o cadrado de A é expresable; logo, o contido por BΓ e H é tamén expresable. E está aplicado na expresable BΓ; logo, H é expresable e conmensurable con BΓ en lonxitude[1171].



Entón, dado que o contido por BΓ e H é igual ó contido por BΔ e KΘ, logo, proporcionalmente, como ΓB é a BΔ, así KΘ a H[1172]; pero BΓ é maior que BΔ; logo, tamén KΘ é maior que H[1173].

Póñase KE igual a H; logo, é conmensurable KE con BΓ en lonxitude. E, dado que, como ΓB é a BΔ, así ΘK a KE, logo, por conversión, como BΓ é a ΓΔ, así KΘ a ΘE[1174].

Resulte que, como KΘ a ΘE, así ΘZ a ZE; logo, tamén, a restante KZ é a ZΘ como KΘ a ΘE[1175], é dicir, BΓ a ΓΔ.

Pero BΓ e ΓΔ son conmensurables só en cadrado; logo, tamén, KZ e ZΘ son conmensurables só en cadrado[1176]. E, dado

1169 Proposición X, 79.
1170 Proposición X, 73.
1171 Proposición X, 20.
1172 Proposición VI, 16.
1173 Proposición V, 14.
1174 Proposición V, 19. Corolario.
1175 Proposición V, 19.
1176 Proposición X, 11.

que como KΘ a ΘE, KZ a ZΘ, pero como KΘ a ΘE, ΘZ a ZE, logo, tamén, como KZ a ZΘ, ΘZ a ZE[1177]; en consecuencia, tamén, como a primeira á terceira, o cadrado da primeira ó da segunda[1178]; logo, tamén, como KZ a ZE, así o cadrado de KZ ó de ZΘ.

Pero o cadrado de KZ é conmensurable co de ZΘ —pois KZ e ZΘ son conmensurables en cadrado—; logo, tamén é conmensurable KZ con ZE en lonxitude[1179]; en consecuencia, tamén KZ é conmensurable en lonxitude con KE[1180].

Pero KE é expresable e conmensurable con BΓ en lonxitude; logo, tamén, KZ é expresable e conmensurable en lonxitude con BΓ[1181]. E, dado que, como BΓ é a ΓΔ, así KZ a ZΘ, por alternancia, como BΓ a KZ, así ΔΓ a ZΘ[1182]. Pero BΓ é conmensurable con KZ; logo, é tamén conmensurable ZΘ con ΓΔ en lonxitude[1183].

Pero BΓ e ΓΔ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, KZ e ZΘ son expresables conmensurables só en cadrado; logo, KΘ é binomial[1184].

Entón, se o cadrado de BΓ é maior que o de ΓΔ no dunha conmensurable con aquela, tamén será maior o cadrado de KZ que o de ZΘ no dunha conmensurable con KZ[1185]. E, se BΓ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, tamén KZ, pero se ΓΔ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, tamén ZΘ; e, se nin BΓ nin ΓΔ, nin KZ nin ZΘ.

Pero se o cadrado de BΓ é maior que o de ΓΔ no dunha inconmensurable con aquela, tamén será maior o cadrado de KZ que o de ZΘ no dunha inconmensurable con KZ[1186]. E,

1177 Proposición V, 11.
1178 Definición V, 9.
1179 Proposición X, 11.
1180 Proposición X, 15.
1181 Proposición X, 12.
1182 Proposición V, 16.
1183 Proposición X, 11.
1184 Proposición X, 36.
1185 Proposición X, 14.
1186 Proposición X, 14.

se ΒΓ é conmensurable en lonxitude coa expresable tomada, tamén ΚΖ, pero se o é ΓΔ, tamén ΖΘ e, se nin ΒΓ nin ΓΔ, nin ΚΖ nin ΖΘ.

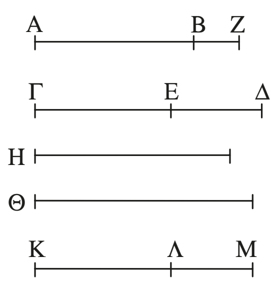
Logo, ΚΘ é binomial cuxos termos ΚΖ e ΖΘ son conmensurables cos termos ΒΓ e ΓΔ da apótoma e gardan a mesma razón, e, ademais, ΚΘ terá a mesma orde que ΒΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 114

Se unha área está contida por apótoma e binomial cuxos termos son conmensurables cos termos da apótoma e gardan a mesma razón, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é expresable.

Pois ben, sexa a área ΑΒ, ΓΔ contida pola apótoma ΑΒ e a binomial ΓΔ cuxo termo maior sexa ΓΕ, sexan os termos da binomial ΓΕ e ΕΔ conmensurables cos termos ΑΖ e ΖΒ da apótoma e garden a mesma razón, e sexa Η a recta cuxo cadrado é equivalente ó contido por ΑΒ e ΓΔ ; digo que Η é expresable.

Pois ben, tómese a expresable Θ e aplíquese en ΓΔ un paralelogramo igual ó cadrado de Θ[1187], facendo en anchura ΚΛ; logo, ΚΛ é apótoma; sexan os seus termos ΚΜ e ΜΛ conmensurables cos termos ΓΕ e ΕΔ da binomial e garden a mesma razón[1188].



[1187] Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
[1188] Proposición X, 112.

Pero, tamén, ΓΕ e ΕΔ son conmensurables con AZ e ZB e gardan a mesma razón; logo, como AZ é a ZB, así KM a MΛ[1189]. Logo, por alternancia, como AZ a KM, así BZ a ΛM[1190]; logo, tamén a restante AB é á restante KΛ como AZ a KM[1191].

Pero AZ é conmensurable con KM[1192]; logo, é conmensurable tamén AB con KΛ[1193].

E, como AB é a KΛ, así o contido por ΓΔ e AB ó contido por ΓΔ e KΛ[1194]; logo, é conmensurable tamén o contido por ΓΔ e AB co contido por ΓΔ e KΛ.

Pero o contido por ΓΔ e KΛ é igual ó cadrado de Θ; logo, é conmensurable o contido por ΓΔ e AB co cadrado de Θ.

Pero o contido por ΓΔ e AB é igual ó cadrado de H; logo, é conmensurable o cadrado de H co de Θ.

Pero o cadrado de Θ é expresable; logo, é tamén expresable o cadrado de H[1195]; logo, H é expresable[1196]. E o seu cadrado é equivalente ó contido por ΓΔ e AB.

Logo, se unha área está contida por apótoma e binomial cuxos termos son conmensurables cos termos da apótoma e gardan a mesma razón, a recta cuxo cadrado é equivalente á área é expresable.

Corolario.- E tamén por isto resúltanos evidente que é posible que unha área expresable estea contida por rectas non expresables; o que, xustamente, era preciso demostrar.

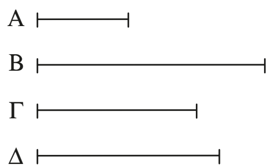
PROPOSICIÓN 115

A partir dunha medial resulta un número infinito de rectas non expresables e ningunha é a mesma que algunha das anteriores[1197]***.***

1189 Proposición V, 11.
1190 Proposición V, 16.
1191 Proposición V, 19.
1192 Proposición X, 12.
1193 Proposición X, 11.
1194 Proposición VI, 1.
1195 Definición X, 1.4.
1196 Definición X, 1.3.
1197 Na Proposición X, 111 proba que os trece tipos de rectas introducidos na Proposición X, 21, nas proposicións X, 36 a X, 41 e nas proposicións X, 73 a X, 78 son diferentes. Contamos

Sexa a medial A; digo que, a partir de A, resulta un número infinito de rectas non expresables e que ningunha é a mesma que algunha das anteriores.

Tómese a expresable B e sexa o cadrado de Γ igual ó contido por B e A[1198]; logo, é non expresable Γ —pois o contido por non expresable e expresable é non expresable[1199].



E non é a mesma que algunha das anteriores —pois o cadrado de ningunha das anteriores aplicado en expresable fai en anchura medial[1200].

Asemade, sexa o cadrado de Δ igual ó contido por B e Γ; logo, o cadrado de Δ é non expresable.

Logo, Δ é non expresable; e non é a mesma que algunha das anteriores —pois o cadrado de ningunha das anteriores aplicado en expresable fai en anchura Γ.

Entón, de xeito semellante, se se segue esta orde ó infinito, é evidente que, da medial, resulta un número infinito de non expresables e ningunha é a mesma que algunha das anteriores; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

ademais coa clasificación das binomiais en seis ordes diferentes e das apótomas noutros seis. Nesta proposición, proba que a partir dunha medial podemos obter unha serie infinita de rectas diferentes: Se a é medial e b expresable $\sqrt{ba}$, $\sqrt{b\sqrt{ba}}$, $\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{ba}}}$, ... é unha serie infinita de rectas diferentes das trece citadas e diferentes entre si.

1198 Proposición II, 14.

1199 Proposición X, 20.

1200 Proposicións X, 60 a X, 65 e proposicións X, 97 a X, 102. Γ é unha recta cuxo cadrado é equivalente á área contida por expresable e medial.

LIBRO XI

DEFINICIÓNS

1. Sólido é o que ten lonxitude, anchura e profundidade[1].
2. O extremo dun sólido é unha superficie.
3. Unha recta está en ángulo recto cun plano cando fai ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano.
4. Un plano está en ángulo recto cun plano cando as rectas trazadas en ángulo recto co corte común dos planos nun dos planos están en ángulo recto co plano restante.
5. Inclinación dunha recta cun plano é o ángulo contido pola recta trazada e a levantada, cando, dende o extremo elevado da recta, se traza unha perpendicular ó plano e, dende o punto resultante ata o extremo da recta no plano, se une unha recta[2].
6. Inclinación dun plano cun plano é o ángulo agudo contido polas rectas trazadas a un mesmo punto en ángulo recto co corte común en cada un dos planos.
7. Dise que un plano ten inclinación semellante a outro plano, cada un con outro, cando os mencionados ángulos das inclinacións son iguais entre si.
8. Planos paralelos son os que non se atopan[3].
9. Figuras sólidas semellantes son as contidas por planos semellantes iguais en número.
10. E figuras sólidas iguais e semellantes son as contidas por planos semellantes iguais en número e en tamaño[4].

---

[1] Definición tradicional.

[2] É o ángulo formado pola recta (a levantada) e a súa proxección no plano (recta que une o punto de corte da recta co plano e o punto de corte da perpendicular ó plano dende o extremo elevado da recta).

[3] A palabra utilizada é o adxectivo ασύμπτωτος «que non se atopan» que posteriormente se aplicou exclusivamente ás asíntotas das curvas.

[4] A tradición manuscrita non pon en dúbida a atribución a Euclides desta definición; porén, Simson e outros si que a cuestionan por razóns de contido. Simson dá un exemplo de dúas figuras que non son iguais e cumpren a Definición XI, 10: Considera unha pirámide

11. Ángulo sólido é a inclinación con todas as liñas producida por máis de dúas liñas que se tocan e non están na mesma superficie. Doutro xeito: ángulo sólido é o contido por máis de dous ángulos planos construídos nun só punto que non están no mesmo plano.
12. Pirámide é unha figura sólida contida por planos, construída dende un único plano a un único punto.
13. Prisma é unha figura sólida contida por planos, dos cales, os dous opostos son iguais, semellantes e paralelos, os demais, paralelogramos.
14. Esfera é a figura que queda comprendida cando, permanecendo fixo o diámetro dun semicírculo, o semicírculo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse.
15. Eixo da esfera é a liña que se mantén fixa, en torno á cal dá voltas o semicírculo[5].
16. Centro da esfera é o mesmo que tamén do semicírculo.
17. E diámetro da esfera é unha recta calquera trazada polo centro e limitada pola superficie da esfera por ambos lados.
18. Cono é a figura que queda comprendida cando, manténdose fixo un lado dos do ángulo recto, o triángulo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse. E, se a recta que se mantén fixa é igual á restante do ángulo recto —a que se fai xirar—,

---

inicial e sobre a súa base constrúe dúas pirámides iguais, máis pequenas que a inicial e opostas pola base. É dicir, unha destas pirámides está incrustada na pirámide inicial e a outra é unha pirámide oposta pola base á inicial. Entón, a figura delimitada pola primeira pirámide e a oposta —suma destas dúas pirámides— e a figura delimitada pola primeira pirámide e a que está incrustada —diferenza destas dúas pirámides— non son iguais e cumpren a Definición XI, 10. Heath, pola súa parte, pensa que Euclides só está considerando figuras con ángulos sólidos triédricos, polo que as definicións 9 e 10 son verdadeiras e atribúeas a Euclides.

[5] É claro que eixo da esfera ten sentido dende un punto de vista construtivo, pola similitude con eixo do cono e do cilindro, pero calquera diámetro da esfera pode servir como eixo da esfera. Euclides non fai uso desta definición en ningunha proposición.

o cono será rectángulo, pero se menor, obtusángulo, e se maior, acutángulo.

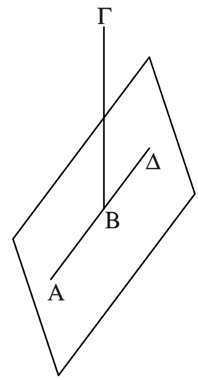
19. Eixo do cono é a recta que se mantén fixa, en torno á cal dá voltas o triángulo.
20. E a súa base é o círculo debuxado pola recta que xira.
21. Cilindro é a figura que queda comprendida cando, nun paralelogramo de ángulos rectos, manténdose fixo un lado dos do ángulo recto, o paralelogramo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse.
22. Eixo do cilindro é a recta que se mantén fixa, en torno á cal dá voltas o paralelogramo.
23. E as súas bases son os círculos debuxados polos dous lados opostos que dan voltas.
24. Conos e cilindros semellantes son aqueles dos cales os eixos e os diámetros das bases son proporcionais.
25. Cubo é unha figura sólida contida por seis cadrados iguais.
26. Octaedro é unha figura sólida contida por oito triángulos iguais e equiláteros.
27. Icosaedro é unha figura sólida contida por vinte triángulos iguais e equiláteros.
28. Dodecaedro é unha figura sólida contida por doce pentágonos iguais, equiláteros e equiángulos.

PROPOSICIÓN 1

Non é posible que unha parte dunha liña recta estea no plano base[6], mentres que outra parte no máis elevado.

Pois ben, se é posible, estea unha parte, AB, dunha liña recta, ΑΒΓ, no plano base, mentres que outra parte, ΒΓ, no máis elevado.

[6] Para o significado de ὑποκεῖμαι véxase a Nota 129 (Proposición I, 26).



Entón, haberá unha recta continuamente en liña recta con AB no plano base. Sexa BΔ; logo, AB é segmento común das dúas rectas, ABΓ e ABΔ; o que, sen dúbida, é imposible, posto que, se debuxamos un círculo co centro B e a distancia AB, os diámetros separarán circunferencias do círculo desiguais.

Logo, non é posible que unha parte dunha liña recta estea no plano base, mentres que outra no máis elevado; o que, xustamente, era preciso demostrar.

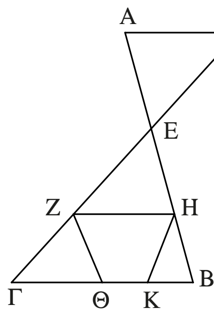
PROPOSICIÓN 2

Se dúas rectas se cortan, están nun único plano e todo triángulo está nun único plano.

Pois ben, córtense as dúas rectas AB e ΓΔ no punto E; digo que AB e ΓΔ están nun único plano e que todo triángulo está nun único plano.

Pois ben, en EΓ e EB, tómense os puntos Z e H ó azar, trácense ΓB e ZH e lévense ZΘ e HK; digo, primeiro, que o triángulo EΓB está nun único plano.

Pois, se unha parte do triángulo EΓB, ou ZΘΓ ou HBK, está no base, mentres que o restante noutro, tamén unha parte dunha das rectas, EΓ e EB, estará no plano base, mentres que a outra, noutro. Pero se a parte ZΓBH do triángulo EΓB está no plano base, mentres que a restante, noutro, estará tamén unha parte de ambas rectas, ΕΓ e ΕΒ, no plano base, mentres que a outra noutro; o que, xustamente, foi demostrado que é absurdo[7].



Logo, o triángulo ΕΓΒ está nun único plano.

Pero no que está o triángulo ΕΓΒ, nese tamén están tanto ΕΓ como ΕΒ, mentres que, no que están tanto ΕΓ como ΕΒ, nese tamén, ΑΒ e ΓΔ.

Logo, as rectas ΑΒ e ΓΔ están nun único plano e todo triángulo está nun único plano; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 3

Se dous planos se cortan un ó outro, o seu corte común é unha recta.

Pois ben, córtense os planos ΑΒ e ΒΓ un ó outro e sexa o seu corte común a liña ΔΒ; digo que a liña ΔΒ é recta.

Pois se non, únase dende Δ ata Β, no plano ΑΒ, a recta ΔΕΒ e, no plano ΒΓ, a recta ΔΖΒ.

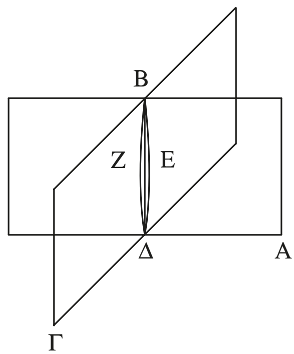
Entón, as dúas rectas ΔΕΒ e ΔΖΒ terán os mesmos extremos e conterán, evidentemente, un área; o que, sen dúbida, é absurdo[8].

Logo, ΔΕΒ e ΔΖΒ non son rectas.

---

7 Proposición XI, 1.
8 Noción Común 9.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que non haberá ningunha outra recta unida dende Δ ata B excepto ΔB, corte común dos planos AB e BΓ.



Logo, se dous planos se cortan un ó outro, o seu corte común é unha recta; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

Se, no corte común, se levanta unha recta en ángulo recto con dúas rectas que se cortan unha á outra, tamén estará en ángulo recto co plano que vai por elas.

Pois ben, dende E, levántese unha recta EZ en ángulo recto con dúas rectas AB e ΓΔ que se cortan no punto E; digo que EZ está tamén en ángulo recto co plano que vai por AB e ΓΔ.

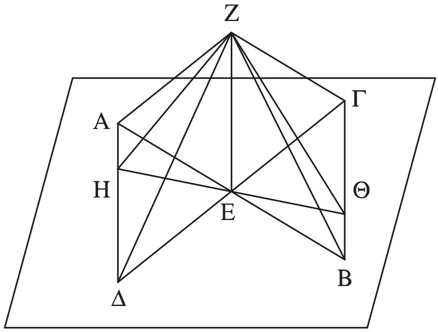
Pois ben, cóllanse AE, EB, ΓE e EΔ iguais entre si, lévese unha ó azar, HEΘ, por E, trácense AΔ e ΓB e, ademais, dende un punto Z ó azar, trácense ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ e ZB.

E, dado que as dúas rectas AE e EΔ son iguais ás dúas rectas ΓE e EB e conteñen ángulos iguais[9], logo, a base AΔ é igual á base ΓB e o triángulo AEΔ será igual ó triángulo ΓEB; en consecuencia, tamén o ángulo ΔAE é igual ó ángulo EBΓ[10].

Pero tamén o ángulo AEH é igual ó BEΘ[11].

---

9 Proposición I, 15.
10 Proposición I, 4.
11 Proposición I, 15.



Entón, AHE e BEΘ son dous triángulos que teñen dous ángulos iguais a dous ángulos respectivamente, e un lado —o dos ángulos iguais—, igual a un lado, AE a EB; logo, tamén terán os demais lados iguais ós demais lados[12]. Logo, HE é igual a EΘ, mentres que AH a BΘ.

E, dado que AE é igual a EB, mentres que ZE, común e en ángulo recto, logo, a base ZA é igual á base ZB[13].

Entón, polo mesmo, tamén ZΓ é igual a ZΔ.

E, dado que AΔ é igual a ΓB, mentres que tamén é igual ZA a ZB, entón, os dous lados ZA e AΔ son iguais ós dous lados ZB e BΓ respectivamente; e foi demostrado que a base ZΔ é igual á base ZΓ; logo, tamén o ángulo ZAΔ é igual ó ángulo ZBΓ[14].

E, dado que, asemade, foi demostrado que AH é igual a BΘ, pero tamén, efectivamente, ZA é igual a ZB, entón, os dous lados, ZA e AH, son iguais ós dous lados ZB e BΘ. E foi demostrado que o ángulo ZAH é igual ó ZBΘ; logo, a base ZH é igual á base ZΘ[15].

E, dado que, asemade, foi demostrado que HE é igual a EΘ, mentres que EZ, común, entón, os dous lados HE e EZ son iguais ós dous lados ΘE e EZ; e a base ZH é igual á base ZΘ; logo, o ángulo HEZ é igual a ΘEZ[16].

Logo, cada un dos ángulos HEZ e ΘEZ é recto. Logo, ZE está en ángulo recto con HΘ que foi trazada ó azar por E.

---

12 Proposición I, 26.
13 Proposición I, 4.
14 Proposición I, 8.
15 Proposición I, 4.
16 Proposición I, 8.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que ZE fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano base.

Pero unha recta está en ángulo recto cun plano cando fai ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no mesmo plano[17]; logo, ZE está en ángulo recto co plano base.

Pero o plano base é o que vai polas rectas AB e ΓΔ. Logo, ZE está en ángulo recto co plano que vai por AB e ΓΔ.

Logo, se, no corte común, se levanta unha recta en ángulo recto con dúas rectas que se cortan unha á outra, tamén estará en ángulo recto co plano que vai por elas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

Se, no corte común, se levanta unha recta en ángulo recto con tres rectas que se tocan, as tres rectas están nun único plano.

Pois ben, levántese unha recta AB en ángulo recto con tres rectas BΓ, BΔ e BE no punto de contacto B; digo que BΓ, BΔ e BE están nun único plano.

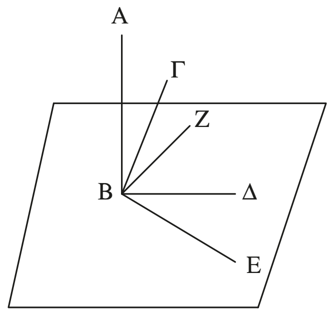
Supoñamos que non, entón, se é posible, estean BΔ e BE no plano base[18] e BΓ nun máis elevado, e prolónguese o plano que vai por AB e BΓ[19]; entón, no plano base, fará unha recta como corte común[20]. Faga BZ.

Logo, están nun único plano, no levado por AB e BΓ, as tres rectas AB, BΓ e BZ.

E, dado que AB está en ángulo recto tanto con BΔ como con BE, logo, tamén está en ángulo recto AB co plano que vai por BΔ e BE[21]. Pero o plano que vai por BΔ e BE é o plano base; logo, AB está en ángulo recto co plano base.

---

17 Definición XI, 3.
18 Proposición XI, 2.
19 Proposición XI, 2.
20 Proposición XI, 3.
21 Proposición XI, 4.



En consecuencia, tamén, AB fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano base[22].

Pero BZ, estando no plano base, tócaa; logo, o ángulo ABZ é recto.

Pero tamén se supón recto ABΓ; logo, o ángulo ABZ é igual a ABΓ. E están nun único plano; o que, sen dúbida é imposible.

Logo, a recta BΓ non está nun plano máis elevado; logo, as tres rectas BΓ, BΔ e BE están nun único plano.

Logo, se, no punto de contacto, se levanta unha recta en ángulo recto con tres rectas que se tocan, as tres rectas están nun único plano; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6

Se dúas rectas están en ángulo recto co mesmo plano, as rectas serán paralelas.

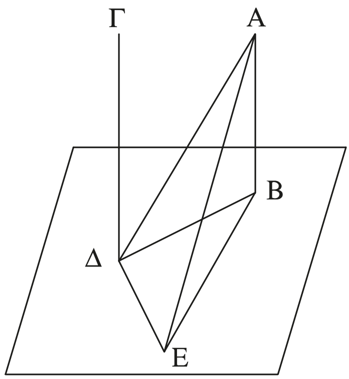
Pois ben, estean as dúas rectas AB e ΓΔ en ángulo recto co plano base; digo que é paralela AB a ΓΔ.

Pois ben, topen co plano base nos puntos B e Δ, únase a recta BΔ, trácese ΔE en ángulo recto con BΔ[23] no plano base, póñase ΔE igual a AB[24] e fáganse BE, AE e AΔ.

E, dado que AB está en ángulo recto co plano base, tamén fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están

[22] Definición XI, 3.
[23] Proposición I, 11.
[24] Proposición I, 3.

no plano base[25]. Pero tanto BΔ como BE tocan a AB, estando no plano base; logo, cada un dos ángulos ABΔ e ABE é recto.



Entón, polo mesmo, tamén tanto ΓΔB como ΓΔE son rectos.

E, dado que AB é igual a ΔE, mentres que BΔ, común, entón, os dous lados AB e BΔ son iguais ós dous lados EΔ e ΔB; e conteñen ángulos rectos; logo, a base AΔ é igual á base BE[26].

E, dado que AB é igual a ΔE, pero tamén AΔ a BE, entón, os dous lados AB e BE son iguais ós dous lados EΔ e ΔA; e a súa base AE, común; logo, o ángulo ABE é igual a EΔA[27].

Pero ABE é recto; logo, tamén o ángulo EΔA é recto; logo, EΔ está en ángulo recto con ΔA. Pero tamén está en ángulo recto tanto con BΔ como con ΔΓ. Logo, EΔ está levantada en ángulo recto coas tres rectas BΔ, ΔA e ΔΓ no punto de contacto; logo, as tres rectas BΔ, ΔA e ΔΓ están nun único plano[28].

Pero no que están ΔB e ΔA, nese tamén está AB —pois todo triángulo está nun único plano[29]—; logo, as rectas AB, BΔ e ΔΓ están nun único plano. E, cada un dos ángulos ABΔ e BΔΓ é recto; logo, AB é paralela a ΓΔ[30].

---

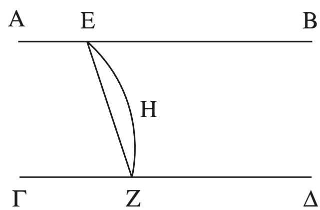
25 Definición XI, 3.
26 Proposición I, 4.
27 Proposición I, 8.
28 Definición XI, 5.
29 Definición XI, 2.
30 Proposición I, 28.

Logo, se dúas rectas están en ángulo recto co mesmo plano, as rectas serán paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Se dúas rectas son paralelas e se toman puntos ó azar en cada unha delas, a recta unida polos puntos está no mesmo plano que as paralelas.

Sexan as dúas rectas paralelas AB e ΓΔ, e tómense en cada unha delas os puntos E e Z ó azar; digo que a recta unida polos puntos E e Z está no mesmo plano que as paralelas.



Supoñamos que non, entón, se é posible, estea nun máis elevado, como EHZ, e lévese un plano por EHZ; entón, fará como corte unha recta no plano base. Faga unha como EZ[31]; logo, as dúas rectas EHZ e EZ conterán unha área; o que, sen dúbida é imposible[32].

Logo, a recta unida dende E ata Z non está nun plano máis elevado; logo, a recta unida dende E ata Z está no plano que vai polas paralelas AB e ΓΔ.

Logo, se dúas rectas son paralelas e se toman puntos ó azar en cada unha delas, a recta unida polos puntos está no mesmo plano que as paralelas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

31 Proposición XI, 3.

32 Noción Común 9.

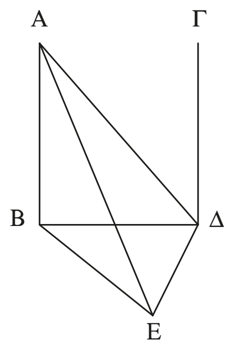
PROPOSICIÓN 8

Se dúas rectas son paralelas e unha delas está en ángulo recto cun plano calquera, tamén a restante estará en ángulo recto co mesmo plano.

Sexan as dúas rectas paralelas AB e ΓΔ, e unha delas, AB, estea en ángulo recto co plano base; digo que tamén a restante, ΓΔ, estará en ángulo recto co mesmo plano.

Pois ben, topen AB e ΓΔ co plano base nos puntos B e Δ, e únase BΔ; logo, AB, ΓΔ e BΔ están nun único plano[33].

Trácese ΔE en ángulo recto con BΔ[34] no plano base, póñase ΔE igual a AB[35] e fáganse BE, AE e AΔ.



E, dado que AB está en ángulo recto co plano base, logo, tamén AB está en ángulo recto con todas as rectas que a tocan e que están no plano base[36]; logo, cada un dos ángulos ABΔ e ABE é recto.

E, dado que a recta BΔ incidiu nas paralelas AB e ΓΔ, logo, os ángulos ABΔ e ΓΔB son iguais a dous rectos[37].

Pero ABΔ é recto; logo, tamén é recto ΓΔB; logo, ΓΔ está en ángulo recto con BΔ.

---

33 Proposición XI, 7.
34 Proposición I, 11.
35 Proposición I, 3.
36 Definición XI, 3.
37 Proposición I, 29.

E, dado que é igual AB a ΔE, mentres que BΔ, común, entón, os dous lados AB e BΔ son iguais ós dous lados EΔ e ΔB; e o ángulo ABΔ é igual a EΔB —pois cada un deles é recto—; logo, a base AΔ é igual á base BE[38].

E, dado que é igual AB a ΔE, mentres que BE a AΔ, entón, os dous lados AB e BE son iguais ós dous lados EΔ e ΔA respectivamente. E a súa base, AE, común; logo, o ángulo ABE é igual a EΔA[39].

Pero ABE é recto; logo, tamén é recto EΔA; logo, EΔ está en ángulo recto con AΔ. Pero está tamén en ángulo recto con ΔB; logo, EΔ está en ángulo recto co plano que vai por BΔ e ΔA[40].

Logo, tamén EΔ fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano que vai por BΔA. Pero ΔΓ está no plano que vai por BΔA —posto que, precisamente, no plano que vai por BΔA están AB e BΔ[41] e no que están AB e BΔ, nese tamén ΔΓ—. Logo, EΔ está en ángulo recto con ΔΓ; en consecuencia, tamén ΓΔ está en ángulo recto con ΔE.

Pero tamén ΓΔ está en ángulo recto con BΔ. Logo, ΓΔ está levantada dende o corte, no punto Δ, en ángulo recto con dúas rectas que se cortan unha á outra, ΔE e ΔB; en consecuencia, tamén ΓΔ está en ángulo recto co plano que vai por ΔE e ΔB[42].

Pero o plano que vai por ΔE e ΔB é o base; logo, ΓΔ está en ángulo recto co plano base.

Logo, se dúas rectas son paralelas e unha delas está en ángulo recto cun plano, tamén a restante estará en ángulo recto co mesmo plano; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

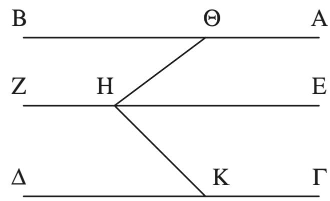
38 Proposición I, 4.
39 Proposición I, 8.
40 Proposición XI, 4.
41 Proposición XI, 2.
42 Proposición XI, 4.

PROPOSICIÓN 9

As paralelas á mesma recta e que non están no mesmo plano que ela tamén son paralelas entre si.

Sexan tanto ΑΒ como ΓΔ paralelas a ΕΖ, non estando no mesmo plano que ela; digo que é paralela ΑΒ a ΓΔ.

Pois ben, tómese o punto Η ó azar en ΕΖ e, dende el, trácese ΗΘ en ángulo recto con ΕΖ no plano que vai por ΕΖ e ΑΒ[43], mentres que, no que vai por ΖΕ e ΓΔ, trácese ΗΚ, de novo en ángulo recto con ΕΖ.



E, dado que ΕΖ está en ángulo recto tanto con ΗΘ como con ΗΚ, logo, ΕΖ tamén está en ángulo recto co plano que vai por ΗΘ e ΗΚ[44].

E ΕΖ é paralela a ΑΒ; logo, tamén ΑΒ está en ángulo recto co plano que vai por ΘΗΚ[45]. Entón, polo mesmo, tamén ΓΔ está en ángulo recto co plano que vai por ΘΗΚ; logo tanto ΑΒ como ΓΔ están en ángulo recto co plano que vai por ΘΗΚ.

Pero, se dúas rectas están en ángulo recto co mesmo plano, as rectas son paralelas[46]; logo, é paralela ΑΒ a ΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

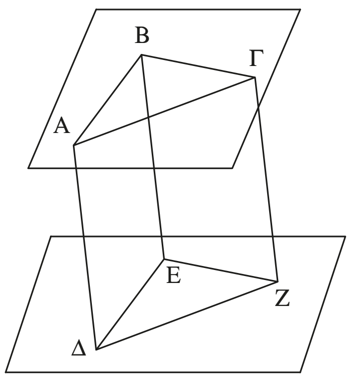
43 Definición I, 23 e Proposición I, 11.
44 Proposición XI, 4.
45 Proposición XI, 8.
46 Proposición XI, 6.

PROPOSICIÓN 10

Se dúas rectas que se tocan están en paralelo a dúas rectas que se tocan, non estando no mesmo plano, conterán ángulos iguais.

Pois ben, estean as dúas rectas que se tocan, ΑΒ e ΒΓ, en paralelo a dúas rectas ΔΕ e ΕΖ que se tocan, non estando no mesmo plano; digo que é igual o ángulo ΑΒΓ a ΔΕΖ.

Pois ben, cóllanse ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ e ΕΖ, iguais entre si, e trácense ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ e ΔΖ.



E, dado que ΒΑ é igual e paralela a ΕΔ, logo, tamén ΑΔ é igual e paralela a ΒΕ[47]. Entón, polo mesmo, tamén ΓΖ é igual e paralela a ΒΕ; logo, tanto ΑΔ como ΓΖ son iguais e paralelas a ΒΕ.

Pero as paralelas á mesma recta e que non están no mesmo plano que ela tamén son paralelas entre si[48]; logo, é paralela ΑΔ a ΓΖ, e igual.

E ΑΓ e ΔΖ únenas; logo, tamén ΑΓ é igual e paralela a ΔΖ[49].

47 Proposición I, 33.
48 Proposición XI, 9.
49 Proposición I, 33.

E, dado que os dous lados AB e BΓ son iguais ós dous lados ΔE e EZ, e que a base AΓ é igual á base ΔZ, logo, o ángulo ABΓ é igual ó ángulo ΔEZ[50].

Logo, se dúas rectas que se tocan están en paralelo a dúas rectas que se tocan, non estando no mesmo plano, conterán ángulos iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

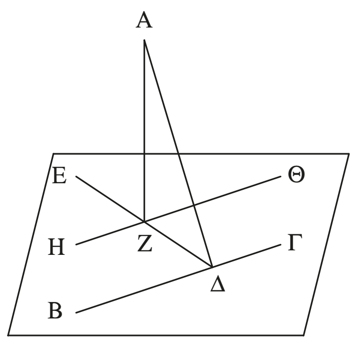
PROPOSICIÓN 11

Dende o punto elevado dado, trazar unha liña recta perpendicular ó plano dado.

Sexa A o punto elevado dado e o plano dado sexa o base; é preciso, entón, dende o punto A, trazar unha liña recta perpendicular ó plano base.

Pois ben, lévese, no plano base, unha recta ó azar, BΓ, e trácese, dende o punto A, a perpendicular AΔ a BΓ[51]. Entón, se AΔ é perpendicular tamén ó plano base, resultaría o proposto.

Pero se non, dende o punto Δ, trácese ΔE en ángulo recto con BΓ no plano base[52] e, dende A, trácese AZ perpendicular a ΔE e, polo punto Z, trácese HΘ paralela a BΓ[53].



50 Proposición I, 8.
51 Proposición I, 12.
52 Proposición I, 11.
53 Proposición I, 31.

E, dado que ΒΓ está en ángulo recto tanto con ΔΑ como con ΔΕ, logo, tamén ΒΓ está en ángulo recto co plano que vai por ΕΔΑ[54]. E ΗΘ é paralela a ela.

Pero, se dúas rectas son paralelas e unha delas está en ángulo recto cun plano calquera, tamén a restante estará en ángulo recto co mesmo plano[55]; logo, tamén ΗΘ está en ángulo recto co plano que vai por ΕΔ e ΔΑ.

Logo, tamén ΗΘ está en ángulo recto con todas as rectas que a tocan e que están no plano que vai por ΕΔ e ΔΑ[56]. Pero ΑΖ, estando no plano que vai por ΕΔ e ΔΑ, tócaa; logo, tamén ΗΘ está en ángulo recto con ΖΑ; en consecuencia, tamén ΖΑ está en ángulo recto con ΘΗ.

Pero ΑΖ tamén está en ángulo recto con ΔΕ; logo, ΑΖ está en ángulo recto tanto con ΗΘ como con ΔΕ. Pero, se unha recta se levanta en ángulo recto con dúas rectas que se cortan, no corte común, tamén estará en ángulo recto co plano que vai por elas[57]; logo, ΖΑ está en ángulo recto co plano que vai por ΕΔ e ΗΘ.

Pero o plano que vai por ΕΔ e ΗΘ é o base; logo ΑΖ está en ángulo recto co plano base.

Logo, dende o punto elevado dado Α, queda trazada a liña recta ΑΖ perpendicular ó plano base; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 12

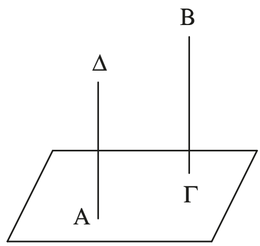
Levantar unha liña recta en ángulo recto co plano dado dende o punto dado nel.

Sexa o plano dado o base, e Α, o punto nel; é preciso, entón, dende o punto Α, levantar unha liña recta en ángulo recto co plano base.

---

54 Proposición XI, 4.
55 Proposición XI, 8.
56 Definición XI, 3.
57 Proposición XI, 4.

Considérese un punto elevado, Β, e, dende Β, trácese ΒΓ perpendicular ó plano base[58] e, polo punto Α, trácese ΑΔ paralela a ΒΓ[59].



Entón, dado que ΑΔ e ΓΒ son dúas rectas paralelas e unha delas, ΒΓ, está en ángulo recto co plano base, logo, tamén a restante, ΑΔ, está en ángulo recto co plano base[60].

Logo, queda levantada ΑΔ en ángulo recto co plano dado dende o seu punto Α. O que, xustamente era preciso facer.

PROPOSICIÓN 13

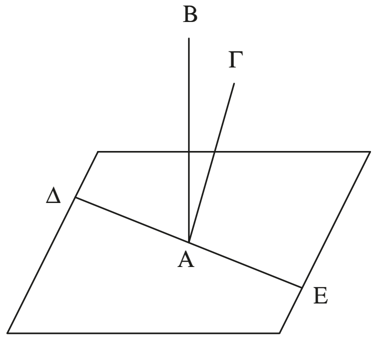
Dende o mesmo punto, non se levantarán polo mesmo lado dúas rectas en ángulo recto co mesmo plano.

Pois ben, se é posible, dende o mesmo punto, Α, levántense, polo mesmo lado as dúas rectas ΑΒ e ΑΓ en ángulo recto co plano base e trácese o plano que vai por ΒΑ e ΑΓ; entón, fará como corte unha recta a través de Α no plano base[61].

Faga ΔΑΕ; logo, as rectas ΑΒ, ΑΓ e ΔΑΕ están nun único plano.

E, dado que ΓΑ está en ángulo recto co plano base, logo, tamén fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano base[62].

58 Proposición XI, 11.
59 Proposición I, 31.
60 Proposición XI, 8.
61 Proposición XI, 3.
62 Definición XI, 3.



Pero ΔAE, estando no plano base, tócaa; logo, o ángulo ΓAE é recto.

Entón, polo mesmo, tamén BAE é recto; logo, ΓAE é igual a BAE. E están nun único plano; o que, sen dúbida é imposible.

Logo, dende o mesmo punto, non se levantarán polo mesmo lado dúas rectas en ángulo recto co mesmo plano; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

Os planos cos que a mesma recta está en ángulo recto, eses planos serán paralelos.

Pois ben, estea unha recta AB en ángulo recto con cada un dos planos ΓΔ e EZ; digo que os planos son paralelos.

Pois se non, prolongados, atoparanse. Atópense; farán, entón, unha recta, como corte común[63].

Fagan HΘ, tómese en HΘ o punto K ó azar, e trácense AK e BK.

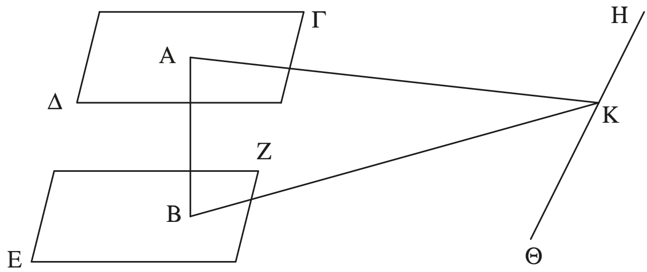
E, dado que AB está en ángulo recto co plano EZ, logo, tamén AB está en ángulo recto coa recta BK que está no plano EZ que se prolongou[64]; logo, o ángulo ABK é recto.

Entón, polo mesmo, tamén BAK é recto.

---

[63] Proposición XI, 3.

[64] Definición XI, 3.



Entón, do triángulo ABK, os dous ángulos ABK e BAK son iguais a dous rectos; o que, sen dúbida, é imposible[65].

Logo, os planos ΓΔ e EZ, prolongados, non se atoparán; logo, son paralelos os planos ΓΔ e EZ[66].

Logo, os planos cos que a mesma recta está en ángulo recto, eses planos son paralelos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 15

Se dúas rectas que se tocan están en paralelo a dúas rectas que se tocan, non estando no mesmo plano, os planos que van por elas son paralelos.

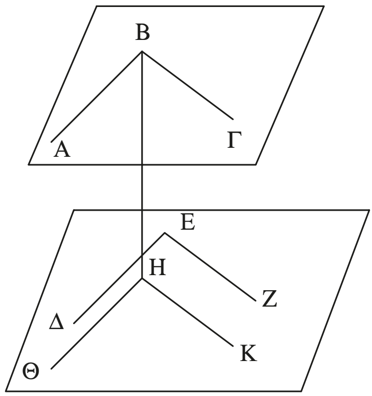
Pois ben, estean as dúas rectas que se tocan AB e BΓ en paralelo coas dúas rectas que se tocan, ΔE e EZ, non estando no mesmo plano; digo que os planos que van por AB, BΓ, ΔE e EZ, prolongados[67], non se atoparán uns cos outros.

Pois ben, dende o punto B, trácese BH perpendicular ó plano que vai por ΔE e EZ[68], topen co plano no punto H e, por H, trácese HΘ paralela a EΔ[69], mentres que HK a EZ.

E, dado que BH está en ángulo recto co plano que vai por ΔE e EZ, logo, tamén fará ángulos rectos con todas as rectas que a

65 Proposición I, 17.
66 Definición XI, 8.
67 Enténdase: o plano que vai por AB e BΓ e o que vai por ΔE e EZ.
68 Proposición XI, 11.
69 Proposición I, 31.

tocan e que están no plano que vai por ΔE e EZ[70]. Pero tanto HΘ como HK, estando no plano que vai por ΔE e EZ, tócana; logo, cada un dos ángulos BHΘ e BHK é recto.



E, dado que é paralela BA a HΘ[71], logo, os ángulos HBA e BHΘ son iguais a dous rectos[72].

Pero o ángulo BHΘ é recto; logo, é recto tamén HBA; logo, HB está en ángulo recto con BA.

Entón, polo mesmo, HB está tamén en ángulo recto con BΓ.

Así, dado que a recta HB está levantada en ángulo recto con dúas rectas, BA e BΓ, que se cortan, logo, HB tamén está en ángulo recto co plano que vai por BA e BΓ[73].

E os planos cos que a mesma recta está en ángulo recto, eses planos son paralelos[74]; logo, é paralelo o plano que vai por AB e BΓ co que vai por ΔE e EZ.

Logo, se dúas rectas que se tocan están en paralelo a dúas rectas que se tocan, non estando no mesmo plano, os planos que van por elas son paralelos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

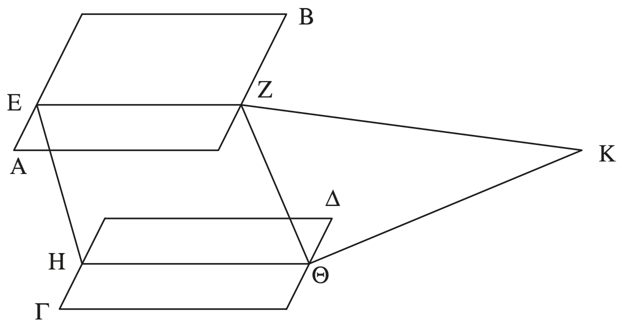
70 Definición XI, 3.
71 Proposición XI, 9.
72 Proposición I, 29.
73 Proposición XI, 4.
74 Proposición XI, 14.

PROPOSICIÓN 16

Se dous planos paralelos son cortados por un plano calquera, os seus cortes comúns son paralelos.

Pois ben, sexan cortados os dous planos paralelos AB e ΓΔ polo plano EZHΘ, e sexan os seus cortes comúns EZ e HΘ; digo que EZ é paralela a HΘ.

Pois se non, EZ e HΘ, prolongadas ben polos lados Z e Θ, ben por E e H, atoparanse. Prolónguense polos lados Z e Θ e atópense primeiro en K.



E, dado que EZK está no plano AB, logo, tamén todos os puntos de EZK están no plano AB[75]. Pero K é un dos puntos da recta EZK; logo, K está no plano AB.

Entón, polo mesmo, K tamén está no plano ΓΔ; logo, os planos AB e ΓΔ, prolongados, atoparanse.

Pero non se atopan por supoñer que son paralelos; logo, as rectas EZ e HΘ, prolongadas polos lados Z e Θ, non se atoparán.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que as rectas EZ e HΘ, prolongadas polos lados E e H, non se atoparán.

Pero as que non se atopan por ningún dos lados son paralelas[76]. Logo, é paralela EZ a HΘ.

Logo, se dous planos paralelos son cortados por un plano, os seus cortes comúns son paralelos; o que, xustamente era preciso demostrar.

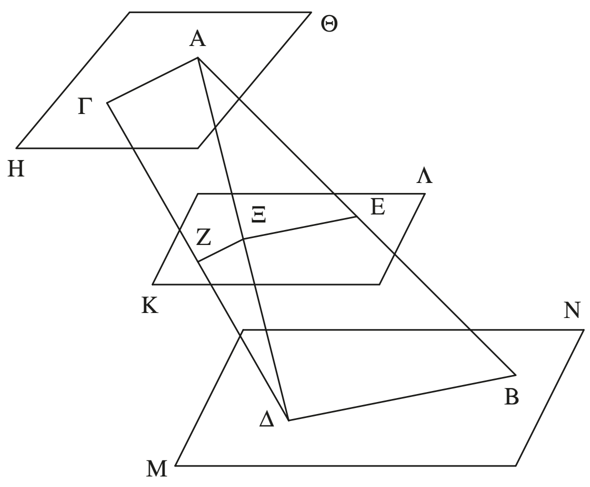
75 Proposición XI, 1.
76 Definición I, 23.

PROPOSICIÓN 17

Se dúas rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas segundo as mesmas razóns.

Pois ben, sexan cortadas as rectas ΑΒ e ΓΔ polos planos paralelos ΗΘ, ΚΛ e ΜΝ nos puntos Α, Ε, Β, Γ, Ζ e Δ; digo que, como a recta ΑΕ é a ΕΒ, así ΓΖ a ΖΔ.

Pois ben, trácense ΑΓ, ΒΔ e ΑΔ, tope ΑΔ co plano ΚΛ no punto Ξ e trácense ΕΞ e ΞΖ.



E, dado que os dous planos paralelos ΚΛ e ΜΝ son cortados polo plano ΕΒΔΞ, os seus cortes comúns, ΕΞ e ΒΔ, son paralelos[77]. Entón, polo mesmo, dado que os dous planos paralelos ΗΘ e ΚΛ son cortados polo plano ΑΞΖΓ, os seus cortes comúns ΑΓ e ΞΖ son paralelos.

E, dado que a recta ΕΞ está trazada en paralelo a un dos lados, ΒΔ, do triángulo ΑΒΔ, logo, proporcionalmente, como ΑΕ é a ΕΒ, así ΑΞ a ΞΔ[78]. Asemade, dado que a recta ΞΖ está trazada en paralelo a un dos lados, ΑΓ, do triángulo ΑΔΓ, proporcionalmente, como ΑΞ é a ΞΔ así ΓΖ a ΖΔ.

[77] Proposición XI, 16.
[78] Proposición VI, 2.

Pero foi demostrado tamén que, como AΞ a ΞΔ, así AE a EB; logo, tamén, como AE a EB, así ΓZ a ZΔ[79].

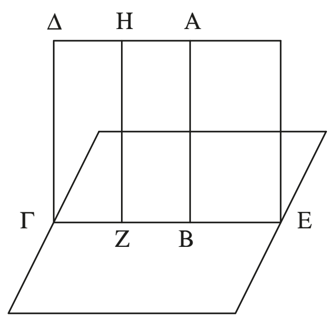
Logo, se dúas rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas segundo as mesmas razóns; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

Se unha recta está en ángulo recto cun plano calquera, tamén todos os planos que van por ela estarán en ángulo recto co mesmo plano.

Pois ben, estea unha recta AB en ángulo recto co plano base; digo que todos os planos que van por AB están en ángulo recto co plano base.

Pois ben, prolónguese o plano ΔE por AB, sexa ΓE o corte común do plano ΔE e do base[80], tómese o punto Z ó azar en ΓE e, dende Z, trácese ZH en ángulo recto con ΓE no plano ΔE[81].



E, dado que AB está en ángulo recto co plano base, logo, tamén AB está en ángulo recto con todas as rectas que a tocan e que están no plano base[82]; en consecuencia, tamén está en ángulo recto con ΓE; logo, o ángulo ABZ é recto. Pero tamén é recto HZB; logo, é paralela AB a ZH[83].

---

79 Proposición V, 11.

80 Proposición XI, 3.

81 Proposición I, 11.

82 Definición XI, 3.

83 Proposición I, 28.

Pero AB está en ángulo recto co plano base; logo, tamén ZH está en ángulo recto co plano base[84].

E, un plano está en ángulo recto cun plano cando as rectas trazadas nun dos planos en ángulo recto co corte común dos planos están en ángulo recto co plano restante[85]. E foi demostrado que ZH, trazada nun dos planos, ΔE, en ángulo recto co corte común dos planos, ΓE, está en ángulo recto co plano base; logo, o plano ΔE está en ángulo recto co plano base.

Entón, de xeito semellante tamén se poderá demostrar que todos os planos que van por AB cadran en ángulo recto co plano base.

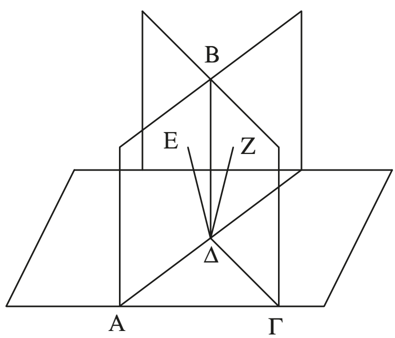
Logo, se unha recta está en ángulo recto cun plano calquera, tamén todos os planos que van por ela estarán en ángulo recto co mesmo plano; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 19

Se dous planos que se cortan un ó outro están en ángulo recto cun plano calquera, tamén o seu corte común estará en ángulo recto co mesmo plano.

Pois ben, estean os planos AB e BΓ en ángulo recto co plano base, e sexa BΔ o seu corte común; digo que BΔ está en ángulo recto co plano base.

Supoñamos que non e, dende o punto Δ, no plano AB, trácese ΔE en ángulo recto coa recta AΔ, e ΔZ, no plano BΓ, en ángulo recto con ΓΔ[86].



84 Proposición XI, 8.
85 Definición XI, 4.
86 Proposición I, 11.

E, dado que o plano AB está en ángulo recto co base e que ΔE está trazada no plano AB en ángulo recto co seu corte común AΔ, logo, ΔE está en ángulo recto co plano base[87].

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén ΔZ está en ángulo recto co plano base.

Logo, dende o mesmo punto, Δ, dúas rectas en ángulo recto co plano base están levantadas polo mesmo lado; o que, sen dúbida, é imposible[88].

Logo, dende o punto Δ, non se levantará ningunha recta en ángulo recto co plano base excepto ΔB, o corte común dos planos AB e BΓ.

Logo, se dous planos que se cortan están en ángulo recto cun plano calquera, tamén o seu corte común estará en ángulo recto co mesmo plano; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 20

Se un ángulo sólido é contido por tres ángulos planos, dous calquera, tomados xuntos de calquera xeito, son maiores que o restante.

Pois ben, sexa contido o ángulo sólido A por tres ángulos planos, BAΓ, ΓAΔ e ΔAB; digo que dous calquera dos ángulos BAΓ, ΓAΔ e ΔAB, tomados xuntos de calquera xeito, son maiores que o restante.

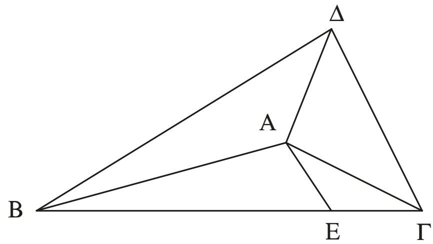
Entón, se os ángulos BAΓ, ΓAΔ e ΔAB son iguais entre si, é evidente que dous calquera son maiores que o restante.

Pero se non, sexa maior BAΓ, constrúase na recta AB e no seu punto A, no plano que vai por BAΓ, o ángulo BAE igual ó ángulo ΔAB[89], póñase AE igual a AΔ, corte BEΓ, trazada polo punto E, as rectas AB e AΓ polos puntos B e Γ, e trácense ΔB e ΔΓ.

87 Definición XI, 4.

88 Proposición XI, 13.

89 Proposición XI, 2 e Proposición I, 23.



E, dado que é igual ΔA a AE, mentres que AB, común, dous lados son iguais a dous lados; e o ángulo ΔAB é igual a BAE; logo, a base ΔB é igual á base BE[90].

E, dado que os dous lados BΔ e ΔΓ son maiores que BΓ[91], parte dos cales, ΔB, foi demostrado que é igual a BE, logo, o restante ΔΓ é maior que o restante EΓ.

E, dado que ΔA é igual a AE, mentres que AΓ, común, e que a base ΔΓ é maior que a base EΓ, logo, o ángulo ΔAΓ é maior que o ángulo EAΓ[92].

Pero foi demostrado que tamén ΔAB é igual a BAE; logo, os ángulos ΔAB e ΔAΓ son maiores que BAΓ.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén os restantes, tomados xuntos dous a dous, son maiores que o restante.

Logo, se un ángulo sólido é contido por tres ángulos planos, dous calquera, tomados xuntos de calquera xeito, son maiores que o restante; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 21

Todo ángulo sólido é contido por ángulos planos menores que catro rectos.

Sexa o ángulo sólido A contido polos ángulos planos BAΓ, ΓAΔ e ΔAB[93]; digo que os ángulos BAΓ, ΓAΔ e ΔAB son menores que catro rectos.

---

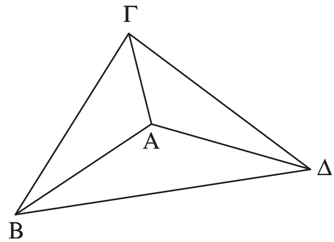
90 Proposición I, 4.

91 Proposición I, 20.

92 Proposición I, 25.

93 Como noutros moitos casos —véxase a Nota 127 (Proposición VI, 20)—, Euclides formula un enunciado xeral para calquera ángulo sólido e limita a demostración ó caso en

Pois ben, tómense os puntos Β, Γ e Δ ó azar, un en cada unha das rectas ΑΒ, ΑΓ e ΑΔ, e trácense ΒΓ, ΓΔ e ΔΒ.



E, dado que o ángulo sólido Β é contido por tres ángulos planos, ΓΒΑ, ΑΒΔ e ΓΒΔ, dous calquera son maiores que o restante[94]; logo, ΓΒΑ e ΑΒΔ son maiores que ΓΒΔ.

Entón, polo mesmo, tamén ΒΓΑ e ΑΓΔ son maiores que ΒΓΔ, mentres que ΓΔΑ e ΑΔΒ son maiores que ΓΔΒ; logo, os seis ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ e ΑΔΒ son maiores que os tres ángulos ΓΒΔ, ΒΓΔ e ΓΔΒ.

Pero os tres ángulos ΓΒΔ, ΒΔΓ e ΒΓΔ son iguais a dous rectos[95]; logo, os seis ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ e ΑΔΒ son maiores que dous rectos.

E, dado que os tres ángulos de cada un dos triángulos ΑΒΓ, ΑΓΔ e ΑΔΒ, son iguais a dous rectos, logo, os nove ángulos dos tres triángulos, ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ e ΒΑΔ, son iguais a seis rectos, dos cales, os seis ángulos ΑΒΓ,

---

que o ángulo está contido por tres ángulos planos sen ningún comentario para o caso xeral. Para o caso xeral en que o ángulo sólido está contido por n ángulos planos, a demostración segue os mesmos pasos. Basta considerar unha pirámide co ángulo sólido de partida como vértice que terá por base un polígono de n lados e como caras n triángulos e cada un deles ten como base un dos n lados do polígono. Os $3n$ ángulos planos das caras da pirámide suman $2n$ rectos —Proposición I, 32—; se excluímos os n ángulos planos que conteñen o ángulo sólido de partida, os $2n$ ángulos restantes que están na base das caras son maiores que os n ángulos planos da base da pirámide —Proposición XI, 20— e os n ángulos planos da base da pirámide suman $2(n - 2)$ rectos pois a base divídese en $n - 2$ triángulos —Proposición VI, 20—. Como $2n - 2(n - 2) = 4$, podemos concluír, igual que fai Euclides para o caso en que o ángulo sólido é un triedro, que os n ángulos planos que conteñen o ángulo sólido de partida suman menos que 4 rectos.

94 Proposición XI, 20.

95 Proposición I, 32.

BΓA, AΓΔ, ΓΔA, AΔB e ΔBA son maiores que dous rectos; logo, os tres ángulos restantes, BAΓ, ΓAΔ e ΔAB, que conteñen o ángulo sólido, son menores que catro rectos.

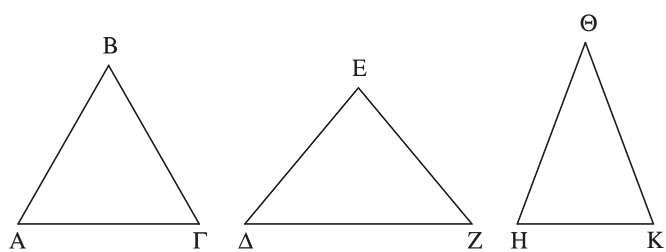
Logo, todo ángulo sólido é contido por ángulos planos menores que catro rectos; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 22

Se hai tres ángulos planos, dous dos cales, tomados xuntos de calquera xeito, son maiores que o restante, e os conteñen rectas iguais, é posible, a partir das rectas que unen as rectas iguais, construír un triángulo.

Sexan ABΓ, ΔEZ e HΘK tres ángulos planos, dous dos cales, tomados xuntos de calquera xeito, son maiores que o restante —ABΓ e ΔEZ[96] maiores que HΘK; ΔEZ e HΘK maiores que ABΓ; ademais, HΘK e ABΓ maiores que ΔEZ—, sexan iguais as rectas AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ e ΘK, e trácense AΓ, ΔZ e HK; digo que é posible construír un triángulo a partir das rectas iguais a AΓ, ΔZ e HK, é dicir, que dúas calquera de entre AΓ, ΔZ e HK son maiores que a restante[97].

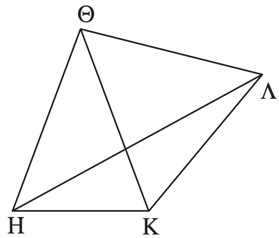
Entón, se os ángulos ABΓ, ΔEZ e HΘK son iguais entre si, é evidente que tamén, sendo iguais AΓ, ΔZ e HK, é posible, a partir das rectas iguais a AΓ, ΔZ e HK, construír un triángulo.



[96] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

[97] Proposición I, 22.

Pero se non, sexan desiguais e, na recta ΘK e no seu punto Θ, constrúase KΘΛ igual ó ángulo ABΓ[98]; póñase ΘΛ igual a unha das rectas AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ e ΘK, e trácense KΛ e HΛ.



E, dado que os dous lados AB e BΓ son iguais ós dous lados KΘ e ΘΛ, e que o ángulo B é igual ó ángulo KΘΛ, logo, a base AΓ é igual á base KΛ[99].

E, dado que ABΓ e HΘK son maiores que ΔEZ, mentres que ABΓ igual a KΘΛ, logo, HΘΛ é maior que ΔEZ.

E, dado que os dous lados HΘ e ΘΛ son iguais ós dous lados ΔE e EZ, e que o ángulo HΘΛ é maior que o ángulo ΔEZ, logo, a base HΛ é maior que a base ΔZ[100].

Pero HK e KΛ son maiores que HΛ[101]. Logo, HK e KΛ son moito maiores que ΔZ.

Pero KΛ é igual a AΓ; logo, AΓ e HK son maiores que a restante ΔZ.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén AΓ e ΔZ son maiores que HK e, ademais, ΔZ e HK son maiores que AΓ.

Logo, é posible construír un triángulo a partir de rectas iguais a AΓ, ΔZ e HK; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

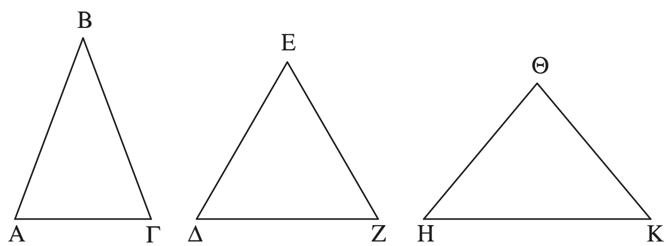
98 Proposición I, 23.
99 Proposición I, 4.
100 Proposición I, 24.
101 Proposición I, 20.

PROPOSICIÓN 23

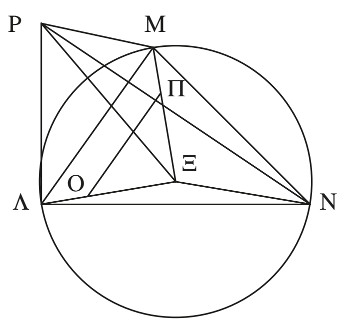
A partir de tres ángulos planos, dous dos cales, tomados xuntos de calquera xeito, son maiores que o restante, construír un ángulo sólido; é preciso, entón, que os tres sexan menores que catros rectos.

Sexan ΑΒΓ, ΔΕΖ e ΗΘΚ os tres ángulos planos dados, dous dos cales, tomados xuntos de calquera xeito, sexan maiores que o restante, e, ademais, os tres, menores que catro rectos; é preciso, entón, a partir de ángulos iguais a ΑΒΓ, ΔΕΖ e ΗΘΚ, construír un ángulo sólido.

Cóllanse as rectas iguais ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ e ΘΚ, e trácense ΑΓ, ΔΖ e ΗΚ; logo, é posible, a partir das rectas iguais a ΑΓ, ΔΖ e ΗΚ, construír un triángulo[102].



Constrúase ΛΜΝ de xeito que ΑΓ sexa igual a ΛΜ, ΔΖ a ΜΝ e, ademais, ΗΚ a ΝΛ, circunscríbase o círculo ΛΜΝ ó triángulo ΛΜΝ[103], tómese o seu centro[104], sexa Ξ, e trácense ΛΞ, ΜΞ e ΝΞ.



[102] Proposición XI, 22.
[103] Proposición IV, 5.
[104] Proposición III, 1.

Digo que AB é maior que ΛΞ. Pois se non, ou é igual AB a ΛΞ ou menor.

Sexa primeiro igual. E, dado que é igual AB a ΛΞ, pero AB é igual a ΒΓ, mentres que ΞΛ a ΞΜ, entón, os dous lados AB e ΒΓ son iguais ós dous lados ΛΞ e ΞΜ respectivamente; e a base ΑΓ suponse igual á base ΛΜ; logo, o ángulo ΑΒΓ é igual ó ángulo ΛΞΜ. Entón, polo mesmo, tamén ΔΕΖ é igual a ΜΞΝ e, ademais, ΗΘΚ a ΝΞΛ; logo, os tres ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ e ΗΘΚ son iguais ós tres ángulos ΛΞΜ, ΜΞΝ e ΝΞΛ.

Pero os tres ángulos ΛΞΜ, ΜΞΝ e ΝΞΛ son iguais a catro rectos[105]; logo, tamén os tres ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ e ΗΘΚ son iguais a catro rectos. Pero suponse tamén menores que catro rectos; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, non é igual AB a ΛΞ.

Digo agora que tampouco é menor AB que ΛΞ.

Pois ben, se é posible, séxao; e póñase, por un lado, ΞΟ igual a AB, por outro, ΒΓ igual a ΞΠ, e únase ΟΠ. E, dado que é igual AB a ΒΓ, é tamén igual ΞΟ a ΞΠ; en consecuencia, tamén a restante ΛΟ é igual a ΠΜ. Logo, é paralela ΛΜ a ΟΠ[106], e ΛΜΞ de ángulos iguais a ΟΠΞ[107]; logo, como ΞΛ é a ΛΜ, así ΞΟ a ΟΠ[108]; por alternancia, como ΛΞ a ΞΟ, así ΛΜ a ΟΠ[109].

Pero ΛΞ é maior que ΞΟ; logo, é maior ΛΜ que ΟΠ[110]. Pero ΛΜ fíxose igual a ΑΓ; logo, tamén ΑΓ é maior que ΟΠ.

Entón, dado que os dous lados AB e ΒΓ son iguais ós dous lados ΟΞ e ΞΠ e que a base ΑΓ é maior que a base ΟΠ, logo, o ángulo ΑΒΓ é maior que ΟΞΠ[111].

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén o ángulo ΔΕΖ é maior que ΜΞΝ, mentres que ΗΘΚ maior que

105 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

106 Proposición VI, 2.

107 Proposición I, 29.

108 Proposición VI, 4.

109 Proposición V, 16.

110 Proposición V, 14.

111 Proposición I, 25.

ΝΞΛ. Logo, os tres ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ e ΗΘΚ son maiores que os tres ángulos ΛΞΜ, ΜΞΝ e ΝΞΛ.

Pero os ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ e ΗΘΚ suponse menores que catro rectos; logo, ΛΞΜ, ΜΞΝ e ΝΞΛ son moito menores que catro rectos. Pero tamén iguais; o que, sen dúbida é absurdo.

Logo, ΑΒ non é menor que ΛΞ. Pero foi demostrado que tampouco igual; logo, é maior ΑΒ que ΛΞ.

Dende o punto Ξ, entón, levántese ΞΡ en ángulo recto co plano do círculo ΛΜΝ[112], sexa o cadrado de ΞΡ igual a aquilo no que é maior o cadrado de ΑΒ que o de ΛΞ[113], e trácense ΡΛ, ΡΜ e ΡΝ.

E, dado que ΡΞ está en ángulo recto co plano do círculo ΛΜΝ, tamén ΡΞ está en ángulo recto con cada unha das rectas ΛΞ, ΜΞ e ΝΞ[114].

E, dado que ΛΞ é igual a ΞΜ, mentres que ΞΡ, común e en ángulo recto, logo, a base ΡΛ é igual á base ΡΜ[115]. Entón, polo mesmo, tamén ΡΝ é igual tanto a ΡΛ como a ΡΜ; logo, as tres, ΡΛ, ΡΜ e ΡΝ, son iguais entre si.

E, dado que se supón que o cadrado de ΞΡ é igual a aquilo no que é maior o cadrado de ΑΒ que o de ΛΞ, logo, o cadrado de ΑΒ é igual ó de ΛΞ xunto co de ΞΡ. Pero o cadrado de ΛΡ é igual ó de ΛΞ xunto co de ΞΡ; pois, ΛΞΡ é recto[116]. Logo, o cadrado de ΑΒ é igual ó de ΡΛ; logo, é igual ΑΒ a ΡΛ.

Pero cada unha das rectas ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ e ΘΚ é igual a ΑΒ, mentres que tanto ΡΜ como ΡΝ son iguais a ΡΛ; logo, cada unha das rectas ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ e ΘΚ é igual a cada unha das rectas ΡΛ, ΡΜ e ΡΝ.

---

[112] Proposición XI, 12.

[113] Lema que segue a esta Proposición. Véxase tamén o Lema previo á Proposición X, 14.

[114] Definición XI, 3.

[115] Proposición I, 4.

[116] Proposición I, 47.

E, dado que os dous lados ΛP e PM son iguais ós dous lados AB e BΓ, e que se supón igual a base ΛM á base AΓ, logo, o ángulo ΛPM é igual ó ángulo ABΓ[117].

Entón, polo mesmo, tamén MPN é igual a ΔEZ, mentres que ΛPN a HΘK.

Logo, a partir dos tres ángulos planos ΛPM, MPN e ΛPN, que son iguais ós tres ángulos dados ABΓ, ΔEZ e HΘK, queda construído o ángulo sólido P, contido polos ángulos ΛPM, MPN e ΛPN; o que, xustamente, era preciso facer[118].

LEMA[119]

Así poderemos demostrar de que xeito é posible tomar o cadrado de ΞP igual a aquilo no que é maior o cadrado de AB que o de ΛΞ.

Tómense as rectas AB e ΛΞ, sexa AB a maior, debúxese nela o semicírculo ABΓ, axústese AΓ, igual á recta ΛΞ que non é maior que o diámetro AB, ó semicírculo ABΓ[120], e únase ΓB.

---

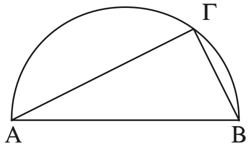
117 Proposición I, 8.

118 Como noutras moitas demostracións, Euclides só fai a proba de que AB é maior que ΛΞ para un dos tres casos, cando o centro do círculo cae dentro do triángulo. A continuación, todos os manuscritos presentan os outros dous casos posibles —que o centro do círculo caia nun dos lados ou que caia fora— coas súas demostracións. Tanto Heiberg como Heath consideran que, debido á súa situación na proposición —detrás da apostila— e ó hábito do autor de presentar un só caso dos posibles, non proceden de Euclides senón que son unha interpolación de época próxima a el.

119 Xeralmente, un lema é un resultado necesario na demostración dunha proposición e sitúase antes da primeira proposición na que se usan os seus resultados. Nos *Elementos* hai seis casos —os lemas que seguen ás proposicións XI, 23; XII, 2; XII, 4; XIII, 2; XIII, 13 e XIII, 18— en que Euclides non segue esta estrutura e sitúa o lema despois da proposición na que usa os seus resultados. No caso deste lema, Euclides fai uso do mesmo na proposición previa e, aínda que non hai dúbida da súa autenticidade, pode considerarse innecesario pois o seu contido é consecuencia do lema previo á Proposición X, 14. O mesmo se pode dicir do lema que vai a continuación da Proposición XII, 2; tampouco hai dúbida da súa autenticidade e o seu contido pode considerarse consecuencia da Proposición V, 14. Hai dúbidas da autenticidade do lema que segue a Proposición XIII, 2. Para cada unha das proposicións XII, 4; XIII, 2 e XIII, 13 hai un lema que se encarga dun paso concreto, para non perder continuidade nas demostracións; sitúa os lemas respectivos a continuación das proposicións xa que utiliza as gráficas das proposicións na demostración dos lemas. Finalmente, na última proposición dos *Elementos*, a Proposición XIII, 18, Euclides tamén cambia a estrutura habitual e utiliza para a súa demostración un lema que sitúa a continuación da proposición.

120 Proposición IV, 1.

Entón, dado que ΑΓΒ é un ángulo no semicírculo ΑΓΒ, logo ΑΓΒ é recto[121].



Logo, é igual o cadrado de ΑΒ ó de ΑΓ xunto co de ΓΒ[122].

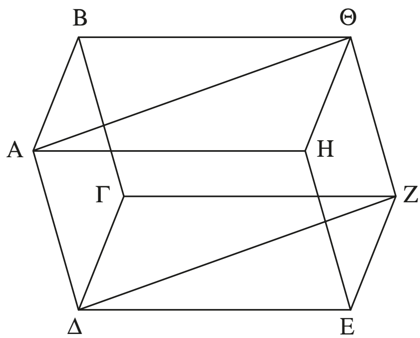
En consecuencia, o cadrado de ΑΒ é maior que o de ΑΓ no cadrado de ΓΒ.

Pero ΑΓ é igual a ΛΞ; logo, o cadrado de ΑΒ é maior que o de ΛΞ no cadrado de ΓΒ. Entón, se collemos ΞΡ igual a ΒΓ, o cadrado de ΑΒ será maior que o de ΛΞ no cadrado de ΞΡ; o que, xustamente, se propuxo[123] facer.

PROPOSICIÓN 24

***Se un sólido é contido por planos paralelos, os seus planos opostos son iguais e paralelogramos*[124].**

Pois ben, sexa contido o sólido ΓΔΘΗ polos planos paralelos ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ e ΑΕ[125]; digo que os seus planos opostos son iguais e paralelogramos.



[121] Proposición III, 31.

[122] Proposición I, 47.

[123] Pequena variante da habitual apostila.

[124] Aínda sobreentendendo que os planos son paralelos dous a dous, neste caso atopámonos cun enunciado defectuoso ó omitir que o sólido está contido por só seis planos. É obvio que o enunciado xeral non se verifica. Basta considerar, por exemplo, un prisma hexagonal.

[125] Enténdase ΑΓ paralelo a ΗΖ, ΑΘ a ΔΖ, e ΒΖ a ΑΕ.

Pois, dado que os dous planos paralelos BH e ΓE son cortados polo plano AΓ, os seus cortes comúns son paralelos[126]. Logo, é paralela AB a ΔΓ.

Asemade, dado que os dous planos paralelos BZ e AE son cortados polo plano AΓ, os seus cortes comúns son paralelos. Logo, é paralela BΓ a AΔ.

Pero foi demostrado tamén que AB é paralela a ΔΓ; logo, AΓ é un paralelogramo.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén tanto ΔZ como ZH, HB, BZ e AE son paralelogramos.

Trácense AΘ e ΔZ. E, dado que é paralela AB a ΔΓ, mentres que BΘ a ΓZ, entón, as dúas rectas AB e BΘ que se tocan están en paralelo ás dúas rectas ΔΓ e ΓZ que se tocan, non estando no mesmo plano; logo, conterán ángulos iguais[127]; logo, o ángulo ABΘ é igual a ΔΓZ.

E, dado que os dous lados AB e BΘ son iguais ós dous lados ΔΓ e ΓZ[128], e que o ángulo ABΘ é igual ó ángulo ΔΓZ, logo, a base AΘ é igual á base ΔZ, e o triángulo ABΘ é igual ó triángulo ΔΓZ[129].

E, o paralelogramo BH é o dobre que ABΘ, mentres que o paralelogramo ΓE, o dobre que ΔΓZ[130]; logo, o paralelogramo BH é igual ó paralelogramo ΓE.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén AΓ é igual a HZ, mentres que AE a BZ.

Logo, se un sólido é contido por planos paralelos, os seus planos opostos son iguais e paralelogramos; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

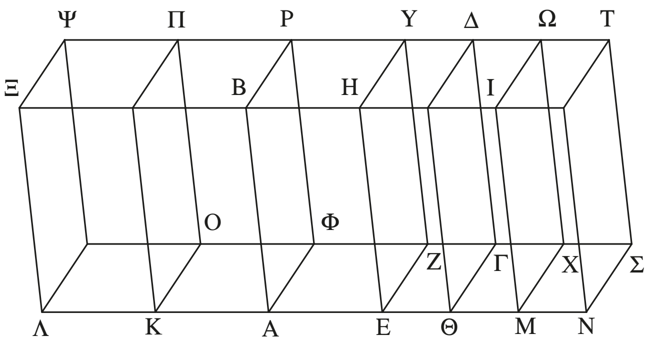
126 Proposición XI, 16.
127 Proposición XI, 10.
128 Proposición I, 34.
129 Proposición I, 4.
130 Proposición I, 34.

PROPOSICIÓN 25

Se un sólido paralelepípedo[131] é cortado por un plano que é paralelo ós planos opostos, como a base á base, así será o sólido ó sólido.

Pois ben, sexa cortado o sólido paralelepípedo ΑΒΓΔ polo plano ΖΗ que é paralelo ós planos opostos ΡΑ e ΔΘ; digo que como a base ΑΕΖΦ é á base ΕΘΓΖ, así o sólido ΑΒΖΥ é ó sólido ΕΗΓΔ.

Pois ben, prolónguese ΑΘ por ambos lados, fáganse cantas rectas se queira ΑΚ e ΚΛ iguais a ΑΕ, e cantas se queira ΘΜ e ΜΝ iguais a ΕΘ, e complétense os paralelogramos ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ e ΜΣ, e os sólidos ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ e ΜΤ[132].



E, dado que as rectas ΛΚ, ΚΑ e ΑΕ son iguais entre si, son tamén iguais entre si os paralelogramos ΛΟ, ΚΦ e ΑΖ, mentres que ΚΞ, ΚΒ e ΑΗ entre si[133] e, ademais, ΛΨ, ΚΠ e ΑΡ entre si —pois son opostos[134].

Entón, polo mesmo, tamén os paralelogramos ΕΓ, ΘΧ e ΜΣ son iguais entre si, mentres que ΘΗ, ΘΙ e ΙΝ son iguais entre si e tamén ΔΘ, ΜΩ e ΝΤ.

---

131 παραλληλεπίπεδον: «de planos paralelos». Igual que na Proposición I, 34 introduciu o termo «paralelogramo» sen definilo previamente, emprega aquí «paralelepípedo»; en ambos casos, a transparencia dos termos puideron levar a Euclides a prescindir da explicación. Porén, Euclides restrinxe o termo «paralelepípedo» a un dos posibles «sólidos de planos paralelos», aqueles comprendidos por seis planos paralelos dous a dous.

132 Proposición I, 31.

133 Proposición I, 36.

134 Proposición XI, 24.

Logo, tres planos dos sólidos ΛΠ, KP e AY son iguais a tres planos. Pero os tres planos son iguais ós tres planos opostos; logo, os tres sólidos ΛΠ, KP e AY son iguais entre si[135].

Entón, polo mesmo, tamén os tres sólidos EΔ, ΔM e MT son iguais entre si; logo, cantas veces é múltiplo a base ΛZ da base AZ, tantas veces é múltiplo tamén o sólido ΛY do sólido AY.

Entón, polo mesmo, cantas veces é múltiplo a base NZ da base ZΘ, tantas veces é múltiplo tamén o sólido NY do sólido ΘY.

E, se é igual a base ΛZ á base NZ, é igual tamén o sólido ΛY ó sólido NY e, se a base ΛZ supera á base NZ, supera tamén o sólido ΛY ó sólido NY, e, se é inferior, é inferior.

Entón, habendo catro magnitudes —dúas bases AZ e ZΘ e dous sólidos AY e YΘ—, tomáronse como equimúltiplos da base AZ e do sólido AY, a base ΛZ e o sólido ΛY, mentres que da base ΘZ e do sólido ΘY, a base NZ e o sólido NY, e queda demostrado que, se supera a base ΛZ á base ZN, supera tamén o sólido ΛY a NY e, se igual, igual e, se é inferior, é inferior.

Logo, como a base AZ é á base ZΘ, así o sólido AY é ó sólido YΘ[136]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 26

Na recta dada e no punto dado nela, construír un ángulo sólido igual ó ángulo sólido dado.

Sexa a recta dada AB, o punto dado nela A, e Δ o ángulo sólido dado contido polos ángulos planos EΔΓ, EΔZ e ZΔΓ; é preciso, entón, na recta AB e no seu punto A, construír un ángulo sólido igual ó ángulo sólido Δ.

Pois ben, tómese en ΔZ o punto Z ó azar; dende Z, trácese ZH perpendicular ó plano que vai por EΔ e ΔΓ[137], tope co plano

---

[135] Definición XI, 10.

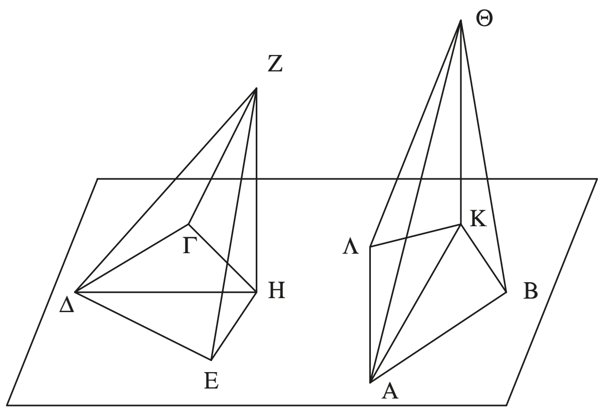
[136] Definición V, 5.

[137] Proposición XI, 2 e Proposición XI, 11.

no punto H, únase ΔH, constrúase na recta AB e no seu punto A, o ángulo BAΛ igual ó ángulo EΔΓ[138], mentres que BAK igual a EΔH, e fágase AK igual a ΔH; dende o punto K, levántese KΘ en ángulo recto co plano que vai por BAΛ[139], fágase KΘ igual a HZ e únase ΘA; digo que o ángulo sólido A contido polos ángulos BAΛ, BAΘ e ΘAΛ é igual ó ángulo sólido Δ contido polos ángulos EΔΓ, EΔZ e ZΔΓ.

Pois ben, cóllanse as rectas iguais AB e ΔE, e trácense ΘB, KB, ZE e HE. E, dado que ZH está en ángulo recto co plano base, logo, tamén fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano base[140]; logo, é recto cada un dos ángulos ZHΔ e ZHE.

Entón, polo mesmo, tamén cada un dos ángulos ΘKA e ΘKB é recto.



E, dado que os dous lados KA e AB son iguais ós dous lados HΔ e ΔE respectivamente, e que conteñen ángulos iguais, logo, a base KB é igual á base HE[141].

138 Proposición I, 23.
139 Proposición XI, 12.
140 Definición XI, 3.
141 Proposición I, 4.

Pero é igual tamén ΚΘ a ΗΖ; e conteñen ángulos rectos; logo, é tamén igual ΘΒ a ΖΕ.

Asemade, dado que os dous lados ΑΚ e ΚΘ son iguais ós dous lados ΔΗ e ΗΖ e conteñen ángulos rectos, logo, a base ΑΘ é igual á base ΖΔ.

Pero é tamén igual ΑΒ a ΔΕ; entón, os dous lados ΘΑ e ΑΒ son iguais ós dous lados ΔΖ e ΔΕ. E a base ΘΒ é igual á base ΖΕ; logo, o ángulo ΒΑΘ é igual ó ángulo ΕΔΖ[142].

Entón, polo mesmo, tamén ΘΑΛ é igual a ΖΔΓ[143]. Pero tamén ΒΑΛ é igual a ΕΔΓ.

Logo, na recta dada ΑΒ e no seu punto Α, queda construído un igual ó ángulo sólido dado, Δ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 27

A partir da recta dada, debuxar un sólido paralelepípedo semellante e situado de xeito semellante ó sólido paralelepípedo dado.

Sexa a recta dada ΑΒ e o sólido paralelepípedo dado ΓΔ; é preciso, entón, a partir da recta dada, debuxar un sólido paralelepípedo semellante e situado de xeito semellante ó sólido paralelepípedo dado.

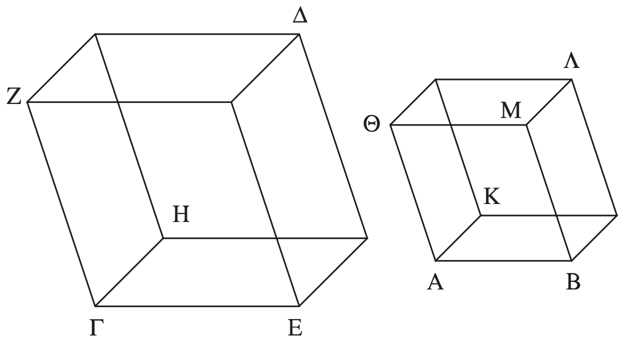
Pois ben, na recta ΑΒ e no seu punto Α, constrúase o ángulo contido por ΒΑΘ, ΘΑΚ e ΚΑΒ igual ó ángulo sólido Γ, de xeito que sexa igual o ángulo ΒΑΘ a ΕΓΖ, ΒΑΚ a ΕΓΗ, e ΚΑΘ a

142 Proposición I, 8.

143 A continuación, os manuscritos presentan o seguinte texto que Heiberg considera que non é de Euclides polo seu estilo enredado: «Posto que, se tomamos as rectas iguais ΑΛ e ΔΓ e unimos ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ e ΖΓ, dado que o ángulo ΒΑΛ enteiro é igual a ΕΔΓ enteiro, parte dos cales, ΒΑΚ, se supuxo igual a ΕΔΗ, logo, o ángulo restante ΚΑΛ é igual ó restante ΗΔΓ. E, dado que os dous lados ΚΑ e ΑΛ son iguais ós dous lados ΗΔ e ΔΓ e conteñen ángulos iguais, logo, a base ΚΛ é igual á base ΗΓ. Pero tamén ΚΘ e igual a ΗΖ; entón, os dous lados ΛΚ e ΚΘ son iguais ós dous lados ΓΗ e ΗΖ; e conteñen ángulos rectos; logo, a base ΘΛ é igual á base ΖΓ. E, dado que os dous lados ΘΑ e ΑΛ son iguais ós dous lados ΖΔ e ΔΓ e a base ΘΛ é igual á base ΖΓ, logo, o ángulo ΘΑΛ é igual a ΖΔΓ».

ΗΓΖ[144]; e resulte que, como ΕΓ a ΓΗ, así ΒΑ a ΑΚ, mentres que, como ΗΓ a ΓΖ, así ΚΑ a ΑΘ[145]. Logo, tamén, por igualdade, como ΕΓ a ΓΖ, así ΒΑ a ΑΘ[146].

E complétense o paralelogramo ΘΒ e o sólido ΑΛ[147].



E, dado que como ΕΓ é a ΓΗ, así ΒΑ a ΑΚ e que os lados que conteñen ángulos iguais ΕΓΗ e ΒΑΚ son proporcionais, logo, é semellante o paralelogramo ΗΕ ó paralelogramo ΚΒ[148].

Entón, polo mesmo, tamén o paralelogramo ΚΘ é semellante ó paralelogramo ΗΖ e, ademais, ΖΕ a ΘΒ; logo, tres paralelogramos do sólido ΓΔ son semellantes a tres paralelogramos do sólido ΑΛ.

Pero tres paralelogramos son iguais e semellantes ós tres opostos e os outros tres son iguais e semellantes ós tres opostos[149]; logo, o sólido ΓΔ enteiro é semellante ó sólido ΑΛ enteiro[150].

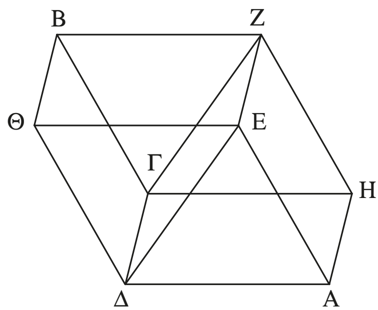
Logo, a partir da recta dada ΑΒ, queda debuxado ΑΛ semellante e situado de xeito semellante ó sólido paralelepípedo dado ΓΔ; o que, xustamente, era preciso facer.

144 Proposición XI, 26.
145 Proposición VI, 12.
146 Proposición V, 22.
147 Proposición I, 31.
148 Proposición VI, 18.
149 Proposición XI, 24.
150 Definición XI, 9.

PROPOSICIÓN 28

Se un sólido paralelepípedo é cortado por un plano a través das diagonais[151] dos planos opostos, o sólido será cortado á metade polo plano.

Pois ben, sexa cortado o sólido paralelepípedo AB polo plano ΓΔΕΖ[152] a través de ΓΖ e ΔΕ, as diagonais dos planos opostos; digo que o sólido AB será cortado á metade polo plano ΓΔΕΖ.



Pois, dado que o triángulo ΓΗΖ é igual ó triángulo ΓΖΒ[153], mentres que ΑΔΕ a ΔΕΘ, e que é tamén igual o paralelogramo ΓΑ a ΕΒ —pois son opostos[154]—, mentres que ΗΕ a ΓΘ, logo, tamén o prisma[155] contido polos dous triángulos ΓΗΖ e ΑΔΕ e polos tres paralelogramos ΗΕ, ΑΓ e ΓΕ é igual ó prisma contido polos dous triángulos ΓΖΒ e ΔΕΘ e polos tres paralelogramos ΓΘ, ΒΕ e ΓΕ —pois son contidos por planos iguais en cantidade e tamaño[156].

En consecuencia, o sólido AB enteiro queda cortado á metade polo plano ΓΔΕΖ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[151] Aparece por primeira vez a palabra διαγώνιος, «que vai de ángulo a ángulo», para referirse á diagonal dun paralelogramo sen explicación previa, —tal como xa fixera co termo «paralelogramo», na Proposición I, 34, e «paralelepípedo», na Proposición XI, 25—. Ata agora sempre utilizara διάμετρος, tanto para o diámetro da circunferencia como para a diagonal dun paralelogramo.

[152] Proposición XI, 9.

[153] Proposición I, 34.

[154] Proposición XI, 24.

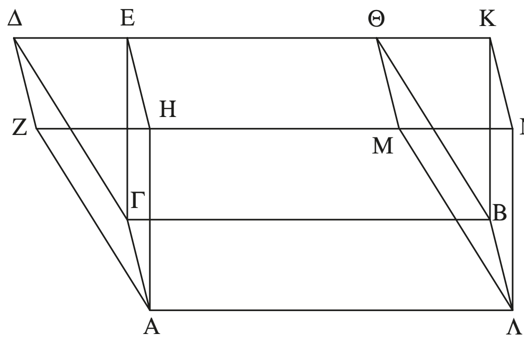
[155] Definición XI, 13.

[156] Definición XI, 10.

PROPOSICIÓN 29

Os sólidos paralelepípedos que están sobre a mesma base e baixo a mesma altura*[157]*, nos que as rectas levantadas están contra as mesmas rectas*[158]*, son iguais entre si.

Estean sobre a mesma base, AB, os sólidos paralelepípedos ΓM e ΓN que están baixo a mesma altura, nos que as rectas levantadas AH, AZ, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ e BK vaian dar ás mesmas rectas ZN e ΔK[159]; digo que é igual o sólido ΓM ó sólido ΓN.



Pois ben, dado que tanto ΓΘ como ΓK son paralelogramos, ΓB é igual tanto a ΔΘ como a EK[160]; en consecuencia, ΔΘ é igual a EK.

Quítese a ambas EΘ; logo, a restante ΔE é igual á restante ΘK.

En consecuencia, tamén o triángulo ΔΓE é igual ó triángulo ΘBK[161], mentres que o paralelogramo ΔH ó paralelogramo ΘN[162].

Entón, polo mesmo, tamén o triángulo AZH é igual ó triángulo MΛN. Pero tamén o paralelogramo ΓZ é igual ó paralelogramo BM, mentres que ΓH a BN —pois son opostos[163]—; logo,

---

157 Emprega aquí o termo «altura» dun paralelepípedo sen definilo previamente —véxase a Nota 151 (Proposición XI, 28)—. Definiu «altura» dunha figura plana na Definición VI, 4.

158 Optamos por unha tradución literal para αἱ ἐφεστῶσαι. Debe entenderse que os extremos das arestas laterais están en liña recta.

159 Enténdase «as rectas levantadas AH, AZ, ΛM, ΛN están contra a recta ZN e as rectas levantadas ΓΔ, ΓE, BΘ , BK están contra ΔK».

160 Proposición I, 34.

161 Proposición I, 4 e Proposición I, 8.

162 Proposición I, 36.

163 Proposición XI, 24.

tamén o prisma contido polos dous triángulos ΑΖΗ e ΔΓΕ e polos tres paralelogramos ΑΔ, ΔΗ e ΓΗ é igual ó prisma contido polos dous triángulos ΜΛΝ e ΘΒΚ e polos tres paralelogramos ΒΜ, ΘΝ e ΒΝ[164].

Engádase a ambos o sólido cuxa base é o paralelogramo ΑΒ e o oposto ΗΕΘΜ; logo, o sólido paralelepípedo ΓΜ enteiro é igual ó sólido paralelepípedo ΓΝ enteiro.

Logo, os sólidos paralelepípedos que están sobre a mesma base e baixo a mesma altura, nos que as rectas levantadas están contra as mesmas rectas, son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 30

Os sólidos paralelepípedos que están sobre a mesma base e baixo a mesma altura, nos que as rectas levantadas non están contra as mesmas rectas, son iguais entre si.

Estean sobre a mesma base, ΑΒ, os sólidos paralelepípedos ΓΜ e ΓΝ que están baixo a mesma altura, nos que as rectas levantadas ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ e ΒΚ non vaian dar ás mesmas rectas[165]; digo que é igual o sólido ΓΜ ó sólido ΓΝ.

Pois ben, prolónguense ΝΚ e ΔΘ, e atópense unha coa outra en Ρ, ademais, prolónguense ΖΜ e ΗΕ ata Ο e Π[166], e trácense ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ e ΒΡ.

Entón, o sólido ΓΜ, cuxa base é o paralelogramo ΑΓΒΛ e o oposto ΖΔΘΜ, é igual ó sólido ΓΟ, cuxa base é o paralelogramo ΑΓΒΛ e o oposto ΞΠΡΟ —pois están sobre a mesma base ΑΓΒΛ e baixo a mesma altura e, neles, as rectas levantadas ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ e ΒΡ están contra as mesmas rectas ΖΟ e ΔΡ[167].

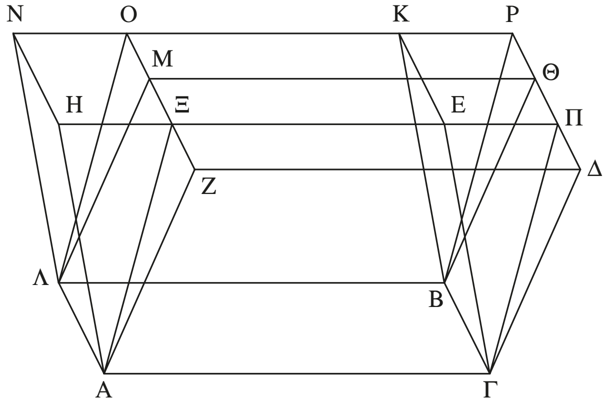
---

[164] Definición XI, 10.

[165] Enténdase «as rectas levantadas ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ non están contra unha mesma recta e as rectas levantadas ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ e ΒΚ tampouco están contra unha mesma recta».

[166] Enténdase, respectivamente.

[167] Enténdase « ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ están contra ΖΟ mentres que ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ e ΒΡ contra ΔΡ». Proposición XI, 29.



Pero o sólido ΓO, cuxa base é o paralelogramo AΓBΛ e o oposto ΞΠPO, é igual ó sólido ΓN, cuxa base é o paralelogramo AΓBΛ e o oposto HEKN —pois, asemade, están sobre a mesma base AΓBΛ e baixo a mesma altura e, neles, as rectas levantadas AH, AΞ, ΓE, ΓΠ, ΛN, ΛO, BK e BP están contra as mesmas rectas HΠ e NP[168].

En consecuencia, tamén o sólido ΓM é igual ó sólido ΓN.

Logo, os sólidos paralelepípedos sobre a mesma base e baixo a mesma altura, nos que as rectas levantadas non están contra as mesmas rectas son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 31

Os sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguais e baixo a mesma altura son iguais entre si.

Estean sobre as bases iguais AB e ΓΔ, os sólidos paralelepípedos AE e ΓZ que están baixo a mesma altura; digo que é igual o sólido AE ó sólido ΓZ.

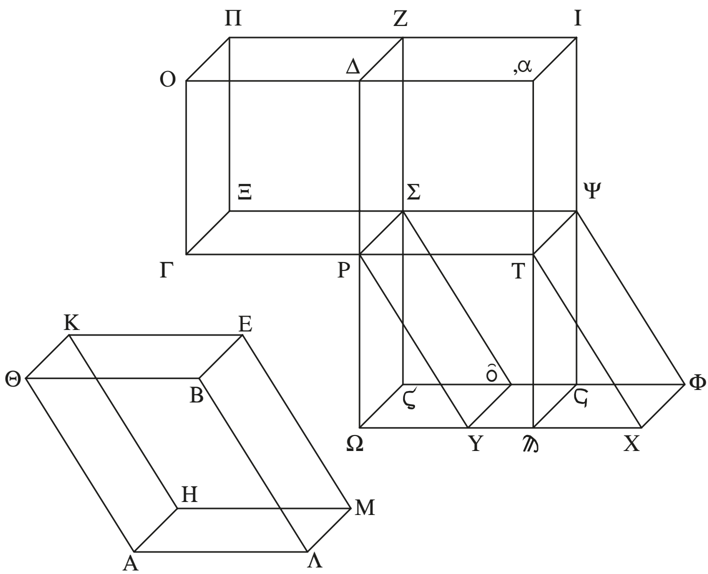
Estean, primeiro, as rectas levantadas ΘK, BE, AH, ΛM, OΠ, ΔZ, ΓΞ e PΣ[169] en ángulo recto coas bases AB e ΓΔ, prolónguese

---

[168] Enténdase « AH, AΞ, ΓE, ΓΠ, están contra HΠ mentres que ΛN, ΛO, BK e BP contra NP».

[169] Enténdase « ΘK, BE, AH, ΛM, en ángulo recto con AB mentres que OΠ, ΔZ, ΓΞ e PΣ con ΓΔ».

PT en liña recta coa recta ΓΡ, constrúase, na recta ΡΤ e no seu punto Ρ, ΤΡΥ igual ó ángulo ΑΛΒ[170], fágase ΡΤ igual a ΑΛ, mentres que ΡΥ igual a ΛΒ, e complétese a base ΡΧ e o sólido ΨΥ[171].



E, dado que as dúas rectas ΤΡ e ΡΥ son iguais ás dúas rectas ΑΛ e ΛΒ e que conteñen ángulos iguais, logo, é igual e semellante o paralelogramo ΡΧ ó paralelogramo ΘΛ[172].

E, asemade, dado que é igual ΑΛ a ΡΤ, mentres que ΛΜ a ΡΣ e que conteñen ángulos rectos, logo, é igual e semellante o paralelogramo ΡΨ ó paralelogramo ΑΜ. Entón, polo mesmo, tamén é igual e semellante ΛΕ a ΣΥ; logo, tres paralelogramos do sólido ΑΕ son iguais e semellantes a tres paralelogramos do sólido ΨΥ.

Pero tres son iguais e semellantes ós tres opostos, e os outros tres, ós tres opostos[173]; logo, o sólido ΑΕ enteiro é igual ó sólido paralelepípedo ΨΥ enteiro[174].

170 Proposición I, 23.
171 Proposición I, 31.
172 Proposición VI, 14.
173 Proposición XI, 24.
174 Definición XI, 10.

Trácense ΔP e XY e atópense unha coa outra en Ω, e, por T, trácese ,αTϡ[175] paralela a ΔΩ, prolónguese OΔ ata ,α e complétense os sólidos ΩΨ e PI.

Entón, é igual o sólido ΨΩ, cuxa base é o paralelogramo PΨ e o oposto Ωϙ, ó sólido ΨY, cuxa base é o paralelogramo PΨ e o oposto YΦ —pois están sobre a mesma base PΨ e baixo a mesma altura e, neles, as rectas levantadas PΩ, PY, Tϡ, TX, Σϛ, Σô, Ψϙ e ΨΦ están sobre as mesmas rectas ΩX e ϛ Φ[176].

Pero o sólido ΨY é igual a AE; logo, tamén o sólido ΨΩ é igual ó sólido AE. E, dado que o paralelogramo PYXT é igual ó paralelogramo ΩT —pois están sobre a mesma base PT e entre as mesmas paralelas PT e ΩX[177]—, pero PYXT é igual a ΓΔ —posto que tamén a AB—, logo, o paralelogramo ΩT é igual a ΓΔ. Pero ΔT é outro; logo, como a base ΓΔ é a ΔT, así ΩT a ΔT[178].

E, dado que o sólido paralelepípedo ΓI queda cortado polo plano PZ que é paralelo ós planos opostos, como a base ΓΔ é á base ΔT, así o sólido ΓZ ó sólido PI[179].

Entón, polo mesmo, dado que o sólido paralelepípedo ΩI queda cortado polo plano PΨ que é paralelo ós planos opostos, como a base ΩT é á base TΔ, así o sólido ΩΨ a PI.

Pero como a base ΓΔ a ΔT, así ΩT a ΔT; logo, tamén, como o sólido ΓZ ó sólido PI, así o sólido ΩΨ a PI. Logo, tanto ΓZ como ΩΨ gardan a mesma razón con PI; logo, é igual o sólido ΓZ ó sólido ΩΨ[180].

Pero demostrouse que ΩΨ é igual a AE; logo, tamén AE é igual a ΓZ.

---

175 Nas gráficas desta proposición foron utilizadas as 24 letras do alfabeto grego en maiúscula, como é habitual; a continuación aparecen tres grafías usadas na notación alfanumérica respectivamente para os numerais 6, 90 e 900: a *digamma*, ϛ, a *kopa*, ϙ, - ambas grafías usadas nos primeiros alfabetos gregos-, e a *sampi*, ϡ, de orixe incerta. Ademais, utiliza ,α que representa o número 1000, e a ô, que no seu valor numérico representa o 70. Na proposición XIII,16, ó precisar, tamén, de máis caracteres para as gráficas, recorre a A´.

176 Proposición XI, 29.

177 Proposición I, 35.

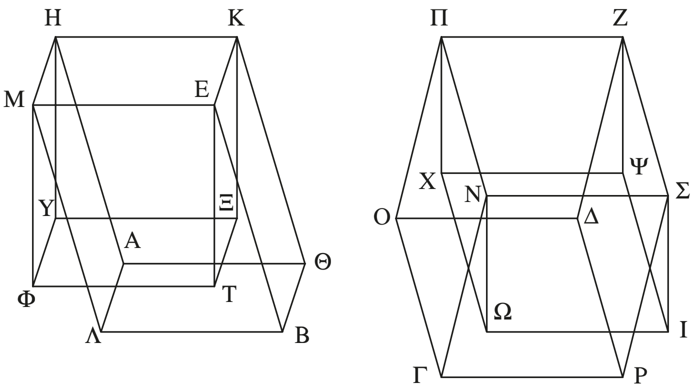
178 Proposición V, 7.

179 Proposición XI, 25.

180 Proposición V, 9.

Non estean agora as rectas levantadas ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ e ΡΣ en ángulo recto coas bases ΑΒ e ΓΔ; digo, asemade, que é igual o sólido ΑΕ ó sólido ΓΖ.

Pois ben, dende os puntos Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν e Σ, trácense as rectas ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ e ΣΙ perpendiculares ó plano base[181], topen co plano nos puntos Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω e Ι, e trácense ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΩ, ΩΙ e ΙΨ.



Entón, é igual o sólido ΚΦ ó sólido ΠΙ —pois están sobre as bases iguais ΚΜ e ΠΣ e baixo a mesma altura e, neles, as rectas levantadas están en ángulo recto coas bases[182].

Pero o sólido ΚΦ é igual ó sólido ΑΕ, mentres que ΠΙ a ΓΖ —pois, están sobre a mesma base e baixo a mesma altura e, neles, as rectas levantadas non están contra as mesmas rectas[183].

Logo, o sólido ΑΕ é igual ó sólido ΓΖ.

Logo, os sólidos paralelepípedos que están sobre as mesmas bases e baixo a mesma altura son iguais entre si; o que, xustamente, era preciso demostrar.

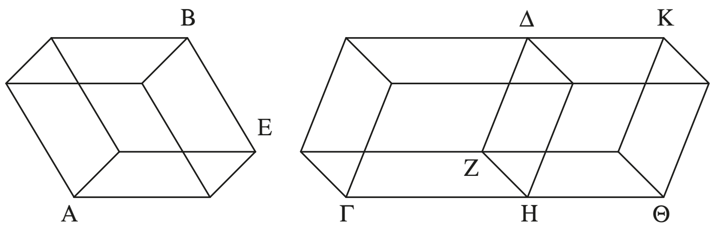
[181] Proposición XI, 11.
[182] Está demostrado na primeira parte desta Proposición XI, 31.
[183] Proposición XI, 30.

PROPOSICIÓN 32

Os sólidos paralelepípedos que están baixo a mesma altura son entre si como as bases.

Estean baixo a mesma altura os sólidos paralelepípedos AB e ΓΔ; digo que os sólidos paralelepípedos AB e ΓΔ son entre si como as bases, é dicir, que como a base AE é á base ΓZ, así o sólido AB ó sólido ΓΔ.

Pois ben, en ZH, aplíquese ZΘ igual a AE[184] e, a partir da base ZΘ e da mesma altura que ΓΔ, complétese o sólido paralelepípedo HK[185].



Entón, é igual o sólido AB ó sólido HK —pois están sobre as bases iguais AE e ZΘ e baixo a mesma altura[186].

E, dado que o sólido paralelepípedo ΓK queda cortado polo plano ΔH que é paralelo ós planos opostos, logo, como a base ΓZ é á base ZΘ, así o sólido ΓΔ ó sólido ΔΘ[187].

Pero é igual a base ZΘ á base AE, mentres que o sólido HK ó sólido AB; logo, tamén, como a base AE é á base ΓZ, así o sólido AB ó sólido ΓΔ.

Logo, os sólidos paralelepípedos que están baixo a mesma altura son entre si como as bases; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

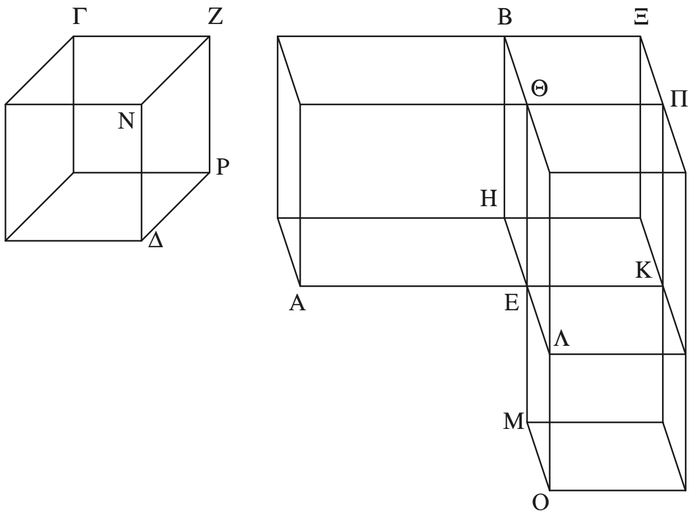
184 Véxase a Nota 221 (Proposición I, 44).
185 Proposición I, 31.
186 Proposición XI, 31.
187 Proposición XI, 25.

PROPOSICIÓN 33

Os sólidos paralelepípedos semellantes están entre si en razón triplicada da dos lados correspondentes.

Sexan os sólidos paralelepípedos semellantes AB e ΓΔ, e sexa AE correspondente con ΓZ; digo que o sólido AB garda co sólido ΓΔ razón triplicada da que garda AE con ΓZ.

Pois ben, prolónguense EK, EΛ e EM en liña recta con AE, HE, ΘE, fágase EK igual a ΓZ, EΛ igual a ZN e, ademais, EM igual a ZP, e complétense o paralelogramo KΛ e o sólido KO[188].



E, dado que os dous lados KE e EΛ son iguais ós dous lados ΓZ e ZN, pero tamén o ángulo KEΛ é igual ó ángulo ΓZN —posto que tamén AEH é igual a ΓZN, pola semellanza dos sólidos AB e ΓΔ[189]—, logo, é igual o paralelogramo KΛ ó paralelogramo ΓN[190].

[188] Proposición I, 31.
[189] Proposición I, 15.
[190] Proposición VI, 14.

Entón, polo mesmo, tamén o paralelogramo KM é igual e semellante a ΓP e, ademais, EO a ΔZ; logo, tres paralelogramos do sólido KO son iguais e semellantes a tres paralelogramos do sólido ΓΔ.

Pero tres son iguais e semellantes ós tres opostos, e os outros tres, iguais e semellantes ós tres opostos[191]; logo, o sólido KO enteiro é igual e semellante ó sólido ΓΔ enteiro[192].

Complétese o paralelogramo HK e, a partir dos paralelogramos HK e KΛ como bases e da mesma altura que AB, complétense os sólidos EΞ e ΛΠ.

E, dado que, pola semellanza dos sólidos AB e ΓΔ, como AE é a ΓZ, así EH a ZN, e EΘ a ZP[193], mentres que é igual ΓZ a EK, ZN a EΛ e ZP a EM, logo, como AE é a EK, así HE a EΛ, e ΘE a EM.

Pero como AE a EK, así AH ó paralelogramo HK, mentres que, como HE a EΛ, así HK a KΛ e, como ΘE a EM, así ΠE a KM[194]; logo, tamén, como o paralelogramo AH a HK, así HK a KΛ, e ΠE a KM.

Pero como AH a HK, así o sólido AB ó sólido EΞ, mentres que, como HK a KΛ, así o sólido ΞE ó sólido ΠΛ, mentres que, como ΠE a KM, así o sólido ΠΛ ó sólido KO[195]; logo, tamén, como o sólido AB a EΞ, así EΞ a ΠΛ, e ΠΛ a KO.

Pero se catro magnitudes están en proporción continua, a primeira coa cuarta garda razón triplicada da que garda coa segunda[196]; logo, o sólido AB garda con KO razón triplicada da que garda AB con EΞ.

Pero como AB a EΞ, así o paralelogramo AH a HK, e a recta AE a EK; en consecuencia, tamén o sólido AB garda con KO razón triplicada da que garda AE con EK.

[191] Proposición XI, 24.
[192] Definición XI, 10.
[193] Definición XI, 9 e Definición VI, 1.
[194] Proposición VI, 1.
[195] Proposición XI, 32.
[196] Véxase a Nota 9 (Definición V, 10).

Pero o sólido KO é igual ó sólido ΓΔ, e a recta EK a ΓZ; logo, o sólido AB garda co sólido ΓΔ razón triplicada da que garda o seu lado correspondente AE co lado correspondente ΓZ.

Logo, os sólidos paralelepípedos semellantes están en razón triplicada da dos lados correspondentes; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Corolario[197].- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se catro rectas son proporcionais[198], como a primeira é á cuarta, así será o sólido paralelepípedo a partir da primeira ó semellante e debuxado de xeito semellante a partir da segunda, posto que, precisamente, a primeira garda coa cuarta razón triplicada da que garda coa segunda.

PROPOSICIÓN 34

Dos sólidos paralelepípedos iguais, as bases son inversamente proporcionais[199] ***ás alturas; e aqueles sólidos paralelepípedos cuxas bases son inversamente proporcionais ás alturas son iguais.***

Sexan os sólidos paralelepípedos iguais AB e ΓΔ; digo que, dos sólidos paralelepípedos AB e ΓΔ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas e, como a base EΘ é á base NΠ, así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido AB.

Pois ben, estean, primeiro, as rectas levantadas AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ e ΠP en ángulo recto coas súas bases; digo que como a base EΘ é á base NΠ, así ΓM a AH.

Entón, se a base EΘ é igual á base NΠ, e o sólido AB é igual ó sólido ΓΔ, tamén será igual ΓM a AH —pois os sólidos paralelepípedos baixo a mesma altura son entre si como as bases[200].

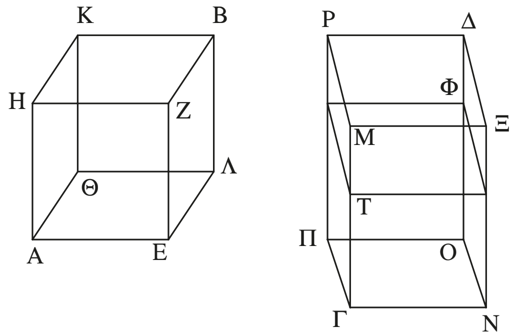
---

[197] Heiberg, sen indicar as razóns, ten dúbidas sobre a autenticidade deste corolario.

[198] Definición V, 10.

[199] Véxase a Nota 2 (Definición VI, 2).

[200] Heiberg considera que as seguintes frases que recollen algúns manuscritos son unha interpolación: «Pois, se, sendo iguais as bases EΘ e NΠ, non fosen as alturas AH e ΓM iguais, logo,nese caso, tampouco o sólido AB sería igual a ΓΔ; pero suponse que é igual,



E, como a base ΕΘ á base ΝΠ, así será ΓΜ a ΑΗ, e é evidente que, dos sólidos paralelepípedos ΑΒ e ΓΔ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas.

Non sexa, agora, a base ΕΘ igual á base ΝΠ, senón que sexa maior ΕΘ. Pero tamén é igual o sólido ΑΒ ó sólido ΓΔ; logo, é maior tamén ΓΜ que ΑΗ[201].

Fágase, entón, ΓΤ igual a ΑΗ e complétese, a partir da base ΝΠ e da altura ΓΤ, o sólido paralelepípedo ΦΓ[202].

E, dado que é igual o sólido ΑΒ ó sólido ΓΔ, mentres que ΓΦ está fóra, e as magnitudes iguais gardan a mesma razón cunha mesma, logo, como o sólido ΑΒ é ó sólido ΓΦ, así o sólido ΓΔ ó sólido ΓΦ[203].

Pero como o sólido ΑΒ ó sólido ΓΦ, así a base ΕΘ á base ΝΠ —pois os sólidos ΑΒ e ΓΦ son de igual altura[204]—; e, como o sólido ΓΔ ó sólido ΓΦ, así a base ΜΠ á base ΤΠ[205], e ΓΜ a

logo, non é desigual a altura ΓΜ á altura ΑΗ; logo, é igual.». Aínda que Euclides basea o razoamento na Proposición XI, 32 —pois os sólidos paralelepípedos baixo a mesma altura son entre si como as bases—, o argumento non é correcto e necesitamos o seu recíproco —os sólidos paralelepípedos que son entre si como as bases están baixo a mesma altura—. Podemos fundamentar esta afirmación na Proposición XI, 31 xa que, se o sólido ΑΒ é igual ó sólido ΓΔ e ten as bases iguais ΕΘ e ΝΠ, tamén ten as alturas ΑΗ e ΓΜ iguais. Se non fose así, poderíamos cortar a altura do maior ó nivel da do menor e teríamos que o sólido de maior altura é igual ó de menor altura mais o sólido que ten igual a base e por altura a diferenza de alturas.

201 Proposición XI, 32 e Proposición XI, 31.Véxase a Nota 200 desta mesma proposición.

202 Proposición I, 31.

203 Proposición V, 7.

204 Proposición XI, 32.

205 Proposición XI, 25 ou Proposición XI, 32.

ΓΤ[206]; logo, tamén, como a base ΕΘ á base ΝΠ, así ΜΓ a ΓΤ. Pero ΓΤ é igual a ΑΗ; logo, tamén, como a base ΕΘ á base ΝΠ, así ΜΓ a ΑΗ.

Logo, dos sólidos paralelepípedos ΑΒ e ΓΔ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas.

Asemade, dos sólidos ΑΒ e ΓΔ, sexan agora as bases inversamente proporcionais ás alturas e, como a base ΕΘ á base ΝΠ, sexa así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido ΑΒ; digo que é igual o sólido ΑΒ ó sólido ΓΔ.

Estean, de novo, as rectas levantadas en ángulo recto coas bases. E, se é igual a base ΕΘ á base ΝΠ e se, como a base ΕΘ á base ΝΠ, así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido ΑΒ, logo, é tamén igual a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido ΑΒ.

Pero os sólidos paralelepípedos sobre bases iguais e baixo a mesma altura son iguais entre si[207]; logo, é igual o sólido ΑΒ ó sólido ΓΔ.

Non sexa, agora, a base ΕΘ igual a ΝΠ, senón que sexa maior ΕΘ; logo, é maior tamén a altura do sólido ΓΔ que a altura do sólido ΑΒ, é dicir, ΓΜ que ΑΗ.

Fágase, de novo, ΓΤ igual a ΑΗ e complétese de xeito semellante o sólido ΓΦ.

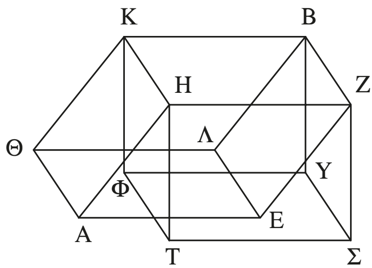
Dado que, como a base ΕΘ é á base ΝΠ, así ΜΓ a ΑΗ[208], mentres que ΑΗ igual a ΓΤ, logo, como a base ΕΘ á base ΝΠ, así ΓΜ a ΓΤ.

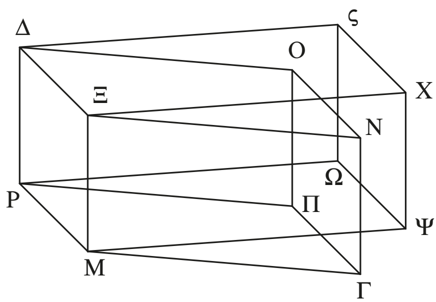
Pero, como ΕΘ á base ΝΠ, así o sólido ΑΒ ó sólido ΓΦ —pois os sólidos ΑΒ e ΓΦ son de igual altura—; pero como ΓΜ a ΓΤ, así a base ΜΠ á base ΠΤ, e o sólido ΓΔ ó sólido ΓΦ.

Logo, tamén, como o sólido ΑΒ ó sólido ΓΦ, así o sólido ΓΔ ó sólido ΓΦ[209]; logo, tanto ΑΒ como ΓΔ gardan con ΓΦ a mesma razón. Logo, é igual o sólido ΑΒ ó sólido ΓΔ[210].

[206] Proposición VI, 1.
[207] Proposición XI, 31.
[208] Razoamento anterior desta mesma proposición.
[209] Proposición V, 11.
[210] Proposición V, 9.

Non estean, agora, as rectas levantadas ZE, BΛ, HA, ΘK, ΞN, ΔO, MΓ e PΠ en ángulo recto coas súas bases, trácense, a partir dos puntos Z, H, B, K, Ξ, M, Δ e P, perpendiculares ós planos que van por EΘ e NΠ, topen cos planos en Σ, T, Y, Φ, X, Ψ, Ω e ς, e complétense os sólidos ZΦ e ΞΩ; digo que tamén así, sendo iguais os sólidos AB e ΓΔ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas e, como a base EΘ á base NΠ, así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido AB.





Dado que o sólido AB é igual ó sólido ΓΔ, pero AB é igual a BT —pois están sobre a mesma base ZK e baixo a mesma altura—, mentres que o sólido ΓΔ é igual ó sólido ΔΨ —pois, asemade, están sobre a mesma base e baixo a mesma altura[211]—, logo, tamén o sólido BT é igual ó sólido ΔΨ.

[211] Proposición XI, 29 e Proposición XI, 30.

Logo, como a base ZK é á base ΞP, así a altura do sólido ΔΨ á altura do sólido BT[212].

Pero é igual a base ZK á base EΘ, mentres que a base ΞP á base NΠ[213]; logo, como a base EΘ é á base NΠ, así a altura do sólido ΔΨ á altura do sólido BT.

Pero as alturas dos sólidos ΔΨ e BT son as mesmas que as de ΔΓ e BA; logo, como a base EΘ é á base NΠ, así a altura do sólido ΔΓ á altura do sólido AB.

Logo, dos sólidos paralelepípedos AB e ΓΔ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas.

De novo, dos sólidos AB e ΓΔ, sexan, agora, as bases inversamente proporcionais ás alturas e, como a base EΘ á base NΠ, sexa así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido AB; digo que é igual o sólido AB ó sólido ΓΔ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, dado que, como a base EΘ é á base NΠ, así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido AB, mentres que a base EΘ igual á base ZK, e NΠ a ΞP, logo, como a base ZK á base ΞP, así a altura do sólido ΓΔ á altura do sólido AB.

Pero as alturas dos sólidos AB e ΓΔ son as mesmas que as de BT e ΔΨ; logo, como a base ZK é á base ΞP, así a altura do sólido ΔΨ á altura do sólido BT.

Logo, dos sólidos paralelepípedos BT e ΔΨ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas; logo, é igual o sólido BT ó sólido ΔΨ[214].

Pero BT é igual a BA —pois están sobre a mesma base ZK e baixo a mesma altura—. Pero o sólido ΔΨ é igual ó sólido ΔΓ.

Logo, tamén o sólido AB é igual ó sólido ΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

[212] Está demostrado na primeira parte desta Proposición XI, 34, xa que as arestas laterais son perpendiculares á base.

[213] Proposición XI, 24.

[214] Está demostrado na primeira parte desta Proposición XI, 34, xa que as arestas laterais son perpendiculares á base.

PROPOSICIÓN 35

Se hai dous ángulos planos iguais, se nos seus vértices se levantan rectas elevadas que conteñen, xunto coas rectas do principio, ángulos iguais respectivamente, se se toman puntos ó azar nas elevadas, se dende eles se trazan perpendiculares ós planos nos que están os ángulos do principio e, dende os puntos resultantes nos planos ata os ángulos do principio, se trazan rectas, conterán, xunto coas elevadas, ángulos iguais.

Sexan dous ángulos rectilíneos iguais ΒΑΓ e ΕΔΖ, e dende os puntos Α e Δ levántense as rectas elevadas ΑΗ e ΔΜ que conteñen, xunto coas rectas do principio, ángulos iguais respectivamente —ΜΔΕ a ΗΑΒ, e ΜΔΖ a ΗΑΓ[215]—; en ΑΗ e ΔΜ, tómense os puntos Η e Μ ó azar; dende os puntos Η e Μ, trácense ΗΛ e ΜΝ perpendiculares ós planos que van por ΒΑΓ e ΕΔΖ[216], topen cos planos en Ν e Λ e trácense ΛΑ e ΝΔ; digo que é igual o ángulo ΗΑΛ ó ángulo ΜΔΝ.

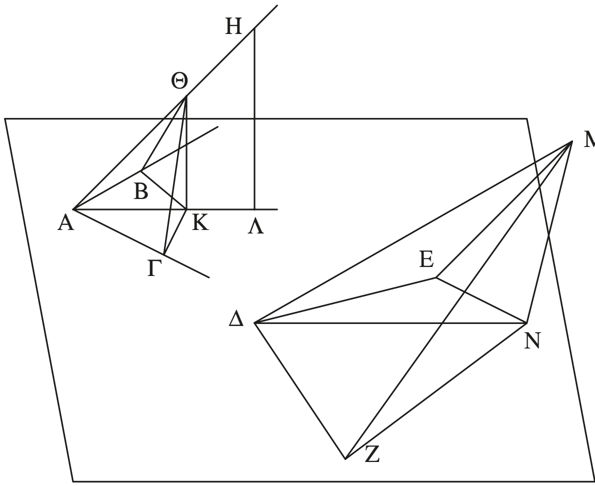
Fágase ΑΘ igual a ΔΜ e, polo punto Θ, trácese ΘΚ paralela a ΗΛ[217].

Pero ΗΛ é perpendicular ó plano que vai por ΒΑΓ; logo, tamén ΘΚ é perpendicular ó plano que vai por ΒΑΓ[218].

Dende os puntos Κ e Ν, trácense ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ e ΝΕ perpendiculares ás rectas ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ e ΔΕ[219], e trácense ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ e ΖΕ.

Dado que o cadrado de ΘΑ é igual ó de ΘΚ xunto co de ΚΑ, mentres que o de ΚΓ xunto co de ΓΑ é igual ó de ΚΑ[220], logo, tamén o cadrado de ΘΑ é igual ó de ΘΚ xunto co de ΚΓ e ΓΑ.

215 Proposición XI, 23.
216 Proposición XI, 11.
217 Proposición I, 31.
218 Proposición XI, 8.
219 Proposición I, 12.
220 Proposición I, 47.



Pero o de ΘΓ é igual ó de ΘK xunto co de KΓ; logo, o de ΘA é igual ó de ΘΓ xunto co de ΓA. Logo, o ángulo ΘΓA é recto[221].

Entón, polo mesmo, tamén o ángulo ΔZM é recto. Logo, é igual o ángulo AΓΘ a ΔZM.

Pero tamén é igual ΘAΓ a MΔZ.

Entón, MΔZ e ΘAΓ son dous triángulos que teñen dous ángulos iguais respectivamente a dous ángulos, e un lado, o que está tendido baixo un dos ángulos iguais, igual a un lado —ΘA a MΔ—; logo, tamén terá os demais lados iguais respectivamente ós demais lados[222]. Logo, é igual AΓ a ΔZ.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén AB é igual a ΔE.

Entón, dado que é igual AΓ a ΔZ, mentres que AB a ΔE, entón, os dous lados ΓA e AB son iguais ós dous lados ZΔ e ΔE. Pero tamén o ángulo ΓAB é igual ó ángulo ZΔE; logo, a base BΓ é igual á base EZ, o triángulo ó triángulo, e os demais ángulos ós demais ángulos[223]; logo, é igual AΓB a ΔZE.

221 Proposición I, 48.
222 Proposición I, 26.
223 Proposición I, 4.

Pero tamén é igual o ángulo recto ΑΓΚ ó recto ΔΖΝ; logo, o ángulo restante ΒΓΚ é igual ó restante ΕΖΝ.

Entón, polo mesmo, tamén ΓΒΚ é igual a ΖΕΝ.

Entón, ΒΓΚ e ΕΖΝ son dous triángulos que teñen dous ángulos iguais a dous ángulos respectivamente, e un lado, o dos ángulos iguais, igual a un lado —ΒΓ a ΕΖ—; logo, tamén terán os demais lados iguais ós demais lados[224].

Logo, é igual ΓΚ a ΖΝ. Pero tamén é igual ΑΓ a ΔΖ; entón, os dous lados ΑΓ e ΓΚ son iguais ós dous lados ΔΖ e ΖΝ; e conteñen ángulos rectos. Logo, a base ΑΚ é igual á base ΔΝ[225].

E, dado que ΑΘ é igual a ΔΜ, é tamén igual o cadrado de ΑΘ ó de ΔΜ. Pero o cadrado de ΑΚ xunto co de ΚΘ é igual ó de ΑΘ —pois ΑΚΘ é recto—; pero o cadrado de ΔΝ xunto co de ΝΜ é igual ó de ΔΜ —pois ΔΝΜ é recto—; logo, o cadrado de ΑΚ xunto co de ΚΘ é igual ó de ΔΝ xunto co de ΝΜ, parte dos cales, o cadrado de ΑΚ, é igual ó de ΔΝ; logo, o cadrado restante, o de ΚΘ, é igual ó de ΝΜ; logo, é igual ΘΚ a ΜΝ.

E, dado que os dous lados ΘΑ e ΑΚ son iguais ós dous lados ΜΔ e ΔΝ respectivamente e que foi demostrado que a base ΘΚ é igual á base ΜΝ, logo, o ángulo ΘΑΚ é igual ó ángulo ΜΔΝ.

Logo, se hai dous ángulos planos iguais e o que segue do enunciado.[226]

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, se hai dous ángulos planos iguais e se levantan neles rectas elevadas iguais que conteñen, xunto coas rectas do principio, ángulos iguais respectivamente, as perpendiculares trazadas dende elas ós planos nos que están os ángulos do principio son iguais entre si. O que, xustamente, era preciso demostrar.

---

224 Proposición I, 26.

225 Proposición I, 4.

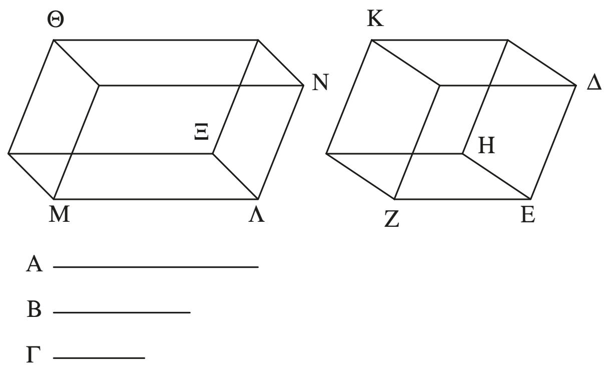
226 Euclides, nesta Proposición XI, 35 e na Proposición XI, 37, en vez de repetir o enunciado completo, opta por repetir o principio do enunciado e rematar con «e o que segue do enunciado».

PROPOSICIÓN 36

Se tres rectas son proporcionais, o sólido paralelepípedo a partir das tres é igual ó sólido paralelepípedo a partir da do medio, equilátero e de ángulos iguais ós do antedito.

Sexan Α, Β e Γ tres rectas proporcionais —como Α a Β, así Β a Γ—; digo que o sólido a partir de Α, Β e Γ é igual ó sólido a partir de Β, equilátero e de ángulos iguais ós do antedito.

Tómese o ángulo sólido Ε contido por ΔΕΗ, ΗΕΖ e ΖΕΔ, fáganse tanto ΔΕ como ΕΗ e ΕΖ iguais a Β, e complétese o sólido paralelepípedo ΕΚ[227]; fágase ΛΜ igual a Α e constrúase, na recta ΛΜ e no seu punto Λ, o ángulo sólido contido por ΝΛΞ, ΞΛΜ e ΜΛΝ, igual ó ángulo sólido Ε[228]; fágase ΛΞ igual a Β, mentres que ΛΝ igual a Γ.



E, dado que, como Α é a Β, así Β a Γ, e, por outro lado, Α igual a ΛΜ, mentres que Β tanto a ΛΞ como a ΕΔ, e Γ a ΛΝ, logo, como ΛΜ é a ΕΖ, así ΔΕ a ΛΝ.

E, os lados que conteñen os ángulos iguais ΝΛΜ e ΔΕΖ son inversamente proporcionais; logo, o paralelogramo ΜΝ é igual ó paralelogramo ΔΖ[229].

---

227 Proposición I, 31.
228 Proposición XI, 23.
229 Proposición VI, 14.

E, dado que ΔEZ e NΛM son dous ángulos planos rectilíneos iguais e que neles quedan levantadas as rectas elevadas ΛΞ e EH, iguais entre si e contendo ángulos iguais respectivamente xunto coas rectas do principio, logo, as perpendiculares trazadas dende os puntos H e Ξ ós planos que van por NΛM e ΔEZ son iguais entre si[230]; en consecuencia, os sólidos ΛΘ e EK están baixo a mesma altura.

E os sólidos paralelepípedos sobre bases iguais e baixo a mesma altura son iguais entre si[231]; logo, é igual o sólido ΘΛ ó sólido EK.

E ΛΘ é o sólido a partir de A, B e Γ, mentres que EK o sólido a partir de B; logo, o sólido paralelepípedo a partir de A, B e Γ é igual ó sólido a partir de B, equilátero e de ángulos iguais ós do antedito; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 37

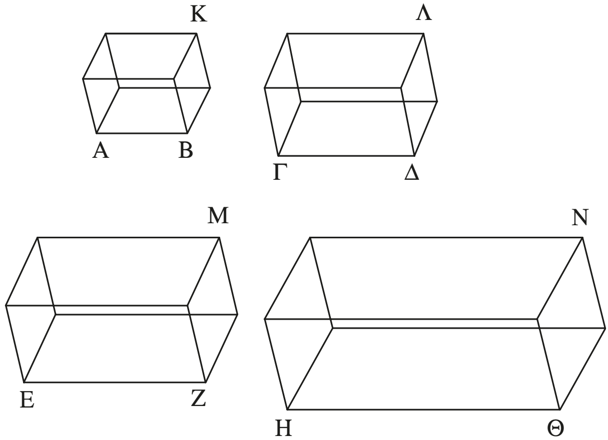
Se catro rectas son proporcionais, tamén os sólidos paralelepípedos semellantes e debuxados de xeito semellante a partir delas serán proporcionais; e, se os sólidos paralelepípedos semellantes e debuxados de xeito semellante a partir delas son proporcionais, tamén as propias rectas serán proporcionais.

Sexan AB, ΓΔ, EZ e HΘ catro rectas proporcionais —como AB a ΓΔ, así EZ a HΘ— e debúxense a partir de AB, ΓΔ, EZ e HΘ os sólidos paralelepípedos semellantes e situados de xeito semellante KA, ΛΓ, ME e NH[232]; digo que como KA é a ΛΓ, así ME a NH.

Pois ben, dado que o sólido paralelepípedo KA é semellante a ΛΓ, logo, KA garda razón triplicada con ΛΓ da que garda AB con ΓΔ[233].

---

230 Proposición XI, 35. Corolario.
231 Proposición XI, 31.
232 Proposición XI, 27.
233 Proposición XI, 33.



Entón, polo mesmo, tamén ME garda razón triplicada con NH da que garda EZ con HΘ.

E, como AB é a ΓΔ, así EZ a HΘ. Logo, tamén como AK a ΛΓ, así ME a NH[234].

Agora, como o sólido AK é ó sólido ΛΓ, sexa así o sólido ME a NH; digo que como a recta AB a ΓΔ, así EZ a HΘ.

Pois, asemade, dado que KA garda razón triplicada con ΛΓ da que garda AB con ΓΔ, que ME garda razón triplicada con NH da que garda EZ con HΘ e que como KA é a ΛΓ, así ME a NH, logo, tamén, como AB a ΓΔ, así EZ a HΘ[235].

Logo, se catro rectas son proporcionais e o que segue do enunciado; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 38

Se os lados dos planos opostos dun cubo se cortan á metade e se trazan planos polos cortes, o corte común dos planos e a diagonal do cubo cortaranse entre si á metade.

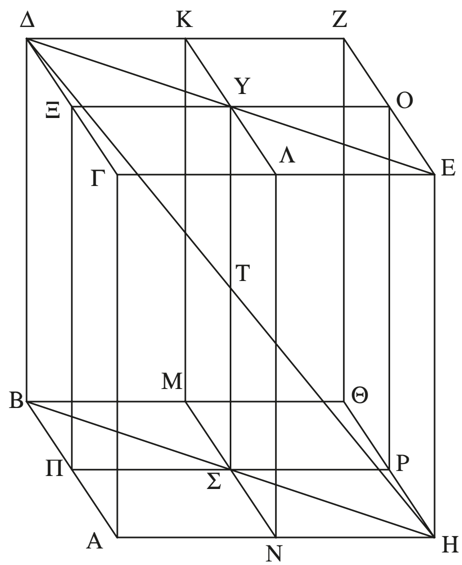
Pois ben, dos planos opostos ΓZ e AΘ do cubo AZ, córtense á metade os lados polos puntos K, Λ, M, N, Ξ, Π, O e P, trácense,

[234] Definición V, 10; Proposición V, 11 e Proposición V, 22.

[235] Dá por válido que, se as razóns triplicadas de dúas razóns son iguais, tamén son iguais as dúas razóns.

polos cortes, os planos KN e ΞΡ[236], e sexa o corte común dos planos ΥΣ, mentres que ΔΗ a diagonal[237] do cubo; digo que é igual ΥΤ a ΤΣ, e ΔΤ a ΤΗ.

Pois ben, trácense ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ e ΣΗ. E, dado que é paralela ΔΞ a ΟΕ, os ángulos alternos ΔΞΥ e ΥΟΕ son iguais entre si[238].



E, dado que é igual ΔΞ a ΟΕ, mentres que ΞΥ a ΥΟ[239] e que conteñen ángulos iguais, logo, a base ΔΥ é igual a ΥΕ, o triángulo ΔΞΥ é igual ó triángulo ΟΥΕ, e os demais ángulos son iguais ós demais ángulos[240]; logo, é igual o ángulo ΞΥΔ ó ángulo ΟΥΕ. Entón, por iso, ΔΥΕ é unha recta[241].

Entón, polo mesmo, tamén ΒΣΗ é unha recta, e ΒΣ, igual a ΣΗ.

236 Proposición I, 33 e Proposición XI, 9.

237 Ata a Proposición XI, 28 non aparece a palabra διαγώνιος para referirse á diagonal dun paralelogramo —véxase a Nota 151 (Proposición XI, 28)—. Nesta Proposición XI, 38 utiliza as dúas palabras con idéntico significado, no enunciado διαγώνιος e despois διάμετρος.

238 Proposición I, 29.

239 Proposición I, 33.

240 Proposición I, 4.

241 Proposición I, 14.

E, dado que ΓA é igual e paralela a ΔB, pero ΓA tamén é igual e paralela a EH, logo, tamén ΔB é igual e paralela a EH[242]. E as rectas ΔE e BH únenas; logo, é paralela ΔE a BH[243]. Logo, é igual o ángulo EΔT a BHT —pois son alternos[244]—, mentres que ΔTY a HTΣ[245].

Entón, ΔTY e HTΣ son dous triángulos que teñen dous ángulos iguais a dous ángulos, e un lado igual a un lado —o que está tendido baixo un dos ángulos iguais—, ΔY a HΣ —pois son metades de ΔE e BH—, e terán os demais lados iguais ós demais lados[246]. Logo, é igual ΔT a TH, mentres que YT a TΣ.

Logo, se os lados dos planos opostos dun cubo se cortan á metade e se trazan planos polos cortes, o corte común dos planos e a diagonal do cubo cortaranse entre si á metade; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 39

Se dous prismas son de igual altura, un ten como base un paralelogramo e outro un triángulo, e o paralelogramo é o dobre que o triángulo, os prismas serán iguais.

Sexan ABΓΔEZ e HΘKΛMN dous prismas de igual altura, teña un como base o paralelogramo AZ, o outro o triángulo HΘK, e sexa o paralelogramo AZ o dobre que o triángulo HΘK; digo que é igual o prisma ABΓΔEZ ó prisma HΘKΛMN[247].

Pois ben, complétense os sólidos AΞ e HO[248].

---

242 Proposición XI, 9.

243 Proposición I, 33.

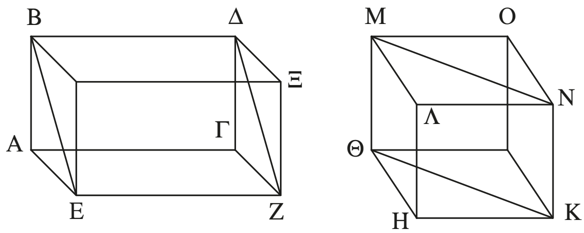
244 Proposición I, 29.

245 Proposición I, 15.

246 Proposición I, 26.

247 É curiosa a forma de elixir a base e a altura dos dous prismas. Ámbolos dous están contidos por dous triángulos que son os planos opostos, iguais, semellantes e paralelos, e tres paralelogramos —Definición XI, 13—. Para o primeiro, considera como base un dos paralelogramos, as outras catro caras son os outros dous paralelogramos e os dous triángulos opostos e, finalmente, a altura é a perpendicular a este plano dende o vértice, que non está no plano, de cada un dos triángulos. Para o segundo, considera como base un dos triángulos, os tres paralelogramos son as caras laterais e o outro triángulo é a cara oposta á base.

248 Proposición I, 31.



Dado que o paralelogramo AZ é o dobre que o triángulo HΘK, e tamén o paralelogramo ΘK é o dobre que o triángulo HΘK[249], logo, é igual o paralelogramo AZ ó paralelogramo ΘK.

Pero os sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguais e baixo a mesma altura son iguais entre si[250]; logo é igual o sólido AΞ ó sólido HO.

E o prisma ABΓΔEZ é metade do sólido AΞ, mentres que o prisma HΘKΛMN, metade do sólido HO[251]; logo, o prisma ABΓΔEZ é igual ó prisma HΘKΛMN.

Logo, se dous prismas son de igual altura, un ten como base un paralelogramo e outro un triángulo, e o paralelogramo é o dobre que o triángulo, os prismas son iguais; o que, xustamente, era preciso demostrar.

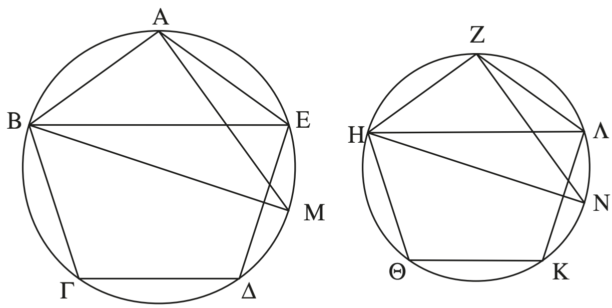
249 Proposición I, 34.
250 Proposición XI, 31.
251 Proposición XI, 28.

PROPOSICIÓN 1

Os polígonos semellantes inscritos nos círculos*[1] *son entre si como os cadrados dos diámetros.

Sexan os círculos ΑΒΓ e ΖΗΘ, estean inscritos neles os polígonos semellantes ΑΒΓΔΕ e ΖΗΘΚΛ, e sexan ΒΜ e ΗΝ os diámetros dos círculos; digo que como o cadrado de ΒΜ é ó cadrado de ΗΝ, así o polígono ΑΒΓΔΕ ó polígono ΖΗΘΚΛ.

Pois ben, trácense ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ e ΖΝ.



E, dado que o polígono ΑΒΓΔΕ é semellante ó polígono ΖΗΘΚΛ, tamén é igual o ángulo ΒΑΕ a ΗΖΛ e, como ΒΑ é a ΑΕ, así ΗΖ a ΖΛ[2].

Entón, ΒΑΕ e ΗΖΛ son dous triángulos que teñen un ángulo igual a un ángulo —ΒΑΕ a ΗΖΛ— e proporcionais os lados dos ángulos iguais; logo, o triángulo ΑΒΕ é de ángulos iguais ós do triángulo ΖΗΛ[3].

Logo, é igual o ángulo ΑΕΒ a ΖΛΗ. Pero ΑΕΒ é igual a ΑΜΒ —pois están sobre a mesma circunferencia[4]—, mentres que ΖΛΗ a ΖΝΗ; logo, tamén ΑΜΒ é igual a ΖΝΗ.

1 Definición IV, 3.
2 Definición VI, 1.
3 Proposición VI, 6.
4 Proposición III, 27.

Pero, o ángulo recto BAM é igual ó ángulo recto HZN[5]; logo, o restante é igual ó restante[6]; logo, o triángulo ABM é de ángulos iguais ós de ZHN.

Logo, proporcionalmente, como BM é a HN, así BA a HZ[7].

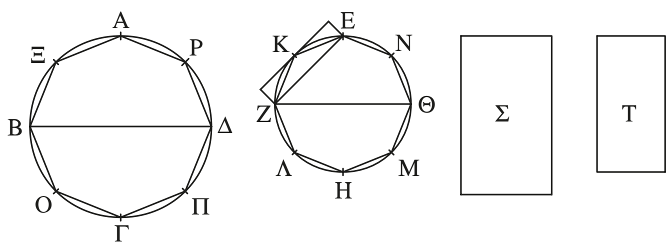
Pero a razón do cadrado de BM co cadrado de HN é duplicada da de BM con HN[8], mentres que a do polígono ΑΒΓΔΕ co polígono ΖΗΘΚΛ é duplicada da de BA con HZ[9]; logo, tamén, como o cadrado de BM ó cadrado de HN, así o polígono ΑΒΓΔΕ ó polígono ΖΗΘΚΛ[10].

Logo, os polígonos semellantes inscritos nos círculos son entre si como os cadrados dos diámetros; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 2

Os círculos son entre si como os cadrados dos seus diámetros.

Sexan os círculos ΑΒΓΔ e ΕΖΗΘ, e ΒΔ e ΖΘ os seus diámetros; digo que, como o círculo ΑΒΓΔ é ó círculo ΕΖΗΘ, así o cadrado de ΒΔ ó cadrado de ΖΘ.



Pois se, como o círculo ΑΒΓΔ é ó círculo ΕΖΗΘ, non é así o cadrado de ΒΔ ó de ΖΘ, como o cadrado de ΒΔ ó de ΖΘ, así será

5 Proposición III, 31.
6 Proposición I, 32.
7 Proposición VI, 4.
8 Proposición VI, 20. Corolario.
9 Proposición VI, 20.
10 Proposición V, 11.

o círculo ΑΒΓΔ ou ben a unha área menor que o círculo ΕΖΗΘ ou a unha maior.

Séxao, primeiro, a unha menor, Σ. E inscríbase no círculo ΕΖΗΘ o cadrado ΕΖΗΘ[11].

Entón, o cadrado inscrito é maior que a metade do círculo ΕΖΗΘ, posto que, se polos puntos Ε, Ζ, Η e Θ trazamos tanxentes ó círculo, o cadrado ΕΖΗΘ é metade do cadrado circunscrito ó círculo[12] e o círculo é menor que o cadrado circunscrito; en consecuencia, o cadrado inscrito ΕΖΗΘ é maior que a metade do círculo ΕΖΗΘ.

Córtense á metade as circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ e ΘΕ polos puntos Κ, Λ, Μ e Ν[13], e trácense ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ e ΝΕ; logo, cada un dos triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ e ΘΝΕ é maior que a metade do segmento do círculo no que está[14] —posto que, se polos puntos Κ, Λ, Μ e Ν trazamos tanxentes ó círculo[15] e completamos os paralelogramos sobre as rectas ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ e ΘΕ[16], cada un dos triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ e ΘΝΕ será metade do paralelogramo no que está—, pero o segmento no que está é menor que o paralelogramo; en consecuencia, cada un dos triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ e ΘΝΕ é maior que a metade do segmento do círculo no que está.

Entón, cortando as circunferencias que quedan á metade, trazando rectas e facendo iso continuamente, deixaremos uns segmentos do círculo que serán menores que o exceso no que excede o círculo ΕΖΗΘ á área Σ —pois foi demostrado no primeiro teorema do libro décimo que, tomadas dúas magnitudes desiguais, se da maior se quita unha maior que a metade e, da que queda, unha maior que a metade e iso se fai sucesivamente,

11 Proposición IV, 6.
12 Proposición I, 47.
13 Proposición III, 30.
14 Definición III, 6.
15 Proposición III, 16. Corolario.
16 Proposición I, 11.

quedará unha magnitude que será menor que a magnitude menor tomada[17].

Quede, entón, e sexan os segmentos sobre ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ e ΝΕ do círculo ΕΖΗΘ menores que o exceso no que excede o círculo ΕΖΗΘ á área Σ. Logo, o polígono restante ΕΚΖΛΗΜΘΝ é maior que a área Σ.

Inscríbase no círculo ΑΒΓΔ o polígono ΑΞΒΟΓΠΔΡ semellante ó polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ[18].

Logo, como o cadrado de ΒΔ é ó cadrado de ΖΘ, así o polígono ΑΞΒΟΓΠΔΡ é ó polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ[19].

Pero, tamén, como o cadrado de ΒΔ ó cadrado de ΖΘ, así o círculo ΑΒΓΔ á área Σ; logo, tamén como o círculo ΑΒΓΔ á área Σ, así o polígono ΑΞΒΟΓΠΔΡ ó polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ[20].

Logo, por alternancia, como o círculo ΑΒΓΔ ó polígono inscrito nel, así a área Σ ó polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ[21].

Pero o círculo ΑΒΓΔ é maior que o polígono inscrito nel; logo, tamén é maior a área Σ que o polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ[22].

Pero tamén menor; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, como o cadrado de ΒΔ ó de ΖΘ, así non é o círculo ΑΒΓΔ a unha área menor que o círculo ΕΖΗΘ.

Entón, de xeito semellante, poderemos demostrar que, como o cadrado de ΖΘ ó de ΒΔ, así tampouco é o círculo ΕΖΗΘ a unha área menor que o círculo ΑΒΓΔ.

Digo agora, que como o cadrado de ΒΔ ó de ΖΘ, así tampouco é o círculo ΑΒΓΔ a unha área maior que o círculo ΕΖΗΘ.

Pois ben, se é posible, séxao a unha maior, Σ.

Logo, por inversión, como o cadrado de ΖΘ ó de ΔΒ, así a área Σ ó círculo ΑΒΓΔ[23].

17 Proposición X, 1.
18 Proposición VI, 18.
19 Proposición XII, 1.
20 Proposición V, 11.
21 Proposición V, 16.
22 Definición V, 5.
23 Proposición V, 7. Corolario.

Pero como a área Σ ó círculo ΑΒΓΔ, así o círculo ΕΖΗΘ a unha área menor que o círculo ΑΒΓΔ[24]; logo, tamén, como o cadrado de ΖΘ ó de ΒΔ, así o círculo ΕΖΗΘ a unha área menor que o círculo ΑΒΓΔ[25]; o que, xustamente, foi demostrado imposible.

Logo, como o cadrado de ΒΔ ó de ΖΘ, non é así o círculo ΑΒΓΔ a unha área maior que o círculo ΕΖΗΘ.

Pero foi demostrado que tampouco a unha menor; logo, como o cadrado de ΒΔ ó de ΖΘ, así o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ.

Logo, os círculos son entre si como os cadrados dos seus diámetros; o que, xustamente, era preciso demostrar.

LEMA

Digo agora que, sendo a área* Σ *maior que o círculo* ΕΖΗΘ*, como a área* Σ *é ó círculo* ΑΒΓΔ*, así o círculo* ΕΖΗΘ *a unha área menor que o círculo* ΑΒΓΔ*.

Pois ben, resulte que, como a área Σ ó círculo ΑΒΓΔ, así o círculo ΕΖΗΘ á área Τ; digo que é menor a área Τ que o círculo ΑΒΓΔ.

Pois, dado que, como a área Σ é ó círculo ΑΒΓΔ, así o círculo ΕΖΗΘ á área Τ, por alternancia, como a área Σ ó círculo ΕΖΗΘ, así o círculo ΑΒΓΔ á área Τ[26].

Pero a área Σ é maior que o círculo ΕΖΗΘ; logo, tamén o círculo ΑΒΓΔ é maior que a área Τ[27].

En consecuencia, como a área Σ é ó círculo ΑΒΓΔ, así o círculo ΕΖΗΘ a unha área menor que o círculo ΑΒΓΔ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 3

Toda pirámide que ten un triángulo como base divídese en dúas pirámides iguais e semellantes entre si e a ela

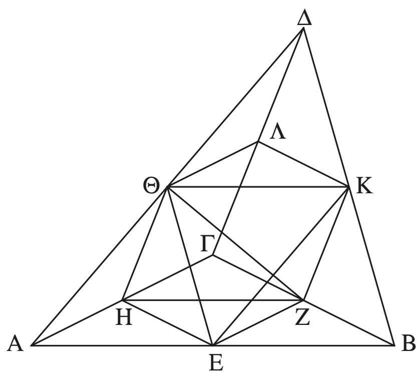
---

24 Lema que segue a esta Proposición XII, 2.
25 Proposición V, 11.
26 Proposición V, 16.
27 Definición V, 5.

enteira, que teñen triángulos como bases, e en dous prismas iguais; e os dous prismas son maiores que a metade da pirámide enteira.

Sexa unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΓ e o seu vértice o punto Δ; digo que a pirámide ΑΒΓΔ divídese en dúas pirámides iguais entre si, que teñen como bases triángulos e que son semellantes á enteira, e en dous prismas iguais; e os dous prismas son maiores que a metade da pirámide enteira.

Pois ben, córtense á metade ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ e ΔΓ polos puntos Ε, Ζ, Η, Θ, Κ e Λ, e trácense ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ e ΖΗ.



Dado que é igual ΑΕ a ΕΒ, mentres que ΑΘ a ΔΘ, logo, é paralela ΕΘ a ΔΒ[28].

Entón, polo mesmo, tamén ΘΚ é paralela a ΑΒ; logo, ΘΕΒΚ é un paralelogramo; logo, é igual ΘΚ a ΕΒ[29].

Pero ΕΒ é igual a ΕΑ; logo, tamén ΑΕ é igual a ΘΚ.

Pero é igual tamén ΑΘ a ΘΔ; entón, as dúas rectas ΕΑ e ΑΘ son iguais ás dúas rectas ΚΘ e ΘΔ respectivamente; e o ángulo ΕΑΘ é igual a ΚΘΔ[30]; logo, a base ΕΘ é igual á base ΚΔ[31].

28 Proposición VI, 2.
29 Proposición I, 34.
30 Proposición I, 29.
31 Proposición I, 4.

Logo, é igual e semellante o triángulo ΑΕΘ ó triángulo ΘΚΔ.

Entón, polo mesmo, tamén o triángulo ΑΘΗ é igual e semellante ó triángulo ΘΛΔ.

E, dado que as dúas rectas que se tocan ΕΘ e ΘΗ están en paralelo ás dúas rectas que se tocan ΚΔ e ΔΛ, non estando no mesmo plano, conterán ángulos iguais[32]. Logo, é igual o ángulo ΕΘΗ ó ángulo ΚΔΛ.

E, dado que as dúas rectas ΕΘ e ΘΗ son iguais ás dúas rectas ΚΔ e ΔΛ respectivamente e que o ángulo ΕΘΗ é igual a ΚΔΛ, logo, a base ΕΗ é igual á base ΚΛ; logo, tamén é igual e semellante o triángulo ΕΘΗ ó triángulo ΚΔΛ.

Entón, polo mesmo, tamén o triángulo ΑΕΗ é igual e semellante ó triángulo ΘΚΛ.

Logo, a pirámide cuxa base é o triángulo ΑΕΗ e o seu vértice o punto Θ é igual e semellante á pirámide cuxa base é o triángulo ΘΚΛ e o seu vértice o punto Δ[33].

E, dado que ΘΚ está trazada en paralelo a ΑΒ —un dos lados do triángulo ΑΔΒ—, tamén o triángulo ΑΔΒ é de ángulos iguais ós do triángulo ΔΘΚ[34] e teñen proporcionais os lados.

Logo, o triángulo ΑΔΒ é semellante ó triángulo ΔΘΚ[35].

Entón, polo mesmo, tamén o triángulo ΔΒΓ é semellante ó triángulo ΔΚΛ, mentres que ΑΔΓ a ΔΛΘ.

E, dado que as dúas rectas que se tocan ΒΑ e ΑΓ están en paralelo ás dúas rectas que se tocan, ΚΘ e ΘΛ[36], non estando no mesmo plano, conterán ángulos iguais. Logo, é igual o ángulo ΒΑΓ a ΚΘΛ.

E, como ΒΑ é a ΑΓ, así ΚΘ a ΘΛ; logo, é semellante o triángulo ΑΒΓ ó triángulo ΘΚΛ[37].

---

[32] Proposición XI, 10.
[33] Definición XI, 10.
[34] Proposición I, 29.
[35] Definición VI, 1.
[36] Proposición VI, 2.
[37] Proposición VI, 6 e Definición VI, 1.

Logo, tamén unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΓ e o seu vértice o punto Δ é semellante a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΘΚΛ e o seu vértice o punto Δ[38].

Pero foi demostrado que unha pirámide cuxa base é o triángulo ΘΚΛ e o seu vértice o punto Δ é semellante a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΕΗ e o seu vértice o punto Θ. Logo, cada unha das pirámides ΑΕΗΘ e ΘΚΛΔ é semellante á pirámide enteira ΑΒΓΔ.

E, dado que é igual ΒΖ a ΖΓ, o paralelogramo ΕΒΖΗ é o dobre que o triángulo ΗΖΓ[39].

E, dado que, se dous prismas son de igual altura e un ten como base un paralelogramo, o outro un triángulo, e o paralelogramo é o dobre que o triángulo, os prismas son iguais[40], logo, o prisma contido polos dous triángulos ΒΚΖ e ΕΘΗ e os tres paralelogramos ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ e ΘΚΖΗ é igual ó prisma contido polos dous triángulos ΗΖΓ e ΘΚΛ e os tres paralelogramos ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ e ΘΚΖΗ.

E é evidente que cada un dos prismas —aquel cuxa base é o paralelogramo ΕΒΖΗ e a recta ΘΚ a oposta e aquel cuxa base é o triángulo ΗΖΓ e o triángulo ΘΚΛ o oposto— é maior que cada unha das pirámides cuxas bases son os triángulos ΑΕΗ e ΘΚΛ e os seus vértices os puntos Θ e Δ, posto que, se trazamos as rectas ΕΖ e ΕΚ, o prisma cuxa base é o paralelogramo ΕΒΖΗ e a recta ΘΚ a oposta, é maior que a pirámide cuxa base é o triángulo ΕΒΖ e o seu vértice o punto Κ. Pero, a pirámide cuxa base é o triángulo ΕΒΖ e o seu vértice o punto Κ é igual á pirámide cuxa base é o triángulo ΑΕΗ e o seu vértice o punto Θ —pois están contidas por planos iguais e semellantes.

---

38 Definición XI, 9.
39 Proposición I, 41.
40 Proposición XI, 39.

En consecuencia, tamén o prisma cuxa base é o paralelogramo ΕΒΖΗ e a recta ΘΚ a oposta é maior que unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΕΗ e o seu vértice o punto Θ.

Pero o prisma cuxa base é o paralelogramo ΕΒΖΗ e a recta ΘΚ a oposta é igual ó prisma cuxa base é o triángulo ΗΖΓ e o triángulo ΘΚΛ o oposto; pero a pirámide cuxa base é o triángulo ΑΕΗ e o seu vértice o punto Θ é igual a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΘΚΛ e o seu vértice o punto Δ.

Logo, os prismas ditos son maiores que as dúas pirámides ditas, cuxas bases son os triángulos ΑΕΗ e ΘΚΛ e os seus vértices os puntos Θ e Δ.

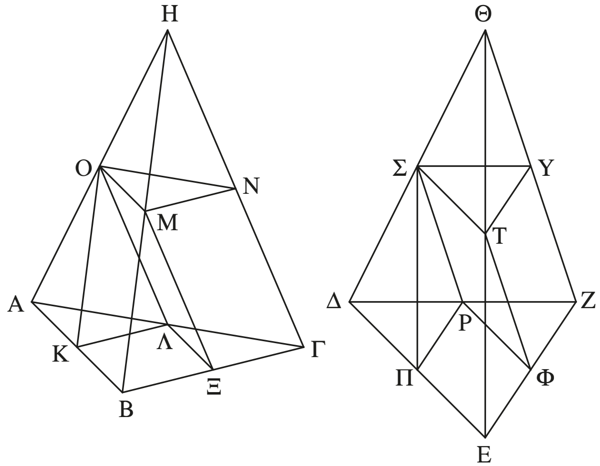
Logo, a pirámide enteira cuxa base é o triángulo ΑΒΓ e o seu vértice o punto Δ queda dividida en dúas pirámides iguais entre si e en dous prismas iguais; e os dous prismas son maiores que a metade da pirámide enteira; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

Se hai dúas pirámides baixo a mesma altura que teñen triángulos como bases e cada unha delas se divide en dúas pirámides iguais entre si e semellantes a ela enteira e en dous prismas iguais, como a base dunha pirámide á base da outra pirámide, así serán todos os prismas dunha pirámide a todos os prismas iguais en cantidade da outra pirámide.

Sexan dúas pirámides baixo a mesma altura que teñen como bases os triángulos ΑΒΓ e ΔΕΖ e como vértices os puntos Η e Θ, e divídase cada unha delas en dúas pirámides iguais entre si e semellantes á enteira e en dous prismas iguais[41]; digo que como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, así todos os prismas da pirámide ΑΒΓΗ ós prismas da pirámide ΔΕΖΘ iguais en cantidade.

41 Proposición XII, 3.



Pois ben, dado que é igual ΒΞ a ΞΓ, mentres que ΑΛ a ΛΓ, logo, é paralela ΛΞ a ΑΒ[42], e o triángulo ΑΒΓ semellante ó triángulo ΛΞΓ[43].

Entón, polo mesmo, tamén é semellante o triángulo ΔΕΖ ó triángulo ΡΦΖ.

E, dado que ΒΓ é o dobre que ΓΞ, mentres que ΕΖ o dobre que ΖΦ, logo, como ΒΓ é a ΓΞ, así ΕΖ a ΖΦ.

E, quedan debuxadas a partir de ΒΓ e ΓΞ as figuras rectilíneas ΑΒΓ e ΛΞΓ, semellantes e situadas de xeito semellante, mentres que ΔΕΖ e ΡΦΖ a partir de ΕΖ e ΖΦ, semellantes e situadas de xeito semellante. Logo, como o triángulo ΑΒΓ é ó triángulo ΛΞΓ, así o triángulo ΔΕΖ ó triángulo ΡΦΖ[44]; logo, por alternancia, como o triángulo ΑΒΓ é a ΔΕΖ, así ΛΞΓ ó triángulo ΡΦΖ[45].

Pero como o triángulo ΛΞΓ ó triángulo ΡΦΖ, así o prisma cuxa base é o triángulo ΛΞΓ e o oposto ΟΜΝ ó prisma cuxa base é o triángulo ΡΦΖ e o oposto ΣΤΥ[46]; logo, tamén, como o trián-

42 Proposición VI, 2.
43 Proposición I, 29; Proposición VI, 4 e Definición VI, 1.
44 Proposición VI, 22.
45 Proposición V, 16.
46 Lema que segue a esta Proposición XII, 4.

gulo ΑΒΓ ó triángulo ΔΕΖ, así o prisma cuxa base é o triángulo ΛΞΓ e o oposto ΟΜΝ ó prisma cuxa base é o triángulo ΡΦΖ e o oposto ΣΤΥ.

Pero como os prismas ditos son entre si, así o prisma cuxa base é o paralelogramo ΚΒΞΛ e a recta ΟΜ a oposta ó prisma cuxa base é o paralelogramo ΠΕΦΡ e a recta ΣΤ a oposta[47]; logo, tamén os dous prismas[48] —aquel cuxa base é o paralelogramo ΚΒΞΛ e a recta ΟΜ a oposta e aquel cuxa base é ΛΞΓ e o oposto ΟΜΝ— ós dous prismas[49] —aquel cuxa base é o paralelogramo ΠΕΦΡ e a recta ΣΤ a oposta e aquel cuxa base é o triángulo ΡΦΖ e o oposto ΣΤΥ.

Logo, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, así os dous prismas ditos ós dous prismas ditos[50].

E de xeito semellante, se se dividen as pirámides ΟΜΝΗ e ΣΤΥΘ en dous prismas e en dúas pirámides, como a base ΟΜΝ á base ΣΤΥ, así serán os dous prismas da pirámide ΟΜΝΗ ós dous prismas da pirámide ΣΤΥΘ.

Pero como a base ΟΜΝ á base ΣΤΥ, así a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ —pois os triángulos ΟΜΝ e ΣΤΥ son iguais respectivamente ós triángulos ΛΞΓ e ΡΦΖ.

Logo, tamén, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, así os catro prismas ós catro prismas[51].

De xeito semellante, tamén, se dividimos as pirámides que quedan en dúas pirámides e dous prismas, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, así serán todos os prismas da pirámide ΑΒΓΗ a todos os prismas da pirámide ΔΕΖΘ iguais en cantidade; o que, xustamente, era preciso demostrar.

47 Proposición XII, 3 e Proposición XI, 39.

48 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

49 Proposición V, 12. Enténdase: logo, tamén como os prismas ditos son entre si, así os dous prismas sumados son ós dous prismas sumados.

50 Proposición V, 11.

51 Proposición V, 12.

Lema[52]

Que, como o triángulo* ΛΞΓ *é ó triángulo* ΡΦΖ*, así o prisma cuxa base é o triángulo* ΛΞΓ *e o oposto* ΟΜΝ *ó prisma cuxa base é* ΡΦΖ *e o oposto* ΣΤΥ*, cómpre demostralo así:

Pois ben, sobre a mesma construción, dende Η e Θ, considérense unhas perpendiculares ós planos ΑΒΓ e ΔΕΖ as cales, evidentemente, resultan ser iguais por suporse as pirámides iguais en altura.

E, dado que dúas rectas, ΗΓ e a perpendicular dende Η, son cortadas polos planos paralelos ΑΒΓ e ΟΜΝ, serán cortadas nas mesmas razóns[53].

E ΗΓ queda cortada á metade polo plano ΟΜΝ polo punto Ν; logo, a perpendicular dende Η ó plano ΑΒΓ será cortada á metade polo plano ΟΜΝ.

Entón, polo mesmo, tamén a perpendicular dende Θ ó plano ΔΕΖ será cortada á metade polo plano ΣΤΥ. E son iguais as perpendiculares ós planos ΑΒΓ e ΔΕΖ dende Η e Θ; logo, tamén as perpendiculares a ΑΒΓ e ΔΕΖ dende os triángulos ΟΜΝ e ΣΤΥ son iguais.

Logo, son da mesma altura os prismas cuxas bases son os triángulos ΛΞΓ e ΡΦΖ e os opostos ΟΜΝ e ΣΤΥ.

En consecuencia, tamén os sólidos paralelepípedos debuxados a partir dos prismas ditos son da mesma altura e entre si, como as súas bases[54]. Logo, tamén, as súas metades, os prismas ditos, son entre si así como a base ΛΞΓ é á base ΡΦΖ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

As pirámides que están baixo a mesma altura e que teñen triángulos como bases son entre si como as súas bases.

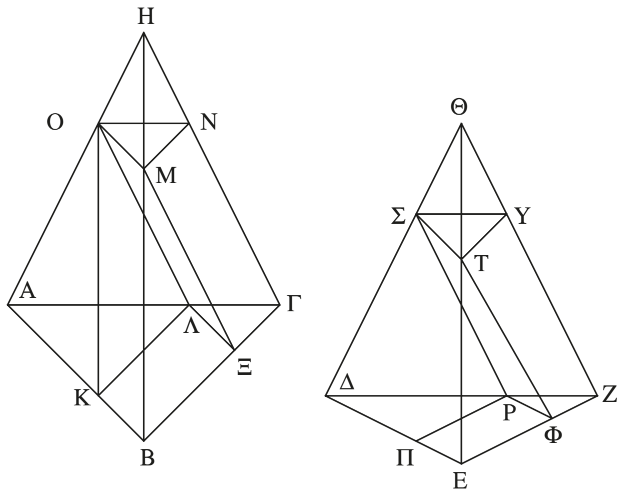
Estean baixo a mesma altura pirámides cuxas bases son os triángulos ΑΒΓ e ΔΕΖ e os seus vértices os puntos Η e Θ; digo

52 Véxase a Nota 119 (Lema que segue á Proposición XI, 23).

53 Proposición XI, 17.

54 Proposición XI, 32.

que como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, así a pirámide ΑΒΓΗ á pirámide ΔΕΖΘ.



Pois se, como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, non é así a pirámide ΑΒΓΗ á pirámide ΔΕΖΘ, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, así será a pirámide ΑΒΓΗ ou ben a un sólido menor que a pirámide ΔΕΖΘ ou a un maior.

Séxao, primeiro, ó menor Χ e divídase a pirámide ΔΕΖΘ en dúas pirámides iguais entre si e semellantes á enteira e en dous prismas iguais; entón, os dous prismas son maiores que a metade da pirámide enteira[55].

E, asemade, as pirámides resultantes da división divídanse de xeito semellante e fágase iso sucesivamente ata que queden unhas pirámides da pirámide ΔΕΖΘ que sexan menores que o exceso no que excede a pirámide ΔΕΖΘ ó sólido Χ[56].

Queden e sexan, por exemplo, ΔΠΡΣ e ΣΤΥΘ; logo, os prismas restantes da pirámide ΔΕΖΘ son maiores que o sólido Χ.

Divídase tamén a pirámide ΑΒΓΗ de xeito semellante e en igual cantidade que a pirámide ΔΕΖΘ; logo, como a base ΑΒΓ

[55] Proposición XII, 3.
[56] Proposición X, 1.

é á base ΔΕΖ, así os prismas da pirámide ΑΒΓΗ ós prismas da pirámide ΔΕΖΘ[57].

Pero tamén, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, así a pirámide ΑΒΓΗ ó sólido Χ; logo, tamén, como a pirámide ΑΒΓΗ ó sólido Χ, así os prismas da pirámide ΑΒΓΗ ós prismas da pirámide ΔΕΖΘ[58]; logo, por alternancia[59], como a pirámide ΑΒΓΗ ós seus prismas, así o sólido Χ ós prismas da pirámide ΔΕΖΘ.

Pero a pirámide ΑΒΓΗ é maior que os seus prismas; logo, é maior tamén o sólido Χ que os prismas da pirámide ΔΕΖΘ[60]. Pero tamén menor; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, non é así a pirámide ΑΒΓΗ a un sólido menor que a pirámide ΔΕΖΘ. Entón, de xeito semellante poderase demostrar que, como a base ΔΕΖ á base ΑΒΓ, tampouco é así a pirámide ΔΕΖΘ a un sólido menor que a pirámide ΑΒΓΗ.

Digo agora que como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, tampouco é así a pirámide ΑΒΓΗ a un sólido maior que a pirámide ΔΕΖΘ.

Pois, se é posible, séxao ó maior Χ; logo, por inversión, como a base ΔΕΖ é á base ΑΒΓ, así o sólido Χ á pirámide ΑΒΓΗ[61].

Pero como o sólido Χ é á pirámide ΑΒΓΗ, así a pirámide ΔΕΖΘ a un menor que a pirámide ΑΒΓΗ, como foi demostrado antes[62]; logo, tamén, como a base ΔΕΖ á base ΑΒΓ, así a pirámide ΔΕΖΘ a un menor que a pirámide ΑΒΓΗ; o que foi demostrado imposible.

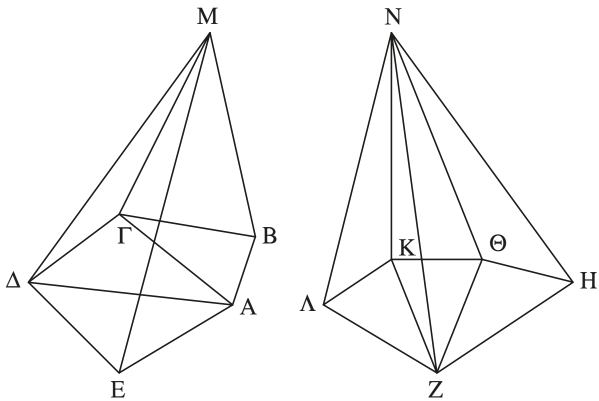
Logo, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, non é así a pirámide ΑΒΓΗ a un sólido maior que a pirámide ΔΕΖΘ. Pero foi demostrado que tampouco a un menor. Logo, como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, así a pirámide ΑΒΓΗ á pirámide ΔΕΖΘ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

57 Proposición XII, 4.
58 Proposición V, 11.
59 Proposición V, 16.
60 Definición V, 5.
61 Proposición V, 7. Corolario.
62 Lema previo á Proposición XII, 3.

PROPOSICIÓN 6

As pirámides que están baixo a mesma altura e que teñen polígonos como bases son entre si como as súas bases.

Estean baixo a mesma altura pirámides cuxas bases son os polígonos ΑΒΓΔΕ e ΖΗΘΚΛ e os seus vértices os puntos Μ e Ν; digo que como a base ΑΒΓΔΕ é á base ΖΗΘΚΛ, así a pirámide ΑΒΓΔΕΜ á pirámide ΖΗΘΚΛΝ.



Pois ben, trácense ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ e ΖΚ. Entón, dado que ΑΒΓΜ e ΑΓΔΜ son dúas pirámides que teñen triángulos como bases e igual altura, son entre si como as súas bases[63]; logo, como a base ΑΒΓ é á base ΑΓΔ, así a pirámide ΑΒΓΜ á pirámide ΑΓΔΜ. E, por composición, como a base ΑΒΓΔ á base ΑΓΔ, así a pirámide ΑΒΓΔΜ á pirámide ΑΓΔΜ[64].

Pero, tamén, como a base ΑΓΔ á base ΑΔΕ, así a pirámide ΑΓΔΜ á pirámide ΑΔΕΜ. Logo, por igualdade, como a base ΑΒΓΔ á base ΑΔΕ, así a pirámide ΑΒΓΔΜ á pirámide ΑΔΕΜ[65].

E, de novo, por composición, como a base ΑΒΓΔΕ á base ΑΔΕ, así a pirámide ΑΒΓΔΕΜ á pirámide ΑΔΕΜ.

Entón, de xeito semellante, poderase demostrar que tamén, como a base ΖΗΘΚΛ á base ΖΗΘ, así tamén a pirámide ΖΗΘΚΛΝ á pirámide ΖΗΘΝ.

---

63 Proposición XII, 5.

64 Proposición V, 18.

65 Proposición V,22.

E, dado que ΑΔΕΜ e ΖΗΘΝ son dúas pirámides que teñen triángulos como bases e igual altura, logo, como a base ΑΔΕ é á base ΖΗΘ, así a pirámide ΑΔΕΜ á pirámide ΖΗΘΝ.

Pero como a base ΑΔΕ á base ΑΒΓΔΕ, así era a pirámide ΑΔΕΜ á pirámide ΑΒΓΔΕΜ.

Logo, tamén, por igualdade, como a base ΑΒΓΔΕ á base ΖΗΘ, así a pirámide ΑΒΓΔΕΜ á pirámide ΖΗΘΝ.

Pero, efectivamente, tamén como a base ΖΗΘ á base ΖΗΘΚΛ, así era tamén a pirámide ΖΗΘΝ á pirámide ΖΗΘΚΛΝ[66].

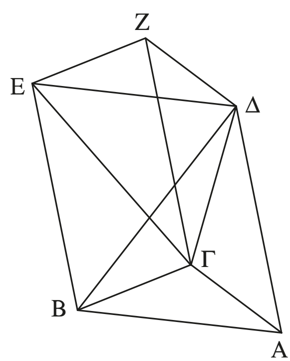
Logo, tamén, por igualdade, como a base ΑΒΓΔΕ á base ΖΗΘΚΛ, así a pirámide ΑΒΓΔΕΜ á pirámide ΖΗΘΚΛΝ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Todo prisma que ten un triángulo como base divídese en tres pirámides iguais entre si que teñen triángulos como bases.

Sexa un prisma cuxa base é o triángulo ΑΒΓ e o oposto ΔΕΖ; digo que o prisma ΑΒΓΔΕΖ divídese en tres pirámides iguais entre si que teñen triángulos como bases.

Pois ben, trácense ΒΔ, ΕΓ e ΓΔ.



Dado que ΑΒΕΔ é un paralelogramo e a súa diagonal é ΒΔ, logo, é igual o triángulo ΑΒΔ ó triángulo ΕΒΔ[67]; logo, tamén a

66 Proposición V, 7. Corolario.

67 Proposición I, 34.

pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΔ e o seu vértice o punto Γ é igual a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΔΕΒ e o seu vértice o punto Γ[68].

Pero a pirámide cuxa base é o triángulo ΔΕΒ e o seu vértice o punto Γ é a mesma que unha pirámide cuxa base é o triángulo ΕΒΓ e o seu vértice o punto Δ —pois están contidas polos mesmos planos—. Logo, tamén unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΔ e o seu vértice o punto Γ é igual a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΕΒΓ e o seu vértice o punto Δ.

Asemade, dado que ΖΓΒΕ é un paralelogramo e a súa diagonal é ΓΕ, o triángulo ΓΕΖ é igual ó triángulo ΓΒΕ. Logo, tamén unha pirámide cuxa base é o triángulo ΒΓΕ e o seu vértice o punto Δ é igual a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΕΓΖ e o seu vértice o punto Δ.

Pero a pirámide cuxa base é o triángulo ΒΓΕ e o seu vértice o punto Δ foi demostrado que é igual a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΔ e o seu vértice o punto Γ. Logo, tamén unha pirámide cuxa base é o triángulo ΓΕΖ e o seu vértice o punto Δ é igual a unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΔ e o seu vértice o punto Γ; logo, o prisma ΑΒΓΔΕΖ queda dividido en tres pirámides iguais entre si que teñen triángulos como bases.

E, dado que unha pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΔ e o seu vértice o punto Γ é a mesma que unha pirámide cuxa base é o triángulo ΓΑΒ e o seu vértice o punto Δ —pois están contidas polos mesmos planos—, mentres que a pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΔ e o seu vértice o punto Γ foi demostrado que é un terzo do prisma cuxa base é o triángulo ΑΒΓ e o oposto ΔΕΖ, logo, tamén a pirámide cuxa base é o triángulo ΑΒΓ e o seu vértice o punto Δ é un terzo do prisma que ten a mesma base, o triángulo ΑΒΓ, e o oposto, ΔΕΖ.

68 Proposición XII, 5.

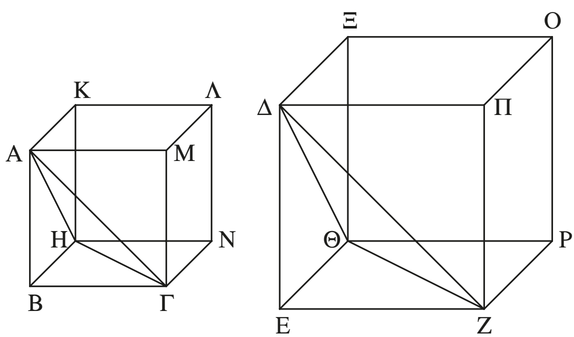
Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que toda pirámide é a terceira parte do prisma que ten a mesma base que ela e igual altura; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 8

As pirámides semellantes e que teñen triángulos como bases están en razón triplicada da dos lados correspondentes.

Sexan semellantes e situadas de xeito semellante pirámides cuxas bases son os triángulos ΑΒΓ e ΔΕΖ e os seus vértices os puntos Η e Θ; digo que a pirámide ΑΒΓΗ garda coa pirámide ΔΕΖΘ razón triplicada da que garda ΒΓ con ΕΖ.

Pois ben, complétense os sólidos paralelepípedos ΒΗΜΛ e ΕΘΠΟ[69].



E, dado que a pirámide ΑΒΓΗ é semellante á pirámide ΔΕΖΘ, logo, é igual o ángulo ΑΒΓ ó ángulo ΔΕΖ, mentres que ΗΒΓ a ΘΕΖ e ΑΒΗ a ΔΕΘ, e como ΑΒ a ΔΕ, así ΒΓ a ΕΖ, e ΒΗ a ΕΘ[70].

E, dado que, como ΑΒ a ΔΕ, así ΒΓ a ΕΖ, e que os lados dos ángulos iguais son proporcionais, logo, é semellante o paralelogramo ΒΜ ó paralelogramo ΕΠ[71].

69 Proposición XI, 2 e Proposición I, 31.
70 Definición XI, 9 e Definición VI, 1.
71 Proposición I, 34 e Definición VI, 1.

Entón, polo mesmo, tamén BN é semellante a EP mentres que BK a EΞ; logo, os tres, MB, BK e BN son semellantes ós outros tres, EΠ, EΞ e EP.

Pero os tres MB, BK e BN son iguais e semellantes ós tres opostos, mentres que os tres EΠ, EΞ e EP son iguais e semellantes ós tres opostos[72]. Logo, os sólidos BHMΛ e EΘΠO son contidos por planos semellantes, iguais en cantidade. Logo, é semellante o sólido BHMΛ ó sólido EΘΠO[73].

Pero os sólidos paralelepípedos semellantes están en razón triplicada da dos lados correspondentes[74]. Logo, o sólido BHMΛ garda co sólido EΘΠO razón triplicada da que garda o lado correspondente BΓ co lado correspondente EZ.

Pero,como o sólido BHMΛ ó sólido EΘΠO, así a pirámide ABΓH á pirámide ΔEZΘ, posto que a pirámide é sexta parte do sólido, por ser tamén o prisma —que é metade do sólido paralelepípedo[75]— triplo que a pirámide[76]. Logo, tamén a pirámide ABΓH garda coa pirámide ΔEZΘ razón triplicada da que garda BΓ con EZ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Corolario[77].- Polo tanto, a partir disto é evidente que as pirámides semellantes que teñen polígonos como bases están entre si en razón triplicada da dos lados correspondentes.

Pois ben, divididas estas nas súas pirámides que teñen triángulos como bases —por dividirse tamén os polígonos semellantes das súas bases en triángulos semellantes, iguais en cantidade e en razón semellante ós polígonos enteiros[78]—, como unha pirámide dunha que ten un triángulo como base a unha pirámide da outra que ten un triángulo como base, así tamén

72 Proposición XI, 24.

73 Definición XI, 9.

74 Proposición XI, 33.

75 Proposición XI, 28.

76 Proposición XII, 7.

77 Heiberg mantén no seu texto este Corolario aínda que afirma que, sen dúbida, é falso tanto porque na maioría de manuscritos falta e no manuscrito *P*, ó que máis se axusta o seu texto, aparece na marxe, como polo seu contido. Heath tamén pon en dúbida a súa autenticidade, xa que Euclides non fai uso do mesmo na Proposición XII, 12 e volve a repetir os argumentos do corolario a partir do resultado da Proposición XII, 8.

78 Proposición VI, 20.

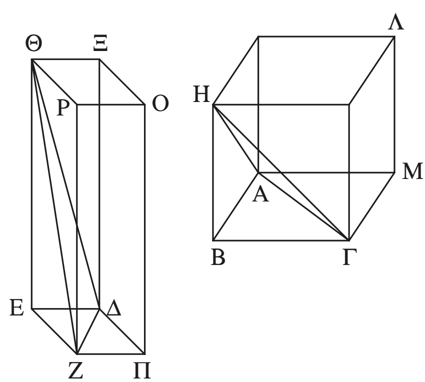
todas as pirámides dunha pirámide que teñen triángulos como bases ás pirámides da outra pirámide que teñen triángulos como base[79], é dicir, a propia pirámide que ten un polígono como base á pirámide que ten un polígono como base. Pero, a pirámide que ten un triángulo como base está en razón triplicada da dos lados correspondentes coa que ten o triángulo como base; logo, tamén a que ten un polígono como base garda razón triplicada da que garda o lado co lado da que ten a base semellante.

PROPOSICIÓN 9

Das pirámides iguais e que teñen triángulos como bases, as bases son inversamente proporcionais[80] ás alturas; e aquelas pirámides que teñen triángulos como bases, cuxas bases son inversamente proporcionais ás alturas, son iguais.

Pois ben, sexan iguais pirámides que teñen como bases os triángulos ΑΒΓ e ΔΕΖ, e como vértices os puntos Η e Θ; digo que, das pirámides ΑΒΓΗ e ΔΕΖΘ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas e, como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, así a altura da pirámide ΔΕΖΘ á altura da pirámide ΑΒΓΗ.

Pois ben, complétense os sólidos paralelepípedos ΒΗΜΛ e ΕΘΠΟ[81].



79 Proposición V, 12.
80 Véxase a Nota 2 (Definición VI, 2).
81 Proposición XI, 2 e Proposición I, 31.

E, dado que a pirámide ΑΒΓΗ é igual á pirámide ΔΕΖΘ e o sólido ΒΗΜΛ é seis veces a pirámide ΑΒΓΗ, mentres que o sólido ΕΘΠΟ seis veces a pirámide ΔΕΖΘ[82], logo, é igual o sólido ΒΗΜΛ ó sólido ΕΘΠΟ.

E, dos sólidos paralelepípedos iguais, as bases son inversamente proporcionais ás alturas[83]; logo, como a base ΒΜ é á base ΕΠ, así a altura do sólido ΕΘΠΟ á altura do sólido ΒΗΜΛ.

Pero como a base ΒΜ á base ΕΠ, así o triángulo ΑΒΓ ó triángulo ΔΕΖ[84]. Logo, tamén, como o triángulo ΑΒΓ ó triángulo ΔΕΖ, así a altura do sólido ΕΘΠΟ á altura do sólido ΒΗΜΛ[85].

Pero a altura do sólido ΕΘΠΟ é a mesma que a altura da pirámide ΔΕΖΘ, mentres que a altura do sólido ΒΗΜΛ é a mesma que a altura da pirámide ΑΒΓΗ; logo, como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, así a altura da pirámide ΔΕΖΘ á altura da pirámide ΑΒΓΗ. Logo, das pirámides ΑΒΓΗ e ΔΕΖΘ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas.

Sexan, agora, inversamente proporcionais as bases das pirámides ΑΒΓΗ e ΔΕΖΘ ás alturas e, como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, sexa así a altura da pirámide ΔΕΖΘ á altura da pirámide ΑΒΓΗ; digo que é igual a pirámide ΑΒΓΗ á pirámide ΔΕΖΘ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, dado que, como a base ΑΒΓ é á base ΔΕΖ, así a altura da pirámide ΔΕΖΘ á altura da pirámide ΑΒΓΗ, pero como a base ΑΒΓ á base ΔΕΖ, así o paralelogramo ΒΜ ó paralelogramo ΕΠ, logo, tamén, como o paralelogramo ΒΜ ó paralelogramo ΕΠ, así a altura da pirámide ΔΕΖΘ á altura da pirámide ΑΒΓΗ.

Pero a altura da pirámide ΔΕΖΘ é a mesma que a altura do paralelepípedo ΕΘΠΟ, mentres que a altura da pirámide ΑΒΓΗ é a mesma que a altura do paralelepípedo ΒΗΜΛ; logo, como a base ΒΜ á base ΕΠ, así a altura do paralelepípedo ΕΘΠΟ á altura do paralelepípedo ΒΗΜΛ.

---

82 Véxase a parte final da demostración da Proposición XII, 8.

83 Proposición XI, 34.

84 Proposición I, 34.

85 Proposición V, 11.

Pero aqueles sólidos paralelepípedos cuxas bases son inversamente proporcionais ás alturas son iguais[86]; logo, o sólido paralelepípedo ΒΗΜΛ é igual ó sólido paralelepípedo ΕΘΠΟ.

E a pirámide ΑΒΓΗ é sexta parte de ΒΗΜΛ, mentres que a pirámide ΔΕΖΘ é sexta parte do paralelepípedo ΕΘΠΟ; logo, a pirámide ΑΒΓΗ é igual á pirámide ΔΕΖΘ.

Logo, das pirámides iguais e que teñen triángulos como bases, as bases son inversamente proporcionais ás alturas; e aquelas pirámides que teñen triángulos como bases, cuxas bases son inversamente proporcionais ás alturas, son iguais; o que, xustamente era preciso demostrar.

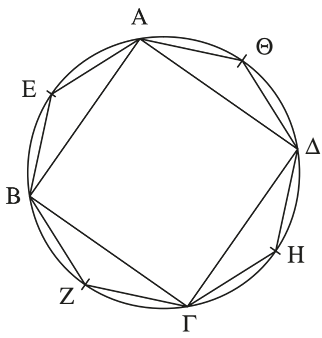
PROPOSICIÓN 10

Todo cono é terceira parte dun cilindro, do que ten a mesma base que el e igual altura.

Pois ben, teña un cono a mesma base que un cilindro, o círculo ΑΒΓΔ, e igual altura; digo que o cono é terceira parte do cilindro, é dicir, que o cilindro é triplo que o cono.

Pois, se o cilindro non é triplo que o cono, o cilindro será ou ben maior que o triplo ou menor que o triplo do cono.

Sexa, primeiro, maior que o triplo e inscríbase no círculo ΑΒΓΔ o cadrado ΑΒΓΔ[87]; entón, o cadrado ΑΒΓΔ é maior que a metade do círculo ΑΒΓΔ[88].



86 Proposición XI, 34.

87 Proposición IV, 6.

88 Véxase a demostración da Proposición XII, 2.

E levántese, a partir do cadrado ΑΒΓΔ, un prisma de igual altura que o cilindro. Entón, o prisma levantado é maior que a metade do cilindro, posto que tamén, se circunscribimos ó círculo ΑΒΓΔ un cadrado[89], o cadrado inscrito no círculo ΑΒΓΔ é metade do circunscrito[90]; e, os sólidos levantados a partir deles son prismas paralelepípedos de igual altura; e, os sólidos paralelepípedos que están baixo a mesma altura son entre si como as bases[91]; logo, tamén o prisma levantado sobre o cadrado ΑΒΓΔ é metade do prisma levantado a partir do cadrado circunscrito ó círculo ΑΒΓΔ; e, o cilindro é menor que o prisma levantado a partir do cadrado circunscrito ó círculo ΑΒΓΔ; logo, o prisma levantado a partir do cadrado ΑΒΓΔ, da mesma altura que o cilindro, é maior que a metade do cilindro.

Córtense á metade as circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ e ΔΑ polos puntos Ε, Ζ, Η e Θ[92], e trácense ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ e ΘΑ; logo, tamén cada un dos triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ e ΔΘΑ é maior que a metade do segmento do círculo ΑΒΓΔ no que está, como demostrabamos anteriormente[93].

Levántense sobre cada un dos triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ e ΔΘΑ prismas de igual altura que o cilindro; logo, tamén, cada un dos prismas levantados é maior que a metade do segmento do cilindro no que está, posto que, se trazamos polos puntos Ε, Ζ, Η e Θ paralelas a ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ e ΔΑ, completamos os paralelogramos sobre ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ e ΔΑ e levantamos a partir deles sólidos paralelepípedos de igual altura que o cilindro, os prismas sobre os triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ e ΔΘΑ son metade de cada un dos levantados; e os segmentos do cilindro son menores que os sólidos paralelepípedos levantados[94].

---

89 Proposición IV, 7.
90 Proposición I, 47.
91 Proposición XI, 32.
92 Proposición III, 30.
93 Véxase a demostración da Proposición XII, 2.
94 Véxase de novo a demostración e a gráfica da Proposición XII, 2.

En consecuencia, tamén os prismas sobre os triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ e ΔΘΑ son maiores que a metade dos segmentos do cilindro no que están. Entón, ó cortar as circunferencias que quedan á metade, trazar rectas, levantar sobre cada un dos triángulos prismas de igual altura que o cilindro e facer iso sucesivamente, deixaremos uns segmentos do cilindro que serán menores que o exceso no que excede o cilindro ó triplo do cono[95].

Déixense e sexan ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ e ΘΑ; logo, o prisma restante cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e a altura a mesma que a do cilindro é maior que o triplo do cono. Pero, o prisma cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e a súa altura a mesma que a do cilindro é triplo que a pirámide cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e o seu vértice o mesmo que o do cono[96]; logo, tamén a pirámide cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e o seu vértice o mesmo que o do cono é maior que o cono que ten como base o círculo ΑΒΓΔ. Pero tamén menor —pois está contida por el—; o que, sen dúbida, é imposible. Logo, o cilindro non é maior que o triplo do cono.

Digo agora que tampouco é menor o cilindro que o triplo do cono.

Pois, se é posible, sexa menor o cilindro que o triplo do cono. Logo, por inversión, o cono é maior que a terceira parte do cilindro.

Inscríbase no círculo ΑΒΓΔ o cadrado ΑΒΓΔ; logo, o cadrado ΑΒΓΔ é maior que a metade do círculo ΑΒΓΔ.

E levántese a partir do cadrado ΑΒΓΔ unha pirámide co mesmo vértice que o cono; logo, a pirámide levantada é maior que a metade do cono, posto que, como anteriormente demostrabamos, se circunscribimos un cadrado ó círculo, o cadrado ΑΒΓΔ será metade do cadrado circunscrito ó círculo; e, se a partir dos cadrados levantamos sólidos paralelepípedos de igual

95 Proposición X, 1.
96 Proposición XII, 7. Corolario.

altura que o cono que tamén se chaman prismas, o levantado a partir do cadrado ΑΒΓΔ será metade do levantado a partir do cadrado circunscrito ó círculo —pois son entre si como as bases—. En consecuencia, tamén os terzos; logo, tamén unha pirámide cuxa base é o cadrado ΑΒΓΔ é metade da pirámide levantada a partir do cadrado circunscrito ó círculo.

E a pirámide levantada a partir do cadrado circunscrito ó círculo é maior que o cono —pois conteno—. Logo, a pirámide cuxa base é o cadrado ΑΒΓΔ e o vértice o mesmo que o do cono é maior que a metade do cono.

Córtense á metade as circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ e ΔΑ polos puntos Ε, Ζ, Η e Θ, e trácense ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ e ΘΑ; logo, cada un dos triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ e ΔΘΑ é maior que a metade do segmento do círculo ΑΒΓΔ no que está.

E levántense sobre cada un dos triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ e ΔΘΑ pirámides co mesmo vértice que o cono; logo, tamén cada unha das pirámides levantadas do mesmo modo é maior que a metade de cada segmento do cono no que está. Entón, ó cortar á metade as circunferencias que quedan, trazar rectas e levantar sobre cada un dos triángulos unha pirámide co mesmo vértice que o cono e facer iso sucesivamente, deixaremos uns segmentos do cono que serán menores que o exceso no que o cono excede á terceira parte do cilindro.

Déixense e sexan os que están sobre ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ e ΘΑ; logo, a pirámide restante cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e o seu vértice o mesmo que o do cono é maior que a terceira parte do cilindro.

Pero a pirámide cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e o seu vértice o mesmo que o do cono é terceira parte do prisma cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e a súa altura a mesma que a do cilindro; logo, tamén o prisma cuxa base é o polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ e a súa altura a mesma que a do cilindro é maior que o cilindro cuxa base é o círculo ΑΒΓΔ. Pero tamén menor —pois está contido por el—; o que, sen dúbida, é imposible.

Logo, o cilindro non é menor que o triplo do cono.

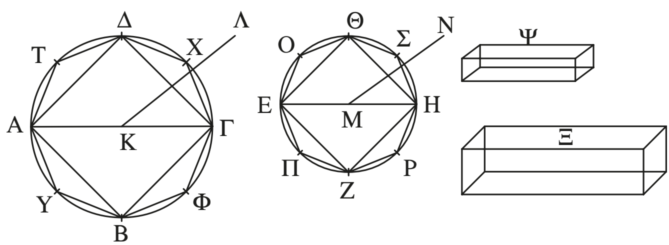
Pero, foi demostrado que tampouco maior que o triplo. Logo, o cilindro é triplo que o cono; en consecuencia, o cono é terceira parte do cilindro.

Logo, todo cono é terceira parte dun cilindro, do que ten a mesma base que el e igual altura; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 11

Os conos e cilindros que están baixo a mesma altura son entre si como as súas bases.

Estean baixo a mesma altura conos e cilindros cuxas bases son os círculos ΑΒΓΔ e ΕΖΗΘ, os seus eixos ΚΛ e ΜΝ e os diámetros das súas bases ΑΓ e ΕΗ[97]; digo que como o círculo ΑΒΓΔ é ó círculo ΕΖΗΘ, así o cono ΑΛ ó cono ΕΝ.



Pois se non, como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, así será o cono ΑΛ ou a un sólido menor que o cono ΕΝ ou a un maior.

Séxao, primeiro, ó menor Ξ e sexa igual o sólido Ψ a aquilo no que é menor o sólido Ξ que o cono ΕΝ; logo, o cono ΕΝ é igual ós sólidos Ξ e Ψ.

Inscríbase no círculo ΕΖΗΘ o cadrado ΕΖΗΘ[98]; logo, o cadrado é maior que a metade do círculo[99].

97 Véxanse as definicións XI, 18 a XI, 23.

98 Proposición IV, 6.

99 Véxase a demostración da Proposición XII, 2.

Levántese dende o cadrado ΕΖΗΘ unha pirámide de igual altura que o cono; logo, a pirámide levantada é maior que a metade do cono, posto que, se circunscribimos ó círculo un cadrado[100] e, a partir del, levantamos unha pirámide de igual altura que o cono, a pirámide inscrita é metade da circunscrita —pois son entre si como as súas bases[101]— e o cono é menor que a pirámide circunscrita.

Córtense á metade as circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ e ΘΕ polos puntos Ο, Π, Ρ e Σ[102], e trácense ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ e ΣΘ.

Pois ben, cada un dos triángulos ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ e ΗΣΘ é maior que a metade do segmento do círculo no que está[103].

Levántese en cada un dos triángulos ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ e ΗΣΘ unha pirámide de igual altura que o cono; logo, tamén, cada unha das pirámides levantadas é maior que a metade do segmento do cono no que está[104].

Entón, se cortamos á metade as circunferencias que quedan, trazamos rectas, levantamos sobre cada un dos triángulos pirámides de igual altura que o cono e facemos iso sucesivamente, deixaremos uns segmentos do cono que serán menores que o sólido Ψ[105].

Déixense e sexan os que están sobre ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ e ΗΣΘ; logo, a pirámide restante cuxa base é o polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ e a súa altura a mesma que a do cono, é maior que o sólido Ξ.

Inscríbase tamén, no círculo ΑΒΓΔ, o polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ, semellante e situado de xeito semellante ó polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ[106], e levántese sobre el unha pirámide de igual altura que o cono ΑΛ.

Entón, dado que, como o cadrado de ΑΓ é ó de ΕΗ, así o polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ ó polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ[107], mentres que,

100 Proposición IV, 7.
101 Proposición I, 47 e Proposición XII, 6.
102 Proposición III, 30.
103 Véxase de novo a demostración da Proposición XII, 2.
104 Véxase a demostración da Proposición XII, 10.
105 Proposición X, 1.
106 Proposición VI, 18.
107 Proposición XII, 1.

como o cadrado de ΑΓ ó de ΕΗ, así o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ[108], logo, tamén como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, así o polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ ó polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ[109].

Pero como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, así o cono ΑΛ ó sólido Ξ, mentres que, como o polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ ó polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ, así a pirámide cuxa base é o polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ e o seu vértice o punto Λ á pirámide cuxa base é o polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ e o seu vértice o punto Ν[110].

Logo, tamén, como o cono ΑΛ ó sólido Ξ, así a pirámide cuxa base é o polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ e o seu vértice o punto Λ, á pirámide cuxa base é o polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ e o seu vértice o punto Ν[111]; logo, por alternancia, como o cono ΑΛ é á pirámide que está nel, así o sólido Ξ á pirámide que está no cono ΕΝ[112].

Pero o cono ΑΛ é maior que a pirámide que está nel; logo, tamén é maior o sólido Ξ que a pirámide do cono ΕΝ[113]. Pero tamén menor; o que, sen dúbida, é absurdo.

Logo, como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, non é así o cono ΑΛ a un sólido menor que o cono ΕΝ.

Entón, de xeito semellante, poderemos demostrar que, como o círculo ΕΖΗΘ ó círculo ΑΒΓΔ, tampouco é así o cono ΕΝ a un sólido menor que o cono ΑΛ.

Digo agora que como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, tampouco é así o cono ΑΛ a un sólido maior que o cono ΕΝ.

Pois, se é posible, séxao a un maior, Ξ; logo, por inversión, como o círculo ΕΖΗΘ ó círculo ΑΒΓΔ, así o sólido Ξ ó cono ΑΛ[114].

Pero como o sólido Ξ ó cono ΑΛ, así o cono ΕΝ a un sólido menor que o cono ΑΛ[115].

---

108 Proposición XII, 2.
109 Proposición V, 11.
110 Proposición XII, 6.
111 Proposición V, 11.
112 Proposición V, 16.
113 Definición V, 5.
114 Proposición V, 7. Corolario.
115 Lema posterior á Proposición XII, 2 e Proposición V, 14.

Logo, tamén, como o círculo ΕΖΗΘ ó círculo ΑΒΓΔ, así o cono ΕΝ a un sólido menor que o cono ΑΛ; o que, precisamente foi demostrado imposible. Logo, como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, non é así o cono ΑΛ a un sólido maior que o cono ΕΝ.

Pero foi demostrado que tampouco a un menor; logo, como o círculo ΑΒΓΔ é ó círculo ΕΖΗΘ, así o cono ΑΛ ó cono ΕΝ.

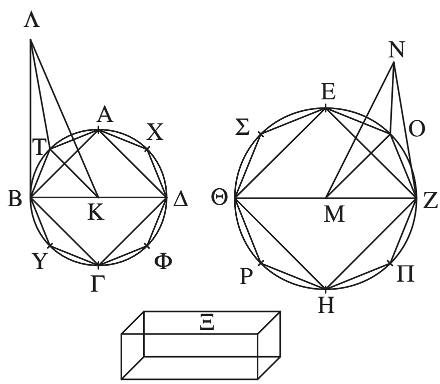
Pero como o cono ó cono, o cilindro ó cilindro —pois cada un é triplo que o outro[116]—. Logo, tamén, como o círculo ΑΒΓΔ ó círculo ΕΖΗΘ, así os cilindros que están sobre eles de igual altura.

Logo, os conos e os cilindros que están baixo a mesma altura son entre si como as súas bases; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 12

Os conos e cilindros semellantes están entre si en razón triplicada da dos diámetros das súas bases.

Sexan conos e cilindros semellantes cuxas bases son os círculos ΑΒΓΔ e ΕΖΗΘ, os diámetros das súas bases ΒΔ e ΖΘ e os eixos dos conos e dos cilindros ΚΛ e ΜΝ[117]; digo que o cono cuxa base é o círculo ΑΒΓΔ e o seu vértice o punto Λ garda co cono cuxa base é o círculo ΕΖΗΘ e o seu vértice o punto Ν razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.



[116] Proposición XII, 10.
[117] Véxanse as definicións XI, 18 a XI, 23.

Pois, se o cono ΑΒΓΔΛ non garda co cono ΕΖΗΘΝ razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ, o cono ΑΒΓΔΛ gardará razón triplicada cun sólido menor que o cono ΕΖΗΘΝ ou cun maior.

Gárdea, primeiro, co menor Ξ e inscríbase no círculo ΕΖΗΘ o cadrado ΕΖΗΘ[118]; logo, o cadrado ΕΖΗΘ é maior que a metade do círculo ΕΖΗΘ[119].

Levántese sobre o cadrado ΕΖΗΘ unha pirámide co mesmo vértice que o cono; logo, a pirámide levantada é maior que a metade do cono[120].

Córtense agora á metade as circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ e ΘΕ polos puntos Ο, Π, Ρ e Σ[121] e trácense ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ e ΣΕ. Logo, cada un dos triángulos ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ e ΘΣΕ é maior que a metade do segmento do círculo ΕΖΗΘ no que está[122].

Levántese sobre cada un dos triángulos ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ e ΘΣΕ unha pirámide co mesmo vértice que o cono; logo, tamén, cada unha das pirámides levantadas é maior que a metade do segmento do cono no que está[123].

Entón, se cortamos á metade as circunferencias que quedan, trazamos rectas, levantamos sobre cada un dos triángulos pirámides co mesmo vértice que o cono e facemos iso sucesivamente, deixaremos uns segmentos do cono que serán menores que o exceso no que excede o cono ΕΖΗΘΝ ó sólido Ξ[124].

Déixense e sexan os que están sobre ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ e ΣΕ; logo, a pirámide restante cuxa base é o polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ e o seu vértice o punto Ν é maior que o sólido Ξ.

Inscríbase tamén no circulo ΑΒΓΔ o polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ, semellante e situado de xeito semellante ó polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ[125],

118 Proposición IV, 6.
119 Véxase a demostración da Proposición XII, 2.
120 Véxase a demostración da Proposición XII, 11.
121 Proposición III, 30.
122 Véxase de novo a demostración da Proposición XII, 2.
123 Véxase a demostración da Proposición XII, 10.
124 Proposición X, 1.
125 Proposición VI, 18.

levántese sobre o polígono ATBYΓΦΔX unha pirámide co mesmo vértice que o cono, sexa ΛBT un triángulo dos que conteñen a pirámide cuxa base é o polígono ATBYΓΦΔX e o seu vértice o punto Λ, mentres que sexa NZO un triángulo dos que conteñen a pirámide cuxa base é o polígono EOZΠHPΘΣ e o seu vértice o punto N, e trácense KT e MO. E, dado que é semellante o cono ABΓΔΛ ó cono EZHΘN, logo, como BΔ a ZΘ, así o eixo KΛ ó eixo MN[126].

Pero como BΔ a ZΘ, así BK a ZM; logo, tamén, como BK a ZM, así KΛ a MN[127]. E, por alternancia, como BK a KΛ, así ZM a MN[128].

E os lados que conteñen os ángulos iguais, BKΛ e ZMN, son proporcionais; logo, é semellante o triángulo BKΛ ó triángulo ZMN[129].

Asemade, dado que, como BK a KT, así ZM a MO e que conteñen os ángulos iguais, BKT e ZMO[130] —posto que a parte que é o ángulo BKT dos catro ángulos rectos do centro K, a mesma parte é tamén o ángulo ZMO dos catro ángulos rectos do centro M—; entón, dado que os lados que conteñen os ángulos iguais son proporcionais, logo, o triángulo BKT é semellante ó triángulo ZMO.

Asemade, dado que foi demostrado que, como BK a KΛ, así ZM a MN, mentres que BK igual a KT, e ZM a OM, logo, como TK é a KΛ, así OM a MN.

E, os lados que conteñen os ángulos iguais TKΛ e OMN —pois son rectos— son proporcionais; logo, é semellante o triángulo ΛKT ó triángulo NMO[131].

[126] Definición XI, 24.
[127] Proposición V, 11.
[128] Proposición V, 16.
[129] Proposición VI, 6.
[130] Hai aquí unha falta de continuidade sintáctica coa seguinte frase —como xa indica a edición crítica de J. L. Heiberg e H. Menge— que mantemos na tradución.
[131] Proposición VI, 6.

E, dado que, pola semellanza dos triángulos ΛKB e NMZ, como ΛB a BK, así NZ a ZM, mentres que, pola semellanza dos triángulos BKT e ZMO, como KB a BT, así MZ a ZO, logo, por igualdade, como ΛB a BT, así NZ a ZO[132].

Asemade, dado que, pola semellanza dos triángulos ΛTK e NOM, como ΛT a TK, así NO a OM, mentres que, pola semellanza dos triángulos TKB e OMZ, como KT a TB, así MO a OZ, logo, por igualdade, como ΛT a TB así NO a OZ.

Pero foi demostrado tamén que, como TB a BΛ, así OZ a ZN. Logo, por igualdade, como TΛ a ΛB, así ON a NZ.

Logo, dos triángulos ΛTB e NOZ, os lados son proporcionais; logo, os triángulos ΛTB e NOZ son de ángulos iguais[133]; en consecuencia, tamén semellantes[134].

Logo, tamén unha pirámide cuxa base é o triángulo BKT e o seu vértice o punto Λ é semellante a unha pirámide cuxa base é o triángulo ZMO e o seu vértice o punto N —pois están contidas por planos semellantes, iguais en cantidade[135].

Pero as pirámides semellantes e que ten triángulos como bases están en razón triplicada da dos lados correspondentes[136].

Logo, a pirámide BKTΛ garda coa pirámide ZMON razón triplicada da que garda BK con ZM.

Entón, de xeito semellante, se trazamos rectas dende A, X, Δ, Φ, Γ e Y ata K, e dende E, Σ, Θ, P, H e Π ata M, e se levantamos sobre cada un dos triángulos pirámides co mesmo vértice que os conos, poderemos demostrar que, tamén, cada unha das pirámides colocada de xeito semellante garda respectivamente con cada unha das pirámides colocada de xeito semellante razón triplicada da que garda o lado correspondente BK co lado correspondente ZM, é dicir, da que garda BΔ con ZΘ.

---

132 Proposición V, 22.
133 Proposición VI, 5.
134 Definición VI, 1.
135 Definición XI, 9.
136 Proposición XII, 8.

E, como un dos antecedentes a un dos consecuentes, así todos os antecedentes a todos os consecuentes[137]; logo, tamén, como a pirámide ΒΚΤΛ á pirámide ΖΜΟΝ, así a pirámide enteira cuxa base é o polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ e o seu vértice o punto Λ á pirámide enteira cuxa base é o polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ e o seu vértice o punto Ν.

En consecuencia, tamén unha pirámide cuxa base é o polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ e o seu vértice o punto Λ garda cunha pirámide cuxa base é o polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ e o seu vértice o punto Ν razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.

Pero suponse tamén que o cono cuxa base é o círculo ΑΒΓΔ e o seu vértice o punto Λ garda co sólido Ξ razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ; logo, como o cono cuxa base é o círculo ΑΒΓΔ e o seu vértice Λ ó sólido Ξ, así a pirámide cuxa base é ΑΤΒΥΓΦΔΧ e o seu vértice Λ a unha pirámide cuxa base é o polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ e o seu vértice Ν[138]; logo, por alternancia, como o cono cuxa base é o círculo ΑΒΓΔ e o seu vértice Λ á pirámide que está nel cuxa base é o polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ e o seu vértice Λ, así Ξ á pirámide cuxa base é o polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ e o seu vértice Ν.

Pero é maior o cono dito que a pirámide que está nel —pois contena—. Logo, é tamén maior o sólido Ξ que a pirámide cuxa base é o polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ e o seu vértice Ν[139]. Pero tamén menor; o que, sen dúbida é imposible.

Logo, o cono cuxa base é o círculo ΑΒΓΔ e o seu vértice Λ non garda cun sólido menor que o cono cuxa base é o círculo ΕΖΗΘ e o seu vértice o punto Ν, razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tampouco o cono ΕΖΗΘΝ garda cun sólido menor que o cono ΑΒΓΔΛ razón triplicada da que garda ΖΘ con ΒΔ.

---

137 Proposición V, 12. Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

138 Proposición V, 11.

139 Definición V, 5.

Digo agora que tampouco o cono ΑΒΓΔΛ garda cun sólido maior que o cono ΕΖΗΘΝ razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.

Pois ben, se é posible, gárdea cun maior Ξ. Logo, por inversión, o sólido Ξ garda co cono ΑΒΓΔΛ razón triplicada da que garda ΖΘ con ΒΔ.

Pero como o sólido Ξ ó cono ΑΒΓΔΛ, así o cono ΕΖΗΘΝ a un sólido menor que o cono ΑΒΓΔΛ[140].

Logo, tamén o cono ΕΖΗΘΝ garda cun sólido menor que o cono ΑΒΓΔΛ razón triplicada da que garda ΖΘ con ΒΔ —o que, sen dúbida, foi demostrado imposible—. Logo, o cono ΑΒΓΔΛ non garda cun sólido maior que o cono ΕΖΗΘΝ razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.

Pero foi demostrado que tampouco cun menor. Logo, o cono ΑΒΓΔΛ garda co cono ΕΖΗΘΝ razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.

Pero como o cono ó cono, o cilindro ó cilindro —pois o cilindro é triplo que o cono que está sobre a mesma base que o cono e ten igual altura que el[141].

Logo, tamén o cilindro garda co cilindro razón triplicada da que garda ΒΔ con ΖΘ.

Logo, os conos e cilindros semellantes gardan entre si razón triplicada da dos diámetros das súas bases; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 13

Se un cilindro é cortado por un plano que é paralelo ós planos opostos, como o cilindro ó cilindro, así será o eixo ó eixo.

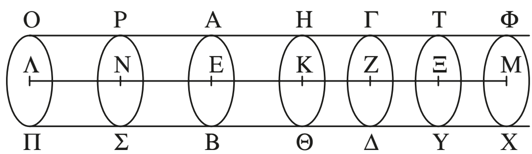
Pois ben, sexa cortado o cilindro ΑΔ polo plano ΗΘ que é paralelo ós planos opostos ΑΒ e ΓΔ, e tope o plano ΗΘ co eixo

140 Lema posterior á Proposición XII, 2.
141 Proposición XII, 10.

no punto K; digo que como o cilindro BH é ó cilindro HΔ, así o eixo EK ó eixo KZ.

Pois ben, prolónguese o eixo EZ en ambos sentidos ata os puntos Λ e M, tómense cantos EN e NΛ se queira iguais ó eixo EK e cantos ZΞ e ΞM se queira iguais a ZK, e considérese sobre o eixo ΛM o cilindro OX, cuxas bases son os círculos OΠ e ΦX.

Trácense polos puntos N e Ξ planos paralelos a AB, a ΓΔ e ás bases do cilindro OX, e fáganse os círculos PΣ e TY en torno ós centros N e Ξ. E, dado que os eixos ΛN, NE e EK son iguais entre si, logo, os cilindros ΠP, PB e BH son entre si como as súas bases[142]. Pero as súas bases son iguais; logo, tamén os cilindros ΠP, PB e BH son iguais entre si.



Entón, dado que os eixos ΛN, NE e EK son iguais entre si, os cilindros ΠP, PB e BH tamén son iguais entre si e é igual a cantidade duns á cantidade dos outros, logo, cantas veces o eixo KΛ é múltiplo do eixo EK, tantas veces será tamén o cilindro ΠH do cilindro HB.

Entón, polo mesmo, tamén cantas veces o eixo MK é múltiplo do eixo KZ, tantas veces é tamén o cilindro XH do cilindro HΔ.

E, se é igual o eixo KΛ ó eixo KM, será tamén igual o cilindro ΠH ó cilindro HX, mentres que, se o eixo é maior que o eixo, tamén é maior o cilindro que o cilindro, e se menor, menor.

Entón, habendo catro magnitudes —os eixos EK e KZ e os cilindros BH e HΔ—, quedan tomados múltiplos iguais: por un lado, do eixo EK e do cilindro BH, o eixo ΛK e o cilindro ΠH, por outro, do eixo KZ e do cilindro HΔ, o eixo KM e o cilindro HX; e queda demostrado que, se o eixo KΛ supera ó eixo KM,

142 Proposición XII, 11.

supera tamén o cilindro ΠΗ ó cilindro ΗΧ e, se é igual, igual e, se menor, menor.

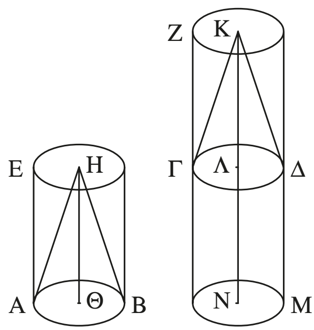
Logo, como o eixo ΕΚ é ó eixo ΚΖ, así o cilindro ΒΗ ó cilindro ΗΔ[143]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

Os conos e cilindros que están sobre bases iguais son entre si como as súas alturas.

Pois ben, estean sobre bases iguais —os círculos ΑΒ e ΓΔ— os cilindros ΕΒ e ΖΔ; digo que, como o cilindro ΕΒ é ó cilindro ΖΔ, así o eixo ΗΘ ó eixo ΚΛ.

Pois ben, prolónguese o eixo ΚΛ ata o punto Ν, fágase ΛΝ igual ó eixo ΗΘ e considérese o cilindro ΓΜ en torno ó eixo ΛΝ.



Entón, dado que os cilindros ΕΒ e ΓΜ están baixo a mesma altura, son entre si como as súas bases[144]. Pero as súas bases son iguais entre si; logo, son iguais tamén os cilindros ΕΒ e ΓΜ.

E, dado que o cilindro ΖΜ queda cortado polo plano ΓΔ que é paralelo ós planos opostos, logo, como o cilindro ΓΜ é ó cilindro ΖΔ, así o eixo ΛΝ ó eixo ΚΛ[145].

Pero o cilindro ΓΜ é igual ó cilindro ΕΒ, mentres que o eixo ΛΝ ó eixo ΗΘ; logo, como o cilindro ΕΒ ó cilindro ΖΔ, así o eixo ΗΘ ó eixo ΚΛ.

143 Definición V, 5.

144 Proposición XII, 11.

145 Proposición XII, 13.

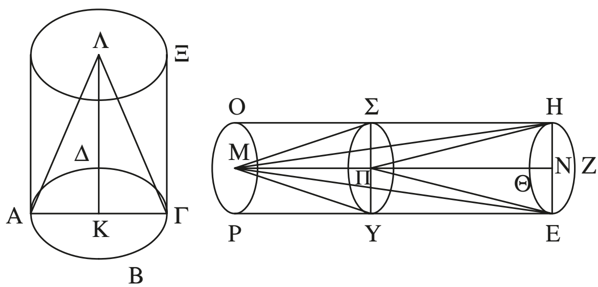
Pero como o cilindro EB ó cilindro ZΔ, así o cono ABH ó cono ΓΔK[146].

Logo, tamén como o eixo HΘ ó eixo KΛ, así o cono ABH ó cono ΓΔK e o cilindro EB ó cilindro ZΔ[147]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 15

Dos conos e cilindros iguais, as bases son inversamente proporcionais ás alturas[148]; e aqueles conos e cilindros cuxas bases son inversamente proporcionais ás alturas, son iguais.

Sexan iguais os conos e cilindros cuxas bases son os círculos ABΓΔ e EZHΘ, os seus diámetros AΓ e EH, e os seus eixos KΛ e MN —que son tamén as alturas dos conos ou cilindros—, e complétense os cilindros AΞ e EO; digo que, dos cilindros AΞ e EO, as bases son inversamente proporcionais ás alturas e, como a base ABΓΔ é á base EZHΘ, así a altura MN á altura KΛ.



Pois ben, a altura ΛK ou é igual á altura MN ou non.

Sexa, primeiro, igual. E tamén é igual o cilindro AΞ ó cilindro EO.

Pero os conos e cilindros que están baixo a mesma altura son entre si como as súas bases[149]; logo, tamén é igual a base ABΓΔ á base EZHΘ. En consecuencia, tamén son inversamente

[146] Proposición XII, 10 e Definición V, 5.
[147] Proposición V, 11.
[148] Véxase a Nota 2 (Definición VI, 2).
[149] Proposición XII, 11.

proporcionais, como a base ΑΒΓΔ á base ΕΖΗΘ, así a altura ΜΝ á altura ΚΛ.

Non sexa agora a altura ΛΚ igual á altura ΜΝ, senón que sexa maior ΜΝ, quítese ΠΝ igual a ΚΛ da altura ΜΝ[150] e, polo punto Π, córtese o cilindro ΕΟ co plano ΤΥΣ[151] paralelo ós planos dos círculos ΕΖΗΘ e ΡΟ, e considérese o cilindro ΕΣ a partir do círculo ΕΖΗΘ como base, e de ΝΠ como altura.

E, dado que é igual o cilindro ΑΞ ó cilindro ΕΟ, logo, como o cilindro ΑΞ é ó cilindro ΕΣ, así o cilindro ΕΟ ó cilindro ΕΣ[152].

Pero como o cilindro ΑΞ ó cilindro ΕΣ, así a base ΑΒΓΔ a ΕΖΗΘ —pois os cilindros ΑΞ e ΕΣ están baixo a mesma altura— e, como o cilindro ΕΟ a ΕΣ, así a altura ΜΝ á altura ΠΝ —pois o cilindro ΕΟ queda cortado por un plano que é paralelo ós planos opostos[153].

Logo, tamén, como a base ΑΒΓΔ é á base ΕΖΗΘ, así a altura ΜΝ á altura ΠΝ[154].

Pero a altura ΠΝ é igual á altura ΚΛ; logo, como a base ΑΒΓΔ é á base ΕΖΗΘ, así a altura ΜΝ á altura ΚΛ.

Logo, dos cilindros ΑΞ e ΕΟ, as bases son inversamente proporcionais ás alturas.

Sexan agora inversamente proporcionais as bases dos cilindros ΑΞ e ΕΟ ás alturas e, como a base ΑΒΓΔ á base ΕΖΗΘ, sexa así a altura ΜΝ á altura ΚΛ; digo que é igual o cilindro ΑΞ ó cilindro ΕΟ.

Pois ben, feitas as mesmas construcións, dado que, como a base ΑΒΓΔ é á base ΕΖΗΘ, así a altura ΜΝ á altura ΚΛ, mentres que a altura ΚΛ é igual á altura ΠΝ, logo, como a base ΑΒΓΔ é á base ΕΖΗΘ, así a altura ΜΝ á altura ΠΝ. Pero como a

---

150 Proposición I, 3.

151 A letra T non aparece na gráfica da edición crítica de J. L.Heiberg e H. Menge, que utilizamos como referencia.

152 Proposición V, 7.

153 Proposición XII, 13.

154 Proposición V, 11.

base ΑΒΓΔ á base ΕΖΗΘ, así o cilindro ΑΞ ó cilindro ΕΣ —pois están baixo a mesma altura.

Pero como a altura ΜΝ a ΠΝ, así o cilindro ΕΟ ó cilindro ΕΣ; logo, como o cilindro ΑΞ é ó cilindro ΕΣ, así o cilindro ΕΟ ó cilindro ΕΣ.

Logo, o cilindro ΑΞ é igual ó cilindro ΕΟ[155].

E, do mesmo xeito, tamén con respecto ós conos[156]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

Habendo dous círculos en torno ó mesmo centro, inscribir no círculo maior un polígono equilátero e de número par de lados que non toque o círculo menor.

Sexan ΑΒΓΔ e ΕΖΗΘ os dous círculos dados en torno ó mesmo centro Κ; é preciso, entón, no círculo maior ΑΒΓΔ, inscribir un polígono equilátero e de número par de lados que non toque o círculo ΕΖΗΘ.

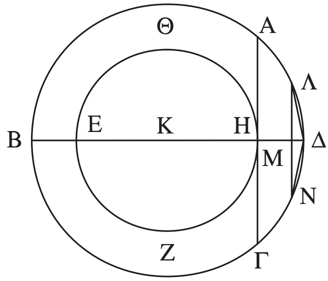
Pois ben, polo centro Κ trácese a recta ΒΚΔ, trácese ΗΑ a partir do punto Η en ángulo recto coa recta ΒΔ[157] e lévese ata Γ; logo, ΑΓ toca o círculo ΕΖΗΘ[158].

Entón, cortando á metade a circunferencia ΒΑΔ e á metade a súa metade, e facendo iso sucesivamente, deixaremos unha circunferencia menor que ΑΔ[159].

Déixese e sexa ΛΔ; a partir de Λ, trácese ΛΜ perpendicular a ΒΔ, lévese ata Ν e trácense ΛΔ e ΔΝ; logo, é igual ΛΔ a ΔΝ[160].

E, dado que é paralela ΛΝ a ΑΓ[161], mentres que ΑΓ toca o círculo ΕΖΗΘ, logo, ΛΝ non toca o círculo ΕΖΗΘ; logo, por moito, ΛΔ e ΔΝ non tocan o círculo ΕΖΗΘ.

155 Proposición V, 9.
156 Proposición XII, 10.
157 Proposición I, 11.
158 Proposición III, 16. Corolario.
159 Proposición X, 1.
160 Proposición III, 3 e Proposición I, 4.
161 Proposición I, 28.



Entón, se axustamos ó círculo ΑΒΓΔ sucesivamente rectas iguais á recta ΛΔ[162], inscribirase no círculo ΑΒΓΔ un polígono equilátero e de número par de lados que non toca o círculo menor ΕΖΗΘ; o que, xustamente, era preciso facer.

PROPOSICIÓN 17

Habendo dúas esferas en torno ó mesmo centro, inscribir na esfera maior un sólido poliedro que non toque a esfera menor na súa superficie.

Considérense dúas esferas en torno ó mesmo centro Α; é preciso, entón, na esfera maior, inscribir un sólido poliedro que non toque a esfera menor na súa superficie.

Sexan cortadas as esferas por un plano a través do centro; serán, entón, os cortes, círculos, posto que a esfera xurdía ó permanecer fixo o diámetro e facer xirar o semicírculo[163]; de xeito que, en calquera posición que consideremos o semicírculo, o plano trazado por el fará un círculo sobre a superficie da esfera. E é evidente que tamén é o maior, posto que o diámetro da esfera, que é tamén diámetro do semicírculo, e, evidentemente, do círculo, é maior que todas as rectas trazadas no círculo ou na esfera[164].

Sexa, entón, na esfera maior, o círculo ΒΓΔΕ e, na esfera menor, o círculo ΖΗΘ, trácense os seus dous diámetros, ΒΔ e

[162] Proposición IV, 1.
[163] Definición XI, 14.
[164] Proposición III, 15.

ΓΕ, en ángulo recto entre si e, habendo dous círculos, ΒΓΔΕ e ΖΗΘ, en torno ó mesmo centro, inscríbase no círculo maior ΒΓΔΕ un polígono equilátero e de número par de lados que non toca o círculo menor ΖΗΘ[165]; sexan ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ e ΜΕ os seus lados no cuadrante ΒΕ e, unida ΚΑ, lévese ata Ν; levántese ΑΞ a partir do punto Α, en ángulo recto co plano do círculo ΒΓΔΕ[166], tope coa superficie da esfera en Ξ e trácense planos a través de ΑΞ e de cada unha das rectas ΒΔ e ΚΝ; entón, polo dito, farán os círculos maiores sobre a superficie da esfera.

Fáganos e sexan os seus semicírculos ΒΞΔ e ΚΞΝ sobre os diámetros ΒΔ e ΚΝ.

E, dado que ΞΑ está en ángulo recto co plano do círculo ΒΓΔΕ, logo, tamén todos os planos que van por ΞΑ están en ángulo recto co plano do círculo ΒΓΔΕ[167]; en consecuencia, tamén os semicírculos ΒΞΔ e ΚΞΝ están en ángulo recto co plano do círculo ΒΓΔΕ.

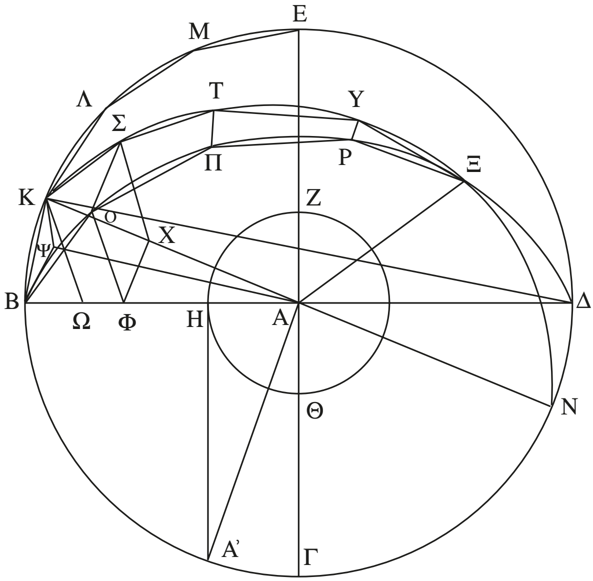
E, dado que ΒΕΔ, ΒΞΔ e ΚΞΝ son semicírculos iguais —pois están sobre diámetros iguais, ΒΔ e ΚΝ[168]— os cuadrantes ΒΕ, ΒΞ e ΚΞ son iguais entre si.

Logo, cantos lados do polígono hai no cuadrante ΒΕ, tantos hai tamén nos cuadrantes ΒΞ e ΚΞ iguais ás rectas ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ e ΜΕ.

Inscríbanse, sexan ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ e ΥΞ, trácense ΣΟ, ΤΠ e ΥΡ e, dende Ο e Σ, trácense perpendiculares ó plano do círculo ΒΓΔΕ[169]; entón, caerán sobre os cortes comúns dos planos, ΒΔ e ΚΝ, posto que tamén os planos de ΒΞΔ e ΚΞΝ están en ángulo recto co plano do círculo ΒΓΔΕ[170].

Caian, sexan ΟΦ e ΣΧ e únase ΧΦ.

165 Proposición XII, 16.
166 Proposición XI, 12.
167 Proposición XI, 18.
168 Definición III, 1.
169 Proposición XI, 11.
170 Definición XI, 4.



E, dado que nos semicírculos iguais BΞΔ e KΞN foron quitadas as circunferencias iguais BO e KΣ e foron trazadas OΦ e ΣX perpendiculares, logo, é igual OΦ a ΣX, mentres que BΦ a KX[171].

Pero tamén BA enteira é igual a KA enteira; logo, tamén, a restante, ΦA, é igual á restante, XA; logo, como BΦ é a ΦA, así KX a XA; logo, é paralela XΦ a KB[172].

E, dado que tanto OΦ como ΣX están en ángulo recto co plano do círculo BΓΔE, logo é paralela OΦ a ΣX[173]. Pero foi demostrado que tamén é igual a ela; logo, XΦ e ΣO son iguais e paralelas[174].

E, dado que é paralela XΦ a ΣO, pero XΦ é paralela a KB, logo, tamén ΣO é paralela a KB[175]. E únenas BO e KΣ; logo, o cuadrilátero KBOΣ está nun único plano —posto que, se dúas

171 Proposición III, 27 e Proposición I, 26.
172 Proposición VI, 2.
173 Proposición XI, 6.
174 Proposición I, 33.
175 Proposición XI, 9.

rectas son paralelas e se toman puntos ó azar en cada unha delas, a recta unida polos puntos está no mesmo plano que as paralelas[176].

Entón, polo mesmo, tamén cada un dos cuadriláteros ΣΟΠΤ e ΤΠΡΥ están nun único plano. E tamén está nun único plano o triángulo ΥΡΞ[177].

Entón, se consideramos rectas unidas dende os puntos Ο, Σ, Π, Τ, Ρ e Υ ata Α, construirase unha figura sólida poliédrica entre as circunferencias ΒΞ e ΚΞ, composta de pirámides cuxas bases son os cuadriláteros ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ e ΤΠΡΥ e o triángulo ΥΡΞ, e o seu vértice o punto Α.

Pero se facemos as mesmas construcións que en ΒΚ en cada un dos lados ΚΛ, ΛΜ e ΜΕ e, tamén, nos tres cuadrantes restantes, construirase unha figura poliédrica inscrita na esfera contida por pirámides cuxas bases son os cuadriláteros ditos, o triángulo ΥΡΞ e os[178] colocados de xeito semellante a eles, e o seu vértice o punto Α.

Digo que o poliedro dito non tocará a esfera menor na superficie na que está o círculo ΖΗΘ.

Trácese ΑΨ a partir do punto Α perpendicular ó plano do cuadrilátero ΚΒΟΣ[179], tope co plano no punto Ψ e trácense ΨΒ e ΨΚ.

E, dado que ΑΨ está en ángulo recto con respecto ó plano do cuadrilátero ΚΒΟΣ, logo, tamén está en ángulo recto con todas as rectas que a tocan e que están no plano do cuadrilátero[180].

Logo, ΑΨ está en ángulo recto tanto con ΒΨ como con ΨΚ.

E, dado que ΑΒ é igual a ΑΚ, o cadrado de ΑΒ é tamén igual ó de ΑΚ. E o cadrado de ΑΨ xunto co de ΨΒ é igual ó de ΑΒ

---

176 Proposición XI, 7.
177 Proposición XI, 2.
178 Enténdase: «cuadriláteros e triángulos».
179 Proposición XI, 11.
180 Definición XI, 3.

—pois Ψ é recto[181]—; pero o cadrado de AΨ xunto co de ΨK é igual ó de AK. Logo, o cadrado de AΨ xunto co de ΨB é igual ó de AΨ xunto co de ΨK. Quítese a ambos o cadrado de AΨ; logo, o restante, o de BΨ, é igual ó restante, ó de ΨK.

Logo, é igual BΨ a ΨK.

Entón, de xeito semellante, poderemos demostrar que tamén as rectas unidas dende Ψ ata O e Σ son iguais tanto a BΨ como a ΨK.

Logo, o círculo debuxado co centro Ψ e a distancia unha de entre ΨB e ΨK irá tamén a través de O e Σ, e o cuadrilátero KBOΣ estará no círculo.

E, dado que é maior KB que XΦ, mentres que XΦ igual a ΣO, logo, é maior KB que ΣO. Pero KB é igual tanto a KΣ como a BO; logo, tanto KΣ como BO son maiores que ΣO. E, dado que o cuadrilátero KBOΣ está nun círculo, que KB, BO e KΣ son iguais, OΣ menor e BΨ é o radio do círculo, logo, o cadrado de KB é maior que o dobre do cadrado de BΨ.

A partir de K, trácese KΩ perpendicular a BΦ[182]. E, dado que BΔ é menor que o dobre de ΔΩ e, como BΔ é a ΔΩ, así o contido por ΔB e BΩ ó contido por ΔΩ e ΩB[183], unha vez debuxado o cadrado de BΩ e completado o paralelogramo sobre ΩΔ, logo, tamén o contido por ΔB e BΩ é menor que o dobre do contido por ΔΩ e ΩB.

E, unida KΔ, o contido por ΔB e BΩ é igual ó cadrado de BK, mentres que o contido por ΔΩ e ΩB, igual ó cadrado de KΩ[184]; logo, o cadrado de KB é menor que o dobre do cadrado de KΩ.

181 Proposición I, 47.

182 Proposición I, 12.

183 Proposición VI, 1.

184 Proposición III, 31 e Proposición VI, 8. Corolario. Véxase a Nota 65 (Proposición VI, 8). Nalgúns manuscritos aparece, ó final deste Corolario, unha interpolación —«e ademais o lado do segmento é media proporcional da base e dun calquera dos segmentos», é dicir, a base é a un calquera dos lados como ese lado é ó segmento dese lado— que xustifica, de forma explícita, a primeira afirmación deste parágrafo —«o contido por ΔB e BΩ é igual ó cadrado de BK»— .

Pero o cadrado de KB é maior que o dobre do cadrado de BΨ; logo, o cadrado de KΩ é maior que o de BΨ.

E, dado que é igual BA a KA, o cadrado de BA é igual ó de AK.

E o cadrado de BΨ xunto co de ΨA é igual ó de BA, mentres que o cadrado de KΩ xunto co de ΩA é igual ó de KA[185]; logo, o cadrado de BΨ xunto co de ΨA é igual ó de KΩ xunto co de ΩA, parte dos cales, o cadrado de KΩ, é maior que o de BΨ; logo, o cadrado restante, o de ΩA, é menor que o de ΨA.

Logo, é maior AΨ que AΩ; logo, AΨ é moito maior que AH.

E AΨ está sobre unha base do poliedro, mentres que AH sobre a superficie da esfera menor; en consecuencia, o poliedro non tocará a esfera menor na superficie.

Logo, habendo dúas esferas en torno ó mesmo centro, queda inscrito, na esfera maior, un sólido poliedro que non toca a esfera menor na superficie; o que, xustamente, era preciso facer.

Corolario.- E, tamén, se noutra esfera se inscribe un sólido poliedro semellante ó sólido poliedro que está na esfera BΓΔE, o sólido poliedro que está na esfera BΓΔE garda co sólido poliedro que está na outra esfera razón triplicada da que garda, precisamente, o diámetro da esfera BΓΔE co diámetro da outra esfera.

Pois, divididos os sólidos en pirámides semellantes en número e situación, as pirámides serán semellantes.

Pero as pirámides semellantes están entre si en razón triplicada da dos lados correspondentes[186]; logo, a pirámide cuxa base é o cuadrilátero KBOΣ e o seu vértice o punto A, garda coa pirámide colocada de xeito semellante na outra esfera razón triplicada da que garda, precisamente, o lado correspondente co lado correspondente, é dicir, da que garda o radio AB da esfera en torno ó centro A co radio da outra esfera.

De xeito semellante, tamén, cada pirámide das que están na esfera en torno ó centro A gardará con cada pirámide colo-

[185] Proposición I, 47.

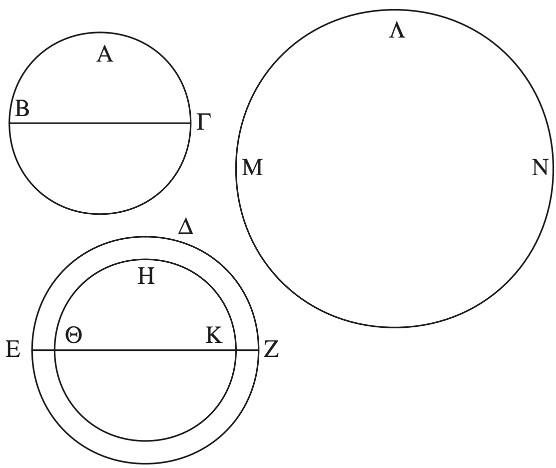
[186] Proposición XII, 8. Corolario.

cada de xeito semellante das da outra esfera razón triplicada da que garda, precisamente, AB co radio da outra esfera. E, como un dos antecedentes a un dos consecuentes, así todos os antecedentes a todos os consecuentes[187]; en consecuencia, o sólido poliedro enteiro que está na esfera en torno ó centro A gardará co sólido poliedro enteiro que está na outra esfera razón triplicada da que garda, precisamente, AB co radio da outra esfera, é dicir, precisamente da que o diámetro BΔ garda co diámetro da outra esfera[188]; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

As esferas están entre si en razón triplicada da dos seus respectivos diámetros.

Considérense as esferas ΑΒΓ e ΔΕΖ e os seus diámetros ΒΓ e ΕΖ; digo que a esfera ΑΒΓ garda razón triplicada coa esfera ΔΕΖ da que garda ΒΓ con ΕΖ.



[187] Proposición V, 12.
[188] Proposición V, 15.

Pois, se a esfera ΑΒΓ non garda razón triplicada coa esfera ΔΕΖ da que garda ΒΓ con ΕΖ, logo, a esfera ΑΒΓ gardará cunha esfera menor que a esfera ΔΕΖ ou cunha maior razón triplicada da que garda ΒΓ con ΕΖ.

Gárdea primeiro cunha menor, ΗΘΚ, considérese ΔΕΖ en torno ó mesmo centro que ΗΘΚ, inscríbase na esfera maior, ΔΕΖ, un sólido poliedro que non toca a esfera menor, ΗΘΚ, na súa superficie[189] e inscríbase tamén, na esfera ΑΒΓ, un sólido poliedro semellante ó sólido poliedro inscrito na esfera ΔΕΖ; logo, o sólido poliedro inscrito en ΑΒΓ garda co sólido poliedro inscrito en ΔΕΖ razón triplicada da que garda ΒΓ con ΕΖ[190].

Pero a esfera ΑΒΓ garda tamén coa esfera ΗΘΚ razón triplicada da que garda ΒΓ con ΕΖ; logo, como a esfera ΑΒΓ é á esfera ΗΘΚ, así o sólido poliedro inscrito na esfera ΑΒΓ ó sólido poliedro inscrito na esfera ΔΕΖ[191]; por alternancia, como a esfera ΑΒΓ é ó sólido poliedro inscrito nela, así a esfera ΗΘΚ ó sólido poliedro inscrito na esfera ΔΕΖ[192].

Pero a esfera ΑΒΓ é maior que o sólido poliedro inscrito nela; logo, tamén a esfera ΗΘΚ é maior que o sólido poliedro inscrito na esfera ΔΕΖ[193]. Pero tamén menor —pois é contida por el—. Logo, a esfera ΑΒΓ non garda cunha menor que a esfera ΔΕΖ razón triplicada da que garda o diámetro ΒΓ con ΕΖ.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tampouco a esfera ΔΕΖ garda cunha esfera menor que ΑΒΓ razón triplicada da que garda ΕΖ con ΒΓ.

Digo agora que tampouco a esfera ΑΒΓ garda cunha maior que a esfera ΔΕΖ razón triplicada da que garda ΒΓ con ΕΖ.

---

189 Proposición XII, 17.
190 Proposición XII, 17. Corolario.
191 Proposición V, 11.
192 Proposición V, 16.
193 Definición V, 5.

Pois ben, se é posible, gárdea coa maior ΛMN; logo, por inversión, a esfera ΛMN garda coa esfera ABΓ razón triplicada da que garda o diámetro EZ co diámetro BΓ[194].

Pero, como a esfera ΛMN é á esfera ABΓ, así a esfera ΔEZ a unha menor que a esfera ABΓ —posto que é maior ΛMN que ΔEZ, como foi demostrado antes[195].

Logo, tamén a esfera ΔEZ garda cunha menor que a esfera ABΓ razón triplicada da que garda EZ con BΓ; o que, sen dúbida, foi demostrado imposible.

Logo, a esfera ABΓ non garda cunha maior que a esfera ΔEZ razón triplicada da que garda BΓ con EZ.

Pero foi demostrado que tampouco cunha menor. Logo, a esfera ABΓ garda coa esfera ΔEZ razón triplicada da que garda BΓ con EZ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

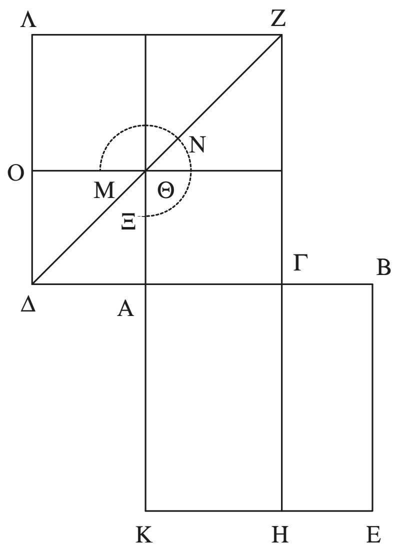
194 Proposición V, 7. Corolario.

195 Lema posterior á Proposición XII, 2.

PROPOSICIÓN 1

Se se corta unha liña recta en razón extrema e media, o cadrado da suma do segmento maior e a metade da recta enteira*[1] *é equivalente a cinco veces o cadrado da metade.

Pois ben, córtese a liña recta AB en razón extrema e media polo punto Γ[2], sexa o segmento maior AΓ, prolónguese a recta AΔ en liña recta con ΓA e fágase AΔ como a metade de AB[3]; digo que o cadrado de ΓΔ é cinco veces o de ΔA.



Pois ben, debúxense, a partir de AB e ΔΓ, os cadrados AE e ΔZ[4], remátese o debuxo da figura en ΔZ[5] e lévese ZΓ ata H.

[1] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

[2] Proposición VI, 30.

[3] Proposición I, 10 e Proposición I, 2.

[4] Proposición I, 46.

[5] Proposición I, 11 ou Proposición I, 31.

E, dado que AB queda cortada en razón extrema e media por Γ, logo, o contido por ΑΒΓ[6] é igual ó cadrado de ΑΓ[7].

E o contido por ΑΒΓ é ΓΕ, mentres que o cadrado de ΑΓ é ΖΘ; logo, é igual ΓΕ a ΖΘ.

E, dado que ΒΑ é o dobre que ΑΔ, mentres que ΒΑ é igual a ΚΑ, e ΑΔ a ΑΘ, logo, tamén ΚΑ é o dobre que ΑΘ.

Pero como ΚΑ a ΑΘ, así ΓΚ a ΓΘ[8]; logo, ΓΚ é o dobre que ΓΘ.

Pero tamén ΛΘ e ΘΓ son o dobre que ΓΘ[9]. Logo, ΚΓ é igual a ΛΘ e ΘΓ.

Pero foi demostrado tamén que ΓΕ é igual a ΘΖ; logo, o cadrado ΑΕ enteiro é igual ó gnomon ΜΝΞ[10].

E, dado que ΒΑ é o dobre que ΑΔ, o cadrado de ΒΑ é cuádruplo que o cadrado de ΑΔ, é dicir, ΑΕ que ΔΘ.

Pero ΑΕ é igual ó gnomon ΜΝΞ; logo, tamén o gnomon ΜΝΞ é cuádruplo que ΑΟ; logo, ΔΖ enteiro é cinco veces ΑΟ.

E ΔΖ é o cadrado de ΔΓ, mentres que ΑΟ, o cadrado de ΔΑ; logo, o cadrado de ΓΔ é cinco veces o cadrado de ΔΑ.

Logo, se se corta unha recta en razón extrema e media, o cadrado da suma do segmento maior e a metade da recta enteira é equivalente a cinco veces o cadrado da metade; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 2

***Se o cadrado dunha liña recta é equivalente a cinco veces o dun segmento dela mesma, ó cortar o dobre do segmento dito en razón extrema e media, o segmento maior é a parte restante da recta do principio*[11].**

Pois ben, sexa o cadrado da liña recta ΑΒ equivalente a cinco veces o do seu segmento ΑΓ e sexa ΓΔ o dobre que ΑΓ[12];

---

6 Paralelogramo de ángulos rectos contido polas rectas ΑΒ e ΒΓ. Véxase a Nota 10 (Proposición II, 1).

7 Definición VI, 3 e Proposición VI, 17.

8 Proposición VI, 1.

9 Proposición I, 43.

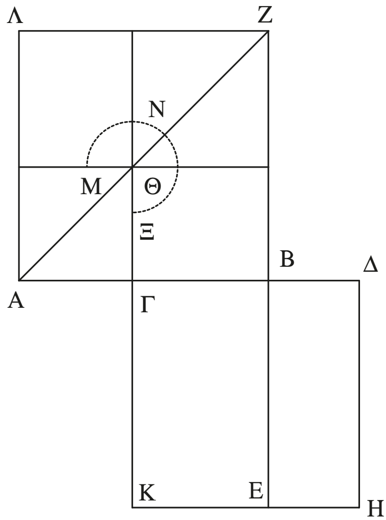
10 Definición II, 2.

11 Proposición recíproca da anterior.

12 Proposición I, 2.

digo que, cortada ΓΔ en razón extrema e media[13], ΓΒ é o segmento maior.

Pois ben, debúxense, a partir respectivamente de ΑΒ e ΓΔ, os cadrados ΑΖ e ΓΗ[14], remátese o debuxo da figura en ΑΖ[15] e trácese ΒΕ.



E, dado que o cadrado de ΒΑ é cinco veces o cadrado de ΑΓ, ΑΖ é cinco veces ΑΘ. Logo, o gnomon ΜΝΞ[16] é cuádruplo que ΑΘ.

E, dado que ΔΓ é o dobre que ΓΑ, logo, o cadrado de ΔΓ é cuádruplo que o de ΓΑ, é dicir, ΓΗ que ΑΘ.

Pero foi demostrado tamén que o gnomon ΜΝΞ é cuádruplo que ΑΘ; logo, o gnomon ΜΝΞ é igual a ΓΗ.

E, dado que ΔΓ é o dobre que ΓΑ, mentres que ΔΓ é igual a ΓΚ, e ΑΓ a ΓΘ, logo, tamén ΚΒ é o dobre que ΒΘ .

Pero ΛΘ e ΘΒ son o dobre que ΘΒ[17]; logo, ΚΒ é igual a ΛΘ e ΘΒ.

13 Proposición VI, 30.
14 Proposición I, 46.
15 Proposición I, 11 ou Proposición I, 31.
16 Definición II, 2.
17 Proposición I, 43.

Pero foi demostrado tamén que o gnomon ΜΝΞ enteiro é igual a ΓΗ enteiro; logo, o restante, ΘΖ, é igual a ΒΗ.

E ΒΗ é o contido por ΓΔΒ[18] —pois é igual ΓΔ a ΔΗ.

Pero ΘΖ é o cadrado de ΓΒ; logo, o contido por ΓΔΒ é igual ó cadrado de ΓΒ. Logo, como ΔΓ é a ΓΒ, así ΓΒ a ΒΔ[19].

Pero ΔΓ é maior que ΓΒ[20]; logo, é tamén maior ΓΒ que ΒΔ[21].

Logo, cortada a recta ΓΔ en razón extrema e media, o segmento maior é ΓΒ.

Logo, se o cadrado dunha liña recta é equivalente a cinco veces o dun segmento dela mesma, ó cortar o dobre do segmento dito en razón extrema e media, o segmento maior é a parte restante da recta do principio; o que, xustamente, era preciso demostrar.

LEMA[22]

Que o dobre de* ΑΓ *é maior que* ΒΓ *cómpre demostralo así:

Pois se non, sexa, se é posible, ΒΓ o dobre que ΓΑ.

Logo, o cadrado de ΒΓ é cuádruplo que o de ΓΑ; logo, o cadrado de ΒΓ xunto co de ΓΑ é cinco veces o de ΓΑ.

Pero suponse tamén que o cadrado de ΒΑ é cinco veces o de ΓΑ; logo, o cadrado de ΒΑ é igual ó cadrado de ΒΓ xunto co de ΓΑ; o que, sen dúbida, é imposible[23].

Logo, ΓΒ non é o dobre que ΑΓ.

De xeito semellante, entón, poderemos demostrar que tampouco unha menor que ΓΒ é o dobre que ΓΑ; pois é moito máis absurdo.

Logo, o dobre que ΑΓ é maior que ΓΒ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

---

18 Nota 6 (Proposición XIII, 1).

19 Proposición VI, 17.

20 Lema que segue a esta Proposición XIII, 2.

21 Definición V, 5.

22 Heiberg dubida da autenticidade deste Lema que aparece na tradición manuscrita, especialmente polo énfase que pon no razoamento por redución ó absurdo.

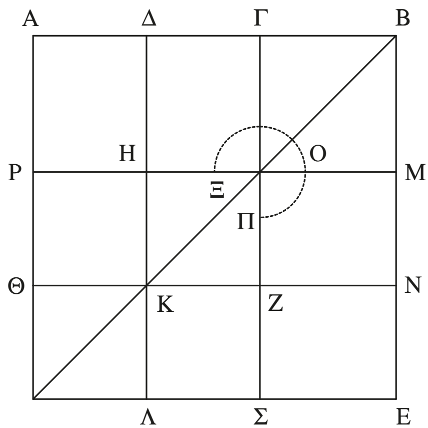
23 Proposición II, 4.

PROPOSICIÓN 3

Se se corta unha liña recta en razón extrema e media, o cadrado da suma do segmento menor e a metade do segmento maior é equivalente a cinco veces o cadrado da metade do segmento maior.

Pois ben, córtese unha recta, AB, en razón extrema e media polo punto Γ[24], sexa o segmento maior AΓ e córtese AΓ á metade por Δ; digo que o cadrado de BΔ é cinco veces o de ΔΓ.

Pois ben, debúxese, a partir de AB, o cadrado AE[25] e remátese o debuxo da figura dobre[26].



E, dado que AΓ é o dobre que ΔΓ, logo, o cadrado de AΓ é cuádruplo que o de ΔΓ, é dicir, PΣ que ZH.

E, dado que o contido por ABΓ é igual ó cadrado de AΓ[27] e o contido por ABΓ é ΓE, logo, ΓE é igual a PΣ.

Pero PΣ é cuádruplo que ZH; logo, tamén ΓE é cuádruplo que ZH.

Asemade, dado que é igual AΔ a ΔΓ, é tamén igual ΘK a KZ. En consecuencia, tamén o cadrado HZ é igual ó cadrado ΘΛ.

24 Proposición VI, 30.
25 Proposición I, 46.
26 Proposición I, 11 ou Proposición I, 31.
27 Definición VI, 3 e Proposición VI, 17.

Logo, HK é igual a KΛ, é dicir, MN a NE; en consecuencia, tamén MZ é igual a ZE.

Pero MZ é igual a ΓH[28]; logo, ΓH é igual a ZE. Engádase a ambos ΓN; logo, o gnomon ΞΟΠ é igual a ΓE.

Pero foi demostrado que ΓE é cuádruplo que HZ; logo, tamén o gnomon ΞΟΠ é cuádruplo que o cadrado ZH. Logo, o gnomon ΞΟΠ e o cadrado ZH son cinco veces ZH.

Pero o gnomon ΞΟΠ e o cadrado ZH son ΔN. E ΔN é o cadrado de ΔB, mentres que HZ o de ΔΓ.

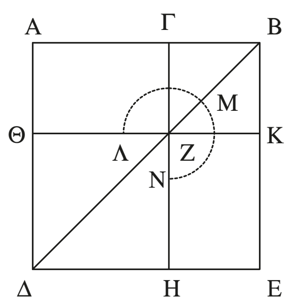
Logo, o cadrado de ΔB é cinco veces o cadrado de ΔΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 4

Se se corta unha liña recta en razón extrema e media, o cadrado da recta enteira e o do segmento menor —os seus cadrados xuntos— son triplo que o cadrado do segmento maior.

Pois ben, sexa a recta AB, córtese en razón extrema e media por Γ[29] e sexa o segmento maior AΓ; digo que o cadrado de AB xunto co de BΓ é triplo que o de ΓA.

Pois ben, debúxese, a partir de AB, o cadrado AΔEB[30] e remátese o debuxo da figura[31].



[28] Proposición I, 43.
[29] Proposición VI, 30.
[30] Proposición I, 46.
[31] Proposición I, 11 ou Proposición I, 31.

Entón, dado que AB queda cortada en razón extrema e media por Γ e que o segmento maior é ΑΓ, logo, o contido por ΑΒΓ é igual ó cadrado de ΑΓ[32].

E o contido por ΑΒΓ é ΑΚ, mentres que o cadrado de ΑΓ, ΘΗ; logo, ΑΚ é igual a ΘΗ.

E, dado que é igual ΑΖ a ΖΕ[33], engádase a ambos ΓΚ; logo, ΑΚ enteiro é igual a ΓΕ enteiro; logo, ΑΚ e ΓΕ son o dobre que ΑΚ.

Pero ΑΚ e ΓΕ son o gnomon ΛΜΝ e o cadrado ΓΚ[34]; logo, o gnomon ΛΜΝ e o cadrado ΓΚ son o dobre que ΑΚ.

Pero, efectivamente, tamén foi demostrado que ΑΚ é igual a ΘΗ; logo, o gnomon ΛΜΝ e os cadrados ΓΚ e ΘΗ son triplo que o cadrado ΘΗ; e, por unha parte, o gnomon ΛΜΝ e os cadrados ΓΚ e ΘΗ son ΑΕ enteiro e ΓΚ —o que, xustamente, son os cadrados de ΑΒ e ΒΓ—, por outra parte, ΗΘ é o cadrado de ΑΓ.

Logo, os cadrados de ΑΒ e ΒΓ son triplo que o cadrado de ΑΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 5

Se se corta unha liña recta en razón extrema e media e se lle engade unha igual ó segmento maior, a recta enteira queda cortada en razón extrema e media, e o segmento maior é a recta do principio.

Pois ben, córtese a recta ΑΒ en razón extrema e media polo punto Γ[35], sexa ΑΓ o segmento maior, e ΑΔ igual a ΑΓ; digo que a recta ΔΒ queda cortada en razón extrema e media por Α, e o segmento maior é a recta do principio, ΑΒ.

Pois ben, debúxese, a partir de ΑΒ, o cadrado ΑΕ[36] e remátese o debuxo da figura[37].

32 Definición VI, 3 e Proposición VI, 17.

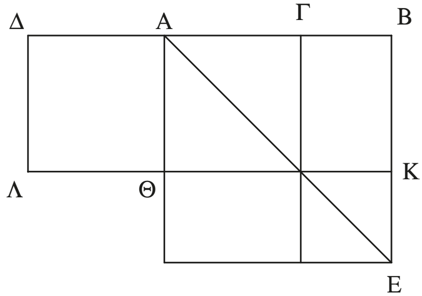
33 Proposición I, 43.

34 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

35 Proposición VI, 30.

36 Proposición I, 46.

37 Proposición I, 11 ou Proposición I, 31.



Entón, dado que AB queda cortada en razón extrema e media por Γ, logo, o contido por ABΓ é igual ó cadrado de AΓ[38].

E o contido por ABΓ é ΓE, mentres que o cadrado de AΓ, ΓΘ; logo, ΓE é igual a ΘΓ.

Pero ΘE é igual a ΓE[39], mentres que ΔΘ a ΘΓ; logo, ΔΘ é igual a ΘE; logo, ΔK enteiro é igual a AE enteiro; e ΔK é o contido por BΔ e ΔA —pois é igual AΔ a ΔΛ—; pero AE é o cadrado de AB; logo o contido por BΔA é igual ó cadrado de AB.

Logo, como ΔB é a BA, así BA a AΔ[40]. Pero ΔB é maior que BA; logo, tamén BA é maior que AΔ[41].

Logo, ΔB queda cortada en razón extrema e media por A, e o segmento maior é AB; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 6[42]

Se se corta unha recta expresable en razón extrema e media, cada un dos segmentos é unha non expresable, a chamada apótoma.

---

38 Definición VI, 3 e Proposición VI, 17.

39 Proposición I, 43.

40 Proposición VI, 17.

41 Definición V, 5.

42 Esta proposición falta nalgúns manuscritos; no manuscrito *P* —o máis fiable para Heiberg—, aparece coa seguinte nota do copista: «esta proposición non está na meirande parte das copias da nova edición, pero atópase nas da vella». Segundo Heath, ademais de pola situación en *P* desta proposición —entre a proposición 5 e a súa proba alternativa, tamén considerada unha interpolación—, hai varias razóns de contido para dubidar da súa autenticidade. En primeiro lugar, se Euclides tivera escrito esta proposición non sería necesario o escolio que aparece na Proposición XIII, 17 para probar o mesmo. En segundo lugar, o enunciado limítase a afirmar que cada un dos segmentos é unha apótoma e, na demostra-

Sexa a recta expresable AB, córtese en razón extrema e media por Γ[43] e sexa o segmento maior AΓ; digo que cada unha das rectas AΓ e ΓB é unha non expresable, a chamada apótoma[44].

Pois ben, prolónguese BA e fágase AΔ como a metade de BA[45].

Entón, dado que a recta AB queda cortada en razón extrema e media por Γ e que se engadiu AΔ —que é metade de AB— ó segmento maior AΓ, logo, o cadrado de ΓΔ é cinco veces o de ΔA[46].

Logo, o cadrado de ΓΔ garda co cadrado de ΔA a razón que garda un número cun número; logo, o cadrado de ΓΔ é conmensurable co de ΔA[47].

Pero o de ΔA é expresable —pois é expresable AΔ, que é metade de AB, que é expresable—, logo, é expresable tamén o cadrado de ΓΔ; logo, é expresable tamén ΓΔ[48].

E, dado que o cadrado de ΓΔ non garda co de ΔA a razón que garda un número cadrado cun número cadrado, logo é inconmensurable ΓΔ con ΔA en lonxitude[49]; logo ΓΔ e ΔA son expresables conmensurables só en cadrado; logo, AΓ é apótoma.

Asemade, dado que AB queda cortada en razón extrema e media e que o segmento maior é AΓ, logo, o contido por AB e BΓ é igual ó cadrado de AΓ[50].

ción, para chegar a esa conclusión, utiliza os mesmos argumentos que na Proposición XIII, 1, polo que Euclides puido considerar que era suficiente esa Proposición XIII, 1. Finalmente, a demostración desta Proposición XIII, 6 inclúe unha parte final na que proba que o segmento menor é primeira apótoma, sen que figure tal afirmación no enunciado nin sexa necesario para a proba da Proposición XIII, 17.

[43] Proposición VI, 30.

[44] Proposición X, 73.

[45] Proposición I, 10 e Proposición I, 2.

[46] Proposición XIII, 1.

[47] Proposición X, 6.

[48] Definición X, 4.

[49] Proposición X, 9.

[50] Definición VI, 3 e Proposición VI, 17.

Logo, o cadrado da apótoma AΓ aplicado na expresable AB fai en anchura BΓ.

Pero o cadrado de apótoma aplicado en expresable fai en anchura primeira apótoma[51]; logo, ΓB é primeira apótoma.

Pero foi demostrado tamén que ΓA é apótoma.

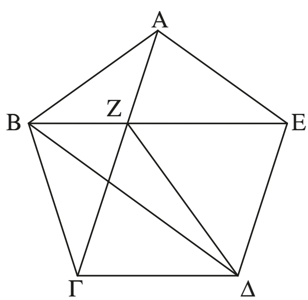
Logo, se unha recta expresable se corta en razón extrema e media, cada un dos segmentos é unha non expresable, a chamada apótoma; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 7

Se, dun pentágono equilátero, tres ángulos sucesivos ou non sucesivos son iguais, o pentágono será equiángulo.

Pois ben, do pentágono equilátero ABΓΔE, sexan iguais entre si primeiro os tres ángulos sucesivos A, B e Γ; digo que o pentágono ABΓΔE é equiángulo.

Pois ben, trácense AΓ, BE e ZΔ.



E, dado que os dous lados ΓB e BA son iguais ós dous lados BA e AE respectivamente e que o ángulo ΓBA é igual ó ángulo BAE, logo, a base AΓ é igual á base BE, o triángulo ABΓ igual ó triángulo ABE, e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais ós demais ángulos —BAΓ a BEA, ABE a ΓAB[52]—; en consecuencia, tamén o lado AZ é igual ó lado BZ[53].

51 Proposición X, 97.

52 Proposición I, 4.

53 Proposición I, 6.

Pero foi demostrado tamén que ΑΓ enteira é igual a ΒΕ enteira; logo, tamén a restante, ΖΓ, é igual á restante, ΖΕ.

Pero é tamén igual ΓΔ a ΔΕ. Entón, os dous lados ΖΓ e ΓΔ son iguais ós outros dous, ΖΕ e ΕΔ; e a súa base, ΖΔ, é común; logo, o ángulo ΖΓΔ é igual ó ángulo ΖΕΔ[54].

Pero foi demostrado tamén que o ángulo ΒΓΑ é igual a ΑΕΒ; logo, ΒΓΔ enteiro é igual a ΑΕΔ enteiro.

Pero o ángulo ΒΓΔ suponse igual ós ángulos Α e Β; logo, tamén ΑΕΔ é igual ós ángulos Α e Β.

De xeito semellante, entón, poderemos demostrar que tamén o ángulo ΓΔΕ é igual ós ángulos Α, Β e Γ; logo, o pentágono ΑΒΓΔΕ é equiángulo.

Non sexan agora iguais os ángulos sucesivos, senón que sexan iguais os ángulos dos puntos Α, Γ e Δ; digo que, tamén así, o pentágono ΑΒΓΔΕ é equiángulo.

Pois ben, trácese ΒΔ.

E, dado que os dous lados ΒΑ e ΑΕ son iguais ós dous lados ΒΓ e ΓΔ, e que conteñen ángulos iguais, logo, a base ΒΕ é igual á base ΒΔ, e o triángulo ΑΒΕ igual ó triángulo ΒΓΔ, e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais ós demais ángulos[55]; logo, é igual o ángulo ΑΕΒ ó ángulo ΓΔΒ.

E é tamén igual o ángulo ΒΕΔ a ΒΔΕ, posto que tamén o lado ΒΕ é igual ó lado ΒΔ[56].

Logo, tamén o ángulo ΑΕΔ enteiro é igual a ΓΔΕ enteiro.

Pero o ángulo ΓΔΕ suponse igual ós ángulos Α e Γ; logo, tamén o ángulo ΑΕΔ é igual ós ángulos Α e Γ.

Entón, polo mesmo, tamén o ángulo ΑΒΓ é igual ós ángulos Α, Γ e Δ. Logo, o pentágono ΑΒΓΔΕ é equiángulo; o que xustamente era preciso demostrar.

---

54 Proposición I, 8.

55 Proposición I, 4.

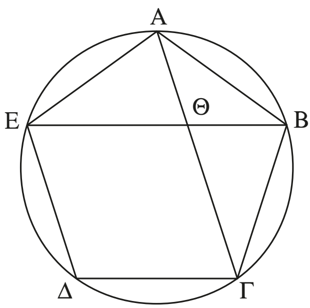
56 Proposición I, 5.

PROPOSICIÓN 8

Dun pentágono equilátero e equiángulo, se unhas rectas están tendidas baixo dous ángulos sucesivos, córtanse entre si en razón extrema e media, e os seus segmentos maiores son iguais ó lado do pentágono.

Pois ben, do pentágono equilátero e equiángulo ΑΒΓΔΕ, as rectas ΑΓ e ΒΕ estean tendidas baixo os dous ángulos sucesivos Α e Β, cortándose no punto Θ; digo que cada unha delas queda cortada en razón extrema e media polo punto Θ e que os seus segmentos maiores son iguais ó lado do pentágono.

Pois ben, circunscríbase ó pentágono ΑΒΓΔΕ o círculo ΑΒΓΔΕ[57].



E, dado que as dúas rectas ΕΑ e ΑΒ son iguais ás dúas rectas ΑΒ e ΒΓ e que conteñen ángulos iguais, logo, a base ΒΕ é igual á base ΑΓ, o triángulo ΑΒΕ é igual ó triángulo ΑΒΓ, e os demais ángulos, aqueles baixo os que están tendidos os lados iguais, serán iguais respectivamente ós demais ángulos[58]. Logo, é igual o ángulo ΒΑΓ a ΑΒΕ; logo, o ángulo ΑΘΕ é o dobre que ΒΑΘ[59].

Pero tamén ΕΑΓ é o dobre que ΒΑΓ, posto que tamén a circunferencia ΕΔΓ é o dobre que a circunferencia ΓΒ[60]; logo, é

57 Proposición IV, 14.
58 Proposición I, 4.
59 Proposición I, 32.
60 Proposición III, 28 e Proposición VI, 33.

igual o ángulo ΘAE a AΘE; en consecuencia, tamén a recta ΘE é igual a EA[61], é dicir, a AB.

E, dado que é igual a recta BA a AE, é igual tamén o ángulo ABE a AEB[62].

Pero ABE foi demostrado que é igual a BAΘ; logo, tamén BEA é igual a BAΘ. E ABE é común ós dous triángulos, ABE e ABΘ; logo, o ángulo restante, BAE, é igual ó restante, AΘB[63]; logo, o triángulo ABE é de ángulos iguais ós do triángulo ABΘ; logo, proporcionalmente, como EB é a BA, así AB a BΘ[64].

Pero BA é igual a EΘ; logo, como BE a EΘ, así EΘ a ΘB[65].

Pero BE é maior que EΘ; logo, é maior tamén EΘ que ΘB[66].

Logo, BE queda cortada en razón extrema e media por Θ[67], e o segmento maior, ΘE, é igual ó lado do pentágono.

De xeito semellante, entón, poderemos demostrar que tamén AΓ queda cortada en razón extrema e media por Θ e que o seu segmento maior ΓΘ é igual ó lado do pentágono; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 9

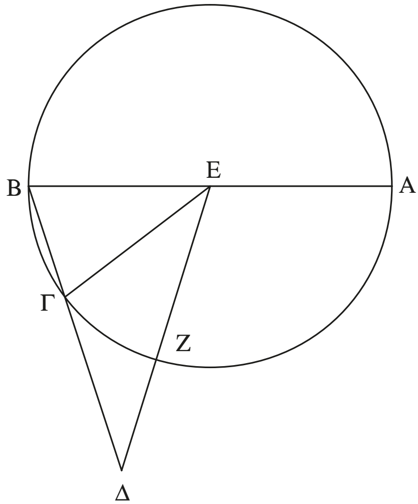
Se se unen o lado dun hexágono e o dun decágono inscritos no mesmo círculo, a recta enteira queda cortada en razón extrema e media, e o seu segmento maior é o lado do hexágono[68].

Sexa o círculo ABΓ e, das figuras inscritas no círculo ABΓ, sexa BΓ o lado do decágono e ΓΔ o do hexágono, e estean en

61 Proposición I, 6.
62 Proposición I, 5.
63 Proposición I, 32.
64 Proposición VI, 4.
65 Proposición V, 7 e Proposición V, 11.
66 Definición V, 5.
67 Definición VI, 3.
68 En consecuencia, se temos un decágono inscrito nun círculo de radio *r* —lado do hexágono inscrito no mesmo círculo—, o lado do decágono é igual a $(r/2)(\sqrt{5} - 1)$.

liña recta; digo que a recta enteira BΔ queda cortada en razón extrema e media[69], e que o seu segmento maior é ΓΔ.

Pois ben, tómese como centro do círculo o punto E, trácense EB, EΓ e EΔ, e lévese BE ata A.



Dado que BΓ é un lado dun decágono equilátero, logo, a circunferencia AΓB é cinco veces a circunferencia BΓ[70]; logo, a circunferencia AΓ é cuádruplo que ΓB.

Pero como a circunferencia AΓ a ΓB, así o ángulo AEΓ a ΓEB[71]; logo, o ángulo AEΓ é cuádruplo que ΓEB.

E, dado que o ángulo EBΓ é igual a EΓB[72], logo, o ángulo AEΓ é o dobre que EΓB[73].

E, dado que a recta EΓ é igual a ΓΔ —pois cada unha delas é igual ó lado do hexágono inscrito no círculo ABΓ[74]—, é igual tamén o ángulo ΓEΔ ó ángulo ΓΔE[75]; logo, o ángulo EΓB é o dobre que EΔΓ[76].

[69] Definición VI, 3.
[70] Proposición III, 24.
[71] Proposición VI, 33.
[72] Proposición I, 5.
[73] Proposición I, 32.
[74] Proposición IV, 15. Corolario.
[75] Proposición I, 5.
[76] Proposición I, 32.

Pero foi demostrado que ΑΕΓ é o dobre que ΕΓΒ; logo, ΑΕΓ é cuádruplo que ΕΔΓ.

Pero foi demostrado tamén que ΑΕΓ é cuádruplo que ΒΕΓ; logo, é igual ΕΔΓ a ΒΕΓ.

Pero o ángulo ΕΒΓ é común ós dous triángulos —ΒΕΓ e ΒΕΔ—; logo, tamén o restante, ΒΕΔ, é igual a ΕΓΒ[77]; logo, o triángulo ΕΒΔ é de ángulos iguais ós do triángulo ΕΒΓ.

Logo, proporcionalmente, como ΔΒ é a ΒΕ, así ΕΒ a ΒΓ[78].

Pero é igual ΕΒ a ΓΔ. Logo, como ΒΔ é a ΔΓ, así ΔΓ a ΓΒ[79].

Pero ΒΔ é maior que ΔΓ; logo, tamén é maior ΔΓ que ΓΒ[80].

Logo, a recta ΒΔ queda cortada en razón extrema e media, e o seu segmento maior é ΔΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 10

***Se nun círculo se inscribe un pentágono equilátero, o cadrado do lado do pentágono é equivalente ó cadrado do lado do hexágono e o do decágono inscritos no mesmo círculo*[81].**

Sexa o círculo ΑΒΓΔΕ e inscríbase no círculo ΑΒΓΔΕ o pentágono equilátero ΑΒΓΔΕ[82]; digo que o cadrado do lado do pentágono ΑΒΓΔΕ é equivalente ó cadrado do lado do hexágono e o do decágono inscritos no círculo ΑΒΓΔΕ[83].

Pois ben, tómese como centro do círculo o punto Ζ[84] e, unida ΑΖ, lévese ata o punto Η; únase ΖΒ, trácese ΖΘ perpendicular a

77 Proposición I, 32.

78 Proposición VI, 4.

79 Proposición V, 7 e Proposición V, 11.

80 Definición V, 5.

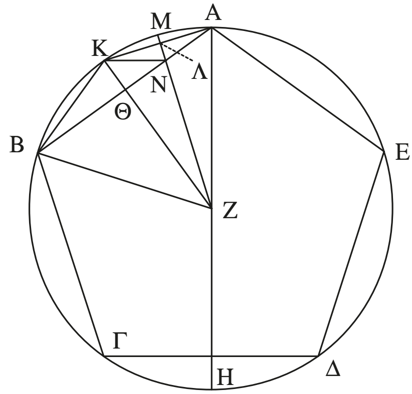
81 En consecuencia, se temos un decágono inscrito nun círculo de radio *r* —lado do hexágono inscrito no mesmo círculo—, o lado do pentágono é igual a $(r/2)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

82 Proposición IV, 11.

83 Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

84 Proposición III, 1.

AB dende Z[85], lévese ata K e trácense AK e KB; de novo dende Z, trácese ZΛ perpendicular a AK, lévese ata M e únase KN.



Dado que é igual a circunferencia ABΓH á circunferencia AEΔH, parte das cales, ABΓ, é igual a AEΔ, logo, a circunferencia restante, ΓH, é igual á restante, HΔ; e ΓΔ é do pentágono; logo, ΓH do decágono.

E, dado que é igual ZA a ZB e que ZΘ perpendicular, logo, é igual tamén o ángulo AZK a KZB[86]. En consecuencia, tamén a circunferencia AK é igual a KB[87]; logo, a circunferencia AB é o dobre que a circunferencia BK; logo, a recta AK é un lado do decágono.

Entón, polo mesmo, tamén AK é o dobre que KM. E, dado que a circunferencia AB é o dobre que a circunferencia BK, e a circunferencia ΓΔ é igual á circunferencia AB, logo, tamén a circunferencia ΓΔ é o dobre que a circunferencia BK.

Pero a circunferencia ΓΔ é tamén o dobre que ΓH; logo, a circunferencia ΓH é igual á circunferencia BK. Pero BK é o dobre que KM —posto que tamén o é KA—; logo, tamén ΓH é o dobre que KM.

85 Proposición I, 12.
86 Proposición I, 5 e Proposición I, 32.
87 Proposición III, 26.

Pero, efectivamente, tamén a circunferencia ΓB é o dobre que a circunferencia BK —pois a circunferencia ΓB é igual a BA—; logo, a circunferencia HB enteira é o dobre que BM; en consecuencia, tamén o ángulo HZB é o dobre que o ángulo BZM[88].

Pero HZB é o dobre que ZAB —pois ZAB é igual a ABZ[89]—. Logo, tamén BZN é igual a ZAB.

Pero o ángulo ABZ é común ós dous triángulos —ABZ e BZN—. Logo, o restante, AZB, é igual ó restante, BNZ[90]; logo, o triángulo ABZ é de ángulos iguais ós do triángulo BZN.

Logo, proporcionalmente, como a recta AB a BZ, así ZB a BN; logo, o contido por ABN[91] é igual ó cadrado de BZ[92].

Asemade, dado que é igual AΛ a ΛK, mentres que ΛN é común e está en ángulo recto, logo, a base KN é igual á base AN[93]; logo, o ángulo ΛKN é igual ó ángulo ΛAN[94].

Pero ΛAN é igual a KBN; logo, tamén ΛKN é igual a KBN. E o ángulo A é común ós dous triángulos —AKB e AKN—. Logo, o restante, AKB, é igual ó restante, KNA[95]; logo, o triángulo KBA é de ángulos iguais ós do triángulo KNA. Logo, proporcionalmente, como a recta BA é a AK, así KA a AN[96]; logo, o contido por BAN é igual ó cadrado de AK[97].

Pero foi demostrado tamén que o contido por ABN é igual ó cadrado de BZ; logo, o contido por ABN xunto co contido por BAN —que é, xustamente, o cadrado de BA[98]— é igual ó cadrado de BZ xunto co cadrado de AK. E BA é un lado do pentágono, mentres que BZ do hexágono e AK do decágono.

---

88 Proposición VI, 33.
89 Proposición I, 5 e Proposición I, 32.
90 Proposición I, 32.
91 Nota 6 (Proposición XIII, 1).
92 Proposición VI, 17.
93 Proposición I, 4.
94 Proposición I, 5.
95 Proposición I, 32.
96 Proposición VI, 4.
97 Proposición VI, 17.
98 Proposición II, 1.

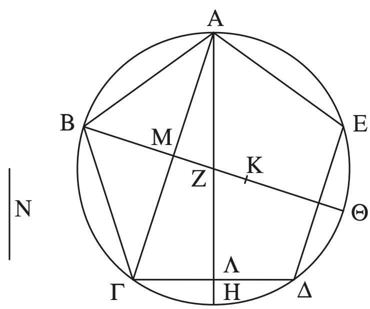
Logo, o cadrado do lado do pentágono é equivalente ó cadrado do do hexágono e do do decágono inscritos no mesmo círculo; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 11

Se nun círculo co diámetro expresable se inscribe un pentágono equilátero, o lado do pentágono é unha non expresable, a chamada menor*[99]*.

Pois ben, no círculo ΑΒΓΔΕ co diámetro expresable, inscríbase o pentágono equilátero ΑΒΓΔΕ[100]; digo que o lado do pentágono é unha non expresable, a chamada menor[101].

Pois ben, tómese como centro do círculo o punto Ζ[102], trácense ΑΖ e ΖΒ, e lévense ata os puntos Η e Θ; únase ΑΓ e fágase ΖΚ como a cuarta parte de ΑΖ.



Pero ΑΖ é expresable; logo, tamén é expresable ΖΚ[103].

Pero tamén ΒΖ é expresable; logo, ΒΚ enteira é expresable[104]. E, dado que a circunferencia ΑΓΗ é igual á circunferen-

---

[99] O lado do pentágono regular inscrito nun círculo de radio r é unha recta do tipo menor. En efecto

$$(r/2)\sqrt{10-2\sqrt{5}} = a\left(\sqrt{(1+q/\sqrt{1+q^2})/2} - \sqrt{(1-q/\sqrt{1+q^2})/2}\right), \text{ con } a = r\sqrt{5/2},\ q = 2,$$

que é unha recta do tipo menor. Véxase a Nota 717 (Proposición X, 76).

[100] Proposición IV, 11.

[101] Proposición X, 76.

[102] Proposición III, 1.

[103] Proposición X, 6.

[104] Proposición X, 15.

cia ΑΔΗ, parte das cales, ΑΒΓ, é igual a ΑΕΔ, logo, a restante, ΓΗ, é igual á restante, ΗΔ.

E, se unimos ΑΔ, conclúese que os ángulos de Λ son rectos e que ΓΔ é o dobre que ΓΛ[105].

Entón, polo mesmo, tamén os ángulos de Μ son rectos, e ΑΓ o dobre que ΓΜ.

Entón, dado que o ángulo ΑΛΓ é igual a ΑΜΖ, mentres que ΛΑΓ é común ós dous triángulos —ΑΓΛ e ΑΜΖ—, logo, o restante, ΑΓΛ, é igual ó restante, ΜΖΑ[106]; logo, o triángulo ΑΓΛ é de ángulos iguais ós do triángulo ΑΜΖ; logo, proporcionalmente, como ΛΓ é a ΓΑ, así ΜΖ a ΖΑ[107]; e cos dobres dos antecedentes: nese caso, como o dobre de ΛΓ a ΓΑ, así o dobre de ΜΖ a ΖΑ[108].

Pero como o dobre de ΜΖ a ΖΑ, así ΜΖ á metade de ΖΑ; logo, tamén, como o dobre de ΛΓ a ΓΑ, así ΜΖ á metade de ΖΑ. E coas metades dos consecuentes: nese caso, como o dobre de ΛΓ á metade de ΓΑ, así ΜΖ á cuarta parte de ΖΑ.

E ΔΓ é o dobre que ΛΓ, mentres que ΓΜ a metade que ΓΑ, e ΖΚ a cuarta parte que ΖΑ; logo, como ΔΓ é a ΓΜ, así ΜΖ a ΖΚ.

E, por composición, como ΔΓΜ todo xunto[109] a ΓΜ, así ΜΚ a ΚΖ[110]; logo, como o cadrado de ΔΓΜ todo xunto ó de ΓΜ, así o cadrado de ΜΚ ó de ΚΖ[111].

E, dado que, se se corta en razón extrema e media a recta tendida baixo dous lados do pentágono —como ΑΓ—, o segmento maior é igual ó lado do pentágono[112], é dicir, a ΔΓ, mentres que o cadrado do segmento maior sumado á metade da recta enteira é equivalente a cinco veces o cadrado da metade

[105] Proposición I, 5 e Proposición I, 32.
[106] Proposición I, 32.
[107] Proposición VI, 4.
[108] Proposición V, 4.
[109] Enténdase ΔΓ mais ΓΜ.
[110] Proposición V, 18.
[111] Proposición VI, 22.
[112] Proposición XIII, 8.

da recta enteira[113], e a metade de ΑΓ enteira é ΓΜ, logo, o cadrado de ΔΓΜ —como unha única recta—, é cinco veces o cadrado de ΓΜ.

Pero foi demostrado que, como o cadrado de ΔΓΜ —como unha única recta— é ó de ΓΜ, así é o cadrado de MK ó de KZ; logo, o cadrado de MK é cinco veces o de KZ. Pero o de KZ é expresable —pois, é expresable o diámetro—; logo, é expresable tamén o cadrado de MK[114]; logo, é expresable MK.

E, dado que BZ é cuádruplo que ZK, logo, BK é cinco veces KZ; logo, o cadrado de BK é vinte e cinco veces o de KZ.

Pero o cadrado de MK é cinco veces o de KZ; logo, o cadrado de BK é cinco veces o de KM; logo, o cadrado de BK non garda co de KM a razón que garda un número cadrado cun número cadrado; logo, é inconmensurable BK con KM en lonxitude[115]. E cada unha delas é expresable; logo, BK e KM son expresables conmensurables só en cadrado.

Pero, se de expresable se quita expresable que é conmensurable só en cadrado coa recta enteira, a restante é non expresable apótoma[116]; logo, MB é apótoma e MK a que lle corresponde.

Digo, agora, que tamén cuarta. Sexa igual o cadrado de N a aquilo no que é maior o cadrado de BK que o de KM; logo, o cadrado de BK é maior que o de KM no de N. E, dado que é conmensurable KZ con ZB, tamén, por composición, é conmensurable KB con ZB[117].

Pero BZ é conmensurable con BΘ. Logo, tamén BK é conmensurable con BΘ[118].

E, dado que o cadrado de BK é cinco veces o de KM, logo, o cadrado de BK garda co de KM a razón que 5[119] con 1. Logo,

113 Proposición XIII, 1.

114 Proposición X, 6.

115 Proposición X, 9.

116 Proposición X, 73.

117 Proposición X, 15.

118 Proposición X, 12.

119 En grego estes números aparecen coa notación alfanumérica, baseada na posición invariable das 24 letras do alfabeto -mais os signos arcaicos *digamma* e *koppa*, e a *sampi* de orixe discutido- e no sistema decimal; deste xeito, as unidades represéntase coas letras α, β,

por conversión, o cadrado de BK garda co de N a razón que garda 5 con 4[120], non a que garda un cadrado cun cadrado; logo, é inconmensurable BK con N[121]; logo, o cadrado de BK é maior que o de KM no cadrado dunha inconmensurable con aquela.

Entón, dado que o cadrado de BK enteira é maior que o da súa correspondente, KM, no cadrado dunha inconmensurable con aquela e que BK enteira é conmensurable coa expresable tomada BΘ, logo, MB é cuarta apótoma[122].

Pero o paralelogramo de ángulos rectos contido por expresable e cuarta apótoma é non expresable, e a recta cuxo cadrado é equivalente a el é non expresable e chámase menor[123]. Pero o cadrado de AB é equivalente ó contido por ΘBM porque, ó unir AΘ, resulta o triángulo ABΘ de ángulos iguais ós do triángulo ABM[124] e, como ΘB a BA, así AB a BM[125].

Logo, o lado AB do pentágono é non expresable, a chamada menor; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 12

***Se nun círculo se inscribe un triángulo equilátero, o cadrado do lado do triángulo é triplo que o do radio do círculo*[126].**

Sexa o círculo ABΓ e inscríbase nel o triángulo equilátero ABΓ[127]; digo que, do triángulo ABΓ, o cadrado dun lado é triplo que o do radio do círculo ABΓ.

γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ; outras dez letras -as seguintes mais a *koppa*- representaban as decenas, e as nove seguintes mais a *sampi*, as centenas; para indicar os millares, engadíase un trazo baixo antes da letra. É o sistema utilizado xa dende a *Ilíada* e a *Odisea* para numerar os capítulos dunha obra e o que aparece nos *Elementos* para a numeración dos libros e das proposicións.

[120] Proposición V, 19. Corolario.

[121] Proposición X, 9.

[122] Definición X, 3.4.

[123] Proposición X, 94.

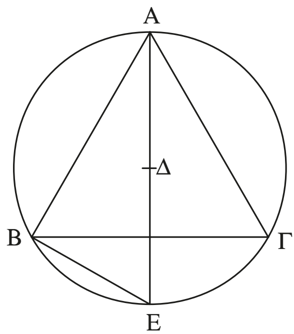
[124] Proposición VI, 8.

[125] Proposición VI, 4.

[126] En consecuencia, se temos un triángulo inscrito nun círculo de radio *r*, o lado do triángulo é igual a $r\sqrt{3}$.

[127] Proposición IV, 2.

Pois ben, tómese Δ como centro do círculo ΑΒΓ[128], unha vez unida ΑΔ lévese ata Ε, e únase ΒΕ.



E, dado que o triángulo ΑΒΓ é equilátero, logo, a circunferencia ΒΕΓ é a terceira parte da circunferencia do círculo ΑΒΓ.

Logo, a circunferencia ΒΕ é a sexta parte da circunferencia do círculo; logo, a recta ΒΕ é do hexágono[129]; logo, é igual ó radio ΔΕ[130].

E, dado que ΑΕ é o dobre que ΔΕ, o cadrado de ΑΕ é cuádruplo que o de ΕΔ, é dicir, que o de ΒΕ.

Pero o cadrado de ΑΕ é igual ó de ΑΒ xunto co de ΒΕ[131]; logo, o cadrado de ΑΒ xunto co de ΒΕ é cuádruplo que o de ΒΕ.

Logo, por separación, o cadrado de ΑΒ é triplo que o de ΒΕ.

Pero ΒΕ é igual a ΔΕ; logo, o cadrado de ΑΒ é triplo que o de ΔΕ.

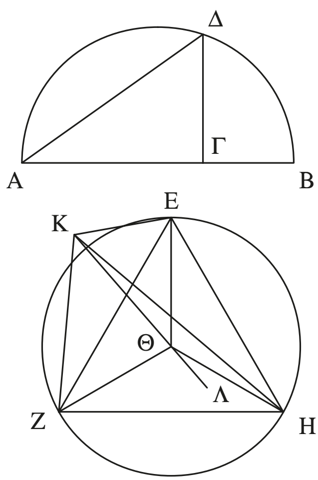
Logo, o cadrado do lado do triángulo é triplo que o do radio; o que, xustamente, era preciso demostrar.

128 Proposición III, 1.
129 Véxase o razoamento feito na Proposición XIII, 10 para o pentágono e o decágono.
130 Proposición IV, 15. Corolario.
131 Proposición III, 31 e Proposición I, 47.

PROPOSICIÓN 13

***Construír unha pirámide, rodeala cunha esfera dada e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é equivalente a unha vez e media o do lado da pirámide*[132].**

Tómese AB, o diámetro da esfera dada, e córtese polo punto Γ de modo que AΓ sexa o dobre que ΓB[133]; debúxese o semicírculo AΔB sobre AB, trácese ΓΔ dende o punto Γ en ángulo recto con AB[134] e únase ΔA; tómese o círculo EZH co radio igual a ΔΓ e inscríbase o triángulo equilátero EZH no círculo EZH[135]; tómese o punto Θ como centro do círculo[136] e trácense EΘ, ΘZ e ΘH; levántese ΘK dende o punto Θ en ángulo recto co plano do círculo EZH[137], a partir de ΘK, córtese ΘK igual á recta AΓ e trácense KE, KZ e KH.



[132] En consecuencia, se temos un tetraedro inscrito nunha esfera de radio *r*, o lado do tetraedro é igual a $r\sqrt{8/3}$.

[133] Proposición VI, 10.

[134] Proposición I, 11.

[135] Proposición IV, 2.

[136] Proposición III, 1.

[137] Proposición XI, 12.

E, dado que KΘ está en ángulo recto co plano do círculo EZH, logo, tamén fará ángulos rectos con todas as rectas que a tocan e que están no plano do círculo EZH[138].

E tócana tanto ΘE como ΘZ e ΘH; logo, ΘK está en ángulo recto tanto con ΘE como con ΘZ e ΘH.

E, dado que AΓ é igual a ΘK, e ΓΔ a ΘE e que conteñen ángulos rectos, logo, a base ΔA é igual á base KE[139].

Entón, polo mesmo, tamén tanto KZ como KH son iguais a ΔA; logo, as tres, KE, KZ e KH son iguais entre si.

E, dado que AΓ é o dobre que ΓB, logo, AB é triplo que BΓ. Pero como AB a BΓ, así o cadrado de AΔ ó de ΔΓ, como a continuación se demostrará[140]. Logo, o cadrado de AΔ é triplo que o de ΔΓ[141].

Pero tamén o cadrado de ZE é triplo que o de EΘ[142], e ΔΓ é igual a EΘ; logo, tamén ΔA é igual a EZ[143].

Pero foi demostrado que ΔA é igual tanto a KE como a KZ e a KH; logo, tamén EZ, ZH e HE son iguais a KE, KZ e KH respectivamente; logo, os catro triángulos EZH, KEZ, KZH e KEH son equiláteros.

Logo, a partir de catro triángulos equiláteros, queda construída unha pirámide cuxa base é o triángulo EZH e o vértice o punto K[144].

É preciso, agora, rodeala cunha esfera dada e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é unha vez e media o do lado da pirámide.

Pois ben, prolónguese a recta ΘΛ en liña recta con KΘ e fágase ΘΛ igual a ΓB.

E, dado que, como AΓ é a ΓΔ, así ΓΔ a ΓB[145], mentres que AΓ é igual a KΘ, ΓΔ a ΘE, e ΓB a ΘΛ, logo, como KΘ é a ΘE, así EΘ a ΘΛ; logo, o contido por KΘ e ΘΛ é igual ó cadrado de EΘ[146].

---

138 Definición XI, 3.
139 Proposición I, 4.
140 Lema que segue a esta Proposición XIII, 13.
141 Proposición V, 11.
142 Proposición XIII, 12.
143 Proposición V, 9.
144 Definición XI, 12.
145 Proposición VI, 8. Corolario.
146 Proposición VI, 17.

E cada un dos ángulos ΚΘΕ e ΕΘΛ é recto; logo, o semicírculo debuxado sobre ΚΛ pasará tamén por Ε[147].

Entón, permanecendo fixo ΚΛ, se o semicírculo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse, pasará tamén polos puntos Ζ e Η, ó resultar, de xeito semellante, rectos os ángulos Ζ e Η, despois de trazar ΖΛ e ΛΗ; e a pirámide quedará rodeada pola esfera dada; pois o diámetro da esfera, ΚΛ, é igual a ΑΒ, o diámetro da esfera dada, posto que ΚΘ fíxose igual a ΑΓ, e ΘΛ a ΓΒ.

Digo, agora, que o cadrado do diámetro da esfera é vez e media o do lado da pirámide.

Pois ben, dado que ΑΓ é o dobre que ΓΒ, logo, ΑΒ é triplo que ΒΓ; logo, por conversión[148], ΒΑ é vez e media ΑΓ. Pero como ΒΑ a ΑΓ, así o cadrado de ΒΑ ó de ΑΔ[149]. Logo, tamén o cadrado de ΒΑ é vez e media o de ΑΔ[150]. E, ΒΑ é o diámetro da esfera dada, mentres que ΑΔ é igual ó lado da pirámide.

Logo, o diámetro[151] da esfera é vez e media o lado da pirámide; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Lema

Cómpre demostrar que, como* ΑΒ *é a* ΒΓ*, así o cadrado de* ΑΔ *ó de* ΔΓ*.

Pois ben, tómese a figura do semicírculo, únase ΔΒ, debúxese a partir de ΑΓ o cadrado ΕΓ[152], e remátese o paralelogramo ΖΒ[153].

147 Proposición VI, 8 e Proposición III, 31.

148 Definición V, 16.

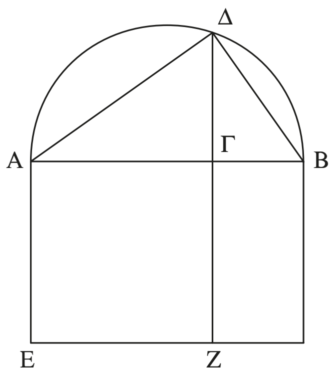
149 Proposición VI, 1 e Proposición VI, 8.

150 Proposición V, 11.

151 No texto grego falta δυνάμει, «ó cadrado», que debe sobreentenderse para que a conclusión sexa coherente co enunciado. Enténdase, pois: Logo, o cadrado do diámetro da esfera é vez e media o do lado da pirámide.

152 Proposición I, 46.

153 Proposición I, 11.



Entón, dado que, por ser o triángulo ΔAB de ángulos iguais ós do triángulo ΔAΓ, como BA é a AΔ, así ΔA a AΓ[154], logo, o contido por BA e AΓ é igual ó cadrado de AΔ[155].

E, dado que, como AB é a BΓ, así EB a BZ[156], e EB é o contido por BA e AΓ —pois EA é igual a AΓ—, mentres que BZ é o contido por AΓ e ΓB, logo, como AB a BΓ, así o contido por BA e AΓ ó contido por AΓ e ΓB.

E o contido por BA e AΓ é igual ó cadrado de AΔ, mentres que o contido por AΓB[157] é igual ó cadrado de ΔΓ —pois a perpendicular ΔΓ é media proporcional dos segmentos AΓ e ΓB da base, por ser recto o ángulo AΔB[158].

Logo, como AB a BΓ, así o cadrado de AΔ ó de ΔΓ; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 14

***Construír un octaedro, rodealo cunha esfera, como na anterior, e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é o dobre que o do lado do octaedro*[159].**

---

[154] Proposición VI, 8 e Proposición VI, 4.

[155] Proposición VI, 17.

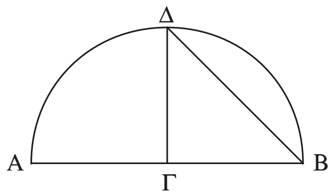
[156] Proposición VI, 1.

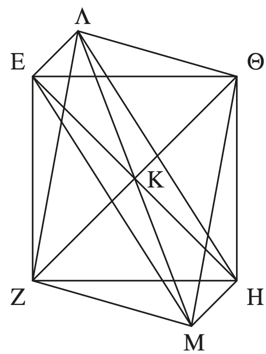
[157] Nota 6 (Proposición XIII, 1).

[158] Proposición VI, 8. Corolario.

[159] En consecuencia, se temos un octaedro inscrito nunha esfera de radio *r,* o lado do octaedro é igual a $r\sqrt{2}$.

Tómese AB, o diámetro da esfera dada, córtese á metade por Γ[160], debúxese o semicírculo AΔB sobre AB, trácese ΓΔ dende Γ en ángulo recto con AB[161], únase ΔB, tómese o cadrado EZHΘ con cada lado igual a ΔB[162], trácense ΘZ e EH, levántese, dende o punto K, a recta KΛ en ángulo recto co plano do cadrado EZHΘ[163] e lévese cara o outro lado do plano como KM; de KΛ e KM córtense respectivamente KΛ e KM iguais a unha das rectas EK, ZK, HK e ΘK[164] e trácense ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH e MΘ.





E, dado que é igual KE a KΘ e que o ángulo EKΘ é recto, logo, o cadrado de ΘE é o dobre que o de EK[165].

Asemade, dado que é igual ΛK a KE e o ángulo ΛKE é recto, logo, o cadrado de EΛ é o dobre que o de EK.

Pero foi demostrado tamén que o cadrado de ΘE é o dobre que o de EK; logo, o cadrado de ΛE é igual ó cadrado de EΘ; logo, ΛE é igual a EΘ.

Entón, polo mesmo, tamén ΛΘ é igual a ΘE; logo, o triángulo ΛEΘ é equilátero.

160 Proposición I, 10.
161 Proposición I, 11.
162 Proposición I, 46.
163 Proposición XI, 12.
164 Proposición IV, 9.
165 Proposición I, 47.

De xeito semellante poderemos demostrar que tamén cada un dos triángulos restantes cuxas bases son os lados do cadrado ΕΖΗΘ e os seus vértices os puntos Λ e Μ, son equiláteros; logo, queda construído un octaedro contido por oito triángulos equiláteros.

É preciso, agora, rodealo coa esfera dada e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é o dobre que o do lado do octaedro.

Pois ben, dado que as tres rectas ΛΚ, ΚΜ e ΚΕ son iguais entre si, logo, o semicírculo debuxado sobre ΛΜ pasará tamén por Ε.

E, polo mesmo, permanecendo fixo ΛΜ, se o semicírculo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse, pasará tamén polos puntos Ζ, Η e Θ e o octaedro quedará rodeado por unha esfera.

Digo, agora, que tamén pola dada.

Pois ben, dado que ΛΚ é igual a ΚΜ, que ΚΕ é común e que conteñen ángulos rectos, logo, a base ΛΕ é igual á base ΕΜ[166]. E, dado que o ángulo ΛΕΜ é recto —pois está no semicírculo[167]—, logo, o cadrado de ΛΜ é o dobre que o de ΛΕ[168].

Asemade, dado que ΑΓ é igual a ΓΒ, ΑΒ é o dobre que ΒΓ.

Pero como ΑΒ a ΒΓ, así o cadrado de ΑΒ ó de ΒΔ[169]; logo, o cadrado de ΑΒ é o dobre que o de ΒΔ[170].

Pero foi demostrado tamén que o cadrado de ΛΜ é o dobre que o de ΛΕ. E o cadrado de ΔΒ é igual ó de ΛΕ —pois ΕΘ fíxose igual a ΔΒ—. Logo, é igual tamén o cadrado de ΑΒ ó de ΛΜ; logo, ΑΒ é igual a ΛΜ. E ΑΒ é o diámetro da esfera dada. Logo, ΛΜ é igual ó diámetro da esfera dada.

Logo, o octaedro queda rodeado pola esfera dada. E queda demostrado ó mesmo tempo que o cadrado do diámetro da

166 Proposición I, 4.
167 Proposición III, 31.
168 Proposición I, 47.
169 Proposición VI, 1; Proposición VI, 8 e Proposición VI, 16.
170 Proposición V, 11.

esfera é o dobre que o do lado do octaedro; o que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 15

***Construír un cubo, rodealo cunha esfera, como a pirámide, e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é triplo que o do lado do cubo*[171].**

Tómese AB, o diámetro da esfera dada, córtese por Γ de xeito que AΓ sexa o dobre que ΓB[172], debúxese o semicírculo AΔB sobre AB, trácese ΓΔ dende Γ en ángulo recto con AB[173], únase ΔB e tómese o cadrado EZHΘ con cada lado igual a ΔB[174]; dende E, Z, H e Θ, trácense EK, ZΛ, HM e ΘN en ángulo recto co plano do cadrado EZHΘ[175], córtense de EK, ZΛ, HM e ΘN respectivamente EK, ZΛ, HM e ΘN iguais a unha das rectas EZ, ZH, HΘ e ΘE[176], e trácense KΛ, ΛM, MN e NK; logo, queda construído o cubo ZN contido por seis cadrados iguais[177].

É preciso, agora, rodealo coa esfera dada e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é triplo que o do lado do cubo.

Pois ben, trácense KH e EH. E, dado que o ángulo KEH é recto por estar tamén KE en ángulo recto co plano EH e, evidentemente, tamén coa recta EH[178], logo, o semicírculo debuxado sobre KH pasará tamén polo punto E[179].

Asemade, dado que HZ está en ángulo recto tanto con ZΛ como con ZE, logo, tamén HZ está en ángulo recto co plano ZK[180]; en consecuencia, tamén, se trazamos ZK, estará tamén

---

171 En consecuencia, se temos un cubo inscrito nunha esfera de radio *r*, o lado do cubo é igual a $r\sqrt{4/3}$.

172 Proposición VI, 10.

173 Proposición I, 11.

174 Proposición I, 46.

175 Proposición XI, 12.

176 Proposición I, 3.

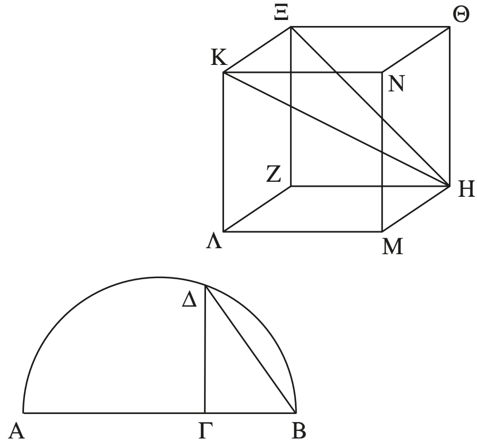
177 Definición XI, 25.

178 Definición XI, 3.

179 Proposición III, 31.

180 Proposición XI, 4.

HZ en ángulo recto con ZK; tamén, polo mesmo, o semicírculo debuxado sobre HK, asemade, pasará tamén polo punto Z.



De xeito semellante tamén pasará polos restantes puntos do cubo.

Entón, permanecendo fixo KH, se o semicírculo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse, o cubo quedará rodeado por unha esfera.

Digo agora que tamén pola dada.

Pois ben, dado que HZ é igual a ZE e que o ángulo Z é recto, logo, o cadrado de EH é o dobre que o de EZ[181]. Pero EZ é igual a EK; logo, o cadrado de EH é o dobre que o de EK; en consecuencia, o cadrado de HE xunto co de EK, é dicir, o de HK[182] é triplo que o de EK.

E, dado que AB é triplo que BΓ, mentres que, como AB a BΓ, así o cadrado de AB ó de BΔ[183], logo, o cadrado de AB é triplo que o de BΔ[184].

Pero foi demostrado que o cadrado de HK é triplo que o de KE. E KE fíxose igual a ΔB; logo, KH é igual a AB. E AB é o

[181] Proposición I, 47.
[182] Proposición I, 47.
[183] Proposición VI, 1; Proposición VI, 8 e Proposición VI, 16.
[184] Proposición V, 11.

diámetro da esfera dada; logo, tamén KH é igual ó diámetro da esfera dada.

Logo, o cubo queda rodeado pola esfera dada; e queda demostrado a un tempo que o cadrado do diámetro da esfera é triplo que o do lado do cubo; o que, xustamente era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 16

Construír un icosaedro, rodealo cunha esfera, como as figuras anteditas, e demostrar que o lado do icosaedro é unha non expresable, a chamada menor.

Tómese AB, o diámetro da esfera dada, córtese por Γ de xeito que AΓ sexa cuádruplo que ΓB[185], debúxese o semicírculo AΔB sobre AB, trácese dende Γ a liña recta ΓΔ en ángulo recto con AB[186] e únase ΔB.

Tómese o círculo EZHΘK cuxo radio sexa igual a ΔB e inscríbase no círculo EZHΘK o pentágono equilátero e equiángulo EZHΘK[187], córtense á metade as circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘK e KE[188] polos puntos Λ, M, N, Ξ e O, e trácense ΛM, NM, NΞ, ΞO, OΛ e EO.

Logo, o pentágono ΛMNΞO é tamén equilátero[189] e a recta EO, do decágono[190].

Levántense dende os puntos E, Z, H, Θ e K, en ángulo recto co plano do círculo, as rectas EΠ, ZP, HΣ, ΘT e KY[191] sendo iguais ó radio do círculo EZHΘK e trácense ΠP, PΣ, ΣT, TY, YΠ, ΠΛ, ΛP, PM, MΣ, ΣN, NT, TΞ, ΞY, YO e OΠ.

185 Proposición VI, 10.
186 Proposición I, 11.
187 Proposición IV, 11.
188 Proposición III, 30.
189 Proposición III, 29.
190 Véxase a demostración da Proposición XIII, 10.
191 Proposición XI, 12.

E, dado que tanto ΕΠ como ΚΥ están en ángulo recto co mesmo plano, logo, é paralela ΕΠ a ΚΥ[192]. Pero tamén é igual a ela; e as rectas que unen rectas iguais e paralelas polo mesmo lado son iguais e paralelas[193]. Logo, ΠΥ é igual e paralela a ΕΚ. Pero ΕΚ é do pentágono equilátero; logo, tamén ΠΥ é do pentágono equilátero inscrito no círculo ΕΖΗΘΚ.

Entón, polo mesmo, tamén tanto ΠΡ como ΡΣ, ΣΤ e ΤΥ son do pentágono equilátero inscrito no círculo ΕΖΗΘΚ; logo, o pentágono ΠΡΣΤΥ é equilátero.

E, dado que ΠΕ é dun hexágono, mentres que ΕΟ, dun decágono, e que o ángulo ΠΕΟ é recto, logo, ΠΟ é dun pentágono[194] —pois o cadrado do lado do pentágono é equivalente ó cadrado do lado do hexágono e o do decágono inscritos no mesmo círculo.

Entón, polo mesmo, tamén ΟΥ é un lado do pentágono. Pero ΠΥ é tamén do pentágono; logo, o triángulo ΠΟΥ é equilátero.

Entón, polo mesmo, tamén tanto ΠΛΡ como ΡΜΣ, ΣΝΤ e ΤΞΥ son equiláteros.

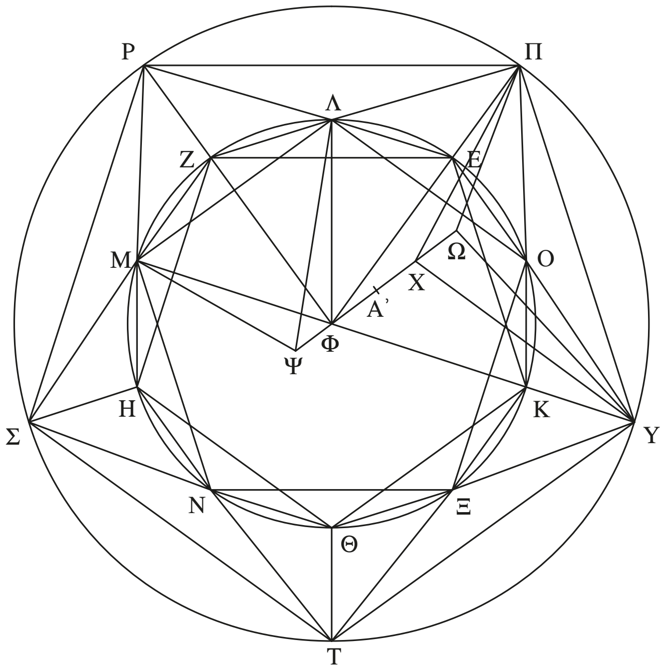
E, dado que foi demostrado que tanto ΠΛ como ΠΟ son do pentágono e tamén ΛΟ é do pentágono, logo, o triángulo ΠΛΟ é equilátero.

Entón, polo mesmo, tamén cada un dos triángulos ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ e ΞΥΟ é equilátero.

Tómese o punto Φ como centro do círculo ΕΖΗΘΚ[195]; dende Φ, levántese ΦΩ en ángulo recto co plano do círculo[196], prolónguese polo outro lado como ΦΨ, córtese ΦΧ dun hexágono e tanto ΦΨ como ΧΩ dun decágono, e trácense ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ e ΨΜ. E, dado que tanto ΦΧ como ΠΕ están en ángulo recto co plano do círculo, logo, é paralela ΦΧ a ΠΕ[197]. Pero son tamén iguais; logo, tamén ΕΦ e ΠΧ son iguais e paralelas[198].

---

192 Proposición XI, 6.
193 Proposición I, 33.
194 Proposición XIII, 10 e Proposición I, 47.
195 Proposición III, 1.
196 Proposición XI, 12.
197 Proposición XI, 6.
198 Proposición I, 33.



Pero ΕΦ é dun hexágono; logo, tamén ΠΧ é dun hexágono. E, dado que ΠΧ é dun hexágono mentres que ΧΩ, dun decágono e o ángulo ΠΧΩ é recto[199], logo, ΠΩ é dun pentágono[200]. Entón, polo mesmo, tamén ΥΩ é dun pentágono, posto que, se trazamos ΦΚ e ΧΥ, serán iguais e opostas, e ΦΚ, sendo un radio, é dun hexágono[201]; logo, ΧΥ é dun hexágono.

Pero ΧΩ é dun decágono e o ángulo ΥΧΩ é recto; logo, ΥΩ é dun pentágono[202]. Pero tamén ΠΥ é dun pentágono; logo, o triángulo ΠΥΩ é equilátero.

Entón, polo mesmo, tamén cada un dos restantes triángulos cuxas bases son as rectas ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ e ΤΥ, e o seu vértice o punto Ω, é equilátero.

---

199 Proposición I, 29.
200 Proposición XIII, 10.
201 Proposición IV, 15. Corolario.
202 Proposición III, 10.

Asemade, dado que ΦΛ é dun hexágono, mentres que ΦΨ dun decágono, e que o ángulo ΛΦΨ é recto, logo, ΛΨ é dun pentágono.

Entón, polo mesmo, se unimos ΜΦ que é dun hexágono, conclúese tamén que ΜΨ é dun pentágono.

Pero tamén ΛΜ é dun pentágono; logo o triángulo ΛΜΨ é equilátero; entón, de xeito semellante poderase demostrar que tamén cada un dos restantes triángulos cuxas bases son ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ e ΟΛ, e o seu vértice o punto Ψ, é equilátero.

Logo, queda construído un icosaedro contido por vinte triángulos equiláteros[203].

É preciso, agora, rodealo tamén coa esfera dada e demostrar que o lado do icosaedro é unha non expresable, a chamada menor[204].

Pois ben, dado que ΦΧ é dun hexágono, mentres que ΧΩ, dun decágono, logo, ΦΩ queda cortada en razón extrema e media por Χ, e o seu segmento maior é ΦΧ[205]; logo, como ΩΦ é a ΦΧ, así ΦΧ a ΧΩ. Pero ΦΧ é igual a ΦΕ, mentres que ΧΩ a ΦΨ; logo, como ΩΦ é a ΦΕ, así ΕΦ a ΦΨ. E os ángulos ΩΦΕ e ΕΦΨ son rectos; logo, se unimos a recta ΕΩ, o ángulo ΨΕΩ será recto pola semellanza dos triángulos ΨΕΩ e ΦΕΩ[206].

Entón, polo mesmo, dado que como ΩΦ é a ΦΧ, así ΦΧ a ΧΩ, mentres que ΩΦ igual a ΨΧ, e ΦΧ a ΧΠ, logo, como ΨΧ é a ΧΠ, así ΠΧ a ΧΩ. E, por iso, asemade, se unimos ΠΨ, o ángulo Π será recto; logo, o semicírculo debuxado sobre ΨΩ pasará tamén por Π[207].

E, permanecendo fixo ΨΩ, se o semicírculo, despois de facelo xirar, volve de novo ó mesmo punto de onde empezou a moverse, pasará tamén por Π e polos restantes puntos do icosaedro, e o icosaedro quedará rodeado por unha esfera.

Digo agora que tamén pola dada.

Pois ben, córtese á metade ΦΧ por Α´[208]. E, dado que a liña recta ΦΩ queda cortada en razón extrema e media por Χ e que

---

[203] Definición XI, 27.
[204] Proposición X, 76.
[205] Proposición XIII, 9.
[206] Proposición VI, 6 e Proposición VI, 8.
[207] Proposición III, 31.
[208] Proposición I, 10.

o seu segmento menor é ΩΧ, logo, o cadrado da suma de ΩΧ e a metade do segmento maior ΧΑ´ é equivalente a cinco veces o cadrado da metade do segmento maior[209]; logo, o cadrado de ΩΑ´ é cinco veces o de Α´Χ. E ΩΨ é o dobre que ΩΑ´ mentres que ΦΧ, o dobre que Α´Χ; logo, o cadrado de ΩΨ é cinco veces o de ΧΦ.

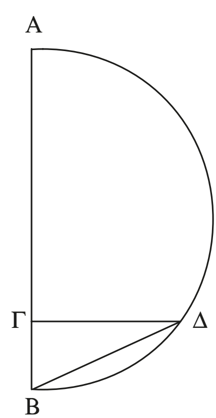
E, dado que ΑΓ é cuádruplo que ΓΒ, logo, ΑΒ é cinco veces ΒΓ. Pero, como ΑΒ a ΒΓ, así o cadrado de ΑΒ ó de ΒΔ[210]; logo, o cadrado de ΑΒ é cinco veces o de ΒΔ[211].

Pero foi demostrado tamén que o cadrado de ΩΨ é cinco veces o de ΦΧ. E ΔΒ é igual a ΦΧ —pois cada unha delas é igual ó radio do círculo ΕΖΗΘΚ—; logo, ΑΒ é igual a ΨΩ. E ΑΒ é o diámetro da esfera dada; logo, tamén ΨΩ é igual ó diámetro da esfera dada.

Logo, o icosaedro, queda rodeado pola esfera dada.

Digo, agora que o lado do icosaedro é unha non expresable, a chamada menor.

Pois, dado que o diámetro da esfera é expresable e, ó cadrado, é cinco veces o cadrado do radio do círculo ΕΖΗΘΚ, logo, é tamén expresable o radio do círculo ΕΖΗΘΚ[212]; en consecuencia, tamén o seu diámetro é expresable.



[209] Proposición XIII, 3.
[210] Proposición VI, 1; Proposición VI, 8 e Proposición VI, 16.
[211] Proposición V, 11.
[212] Definición X, 1.3 e Proposición X, 6.

Pero, se se inscribe nun círculo co diámetro expresable un pentágono equilátero, o lado do pentágono é unha non expresable, a chamada menor[213]. E o lado do pentágono é do icosaedro.

Logo, o lado do icosaedro é unha non expresable, a chamada menor.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que o diámetro da esfera ó cadrado é cinco veces o cadrado do radio do círculo a partir do cal queda debuxado o icosaedro e que o diámetro da esfera componse do lado do hexágono e de dous do decágono inscritos no mesmo círculo; o que, xustamente, era preciso demostrar[214].

PROPOSICIÓN 17

Construír un dodecaedro, rodealo cunha esfera, como as figuras anteditas, e demostrar que o lado do dodecaedro é unha non expresable, a chamada apótoma.

Tómense os dous planos ΑΒΓΔ e ΓΒΕΖ do cubo antedito[215] en ángulo recto entre si, córtense á metade cada un dos lados ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ e ΖΓ por Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν e Ξ[216], trácense ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ e ΝΞ, córtese cada unha das rectas ΝΟ, ΟΞ e ΘΠ en razón extrema e media polos puntos Ρ, Σ e Τ[217], sexan os seus segmentos maiores ΡΟ, ΟΣ e ΤΠ, levántense ΡΥ, ΣΦ e ΤΧ dende os puntos Ρ, Σ e Τ, en ángulo recto cos planos do cubo cara os lados exteriores do cubo[218], fáganse iguais a ΡΟ, ΟΣ e ΤΠ[219], e trácense ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ e ΦΥ.

---

213 Proposición XIII, 11.

214 En consecuencia, se temos un icosaedro inscrito nunha esfera de radio *r*, entón o lado do icosaedro é igual a $(r/\sqrt{5})\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$; e *r* é igual á suma do radio do círculo circunscrito ó pentágono regular de lado igual ó do icosaedro mais dúas veces o lado do decágono inscrito nese mesmo círculo.

215 Proposición XIII, 15.

216 Proposición I, 10.

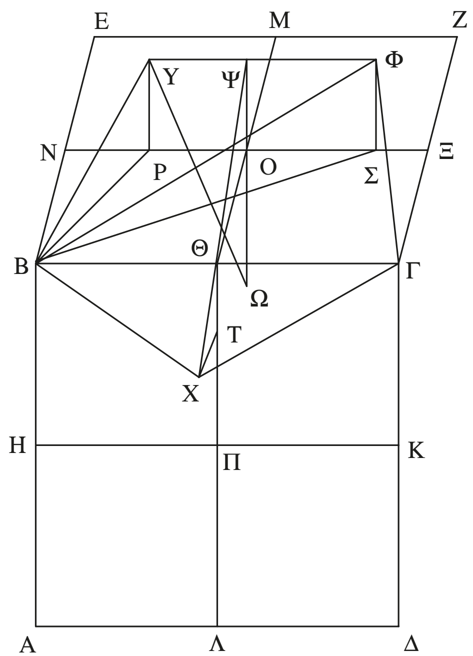
217 Proposición VI, 30.

218 Proposición XI, 11.

219 Proposición I, 3.

Digo que o pentágono ΨΒΧΓΦ é equilátero, está nun único plano e, ademais, é equiángulo.

Pois ben, trácense ΡΒ, ΣΒ e ΦΒ. E, dado que a recta ΝΟ queda cortada en razón extrema e media por Ρ e que o segmento maior é ΡΟ, logo, o cadrado de ΟΝ xunto co de ΝΡ é triplo que o de ΡΟ[220].



Pero ΟΝ é igual a ΝΒ, mentres que ΟΡ a ΡΥ; logo, o cadrado de ΒΝ xunto co de ΝΡ é triplo que o de ΡΥ. Pero o cadrado de ΒΡ é igual ó de ΒΝ xunto co de ΝΡ[221]; logo, o de ΒΡ é triplo que o de ΡΥ; en consecuencia, o cadrado de ΒΡ xunto co de ΡΥ é cuádruplo que o de ΡΥ. Pero o de ΒΥ é igual ó de ΒΡ xunto co de ΡΥ[222]; logo, o de ΒΥ é cuádruplo que o de ΥΡ; logo, ΒΥ é o dobre

220 Proposición XIII, 4.
221 Proposición I, 47.
222 Proposición I, 47.

que ΡΥ. Pero tamén é o dobre ΦΥ que ΥΡ, posto que tamén ΣΡ é o dobre que ΟΡ[223], é dicir, que ΡΥ; logo, ΒΥ é igual a ΥΦ.

Entón, de xeito semellante poderase demostrar que cada unha das rectas ΒΧ, ΧΓ e ΓΦ é igual a cada unha das rectas ΒΥ e ΥΦ.

Logo, o pentágono ΒΥΦΓΧ é equilátero.

Digo agora que está tamén nun único plano.

Pois ben, trácese ΟΨ dende Ο paralela tanto a ΡΥ como a ΣΦ[224] cara os lados exteriores do cubo, e trácense ΨΘ e ΘΧ; digo que ΨΘΧ é unha recta.

Pois, dado que ΘΠ queda cortada en razón extrema e media por Τ e o seu segmento maior é ΠΤ, logo, como ΘΠ é a ΠΤ, así ΠΤ a ΤΘ[225]. Pero ΘΠ é igual a ΘΟ, mentres que ΠΤ tanto a ΤΧ como a ΟΨ; logo, como ΘΟ é a ΟΨ, así ΧΤ a ΤΘ. E ΘΟ é paralela a ΤΧ —pois cada unha delas está en ángulo recto co plano ΒΔ[226]—, mentres que ΤΘ a ΟΨ —pois cada unha delas está en ángulo recto co plano ΒΖ—. E, se dous triángulos que teñen dous lados dun proporcionais a dous lados do outro, como ΨΟΘ e ΘΤΧ, se poñen unidos por un ángulo de xeito que os seus lados correspondentes sexan tamén paralelos, as restantes rectas estarán en liña recta[227]; logo, ΨΘ está en liña recta con ΘΧ. Pero toda recta está nun único plano[228]; logo, o pentágono ΥΒΧΓΦ está nun único plano.

Digo agora que é equiángulo.

Pois, dado que a liña recta ΝΟ queda cortada en razón extrema e media por Ρ e que o segmento maior é ΟΡ, mentres que ΟΡ é igual a ΟΣ, logo, ΝΣ queda cortada en razón extrema e media por Ο, e o segmento maior é ΝΟ[229]; logo, o cadrado de ΝΣ xunto co de ΣΟ é triplo que o de ΝΟ[230].

223 Proposición XI, 6 e Proposición I, 33.
224 Proposición I, 31.
225 Definición VI, 3.
226 Proposición XI, 6.
227 Proposición VI, 32.
228 Proposición XI, 1.
229 Proposición XIII, 5.
230 Proposición XIII, 4.

Pero NO é igual a NB, mentres que OΣ a ΣΦ; logo, o cadrado de NΣ xunto co de ΣΦ é triplo que o de NB; en consecuencia, o cadrado de ΦΣ xunto co de ΣN e NB é cuádruplo que o de NB.

Pero o cadrado de ΣB é igual ó de ΣN xunto co de NB[231]; logo, o cadrado de BΣ xunto co de ΣΦ, é dicir, o de BΦ —pois o ángulo ΦΣB é recto[232]— é cuádruplo que o de NB; logo, ΦB é o dobre que BN. Pero tamén BΓ é o dobre que BN; logo, é igual BΦ a BΓ. E, dado que as dúas rectas BY e YΦ son iguais ás dúas rectas BX e XΓ, tamén a base BΦ é igual á base BΓ, logo, o ángulo BYΦ é igual ó ángulo BXΓ[233].

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén o ángulo YΦΓ é igual a BXΓ; logo, os tres ángulos BXΓ, BYΦ e YΦΓ son iguais entre si.

Pero se tres ángulos dun pentágono equilátero son iguais entre si, o pentágono será equiángulo[234]; logo, o pentágono BYΦΓX é equiángulo.

Pero foi demostrado que tamén equilátero; logo, o pentágono BYΦΓX é equilátero e equiángulo e está sobre un único lado, BΓ, do cubo. Logo, se facemos as mesmas construcións sobre cada un dos doce lados do cubo, construirase unha figura sólida contida por doce pentágonos equiláteros e equiángulos que se chama dodecaedro[235].

É preciso agora rodeala coa esfera dada e demostrar que o lado do dodecaedro é unha non expresable, a chamada apótoma.

Pois ben, prolónguese ΨO e sexa ΨΩ; logo, OΩ topa co diámetro do cubo e córtanse á metade entre si —pois queda

231 Proposición I, 47.
232 Definición XI, 3.
233 Proposición I, 8.
234 Proposición XIII, 7.
235 Definición XI, 28.

iso demostrado no penúltimo teorema do libro undécimo[236]—. Córtense por Ω; logo, Ω é o centro da esfera que rodea o cubo e ΩO é a metade do lado do cubo.

Únase agora ΥΩ. E, dado que a liña recta NΣ queda cortada en razón extrema e media por O e que o seu segmento maior é NO, logo, o cadrado de NΣ xunto co de ΣO é triplo que o de NO[237]. Pero NΣ é igual a ΨΩ —posto que tamén NO é igual a OΩ, mentres que ΨO a OΣ—. Pero tamén, efectivamente, OΣ a ΨΥ, posto que tamén a PO; logo, o cadrado de ΩΨ xunto co de ΨΥ é triplo que o de NO. Pero o cadrado de ΥΩ é igual ó de ΩΨ xunto co de ΨΥ[238]; logo, o de ΥΩ é triplo que o de NO.

Pero tamén o cadrado do radio da esfera que rodea o cubo é triplo que o da metade do lado do cubo —pois demostrouse antes como construír un cubo, rodealo cunha esfera e demostrar que o cadrado do diámetro da esfera é triplo que o do lado do cubo[239]—. Pero, se a enteira da enteira, tamén a metade da metade; e NO é metade do lado do cubo; logo, ΥΩ é igual ó radio da esfera que rodea o cubo. E Ω é centro da esfera que rodea o cubo; logo, o punto Υ está sobre a superficie da esfera.

Entón, de xeito semellante poderemos demostrar que tamén cada un dos restantes ángulos do dodecaedro está sobre a superficie da esfera; logo, queda rodeado o dodecaedro pola esfera dada.

Digo agora que o lado do dodecaedro é unha non expresable, a chamada apótoma.

Pois ben, dado que, cortada NO en razón extrema e media, o segmento maior é PO, mentres que, cortada OΞ en razón extrema e media, o segmento maior é OΣ, logo, cortada NΞ enteira en razón extrema e media, o segmento maior é PΣ. Así[240], dado que,

[236] Proposición XI, 38.

[237] Proposición XIII, 4.

[238] Proposición I, 47.

[239] Proposición XIII, 15.

[240] O texto que vai dende aquí ata «o seu segmento maior é PΣ.», de autenticidade dubidosa para Heiberg, é a xustificación da afirmación que acaba de facer «cortada NΞ enteira en razón extrema e media, o segmento maior é PΣ.»

como NO é a OP, OP a PN, tamén os dobres —pois as partes gardan a mesma razón que os seus múltiplos iguais[241]—; logo, como NΞ a PΣ, así PΣ a NP e ΣΞ xuntos. Pero NΞ é maior que PΣ; logo, PΣ é maior que NP e ΣΞ xuntas[242]; logo, NΞ queda cortada en razón extrema e media e o seu segmento maior é PΣ.

Pero PΣ é igual a ΥΦ; logo, cortada NΞ en razón extrema e media, o segmento maior é ΥΦ. E, dado que o diámetro da esfera é expresable e que o seu cadrado é triplo que o do lado do cubo, logo, NΞ, sendo un lado do cubo, é expresable[243]. Pero se unha liña expresable se corta en razón extrema e media, cada un dos segmentos é unha non expresable apótoma[244].

Logo, ΥΦ, sendo un lado do dodecaedro, é unha non expresable apótoma.

Corolario.- Polo tanto, a partir disto é evidente que, cortado o lado do cubo en razón extrema e media, o segmento maior é o lado do dodecaedro[245]. O que, xustamente, era preciso demostrar.

PROPOSICIÓN 18

Tomar os lados das cinco figuras e comparalos entre si.

Tómese o diámetro AB da esfera dada, córtese por Γ de xeito que sexa igual AΓ a ΓB[246], e por Δ de xeito que sexa o dobre AΔ que ΔB[247]; sobre AB, debúxese o semicírculo AEB, dende Γ e Δ trácense ΓE e ΔZ en ángulo recto con AB[248], e trácense AZ, ZB e EB. E, dado que AΔ é o dobre que ΔB, logo, AB é triplo que BΔ. Logo, por conversión, BA é vez e media AΔ[249].

---

[241] Proposición V, 15.

[242] Definición V, 3.

[243] Proposición X, 6 e Definición X, 3.

[244] Proposición XIII, 6. Heiberg indica que o manuscrito *P* presenta aí un escolio que demostra o mesmo que a Proposición XIII, 6. Véxase a Nota 42 (Proposición XIII, 6).

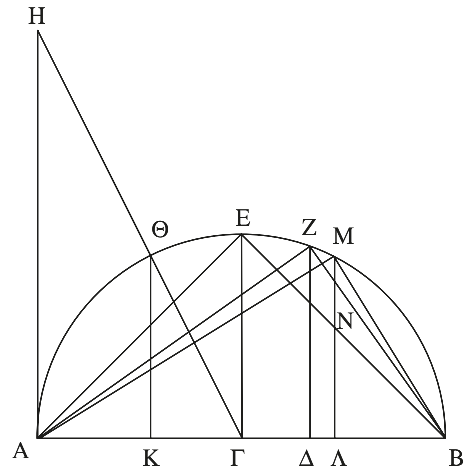
[245] En consecuencia, se temos un cubo e un dodecaedro inscritos nunha esfera de radio r entón o lado do cubo é igual a $r\sqrt{4/3}$ e o lado do dodecaedro é igual a $(r/\sqrt{3})\sqrt{(5-1)}$.

[246] Proposición I, 10.

[247] Proposición VI, 10.

[248] Proposición I, 11.

[249] Proposición V, 19. Corolario.



Pero como BA a AΔ, así o cadrado de BA ó de AZ[250] —pois o triángulo AZB é de ángulos iguais ós do triángulo AZΔ[251]—, logo, o cadrado de BA é vez e media o de AZ. Pero o cadrado do diámetro da esfera é tamén vez e media o do lado da pirámide[252]. E AB é o diámetro da esfera; logo, AZ é igual ó lado da pirámide.

Asemade, dado que AΔ é o dobre que ΔB, logo, AB é triplo que BΔ. Pero como AB a BΔ, así o cadrado de AB ó de BZ[253]; logo, o cadrado de AB é triplo que o de BZ. Pero tamén o cadrado do diámetro da esfera é triplo que o do lado do cubo[254]. E AB é o diámetro da esfera; logo, BZ é un lado do cubo.

E, dado que AΓ é igual a ΓB, logo, AB é o dobre que BΓ. Pero como AB a BΓ, así o cadrado de AB ó de BE; logo, o cadrado de AB é o dobre que o de BE. Pero tamén o cadrado do diámetro da esfera é o dobre que o cadrado do lado do octaedro[255]. E AB é o diámetro da esfera dada; logo, BE é un lado do octaedro.

Trácese, agora, AH dende o punto A en ángulo recto coa recta AB, fágase AH igual a AB, únase HΓ e, dende Θ, trácese ΘK

250 Proposición VI, 4 e Definición V, 9.
251 Proposición VI, 8.
252 Proposición XIII, 13.
253 Proposición VI, 8; Proposición VI, 4 e Definición V, 9.
254 Proposición XIII, 15.
255 Proposición XIII, 14.

perpendicular a AB[256]. E, dado que HA é o dobre que AΓ —pois HA é igual a AB— e que, como HA a AΓ, así ΘK a KΓ[257], logo, tamén ΘK é o dobre que KΓ. Logo, o cadrado de ΘK é cuádruplo que o de KΓ; logo, o cadrado de ΘK xunto co de KΓ —que é xustamente o cadrado de ΘΓ[258]— é cinco veces o de KΓ. Pero ΘΓ é igual a ΓB; logo, o cadrado de BΓ é cinco veces o de ΓK. E, dado que AB é o dobre que ΓB, parte do cal, AΔ, é o dobre que ΔB, logo, a restante, BΔ, é o dobre que a restante, ΔΓ[259]. Logo, BΓ é triplo que ΓΔ; logo, o cadrado de BΓ é nove veces o de ΓΔ. Pero o cadrado de BΓ é cinco veces o de ΓK; logo, o cadrado de ΓK é maior que o de ΓΔ. Logo, é maior ΓK que ΓΔ.

Fágase ΓΛ igual a ΓK, trácese ΛM dende Λ en ángulo recto con AB e únase MB. E, dado que o cadrado de BΓ é cinco veces o de ΓK e que AB é o dobre que BΓ, mentres KΛ o dobre que ΓK, logo, o cadrado de AB é cinco veces o de KΛ. Pero tamén o cadrado do diámetro da esfera é cinco veces o do radio do círculo a partir do cal queda debuxado o icosaedro[260]. E AB é o diámetro da esfera; logo, KΛ é o radio do círculo a partir do cal queda debuxado o icosaedro; logo, KΛ é un lado do hexágono no círculo dito[261].

E, dado que o diámetro da esfera componse do lado do hexágono e de dous do decágono inscritos no círculo dito[262], e que AB é o diámetro da esfera, mentres que KΛ un lado do hexágono e AK é igual a ΛB, logo, tanto AK como ΛB son lados do decágono inscrito no círculo a partir do cal queda debuxado o icosaedro. E, dado que ΛB é do decágono, mentres que MΛ do hexágono —pois é igual a KΛ, posto que tamén o é a ΘK, pois distan o mesmo do centro[263]— e que cada unha das rectas ΘK e KΛ é o dobre que KΓ, logo, MB é do pentá-

256 Proposición I, 12.
257 Proposición VI, 4.
258 Proposición I, 47.
259 Proposición V, 5.
260 Proposición XIII, 16. Corolario.
261 Proposición IV, 15. Corolario.
262 Proposición IV, 15. Corolario.
263 Proposición III, 14.

gono[264]. Pero o lado do pentágono é o do icosaedro[265]; logo, MB é do icosaedro.

E, dado que ZB é un lado do cubo, córtese en razón extrema e media por N, e sexa NB o segmento maior; logo, NB é un lado do dodecaedro[266].

E, dado que foi demostrado que o cadrado do diámetro da esfera é unha vez e media o do lado AZ da pirámide, mentres que é o dobre que o cadrado do lado BE do octaedro e triplo que o cadrado do lado ZB do cubo, logo, das partes que o cadrado do diámetro da esfera ten seis, desas, o cadrado do lado da pirámide ten catro, o do lado do octaedro tres e o do lado do cubo, dúas. Logo, o cadrado do lado da pirámide é catro terzos do cadrado do lado do octaedro e o dobre que o cadrado do do cubo, e o cadrado do lado do octaedro é vez e media o cadrado do do cubo. Entón, os lados ditos das tres figuras, quero dicir, da pirámide, do octaedro e do cubo, están entre si en razón expresable. Pero os dous restantes, quero dicir, o do icosaedro e o do dodecaedro, nin entre si nin coas anteditas están en razón expresable —pois son non expresables, unha menor[267], outra apótoma[268].

Que o lado MB do icosaedro é maior que NB do dodecaedro poderemos demostralo así:

Pois, dado que o triángulo ZΔB é de ángulos iguais ós do triángulo ZAB[269], proporcionalmente, como ΔB é a BZ, así BZ a BA[270]. E, dado que tres rectas son proporcionais, como a primeira é a terceira, así o cadrado da primeira ó da segunda[271]; logo, como ΔB é a BA, así o cadrado de ΔB ó de BZ; logo, por inversión, como AB a BΔ, así o cadrado de ZB ó de BΔ[272]. Pero AB é triplo que BΔ; logo, o cadrado de ZB é triplo que o de BΔ. Pero tamén o cadrado de AΔ é cuádruplo que o de ΔB —pois AΔ é o dobre

264 Proposición I, 47 e Proposición XIII, 10.
265 Proposición XIII, 16.
266 Proposición XIII, 17. Corolario.
267 Proposición XIII, 16.
268 Proposición XIII, 17.
269 Proposición VI, 8.
270 Proposición VI, 4.
271 Definición V, 9.
272 Proposición V, 7. Corolario.

que ΔB—, logo, o cadrado de AΔ é maior que o de ZB; logo, AΔ é maior que ZB; logo, AΛ é moito maior que ZB. E, cortada AΛ en razón extrema e media, o segmento maior é KΛ —posto que ΛK é do hexágono e KA do decágono[273]— e, cortada ZB en razón extrema e media, o segmento maior é NB; logo, KΛ é maior que NB. Pero KΛ é igual a ΛM; logo, ΛM é maior que NB. Logo, MB, que é un lado do icosaedro, é moito maior que NB, que é un lado do dodecaedro; o que, xustamente, era preciso demostrar[274].

***Digo agora que, ademais das cinco figuras ditas, non se construirá outra figura contida por figuras equiláteras e equiángulas iguais entre si*[275].**

Pois con dous triángulos ou, en xeral, con dous planos, non se constrúe un ángulo sólido[276]. O da pirámide con tres trián-

---

[273] Proposición XIII, 9.

[274] En consecuencia, se temos unha esfera de radio *r*, o lado do tetraedro, $r\sqrt{8/3}$; octaedro, $r\sqrt{2}$; cubo, $r\sqrt{4/3}$; icosaedro, $(r/\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; e dodecaedro, $(r/\sqrt{3})(\sqrt{5}-1)$; inscritos na esfera, satisfán: $r\sqrt{8/3} > r\sqrt{2} > r\sqrt{4/3} > (r/\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}} > (r/\sqrt{3})(\sqrt{5}-1)$.

[275] A afirmación dalgúns autores de que o obxectivo fundamental de Euclides era pechar os *Elementos* coa proba da existencia de só cinco Corpos Platónicos non parece sustentarse na realidade xa que só unha pequena parte dos *Elementos* ten relación cos sólidos platónicos –poliedros convexos cuxas caras son polígonos equiláteros e equiángulos iguais e cuxos vértices son iguais–. Considérase que foi Pitágoras quen descubriu os coñecidos posteriormente como sólidos platónicos, aínda que algunhas fontes atribúen o octaedro e o icosaedro a Teeteto, matemático contemporáneo de Platón. Tamén se atribúe a Pitágoras unha suposta asociación entre o tetraedro, o cubo, o octaedro e o icosaedro e os catro elementos naturais primarios, lume, terra, aire e auga. Platón, no seu diálogo *Timeo*, fai unha descrición das catro figuras posibles a partir da unión de diferente número de triángulos equiláteros -54d e ss.-; sobre a quinta figura, o dodecaedro, di que «ó haber aínda unha quinta estrutura, o deus utilizouna para o universo dando remate a súa obra» - *Timeo*, 55c-. A continuación -*Timeo*, 55d e ss.-, despois de indicar que outros poden soster algo diferente, asocia as figuras descritas cos catro elementos utilizando o criterio da mobilidade, o tamaño e a agudeza: «Hai que deixar iso e debemos asignar os tipos de figuras nacidos agora do razoamento ó lume, á terra, á auga e ó aire. Deamos a figura cúbica á terra -pois, dos catro tipos, a terra é a máis inmóbil e, dos corpos, a máis moldeable...-; se asociamos iso -a figura cúbica- á terra, salvamos o razoamento lóxico, e, asemade, dos restantes, o tipo máis difícil de mover, á auga; o máis fácil de mover, ó lume; e o intermedio, ó aire; o corpo máis pequeno, ó lume; o máis grande, á auga; e o intermedio, ó aire; por outra parte, o máis agudo, ó lume; o segundo, ó aire; e o terceiro, á auga». Neste libro XIII, Euclides inscribe cada un destes cinco poliedros regulares nunha esfera –Proposición XIII, 13 a Proposición XIII, 17– calculando a razón da aresta do sólido co radio da esfera circunscrita; compara entre si as arestas dos cinco poliedros –Proposición XIII, 18– e acaba cun extraordinario remate final, non incluído no enunciado, probando que «ademais das cinco figuras ditas, non se construirá outra figura contida por figuras equiláteras e equiángulas iguais entre si.»

[276] Definición XI, 11.

gulos, o do octaedro con catro, o do icosaedro con cinco; e non haberá ángulo sólido contido por seis triángulos equiláteros e equiángulos construídos nun único punto, —pois sendo o ángulo do triángulo equilátero dous terzos dun recto, os seis serán iguais a catro rectos; o que é, sen dúbida, imposible, pois todo ángulo sólido é contido por menos de catro ángulos rectos[277].

Polo mesmo, entón, tampouco se constrúe un ángulo sólido con máis de seis ángulos planos.

E o ángulo do cubo está contido por tres cadrados; pero por catro, imposible —pois, asemade, serán catro rectos—. E o do dodecaedro, por tres pentágonos equiláteros e equiángulos; pero por catro, imposible —pois sendo o ángulo do pentágono equilátero un recto e un quinto[278], os catro ángulos serán maiores que catro rectos; o que é, sen dúbida, imposible—. E, pola mesma imposibilidade, un ángulo sólido tampouco será contido por outras figuras poligonais.

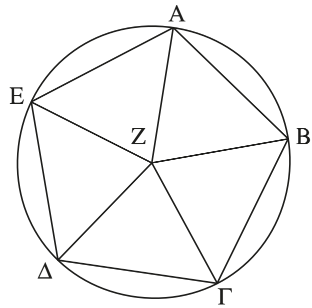
Logo, ademais das cinco figuras ditas non se poderá construír outra figura sólida contida por figuras equiláteras e equiángulas; o que, xustamente, era preciso demostrar.

Lema

Que o ángulo do pentágono equilátero e equiángulo é un recto e un quinto cómpre demostralo así:

Pois ben, sexa o pentágono equilátero e equiángulo ΑΒΓΔΕ, circunscríbase a el o círculo ΑΒΓΔΕ[279], tómese o seu centro Ζ[280] e trácense ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ e ΖΕ. Logo, cortan á metade os ángulos do pentágono Α, Β, Γ, Δ e Ε[281].

[277] Proposición XI, 21.
[278] Lema que segue a esta Proposición XIII, 18.
[279] Proposición IV, 14.
[280] Proposición III, 1.
[281] Proposición I, 8.



E, dado que os cinco ángulos de Z son iguais a catro rectos e son iguais, logo, un deles, como AZB, é un recto menos un quinto; logo, os restantes, ZAB e ABZ[282], son un recto e un quinto[283].

Pero ZAB é igual a ZBΓ; logo, o ángulo enteiro ABΓ do pentágono é un recto e un quinto; o que, xustamente, era preciso demostrar.

[282] Véxase a Nota dos tradutores sobre as expresións de Euclides para o concepto de suma.

[283] Proposición I, 32.

A marca tipográfica desta colección procede da viñeta utilizada por Gonzalo Rodríguez de la Pasera no deseño do *Missale Auriense*, un dos primeiros libros impresos en Galicia, realizado en Monterrei en 1493.

UNIVERSIDADE DE
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Fundación BBVA