

JOSÉ MIGUEL BALADO ALVES

**VARIETADES DE RIEMANN
ISOCURVADAS**

**152a
2022**

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

JOSÉ MIGUEL BALADO ALVES

VARIETADES DE RIEMANN ISOCURVADAS

152a

2022

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2022



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Variedades de Riemann isocurvadas

José Miguel Balado Alves

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen	5
Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Elementos básicos de la geometría Riemanniana	9
1.2. Estructura algebraica de la curvatura	11
1.3. Operadores diferenciales	15
2. Variedades conformes	17
2.1. Transformaciones conformes	17
2.2. Tensor de Cotton	20
2.3. Variedades localmente conformemente llanas	23
3. Difeomorfismos que preservan la curvatura	27
3.1. Consideraciones algebraicas	27
3.2. Caso no localmente conformemente llano	32
3.3. Caso localmente conformemente llano	33
4. Curvatura y métrica	39
4.1. Dimensiones 1 y 2	39
4.2. Dimensiones superiores	40
5. Dimensión 3	43
5.1. Variedades isocurvadas no isométricas	43
5.2. Curvatura y métrica en dimensión 3	49
Bibliografía	53

Resumen

Kulkarni mostró que un difeomorfismo entre dos variedades Riemannianas que preserve la curvatura seccional es necesariamente una transformación conforme en el conjunto de puntos donde dicha curvatura seccional no es constante. El análisis de los fundamentos de la geometría conforme permite concluir que, si la dimensión es mayor que tres, dicha transformación conforme ha de ser una homotecia. La situación en dimensión tres es esencialmente diferente y Yau construyó ejemplos de variedades isocurvadas que no son homotéticas. En este trabajo se aborda el estudio de los resultados anteriores, con especial dedicación a los aspectos conformes.

Abstract

Kulkarni proved that a curvature-preserving diffeomorphism between Riemannian manifolds is a conformal transformation in the closure of the set of points where the sectional curvature is not constant. The analysis of conformal geometry conclude that such a conformal transformation needs to be an homothety if the dimension is greater than three. The three dimensional case is quite different and Yau constructed examples of isocurved manifolds which are not homothetics. This thesis approaches the study of this results, with emphasis in the conformal geometry.

Introducción

Corría el año 1827 cuando Gauss consigue demostrar su famoso *Teorema Egregium*, uno de los resultados más importantes en la geometría Riemanniana, que nos asegura que la curvatura es un invariante de la métrica. En otras palabras, la curvatura de Gauss es intrínseca a la superficie. Esto no es poco, pues hasta entonces otras herramientas para la medida de la curvatura no gozaban de esta propiedad (como la curvatura media en superficies, o la curvatura y torsión de curvas diferenciables). Ya en la segunda mitad del siglo XIX, Riemann generalizó la idea de superficie y curvatura de Gauss (lo que posteriormente recibiría el nombre de variedad y tensor curvatura de Riemann) de forma que ésta aún permanece invariante por isometrías.

Dado este paso, matemáticos de principio del siglo XX comenzaron a preguntarse si se podía recorrer el camino inverso, es decir, en qué sentido la curvatura determinaría la métrica. En esta dirección se obtuvieron resultados de carácter local, como el conocido Teorema de Cartan, que imponían hipótesis nada triviales sobre la curvatura.

En esta memoria se ha realizado un estudio de la métrica y curvatura de variedades de Riemann en ese sentido, buscando un resultado más general y de carácter global. Como punto de partida situamos el trabajo de Kulkarni [2], en donde consiguió demostrar que variedades isocurvadas (aquellas entre las que existe un difeomorfismo que preserva la curvatura seccional) de dimensión mayor que 3 son globalmente isométricas en los puntos en los que dicha curvatura no es constante (puntos isotrópicos).

El trabajo de Kulkarni deja cerrado el problema para dimensiones superiores a 3. En dimensión 1 queda clara la desconexión entre métrica y curvatura: toda 1-variedad de Riemann es llana, es decir, su tensor de curvatura es nulo. Para dimensión 2, existen ejemplos explícitos de superficies con misma curvatura no isométricas. El caso 3-dimensional se convierte en el más conflictivo, aún abierto; pues si bien Yau demostró que el resultado de Kulkarni no aplica en dimensión igual a 3, bajo ciertas hipótesis el teorema sí es cierto. De un modo más preciso, la memoria se estructura como sigue.

En el Capítulo 1 se establece la notación que se usará en lo que sigue del trabajo y se introducen los diferentes objetos de la geometría de Riemann que se usarán: tensor de curvatura, tensor de Ricci, curvatura escalar, etc. Se definen también el producto de Kulkarni-Nomizu, el tensor de Schouten y tensor de Weyl, herramientas básicas en nuestro estudio, así como los principales operadores diferenciables de utilidad.

En el Capítulo 2 comenzamos estudiando las transformaciones conformes que sufren estos objetos, haciendo especial énfasis en los tensores que permanecen invariantes por estos

cambios (tensor de Weyl y Cotton). Acabamos introduciendo las variedades localmente conformemente llanas y probando como éstas quedan completamente caracterizadas por los tensores de Weyl y Cotton.

El Capítulo 3 se centra en los difeomorfismos entre variedades de Riemann que preservan la curvatura seccional, y se llega a probar uno de los principales resultados del trabajo: variedades isocurvadas son conformes en la clausura de puntos no isotrópicos. De este resultado nos valdremos para deducir la isometría global en variedades isocurvadas localmente conformemente llanas; para el resto de variedades obtenemos un resultado similar al que necesitamos añadirle la condición extra de que los puntos isotrópicos sean densos.

Con todas estas herramientas, el Capítulo 4 está enteramente dedicado a la relación entre métrica y curvatura, donde se prueba que variedades isocurvadas de dimensión mayor que 3 con métrica analítica y curvatura seccional no constante son globalmente isométricas. Además, se hace un pequeño estudio relajando la condición de analiticidad sobre la métrica. Respecto a las variedades 2-dimensionales, se demuestra que la curvatura no aporta suficiente información sobre la métrica en superficies, pues basta considerar el helicoides y la superficie de revolución de la curva logarítmica para obtener un ejemplo de variedades con misma curvatura no isométricas.

En el Capítulo 5 analizamos el caso más conflictivo, las variedades 3-dimensionales. La primera parte del capítulo se dedica a la construcción de un contraejemplo que ponga de manifiesto que el resultado de Kulkarni no se verifica de manera general para dimensión 3. En la segunda parte, buscamos hipótesis extra sobre las que si tenemos la isometría global para variedades isocurvadas, como son la compacidad, el carácter localmente conformemente llano o la completitud métrica.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos notación y conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo. Se omite alguna prueba y en su lugar se aporta referencia bibliográfica para su consulta (ver, por ejemplo, [4]).

1.1. Elementos básicos de la geometría Riemanniana

Una *variedad de Riemann* es una variedad diferenciable M de dimensión n dotada de una métrica, esto es, un tensor tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo. Con T_pM nos referiremos al espacio tangente a M en el punto $p \in M$ y reservamos las letras X, Y, Z, T, V para campos de vectores diferenciables sobre M (es decir, elementos de $\mathfrak{X}(M)$) a menos que se indique expresamente otro uso.

Dada (M, g) una variedad de Riemann, existe una única conexión ∇ simétrica que hace paralela a la métrica, es decir,

$$\begin{aligned} (i) \quad & \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \\ (ii) \quad & Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \end{aligned}$$

a la que nos referiremos como *conexión de Levi-Civita* ($[\cdot, \cdot]$ denota el corchete de Lie, que recordamos que actúa sobre campos de vectores como $[X, Y] = XY - YX$). Dicha conexión viene dada por la conocida fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Los coeficientes de la conexión de Levi-Civita en una carta local $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ se denominan *símbolos de Christoffel*, que escribimos Γ_{ij}^k , es decir,

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Estos están determinados a su vez en términos de la métrica, como presentamos a continuación:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \{ \partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij} \}.$$

Curvatura

A la aplicación $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

que define un campo de tensores de tipo $(1, 3)$, la llamaremos *endomorfismo curvatura de Riemann*. Su expresión en coordenadas puede darse en términos de los símbolos de Christoffel del siguiente modo:

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_{p=1}^n (\Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l).$$

En ocasiones, será conveniente usar el tensor de tipo $(0, 4)$ asociado,

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T),$$

al que nos referiremos por *tensor curvatura de Riemann*.

Debido a que no siempre es fácil trabajar con tensores de tipo $(0, 4)$, es conveniente construir tensores más simples que guarden parte de la información que nos aporta el tensor de curvatura. Para ello construimos el *tensor de Ricci*, que denotaremos por ρ , como el tensor de tipo $(0, 2)$ resultante de contraer el endomorfismo de curvatura R en el primer y último índice, es decir,

$$\rho(X, Y) = (C_4^1 R)(X, Y),$$

que podemos expresar en coordenadas como $\rho_{jk} = R_{ijk}{}^i$. Al tensor de tipo $(1, 1)$ asociado, Ric , determinado por $g(\text{Ric}(X), Y) = \rho(X, Y)$, nos referiremos como *operador de Ricci*. La curvatura escalar, τ , es la función definida como la traza del operador de Ricci:

$$\tau = \text{tr}_g \text{Ric},$$

es decir, $\tau = \rho_j{}^j = R_{ij}{}^{ji}$. Otro tensor de utilidad es el llamado *tensor de Ricci sin traza*, que denotaremos por $\mathring{\rho}$ y que resulta

$$\mathring{\rho} = \rho - \frac{\tau}{n} g,$$

y escribiremos $\mathring{\text{Ric}}$ para su operador de tipo $(1, 1)$ asociado.

Dado Π un subespacio 2-dimensional de $T_p M$ y $\{X, Y\}$ una base de Π , definimos la *curvatura seccional* K correspondiente al plano Π en el punto $p \in M$ como

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Se puede comprobar que la definición de la curvatura seccional no depende de la base elegida, además, de la anterior expresión deducimos que la curvatura seccional es constante $K = c$ en un punto $p \in M$ si y solo si el tensor curvatura de Riemann en dicho punto es de la forma $R_p = cR_p^0$, donde $R_p^0(X, Y, Z, T) = g_p(X, T)g_p(Y, Z) - g_p(X, Z)g_p(Y, T)$.

1.2. Estructura algebraica de la curvatura

El tensor de curvatura nace motivado por su aplicación geométrica, no obstante, goza de ciertas propiedades de carácter puramente algebraico. A este estudio dedicamos esta sección, así como a las aplicaciones a la geometría Riemanniana que de él se deducen.

Se puede ver que el tensor curvatura de Riemann posee las siguientes propiedades de simetría:

1. $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T)$
2. $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$
3. $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$
4. $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$.

Dado V un espacio vectorial arbitrario dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, llamamos *tensor curvatura algebraico* a cualquier tensor A de tipo $(0, 4)$ sobre V verificando las anteriores propiedades y denotamos por $\mathcal{R}(V^*)$ al espacio vectorial de los tensores curvatura algebraicos sobre V . Los conceptos de curvatura seccional algebraica K_A , tensor y operador de Ricci algebraicos (ρ_A y Ric_A), curvatura escalar τ_A y tensor y operador de Ricci sin traza ($\overset{\circ}{\rho}_A$ y $\overset{\circ}{\text{Ric}}_A$) se definen de manera análoga al caso riemanniano.

Además, el tensor curvatura construido a partir de la conexión de Levi-Civita verifica también otra propiedad. A saber, la llamada *identidad diferencial de Bianchi*:

$$\nabla_T R(X, Y, Z, V) + \nabla_Z R(X, Y, V, T) + \nabla_V R(X, Y, T, Z) = 0, \quad (1.1)$$

que podemos escribir en coordenadas como $R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;\ell} = 0$. Como consecuencia de la anterior propiedad y las identidades algebraicas, se obtienen las conocidas como *identidades contraídas de Bianchi*,

$$(C_5^1 \nabla R)(Y, Z, T) = \nabla_T \rho(Z, Y) - \nabla_Z \rho(X, T), \quad (1.2)$$

$$(C_3^1 \rho)(X) = \frac{1}{2} X \tau, \quad (1.3)$$

que en coordenadas se expresan, respectivamente,

$$R_{ijkl;^i} = \rho_{lk;l} - \rho_{jl;k}$$

$$\rho_{i\ell;^i} = \frac{1}{2} \tau_{;\ell}$$

Observación 1.1. Sea \mathcal{K} un campo de tensores de tipo (r, s) y un entorno coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ donde el campo de tensores se expresa como

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

La notación $\mathcal{K}_{j_1, \dots, j_s; \ell}^{i_1, \dots, i_r}$ expresa las componentes del campo de tensores derivada covariante de \mathcal{K} respecto a la conexión de Levi-Civita, es decir, el tensor $(r, s + 1)$ de componentes

$$\mathcal{K}_{j_1, \dots, j_s; \ell}^{i_1, \dots, i_r} = (\nabla_{\partial_{x^\ell}} \mathcal{K})(\partial_{x^{i_1}}, \dots, \partial_{x^{i_r}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s}).$$

A lo largo del trabajo, cuando se escriba $\mathcal{K}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r; \ell}$ denotará simplemente el tensor que resulta de subir índices al anterior en la componente ∂_{x^ℓ} . Siguiendo este criterio, el orden de los índices será primero el del propio tensor y después el índice de derivación.

Lo que haremos ahora será construir un operador que transforme elementos de $\Sigma^2(V^*)$ (el espacio de los tensores simétricos de tipo $(0, 2)$) en tensores curvatura algebraicos. El fin de construir un tal operador será obtener nuevas herramientas en el estudio de la métrica y curvatura.

Definición 1.2. Sea V un espacio vectorial y $h, q \in \Sigma^2(V^*)$. Definimos el tensor tipo $(0, 4)$ $h \otimes q$, llamado *producto de Kulkarni-Nomizu de h y q* , como

$$\begin{aligned} h \otimes q(X, Y, Z, T) = & h(X, T)q(Y, Z) + h(Y, Z)q(X, T) \\ & - h(X, Z)q(Y, T) - h(Y, T)q(X, Z), \end{aligned}$$

cuya expresión en coordenadas es la siguiente:

$$(h \otimes q)_{ijkl} = h_{il}q_{jk} + h_{jk}q_{il} - h_{ik}q_{jl} - h_{jl}q_{ik}.$$

De la propia definición se deduce la conmutatividad del producto y la ratificación de las propiedades del tensor curvatura algebraico. Además, cabe señalar que cualquier métrica o producto escalar es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$, por lo que podemos realizar su producto de Kulkarni-Nomizu, obteniendo $\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle = 2R^0$; además su tensor de Ricci tomará la forma $\rho_{\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle} = 2(n - 1)\langle \cdot, \cdot \rangle$. El siguiente Lema nos muestra otras dos propiedades de utilidad.

Lema 1.3. Sea V un espacio vectorial con $\dim V = n$ dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea h un tensor simétrico tipo $(0, 2)$ en V , S un tensor curvatura algebraico en V , ρ su tensor de Ricci y $tr_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ la traza de un operador respecto al producto escalar. Se tiene:

1. $\rho_{h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle} = (n - 2)h + (tr_{\langle \cdot, \cdot \rangle} h)\langle \cdot, \cdot \rangle$,
2. $\langle \langle S, h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \rangle = 4\langle \langle \rho_S, h \rangle \rangle$.

Demostración. Para el apartado 1, necesitamos convertir el producto de Kulkarni-Nomizu en un tensor tipo $(1, 3)$ para poder calcular el tensor de Ricci asociado. Para ello subimos índices en la última componente y desarrollando en un sistema local ortonormal de coordenadas obtenemos

$$\begin{aligned} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell}^k &= \langle \cdot, \cdot \rangle^{km} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell m} \\ &= \langle \cdot, \cdot \rangle^{km} (h_{im}\langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell} + h_{j\ell}\langle \cdot, \cdot \rangle_{im} - h_{il}\langle \cdot, \cdot \rangle_{jm} - h_{jm}\langle \cdot, \cdot \rangle_{i\ell}), \end{aligned}$$

contrayendo ahora en el primer y último índice

$$\begin{aligned}
\rho_{h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell}} &= (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell}{}^i = \langle \cdot, \cdot \rangle^{im} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell m} \\
&= \langle \cdot, \cdot \rangle^{im} (h_{im} \langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell} + h_{j\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle_{im} - h_{i\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle_{jm} - h_{jm} \langle \cdot, \cdot \rangle_{i\ell}) \\
&= h_i{}^i \langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell} + h_{j\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle^{im} \langle \cdot, \cdot \rangle_{im} - h_{j\ell} - h_{j\ell} \\
&= h_i{}^i \langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell} + (n-2)h_{j\ell}
\end{aligned}$$

que es la expresión en coordenadas de 1.

En el apartado 2, $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ denota la extensión del producto escalar sobre tensores, dada por $\langle \langle S, h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \rangle = S_{ij\ell k} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)^{ij\ell k}$. Si tomamos la expresión del lado izquierdo de la igualdad en un sistema de coordenadas ortonormal, entonces

$$\begin{aligned}
(h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)^{ij\ell k} &= (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{mnr s} \langle \cdot, \cdot \rangle^{mi} \langle \cdot, \cdot \rangle^{nj} \langle \cdot, \cdot \rangle^{r\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle^{sk} \\
&= (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{mnr s} \delta_m^i \delta_n^j \delta_r^\ell \delta_s^k = (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell k}.
\end{aligned}$$

Y por tanto $\langle \langle S, h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \rangle = \sum_{i,j,l,k=1}^n S_{ij\ell k} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell k}$, que desarrollando en el producto de Kulkarni-Nomizu se transforma en

$$\begin{aligned}
S_{ij\ell k} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell k} &= S_{ij\ell k} h_{ik} \langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell} + S_{ij\ell k} h_{j\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle_{ik} \\
&\quad - S_{ij\ell k} h_{i\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle_{jk} - S_{ij\ell k} h_{jk} \langle \cdot, \cdot \rangle_{i\ell}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las simetrías del tensor curvatura algebraico, podemos reescribir

$$\begin{aligned}
S_{ij\ell k} (h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle)_{ij\ell k} &= S_{\ell k i j} h_{ik} \langle \cdot, \cdot \rangle_{j\ell} + S_{ij\ell k} h_{j\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle_{ik} \\
&\quad + S_{j i \ell k} h_{i\ell} \langle \cdot, \cdot \rangle_{jk} + S_{ij\ell k} h_{jk} \langle \cdot, \cdot \rangle_{i\ell} \\
&= S_{\ell k i j} h_{ik} \delta_j^\ell + S_{ij\ell k} h_{j\ell} \delta_i^k \\
&\quad + S_{j i \ell k} h_{i\ell} \delta_j^k + S_{ij\ell k} h_{jk} \delta_i^\ell.
\end{aligned}$$

De esta manera llegamos a que $\langle \langle S, h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \rangle = S_{j k i j} h_{ki} + S_{i j \ell i} h_{j\ell} + S_{j i \ell j} h_{i\ell} + S_{i j k i} h_{jk} = 4S_{ijki} h_{jk}$, como estábamos buscando. \square

Nuestro objetivo ahora es, valiéndonos de las propiedades algebraicas del tensor de curvatura, introducir el tensor de Weyl sobre variedades de Riemann. Para ello, mostramos primero unos resultados preliminares y llegaremos a probar que en dimensión 3 el tensor de Weyl es idénticamente nulo. Veremos en capítulos posteriores todo el partido que le podemos sacar a este tensor, como por ejemplo su invariancia por transformaciones conformes, propiedad clave en la demostración del resultado central del trabajo.

Lema 1.4. [4] *Sea V un espacio vectorial de dimensión n , entonces*

$$\dim \mathcal{R}(V^*) = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

Proposición 1.5. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 3$ dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La aplicación $G : \Sigma^2(V^*) \rightarrow \mathcal{R}(V^*)$ definida por*

$$G(h) = \frac{1}{n-2} \left(h - \frac{\text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(h)}{2(n-1)} \langle \cdot, \cdot \rangle \right) \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle$$

es inversa por la derecha del tensor de Ricci ρ y su imagen es el complemento ortogonal del núcleo de ρ en $\mathcal{R}(V^)$.*

Demostración. Si calculamos el tensor de Ricci asociado al tensor curvatura algebraico $G(h)$, se tiene

$$\rho_{G(h)} = \frac{1}{n-2} \rho_{h \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle} - \frac{\text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(h)}{2(n-1)(n-2)} \rho_{\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle},$$

y si usamos el Lema 1.3 y que $\rho_{\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle} = 2(n-1) \langle \cdot, \cdot \rangle$ tenemos que efectivamente $\rho_G = Id$, por tanto G es inyectiva y ρ sobreyectivo, así

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(\rho)^\perp &= \text{codim} \text{Ker}(\rho) = \dim \mathcal{R}(V^*) - \dim \text{Ker}(\rho) \\ &= \dim \Sigma^2(V^*) = \dim \text{Im}(G). \end{aligned}$$

Además $\text{Ker}(\rho) \subset \text{Im}(G)^\perp$ pues si $T \in \text{Ker}(\rho)$, por el Lema 1.3 $\langle \langle T, G(h) \rangle \rangle = 0$, y por tener igual dimensión $\text{Ker}(\rho) = \text{Im}(G)^\perp$, de donde deducimos el resultado. \square

Corolario 1.6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión 3. Entonces $G : \Sigma^2(V^*) \rightarrow \mathcal{R}(V^*)$ es un isomorfismo.*

Demostración. G es inyectiva por la Proposición 1.5 y $\dim \mathcal{R}(V^*) = 6$ por el Lema 1.4. Además $\dim \Sigma^2(V^*) = 6$ también (combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2), luego G es un isomorfismo. \square

Definimos ahora el llamado *tensor de Schouten* sobre una variedad de Riemann (M, g) , un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ dado por

$$P = \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g \right).$$

El *tensor de Weyl* es entonces el tensor tipo $(0, 4)$ que resulta

$$W = R - P \otimes g.$$

Notar que apoyándonos en la Proposición 1.5, $W = R - G(\rho)$. A partir de esto la demostración del siguiente resultado es directa.

Proposición 1.7. *Para toda variedad de Riemann (M, g) de dimensión $n \geq 3$, el tensor de Ricci asociado al tensor de Weyl es cero y $R = W + P \otimes g$ es la descomposición ortogonal de R correspondiente a $\mathcal{R}(V^*) = \text{Ker}(\rho) \oplus \text{Ker}(\rho)^\perp$.*

Corolario 1.8. *En toda variedad de Riemann (M, g) de dimensión 3, el tensor de Weyl es cero.*

Demostración. Por el Corolario 1.6 sabemos que G es un isomorfismo en dimensión 3. Dado que $\rho_G = Id$ por la Proposición 1.5, deducimos que ρ es también un isomorfismo. Como $\rho(W) = 0$ por la Proposición 1.7, necesariamente $W = 0$. \square

1.3. Operadores diferenciales

En esta sección introducimos los principales operadores diferenciales sobre funciones definidas en variedades de Riemann que estaremos usando a lo largo del trabajo. En todo momento consideramos (M, g) una variedad de Riemann y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Gradiente

Definimos el *gradiente de f* como el campo de vectores que resulta de subir índices al covector df . Lo denotamos como ∇f y está caracterizado como el único campo de vectores que para $X \in \mathfrak{X}(M)$ verifica

$$df(X) = g(\nabla f, X).$$

En coordenadas locales el gradiente de f se expresa $(\nabla f)_j = g^{ij} \partial_i f$; cabe notar que las componentes del gradiente en un sistema de coordenadas normales coinciden con las de la 1-forma df en el punto base de dicho sistema coordenado.

Hessiano

Dados X, Y campos de vectores arbitrarios, definimos el *hessiano de f* como el tensor de tipo $(0, 2)$ dado por

$$H_f(X, Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)(f).$$

La expresión en coordenadas toma la forma $(H_f)_{ij} = f_{;ij}$, donde $f_{;ij} = \partial_j \partial_i f - \Gamma_{ji}^k \partial_k f$, y en particular en un sistema de coordenadas normales $f_{;ij} = \partial_j \partial_i f$ en el punto base de dichas coordenadas. Equivalentemente, podemos considerar el tensor $(1, 1)$ relativo a H_f , que denotamos por h_f y resulta ser el único operador que verifica

$$g(h_f(X), Y) = H_f(X, Y).$$

Resulta además que $h_f(X) = \nabla_X \nabla f$ y en coordenadas locales se puede escribir $(h_f)_i^j = (H_f)_{ik} g^{jk}$. De hecho, dado que $(\nabla_X df)(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)(f)$, podemos reescribir el hessiano como $H_f = \nabla(df)$.

Laplaciano

Definimos el *laplaciano de f* , Δf , como la función diferenciable definida por

$$\Delta f = tr_g(h_f),$$

que podemos reescribir $\Delta f = (H_f)_{ik} g^{ik}$.

Divergencia

Definimos la divergencia de un campo de vectores X como la función dada por

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X),$$

que podemos expresar localmente como

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i),$$

donde $\{E_i\}$ es una base local ortonormal de campos de vectores en M . En general, si T es un campo de tensores de tipo $(0, s)$, definimos la r -divergencia como el campo de tensores tipo $(0, s - 1)$ dado por

$$(\operatorname{div}_r T)(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} T)(X_1, \dots, X_{r-1}, E_i, X_r, \dots, X_{s-1}).$$

Observación 1.9. A continuación se presentan los dominios de acción de cada uno de los operadores anteriores.

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$h_f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\Delta : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$$

$$\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty$$

Donde se tiene la relación

$$\Delta = \operatorname{div} \circ \nabla.$$

Capítulo 2

Variedades conformes

En este capítulo estudiaremos la geometría Riemanniana conforme. Una aplicación conforme entre variedades de Riemann es una función diferenciable $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ de forma que $f^*(\tilde{g}) = e^{2\varphi}g$, donde $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable.

Diremos que dos variedades (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) son conformes (también conformemente equivalentes o de métricas conformes) si existe un difeomorfismo conforme entre ellas.

Ejemplo 2.1. Consideramos por un lado la esfera menos el polo norte, $S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$, dotada por la métrica inducida como variedad embebida en \mathbb{R}^3 . Por otro lado, tomamos el plano euclídeo. Estas variedades son conformes mediante la proyección estereográfica.

2.1. Transformaciones conformes

Una ventaja que nos aporta tener variedades conformemente equivalentes, es que podemos relacionar los diferentes objetos de ambas. Es decir, conociendo elementos básicos de (M, g) podemos determinar enteramente los de su variedad conforme (\tilde{M}, \tilde{g}) . Los resultados siguientes muestran como se transforman los objetos geométricos que venimos estudiando mediante la acción de difeomorfismos conformes.

Lema 2.2. Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n , y sea $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ una métrica conforme a g . Si ∇ y $\tilde{\nabla}$ denotan las conexiones de Levi-Civita de g y \tilde{g} respectivamente, entonces

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (X\varphi)Y + (Y\varphi)X - g(X, Y)\nabla\varphi.$$

En coordenadas locales, los símbolos de Christoffel de las dos conexiones están relacionados por

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \partial_i\varphi\delta_j^k + \partial_j\varphi\delta_i^k - g^{kl}\partial_l\varphi g_{ij}.$$

Demostración. La formula de Koszul para g nos dice

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Usando esta fórmula para la métrica \tilde{g} , obtenemos

$$2e^{2\varphi}g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = X(e^{2\varphi}g(Y, Z)) + Y(e^{2\varphi}g(X, Z)) - Z(e^{2\varphi}g(X, Y)) \\ + e^{2\varphi}g([Z, X], Y) + e^{2\varphi}g([Z, Y], X) + e^{2\varphi}g([X, Y], Z),$$

y desarrollando los tres primeros sumandos de la forma $X(e^{2\varphi}g(Y, Z)) = 2(X\varphi)e^{2\varphi}g(Y, Z) + e^{2\varphi}Xg(Y, Z)$ llegamos a que

$$2e^{2\varphi}g(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z) = 2e^{2\varphi}\{(X\varphi)g(Y, Z) + (Y\varphi)g(X, Z) - (Z\varphi)g(X, Y)\}$$

de donde se sigue el resultado teniendo en cuenta que $Z\varphi = g(\nabla\varphi, Z)$.

Para la segunda parte, el resultado es directo tras usar la expresión de los símbolos de Christoffel en coordenadas locales para \tilde{g} y desarrollar:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{kl}\{\partial_i\tilde{g}_{jl} + \partial_j\tilde{g}_{il} - \partial_l\tilde{g}_{ij}\} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\varphi}g^{kl}\{2\partial_i\varphi e^{2\varphi}g_{jl} + e^{2\varphi}\partial_i g_{jl} + 2\partial_j\varphi e^{2\varphi}g_{il} \\ &\quad + e^{2\varphi}\partial_j g_{il} - 2\partial_l\varphi e^{2\varphi}g_{ij} - e^{2\varphi}\partial_l g_{ij}\} \\ &= g^{kl}\{\partial_i\varphi g_{jl} + \partial_j\varphi g_{il} - \partial_l\varphi g_{ij}\} + \frac{1}{2}\{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\} \\ &= \Gamma_{ij}^k + \partial_i\varphi\delta_j^k + \partial_j\varphi\delta_i^k - g^{kl}\partial_l\varphi g_{ij}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n y $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Si $Ry\tilde{R}$ denotan los endomorfismos de curvatura de Riemann para las métricas g y \tilde{g} , se tiene:*

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + H_\varphi(X, Z)Y - H_\varphi(Y, Z)X \\ &\quad + g(X, Z)h_\varphi(Y) - g(Y, Z)h_\varphi(X) \\ &\quad + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y \\ &\quad - \|\nabla\varphi\|^2\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &\quad + \{(X\varphi)g(Y, Z) - (Y\varphi)g(X, Z)\}\nabla\varphi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Demostración. Se sigue del Lema 2.2 aplicando dos veces la transformación conforme de la conexión de Levi-Civita a los términos de la forma $\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X\{\nabla_Y Z + Y(\varphi)Z + Z(\varphi)Y - g(Y, Z)\nabla\varphi\} \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + X(\varphi)\nabla_Y Z + \nabla_Y Z(\varphi)X - g(X, \nabla_Y Z)\nabla\varphi \\ &\quad + \nabla_X(Y(\varphi)Z) + X(\varphi)Y(\varphi)Z + Y(\varphi)Z(\varphi)X - g(X, Y(\varphi)Z)\nabla\varphi \\ &\quad + \nabla_X(Z(\varphi)Y) + X(\varphi)Z(\varphi)Y + Z(\varphi)Y(\varphi)X - g(X, Z(\varphi)Y)\nabla\varphi \\ &\quad - \nabla_X(g(Y, Z)\nabla\varphi) - X(\varphi)g(Y, Z)\nabla\varphi - g(Y, Z)\nabla\varphi(\varphi)X + g(X, g(Y, Z)\nabla\varphi)\nabla\varphi \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta las relaciones $\nabla\varphi(\varphi) = \|\nabla\varphi\|^2$ y $X(e^{2\varphi}) = 2(X\varphi)e^{2\varphi}$. □

Observación 2.4. La expresión de la transformación conforme del tensor de curvatura puede simplificarse si usamos el producto de Kulkarni-Nomizu. Si desarrollamos en coordenadas la igualdad (2.1) y tomando la Definición 1.2 obtenemos:

$$\tilde{R} = e^{2\varphi}(R - H_\varphi \otimes g + (d\varphi \otimes d\varphi) \otimes g - \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2(g \otimes g)).$$

Lema 2.5. Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n y $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Si $\tilde{\rho}$, $\tilde{\tau}$ y $\tilde{\rho}$ denotan el tensor de Ricci, la curvatura escalar y el tensor de Ricci sin traza para la métrica \tilde{g} , respectivamente, se tiene:

$$\tilde{\rho}(Y, Z) = \rho(Y, Z) - (n-2)H_\varphi(Y, Z) + (n-2)(Y\varphi)(Z\varphi) - \{\Delta\varphi + (n-2)\|\nabla\varphi\|^2\}g(Y, Z), \quad (2.2)$$

$$\tilde{\tau} = e^{-2\varphi}(\tau - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-1)(n-2)\|\nabla\varphi\|^2), \quad (2.3)$$

$$\tilde{\rho}(Y, Z) = \dot{\rho}(Y, Z) - (n-2)\{H_\varphi(Y, Z) - (Y\varphi)(Z\varphi)\} + \frac{n-2}{n}\{\Delta\varphi - \|\nabla\varphi\|^2\}g(Y, Z). \quad (2.4)$$

Demostración. Calculamos el tensor de Ricci sobre la expresión (2.1) respecto a una base ortonormal $\{E_i\}$ de g :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(Y, Z) &= \rho(Y, Z) + \sum_{i=1}^n g(h_\varphi(E_i), Z)g(Y, E_i) - \sum_{i=1}^n g(h_\varphi(Y), Z)g(E_i, E_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n g(E_i, Z)g(h_\varphi(Y), E_i) - \sum_{i=1}^n g(Y, Z)g(h_\varphi(E_i), E_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (Y\varphi)(Z\varphi)g(E_i, E_i) - \sum_{i=1}^n (E_i\varphi)(Z\varphi)g(Y, E_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \|\nabla\varphi\|^2\{g(Y, Z)g(E_i, E_i) - g(E_i, Z)g(Y, E_i)\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{(E_i\varphi)g(Y, Z) - (Y\varphi)g(E_i, Z)\}g(\nabla\varphi, E_i). \end{aligned}$$

Usando $g(h_\varphi(X), Y) = H_\varphi(X, Y)$, $\sum_{i=1}^n g(E_i, E_i) = n$ y $\Delta\varphi = \text{tr}_g(h_\varphi)$, los sumandos anteriores se transforman en

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(Y, Z) &= \rho(Y, Z) + H_\varphi(Y, Z) - nH_\varphi(Y, Z) \\ &\quad + H_\varphi(Y, Z) - \Delta\varphi g(Y, Z) \\ &\quad + n(Y\varphi)(Z\varphi) - (Y\varphi)(Z\varphi) \\ &\quad - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2 g(Y, Z) \\ &\quad + \|\nabla\varphi\|^2 g(Y, Z) - (Y\varphi)(Z\varphi) \end{aligned}$$

como queríamos probar.

Para probar la segunda identidad basta aplicar $\text{tr}_{\tilde{g}}$ en la expresión (2.2) y se obtiene el resultado. La tercera identidad es consecuencia de las dos anteriores. \square

Gracias a estos resultados, la demostración del siguiente lema es directa.

Lema 2.6. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión $n \geq 3$ y $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Si \tilde{P} y \tilde{W} denotan los tensores de Schouten y Weyl para la métrica \tilde{g} , respectivamente, se tiene:*

$$\tilde{P}(Y, Z) = P(Y, Z) - H_\varphi(Y, Z) + (Y\varphi)(Z\varphi) - \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2g(Y, Z),$$

$$\tilde{W}(X, Y, Z, T) = e^{2\varphi}W(X, Y, Z, T).$$

Observación 2.7. Si consideramos el tensor tipo $(1, 3)$ que resulta de subir el último índice al tensor de Weyl de tipo $(0, 4)$, entonces en las mismas hipótesis del Lema 2.6 se tiene que $\tilde{W} = W$, ya que, en un sistema local de coordenadas se tiene

$$\tilde{W}_{ijk}{}^\ell = \tilde{W}_{ijkm}\tilde{g}^{m\ell} = e^{2\varphi}e^{-2\varphi}W_{ijkm}g^{m\ell} = W_{ijkm}g^{m\ell} = W_{ijk}{}^\ell.$$

Como ya habíamos adelantado, el tensor de Weyl de tipo $(1, 3)$ permanecerá invariante por transformaciones conformes, propiedad de la que nos valdremos repetidas veces en el trabajo.

2.2. Tensor de Cotton

Debido a que el tensor de Weyl en dimensión 3 es nulo (Corolario 1.8), no nos aporta información de utilidad, por lo que necesitamos otra herramienta sustitutiva del tensor de Weyl en dimensión 3 con propiedades similares: el tensor de Cotton.

Definimos el tensor de Cotton, C , en una variedad de Riemann (M, g) como el tensor tipo $(0, 3)$ dado por:

$$C(X, Y, Z) = (\nabla_X P)(Y, Z) - (\nabla_Y P)(X, Z),$$

donde P representa el tensor de Schouten. En coordenadas, el tensor de Cotton toma la siguiente forma:

$$C_{ijk} = P_{jk;i} - P_{ik;j}$$

donde $P_{jk;i} = (\nabla_{\partial_{x^i}} P)(\partial_{x^j}, \partial_{x^k})$ respecto a un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^n) . Directamente la definición se tiene

$$C_{ijk} + C_{kij} + C_{jki} = 0,$$

$$C_{ijk} = -C_{jik}.$$

Lo primero a comprobar para que el tensor de Cotton sea un buen suplente del tensor de Weyl en dimensión 3, es ver que conserva la propiedad de invariancia conforme.

Proposición 2.8. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión $n = 3$ y $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ para alguna función $\varphi \in C^\infty(M)$. Si C y \tilde{C} denotan los tensores de Cotton relativos a g y \tilde{g} , respectivamente, entonces $\tilde{C} = C$.*

Demostración. Tomamos la expresión en coordenadas del tensor de Cotton para \tilde{g} , $\tilde{C}_{ijk} = \tilde{P}_{jk;i} - \tilde{P}_{ik;j}$ y desarrollamos, obteniendo

$$\tilde{C}_{ijk} = \partial_i \tilde{P}_{jk} - \tilde{\Gamma}_{ij}^r \tilde{P}_{rk} - \tilde{\Gamma}_{ik}^r \tilde{P}_{jr} - \Sigma(i, j),$$

donde usamos $\Sigma(i, j)$ como el simétrico en i y en j de todos los sumandos anteriores. Recordemos ahora la transformación conforme de los símbolos de Christoffel en el Lema 2.2 y del tensor de Schouten dada en el Lema 2.6, en el que por comodidad denotaremos $\tilde{P} = P + B$ siendo $B(Y, Z) = -H_\varphi(Y, Z) + (Y\varphi)(Z\varphi) - \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 g(Y, Z)$. Teniendo esto en cuenta podemos reescribir el tensor de Cotton como

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijk} &= \partial_i P_{jk} + \partial_i B_{jk} - (\Gamma_{ij}^r + \partial_i \varphi \delta_j^r + \partial_j \varphi \delta_i^r - g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ij})(P_{rk} + B_{rk}) \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^r + \partial_i \varphi \delta_k^r + \partial_k \varphi \delta_i^r - g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik})(P_{jr} + B_{jr}) \\ &\quad - \Sigma(i, j). \end{aligned}$$

Usando ahora la expresión del tensor de Cotton, sabiendo que $P_{jk;i} = \partial_i P_{jk} - \Gamma_{ij}^r P_{rk} - \Gamma_{ik}^r P_{jr}$, conseguimos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijk} - C_{ijk} &= -\partial_i \varphi P_{jk} - \partial_j \varphi P_{ik} + g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ij} P_{rk} \\ &\quad - \partial_i \varphi P_{jk} - \partial_k \varphi P_{ji} + g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} P_{jr} \\ &\quad - (\Gamma_{ij}^r + \partial_i \varphi \delta_j^r + \partial_j \varphi \delta_i^r - g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ij}) B_{rk} \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^r + \partial_i \varphi \delta_k^r + \partial_k \varphi \delta_i^r - g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik}) B_{jr} \\ &\quad + \partial_i B_{jk} - \Sigma(i, j). \end{aligned}$$

Lo que haremos ahora será desarrollar $B_{jr} = -\partial_r \partial_j \varphi + \Gamma_{rj}^\ell \partial_\ell \varphi + \partial_j \varphi \partial_r \varphi - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr}$, calcular $\partial_i B_{jk}$ y eliminar los términos simétricos en i y j con los de $\Sigma(i, j)$.

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijk} - C_{ijk} &= -\partial_i \varphi P_{jk} + \partial_\ell \varphi g_{ik} P_j^\ell \\ &\quad - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^\ell \partial_\ell \varphi - \Gamma_{ik}^r \partial_j \varphi \partial_r \varphi + \frac{1}{2} \Gamma_{ik}^r g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} \\ &\quad - \partial_i \varphi \Gamma_{kj}^\ell \partial_\ell \varphi + \frac{1}{2} \partial_i \varphi g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jk} - g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} \partial_r \partial_j \varphi \\ &\quad + g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} \Gamma_{rj}^\ell \partial_\ell \varphi + g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} \partial_j \varphi \partial_r \varphi - \frac{1}{2} g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} \\ &\quad + \partial_\ell \varphi \partial_i \Gamma_{kj}^\ell - \frac{1}{2} \partial_i g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_i \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_i \partial_\beta \varphi g_{jr} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \partial_i g_{jr} - \Sigma(i, j). \end{aligned}$$

Por la expresión del endomorfismo de curvatura en coordenadas, $\partial_\ell \varphi \partial_i \Gamma_{kj}^\ell - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^\ell \partial_\ell \varphi - \Sigma(i, j) = \partial_\ell \varphi R_{ijk}^\ell$, además podemos reescribir $\partial_i \varphi P_{jk}$ como $\partial_\ell \varphi P_{jk} \delta_i^\ell$, por tanto la anterior

expresión queda en

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}_{ijk} - C_{ijk} - \partial_\ell \varphi R_{ijk}^\ell + \partial_\ell \varphi P_{jk} \delta_i^\ell - \partial_\ell \varphi g_{ik} P_j^\ell - \partial_\ell \varphi P_{ik} \delta_j^\ell + \partial_\ell \varphi g_{jk} P_i^\ell \\
&= -\Gamma_{ik}^r \partial_j \varphi \partial_r \varphi + \frac{1}{2} \Gamma_{ik}^r g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} \\
&\quad - \partial_i \varphi \Gamma_{kj}^\ell \partial_\ell \varphi + \frac{1}{2} \partial_i \varphi g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jk} - g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} \partial_r \partial_j \varphi \\
&\quad + g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} \Gamma_{rj}^\ell \partial_\ell \varphi + g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} \partial_j \varphi \partial_r \varphi - \frac{1}{2} g^{r\ell} \partial_\ell \varphi g_{ik} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_i g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_i \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi g_{jr} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_i \partial_\beta \varphi g_{jr} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \partial_i g_{jr} - \Sigma(i, j).
\end{aligned}$$

La parte izquierda de la igualdad, por definición del tensor de Weyl y producto de Kulkarni-Nomizu resulta ser $\tilde{C}_{ijk} - C_{ijk} - \partial_\ell W_{ijk}^\ell$. Se puede ver que la parte derecha se va anular con $\Sigma(i, j)$ por simetrías en i y j , por lo que $\tilde{C}_{ijk} = C_{ijk} + \partial_\ell W_{ijk}^\ell$, y dado que en dimensión 3 el tensor de Weyl es nulo (Corolario 1.8), tenemos el resultado. \square

Además, el tensor de Cotton está estrechamente relacionado con el tensor de Weyl, como podemos ver en el siguiente resultado.

Lema 2.9. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión $n \geq 4$, y sean W y C los tensores de Weyl y Cotton, respectivamente. Entonces*

$$(\operatorname{div}_4 W) = (n - 3)C.$$

Demostración. Si escribimos $(\operatorname{div}_4 W)$ en un sistema de coordenadas respecto a una base ortonormal, usando $W = R - P \oslash g$ tenemos que

$$W_{ijkl; i} = R_{ijkl; i} - (P \oslash g)_{ijkl; i}.$$

Apoyándonos ahora en la identidad contraída de Bianchi (1.2) $R_{ijkl; i} = \rho_{jk; \ell} - \rho_{j\ell; k}$, llegamos a

$$\begin{aligned}
W_{ijkl; i} &= \rho_{jk; \ell} - \rho_{j\ell; k} - P_{il; i} g_{jk} \\
&\quad - P_{jk; i} g_{il} + P_{ik; i} g_{j\ell} + P_{j\ell; i} g_{ik}.
\end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión, basta observar que $P_{jk; i} g_{il} = P_{jk; \ell}$ y $P_{j\ell; i} g_{ik} = P_{j\ell; k}$, usar la definición del tensor de Schouten y la identidad contraída de Bianchi (1.2), $\rho_{il; i} = \frac{1}{2} \partial_{x^\ell} S$, para obtener

$$P_{il; i} = \frac{1}{n-2} \left(\rho_{il; i} - \frac{\partial_{x^i} S}{2(n-1)} g_{il} \right) = \frac{1}{2(n-1)} \partial_{x^\ell} S,$$

y su expresión análoga para $P_{il; i}$. Sustituyendo esta igualdad en la anterior expresión y aprovechando la simetría del tensor de Schouten, llegamos a que

$$W_{ijkl; i} = (n-2)(P_{kj; \ell} - P_{\ell j; k}) - P_{kj; \ell} + P_{\ell j; k} = (n-3)C_{jkl},$$

como buscábamos. \square

Corolario 2.10. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión $n \geq 4$. Si el tensor de Weyl es nulo, también lo será el tensor de Cotton.*

Por lo tanto, parece tener sentido la elección de un tal tensor que nos aporte información allí cuando el tensor de Weyl no sea de utilidad. De hecho, como veremos más adelante, el tensor de Cotton nos servirá también para caracterizar lo que llamamos *variedad localmente conformemente llana* en dimensión 3, mientras que el tensor de Weyl lo hará en dimensiones superiores.

Por último, mostramos una característica del tensor de Cotton que usaremos más adelante, la anulación de su traza. Nótese que por la antisimetría en las dos primeras componentes, el resultado siguiente sigue siendo válido si contraemos en el segundo y tercer índice.

Proposición 2.11. *Sea (M, g) una variedad de Riemann y sea C su tensor de Cotton, entonces $C_3^1(C) = 0$.*

Demostración. Si tomamos la expresión en coordenadas

$$C_{ijk} = \frac{1}{n-2}(\rho_{jk;i} - \rho_{ik;j}) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\delta_j^k \tau_{;i} - \delta_i^k \tau_{;j})$$

y contraemos en el primer y último índice obtenemos

$$C_{ij}{}^i = \frac{1}{n-2}(\rho_{j;i}^i - \rho_{i;j}^i) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\delta_j^i \tau_{;i} - \delta_i^i \tau_{;j}).$$

Usando ahora la identidad contraída de Bianchi (1.2) llegamos a

$$\begin{aligned} C_{ij}{}^i &= \frac{1}{n-2} \left(\frac{\tau_{;j}}{2} - \tau_{;j} \right) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} (\tau_{;j} - n\tau_{;j}) \\ &= \frac{-\tau_{;j}}{2(n-2)} + \frac{(n-1)\tau_{;j}}{2(n-1)(n-2)} = 0. \end{aligned}$$

□

2.3. Variedades localmente conformemente llanas

Dentro de las variedades conformes, guardan especial interés las *variedades localmente conformemente llanas*, es decir, aquellas en las que para todo $p \in M$ existe un entorno U de p y una función diferenciable φ definida en U tal que $(U, e^{2\varphi}g)$ es una variedad de Riemann llana, esto es, que su tensor de curvatura R es idénticamente nulo.

Geoméricamente esto quiere decir que de manera local, estas variedades “se comportan” como un espacio euclídeo. No obstante, cabe señalar que aunque todo espacio euclídeo sea localmente conformemente llano (de hecho, globalmente), un espacio localmente conformemente llano no es necesariamente un espacio euclídeo (por ejemplo, el toro \mathbb{T}^n).

El fin de este capítulo es llegar a probar como los tensores de Weyl y Cotton caracterizan este tipo de variedades. Los dos siguientes corolarios nos demuestran ya una implicación.

Corolario 2.12. *Si (M, g) es una variedad de Riemann localmente conformemente llana de dimensión $n = 3$, entonces el tensor de Cotton de g es nulo.*

Demostración. Sea C el tensor de Cotton relativo a g . Por ser (M, g) localmente conformemente llana, para cada $p \in M$ existe un entorno U de p y $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $(U, e^{2\varphi}g)$ es una variedad de Riemann con tensor de curvatura $\tilde{R} = 0$. Como además el tensor de Weyl es nulo en dimensión 3, necesariamente $\tilde{P} = 0$, por lo que el tensor de Cotton \tilde{C} es nulo, y por la Proposición 2.8 también lo será C . \square

Corolario 2.13. *Si (M, g) una variedad de Riemann localmente conformemente llana de dimensión $n \geq 3$, entonces el tensor de Weyl de g es nulo.*

Demostración. Por ser (M, g) localmente conformemente llana, para cada $p \in M$ existe un entorno U y un embebimiento $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que ϕ realiza el pullback de una métrica llana en \mathbb{R}^n a una métrica de la forma $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Por ser \tilde{g} llana tiene tensor de Weyl \tilde{W} nulo, pues $\tilde{R} = 0$, luego necesariamente $W = 0$ por el Lema 2.6. \square

Para el recíproco, necesitamos valernos de la teoría de ecuaciones diferenciales. Para aligerar la demostración del teorema último, presentamos los siguientes lemas previos.

Lema 2.14. [5] *Sea W un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, y $\alpha = (\alpha_j^i) : W \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ una función diferenciable con imagen en el espacio de matrices verificando*

$$\frac{\partial \alpha_j^i}{\partial x^k} + \alpha_k^l \frac{\alpha_j^i}{\partial z^l} = \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial x^j} + \alpha_j^l \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial z^l} \quad (2.5)$$

para todo i, j, k , donde denotamos un punto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ por $(x, z) = (x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^m)$.

Entonces para cada condición inicial $(x_0, z_0) \in W$ existe un entorno U de x_0 en \mathbb{R}^n y una única función diferenciable $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (2.5) tal que $u(x_0) = z_0$.

Lema 2.15. *Sea (M, g) una variedad de Riemann, y consideramos el sistema de ecuaciones sobredeterminado*

$$\nabla \xi = A(\xi) \quad (2.6)$$

donde A es una aplicación diferenciable que lleva tensores $(0, 1)$ en tensores tipo $(0, 2)$ cumpliendo la siguiente condición de compatibilidad: para cada tensor tipo $(0, 1)$ ξ , el campo de tensores tipo $(0, 3)$ $\nabla A(\xi)$ verifica

$$A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j} = R_{jki}{}^\ell \xi_\ell. \quad (2.7)$$

Entonces para cada condición inicial $(p, \eta_0) \in T^*M$ existe una solución de (2.6) en un entorno de p verificando $\xi_p = \eta_0$.

Demostración. Sea $p \in M$ con coordenadas (x^i) , la ecuación (2.6) es equivalente a

$$\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x^j} = a_{ij}(x, \xi(x)),$$

donde $a_{ij}(x, \xi) = \Gamma_{ij}^k(x)\xi_k + A(\xi)_{ij}$. Por el lema anterior, si se verifica

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{k\ell} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_\ell} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + a_{j\ell} \frac{\partial a_{ik}}{\partial \xi_\ell} \quad (2.8)$$

tendríamos probado el resultado.

Aplicando la regla de la cadena, esta igualdad equivale a que las derivadas $\partial_k(a_{ij}(x, \xi(x)))$, tras substituir $\partial_\ell \xi_k(x)$ por $a_{k\ell}(x, \xi(x))$, sean simétricas en j y k . Dado que $\xi_{k;\ell} = \partial_\ell \xi_k - \Gamma_{k\ell}^m \xi_m$, la sustitución equivale a cambiar $A(\xi)_{k\ell}$ por $\xi_{k;\ell}$. Si desarrollamos (2.7) en términos de los símbolos de Christoffel, el lado izquierdo de la igualdad nos devuelve

$$\begin{aligned} A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j} &= \partial_k A(\xi)_{ij} - \Gamma_{ik}^m \partial_j \xi_m + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^\ell \xi_\ell \\ &\quad - \Gamma_{kj}^m \partial_m \xi_i + \Gamma_{kj}^m \Gamma_{im}^\ell \xi_\ell \\ &\quad - \partial_j A(\xi)_{ik} + \Gamma_{ji}^m \partial_k \xi_m - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{mk}^\ell \xi_\ell \\ &\quad + \Gamma_{jk}^m \partial_m \xi_i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^\ell \xi_\ell. \end{aligned}$$

Mientras, el lado derecho toma la forma

$$R_{jki}{}^\ell \xi_\ell = \partial_j \Gamma_{ki}^\ell \xi_\ell - \partial_k \Gamma_{ji}^\ell \xi_\ell + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^\ell \xi_\ell - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^\ell \xi_\ell.$$

Igualando ambas expresiones llegamos justamente a que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_k A(\xi)_{ij} - \Gamma_{ik}^m \partial_j \xi_m - \partial_j A(\xi)_{ik} + \Gamma_{ji}^m \partial_k \xi_m - \partial_j \Gamma_{ki}^\ell \xi_\ell + \partial_k \Gamma_{ji}^\ell \xi_\ell \\ &= \partial_k(a_{ij}(x, \xi(x))) - \partial_j(a_{ik}(x, \xi(x))), \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Teorema 2.16 (Weyl-Schouten). *Sea (M, g) una variedad de Riemann.*

1. *Si $\dim M \geq 4$, entonces (M, g) es localmente conformemente llana si y solo si su tensor de Weyl es cero.*
2. *Si $\dim M = 3$, entonces (M, g) es localmente conformemente llana si y solo si su tensor de Cotton es cero.*

Demostración. El Corolario 2.13 muestra que si (M, g) es localmente conformemente llana, $W = 0$. Para $n = 3$, el Corolario 2.12 nos muestra que $C = 0$.

Recíprocamente, por el Lema 2.6, si $W = 0$, entonces el tensor de Weyl asociado a la métrica $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, \tilde{W} , es también cero, por lo que $\tilde{R} = \tilde{P} \wedge \tilde{g}$ (lo mismo ocurre en dimensión 3 para el tensor de Cotton gracias). Lo que haremos será probar que en todo entorno de cada punto podemos tomar una función φ tal que $\tilde{P} = 0$, obteniendo así el resultado.

Del Lema 2.6 se sigue que $\tilde{P} = 0$ si y solo si

$$P - \nabla(d\varphi) + (d\varphi \otimes d\varphi) - \frac{1}{2}g(d\varphi, d\varphi)^2g = 0.$$

Esta ecuación la podemos escribir en la forma $\nabla(d\varphi) = A(d\varphi)$, donde A es la aplicación que lleva tensores $(0, 1)$ en tensores simétricos $(0, 2)$ dada por

$$A(\xi) = (\xi \otimes \xi) - \frac{1}{2}g(\xi, \xi)^2g + P,$$

que podemos expresar en coordenadas como

$$A(\xi)_{ij} = \xi_i\xi_j - \frac{1}{2}\xi_m\xi^m g_{ij} + P_{ij}. \quad (2.9)$$

Para resolver esta ecuación, buscaremos una 1-forma ξ que satisfaga $\nabla\xi = A(\xi)$. En coordenadas locales, si escribimos $\xi = \xi_j dx^j$, el problema se convierte en un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para las n funciones desconocidas ξ_1, \dots, ξ_n (n funciones desconocidas frente a n^2 ecuaciones).

Tomamos ahora la conexión de Levi-Civita en la expresión (2.9) y obtenemos

$$A_{ij;k} - A_{ik;j} = \xi_{i;k}\xi_j + \xi_i\xi_{j;k} - \xi_{m;k}\xi^m g_{ij} - \xi_{i;j}\xi_k - \xi_i\xi_{k;j} + \xi_{m;j}\xi^m g_{ik} + C_{ijk},$$

y si sustituimos $\xi_{i;j} = A(\xi)_{ij}$ con la fórmula (2.9) y restamos a ambos lados $R_{jki}{}^\ell \xi_\ell$, obtenemos

$$A_{ij,;}, - A_{ik;j} - R_{jki}{}^\ell \xi_\ell = -W_{jki}{}^\ell \xi_\ell + C_{ijk}.$$

Por hipótesis, el lado derecho de la ecuación es cero, y ya podemos aplicar el Lema anterior.

Por tanto, de la simetría de $A(\xi)_{ij}$ en i y j podemos deducir la simetría de $\xi_{i;j}$ que, sumada a que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, concluye la simetría de las derivadas $\partial_j \xi_i$. Y así, $(d\xi)_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i = 0$, es decir ξ es una 1-forma cerrada y por el Lema de Poincaré (ver, por ejemplo, [5, Theorem 11.49]), existe un entorno de cada punto tal que $\xi = d\varphi$ para una cierta φ diferenciable. \square

Capítulo 3

Difeomorfismos que preservan la curvatura

Recordemos que nuestro objetivo principal es estudiar en que sentido la curvatura determina la métrica. El procedimiento a seguir será trabajar con difeomorfismos que preserven la curvatura seccional.

Definición 3.1. Sea $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ un difeomorfismo entre variedades de Riemann de dimensión mayor que 2. Diremos que f *preserva la curvatura seccional* si se cumple:

$$K(\sigma) = \tilde{K}(f_*\sigma)$$

para todo σ un 2-subespacio de T_pM . Dos variedades entre las que existe un difeomorfismo que preserve la curvatura se dicen *isocurvadas*.

Por así decirlo, la métrica es a las isometrías lo que la curvatura seccional a este tipo de difeomorfismos. De este modo, pedimos una hipótesis sobre la curvatura y buscamos recoger conclusiones en relación a la métrica de ambas variedades.

3.1. Consideraciones algebraicas

Sea (M, g) una variedad de Riemann con $\dim M \geq 3$. Diremos que un punto $p \in M$ es *isotrópico* si la curvatura seccional es constante en dicho punto, esto es, independiente del plano $\Pi \subset T_pM$.

El primer paso será llegar a probar que variedades isocurvadas son conformes sobre la clausura del conjunto de puntos no isotrópicos, objetivo al que dedicamos esta sección, cuyos resultados fueron probados originalmente en [2].

En los siguientes resultados de carácter puramente algebraico nos valemos de la noción de *referencia adaptada*; una *referencia* no es más que una base ortonormal de vectores $\{e_i\}$ de un espacio vectorial, diremos que una referencia es *adaptada* si para todo triple de índices distintos i, j, k los valores de $K(e_i, e_j), K(e_i, e_k), K(e_j, e_k)$ son todos diferentes.

Lema 3.2. *Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y tensor curvatura R . Si la curvatura seccional es no constante, entonces V admite una referencia adaptada.*

Demostración. Dividiremos la prueba en dos partes: el caso en que $\dim V = 3$ y el caso general $\dim V \geq 3$.

1. Supongamos entonces que $\dim V = 3$. Siempre podemos tomar una base ortonormal (referencia) de V , que denotamos $\{e_i, e_j, e_k\}$. Escribiremos $K_{ij} = K(e_i, e_j)$ para cada combinación de elementos de la base. Si K_{ij}, K_{ik}, K_{jk} no son todos distintos, tenemos dos posibilidades.

Que sean todos iguales, en cuyo caso denotaremos K_0 a cada una de las curvaturas seccionales anteriores. Por linealidad del tensor de curvatura y la métrica, si todas las componentes mixtas R_{ikkj} fueran cero, la curvatura seccional sería constante, por lo que supondremos que la componente $R_{ikkj} \neq 0$. Sea ϕ una transformación ortogonal que rota el plano generado por $\{e_i, e_j\}$ un ángulo θ y deja fijo e_k . De esta forma podemos escribir

$$\begin{aligned}\phi(e_i) &= xe_i + ye_j \\ \phi(e_j) &= -ye_i + xe_j \\ \phi(e_k) &= e_k\end{aligned}$$

donde $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. Denotamos $\{f_i, f_j, f_k\}$ la imagen por ϕ de los elementos del referencia. Por ser ϕ transformación ortogonal, $\{f_i, f_j, f_k\}$ es base de V , veamos que es también una referencia adaptada. Con un sencillo cálculo vemos que es una base ortogonal, además

$$\begin{aligned}K(f_i, f_j) &= K_{ij} = K_0 \\ K(f_i, f_k) &= x^2 R_{ikkj} + 2xy R_{ikkj} + y^2 R_{jkkj} = K_0 + \sin(2\theta) R_{ikkj} \\ K(f_i, f_k) &= x^2 R_{jkkj} - 2xy R_{ikkj} + y^2 R_{ikkj} = K_0 - \sin(2\theta) R_{ikkj}.\end{aligned}$$

Como $R_{ikkj} \neq 0$, basta tomar un θ adecuado y $\{f_i, f_j, f_k\}$ será una referencia adaptada de V .

La otra posibilidad es que no sean todos iguales, pero $K_{ij} = K_{ik} \neq K_{jk}$. Sea $|K_{ij} - K_{jk}| = \epsilon$. La misma transformación de antes nos lleva ahora a

$$\begin{aligned}K(f_i, f_j) &= K_{ij} = K_0 \\ K(f_i, f_k) - K_{ik} &= \sin^2(\theta)(K_{jk} - K_{ik}) + \sin(2\theta) R_{ikkj} \\ K(f_i, f_k) - K_{jk} &= \sin^2(\theta)(K_{ik} - K_{jk}) - \sin(2\theta) R_{ikkj}.\end{aligned}$$

Ajustando adecuadamente θ de manera que las dos últimas diferencias sean distintas de cero, pero con valor absoluto menor que $\frac{\epsilon}{2}$, $\{f_i, f_j, f_k\}$ será una referencia adaptada.

2. Supongamos ahora de forma general $\dim V = n$. Definimos una aplicación r que a cada referencia $b = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V le asocia el numero de triplas distintas $\{i, j, k\}$ tal que K_{ij}, K_{ik}, K_{jk} son distintos. Por continuidad del tensor de curvatura, si b es una referencia adaptada, $\phi(b)$ también lo será, donde ahora ϕ denota una transformación ortogonal en un entorno de la identidad de $O(n)$ suficientemente pequeño. Así, $r(b) \leq r(\phi(b))$.

Tomamos entonces b tal que $r(b)$ es máximo. Si b no fuera adaptada, existiría una tripla $\{e_i, e_j, e_k\}$ tal que K_{ij}, K_{ik}, K_{jk} no son todos distintos. Ahora, si variar $\{e_i, e_j, e_k\}$ por cada elemento de un entorno de la identidad de $O(n)$ suficientemente pequeño da como resultado un espacio 3-dimensional de curvatura seccional constante, la curvatura seccional sería siempre constante. Luego necesariamente existe una transformación ψ que convierte a $\{e_i, e_j, e_k\}$ en la base de un espacio 3-dimensional con curvatura no constante, y ya podríamos aplicar el resultado en el caso de dimensión 3, pero entonces $r(b) < r(\psi(b))$, contradiciendo nuestra elección de b como el máximo. □

Teorema 3.3. Sean V, \tilde{V} dos espacios vectoriales de dimensión $n \geq 3$ con productos interiores $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{V}}$, respectivamente. Sean R, \tilde{R} dos tensores curvatura algebraicos y K, \tilde{K} las correspondientes curvaturas seccionales. Si K es no constante y $f : V \rightarrow \tilde{V}$ es un isomorfismo que preserva la curvatura seccional (esto es, $K(\sigma) = \tilde{K}(f\sigma)$ para cada subespacio 2-dimensional σ), entonces f es una homotecia, es decir,

$$\langle f(x), f(y) \rangle_{\tilde{V}} = \lambda \langle x, y \rangle_V$$

con λ constante.

Demostración. En virtud del Lema 3.2, tomamos $\{e_1, \dots, e_n\}$ una referencia adaptada de V . Denotaremos $f(e_i) = \tilde{e}_i$, $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle_{\tilde{V}} = a_{ij}$ para cada i, j . Las componentes de \tilde{R} las escribiremos respecto la base $\{\tilde{e}_i\}$.

Por un lado, por conservar f la curvatura seccional tenemos la igualdad $K(e_i, e_j) = \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$, y por lo tanto

$$\tilde{R}_{ijji} = (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2)R_{ijji}. \quad (3.1)$$

Por otro lado, sean $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de cero. Sea $\{i, j, k\}$ una tripla de elementos diferentes. Entonces:

$$K(xe_i + ye_j, e_k) = \frac{x^2 R_{ikki} + 2xy R_{ikkj} + y^2 R_{jkkj}}{x^2 + y^2}$$

$$\tilde{K}(x\tilde{e}_i + y\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) = \frac{x^2 \tilde{R}_{ikki} + 2xy \tilde{R}_{ikkj} + y^2 \tilde{R}_{jkkj}}{(x^2 a_{ii} + 2xy a_{ij} + y^2 a_{jj}) a_{kk} - (x a_{ik} + y a_{jk})^2}.$$

Igualando ambas expresiones y desarrollando, llegamos a una igualdad de polinomios en dos variables. Igualando coeficiente a coeficiente obtenemos las siguientes expresiones:

1. Coeficiente x^3y :

$$\tilde{R}_{ikkj} = R_{ikkj}(a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2) + R_{ikki}(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}). \quad (3.2)$$

2. Coeficiente xy^3 :

$$\tilde{R}_{ikkj} = R_{ikkj}(a_{jj}a_{kk} - a_{jk}^2) + R_{jkkj}(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}). \quad (3.3)$$

3. Coeficiente x^2y^2 :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ikki} + \tilde{R}_{jkkj} &= R_{ikki}(a_{jj}a_{kk} - a_{ik}^2) \\ &\quad + R_{jkkj}(a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2) \\ &\quad + 4R_{ikkj}(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si ahora tomamos

$$\begin{aligned} P &= (a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2) - (a_{jj}a_{kk} - a_{jk}^2) \\ Q &= a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk} \\ u &= R_{ikki} - R_{jkkj} \\ v &= R_{ikkj} \end{aligned}$$

y restamos (3.2) menos (3.3), obtenemos $Qu + Pv = 0$. Tras simplificar (3.4) apoyándonos en (3.1), llegamos a $-Pu + 4Qv = 0$. Tenemos por tanto el siguiente sistema

$$\begin{aligned} Qu + Pv &= 0 \\ -Pu + 4Qv &= 0 \end{aligned}$$

donde u y v son conocidas, y u nunca puede ser 0 por tomar una referencia adaptada. Solo cabe entonces que $P = Q = 0$. Si escribimos los ángulos $\angle(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \theta, \angle(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) = \phi, \angle(\tilde{e}_i, \tilde{e}_k) = \psi$, entonces la condición $Q = 0$ se traduce en:

$$\|\tilde{e}_i\|_{\tilde{V}}\|\tilde{e}_j\|_{\tilde{V}}\|\tilde{e}_k\|_{\tilde{V}}^2 \cos(\theta) - \cos(\phi)\cos(\psi)\|\tilde{e}_j\|_{\tilde{V}}\|\tilde{e}_i\|_{\tilde{V}}\|\tilde{e}_k\|_{\tilde{V}}^2 = 0.$$

Dividiendo por $\|\tilde{e}_i\|_{\tilde{V}}\|\tilde{e}_j\|_{\tilde{V}}\|\tilde{e}_k\|_{\tilde{V}}^2$, y rotando los papeles de i, j, k , llegamos al siguiente sistema

$$\begin{aligned} \cos(\theta) - \cos(\phi)\cos(\psi) &= 0 \\ \cos(\phi) - \cos(\theta)\cos(\psi) &= 0 \\ \cos(\psi) - \cos(\theta)\cos(\phi) &= 0 \end{aligned}$$

de donde deducimos que la única posibilidad es que la base $\{\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k\}$ sea ortogonal. De igual manera usando la condición $P = 0$ y rotando los papeles de i, j, k concluimos que los vectores $\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k$ tienen la misma longitud. Como esto se tiene para toda tripla $\{i, j, k\}$ de elementos distintos, necesariamente $\{\tilde{e}_i\}$ es una base ortogonal con vectores de la misma longitud, lo que equivale a que f sea una homotecia. \square

Centrándonos ya en variedades de Riemann (M, g) , nos interesará particularizar el Teorema 3.3. Llamamos *2-grassmanniana sobre M* a la variedad formada por los subespacios vectoriales 2-dimensionales de $T_p M$, que escribimos $G_2(T_p M)$. El *fibrado de Grassmann* será la variedad $G_2(TM) = \cup_{p \in M} G_2(T_p M)$.

Con este nuevo concepto, podemos ver la curvatura seccional K de una variedad de Riemann (M, g) como una aplicación diferenciable $K : G_2(TM) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $\mu = (p, \Pi) \in G_2(TM)$ le hace corresponder $K_p(X, Y)$ tal como la definimos anteriormente, donde $\{X, Y\}$ es una base del espacio 2-dimensional Π . La independencia de la elección de la base a la hora de calcular la curvatura seccional asociada a Π hace que nuestra aplicación K esté bien definida.

Se tiene entonces que un punto $p \in M$ es *isotrópico* si $K|_{\pi^{-1}(p)}$ es constante, donde $\pi : G_2(TM) \rightarrow M$ representa la proyección $\pi(\mu) = \pi(p, \Pi) = p$. En caso contrario diremos que p es *no isotrópico*.

Proposición 3.4. *Sea $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un difeomorfismo que preserva la curvatura seccional entre dos variedades de Riemann de dimensión $n \geq 3$. Entonces la métrica $f^* \tilde{g}$ es conformemente equivalente a g en la clausura del conjunto de puntos no isotrópicos.*

El resultado se sigue directamente del Teorema anterior, pues para cualesquiera campos de vectores X, Y en M se tiene que $(f^*g)_p(X, Y) = g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) = \lambda^2 g_{f(p)}(X, Y)$.

Este es el primer resultado que nos aporta información sobre la métrica sabiendo condiciones sobre la curvatura, y servirá como punto de partida a la hora de obtener consecuencias mas fuertes (por ejemplo, isometrías). La siguiente proposición, como veremos, servirá de complemento a las transformaciones conformes ya vistas para estudiar estas isometrías.

Proposición 3.5. *Sea V un espacio vectorial dotado con dos productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ y dos tensores de curvatura R, \tilde{R} tal que*

- (a) $\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ positivo,
- (b) $\tilde{K} = K$.

Entonces el endomorfismo de curvatura (1, 3) verifica $\tilde{R} = \lambda R$. Además $\tilde{\rho} = \lambda \rho$, $\tilde{Ric} = Ric$, $\tilde{\tau} = \tau$ y $\tilde{W} = \lambda W$ donde W denota el tensor de Weyl de tipo (1, 3).

Demostración. De la condición (b) tenemos la igualdad

$$\frac{R(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{\tilde{R}(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2},$$

y por tanto $\tilde{R}(X, Y, Y, X) = \lambda^2 R(X, Y, Y, X)$. Sustituyendo X por $X + T$ e Y por $Y + Z$ llegamos a que $\tilde{R}(X, Y, Z, T) = \lambda^2 R(X, Y, Z, T)$ para campos de vectores arbitrarios X, Y, Z, T . De esta forma $\langle \tilde{R}(X, Y)Z, T \rangle = \lambda^2 \langle R(X, Y)Z, T \rangle$ y por tanto $\tilde{R} = \lambda R$ con R de tipo (1, 3).

Para el tensor de Ricci ρ tomamos coordenadas y operamos:

$$\tilde{\rho}_{jk} = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\widetilde{lm}} \tilde{R}_{ljk m} = \lambda^{-1} \lambda^2 \langle \cdot, \cdot \rangle^{lm} R_{ljk m} = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle^{lm} R_{ljk m} = \lambda \rho_{jk}.$$

Las igualdades del operador de Ricci Ric y la curvatura escalar τ se obtienen de subir índices a la expresión anterior y calcular su traza.

En cuanto al tensor de Weyl, basta observar

$$\tilde{P} = \frac{1}{n-2} \left(\lambda \rho - \frac{\tau}{2(n-1)} \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle \right) = \lambda P$$

y así $\tilde{W} = \tilde{R} - \tilde{P} \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle = \lambda^2 R - \lambda^2 P \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle = \lambda^2 W$. De igual manera que hicimos para el tensor de curvatura, deducimos que el tensor de Weyl de tipo (1,3) verifica $\tilde{W} = \lambda W$ como queríamos probar. \square

3.2. Caso no localmente conformemente llano

Llegados ya hasta aquí, dividiremos el estudio de los difeomorfismos e isometrías en dos casos: el caso en que la variedad es localmente conformemente llana; y el caso en que no lo es, que viene determinado por el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades isocurvadas de dimensión $n \geq 4$. Si M no es localmente conformemente llana, entonces todo difeomorfismo que preserve la curvatura seccional es una isometría.*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un difeomorfismo que preserve la curvatura seccional. Dado que M no es localmente conformemente llana y tiene dimensión $n \geq 4$, por el Teorema 2.16 $W \neq 0$.

Por otro lado, $W = R - \frac{1}{n-2} \rho \otimes g + \frac{\tau}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g$, y en los puntos donde la curvatura seccional sea constantemente K_0 (puntos isotrópicos) tenemos $R = K_0 R^0 = \frac{K_0}{2} g \otimes g$, así

$$W = \frac{K_0}{2} g \otimes g - \frac{1}{n-2} \rho \otimes g + \frac{\tau}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g.$$

Teniendo en cuenta que en este caso, $\rho_{g \otimes g} = 2(n-1)g$ por la propia definición del producto de Kulkarni-Nomizu (Definición 1.2) y por tanto $\tau = 2n(n-1)$, la expresión del tensor de Weyl nos queda

$$W = \frac{K_0}{2} g \otimes g - \frac{n-1}{n-2} K_0 g \otimes g + \frac{n}{n-2} K_0 g \otimes g = 0.$$

Por tanto, el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en M . Estamos entonces en condiciones de aplicar la Proposición 3.4, que nos asegura que existe una cierta función diferenciable φ tal que $f^* \tilde{g} = e^{2\varphi} g$. Esto nos permite a su vez aplicar la Proposición 3.5 y deducir que $\tilde{W} = e^{2\varphi} W$ con W el tensor de Weyl de tipo (1,3). No obstante, el tensor de Weyl (1,3) queda invariante por transformaciones conformes como vimos en la Observación 2.7, luego $e^{2\varphi} = 1$, y así $f^* \tilde{g} = g$ como queríamos probar. \square

3.3. Caso localmente conformemente llano

Queremos ahora probar un resultado análogo al del capítulo anterior, una condición necesaria para que un difeomorfismo sobre una variedad conformemente llana sea una isometría. El carácter conformemente llano nos impide ahora reducir la prueba a la invariancia del tensor de Weyl como hicimos previamente, pues por el Teorema 2.16, ahora $W = 0$. Además, esto provoca que sea necesario añadir una condición extra al resultado, la densidad de los puntos no isotrópicos sobre la variedad, que en la situación anterior deducíamos también a partir del tensor de Weyl. El principal Teorema de la sección es el que sigue.

Teorema 3.7. *Sean (M, g) , (\tilde{M}, \tilde{g}) dos variedades de Riemann isocurvadas de dimensión $n \geq 4$. Si M es localmente conformemente llana y el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en M , entonces todo difeomorfismo que preserve la curvatura seccional es una isometría.*

Aunque la propiedad de ser conformemente llana es de carácter local, trabajaremos sin pérdida de generalidad como si toda la variedad M fuera difeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n y su métrica verificase $g = e^{2\sigma}g_0$, con σ una función diferenciable y g_0 una métrica llana.

Antes de entrar en la propia demostración del resultado, tendremos que deducir tres igualdades que involucran diferentes objetos de la geometría de Riemann y que serán necesarias para la prueba. En ellas estaremos trabajando con 3 métricas diferentes: la asociada a M , g ; la métrica que resulta de realizar el pullback sobre la métrica de \tilde{M} a través de un difeomorfismo que preserve la curvatura seccional que, abusando de notación, denotaremos por \tilde{g} ; y la métrica llana que es conforme a g , que denotaremos por g_0 . Todo objeto derivado de estas métricas recibirán la misma notación (una tilde o un subíndice) que la propia métrica.

De la Proposición 3.4, tenemos que $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ para una cierta función diferenciable φ . Además, como $K = \tilde{K}$ por hipótesis, de la Proposición 3.5 tenemos entonces que $\tilde{R} = e^{2\varphi}R$ donde R es el endomorfismo de curvatura (1, 3).

Por otro lado, M es conformemente llana, así que el endomorfismo de curvatura, usando la igualdad para transformaciones conformes (ver Lema 2.3) tomará la forma

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= H_{0\sigma}(X, Z)Y - H_{0\sigma}(Y, Z)X \\ &\quad + g_0(X, Z)h_{0\sigma}(Y) - g_0(Y, Z)h_{0\sigma}(X) \\ &\quad + (Y\sigma)(Z\sigma)X - (X\sigma)(Z\sigma)Y \\ &\quad - \|\nabla\sigma\|_0^2\{g_0(Y, Z)X - g_0(X, Z)Y\} \\ &\quad + \{(X\sigma)g_0(Y, Z) - (Y\sigma)g_0(X, Z)\}\nabla_0\sigma. \end{aligned}$$

Cogiendo X, Y, Z ortonormales respecto la métrica g_0 obtenemos las relaciones:

$$R(X, Y)Z = H_{0\sigma}(X, Z)Y - H_{0\sigma}(Y, Z)X + (Y\sigma)(Z\sigma)X - (X\sigma)(Z\sigma)Y, \quad (\text{A1})$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)X &= H_{0\sigma}(X, X)Y - H_{0\sigma}(Y, X)X + h_{0\sigma}(Y) + (Y\sigma)(X\sigma)X \\ &\quad - (X\sigma)(X\sigma)Y + \|\nabla_0\sigma\|_0^2Y - (Y\sigma)\nabla_0\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Por comodidad escribiremos $S(X, Y) = (X\varphi)Y + (Y\varphi)X - g(X, Y)\nabla\varphi$, de manera que el cambio conforme de la conexi3n de Levi-Civita se expresa como $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$. Tenemos pues

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X \tilde{R})(Y, Z)W &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{R}(Y, Z)W) - \tilde{R}(\tilde{\nabla}_X Y, Z)W - \tilde{R}(Y, \tilde{\nabla}_X Z)W - \tilde{R}(Y, Z)\tilde{\nabla}_X W \\ &= (\nabla_X \tilde{R})(Y, Z)W - S(X, \tilde{R}(Y, Z)W) - \tilde{R}(S(X, Y), Z)W \\ &\quad - \tilde{R}(Y, S(X, Z))W - \tilde{R}(Y, Z)S(X, W), \end{aligned}$$

y desarrollando $S(X, Y)$ en el primer y 3ltimo sumando y operando llegamos a

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X \tilde{R})(Y, Z)W &= (\nabla_X \tilde{R})(Y, Z)W + (\tilde{R}(Y, Z)W)\varphi X - g(X, \tilde{R}(Y, Z)W)\nabla\varphi \\ &\quad - \tilde{R}(S(X, Y)Z)W + \tilde{R}(S(X, Z), Y)W - W\varphi\tilde{R}(Y, Z)X \\ &\quad - g(X, W)\tilde{R}(Y, Z)\nabla\varphi. \end{aligned}$$

Lo que haremos ahora ser3 fijar W y tomar una suma c3clica sobre los t3rminos X, Y, Z . La identidad diferencial de Bianchi (1.1) y la relaci3n $\tilde{R} = e^{2\varphi}R$ permite reescribir la ecuaci3n como

$$\begin{aligned} (\nabla_X \tilde{R})(Y, Z)W + (\nabla_Y \tilde{R})(Z, X)W + (\nabla_Z \tilde{R})(X, Y)W = \\ 2e^{2\varphi}\{X\varphi R(Y, Z)W + Y\varphi R(Z, X)W + Z\varphi R(X, Y)W\}. \end{aligned}$$

Entonces la expresi3n entera, usando las mismas relaciones y cancelando los factores $e^{2\varphi}$ queda finalmente

$$\begin{aligned} 2\{X\varphi R(Y, Z)W + Y\varphi R(Z, X)W + Z\varphi R(X, Y)W\} \\ + \{(R(Y, Z)W)\varphi X + (R(Z, X)W)\varphi Y + (R(X, Y)W)\varphi Z\} \\ + g(X, W)R(Y, Z)\nabla\varphi + g(Y, W)R(Z, X)\nabla\varphi + g(Z, W)R(X, Y)\nabla\varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si X, Y, Z, W son campos de vectores ortonormales para la m3trica g_0 y realizando el producto escalar por X , el primer corchete de la anterior expresi3n nos queda (usando la ecuaci3n (A1))

$$2Y\varphi\{H_{0\sigma}(Z, W) - Z\sigma W\sigma\} - 2Z\varphi\{H_{0\sigma}(Y, W) - Y\sigma W\sigma\}.$$

Del mismo modo el segundo corchete ser3 entonces

$$Z\varphi H_{0\sigma}(Y, W) - Y\varphi H_{0\sigma}(Z, W) + Y\varphi Z\sigma W\sigma - Z\varphi Y\sigma W\sigma.$$

Por tanto, la expresi3n total, donde s3lo quedar3n los elementos de los corchetes pues el resto de sumandos se anulan al considerar X, Y, Z, W ortonormales, nos da la siguiente relaci3n importante:

$$Y\varphi H_{0\sigma}(Z, W) - Z\varphi H_{0\sigma}(Y, W) + Z\varphi W\sigma Y\sigma - Y\varphi W\sigma Z\sigma = 0. \quad (B)$$

Vamos ahora a obtener la última relación que necesitamos. Para ello empezamos tomando $W = X$ en (3.5) y, suponiendo de nuevo que X, Y, Z son ortonormales respecto g_0 , llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} & 2\{X\varphi R(Y, Z)X + Y\varphi R(Z, X)X + Z\varphi R(X, Y)X\} \\ & + \{(R(Y, Z)X)\varphi X + (R(Z, X)X)\varphi Y + (R(X, Y)X)\varphi Z\} \\ & + \|X\|^2 R(Y, Z)\nabla\varphi = 0. \end{aligned}$$

Tomamos el producto escalar por Y , y usando las relaciones (A1) y (A2), el primer corchete se convierte en

$$\begin{aligned} & -X\varphi H_{0\sigma}(Z, X) + X\varphi Z\sigma X\sigma - Y\varphi H_{0\sigma}(Z, Y) + Y\varphi Z\sigma Y\sigma + Z\varphi H_{0\sigma}(X, X) \\ & + Z\varphi H_{0\sigma}(Y, Y) - Z\varphi X\sigma X\sigma + Z\varphi \|\nabla_0\sigma\|^2 - Z\varphi Y\sigma Y\sigma. \end{aligned}$$

Y la otra parte la reescribimos como

$$\begin{aligned} & -Z\varphi H_{0\sigma}(X, X) + X\varphi H_{0\sigma}(Z, X) - h_{0\sigma}(Z)\varphi - (Z\sigma)(X\sigma)X\varphi + (X\sigma)(X\sigma)Z\varphi \\ & - \|\nabla_0\sigma\|^2 Z\varphi + (Z\sigma)\nabla_0\sigma\varphi - e^{2\sigma} H_{0\sigma}(Z, \nabla\varphi) + e^{2\sigma}(Z\sigma)\nabla\varphi(\sigma). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(\nabla\varphi)_j = g^{ij}\partial_i\varphi = e^{-2\sigma}g_0^{ij}\partial_i\varphi = e^{-2\sigma}(\nabla_0\varphi)_j$, entonces se tiene que $e^{2\sigma}H_{0\sigma}(Z, \nabla\varphi) = g_0(h_{0\sigma}(Z), e^{-2\sigma}\nabla_0\varphi) = H_{0\sigma}(Z, \nabla\varphi)$ y $e^{2\sigma}(Z\sigma)\nabla\varphi(\sigma) = (Z\sigma)\nabla_0\varphi(\sigma)$. La igualdad total resulta en

$$\begin{aligned} & Z\varphi\{H_{0\sigma}(X, X) - (X\sigma)(X\sigma)\} - X\varphi\{H_{0\sigma}(Z, X) - (Z\sigma)(X\sigma)\} \\ & + Z\varphi\{H_{0\sigma}(Y, Y) - (Y\sigma)(Y\sigma)\} - Y\varphi\{H_{0\sigma}(Z, Y) - (Z\sigma)(Y\sigma)\} \\ & - 2H_{0\sigma}(Z, \nabla_0\varphi) + 2(Z\sigma)(\nabla_0\varphi\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Cogemos $\{E_1, \dots, E_n\}$ base ortonormal de campos de vectores respecto g_0 , entonces $\nabla_0\varphi = \sum_{i=1}^m (E_i\varphi)E_i$, y obtenemos así la última relación que necesitamos

$$\begin{aligned} & Z\varphi\{H_{0\sigma}(X, X) - (X\sigma)(X\sigma)\} - X\varphi\{H_{0\sigma}(Z, X) - (Z\sigma)(X\sigma)\} \\ & + Z\varphi\{H_{0\sigma}(Y, Y) - (Y\sigma)(Y\sigma)\} - Y\varphi\{H_{0\sigma}(Z, Y) - (Z\sigma)(Y\sigma)\} \\ & - 2\sum_{i=1}^m (E_i\varphi)H_{0\sigma}(Z, E_i) + 2(Z\sigma)\sum_{i=1}^m (E_i\varphi)(E_i\sigma) = 0. \end{aligned} \tag{C}$$

Ya con todas las igualdades necesarias, estamos en condiciones de probar el resultado central del capítulo, que deduciremos de dos lemas previos.

Lema 3.8. *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión $n \geq 3$ conformemente llana con tensor de curvatura R . Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. M tiene curvatura seccional constante;
2. $H_{0\sigma}(X, Y) = (X\sigma)(Y\sigma)$ para cualesquiera campos de vectores ortogonales X, Y ;
3. $H_{0\sigma}(X, Y) - (X\sigma)(Y\sigma) = \lambda g_0(X, Y)$ para una cierta función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Por tener M curvatura seccional constante K_0 , sabemos que el endomorfismo de curvatura está dado por

$$R(X, Y)Z = K_0\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}.$$

Además, usando la igualdad (A1):

$$\begin{aligned} & \{H_{0\sigma}(X, Z) - (X\sigma)(Z\sigma)\}Y - \{H_{0\sigma}(Y, Z) + (Y\sigma)(Z\sigma)\}X \\ &= K_0g(X, Z)Y - K_0g(Y, Z)X, \end{aligned}$$

y tomando X, Y, Z ortogonales respecto g , entonces $H_{0\sigma}(X, Z) = (X\sigma)(Z\sigma)$ como queríamos probar.

2. \Rightarrow 3. Denotamos por L al único tensor $(1, 1)$ que verifica

$$g_0(L(X), Y) = H_{0\sigma}(X, Y) - (X\sigma)(Y\sigma).$$

Por 2., $L(X_p) \perp Y_p$ para todo $Y_p \in X_p^\perp$, donde X_p^\perp es el subespacio de dimensión $n - 1$ de T_pM en cada punto $p \in M$; de este modo $L(X_p) = \lambda X_p$ donde λ es un valor escalar.

Además, λ solo dependerá del punto p , pues $P(X_p + Z_p) = P(X_p) + P(Z_p) = \lambda_1 X_p + \lambda_2 Z_p$ por un lado, y por otro $P(X_p + Z_p) = \lambda_3(X_p + Z_p)$ para X_p, Z_p campos de vectores ortogonales, luego $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Por tanto $H_{0\sigma}(X, Y) - (X\sigma)(Y\sigma) = g_0(L(X), Y) = \lambda g_0(X, Y)$ donde λ es nuestra función buscada.

3. \Rightarrow 1. Sea $p \in M$ y Π un plano 2-dimensional de T_pM con $\{X_p, Y_p\}$ base ortonormal respecto g_0 . Entonces

$$\begin{aligned} K(X_p, Y_p) &= e^{-2\sigma(p)} g_0(R(X_p, Y_p)Y_p, X_p) = \\ &= e^{-2\sigma(p)} \{H_{0\sigma}(Y_p, Y_p) - (Y_p\sigma)(Y_p\sigma) + H_{0\sigma}(X_p, X_p) - (X_p\sigma)(X_p\sigma) + \|\nabla_0\sigma(p)\|_0^2\} \end{aligned}$$

y por 3., reescribimos

$$\begin{aligned} K(X_p, Y_p) &= e^{-2\sigma(p)} \{\lambda(p)g(Y, Y) + \lambda(p)g(X, X) + \|\nabla_0\sigma(p)\|_0^2\} \\ &= e^{-2\sigma(p)} \{2\lambda(p) + \|\nabla_0\sigma(p)\|_0^2\}. \end{aligned}$$

Vemos que la curvatura seccional no depende del plano 2-dimensional, luego todo punto $p \in M$ es isotrópico, y por aplicación del Teorema de Schur [1], la curvatura es constante en M . \square

Centrándonos ya en nuestro caso en concreto, recordemos que trabajamos con tres métricas relacionadas por $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ y $g = e^{2\sigma}g_0$ para ciertas funciones $\varphi, \sigma \in C^\infty(M)$.

Lema 3.9. *Si para $p \in M$ se verifica $(\nabla_0\varphi)_p \neq 0$, entonces el punto p es isotrópico.*

Demostración. Sea

$$E_1 = \frac{\nabla_0\varphi}{\|\nabla_0\varphi\|_0},$$

y completamos a una base ortonormal respecto g_0 con $\{E_2, \dots, E_n\}$. Entonces

$$(E_1\varphi)(p) = \|\nabla_0\varphi\|_0 \neq 0$$

y $E_i\varphi = 0$ para $i > 1$ por como hemos definido E_1 .

Tomamos ahora la expresión (B) haciendo las sustituciones $Y = E_1, Z = E_i, W = E_j$ con $\{1, i, j\}$ distintos y obtenemos

$$\begin{aligned} E_1\varphi H_{0\sigma}(E_i, E_j) - E_i\varphi H_{0\sigma}(E_1, E_j) \\ + E_i\varphi(E_j\sigma)(E_1\sigma) - E_1\varphi(E_j\sigma)(E_i\sigma) = 0 \end{aligned}$$

y por tanto $H_{0\sigma}(E_i, E_j) = (E_i\sigma)(E_j\sigma)$.

Por otro lado, sustituyendo en la expresión (C) $X = E_1, Y = E_i, Z = E_j$ con $\{1, i, j\}$ diferentes conseguimos $H_{0\sigma}(E_1, E_j) = (E_1\sigma)(E_j\sigma)$.

Finalmente, de nuevo en la expresión (C) sustituimos $X = E_i, Y = E_j, Z = E_1$ con $\{1, i, j\}$ diferentes y conseguimos

$$\begin{aligned} H_{0\sigma}(E_i, E_i) - (E_i\sigma)(E_i\sigma) \\ + H_{0\sigma}(E_j, E_j) - (E_j\sigma)(E_j\sigma) \\ = 2\{H_{0\sigma}(E_1, E_1) + (E_1\sigma)(E_1\sigma)\} \end{aligned}$$

y dado que la igualdad es cierta para todo elemento de la base $\{E_1, \dots, E_n\}$ deducimos $H_{0\sigma}(E_1, E_1) - (E_1\sigma)(E_1\sigma) = H_{0\sigma}(E_i, E_i) - (E_i\sigma)(E_i\sigma)$.

Es decir, para campos de vectores ortonormales $\{E_1, \dots, E_n\}$ tenemos que $H_{0\sigma}(E_i, E_j) - (E_i\sigma)(E_j\sigma) = \lambda\delta_i^j$ con λ función real en M . Se verifica entonces la condición 2. del Lema 3.8, por lo que p es isotrópico. \square

Llegados a este punto, no queda más que la propia demostración del teorema, que como veremos se deduce directamente de lo hecho hasta ahora.

Teorema 3.10. *Sean $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ dos variedades de Riemann isocurvadas de dimensión $n \geq 4$. Si M es conformemente llana y el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en M , entonces todo difeomorfismo que preserve la curvatura seccional es una isometría.*

Demostración. Empleando la misma notación que hasta ahora, si $(\nabla_0\varphi) \neq 0$, entonces por el Lema 3.9 el conjunto de puntos isotrópicos tendría interior no vacío, por lo que φ ha de ser una función constante, y en ese caso por el Lema 2.3 $\tilde{R} = R$. Si calculamos entonces la curvatura seccional $\tilde{K}(X, Y)$ con X, Y campos de vectores ortonormales para \tilde{g}

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X, Y) &= \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Y, X) = \tilde{g}(R(X, Y)Y, X) \\ &= e^{-2\varphi}g(R(X, Y)Y, X) = e^{-2\varphi}K(X, Y).\end{aligned}$$

No obstante, la hipótesis de que nuestro difeomorfismo preserve la curvatura seccional hace que por la igualdad anterior $\varphi = 0$, y nuestro difeomorfismo se convierte así en una isometría.

□

Capítulo 4

Curvatura y métrica

4.1. Dimensiones 1 y 2

En dimensión 1, la relación entre métrica y curvatura está muy diferenciada, pues toda variedad de Riemann 1-dimensional es llana. En dimensión 2, la curvatura no aporta la suficiente información para determinar la métrica de manera general (en este caso, la curvatura es una única función evaluada en la variedad). De hecho, existen ejemplos explícitos donde variedades con la misma curvatura no son isométricas. Presentamos uno de ellos a continuación.

Ejemplo 4.1. [3] Consideramos por un lado la superficie de revolución en \mathbb{R}^3 resultante de girar en el eje x^3 la curva logarítmica, que parametrizamos por $(v\cos(u), v\sin(u), \log(v))$ (Figura 4.1). Por otra parte, tomamos el helicoides parametrizado por $(\tilde{v}\cos(\tilde{u}), \tilde{v}\sin(\tilde{u}), \tilde{u})$.

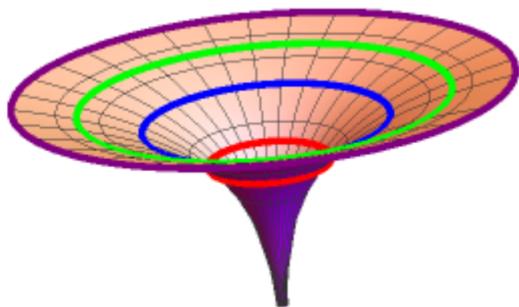


Figura 4.1: Curva logarítmica revolucionada

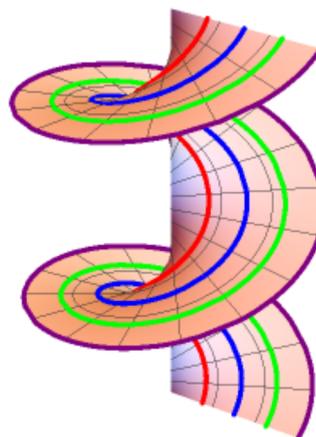


Figura 4.2: Helicoide

Es sencillo comprobar que la primera forma fundamental para la primera superficie es

$$ds^2 = (v^2)du \otimes du + \left(1 + \frac{1}{v^2}\right)dv \otimes dv,$$

mientras que para el helicoide tenemos

$$d\tilde{s}^2 = (1 + \tilde{v}^2)d\tilde{u} \otimes d\tilde{u} + d\tilde{v} \otimes d\tilde{v}.$$

Obteniendo curvaturas de Gauss, respectivamente,

$$K = \frac{-1}{(1 + v^2)^2}$$

$$\tilde{K} = \frac{-1}{(1 + \tilde{v}^2)^2}.$$

Por lo que la aplicación que envía coordenada en coordenada verifica que en puntos correspondientes ambas superficies tienen la misma curvatura de Gauss. En las figuras 4.1 y 4.2, curvas del mismo color tienen la misma curvatura.

Lo que veremos ahora es que no puede existir ninguna isometría entre ambas superficies. De la igualdad entre las curvaturas de Gauss deducimos que necesariamente $\tilde{v} = \pm v$ mientras \tilde{u} es una función $\phi(u, v)$ a la que suponemos $\partial_u \phi \neq 0$ para que el Jacobiano sea distinto de cero.

Para que ambas superficies sean isométricas por una aplicación f , debe verificarse $f^*(d\tilde{s}^2) = ds^2$. Sustituyendo en \tilde{u} y \tilde{v} obtenemos:

$$d\tilde{s}^2 = (1 + v^2)((\partial_u \phi du + \partial_v \phi dv) \otimes (\partial_u \phi du + \partial_v \phi dv)) + dv \otimes dv.$$

Igualando con ds^2 , deducimos que $\partial_v \phi = 0$ y $1 + (1 + v^2)(\partial_u \phi)^2 = 1 + \frac{1}{v^2}$, llegando a una contradicción, por lo que estas superficies no pueden ser isométricas.

4.2. Dimensiones superiores

Todo lo hecho hasta ahora culmina en este resultado central, en donde lo único que estamos haciendo es apoyarnos en los resultados del capítulo anterior y esquivar la condición de puntos no isotrópicos. Al caso conflictivo 3 dimensional dedicamos el capítulo siguiente.

Teorema 4.2. *Si la dimensión es mayor o igual que 4 y su curvatura seccional es no constante, entonces variedades de Riemann isocurvadas con métrica analítica son globalmente isométricas.*

Observación 4.3. Como veremos, la analiticidad de la métrica es simplemente una condición para asegurar la densidad de los puntos no isotrópicos en la variedad. No obstante, si la curvatura seccional es constante en toda la variedad, el resultado no se verifica. De hecho, si (M, g) es una variedad de curvatura seccional constante, todo difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ preserva la curvatura seccional, pero no es necesariamente una isometría.

Basta considerar las variedades (\mathbb{R}^n, g_0) y $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n, i^*g_0)$, donde g_0 denota la métrica euclídea en \mathbb{R}^n y i^*g_0 la métrica inducida en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \dots \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y el difeomorfismo

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0)$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (\tan(x^1), \dots, \tan(x^n)).$$

Ambas variedades tienen curvatura seccional constante nula, por tanto f es un difeomorfismo que (trivialmente) preserva la curvatura seccional; no obstante, las variedades no son globalmente isométricas aunque sí lo sean localmente ((\mathbb{R}^n, g_0) es geodésicamente completa mientras $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$ no lo es).

Demostración. En el capítulo anterior hemos visto que todo difeomorfismo que preserve la curvatura seccional entre variedades de Riemann de dimensión $n \geq 4$ es una isometría en la clausura del conjunto de puntos no isotrópicos. Por tanto, lo único que resta es probar que el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en M .

Si probamos que la existencia de un punto no isotrópico (condición que tenemos asegurada por el carácter no constante de la curvatura seccional) implica la densidad del conjunto de puntos no isotrópicos, habremos acabado. Supongamos pues que el conjunto de puntos isotrópicos tiene interior no vacío, entonces por el Teorema de Schur [1] la curvatura seccional sería constante en cada una de las componentes conexas del conjunto de puntos isotrópicos. En particular, lo sería en un abierto de $G_2(TM)$, y por tanto todos los puntos serían isotrópicos por la analiticidad de la métrica. \square

Hasta ahora no hemos puesto ninguna restricción a la regularidad de la métrica. Si intentamos relajar la condición de analiticidad, el Teorema 4.2 se complica y, en general, no es cierto. Para estudiar esta situación, debemos notar que para que los resultados del Capítulo 3 se verifiquen, la métrica ha de ser, por lo menos, de clase \mathcal{C}^4 (pues al calcular ∇R estamos requiriendo tal regularidad).

Aún en el caso en el que la métrica sea de clase \mathcal{C}^4 , tenemos asegurada la isometría sobre el conjunto de puntos no isotrópicos. Para los puntos isotrópicos, el siguiente resultado conocido nos asegura una isometría local.

Proposición 4.4. [4] Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades de Riemann de curvatura seccional constante c . Entonces para cualesquiera $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ existen entornos \mathcal{U} de p , $\tilde{\mathcal{U}}$ de \tilde{p} y una isometría $F : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$.

Es decir, tanto en el interior del conjunto de puntos isotrópicos como del conjunto de los no isotrópicos tenemos asegurada la isometría local entre variedades isocurvadas. ¿Qué pasa entonces en la frontera del interior de los puntos isotrópicos? Para extender a una isometría local en estos puntos, necesitamos añadir otra condición, como aclara el siguiente resultado.

Teorema 4.5. Sea $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ un difeomorfismo que preserve la curvatura seccional entre variedades de Riemann con métricas de clase \mathcal{C}^4 . Si para los puntos de la frontera del conjunto de puntos isotrópicos se verifica que existe un entorno U tal que su intersección con dicha frontera es una subvariedad totalmente geodésica, entonces M y \tilde{M} son localmente isométricas.

Observación 4.6. Una subvariedad de Riemann (N, g') de (M, g) se dice totalmente geodésica si toda geodésica relativa a g tangente a M en un cierto t_0 , permanece en N para un intervalo de tiempo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Demostración. Sea $x \in M$ y U el entorno que nos aseguran las hipótesis del teorema. Llamamos N al conjunto de puntos no isotrópicos de U e I al conjunto de los sí isotrópicos. Denotamos $f(p) = p_0, f(N) = N_0, f(I) = I_0$. Si nuestra variedad M es de dimensión n , así lo serán N e I , y la frontera de I , ∂I , tendrá dimensión $n - 1$.

Por hipótesis ∂I es totalmente geodésica, por lo que toda geodésica (al menos en un entorno inicial) que empiece en p permanece en N o bien en I . Suponemos que $U = \exp_p(B(0, \epsilon))$, donde $B(0, \epsilon)$ denota una bola de radio ϵ en $T_p M$. Suponemos también que la aplicación exponencial es inyectiva en dicho conjunto (tomando U todo lo pequeño que sea necesario), y lo mismo para \exp_{p_0} .

Ahora bien, tomamos $q \in U \cap \partial I$ y llamamos γ a la única geodésica minimizante uniendo p y q . Los puntos de dicha geodésica se pueden ver como puntos límite de geodésicas en N , por lo que $f(\gamma)$ es una geodésica en ∂I_0 pues f es una isometría. Por lo que ∂I_0 será también totalmente geodésica. Por lo que la situación es ahora I e I_0 variedades de igual curvatura constante con ∂I y ∂I_0 totalmente geodésicas e isométricas.

Apoyándonos ahora en la Proposición 4.4, tenemos asegurados entornos J de ∂I en I y J_0 de ∂I_0 en I_0 tal que J y J_0 son isométricos. Buscamos extender la isometría a un entorno de p en M , para ello empezamos construyendo la isometría entre J y J_0 , tomamos $Y \in T_p M$ de norma tan pequeña como sea necesaria, $\exp_p Y \in I$, tal que si $f_* Y = Y_0$ entonces $\exp_{p_0} Y_0 \in I_0$. Tomamos entonces $F(y) = y_0 = \exp_{p_0} Y_0 \in I_0$.

Para extender F , tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $U = \exp_p(B(p, \epsilon))$, $U_0 = \exp_{p_0}(B(p_0, \epsilon))$, $U = N \cup J$, $U_0 = N_0 \cup J_0$ y tal que U, N, J, U_0, N_0, J_0 sea convexos (es decir, para cualesquiera dos puntos dentro de esos conjuntos existe una única geodésica minimizante que los une).

La aplicación $F = U \rightarrow U_0$ definida como $F|_N = f$ y en J tal como lo hicimos antes. De esta manera, tenemos una aplicación que preserva distancias entre U y U_0 . La diferenciabilidad (y por tanto el carácter isométrico local) viene garantizada por un resultado de Myers y Steenrod [6, Theorem 1].

□

Capítulo 5

Dimensión 3

El caso en el que nuestra variedad (M, g) tiene dimensión 3 es más complicado. Si bien el Teorema 3.4 sigue siendo cierto, a priori ninguno de los resultados probados hasta ahora nos permite asegurar algún tipo de isometría entre variedades isocurvadas. El objetivo de este capítulo es precisamente el estudio de como la métrica determina la curvatura en el caso particular de variedades de Riemann 3-dimensionales.

5.1. Variedades isocurvadas no localmente isométricas

Empezamos por la construcción de un contraejemplo dado por Yau en [8] que muestre que la restricción para la dimensión en el Teorema 4.2 es la mejor posible.

Por comodidad en los cálculos, trabajaremos sobre la curvatura seccional asociada al tensor de Ricci, esto es:

$$K_\rho(\sigma) = \frac{\rho(X, X)}{\|X\|^2},$$

donde ahora σ es un subespacio de dimensión 1 del tangente (es decir, K_ρ toma valores en la 1-grassmanniana). El siguiente resultado nos garantiza que podremos trabajar con este nuevo objeto para nuestro objetivo sin pérdida de generalidad.

Proposición 5.1. *Entre variedades de Riemann de dimensión 3, un difeomorfismo preserva la curvatura seccional de Ricci si y sólo si preserva la curvatura seccional.*

Demostración. Consideramos $\{E_i\}$ base ortonormal. Llega con ver que en dimensión 3 la curvatura seccional determina $\rho(E_i, E_i)$ para cada i y viceversa, pues $K_\rho(E_i) = \rho(E_i, E_i)$.

Por un lado, sabemos que

$$\rho_{ii} = \sum_{j=1}^3 R_{jii j} = \sum_{j=1}^3 K_{ji},$$

luego la curvatura seccional determina el valor de $\rho(E_i, E_i)$.

Por otro lado, recordemos que en dimensión 3 el tensor de Weyl es nulo (Proposición 1.8), por tanto $R = P \oslash g$, que en nuestro caso:

$$R = \rho \oslash g - \frac{\tau}{4}g \oslash g = \rho \oslash g - \frac{\tau}{2}R^0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} K_{ij} &= R_{ijji} = (\rho \oslash g)_{ijji} - \left(\frac{\tau}{2}R^0\right)_{ijji} \\ &= \rho_{jj} + \rho_{ii} - \frac{\rho_{ii} + \rho_{jj} + \rho_{kk}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\rho_{ii} + \rho_{jj} - \rho_{kk}), \end{aligned}$$

y de esta manera $\rho(E_i, E_i)$ determina completamente la curvatura seccional como queríamos ver. \square

Veamos pues que en dimensión 3 el Teorema 4.2 no es cierto. Para ello, consideramos la variedad \mathbb{R}^3 dotada de la métrica

$$g = e^{2h}dx^1 \otimes dx^1 + e^{2k}dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3,$$

donde h y k son funciones diferenciables que dependen únicamente de la coordenada x^3 .

Observación 5.2. Esta variedad es un doble producto deformado de la forma $\mathbb{R} \times_{e^h} \mathbb{R} \times_{e^k} \mathbb{R}$ donde estamos considerando \mathbb{R} con su métrica usual y funciones de deformación $h(x^3), k(x^3)$.

Por otro lado, consideramos la variedad $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$, donde $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ con φ una función diferenciable que también depende únicamente de x^3 . De esta manera, la construcción de nuestro contraejemplo se reduce a probar la existencia de funciones h, k, φ verificando:

- (a) $\varphi' \neq 0$ y $\varphi \neq 0$,
- (b) $\tilde{K}_{\tilde{\rho}} = K_{\rho}$,
- (c) todos los puntos son no isotrópicos respecto a ρ .

Conseguiríamos así dos variedades de dimensión 3, isocurvadas (la identidad sirve como difeomorfismo que preserva la curvatura seccional) y con todos sus puntos no isotrópicos de forma que no son globalmente isométricas (pues $\varphi \neq 0$), contradiciendo así el Teorema 4.2.

Para esto, el primer paso será expresar las condiciones (a), (b) y (c) de formas más manejables. A ello dedicamos los siguientes lemas.

Lema 5.3. *En las condiciones citadas, para que se verifiquen las condiciones (b) y (c) es suficiente con que tener (b') y (c'), siendo:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &\equiv (1 - e^{2\varphi})(h'' + h'k' + h'^2) + \varphi'' + \varphi'(2h' + k') + \varphi'^2 = 0 \\ (b') \quad \mathfrak{A}_2 &\equiv (1 - e^{2\varphi})(k'' + h'k' + k'^2) + \varphi'' + \varphi'(2k' + h') + \varphi'^2 = 0 \\ \mathfrak{A}_3 &\equiv (1 - e^{2\varphi})(h'' + h'^2 + k'' + k'^2) + 2\varphi'' + \varphi'(h' + k') = 0 \\ (c') \quad &h' \neq k' \text{ en todo punto.} \end{aligned}$$

Demostración. Empezamos calculando objetos que nos serán útiles para los cálculos. Denotamos E_i una base ortonormal de \mathbb{R}^3 respecto la métrica g dada por

$$E_1 = e^{-h}\partial_{x^1} \quad E_2 = e^{-k}\partial_{x^2} \quad E_3 = \partial_{x^3}.$$

Recordemos que los símbolos de Christoffel respecto ∂_{x^i} están determinados por la métrica de la siguiente manera

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{k\ell}\{\partial_{x^i}g_{j\ell} + \partial_{x^j}g_{i\ell} - \partial_{x^\ell}g_{ij}\},$$

y en nuestro caso particular tomarán la forma

$$\Gamma_{11}^3 = -e^{2h}h' \quad \Gamma_{22}^3 = -e^{2k}k' \quad \Gamma_{13}^1 = h' \quad \Gamma_{23}^2 = k' \quad (5.1)$$

y el resto serán cero (salvo simetrías). Conocer los símbolos de Christoffel nos permite calcular de manera directa las componentes del tensor de curvatura, pues

$$R_{ijk}{}^l = \frac{\partial\Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_{p=1}^n (\Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^l).$$

Por tanto, en nuestro ejemplo,

$$\begin{aligned} R_{122}{}^1 &= -h'k'e^{2k} & R_{211}{}^2 &= -h'k'e^{2h} \\ R_{133}{}^1 &= -h'' - h'^2 & R_{311}{}^3 &= -e^{2h}(h'^2 + h'') \\ R_{233}{}^2 &= -k'' - k'^2 & R_{322}{}^3 &= -e^{2k}(k'^2 + k'') \end{aligned}$$

y el resto serán cero (salvo simetrías). También podemos deducir a partir de estas las componentes del tensor de Ricci

$$\begin{aligned} \rho(E_1, E_1) &= -(h'' + h'k' + h'^2) \\ \rho(E_2, E_2) &= -(k'' + h'k' + k'^2) \\ \rho(E_3, E_3) &= -(h'' + h'^2 + k'' + k'^2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde el resto son cero. Además, el gradiente y el hessiano de φ toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \varphi'E_n \\ H_\varphi(E_1, E_1) &= h'\varphi' \\ H_\varphi(E_2, E_2) &= k'\varphi' \\ H_\varphi(E_3, E_3) &= \varphi''. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Teniendo en cuenta las igualdades que involucran al tensor de Ricci (2.2) y 3.5, obtenemos que (b) es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\varphi})\rho(Y, Z) &= H_\varphi(Y, Z) - (Y\varphi)(Z\varphi) \\ &\quad + \Delta\varphi g(Y, Z) + \|\nabla\varphi\|^2 g(Y, Z), \end{aligned}$$

y sustituyendo ahora en (5.2) y (5.3), obtenemos las 3 ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\varphi})(h'' + h'k' + h'^2) + \varphi'' + \varphi'(2h' + k') + \varphi'^2 &= 0 \\ (1 - e^{2\varphi})(k'' + h'k' + k'^2) + \varphi'' + \varphi'(2k' + h') + \varphi'^2 &= 0 \\ (1 - e^{2\varphi})(h'' + h'^2 + k'' + k'^2) + 2\varphi'' + \varphi'(h' + k') &= 0 \end{aligned}$$

como buscábamos.

Para probar $(c') \Rightarrow (c)$, supongamos que existe $p \in \mathbb{R}^3$ no isotrópico respecto a ρ , entonces $(K_\rho(X))_p$ es constante para todo campo de vectores X , y así de las dos primeras ecuaciones anteriores deducimos $h' = k'$. \square

Lema 5.4. *En las condiciones que venimos trabajando, la condición (c') es equivalente a la siguiente desigualdad:*

$$\left(\frac{\varphi'' + \varphi'^2}{\varphi'} \right)^2 + \frac{3\varphi'^2 + 2\varphi''}{(1 - e^{2\varphi})} \neq 0. \quad (5.4)$$

Demostración. Usando la Proposición 3.5 obtenemos $\tilde{P} = e^{2\varphi}\rho - \frac{\tau}{2(n-1)}e^{2\varphi}g = e^{2\varphi}P$ y por tanto

$$\begin{aligned} \tilde{C}(X, Y, Z) &= (\tilde{\nabla}_X \tilde{P})(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{P})(X, Z) \\ &= e^{2\varphi} \{ 2X_\varphi P(Y, Z) + \tilde{\nabla}_X P(Y, Z) - 2Y_\varphi P(X, Z) - \tilde{\nabla}_Y P(X, Z) \}. \end{aligned}$$

Recordando ahora la fórmula obtenida para el cambio conforme de la transformación de Levi-Civita en el Lema 2.2 y operando llegamos a

$$\begin{aligned} e^{-2\varphi} \tilde{C}(X, Y, Z) - C(X, Y, Z) &= \\ X_\varphi P(Y, Z) - Y_\varphi P(X, Z) + g(X, Z)P(Y, \nabla\varphi) - g(Y, Z)P(X, \nabla\varphi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Contrayendo ahora en la primera y última componente, usando la Proposición 2.11 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (E_i \varphi) P(Y, E_i) - Y_\varphi P(E_i, E_i) + g(E_i, E_i) P(Y, \nabla\varphi) - g(Y, E_i) P(E_i, \nabla\varphi) \\ &= P(Y, \nabla\varphi) - Y_\varphi \frac{\tau}{2(n-1)} + nP(Y, \nabla\varphi) - P(Y, \nabla\varphi) \end{aligned}$$

para $\{E_i\}$ base ortonormal. Por tanto

$$P(Y, \nabla\varphi) - Y_\varphi \frac{\tau}{2n(n-1)} = 0. \quad (5.6)$$

Ahora bien, dado que

$$\frac{\dot{\rho}}{n-2} = P - \frac{\tau}{2n(n-1)}g, \quad (5.7)$$

deducimos que $\hat{\rho}(Y, \nabla\varphi) = 0$ para cualquier campo de vectores Y .

Gracias a la igualdad (2.4), en nuestro caso particular 3-dimensional obtenemos

$$\tilde{\rho} = \hat{\rho} - H_\varphi + d\varphi \otimes d\varphi + \frac{\Delta\varphi}{3}g - \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{3}g.$$

Si despejamos el operador Hessiano, obtenemos

$$H_\varphi = (1 - e^{2\varphi})\hat{\rho} + d\varphi \otimes d\varphi + \frac{\Delta\varphi}{3}g - \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{3}g,$$

que evaluando en $(\nabla\varphi, \nabla\varphi)$ teniendo en cuenta (5.3) y $\hat{\rho}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) = 0$, se convierte en la siguiente igualdad:

$$\varphi'^2\varphi'' = \varphi'^4 + \frac{h'\varphi' + k'\varphi' + \varphi''}{3}\varphi'^2 - \frac{\varphi'^2}{3}\varphi'^2.$$

Operando conseguimos la relación

$$2(\varphi'' + \varphi'^2) = \varphi'(h' + k'). \quad (5.8)$$

Por otro lado, podemos reescribir el sistema del Lema 5.3 de la siguiente manera equivalente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &\equiv (1 - e^{2\varphi})h'k' + \varphi'(h' + k') + \varphi'^2 = 0 \\ \mathfrak{B}_2 &\equiv (1 - e^{2\varphi})(k'' + k'^2) + \varphi'' + \varphi'k' = 0 \\ \mathfrak{B}_3 &\equiv (1 - e^{2\varphi})(h'' + h'^2) + \varphi'' + \varphi'h' = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde simplemente $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_2 = -\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ y $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ y dividimos por 2. Despejando $h'k'$ en la primera igualdad y gracias a la relación (5.8) llegamos a que

$$h'k' = -\frac{2\varphi'' + 3\varphi'^2}{(1 - e^{2\varphi})}. \quad (5.10)$$

Vamos a probar entonces que $h' \neq k'$ es equivalente a

$$\left(\frac{\varphi'' + \varphi'^2}{\varphi'}\right)^2 + \frac{3\varphi'^2 + 2\varphi''}{(1 - e^{2\varphi})} \neq 0.$$

Suponemos primero que $h' = k'$, entonces el resultado se deduce directamente de (5.8).

Recíprocamente, supongamos que no se tiene la desigualdad que queremos probar, entonces por (5.10) tenemos que

$$h'k' = \left(\frac{\varphi'' + \varphi'^2}{\varphi'}\right)^2,$$

pero entonces (usando de nuevo (5.8)),

$$(h' - k')^2 = 0,$$

de donde deducimos $h' = k'$. □

Hemos reducido el problema a probar la existencia de funciones φ , h y k verificando las condiciones (a), (5.4) y (5.9). Vamos a construirlas.

Si sumamos ahora las dos primeras ecuaciones del Lema 5.3 obtenemos

$$(1 - e^{2\varphi})((h'' + k'') + (h' + k')^2) + 2\varphi'' + 3\varphi'(h' + k') + 2\varphi'^2 = 0,$$

y si sustituimos con ayuda de (5.8) (de donde deducimos también $h'' + k'' = \frac{2\varphi'''}{\varphi'} - \frac{2\varphi''^2}{\varphi'^2} + 2\varphi''$) llegamos a la siguiente ecuación diferencial en φ :

$$\frac{2(1 - e^{2\varphi})}{\varphi'^2} \left(2(\varphi'' + \varphi'^2)^2 + \varphi''\varphi'^2 - \varphi''^2 + \varphi'\varphi''' + \frac{4\varphi'^4 + 4\varphi''\varphi'^2}{1 - e^{2\varphi}} \right) = 0. \quad (5.11)$$

Por la teoría de ecuaciones diferenciales, existe localmente una solución φ para la anterior ecuación verificando $0 < \varphi < 1$, $\varphi' \neq 0$ y

$$\left(\frac{\varphi'' + \varphi'^2}{\varphi'} \right)^2 + \frac{3\varphi'^2 + 2\varphi''}{(1 - e^{2\varphi})} > 0. \quad (5.12)$$

Teniendo ya φ , sea $\phi = k'$ solución de la ecuación diferencial que se obtiene de \mathfrak{B}_2 en (5.9):

$$(1 - e^{2\varphi})(\phi' + \phi^2) + \phi'' + \varphi'\phi = 0,$$

satisfaciendo la condición inicial (que resulta de sustituir h' en \mathfrak{B}_1 usando (5.8)):

$$\phi^2 - \frac{2(\varphi'' + \varphi'^2)}{\varphi'}\phi - \frac{3\varphi'^2 + 2\varphi''}{1 - e^{2\varphi}} = 0.$$

Resolviendo la anterior ecuación en ϕ , obtenemos la condición $\left(\frac{\varphi'' + \varphi'^2}{\varphi'} \right)^2 + \frac{3\varphi'^2 + 2\varphi''}{(1 - e^{2\varphi})} > 0$, por lo que la ecuación diferencial tiene solución. h' queda también totalmente determinada:

$$h' = \frac{2(\varphi'' + \varphi'^2)}{\varphi'} - k'.$$

Lo único que falta es probar que estas funciones así construidas verifican las condiciones (a), (5.4) y (5.9).

La condición (a) siempre se va a cumplir localmente, pues nos hemos restringido a un entorno donde $0 < \varphi < 1$ y $\varphi' \neq 0$.

La condición (5.4) se cumple también por la condición (5.12) impuesta a φ .

Ahora, usando que \mathfrak{B}_2 se cumple directamente por nuestra elección de k' , se tiene también $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_3 = 0$ sin más que operar sobre \mathfrak{B}_1 y \mathfrak{B}_3 utilizando (5.8) y (5.15). Por tanto, se verifican las ecuaciones (5.9), de donde se sigue la existencia de variedades isocurvadas en dimensión tres que no son localmente isométricas.

5.2. Curvatura y métrica en dimensión 3

¿Qué podemos decir entonces sobre la relación entre curvatura y métrica en dimensión 3? Si bien no vamos a tener un resultado tan potente como en dimensiones superiores, podemos añadir condiciones bajo las que sí es posible garantizar que el carácter isocurvado garantiza el carácter isométrico.

El primer paso será caracterizar estas isometrías entre variedades isocurvadas de dimensión 3 mediante la constante que define el siguiente resultado. Recordemos que denotamos por $\mathring{\rho}$ el tensor de Ricci sin traza, esto es, $\mathring{\rho} = \rho - \frac{\tau}{n}g$; y escribimos $\mathring{\text{Ric}}$ para su tensor $(1, 1)$ asociado. Presentamos los siguientes lemas previos, de los que omitiremos sus demostraciones y proponemos como referencia el artículo de Nasu [7].

Lema 5.5. [7] Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades de Riemann isocurvadas relacionadas por un cambio conforme $f^*\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, las funciones asociadas φ y f cumplen:

1. Las curvas integrales del campo $\nabla\varphi$ son segmentos de geodésicas en un entorno de un punto $p \in M$ verificando $(\nabla\varphi)_p \neq 0$,
2. $d(\|\nabla\varphi\|^2) = \frac{2}{n}\{\Delta\varphi + (n-1)\|\nabla\varphi\|^2\}d\varphi$.

Lema 5.6. [7] Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades de Riemann isocurvadas relacionadas por un cambio conforme $f^*\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Existen funciones diferenciables ρ y ψ en $M' = \{p \in M / (d\varphi)_p \neq 0\}$ tal que

1. $d\tau = \rho d\varphi$,
2. $d\rho = \psi d\varphi$.

La función ρ esta dada de forma explícita por

$$\rho = \frac{2n(e^{2\varphi} - 1)}{(n-2)\|\nabla\varphi\|^2} \text{tr}_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}}). \quad (5.13)$$

Lema 5.7. [7] En las hipótesis del lema anterior, se tiene en M'

$$\psi\|\nabla\varphi\|^2 + \frac{4}{3}\rho\nabla\varphi + \frac{2}{3}\rho\|\nabla\varphi\|^2 = 0.$$

Lema 5.8. [7] Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades isocurvadas relacionadas por un cambio conforme $f^*\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ sobre la clausura de puntos no isotrópicos, que suponemos igual a M . Entonces la función

$$F = (e^{-2\varphi} - 1)\|\nabla\varphi\|^2 \text{tr}_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}}). \quad (5.14)$$

es constante en todo M .

Demostración. Suponemos que $M' \neq \emptyset$, pues en caso contrario el resultado se cumple trivialmente. Si despejamos $tr_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}})$ usando (5.13), reescribimos F de la siguiente manera:

$$F = -\frac{\rho \|\nabla\varphi\|^4}{6e^{2\varphi}}.$$

Aplicando ahora la diferencial a la anterior expresión valiéndonos del Lema 5.6 conseguimos:

$$-6dF = e^{-2\varphi} \|\nabla\varphi\|^2 (\psi \|\nabla\varphi\|^2 + \frac{4}{3}\rho\Delta\varphi + \frac{2}{3}\rho\|\nabla\varphi\|^2) d\varphi,$$

y por el Lema 5.7 deducimos que $dF = 0$ en los puntos de M' . Por tanto, F es constante en cada componente conexa de M' , luego si $M = M'$, el resultado está probado. Si $M \neq M'$, entonces $F = 0$ por la expresión (5.14). \square

Por tanto, para aquellos difeomorfismos $f : M \rightarrow \tilde{M}$ que preserven la curvatura seccional definimos la constante dada por el Lema anterior $c_f = (e^{-2\varphi} - 1) \|\nabla\varphi\|^2 tr_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}})$.

Teorema 5.9. *Sea $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un difeomorfismo que preserve la curvatura seccional entre dos variedades de Riemann de dimensión $n = 3$ y supongamos que el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en M . Entonces, f es una isometría si y solo si $c_f = 0$.*

Demostración. Si f es una isometría, entonces necesariamente $\varphi = 0$, por lo que $e^{-2\varphi} = 1$ y por tanto $c_f = 0$ como queríamos.

Recíprocamente, si $e^{-2\varphi} = 1$, f es trivialmente una isometría. Si $\nabla\varphi = 0$, entonces φ sería una función constante, y por tanto por el Lema 2.3 $R = \tilde{R}$. Pero dado que $\tilde{K} = e^{2\varphi}K$, necesariamente $\varphi = 0$ luego f es una isometría.

Como por hipótesis $c_f = (e^{-2\varphi} - 1) \|\nabla\varphi\|^2 tr_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}}) = 0$, necesariamente $tr_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}}) = 0$, y dado que $\mathring{\text{Ric}}$ es autoadjunto (por la simetría del tensor de Ricci), $tr_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}}) = tr_g(\mathring{\text{Ric}} \circ \mathring{\text{Ric}}^*) = \langle\langle \mathring{\text{Ric}}, \mathring{\text{Ric}} \rangle\rangle = 0$, luego $\rho = \frac{\tau}{n}g$.

Dado que el tensor de Weyl en dimensión 3 es idénticamente nulo, obtenemos la siguiente descomposición del tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} R &= W + P \oslash g = P \oslash g = \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)}g \right) \oslash g \\ &= \frac{1}{n-2} \left(\frac{\tau}{n}g - \frac{\tau}{2(n-1)}g \right) \oslash g \\ &= \left(\frac{\tau}{n(n-2)} - \frac{\tau}{2(n-1)(n-2)} \right) g \oslash g \\ &= \left(\frac{\tau}{2n(n-2)} \right) R^0. \end{aligned}$$

Luego la curvatura seccional sería constante en dicho entorno abierto, lo que contradice la hipótesis de que el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en M . \square

El Teorema anterior es de gran utilidad, pues nos permite deducir resultados en dimensión 3 para las que variedades isocurvadas sean globalmente isométricas, como presentamos a continuación.

Corolario 5.10. *En las hipótesis del Teorema 5.9, si (M, g) es localmente conformemente llana entonces f es una isometría.*

Demostración. Como vimos en la demostración del Lema 5.4, $\mathring{\rho}(Y, \nabla\varphi) = 0$ para cualquier campo de vectores Y .

Por otro lado, teniendo en cuenta (5.6) y (5.7) la ecuación (5.5) se convierte en

$$(X\varphi)\frac{\mathring{\rho}(Y, Z)}{n-2} - (Y\varphi)\frac{\mathring{\rho}(X, Z)}{n-2} = 0$$

debido a que el tensor de Weyl se anula en el caso localmente conformemente llano. Poniendo $Y = \nabla\varphi$ y usando que $\mathring{\rho}(\nabla\varphi) = 0$, obtenemos $\|\nabla\varphi\|^2 = 0$, por lo que $c_f = 0$ y f sería así una isometría. \square

Corolario 5.11. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.9, si M es compacta entonces f es una isometría.*

Demostración. La función asociada al cambio conforme $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ es ahora una función continua definida en un compacto, luego alcanza un punto crítico en M , por lo que en dicho punto $\nabla\varphi = 0$, luego $c_f = 0$ y por el Teorema 5.9 f es una isometría. \square

Como vemos, aunque en dimensión 3 la curvatura seccional no aporte la suficiente información para tener resultados tan potentes como en dimensiones superiores, si añadimos ciertas hipótesis aún podemos hacer un buen estudio de la métrica a partir de la curvatura. En este último resultado que viene, se pone de manifiesto que la completitud de una variedad de Riemann también juega un papel importante en el carácter isométrico.

Teorema 5.12. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.9, supongamos que g, \tilde{g} son dos métricas completas. Si f es un difeomorfismo sobreyectivo y τ no se anula, entonces f es una isometría.*

Demostración. Supongamos que f no es una isometría. Como $\tau \neq 0$ y M es conexo, $\tau > 0$ o $\tau < 0$, y así o bien $(1 - e^{2\varphi})\tau$ o bien $(1 - e^{-2\varphi})\tau$ toma valores positivos.

f es sobreyectiva y se cumple $\tilde{\varphi}_{f^{-1}} = -\varphi_f \circ f^{-1}$ (pues si $\tilde{R} = e^{2\varphi_f} R$, entonces $R = e^{-2\varphi} \tilde{R}$ y $(f^{-1})^*(e^{-2\varphi_f}) = e^{-2\varphi_f \circ f^{-1}}$). Tenemos por tanto:

$$f^*((1 - e^{2\tilde{\varphi}_{f^{-1}}})\tilde{\tau}) = (1 - e^{2\tilde{\varphi}_{f^{-1}}})\tilde{\tau} \circ f = (1 - e^{-2\varphi_f})\tau.$$

Por tanto, podemos asumir que $(1 - e^{2\varphi})\tau > 0$, en caso contrario basta tomar f^* . El flujo de $\nabla\varphi$, $\phi_p(t)$, verificando $\phi_p(0) = p$ es una geodésica (apartado (1) del Lema anterior). Asumiremos $\phi_p(t)$ parametrizada por longitud de arco. De este modo, por el apartado (2) del Lema anterior, obtenemos

$$2\|\nabla\varphi\|\frac{d\|\nabla\varphi\|}{dt} = \frac{2}{3}\|\nabla\varphi\|(\Delta\varphi + 2\|\nabla\varphi\|^2).$$

Por otro lado usando el Lema 2.5 conseguimos

$$(1 - e^{2\varphi})\tau = 4\Delta\varphi + 2\|\nabla\varphi\|^2.$$

Despejando $\Delta\varphi$ de ambas ecuaciones llegamos a

$$\frac{\|\nabla\varphi\|^2}{dt} = \frac{(1 - e^{2\phi})\tau}{12} + \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2 \quad (5.15)$$

a lo largo de $\phi_p(t)$.

Por comodidad llamaremos $x(t) = \|\nabla\varphi\|(t)$. Consideramos pues la ecuación diferencial auxiliar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x(t)^2 \quad (5.16)$$

con solución $x(t) = \frac{-2}{t+c}$ con $c \in \mathbb{R}$. Si pedimos la condición inicial $x(0) = \|\nabla\varphi\|_p$, entonces $x(t) = \frac{-2}{t+2\|\nabla\varphi\|_p^{-1}}$.

Ahora bien, la solución de la ecuación diferencial (5.15) es siempre mayor que la solución de (5.16) en el intervalo $[0, 2\|\nabla\varphi\|_p^{-1})$ pues $(1 - e^{2\varphi})\tau$ es siempre mayor que 0, por lo que necesariamente la solución de (5.15) ha de llegar a una singularidad en un tiempo finito. Esto es imposible teniendo en cuenta que $\phi_p(t)$ debe extenderse indefinidamente por ser geodésica y la métrica g ser completa. \square

Bibliografía

- [1] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [2] R. S. Kulkarni, Curvature and metric, *Ann. of Math.* **91** (1970), 311–331.
- [3] E. Kreyszig, *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*, University of Toronto Press, Toronto, 1968.
- [4] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **176**. Springer, Cham, 2018.
- [5] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **218**. Springer, New York, 2013.
- [6] S. B. Myers, N. E. Steenrod, The Group of Isometries of a Riemannian Manifold, *Ann. of Math.* **40** (1939), 400– 416.
- [7] T. Nasu, Curvature and metric in Riemannian 3-manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 194– 206.
- [8] S. T. Yau, Curvature preserving diffeomorphisms, *Ann. of Math.* **100** (1974), 121–130.