TOMÁS OTERO CASAL

MÉTRICAS DE EINSTEIN EN GRUPOS DE LIE LORENTZIANOS

152b
2022

Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TOMÁS OTERO CASAL

MÉTRICAS DE EINSTEIN EN GRUPOS DE LIE LORENTZIANOS

152b

2022

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MESTRADO UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Mestrado

Métricas de Einstein en grupos de Lie lorentzianos

Tomás Otero Casal

Xullo, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice xeral

Resumo

O obxectivo deste traballo é estudar a existencia de métricas lorentzianas de Einstein invariantes á esquerda en grupos de Lie de dimensión 4. Para isto, axudámonos da correspondencia entre as métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie e os produtos escalares nas súas álxebras de Lie para traballar con estas a nivel alxébrico. Proporciónase unha clasificación completa de ditas métricas, así como un estudo da xeometría que presenta cada un dos exemplos. Móstrase que as métricas lorentzianas de Einstein invariantes á esquerda son localmente simétricas, ondas planas Ricci-chás ou se corresponden con tres clases homotéticas de métricas non simétricas.

Abstract

The goal of this work is to study the existence of left-invariant Einstein Lorentzian metrics in 4-dimensional Lie groups. For this purpose, we use the correspondence between left-invariant metrics on Lie groups and inner products in their Lie algebras in order to work with them at the algebraic level. We give a complete classification of Einstein metrics on 4-dimensional Lorentzian Lie gropus and analyze the geometry of the different examples. The only non-symmetric examples correspond to Ricci-flat plane waves and three homothetic classes of Lie groups with left-invariant Lorentzian metrics.

Introdución

As métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie proporcionan exemplos de métricas distinguidas para determinadas propiedades xeométricas tales como estruturas Kähler [22], estruturas homoxéneas cíclicas [7], [12], solitóns de Ricci [18] etc. É importante mencionar que a clase de métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie é moi ampla, non só polo feito de que exista unha infinidade de grupos de Lie, senón tamén porque o conxunto de métricas invariantes pola esquerda (no caso conexo e simplemente conexo) se corresponde co de produtos escalares nas correspondentes álxebras de Lie.

Un aspecto importante de todas estas cuestións son os problemas de existencia ou non existencia destas métricas, isto é, decidir cando un grupo de Lie dado admite métricas invariantes á esquerda verificando algunha propiedade xeométrica preestablecida e, de ser o caso, describir o espazo destas módulo isometrías. Neste traballo centrámonos no estudo da existencia das métricas de Einstein.

As métricas de Einstein, sendo críticas para o funcional curvatura escalar total, son as que presentan unha distribución máis uniforme da súa curvatura. En dúas dimensións, a curvatura escalar total é un invariante topolóxico en virtude do Teorema de Gauss-Bonnet, polo que toda métrica é solución das ecuacións de Einstein. Dado que as métricas de Einstein en dimensión tres son sempre de curvatura seccional constante, a primeira situación non trivial aparece en dimensión catro.

As métricas de Einstein invariantes á esquerda sobre grupos de Lie de dimensión catro foron clasificadas por Jensen [14] para o caso riemanniano, mostrando que todas elas son localmente simétricas e, polo tanto, localmente isométricas a espazos de curvatura seccional constante, a superficies kählerianas de curvatura seccional holomorfa constante ou ao produto de superficies coa mesma curvatura de Gauss constante. Unha consecuencia importante do traballo de Jensen e da clasificación dos espazos homoxéneos de dimensión catro feita por Bérard-Bergery [2] é que os exemplos anteriores proporcionan todas as métricas riemannianas de Einstein homoxéneas en dimensión catro.

Un resultado análogo non é válido no ámbito lorentziano, onde as variedades ondas planas proporcionan exemplos Ricci-chans homoxéneos (incluso simétricos) que non son chans, o que supón unha diferenza esencial coa situación riemanniana [1], [25]. A existencia de espazos homoxéneos lorentzianos non redutivos, algúns dos cales se realizan localmente como métricas invariantes pola esquerda en grupos de Lie, presenta outra diferenza esencial con respecto ao caso definido positivo. Neste sentido, é importante sinalar que a completitude xeodésica non está garantida para os espazos homoxéneos lorentzianos; en particular, as métricas lorentzianas invariantes pola esquerda en grupos de Lie non son necesariamente completas.

As métricas lorentzianas de Einstein invariantes á esquerda en grupos de Lie de dimensión 4 foron clasificadas por Calvaruso e Zaeim [9], quen mostraron a existencia de 16 familias de métricas con curvatura seccional non constante. O noso obxectivo neste traballo é clarificar dita clasificación, para o que procedemos de forma distinta mediante unha descrición das métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie de dimensión 4. Podemos así obter de forma sinxela as expresións do tensor de Ricci en cada caso e analizar a xeometría subxacente a cada exemplo.

A lista de grupos de Lie lorentzianos conexos e simplemente conexos en dimensión 4 pode ser descrita de modo sinxelo: trátase dos grupos produto $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $SU(2) \times \mathbb{R}$ e os produtos semidirectos correspondentes a grupos de Lie unimodulares en dimensión tres $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$, $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$, $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$. O resultado esencial do traballo pode ser recollido no seguinte teorema:

Teorema 6.2. *Unha métrica lorentziana de Einstein invariante á esquerda nun grupo de Lie de dimensión* 4 *é ou ben simétrica, ou unha onda plana, ou localmente homotética a unha das seguintes métricas en* $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$*:*

(i) *As métricas Ricci-chás determinadas, nunha base ortonormal* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *con* e_3 *temporal, por*

$$[e_1, e_4] = -2e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2 + \sqrt{3}e_3, \qquad [e_3, e_4] = -\sqrt{3}e_2 + e_3,$$

que non son ondas planas.

(ii) *As métricas non Ricci-chás con operador de Weyl nilpotente en dous pasos determinadas, nunha base pseudo-ortonormal* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *con* $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = \langle u_4, u_4\rangle = 1$*, por*

$$[u_1, u_4] = -u_1 + \delta u_2, \qquad [u_2, u_4] = 5u_2, \qquad [u_3, u_4] = 2u_3,$$

onde δ *é un parámetro real distinto de cero. Estas métrica son localmente isométricas ao único espazo non redutivo lorentziano de Einstein con curvatura seccional non constante.*

(iii) *As métricas non Ricci-chás con operador de Weyl nilpotente en tres pasos determinadas, nunha base pseudo-ortonormal* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *con* $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = \langle u_4, u_4\rangle = 1$*, por*

$$[u_1, u_4] = 4u_1, \qquad [u_2, u_4] = -2u_2 + \delta u_3, \qquad [u_3, u_4] = \delta u_1 + u_3,$$

onde δ *é un parámetro real distinto de cero.*

Obtemos, desta maneira, que os grupos $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ e $SU(2)\times\mathbb{R}$ non admiten estruturas de Einstein para o caso lorentziano. Unha caracterización da xeometría dos exemplos para o resto de grupos proporciónase no seguinte teorema:

Teorema 6.3. *Sexa* (G, g) *un grupo de Lie lorentziano de dimensión* 4 *con* $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$. *Se* g *é unha métrica de Einstein, entón tense unha das seguintes posibilidades:*

(a) $G = \tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$, *e* (G, g) *é localmente isométrica ao espazo de Minkowski* $\mathbb{R}^4_1$.

(b) $G = E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$, *e* (G, g) *é localmente isométrica a* $\mathbb{R}^4_1$, *ao pseudo-espazo hiperbólico* $\mathbb{H}^4_1(r)$ *ou a un produto de planos hiperbólicos coa mesma curvatura seccional* $\mathbb{H}^2_1(r) \times \mathbb{H}^2(r)$.

(c) $G = H_3 \rtimes \mathbb{R}$, *e* (G, g) *é unha onda plana ou é localmente isométrica a* $\mathbb{R}^4_1$ *ou* $\mathbb{H}^4_1(r)$.

(d) $G = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ *e* g *é de curvatura seccional constante, unha onda plana, ou un dos exemplos dados no teorema 6.2.*

En canto á estrutura da memoria, no capítulo 1 establécese a notación necesaria para o desenvolvemento do traballo, poñendo especial énfase na introdución das variedades fronte de onda e os espazos simétricos de Lorentz.

Os grupos de Lie lorentzianos de dimensión catro introdúcense no capítulo 2 a partir dos grupos de Lie unimodulares 3-dimensionais. Para o estudo das métricas nestes grupos, analizaranse os distintos produtos escalares nas correspondentes álxebras de Lie, para así poder afrontar o problema dende un punto de vista alxébrico. Dado que a restrición dun produto escalar lorentziano a un subespazo dado pode ser lorentziana, riemanniana ou dexenerada, preséntanse tres situacións esencialmente diferentes: as extensións lorentzianas de álxebras de Lie riemannianas, as extensións lorentzianas de álxebras lorentzianas e as extensións lorentzianas de álxebras dexeneradas.

As extensións lorentzianas de álxebras de Lie riemannianas analízanse no capítulo 3, mostrándose que esta situación é moi ríxida. Os únicos exemplos de métricas de Einstein invariantes á esquerda nesta situación son as de curvatura seccional constante en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ ou $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$.

O capítulo 4 adícase a analizar as extensións lorentzianas de álxebras de Lie lorentzianas. Esta situación, que é moito máis rica que a analizada no capítulo precedente, proporciona os exemplos mencionados no teorema 6.2. As métricas de Lorentz sobre álxebras unimodulares de dimensión tres están descritas en termos do seu operador de estrutura, e as súas extensións catro-dimensionais exprésanse en termos das derivacións sobre ditas álxebras. Todos estes operadores presentan unha parte autoadxunta que no ámbito lorentziano é moito máis complexa de estudar que no caso definido positivo, xa que pode presentar catro posibles formas de Jordan.

O quinto capítulo céntrase na análise das extensións lorentzianas de álxebras onde a métrica é dexenerada. Mostramos que os grupos de Lie que admiten métricas cuxa restrición á subálxebra derivada sexa dexenerada se corresponden cos exemplos xa estudados nos capítulos 3 e 4 ou ben son métricas chás ou ondas planas homoxéneas en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ e $H_3 \rtimes \mathbb{R}$.

Finalmente, no capítulo 6, proporciónase unha visión xeral dos resultados obtidos, englobando a análise dos distintos capítulos para proporcionar resultados xerais sobre a clasificación de métricas de Einstein en grupos de Lie lorentzianos 4-dimensionais. Achéganse tamén algunhas posibles liñas de estudo para estender os resultados obtidos neste traballo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Variedades semi-riemannianas

Unha *variedade semi-riemanniana* (M, g) de dimensión n é unha variedade diferenciable M de dimensión n dotada dun campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico, non dexenerado e de índice constante, que chamamos *tensor métrico*; isto é, unha asignación C^∞ a cada punto $p \in M$ dun produto escalar g_p en T_pM de índice fixado. A miúdo denótase $\langle X, Y\rangle_p = g_p(X, Y)$.

O valor $0 \leq \nu \leq n$ do índice de g_p en cada punto chámase o índice de M. Se $\nu = 0$, dise que M é unha variedade riemanniana, e neste caso cada g_p é un produto escalar definido positivo en T_pM. Se $n \geq 2$ e $\nu = 1$, dicimos que M é unha variedade lorentziana.

Se $(V, \langle \cdot\,, \cdot\rangle)$ é un espazo vectorial dotado dun produto escalar, dise que un vector $v \in V$ é

- espacial se $\langle v, v\rangle_p > 0$ ou $v = 0$,
- nulo se $\langle v, v\rangle_p = 0$,
- temporal se $\langle v, v\rangle_p < 0$.

Dado un espazo vectorial dotado cun produto escalar $(V, \langle \cdot\,, \cdot\rangle)$, podemos descompoñer $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$, onde $V_0 = \{v \in V | \langle v, x\rangle = 0, \forall x \in V\}$ e V_+, V_- son subespazos de V nos que a métrica é definida positiva e definida negativa, respectivamente. Defínese a *signatura* de $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ como a tripla (p, q, r), onde $p = \dim(V_+)$, $q = \dim(V_-)$ (o índice de q), e $r = \dim(V_0)$. A lei de inercia de Sylvester asegura que esta definición é independente da descomposición escollida.

Se $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ é un sistema de coordenadas nun aberto $U \subset M$, as compoñentes de g en (U, φ) son $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Desta maneira, se X e Y son campos de vectores de forma que $X_{|U} = \sum X^i\partial_i$ e $Y_{|U} = \sum Y^j\partial_j$, entón

$$g(X, Y)_{|U} = \sum g_{ij}X^iY^j.$$

Como g é simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$, e podemos escribir

$$g_{|U} = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Isometrías

Unha *isometría* entre dúas variedades semi-riemannianas (M, g_M) e (N, g_N) é un difeomorfismo $\phi\colon M \to N$ que conserva o tensor métrico, isto é, $\phi^* g_N = g_M$. Noutras palabras, para todo $p \in M$, e para $v, w \in T_pM$, $\langle v, w\rangle_p = \langle \phi_{p*}v, \phi_{p*}w\rangle_{\phi(p)}$. Dúas variedades semi-riemannianas dinse isométricas se existe unha isometría entre elas.

A conexión de Levi-Civita

Unha *conexión* nunha variedade M é unha aplicación $D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ satisfacendo:

(**a**) $D_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda D_X Y + \mu D_X Z$,

(**b**) $D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y$,

(**c**) $D_{fX+hZ} Y = f D_X Y + h D_Z Y$.

Onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, h \in \mathcal{F}(M)$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Unha conexión D nunha variedade semi-riemanniana (M, g) dise adaptada á métrica se $X\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$, e simétrica se $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$. Dada unha variedade semi-riemanniana, existe nela unha única conexión simétrica e adaptada á métrica, que chamamos a conexión de Levi-Civita en M e denotamos por ∇. Ademais, dita conexión está determinada pola fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Curvatura riemanniana

Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana e ∇ a súa conexión de Levi-Civita. Defínese o *tensor curvatura* (de Riemann) de tipo $(1, 3)$ ou *operador curvatura* de M como

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z = \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \quad \text{para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

O tensor curvatura de tipo $(0, 4)$ de M é o tensor

$$R(X, Y, Z, U) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, U),$$

onde $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 1.1 (Simetrías do tensor curvatura)**.** *Sexan* X, Y, Z, U, V *campos de vectores nunha variedade semi-riemanniana* M*. Entón o tensor curvatura de tipo* $(0, 4)$ *de* M *cumpre as seguintes simetrías:*

1. $R(X, Y, Z, U) = -R(Y, X, Z, U) = -R(X, Y, U, Z)$,
2. $R(X, Y, Z, U) = R(Z, U, X, Y)$,
3. $R(X, Y, Z, U) + R(Y, Z, X, U) + R(Z, X, Y, U) = 0$,
4. $(\nabla_X R)(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, U, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, U, V) = 0$.

As igualdades 3 *e* 4 *denomínanse, respectivamente, primeira e segunda identidades de Bianchi (ou identidades de Bianchi alxébrica e diferencial).*

Un tensor de tipo $(0, 4)$ sobre un espazo vectorial cun produto escalar $(V, \langle\, \cdot\, , \cdot\, \rangle)$ que verifique as igualdades 1, 2 e 3 anteriores dise un *tensor curvatura alxébrico*. Un exemplo deste tipo de tensores vén dado polo *tensor curvatura estándar* $R^0(x, y, z, t) = \langle x, z\rangle\langle y, t\rangle - \langle x, t\rangle\langle y, z\rangle$.

Definición 1.2. Sexa R o tensor curvatura de tipo $(0, 4)$ dunha variedade semi-riemanniana M, e x, y vectores tanxentes a M nun punto p xerando un plano non dexenerado $\pi \subset T_pM$. Defínese a *curvatura seccional* de π como

$$K(\pi) = \frac{R(x, y, x, y)}{R^0(x, y, x, y)},$$

onde se pode comprobar que $K(\pi)$ é independente da elección dos x, y. Así, unha variedade ten curvatura seccional constante c se, e soamente se, o seu tensor curvatura de tipo $(0, 4)$ é un múltiplo do tensor curvatura estándar $R = cR^0$ en cada punto.

Dúas variedades completas e simplemente conexas de curvatura seccional constante son isométricas se, e soamente se, teñen a mesma dimensión, índice e curvatura (ver, por exemplo, [21]). Nestas condicións, unha variedade semi-riemanniana de dimensión n e índice ν con curvatura seccional constante c é isométrica a un dos seguintes modelos:

- A pseudoesfera $\mathbb{S}^n_\nu(r)$ se $c > 0$, onde $r = \frac{1}{\sqrt{c}}$.
- O pseudo-espazo $\mathbb{R}^n_\nu$ se $c = 0$.
- O pseudo-espazo hiperbólico $\mathbb{H}^n_\nu(r)$ se $c < 0$, onde $r = \sqrt{\frac{-1}{c}}$.

Definición 1.3. Sexa $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ un espazo vectorial dotado dun produto escalar e R un tensor curvatura alxébrico definido sobre V. Defínese o *tensor de Ricci* asociado a R como

$$\rho(x, y) = \operatorname{tr}\{z \mapsto \mathcal{R}(x, z), y\}, \quad \text{para } x, y, z \in V,$$

onde $\mathcal{R}$ é o *operador curvatura* de tipo $(1, 3)$ definido por $\langle \mathcal{R}(x, y)z, t\rangle = R(x, y, z, t)$.

Dada unha base ortonormal $\{e_i\}$ de V, o tensor de Ricci pódese expresar como

$$\rho(x,y) = \sum_i \langle \mathcal{R}(x,e_i)y, e_i \rangle,$$

e séguese, grazas ás simetrías de R, que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

O *operador de Ricci* asociado a R, *Ric*, defínese como o tensor de tipo $(1,1)$ verificando

$$\langle \mathrm{Ric}(x), y \rangle = \rho(x,y), \quad \text{para todo } x, y \in V.$$

Definición 1.4. Sexa $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espazo vectorial dotado dun produto escalar. A *curvatura escalar* dun tensor curvatura alxébrico é

$$\tau = \operatorname{tr}\mathrm{Ric}\,.$$

No que segue, dada unha variedade semi-riemanniana, referirémonos ao campo de tensores de tipo $(0,2)$ resultante de considerar o tensor de *Ricci* asociado á curvatura R en cada punto como o tensor de Ricci da variedade, e á curvatura escalar en cada punto como a curvatura escalar desta.

Definición 1.5. Unha variedade semi-riemanniana (M,g) de dimensión n dise que é unha *variedade de Einstein* se o seu tensor de Ricci é un múltiplo da métrica, é dicir, se existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\rho = \lambda g.$$

Séguese, tomando trazas, que $\lambda = \frac{\tau}{n}$. Unha variedade semi-riemanniana é entón de Einstein se, e soamente se,

$$\rho = \frac{\tau}{n} g.$$

1.2. O tensor de Weyl. Variedades localmente conformemente chás

Sexa (M,g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión n. Defínese o *tensor de Schouten* de (M,g) como o campo de tensores de tipo $(0,2)$ dado por

$$S = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g\right).$$

A partir do tensor de Schouten, defínese o *tensor de Weyl* de (M,g) como o campo de tensores de tipo $(0,4)$ dado por

$$W = R - S \odot g,$$

onde $S \odot g$ denota o produto de Kulkarni-Nomizu

$$\begin{aligned}(S \odot g)(X,Y,Z,T) =& S(X,Z)\, g(Y,T) - S(X,T)\, g(Y,Z) \\ &+ g(X,Z)\, S(Y,T) - g(X,T)\, S(Y,Z),\end{aligned}$$

para calquera campos de vectores X, Y, Z, T sobre M.

Observación 1.6. Unha variedade (M, g) ten curvatura seccional constante c se, e soamente se, $R = cR^0 = \frac{c}{2} g \odot g$. Neste caso, o tensor de Ricci é $\rho = (n-1)cg$, e a curvatura escalar $\tau = n(n-1)c$. Así, o tensor de Schouten é $S = \frac{1}{2}cg$, e o tensor de Weyl $W = R - S \odot g = \frac{1}{2}cg \odot g - \frac{1}{2}cg \odot g = 0$, co que unha variedade con curvatura seccional constante é de Einstein e ten tensor de Weyl nulo.

Reciprocamente, dado que o tensor de Schouten dunha variedade de Einstein é $S = \frac{\tau}{2n(n-1)} g$, o tensor curvatura de M vén dado por $R = W + S \odot g = W + \frac{\tau}{2n(n-1)} g \odot g$. Desta maneira, unha variedade de Einstein con tensor de Weyl nulo ten curvatura seccional constante $c = \frac{\tau}{n(n-1)}$.

Observación 1.7. Séguese das simetrías do tensor curvatura que o tensor de Weyl se anula sempre en dimensión tres, polo que o tensor curvatura dunha variedade tridimensional vén dado por $R = S \odot g$. Unha consecuencia inmediata disto é que en dimensión 3 unha variedade é de Einstein se, e soamente se, ten curvatura seccional constante [17, th. 6.13].

Dúas métricas g e $\overline{g}$ sobre unha variedade M dinse conformemente equivalentes se existe unha función $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ de maneira que $\overline{g} = e^{2\sigma} g$. O tensor de Weyl de tipo $(1, 3)$, determinado por $g(\mathcal{W}(X, Y)Z, T) = W(X, Y, Z, T)$, é invariante por transformacións conformes, isto é $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$, mentres que o tensor de Weyl de tipo $(0, 4)$ se reescala polo factor conforme $\overline{W} = e^{2\sigma} W$ (véxase [17]).

Unha variedade (M, g) é *localmente conformemente chá* se para calquera punto $p \in M$ existe unha veciñanza aberta $\mathcal{U}$ de p tal que $g_{|U}$ é conformemente equivalente a unha métrica chá, é dicir, se existe unha función $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U)$ de maneira que $\overline{g}_{|U} = e^{2\sigma} g_{|U}$ é unha métrica chá en U. Como se viu anteriormente que o tensor de Weyl dunha variedade chá é 0, o tensor de Weyl dunha variedade localmente conformemente chá tamén se anula. Schouten demostrou que o recíproco deste resultado é tamén certo para dimensión $n \geq 4$ (ver [17, teorema 8.31]), polo que unha variedade de dimensión $n \geq 4$ é localmente conformemente chá se, e soamente se, o seu tensor de Weyl se anula. En particular, toda variedade con curvatura seccional constante é localmente conformemente chá.

1.3. Variedades fronte de onda

Sexa (M, g) unha variedade lorentziana, e $\mathcal{L}$ unha distribución sobre M. $\mathcal{L}$ dise *paralela* (ou invariante por transporte paralelo) se $\nabla_X \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ para todo campo de vectores X sobre M. Utilizando o carácter paralelo do tensor métrico, tense que a distribución $\mathcal{L}$ é paralela se, e soamente se, a distribución ortogonal $\mathcal{L}^\perp$ é paralela (isto é, $\nabla \mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{L}^\perp$).

Nesta sección centrarémonos en distribucións de dimensión 1, polo que supoñendo que $\mathcal{L}$ está localmente xerada por un campo de vectores Y, entón o carácter paralelo de $\mathcal{L}$ é equivalente a que o campo de vectores sexa recurrente, isto é, $\nabla Y = \omega \otimes Y$ para algunha 1-forma ω. En particular, todo campo de vectores paralelo é recurrente.

Se a restrición da métrica a $\mathcal{L}$ é non dexenerada ou, equivalentemente, $\mathcal{L}$ está localmente xerada por un campo de vectores Y non nulo, entón pódese descompoñer localmente a variedade M como un produto $\mathbb{R} \times N$, onde N é unha variedade integral da distribución $Y^\perp$. Cando a distribución $\mathcal{L}$ está xerada localmente por un campo de vectores nulo, tense que $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp \neq \{0\}$, polo que non dá lugar a unha descomposición local como produto. Brinkmann [5] demostrou a existencia de sistemas de coordenadas adaptadas nesta situación. Centrándose no ámbito de dimensión 4, unha variedade de Lorentz M dise que é unha *onda de Brinkmann* se existe nela unha distribución unidimensional nula paralela (localmente xerada por un campo de vectores U nulo e recurrente). Neste caso existen coordenadas locais (u, v, x^1, x^2) sobre M de maneira que a métrica se expresa como

$$g = du \circ dv + H(u, v, x^1, x^2) dv \circ dv + g_{ij}(v, x^1, x^2) dx^i \circ dx^j + b_i(v, x^1, x^2) dx^i \circ dv \quad (1.1)$$

para certas funcións H, g_{ij} e b_i, onde '$\circ$' denota o produto simétrico $\omega \circ \eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$, e $\partial_u = U$. Ademais, a distribución $\mathcal{L}$ está xerada por un campo de vectores nulo paralelo se, e soamente se, $\partial_u H = 0$. Neste caso, as coordenadas locais poden ser elixidas de forma que [24]

$$g = du \circ dv + g_{ij}(v, x^1, x^2) dx^i \circ dx^j. \quad (1.2)$$

Seguindo a discusión feita en [19], unha variedade *fronte de onda*, ou *pp-wave*, é unha onda de Brinkmann localmente xerada por un campo de vectores nulo paralelo que é ademais transversalmente chá, isto é, o tensor curvatura verifica

$$\mathcal{R}(X, Y) = 0$$

para calquera campos de vectores $X, Y \in \mathcal{L}^\perp$. Toda variedade fronte de onda admite coordenadas locais (u, v, x^1, x^2) de forma que o tensor métrico se expresa como

$$g = du \circ dv + H(v, x^1, x^2) dv \circ dv + dx^i \circ dx^i. \quad (1.3)$$

O seguinte criterio de caracterización para variedades fronte de onda resultará de grande utilidade no desenvolvemento do traballo:

Lema 1.8. *[19] Sexa (M, g) unha onda de Brinkmann con distribución nula paralela $\mathcal{L}$. Entón (M, g) é unha variedade fronte de onda se, e soamente se, cumpre as seguintes condicións*

(1) (M, g) é transversalmente chá ($\mathcal{R}(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathcal{L}^\perp$),

(2) (M, g) é Ricci-isotrópica, isto é, $g(\mathrm{Ric}(X), \mathrm{Ric}(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

En particular, toda onda de Brinkmann Ricci-chá e transversalmente chá é unha variedade fronte de onda.

Unha *onda plana* é unha variedade fronte de onda para a cal a derivada covariante do tensor curvatura verifica $\nabla_X \mathcal{R} = 0$ para todo campo de vectores $X \in \mathcal{L}^\perp$. Neste caso, existen coordenadas locais (u, v, x^1, x^2) onde o tensor métrico se expresa como en (1.3), onde $H(v, x^1, x^2)$ é cuadrática nas variables espaciais x^1, x^2 con coeficientes dependentes da coordenada v. Ademais, as coordenadas poden ser reescaladas de maneira que $H(v, x^1, x^2) = a_{ij}(v) x^i x^j$.

Para o caso particular de variedades fronte de onda localmente homoxéneas, Globke e Leistner probaron en [13] que, no caso Ricci-chan, toda fronte de onda é unha onda plana. Así, para grupos de Lie, tense

Lema 1.9. *Sexa (G, g) unha onda de Brinkmann Ricci-chá con distribución nula paralela $\mathcal{L}$ sobre un grupo de Lie G. Se (G, g) é transversalmente chá, entón é unha onda plana.*

As ondas planas homoxéneas foron caracterizadas grazas ao traballo de Blau e O'Loughlin [3] (véxase tamén [13]) como segue: sexa (M, g) unha onda plana caracterizada por (1.3), con H determinada por unha forma bilinear simétrica

$$H(v, x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(v) & a_{12}(v) \\ a_{12}(v) & a_{22}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Entón (M, g) é localmente homoxénea se, e soamente se, a forma bilinear $A = (a_{ij}(v))$ está determinada por unha das seguintes posibilidades:

(I) $A = e^{vF} A_0 e^{-vF}$, onde $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ é unha matriz simétrica e $F = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ é unha matriz antisimétrica, ambas arbitrarias. Ademais, a onda plana é de Einstein (e de feito Ricci-chá) se, e soamente se, A_0 ten traza nula. Neste caso as funcións a_{ij} son da forma

$$\begin{aligned} a_{11}(v) &= a_{11}(\cos^2(\lambda v) - \operatorname{sen}^2(\lambda v)) - a_{12} \operatorname{sen}(2\lambda v)\,, \\ a_{12}(v) &= a_{12} \cos(2\lambda v) + a_{11} \operatorname{sen}(2\lambda v)\,, \\ a_{22}(v) &= a_{11}(\operatorname{sen}^2(\lambda v) - \cos^2(\lambda v)) + a_{12} \operatorname{sen}(2\lambda v)\,. \end{aligned}$$

(II) $A = \frac{1}{(v+b)^2} e^{\log(v+b)F} A_0 e^{-\log(v+b)F}$, onde $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ é unha matriz simétrica e $F = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$ é unha matriz antisimétrica, ambas arbitrarias. Ademais, a onda plana é de Einstein (e de feito Ricci-chá) se, e soamente se, A_0 ten traza nula. Neste caso as funcións a_{ij} son da forma

$$\begin{aligned} (v+b)^2 a_{11}(v) &= \cos(\lambda \log(-(u+b)))\, \{a_{11} \cos(\lambda \log(u+b)) - a_{12} \operatorname{sen}(\lambda \log(u+b))\} \\ &\quad + \operatorname{sen}(\lambda \log(-(u+b)))\, \{a_{12} \cos(\lambda \log(u+b)) + a_{11} \operatorname{sen}(\lambda \log(u+b))\}\,, \\ (v+b)^2 a_{12}(v) &= \operatorname{sen}(\lambda \log(-(u+b)))\, \{a_{12} \operatorname{sen}(\lambda \log(u+b)) - a_{11} \cos(\lambda \log(u+b))\} \\ &\quad + \cos(\lambda \log(-(u+b)))\, \{a_{12} \operatorname{sen}(\lambda \log(u+b)) - a_{11} \cos(\lambda \log(u+b))\}\,, \\ (v+b)^2 a_{22}(v) &= -\operatorname{sen}(\lambda \log(-(u+b)))\, \{a_{12} \cos(\lambda \log(u+b)) + a_{11} \operatorname{sen}(\lambda \log(u+b))\} \\ &\quad + \cos(\lambda \log(-(u+b)))\, \{a_{12} \operatorname{sen}(\lambda \log(u+b)) - a_{11} \cos(\lambda \log(u+b))\}\,. \end{aligned}$$

Se (M, g) é unha onda plana localmente homoxénea con campo de vectores nulo paralelo U e $p \in M$, considerando o conxunto de campos de Killing transversais a $U_p^\perp$, poden ocorrer dúas situacións: ou ben existe un campo de vectores de Killing X para o que a derivada covariante $\nabla_U X_{|p} = 0$, caso para o que a xeometría de M é a correspondente ao caso (I), ou ben a derivada covariante na dirección de U é non nula para todo campo de Killing, correspondéndose isto coa xeometría do caso (II).

1.4. Métricas lorentzianas localmente simétricas

Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana. Dise que (M, g) é *irreducible* se non admite ningunha distribución paralela non trivial $\mathfrak{D}$ (i.e., $\mathfrak{D} \neq \{0\}, \mathfrak{D} \neq TM$), e reducible se admite algunha. No caso riemanniano, toda variedade reducible se pode expresar localmente como un produto, pero no caso semi-riemanniano isto está suxeito a que a restrición da métrica a algunha distribución paralela non trivial $\mathfrak{D}$ sexa non dexenerada. Unha variedade (M, g) dise *indescompoñible* (ou debilmente irreducible) se as únicas distribucións non triviais que admite son dexeneradas. A diferenza da situación riemanniana, unha variedade lorentziana pode ser reducible pero indescompoñible se admite unha distribución paralela dexenerada, como pode ser no caso das ondas de Brinkmann descritas na sección 1.3.

Unha variedade semi-riemanniana dise *localmente simétrica* se o tensor curvatura é paralelo, isto é, $\nabla_X \mathcal{R} = 0$ para todo campo de vectores X sobre M. Xeometricamente, o carácter localmente simétrico dunha variedade está caracterizado polo feito de que para todo punto $p \in M$, a simetría xeodésica (definida localmente)

$$\mathcal{S}_p \colon q = \exp_p(ru) \longmapsto \mathcal{S}_p(q) = \exp_p(-ru)\,, \qquad u \in T_pM,$$

sexa unha isometría.

Unha consecuencia inmediata do carácter paralelo do tensor de curvatura é que o operador de Ricci é un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ paralelo sobre M. No caso riemanniano esta propiedade restrinxe notablemente a xeometría, xa que a variedade ten que ser de Einstein ou un produto de variedades de Einstein. No caso lorentziano existen outras posibilidades relacionadas co feito de que o operador de Ricci pode non ser diagonalizable, malia que sexa autoadxunto (véxase [4]).

Chámase *espazo simétrico de Cahen-Wallach* 4-dimensional a unha onda plana determinada por unha función $H(v, x^1, x^2) = a_{11}x^1x^1 + a_{22}x^2x^2$, onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Se $a_{11}a_{22} \neq 0$, entón (M, g) é unha variedade irreducible, mentres que se $a_{11}a_{22} = 0$, a variedade é localmente un produto $\mathbb{R} \times N$, onde N é un espazo simétrico de Cahen-Wallach 3-dimensional, e polo tanto reducible. Un cálculo directo mostra que os espazos de Cahen-Wallach son variedades de Einstein se, e soamente se, $a_{11} + a_{22} = 0$, caso no cal o tensor de Ricci se anula.

Os espazos de Cahen-Wallach son especialmente relevantes no ámbito lorentziano, onde os espazos simétricos poden ser determinados a partir do seguinte resultado:

Teorema 1.10. *[6] Sexa (M, g) unha variedade de Lorentz simétrica e indescompoñible, entón tense un dos seguintes casos*

(i) (M, g) *é irreducible e ten curvatura seccional constante.*

(ii) (M, g) *é un espazo simétrico de Cahen-Wallach.*

A partir deste resultado, obtense que unha variedade lorentziana localmente simétrica de dimensión catro (M, g) se corresponde cunha das seguintes situacións:

- (M, g) é irreducible, e logo de curvatura seccional constante.
- (M, g) é indescompoñible pero non irreducible, e entón é localmente isométrica a un espazo de Cahen-Wallach.
- (M, g) é localmente isométrica a un produto $(\mathbb{R} \times N, -dt^2 + g_N)$, onde (N, g_N) é unha variedade riemanniana simétrica irreducible, e polo tanto de Einstein e de curvatura seccional constante, á vista da observación 1.7.
- (M, g) é localmente isométrica a un produto $(\mathbb{R} \times N, dt^2 + g_N)$, onde (N, g_N) é unha variedade lorentziana simétrica irreducible, e logo ou ben ten curvatura seccional constante ou ben é un espazo de Cahen-Wallach de dimensión 3.
- (M, g) é localmente isométrica a un produto $(M_1 \times M_2, g_{M_1} + g_{M_2})$, onde (M_1, g_1) é unha superficie lorentziana e (M_2, g_2) é unha superficie riemanniana, ambas de curvatura seccional constante c.

Observación 1.11. Para os obxectivos deste traballo é importante sinalar que os únicos espazos simétricos lorentzianos de Einstein en dimensión catro son:

- Os espazos de curvatura seccional constante $M(c)$.
- Os produtos $M_1(c) \times M_2(c)$, onde $M_1(c)$ é unha superficie lorentziana e $M_2(c)$ é unha superficie riemanniana.
- Os espazos simétricos de Cahen-Wallach con $a_{11} + a_{22} = 0$.

Capítulo 2

Grupos de Lie lorentzianos

Un *grupo de Lie* G é unha variedade diferenciable dotada dunha estrutura de grupo tal que a operación de grupo $\sigma\colon G \times G \to G$ e a inversión $i\colon G \to G$ sexan C^∞. Un *homomorfismo de grupos de Lie* é un homomorfismo de grupos que é ademais diferenciable como aplicación entre variedades.

Unha *álxebra de Lie* (sobre $\mathbb{R}$) é un espazo vectorial real $\mathfrak{g}$ cun operador $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bilinear satisfacendo as seguintes propiedades para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

1. (Antisimetría) $[x, y] = -[y, x]$,

2. (Identidade de Jacobi) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Un *homomorfismo de álxebras de Lie* é unha aplicación linear $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ satisfacendo $\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Dada unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, dicimos que un subespazo vectorial $\mathfrak{h}$ é unha *subálxebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ se é pechado para os corchetes. Un *ideal* $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ é unha subálxebra que satisfai a condición máis forte de que $[x, a] \in \mathfrak{i}$ para calquera $x \in \mathfrak{g}$ e $a \in \mathfrak{i}$. Un exemplo de ideal é a *subálxebra derivada* dunha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, o subespazo span $\{[x, y] \,|\, x, y \in \mathfrak{g}\}$, que se denota $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ou simplemente $\mathfrak{g}'$.

Dado un grupo de Lie G, dicimos que un campo de vectores X sobre G é invariante pola esquerda se para todo $g, h \in G$, $(L_g)_{*h}X_h = X_{L_g(h)}$, onde $L_g\colon G \to G$ denota a multiplicación pola esquerda en G.

O corchete de Lie de campos de vectores proporciona unha estrutura de álxebra de Lie no espazo de campos de vectores invariantes á esquerda dun grupo de Lie, que chamamos álxebra de Lie do grupo, e denotamos $\mathfrak{g}$. A álxebra de Lie dun grupo de Lie G é isomorfa ao espazo tanxente a G no elemento neutro mediante

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathfrak{g} &\longrightarrow T_eG, \\ X &\longrightarrow X_e. \end{aligned}$$

O terceiro teorema de Lie (ver [15]) afirma que toda álxebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$ é isomorfa á álxebra de Lie dun único grupo de Lie conexo e simplemente conexo G agás isomorfismo, co que hai unha correspondencia 1 a 1 entre álxebras de Lie de dimensión finita n e grupos de Lie conexos e simplemente conexos de dimensión n. No que segue, tódolos grupos de Lie considerados supóñense conexos e simplemente conexos, co obxectivo de identificalos coas súas álxebras de Lie. Esta correspondencia tense tamén a nivel de homomorfismos. Dado un homomorfismo de grupos de Lie $\varphi\colon G \to H$, a súa diferencial no neutro dá lugar a un homomorfismo de álxebras de Lie $\varphi_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Reciprocamente, dado un homomorfismo entre dúas álxebras de Lie $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, existe un único homomorfismo Φ entre os grupos de Lie conexos e simplemente conexos correspondentes de maneira que $\Phi_* = \varphi$.

Ao tratar con grupos de Lie que sexan ademais variedades semi-riemannianas, resulta natural o estudo das métricas para as cales $L_h\colon G \to G$ é unha isometría para todo $h \in G$. Estas métricas denomínanse *métricas invariantes á esquerda.*

Dar unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie G é esencialmente o mesmo que dar un produto escalar na álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo (ou un produto escalar en T_eG). Dada unha métrica invariante á esquerda, $\langle X, Y\rangle_h$ é constante para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, o que proporciona un produto escalar ben definido en $\mathfrak{g}$. Reciprocamente, dado un produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en T_eG, podemos definir unha métrica invariante á esquerda en G mediante

$$\langle X, Y\rangle_h = \langle (L_{h^{-1}})_* X_e, (L_{h^{-1}})_* Y_e\rangle, \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

A invariancia da métrica permítenos tamén obter expresións xerais para a conexión de Levi-Civita, curvatura etc. dun grupo de Lie semi-riemanniano a partir dos corchetes e a métrica nunha base de $\mathfrak{g}$. De feito, se consideramos a fórmula de Koszul para X, Y, Z campos de vectores invariantes pola esquerda, temos que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle. \\ =& - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle, \end{aligned}$$

xa que $\langle Y, Z\rangle, \langle X, Z\rangle$ e $\langle X, Y\rangle$ son constantes, e logo $X\langle Y, Z\rangle = Y\langle X, Z\rangle = Z\langle X, Y\rangle = 0$. En particular, tomando unha base ortonormal $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}$ e $\alpha_{ij}^k = \langle [e_i, e_j], e_k\rangle$,

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle = \frac{1}{2}(\alpha_{ij}^k - \alpha_{jk}^i + \alpha_{ki}^j),$$

e logo

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{2}(\alpha_{ij}^k - \alpha_{jk}^i + \alpha_{ki}^j) e_k,$$

onde $\varepsilon_k = \langle e_k, e_k\rangle$, polo que coñecendo como actúan os corchetes e a métrica nunha base de $\mathfrak{g}$, podemos deducir as propiedades xeométricas de G.

2.1. Produtos semidirectos de grupos de Lie

Sexan $(\mathfrak{h}_1, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}_1})$ e $(\mathfrak{h}_2, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}_2})$ álxebras de Lie, e sexa $\mathfrak{g}$ a suma directa de $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ como espazos vectoriais. Pódese definir unha estrutura de álxebra de Lie en $\mathfrak{g}$ tomando como corchete $[v,v'] = [v,v']_{\mathfrak{h}_1}$, $[w,w'] = [w,w']_{\mathfrak{h}_2}$, $[v,w] = 0$ para $v,v' \in \mathfrak{h}_1$ e $w,w' \in \mathfrak{h}_2$, e estendendo por linearidade. $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ dise a álxebra de Lie *suma directa* de $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$, e denótase $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie, $\mathfrak{h}_1$ un ideal de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}_2$ unha subálxebra de $\mathfrak{g}$ de maneira que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Se $w \in \mathfrak{h}_2$, é unha consecuencia inmediata da identidade de Jacobi que $D = ad_w = [w,\cdot]$ é unha derivación da álxebra de Lie $\mathfrak{h}_1$, isto é,

$$D[u,v] = [D(u),v] + [u,D(v)], \qquad \text{para todo } u,v \in \mathfrak{h}_1.$$

Desta maneira, $ad\colon \mathfrak{h}_2 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_1)$ proporciona un homomorfismo de álxebras de Lie entre $\mathfrak{h}_2$ e a álxebra de Lie de derivacións de $\mathfrak{h}_1$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_1)$, onde o corchete vén dado polo conmutador. Este homomorfismo determina de feito como son tódolos corchetes de elementos de $\mathfrak{h}_2$ cos de $\mathfrak{h}_1$, xa que $[w,v] = \mathrm{ad}_w(v)$ para $v \in \mathfrak{h}_1$ e $w \in \mathfrak{h}_2$, polo que para coñecer $\mathfrak{g}$ abonda coñecer as álxebras de Lie $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, e $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{h}_2 \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h}_1)$.

A construción anterior pódese xeneralizar para un homomorfismo $\varphi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ calquera, onde $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ son álxebras de Lie. Pódese probar que existe unha única estrutura de álxebra de Lie no espazo vectorial $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ de maneira que $[v,v'] = [v,v']_{\mathfrak{g}}$, $[w,w'] = [w,w']_{\mathfrak{h}}$ e $[w,v] = \varphi(w)(v)$ para todo $v,v' \in \mathfrak{g}$ e $w,w' \in \mathfrak{h}$. $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ con este corchete dise o *produto semidirecto* de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ vía φ, e denótase $\mathfrak{g} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$.

Pasando a grupos de Lie, dado un produto de grupos de Lie $G \times H$, tense que $Lie(G \times H) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ ideais de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Reciprocamente, dado un grupo de Lie G e H_1, H_2 subgrupos de G de maneira que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, entón $G = H_1 \times H_2$ como grupos de Lie.

Ao igual que no caso das álxebras de Lie, pódese estender a noción de produto de grupos de Lie á de produtos semidirectos. Dados dous grupos de Lie G e H, dise que G actúa por automorfismos sobre H se existe unha acción diferenciable $\sigma\colon G \times H \to H$ de maneira que $\sigma(g,\cdot) \in \mathrm{Aut}(H)$ para todo $g \in G$ (ou de maneira equivalente, se existe un homomorfismo de grupos de Lie $\overline{\sigma}\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$). A multiplicación en $G \times H$ dada por

$$(g_1,h_1) \cdot (g_2,h_2) = (g_1 g_2, \sigma(g_2^{-1},h_1)h_2), \qquad \text{para } g_1,g_2 \in G, h_1,h_2 \in H,$$

dá lugar a unha estrutura de grupo de Lie en $G \times H$, que se chama o *produto semidirecto* de H por G vía σ, e se denota $H \rtimes_\sigma G$. G e H son subgrupos pechados de $H \rtimes_\sigma G$, e de feito H é un subgrupo normal. Obsérvese que cando a acción é trivial, a estrutura resultante é a do produto usual de grupos de Lie.

Pódese comprobar que a álxebra de Lie dun produto semidirecto de grupos de Lie $H \rtimes_\sigma G$ é o produto semidirecto das súas álxebras de Lie vía a derivada de $\overline{\sigma} = \sigma(g,\cdot)$, $\mathfrak{h} \rtimes_{d\overline{\sigma}} \mathfrak{g}$. Reciprocamente, dado un produto semidirecto de álxebras de Lie $\mathfrak{h} \rtimes_\varphi \mathfrak{g}$, se G e H son os únicos grupos de Lie conexos e simplemente conexos con álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, existe unha única acción por automorfismos Φ de G sobre H de maneira que $d\Phi = \varphi$ e $H \rtimes_\Phi G$ é o único subgrupo de Lie conexo e simplemente conexo con álxebra de Lie $\mathfrak{h} \rtimes_\varphi \mathfrak{g}$. Isto proporciona unha correspondencia entre os produtos semidirectos de grupos de Lie e os produtos semidirectos de álxebras de Lie.

2.2. Grupos de Lie unimodulares

Para falar de grupos de Lie unimodulares, debemos de introducir previamente o concepto de *medida de Haar*. Sexa G un grupo de Lie, unha *medida de Haar* en G é unha medida regular μ definida na σ-álxebra de Borel de G, $\mathcal{B}(G)$, que verifica ademais a condición de invariancia pola esquerda

$$\mu(E) = \mu(gE), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(G), g \in G,$$

ou a condición de invariancia pola dereita

$$\mu(E) = \mu(Eg), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(G), g \in G,$$

onde $gE = \{gx | x \in E\}$ e $Eg = \{xg | x \in E\}$. Falamos en cada un destes casos dunha medida de Haar invariante pola esquerda ou pola dereita, respectivamente.

Dado un grupo de Lie G, podemos afirmar que existe unha única medida de Haar invariante pola esquerda (respectivamente, pola dereita) en G agás por unha constante multiplicativa (véxase [10]). Dicimos que un grupo de Lie é *unimodular* se a súa medida de Haar invariante pola esquerda e pola dereita coinciden.

A seguinte proposición, probada en [20], proporciona unha caracterización sinxela dos grupos de Lie unimodulares:

Proposición 2.1. *Un grupo de Lie conexo G é unimodular se, e soamente se, o automorfismo adxunto da súa álxebra de Lie $\mathrm{ad}_x \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ten traza cero para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

A raíz disto, dicimos que unha álxebra de Lie satisfacendo $tr(\mathrm{ad}_x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ é unha *álxebra de Lie unimodular.*

2.3. Grupos de Lie unimodulares semi-riemannianos 3-dimensionais

En dimensión tres, o poder traballar con álxebras de Lie permítenos axudarnos do produto vectorial para simplificar as contas relativas aos corchetes e, de feito, clasificar os grupos de Lie unimodulares.

Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie de tridimensional cun produto escalar non dexenerado $\langle \cdot , \cdot \rangle$, e $\times \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ o único produto vectorial verificando que $\langle e_i \times e_j, e_k \rangle = \det(e_i, e_j, e_k)$ para calquera base ortonormal $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}$. Podemos agora definir unha aplicación linear L tomando, nunha base ortonormal,

$$L(e_1 \times e_2) = [e_1, e_2], \qquad L(e_2 \times e_3) = [e_2, e_3], \qquad L(e_1 \times e_3) = [e_1, e_3].$$

L é tal que $L(u \times v) = [u, v]$ para calquera dous vectores $u, v \in \mathfrak{g}$, e logo proporciona como son os corchetes na álxebra $\mathfrak{g}$. Referirémonos a L como o *operador de estrutura* de $\mathfrak{g}$. Tanto no caso riemanniano coma no lorentziano, escribindo $L(e_i) = \sum \alpha_{ij} e_j$, e calculando a traza de $\mathrm{ad}(e_i)$ en función dos α_{ij}, próbase (véxase [20],[23])

Proposición 2.2. *L é autoadxunto se, e soamente se, G é unimodular.*

Desta maneira, é posible o estudo das álxebras de Lie unimodulares a través destes operadores autoadxuntos nas distintas signaturas. Co propósito de simplificar a presentación, tratamos de xeito independente os casos nos que $\mathfrak{g}$ é unha álxebra riemanniana ou lorentziana.

2.3.1. Álxebras de Lie riemannianas unimodulares en dimensión tres

Para o caso no que $\mathfrak{g}$ é unha álxebra de Lie riemanniana, tense que $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_3 \times e_1 = e_2$ e $e_2 \times e_3 = e_1$, polo que

$$L(e_1) = [e_2, e_3], \qquad L(e_2) = [e_3, e_1], \qquad L(e_3) = [e_1, e_2].$$

Se a álxebra é ademais unimodular, entón L diagonaliza nunha base ortonormal de autovectores, é dicir, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denotan os autovalores de L, existe unha base con respecto da cal

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \qquad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \qquad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3.$$

Os grupos de Lie unimodulares correspondentes pódense clasificar en base ao signo dos autovalores de L, tal e como probou Milnor en [20]. Na seguinte táboa recóllese a casuística:

λ_1	λ_2	λ_3	**Grupo de Lie**
$+$	$+$	$+$	$SU(2)$
$+$	$+$	$-$	$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$
$+$	$+$	0	$\tilde{E}(2)$
$+$	$-$	0	$E(1,1)$
$+$	0	0	H_3
0	0	0	$\mathbb{R}^3$

A descrición dos grupos de Lie que aparecen na táboa é a seguinte:

- $SU(2)$: o grupo de matrices unitarias 2×2 de determinante 1. A súa álxebra de Lie, $\mathfrak{su}(2)$, é a de matrices antihermitianas 2×2 con traza cero.

- $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$: a cuberta universal do grupo de matrices reais 2×2 con determinante 1. A súa álxebra de Lie, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, está formada polas matrices 2×2 reais con traza cero.

- $\tilde{E}(2)$: a cuberta universal do grupo de movementos ríxidos do plano euclidiano. A correspondente álxebra de Lie, a *álxebra euclidiana* $\mathfrak{e}(2)$, é o produto semidirecto $\mathfrak{r}^2 \rtimes \mathfrak{r}$ determinado por un endomorfismo de $\mathfrak{r}^2$ con autovalores imaxinarios.

- $E(1,1)$: o grupo de movementos ríxidos do plano de Minkowski. A álxebra de Lie correspondente, a *álxebra de Poincaré* $\mathfrak{e}(1,1)$, é o produto semidirecto $\mathfrak{r}^2 \rtimes \mathfrak{r}$ determinado por un endomorfismo de $\mathfrak{r}^2$ con autovalores reais distintos.
- H_3: o grupo de Heisenberg de orde 3, formado polas matrices 3×3 da forma
$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R},$$
cuxa álxebra de Lie é a álxebra $\mathfrak{h}_3$ de matrices triangulares superiores e diagonal cero.
- $\mathbb{R}^3$: o grupo abeliano, con álxebra de Lie $\mathfrak{r}^3$.

2.3.2. Álxebras de Lie lorentzianas unimodulares en dimensión tres

A descrición das álxebras unimodulares lorentzianas segue a mesma idea ca do caso riemanniano partindo de que, pola proposición 2.2, L é un endomorfismo autoadxunto. Tomando unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ da álxebra de Lie lorentziana con e_3 temporal, tense que $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$ e $e_1 \times e_2 = -e_3$, co que
$$L(e_1) = [e_2, e_3], \qquad L(e_2) = [e_3, e_1], \qquad L(e_3) = [e_2, e_1].$$
A diferenza do caso riemanniano, un operador autoadxunto nun espazo vectorial lorentziano non é necesariamente diagonalizable; de feito, en dimensión 3 poden darse catro posibilidades, que se corresponden coas posibles formas de Jordan do operador L. Seguindo a descrición dada por O'Neill [21, pp. 261-262], téñense as seguintes posibilidades alxébricas para o operador de estrutura dunha álxebra de Lie lorentziana de dimensión tres:

Lema 2.3 (Forma canónica dun operador autoadxunto nun espazo vectorial lorentziano)**.** *Sexa L un operador linear autoadxunto nun espazo vectorial lorentziano $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ de dimensión 3. Entón tense un dos seguintes casos:*

Ia. L **é diagonalizable**. *Existe unha base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, con respecto da cal*
$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Ib. L **ten autovalores complexos.** *Existe unha base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, con respecto da cal*
$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \langle \cdot\,, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
para $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$.

II. L **ten unha raíz dobre do polinomio característico con multiplicidade xeométrica** 1. *Existe unha base* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *de* $(V, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$*, con respecto da cal*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \langle \cdot\,,\cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*, sendo* $\varepsilon = \pm 1$.

III. L **ten unha raíz tripla do polinomio característico con multiplicidade xeométrica** 1. *Existe unha base* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *de* $(V, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$*, con respecto da cal*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \langle \cdot\,,\cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rahmani [23] proporcionou unha clasificación das álxebras de Lie lorentzianas unimodulares segundo as distintas posibilidades do operador de estrutura L no lema 2.3. As clases correspondentes aos tipos Ib, II e III non teñen análogo riemanniano, o que mostra que a estrutura lorentziana é moito mais rica que no caso definido positivo.

Caso Ia: Álxebras lorentzianas correspondentes a un operador de estrutura diagonalizable.

Neste caso, tense que existe unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, con e_3 temporal, na que os corchetes de $\mathfrak{g}$ veñen dados por

$$[e_2, e_3] = L(e_1) = \lambda_1 e_1, \qquad [e_3, e_1] = L(e_2) = \lambda_2 e_2, \qquad [e_2, e_1] = L(e_3) = \lambda_3 e_3. \tag{2.1}$$

As diferentes álxebras de Lie (2.1) distínguense en termos dos autovalores de L como segue

- Se tódolos autovalores λ_i son cero, entón a álxebra trátase da álxebra abeliana $\mathfrak{r}^3$.
- Se soamente hai un autovalor distinto de cero, a álxebra derivada $\mathfrak{g}'$ ten dimensión 1, polo que se trata da álxebra de Heisenberg $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3$.
- Para o caso no que un dos autovalores é cero e os outros dous distintos de cero, $\dim(\mathfrak{g}') = 2$, polo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$ ou $\mathfrak{e}(1,1)$. Estes casos pódense distinguir mediante o signo dos autovalores non nulos: se $\varepsilon_i \varepsilon_j \lambda_i \lambda_j > 0$ a álxebra trátase da álxebra euclidiana $\mathfrak{e}(2)$, mentres que se $\varepsilon_i \varepsilon_j \lambda_i \lambda_j < 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1)$.
- Cando os tres autovalores de L son non nulos, a álxebra resultante é $\mathfrak{su}(2)$ se os $\varepsilon_i \lambda_i$ teñen todos o mesmo signo e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ noutro caso.

A seguinte táboa recolle as posibilidades anteriores en función das expresións (2.1). Para reducir a listaxe de casos, tense en conta que λ_1 e λ_2 xogan o mesmo papel para a clasificación das álxebras e que se pode supoñer que $\lambda_1 \geq 0$ sen perda de xeneralidade, cambiando o signo de tódolos autovalores se fose necesario:

λ_1	λ_2	λ_3	**Álxebra de Lie**
$+$	$+$	$+$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$
$+$	$-$	$-$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$
$+$	$+$	$-$	$\mathfrak{su}(2)$
$+$	$+$	0	$\mathfrak{e}(2)$
$+$	0	$-$	$\mathfrak{e}(2)$
$+$	$-$	0	$\mathfrak{e}(1,1)$
$+$	0	$+$	$\mathfrak{e}(1,1)$
$+$	0	0	$\mathfrak{h}_3$
0	0	$+$	$\mathfrak{h}_3$
0	0	0	$\mathfrak{r}^3$

Caso Ib: Álxebras lorentzianas correspondentes a un operador de estrutura con autovalores complexos.

Considerando o operador de estrutura L segundo a situación correspondente ao lema 2.3-Ib, tense que $\mathfrak{g}$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, con e_3 temporal, polos corchetes

$$[e_2, e_3] = L(e_1) = \lambda e_1, \quad [e_3, e_1] = L(e_2) = \alpha e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_1] = L(e_3) = \beta e_2 + \alpha e_3. \tag{2.2}$$

As álxebras de Lie 2.2 correspóndense coas seguintes posibilidades

- Se $\lambda = 0$, $\mathrm{span}\{e_2, e_3\}$ é a álxebra abeliana $\mathfrak{r}^2$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^2 \rtimes_{\mathrm{ad}_{e_1}} \mathfrak{r}$, onde ad_{e_1} se pode expresar como
$$\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}.$$
Dado que ad_{e_1} ten autovalores reais distintos $\pm\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$, a álxebra resultante correspóndese con $\mathfrak{e}(1,1)$.

- Se $\lambda \neq 0$, $\dim(\mathfrak{g}') = 3$, e calculando a forma de Killing vese que esta é non definida, polo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Caso II: Álxebras lorentzianas correspondentes a un operador de estrutura cun autovalor dobre.

Considerando o operador de estrutura L segundo a situación correspondente ao lema 2.3-II, tense garantida a existencia dunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathfrak{g}$ con respecto da cal

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tense agora que $u_1 \times u_2 = u_3$, $u_2 \times u_3 = u_2$, $u_3 \times u_1 = u_1$, polo que con respecto da base $\{u_1, u_2, u_3\}$ os corchetes son da forma

$$[u_3, u_1] = L(u_1) = \lambda_1 u_1 + \varepsilon u_2, \quad [u_2, u_3] = L(u_2) = \lambda_1 u_2, \quad [u_1, u_2] = L(u_3) = \lambda_2 u_3. \quad (2.3)$$

As ecuacións (2.3) dan lugar ás seguintes álxebras de Lie:

- Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, entón span$\{u_2, u_3\}$ é unha subálxebra abeliana, e a álxebra $\mathfrak{g}$ é o produto semidirecto $\mathfrak{r}^2 \rtimes \mathfrak{r}$ determinado pola derivación

  $$\mathrm{ad}_{u_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Así, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$ se $\varepsilon\lambda 2 > 0$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1)$ se $\varepsilon\lambda_2 < 0$.

- Se $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$, entón span$\{u_1, u_2\}$ xera unha subálxebra abeliana, e a álxebra $\mathfrak{g}$ é o produto semidirecto $\mathfrak{r}^2 \rtimes \mathfrak{r}$ determinado pola derivación

  $$\mathrm{ad}_{u_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \varepsilon & -\lambda_1 \end{pmatrix},$$

  que ten autovalores reais distintos $\pm\lambda_1$, polo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1)$.

- Cando $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, entón a álxebra derivada $\mathfrak{g}'$ ten dimensión 3, e compróbase que a forma de Killing é non definida, polo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

- Para o caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, o único corchete non nulo é $[u_3, u_1] = \varepsilon u_2$, e logo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3$.

As diferentes posibilidades de álxebras de Lie recóllense na seguinte táboa

λ_1	λ_2	ε	**Álxebra de Lie**
$\neq 0$	$\neq 0$	± 1	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
0	> 0	1	$\mathfrak{e}(2)$
0	< 0	-1	$\mathfrak{e}(2)$
0	< 0	1	$\mathfrak{e}(1,1)$
0	> 0	-1	$\mathfrak{e}(1,1)$
$\neq 0$	0	± 1	$\mathfrak{e}(1,1)$
0	0	± 1	$\mathfrak{h}_3$

Caso III: Álxebras lorentzianas correspondentes a un operador de estrutura cun autovalor triplo.

Por último, consideramos o caso correspondente ao lema 2.3-III, no que se ten que existe unha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathfrak{g}$, con u_1 e u_2 nulos, u_3 espacial e $g(u_1, u_2) = 1$ con respecto da cal

$$[u_3, u_1] = L(u_1) = \lambda u_1, \quad [u_2, u_3] = L(u_2) = \lambda u_2 + u_3, \quad [u_1, u_2] = L(u_3) = u_1 + \lambda u_3, \tag{2.4}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

As álxebras de Lie que son realizables en termos das ecuacións (2.4) están determinadas como segue:

- Se $\lambda = 0$, entón $\operatorname{span}\{u_1, u_3\}$ xera unha álxebra abeliana $\mathfrak{r}^2$, e $\mathfrak{g}$ é o produto semidirecto $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^2 \rtimes \mathfrak{r}$ determinado por

$$\operatorname{ad}_{u_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  que ten autovalores ± 1, e logo correspóndese con $\mathfrak{e}(1,1)$.

- Se $\lambda \neq 0$, tense que $\dim(\mathfrak{g}') = 3$, e pódese comprobar ademais que a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é non definida, polo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

2.4. Grupos de Lie lorentzianos en dimensión catro

Os grupos de Lie lorentzianos de dimensión n conexos e simplemente conexos coinciden cos riemannianos mediante a seguinte correspondencia: Dado un grupo de Lie conexo e simplemente conexo G, as métricas lorentzianas invariantes pola esquerda en G correspóndense con produtos interiores de signatura $(n-1, 1)$ na súa álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, que se pode caracterizar dando unha base ortonormal $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}$ con e_n temporal. Tomando $\{e_i\}$ como base ortonormal para un produto escalar definido positivo, obtemos unha métrica riemanniana invariante pola esquerda en G. Reciprocamente, dado un produto escalar definido positivo sobre $\mathfrak{g}$, abonda con cambiar o carácter dun dos vectores da base de forma que sexa temporal para determinar unha métrica lorentziana invariante pola esquerda en G.

Isto permítenos utilizar a seguinte clasificación, dada por Bérard Bérgery en [2] para clasificar os grupos de Lie lorentzianos en dimensión 4:

Proposición 2.4. *Os grupos de Lie riemannianos conexos e simplemente conexos de dimensión* 4 *son:*

1. *Os produtos directos* $SU(2) \times \mathbb{R}$ *e* $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.
2. *Os produtos semidirectos non triviais* $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ *e* $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$.
3. *Os produtos semidirectos non nilpotentes* $H_3 \rtimes \mathbb{R}$.

4. Os produtos semidirectos $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$.

Polo tanto, os grupos de Lie que admiten métricas lorentzianas en dimensión 4 son $SU(2) \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$, $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$, $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$. Obsérvese que todos os exemplos comparten a mesma estrutura: as súas álxebras de Lie son produtos semidirectos $\mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$, con $\mathfrak{g}_3$ unha álxebra de Lie unimodular de dimensión 3. Malia a coincidencia entre os grupos de Lie lorentzianos e riemannianos, a xeometría no caso lorentziano é máis diversa, e o seu estudo resulta máis difícil. Mentres que no caso riemanniano a restrición da métrica $g_{|\mathfrak{g}_3}$ á subálxebra de dimensión 3 é riemanniana, no caso lorentziano $g_{|\mathfrak{g}_3}$ pode ser riemanniana, lorentziana ou dexenerada. Estas posibilidades recóllense no seguinte teorema, dado en [9], que garante a existencia dunha "boa base" de $\mathfrak{g}$ coa que traballar en cada caso.

Teorema 2.5. *Sexa* $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *unha álxebra de Lie lorentziana* 4*-dimensional. Entón, existe unha base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que:*

- $\mathfrak{g}_3 = span\{e_1, e_2, e_3\}$ *é unha álxebra de Lie unimodular* 3*-dimensional e* e_4 *actúa como unha derivación en* $\mathfrak{g}_3$ *(isto é,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$*, onde* $\mathfrak{r} = span\{e_4\}$*),*
- *con respecto da base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$*, o produto escalar lorentziano presenta unha das seguintes formas:*

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{r}$ un produto semidirecto de álxebras de Lie, con $\mathfrak{r} = \operatorname{span}\{v\}$ unidimensional. Nótese que para calquera $w \in \mathfrak{h}$ se ten de novo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes \tilde{\mathfrak{r}}$, con $\tilde{\mathfrak{r}} = \operatorname{span}\{v + w\}$.

Sexa g un produto escalar lorentziano nunha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión 4. Pola proposición 2.4, tense que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$, con $\mathfrak{g}_3$ unimodular e $\mathfrak{r} = \operatorname{span}\{v\}$. Diferenciamos agora tres casos, dependendo de que a restrición de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathfrak{g}_3$ sexa definido positivo, lorentziano ou dexenerado:

Caso 1. A restrición $\langle\cdot,\cdot\rangle_{|\mathfrak{g}_3}$ é definida positiva.

Sexa $\{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal de $\mathfrak{g}_3$ para $\langle\cdot,\cdot\rangle_{|\mathfrak{g}_3}$. Considérase a proxección ortogonal de v en $\mathfrak{g}_3$, $w = \sum_{i=1}^{3} \langle v, e_i\rangle e_i$, e sexan $\tilde{v} = v - w$ e $\tilde{\mathfrak{r}} = \operatorname{span}\{\tilde{v}\}$. Como se viu antes, séguese a ter $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \tilde{\mathfrak{r}}$. Ademais $\tilde{v}$ é ortogonal a $\mathfrak{g}_3$, co que $\tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{g}_3^{\perp}$, e como a restrición de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathfrak{g}_3$ é non dexenerada, a restrición de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\tilde{\mathfrak{r}}$ tamén o é. O índice de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é a suma dos índices de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{|\mathfrak{g}_3}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{|\mathfrak{g}_3^{\perp}}$, polo que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{|\tilde{\mathfrak{r}}}$ ten índice 1, e tomando $e_4 = \frac{1}{\sqrt{-\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle}}\tilde{v}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ toma a forma (a) respecto da base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Caso 2. A restrición $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_{|\mathfrak{g}_3}$ é lorentziana.

Procédese de forma case idéntica ao caso 1, pero esta vez fixando unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathfrak{g}_3$ con e_3 temporal, e coa diferenza de que a proxección ortogonal vén dada por $w = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \langle v, e_i\rangle e_i$, onde $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$. Agora $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \rtimes \tilde{\mathfrak{r}}$, onde $\tilde{\mathfrak{r}} = \operatorname{span}\{\tilde{v}\} = \mathfrak{g}_3^{\perp}$, con $\tilde{v} = v - w$ espacial, e $e_4 = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{v}, \tilde{v}\rangle}}\tilde{v}$.

Caso 3. A restrición $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_{|\mathfrak{g}_3}$ é dexenerada.

Como $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ é lorentziano, un subespazo de $\mathfrak{g}$ no que $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ se anule ten ao sumo dimensión 1, polo que $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_{|\mathfrak{g}_3}$ ten que ter signatura $(2, 0, 1)$ (véxase [21]). Sexa $\{u_1, u_2, u_3\}$ unha base de $\mathfrak{g}_3$ con u_1, u_2 espaciais unitarios e u_3 nulo e ortogonal a $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$, e considérase $w = \sum_{i=1}^{2} \langle v, u_i\rangle u_i$ e $\tilde{v} = v - w$, de forma que $\tilde{v}$ é ortogonal a $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$. Polo carácter non dexenerado de $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$, necesariamente $\langle u_3, \tilde{v}\rangle \neq 0$. Tomando $u_4 = \frac{1}{\langle \tilde{v}, u_3\rangle}\left(\tilde{v} - \frac{\langle \tilde{v}, \tilde{v}\rangle}{2\langle \tilde{v}, u_3\rangle} u_3\right)$, tense que u_4 actúa como unha derivación sobre $\mathfrak{g}_3$, e $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ toma a forma (c) respecto da base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g}$.

□

Capítulo 3

Extensións lorentzianas de grupos de Lie riemannianos

Comezamos o estudo sistemático de métricas de Einstein en grupos de Lie lorentzianos de dimensión catro. Atendendo ao teorema 2.5, divídese a análise nos casos en que a métrica é unha extensión lorentziana dun grupo de Lie unimodular riemanniano de dimensión 3 (caso(a)), unha extensión lorentziana dun grupo de Lie unimodular lorentziano de dimensión 3 (caso(b)) ou unha extensión lorentziana dun grupo de Lie unimodular de dimensión 3 cunha métrica dexenerada (caso(c)). Neste capítulo estúdase o primeiro dos casos.

Seguindo a discusión feita na sección 2.3, o automorfismo de estrutura $L(u \times v) = [u, v]$ de $\mathfrak{g}_3$ é un operador autoadxunto nun espazo vectorial euclidiano, polo que L diagonaliza nunha base ortonormal de autovectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$, é dicir:

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3.$$

Seguindo o proceso feito na sección 2.4, esta base pódese completar a unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathfrak{g}$, con e_4 temporal, de xeito que a álxebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \text{span}\{e_4\}$ da lugar ao grupo G. O feito de que e_4 actúe como unha derivación sobre $\mathfrak{g}_3$ é equivalente a que se cumpra a identidade de Jacobi en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \text{span}\{e_4\}$ e, polo tanto, teña estrutura de álxebra de Lie.

O resultado esencial deste capítulo mostra que a condición de Einstein é extremadamente ríxida neste contexto, segundo o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Sexa (G, g) unha extensión lorentziana dun grupo de Lie riemanniano tresdimensional. Entón (G, g) é unha variedade de Einstein se, e soamente se, a súa curvatura seccional é constante. Tales métricas só teñen lugar nos grupos $\widetilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ (no caso de métricas chás) e $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ (no caso de métricas con curvatura seccional constante non negativa).*

Diferenciamos agora para os cálculos os distintos grupos de Lie de dimensión 3 posibles en función dos autovalores de L atendendo á clasificación feita na sección 2.3:

3.1. Os casos $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ e $SU(2)\times\mathbb{R}$

Toda métrica invariante pola esquerda en $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ ou $SU(2)\times\mathbb{R}$ que se restrinxa a un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{su}(2)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ con e_4 temporal, polos corchetes non nulos seguintes:

$$\left\{\begin{array}{lll} [e_2,e_3]=\lambda_1 e_1, & [e_3,e_1]=\lambda_2 e_2, & [e_1,e_2]=\lambda_3 e_3, \\ [e_1,e_4]=\kappa_3\lambda_2 e_2-\kappa_2\lambda_3 e_3, & [e_2,e_4]=\kappa_1\lambda_3 e_3-\kappa_3\lambda_1 e_1, & \\ [e_3,e_4]=\kappa_2\lambda_1 e_1-\kappa_1\lambda_2 e_2, & & \end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$ e $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ son parámetros reais arbitrarios.

Co obxectivo de simplificar a notación para o estudo da condición de Einstein, introducimos o tensor simétrico de tipo $(0,2)$ $\mathcal{E}=\rho-\frac{\tau}{4}g$. Desta maneira, a estrutura considerada é Einstein se, e soamente se, $\mathcal{E}=0$. Denotamos $\mathcal{E}_{ij}=\mathcal{E}(e_i,e_j)$, e vemos que un cálculo directo das compoñentes de $\mathcal{E}$ proporciona:

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11}&=-5\lambda_1^2\left(\kappa_2^2+\kappa_3^2-1\right)+2\lambda_1\left(\lambda_2\left(\kappa_3^2-1\right)+\lambda_3\left(\kappa_2^2-1\right)\right)-\lambda_2^2(\kappa_1^2-3\kappa_3^2+3)\\
&\quad+2\lambda_2\lambda_3\left(\kappa_1^2+3\right)-\lambda_3^2\left(\kappa_1^2-3\kappa_2^2+3\right),\\
2\mathcal{E}_{12}&=\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2\right)\kappa_1\kappa_2,\\
2\mathcal{E}_{13}&=\left(\lambda_1\lambda_3-\lambda_2^2\right)\kappa_1\kappa_3,\\
2\mathcal{E}_{14}&=(\lambda_2-\lambda_3)^2\kappa_1,\\
8\mathcal{E}_{22}&=-\lambda_1^2(k_2^2-3k_3^2+3)+2\lambda_1(\lambda_2(k_3^2-1)+\lambda_3(k_2^2+3))-5\lambda_2^2(k_1^2+k_3^2-1)\\
&\quad+2\lambda_2\lambda_3(k_1^2-1)+\lambda_3^2(3k_1^2-k_2^2-3),\\
2\mathcal{E}_{23}&=\left(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1^2\right)\kappa_2\kappa_3,\\
2\mathcal{E}_{24}&=(\lambda_1-\lambda_3)^2\kappa_2,\\
8\mathcal{E}_{33}&=\lambda_1^2\left(3\kappa_2^2-\kappa_3^2-3\right)+2\lambda_1(\lambda_2(\kappa_3^3+3)+\lambda_3(\kappa_2^2-1))+\lambda_2^2\left(3\kappa_1^2-\kappa_3^2-3\right)\\
&\quad+2\lambda_2\lambda_3\left(\kappa_1^2-1\right)-5\lambda_3^2\left(\kappa_1^2+\kappa_2^2-1\right),\\
2\mathcal{E}_{34}&=(\lambda_1-\lambda_2)^2\kappa_3,\\
8\mathcal{E}_{44}&=-\lambda_1^2\left(3\kappa_2^2+3\kappa_3^2+1\right)+2\lambda_1\left(\lambda_2(3\kappa_3^2+1)+\lambda_3(3\kappa_2^2+1)\right)-\lambda_2^2\left(3\kappa_1^2+3\kappa_3^2+1\right)\\
&\quad+2\lambda_2\lambda_3(3\kappa_1^2+1)-\lambda_3^2\left(3\kappa_1^2+3\kappa_2^2+1\right).
\end{aligned}$$

Compróbase a partir destas ecuacións que non existen solucións para $\mathcal{E}_{ij}=0$ con $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$, polo que para este caso non se atopa ningún exemplo de métricas lorentzianas de Einstein invariantes pola esquerda.

Lema 3.2. *Non existen métricas lorentzianas invariantes pola esquerda de Einstein en $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ ou $SU(2)\times\mathbb{R}$ que se restrinxan a produtos escalares definidos positivos en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{su}(2)$.*

3.2. Os casos $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ e $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$

Nestes casos, o núcleo do operador de estrutura ten dimensión un, polo que un dos autovalores de L (que se pode supoñer λ_3 sen perda de xeneralidade) é cero e os outros dous son distintos de cero. Utilizando a identidade de Jacobi, obtense que e_4 actúa como unha derivación sobre $\mathfrak{g}_3$ se, e soamente se,

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= \alpha e_1 - \lambda_2 \beta e_2, \\
[e_2, e_4] &= \lambda_1 \beta e_1 + \alpha e_2, \\
[e_3, e_4] &= \gamma e_1 + \delta e_2,
\end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, polo que toda métrica invariante pola esquerda en $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ ou $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$ que se restrinxa a un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{e}(2)$ ou $\mathfrak{e}(1,1)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_4 temporal, polos corchetes non nulos seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{lll}
[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, & [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, & \\
[e_1, e_4] = \alpha e_1 - \lambda_2 \beta e_2, & [e_2, e_4] = \lambda_1 \beta e_1 + \alpha e_2, & [e_3, e_4] = \gamma e_1 + \delta e_2,
\end{array} \right. \tag{3.2}$$

onde $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base resultan

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= 4\alpha^2 - 5\gamma^2 - \delta^2 + 5\lambda_1^2 - 5\beta^2\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 2\beta^2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_2^2 + 3\beta^2\lambda_2^2, \\
2\mathcal{E}_{12} &= -\gamma\delta + 2\beta\alpha(\lambda_1 - \lambda_2), \\
2\mathcal{E}_{13} &= 3\alpha\gamma - \beta\delta\lambda_2, \\
2\mathcal{E}_{14} &= \delta\lambda_2, \\
8\mathcal{E}_{22} &= 4\alpha^2 - \gamma^2 - 5\delta^2 - 3\lambda_1^2 + 3\beta^2\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 2\beta^2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 - 5\beta^2\lambda_2^2, \\
2\mathcal{E}_{23} &= 3\alpha\delta + \beta\gamma\lambda_1, \\
2\mathcal{E}_{24} &= -\gamma\lambda_1, \\
8\mathcal{E}_{33} &= -12\alpha^2 + 3\gamma^2 + 3\delta^2 - 3\lambda_1^2 - \beta^2\lambda_1^2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 2\beta^2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_2^2 - \beta^2\lambda_2^2, \\
2\mathcal{E}_{34} &= \beta(\lambda_1 - \lambda_2)^2, \\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\alpha^2 - 3\gamma^2 - 3\delta^2 - \lambda_1^2 - 3\beta^2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 6\beta^2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 - 3\beta^2\lambda_2^2.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$, atopamos unha única solución, dada por $\alpha = \gamma = \delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2$. Pódese ver agora que para estes parámetros o tensor curvatura da métrica cumpre $R = 0$, polo que se corresponde cunha métrica chá en $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ e obtemos:

Lema 3.3. *Sexa g unha métrica lorentziana invariante pola esquerda en $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ que se restrinxe a un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{e}(2)$. Entón g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, é chá.*

Lema 3.4. *Non existe ningunha métrica lorentziana invariante pola esquerda de Einstein en $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$ que se restrinxa a un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{e}(1,1)$.*

Observación 3.5. As métricas correspondentes ao lema 3.3 están caracterizadas polos corchetes non nulos

$$[e_1, e_3] = -\lambda e_2, \qquad [e_2, e_3] = \lambda e_1, \qquad [e_1, e_4] = \alpha e_2, \qquad [e_2, e_4] = -\alpha e_1$$

onde $\lambda \neq 0$ e α é un parámetro real arbitrario.

3.3. O caso $H_3 \rtimes \mathbb{R}$

Neste caso, $\dim \ker L = 2$, polo que dous dos autovalores de L (que podemos supoñer λ_1 e λ_2) son cero, e o outro $\lambda_3 \neq 0$. Neste caso, e_4 actúa como unha derivación sobre $\mathfrak{h}_3$ se, e soamente se,

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\
[e_2, e_4] &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \\
[e_3, e_4] &= (\alpha_1 + \beta_2) e_3,
\end{aligned}$$

para $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, co que toda métrica invariante pola esquerda en $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ que se restrinxa a un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{h}_3$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_4 temporal, polos corchetes non nulos seguintes:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, & [e_1, e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ [e_2, e_4] = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, & [e_3, e_4] = (\alpha_1 + \beta_2) e_3, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde α_i, β_i son parámetros reais arbitrarios.

Escribindo as compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base, obtense

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= 4\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 - 2\alpha_2\beta_1 - 5\beta_1^2 - 4\alpha_1\beta_2 - 12\beta_2^2 - \beta_3^2 - 3\lambda_3^2, \\
2\mathcal{E}_{12} &= \alpha_1(\alpha_2 + 3\beta_1) + 3\alpha_2\beta_2 + \beta_1\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \\
2\mathcal{E}_{13} &= 2\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_3\beta_2 - \beta_1\beta_3, \\
2\mathcal{E}_{14} &= \beta_3\lambda_3, \\
8\mathcal{E}_{22} &= -12\alpha_1^2 - 5\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_2\beta_1 + 3\beta_1^2 - 4\alpha_1\beta_2 + 4\beta_2^2 + 3\beta_3^2 - 3\lambda_3^2, \\
2\mathcal{E}_{23} &= -\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_1\beta_3 + 2\beta_2\beta_3, \\
2\mathcal{E}_{24} &= -\alpha_3\lambda_3, \\
8\mathcal{E}_{33} &= 4\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 5\alpha_3^2 - 2\alpha_2\beta_1 - \beta_1^2 + 12\alpha_1\beta_2 + 4\beta_2^2 - 5\beta_3^2 + 5\lambda_3^2, \\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 - 3\alpha_3^2 - 6\alpha_2\beta_1 - 3\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_2 - 4\beta_2^2 - 3\beta_3^2 - \lambda_3^2,
\end{aligned}$$

comprobándose que non hai solucións do sistema $\mathcal{E}_{ij} = 0$ para $\lambda_3 \neq 0$, co que

Lema 3.6. *Non existe ningunha métrica lorentziana invariante pola esquerda de Einstein en* $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ *que se restrinxa a un produto escalar definido positivo en* $\mathfrak{h}_3$.

3.4. O caso $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$

Ao tratarse do caso abeliano, todo endomorfismo D de $\mathbb{R}^3$ actúa como unha derivación sobre a álxebra $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{r}^3$. Co obxectivo de simplificar os cálculos, considérase a forma bilinear $\Phi(x, y) := g(Dx, y)$ asociada ao endomorfismo $D = [-, e_4]$, que se pode descompoñer na súa parte simétrica e antisimétrica

$$\Phi_{sim}(x, y) = \frac{1}{2}\left\{\Phi(x, y) + \Phi(y, x)\right\}, \qquad \Phi_{ant}(x, y) = \frac{1}{2}\left\{\Phi(x, y) - \Phi(y, x)\right\}.$$

Téñense agora endomorfismos asociados D_{aut} e D_{ant} dados por

$$\Phi_{sim}(x, y) = g(D_{aut}x, y), \qquad \Phi_{ant}(x, y) = g(D_{ant}x, y),$$

onde D_{aut} é autoadxunto e D_{ant} anti-autoadxunto, respectivamente, xa que

$$\begin{aligned} g(D_{aut}x, y) &= \Phi_{sim}(x, y) = \Phi_{sim}(y, x) = g(D_{aut}y, x), \\ g(D_{ant}x, y) &= \Phi_{ant}(x, y) = -\Phi_{ant}(y, x) = -g(D_{ant}y, x). \end{aligned}$$

Como D_{aut} é un endomorfismo autoadxunto dun espazo vectorial dotado dun produto escalar definido positivo, D_{aut} diagonaliza nunha base ortonormal de autovectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$, con respecto da cal

$$D_{aut} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}, \qquad D_{ant} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, unha métrica invariante pola esquerda en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ que se restrinxa a un produto escalar definido positivo en $\mathfrak{r}^3$ está determinada, nunha base ortonormal axeitada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_4 temporal, polos corchetes non nulos seguintes:

$$\begin{cases} [e_1, e_4] = \delta_1 e_1 - \alpha e_2 - \beta e_3, \\ [e_2, e_4] = \alpha e_1 + \delta_2 e_2 - \gamma e_3, \\ [e_3, e_4] = \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta_3 e_3, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta_i$ son parámetros reais arbitrarios. Escribindo as compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base obtense

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_{11} &= \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_2\delta_3 - \delta_3^2 + \delta_1(\delta_2 + \delta_3), \\ \mathcal{E}_{12} &= \alpha(\delta_1 - \delta_2), \\ \mathcal{E}_{13} &= \beta(\delta_1 - \delta_3), \\ 2\mathcal{E}_{22} &= -\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_1(\delta_2 - \delta_3) + \delta_2\delta_3 - \delta_3^2, \\ \mathcal{E}_{23} &= \gamma(\delta_2 - \delta_3), \\ 2\mathcal{E}_{33} &= -\delta_1^2 - \delta_2^2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3^2 + \delta_1(\delta_3 - \delta_2), \\ 2\mathcal{E}_{44} &= -\delta_1^2 - \delta_2^2 + \delta_2\delta_3 - \delta_3^2 + \delta_1(\delta_2 + \delta_3). \end{aligned}$$

Resolvendo as ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$, obtense unha familia de solucións caracterizada por $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$. Un cálculo directo amosa que as variedades desta familia teñen curvatura seccional constante non negativa.

Lema 3.7. *Sexa g unha métrica lorentziana invariante pola esquerda en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ que se restrinxe a un produto escalar definido positivo en $\mathbb{R}^3$. Entón g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, ten curvatura seccional constante non negativa.*

Observación 3.8. As métricas de curvatura seccional constante do lema 3.7 están determinadas en termos da álxebra de Lie, respecto dunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, con e_4 temporal, polos corchetes non nulos

$$[e_1, e_4] = \delta e_1 - \alpha e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha e_1 + \delta e_2 - \gamma e_3, \quad [e_3, e_4] = \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_3,$$

para parámetros reais arbitrarios $\delta, \alpha, \beta, \gamma$.

Capítulo 4

Extensións lorentzianas de grupos de Lie lorentzianos

Neste capítulo continúase coa análise dos casos descritos no teorema 2.5. Estúdase a continuación o caso (b), que se corresponde con métricas de Lorentz en produtos semidirectos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ onde a restrición da métrica a $\mathfrak{g}_3$ é lorentziana.

Ao longo deste capítulo $\{e_1, e_2, e_3\}$ representará unha base ortonormal de $\mathfrak{g}_3$, na que por convenio suporemos que e_3 é temporal. Sexa $L\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$ o operador de estrutura definido por

$$L(e_1) = [e_2, e_3], \qquad L(e_2) = [e_3, e_1], \qquad L(e_3) = [e_2, e_1],$$

que é tal que $[u, v] = L(u \times v)$ para todos $u, v \in \mathfrak{g}_3$. Como consecuencia da proposición 2.2, L é autoadxunto. A diferenza esencial con respecto do caso tratado no capítulo anterior radica no feito de que un operador autoadxunto nun espazo vectorial lorentziano non é necesariamente diagonalizable. Seguindo o lema 2.3, en dimensión tres L pode adoptar catro formas canónicas distintas. Isto dá lugar a novos exemplos esencialmente diferentes dos estudados no capítulo 3.

O resultado principal do capítulo recóllese nos teoremas 4.4, 4.6, 4.8 e 4.10, que describen as métricas de Einstein invariantes pola esquerda en extensións lorentzianas de grupos de Lie lorentzianos de dimensión tres. No caso Ricci-chan non localmente simétrico, ditas métricas poden ser ondas planas ou estruturas con invariantes da curvatura non nulos. No caso no que o tensor de Ricci non sexa cero existen dúas familias non simétricas de métricas de Einstein invariantes pola esquerda (teorema 4.4). É importante sinalar que ningún dos exemplos anteriores ten un análogo riemanniano, sendo específicos da signatura lorentziana.

A continuación divídese a análise dependendo das diferentes formas canónicas que pode adoptar o operador de estrutura de $\mathfrak{g}_3$ no lema 2.3. En cada caso, complétase cada unha das bases de $\mathfrak{g}_3$ proporcionadas polo lema a unha base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathfrak{g}$ de maneira que $g(v_4, v_4) = 1$, $g(v_i, v_4) = 0$ para $i \neq 4$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{v_4\}$.

4.1. O operador de estrutura é diagonalizable: Caso Ia

Neste caso existe unha base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$, con $\mathfrak{g}_3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathfrak{r} = \text{span}\{e_4\}$, respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} [e_1, e_2] = L(e_1 \times e_2) = -L(e_3) = -\lambda_3 e_3, \\ [e_1, e_3] = L(e_1 \times e_3) = -L(e_2) = -\lambda_2 e_2, \\ [e_2, e_3] = L(e_2 \times e_3) = L(e_1) = \lambda_1 e_1. \end{array}$$

O feito de que e_4 actúe como unha derivación sobre $\mathfrak{g}_3$ é equivalente a que se cumpra a identidade de Jacobi para os vectores da base. Escribindo de maneira formal

$$[e_1, e_4] = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = \beta_1 e_2 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \quad [e_3, e_4] = \gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3,$$

a identidade de Jacobi resulta equivalente a que cumpra o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{array}{rrr} \alpha_3\lambda_1 - \gamma_1\lambda_3 = 0, & \beta_3\lambda_2 - \gamma_2\lambda_3 = 0, & \alpha_2\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 = 0, \\ (\alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3)\lambda_1 = 0, & (\alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3)\lambda_2 = 0, & (\alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3)\lambda_3 = 0. \end{array} \tag{4.1}$$

Dependendo dos autovalores λ_i do operador de estrutura L, téñense as seguintes posibilidades:

4.1.1. Métricas inducidas por un produto escalar lorentziano en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{su}(2)$

O caso no que os autovalores $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ correspóndese con métricas lorentzianas en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{su}(2)$ xa que a dimensión da subálxebra derivada $\mathfrak{g}_3'$ é 3. Nesta ocasión, séguese das ecuacións (4.1) que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\left\{ \begin{array}{lll} [e_1, e_2] = -\lambda_3 e_3, & [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, & [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \\ [e_1, e_4] = \kappa_3\lambda_2 e_2 + \kappa_2\lambda_3 e_3 & [e_2, e_4] = \kappa_1\lambda_3 e_3 - \kappa_3\lambda_1 e_1, & \\ [e_3, e_4] = \kappa_2\lambda_1 e_1 + \kappa_1\lambda_2 e_2, & & \end{array} \right. \tag{4.2}$$

onde $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ son parámetros reais arbitrarios.

Escribindo as compoñentes do tensor $\mathcal{E} = \rho - \frac{\tau}{4} g$ obtense

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= -5(1+\kappa_2^2-\kappa_3^2)\lambda_1^2 - (-3+\kappa_1^2+3\kappa_3^2)\lambda_2^2 + 2(-3+\kappa_1^2)\lambda_2\lambda_3 \\
&\quad + (3-\kappa_1^2+3\kappa_2^2)\lambda_3^2 + 2\lambda_1(\lambda_2-\kappa_3^2\lambda_2+\lambda_3+\kappa_2^2\lambda_3), \\
2\mathcal{E}_{12} &= \kappa_1\kappa_2(\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_2), \\
2\mathcal{E}_{13} &= \kappa_1\kappa_3(\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_3), \\
2\mathcal{E}_{14} &= \kappa_1(\lambda_2-\lambda_3)^2, \\
8\mathcal{E}_{22} &= -(-3+\kappa_2^2+3\kappa_3^2)\lambda_1^2 - 5(1+\kappa_1^2-\kappa_3^2)\lambda_2^2 + 2(1+\kappa_1^2)\lambda_2\lambda_3 \\
&\quad + (3+3\kappa_1^2-\kappa_2^2)\lambda_3^2 + 2\lambda_1(\lambda_2-\kappa_3^2\lambda_2+(-3+\kappa_2^2)\lambda_3), \\
2\mathcal{E}_{23} &= \kappa_2\kappa_3(\lambda_1^2-\lambda_2\lambda_3), \\
2\mathcal{E}_{24} &= \kappa_2(\lambda_1-\lambda_3)^2, \\
8\mathcal{E}_{33} &= -(3+3\kappa_2^2+\kappa_3^2)\lambda_1^2 - (3+3\kappa_1^2+\kappa_3^2)\lambda_2^2 - 2(1+\kappa_1^2)\lambda_2\lambda_3 \\
&\quad + 5(1+\kappa_1^2+\kappa_2^2)\lambda_3^2 + 2\lambda_1((3+\kappa_3^2)\lambda_2-(1+\kappa_2^2)\lambda_3) \\
2\mathcal{E}_{34} &= \kappa_3(\lambda_1-\lambda_2)^2, \\
8\mathcal{E}_{44} &= (-1+3\kappa_2^2-3\kappa_3^2)\lambda_1^2 + (-1+3\kappa_1^2-3\kappa_3^2)\lambda_2^2 + (2-6\kappa_1^2)\lambda_2\lambda_3 \\
&\quad + (-1+3\kappa_1^2+3\kappa_2^2)\lambda_3^2 + 2\lambda_1(\lambda_2+3\kappa_3^2\lambda_2+\lambda_3-3\kappa_2^2\lambda_3),
\end{aligned}$$

e compróbase que non existen solucións das ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$ para $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, polo que non existen produtos escalares lorentzianos de Einstein en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ nin en $\mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}$ que se restrinxan a produtos lorentzianos en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{su}(2)$ e diagonalicen o operador de estrutura.

4.1.2. Métricas inducidas por un produto escalar lorentziano en $\mathfrak{e}(2)$ ou $\mathfrak{e}(1,1)$

O caso no que un só dos autovalores de L se anula correspóndese con produtos lorentzianos en $\mathfrak{e}(2)$ ou $\mathfrak{e}(1,1)$. Distínguese a situación na que $\ker L$ é espacial (e polo tanto $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$) ou temporal (ocasión na que $\lambda_3 = 0$).

Métricas con $\ker L$ espacial

Para o caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 \neq 0$, séguese de (4.1) que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos corchetes non nulos:

$$\left\{ \begin{array}{lll} [e_1,e_2] = -\lambda_3 e_3, & [e_1,e_3] = -\lambda_2 e_2, & \\ [e_1,e_4] = \gamma e_2 + \delta e_3, & [e_2,e_4] = \alpha e_2 + \beta\lambda_3 e_3, & [e_3,e_4] = \beta\lambda_2 e_2 + \alpha e_3, \end{array} \right. \tag{4.3}$$

onde $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base resultan

$$
\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= 12\alpha^2 - 3\gamma^2 + 3\delta^2 + 3\lambda_2^2 - \beta^2\lambda_2^2 - 6\lambda_2\lambda_3 + 2\beta^2\lambda_2\lambda_3 + 3\lambda_3^2 - \beta^2\lambda_3^2,\\
2\mathcal{E}_{12} &= -3\alpha\gamma + \beta\delta\lambda_3,\\
2\mathcal{E}_{13} &= 3\alpha\delta - \beta\gamma\lambda_2,\\
2\mathcal{E}_{14} &= \beta(\lambda_2 - \lambda_3)^2,\\
8\mathcal{E}_{22} &= -4\alpha^2 + 5\gamma^2 - \delta^2 - 5\lambda_2^2 - 5\beta^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\beta^2\lambda_2\lambda_3 + 3\lambda_3^2 + 3\beta^2\lambda_3^2,\\
2\mathcal{E}_{23} &= -\gamma\delta + 2\alpha\beta(\lambda_3 - \lambda_2),\\
2\mathcal{E}_{24} &= -\delta\lambda_3,\\
8\mathcal{E}_{33} &= 4\alpha^2 - \gamma^2 + 5\delta^2 - 3\lambda_2^2 - 3\beta^2\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\beta^2\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2 + 5\beta^2\lambda_3^2,\\
2\mathcal{E}_{34} &= \gamma\lambda_2,\\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\alpha^2 - 3\gamma^2 + 3\delta^2 - \lambda_2^2 + 3\beta^2\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 - 6\beta^2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_3^2 + 3\beta^2\lambda_3^2.
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema $\mathcal{E}_{ij} = 0$ obtense unha única solución, dada por $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$, que se corresponde cunha métrica chá en $E(1,1)$. As contas para o caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$ correspóndense coas anteriores mediante o cambio de base $e_1' = e_2, e_2' = e_1, e_3' = e_3$, e $e_4' = e_4$.

Métricas con $\ker L$ temporal

Para o caso no que $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, das ecuacións (4.1) obtense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos seguintes corchetes non nulos:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
[e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, & [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, & [e_1, e_4] = \alpha e_1 - \beta\lambda_2 e_2,\\
[e_2, e_4] = \beta\lambda_1 e_1 + \alpha e_2, & [e_3, e_4] = \gamma e_1 + \delta e_2, &
\end{array}
\right. \tag{4.4}
$$

para $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes do tensor $\mathcal{E}$ resultan

$$
\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= -4\alpha^2 - 5\gamma^2 - \delta^2 - 5\lambda_1^2 + 5\beta^2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\beta^2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2 - 3\beta^2\lambda_2^2,\\
2\mathcal{E}_{12} &= -\gamma\delta + 2\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1),\\
2\mathcal{E}_{13} &= -3\alpha\gamma + \beta\delta\lambda_2,\\
2\mathcal{E}_{14} &= \delta\lambda_2,\\
8\mathcal{E}_{22} &= -4\alpha^2 - \gamma^2 - 5\delta^2 + 3\lambda_1^2 - 3\beta^2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\beta^2\lambda_1\lambda_2 - 5\lambda_2^2 + 5\beta^2\lambda_2^2,\\
2\mathcal{E}_{23} &= -3\alpha\delta - \beta\gamma\lambda_1,\\
2\mathcal{E}_{24} &= -\gamma\lambda_1,\\
8\mathcal{E}_{33} &= -12\alpha^2 - 3\gamma^2 - 3\delta^2 - 3\lambda_1^2 - \beta^2\lambda_1^2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 2\beta^2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_2^2 - \beta^2\lambda_2^2,\\
2\mathcal{E}_{34} &= -\beta(\lambda_1 - \lambda_2)^2,\\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\alpha^2 + 3\gamma^2 + 3\delta^2 - \lambda_1^2 - 3\beta^2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 6\beta^2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 - 3\beta^2\lambda_2^2.
\end{aligned}
$$

Resolvendo $\mathcal{E}_{ij} = 0$ atópase unha única solución, dada por $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, que se corresponde cunha métrica chá en $\tilde{E}(2)$.

4.1.3. Métricas inducidas por un produto escalar lorentziano na álxebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_3$

Neste caso o operador de estrutura L ten núcleo dous-dimensional. Distínguese a continuación a posibilidade de que a restrición do produto a $\ker L$ sexa definida positiva ($\lambda_3 \neq 0$) ou teña signatura lorentziana ($\lambda_3 = 0$).

Métricas co subespazo $\ker L$ definido positivo

Neste caso ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$) o autovector asociado ao único autovalor non nulo de L é temporal, e as ecuacións (4.1) mostran que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = -\lambda_3 e_3, \\ [e_1, e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \\ [e_3, e_4] = (\alpha_1 + \beta_2) e_3, \end{cases} \tag{4.5}$$

con $\lambda_3 \neq 0$ e α_i, β_i parámetros reais arbitrarios.

Escribindo as compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ obtemos

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= -4\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 + 2\alpha_2\beta_1 + 5\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_2 + 12\beta_2^2 - \beta_3^2 + 3\lambda_3^2, \\
2\mathcal{E}_{12} &= -\alpha_1(\alpha_2 + 3\beta_1) - 3\alpha_2\beta_2 - \beta_1\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \\
2\mathcal{E}_{13} &= 2\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_3\beta_2 - \beta_1\beta_3, \\
2\mathcal{E}_{14} &= \beta_3\lambda_3, \\
8\mathcal{E}_{22} &= 12\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_2\beta_1 - 3\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_2 - 4\beta_2^2 + 3\beta_3^2 + 3\lambda_3^2, \\
2\mathcal{E}_{23} &= -\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_1\beta_3 + 2\beta_2\beta_3, \\
2\mathcal{E}_{24} &= -\alpha_3\lambda_3, \\
8\mathcal{E}_{33} &= 4\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 5\alpha_3^2 - 2\alpha_2\beta_1 - \beta_1^2 + 12\alpha_1\beta_2 + 4\beta_2^2 + 5\beta_3^2 + 5\lambda_3^2, \\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 - 6\alpha_2\beta_1 - 3\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_2 - 4\beta_2^2 + 3\beta_3^2 - \lambda_3^2,
\end{aligned}$$

e compróbase que non existen solucións de $\mathcal{E}_{ij} = 0$ se $\lambda_3 \neq 0$.

Métricas co subespazo $\ker L$ lorentziano

Neste caso tense que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ ou $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$. De novo un cambio de base permítenos asumir que $\lambda_2 \neq 0$, caso para o que (4.1) mostra que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\begin{cases} [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \\ [e_1, e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = (\alpha_1 + \gamma_3) e_2, \\ [e_3, e_4] = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3, \end{cases} \tag{4.6}$$

con $\lambda_2 \neq 0$ e α_i, γ_i parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ nesta base resultan

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= -4\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 + 2\alpha_3\gamma_1 - 5\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 4\alpha_1\gamma_3 + 12\gamma_3^2 + 3\lambda_2^2,\\
2\mathcal{E}_{12} &= -2\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 - 3\alpha_2\gamma_3,\\
2\mathcal{E}_{13} &= \alpha_1(\alpha_3 - 3\gamma_1) - \alpha_2\gamma_2 + 3\alpha_3\gamma_3 - \gamma_1\gamma_3,\\
2\mathcal{E}_{14} &= \gamma_2\lambda_2,\\
8\mathcal{E}_{22} &= -4\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_3\gamma_1 - \gamma_1^2 - 5\gamma_2^2 - 12\alpha_1\gamma_3 - 4\gamma_3^2 - 5\lambda_2^2,\\
2\mathcal{E}_{23} &= -\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_1\gamma_2 - 2\gamma_2\gamma_3,\\
8\mathcal{E}_{33} &= -12\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 5\alpha_3^2 - 2\alpha_3\gamma_1 - 3\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2 - 4\alpha_1\gamma_3 + 4\gamma_3^2 - 3\lambda_2^2,\\
2\mathcal{E}_{34} &= \alpha_2\lambda_2,\\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 - 6\alpha_3\gamma_1 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 + 4\alpha_1\gamma_3 - 4\gamma_3^2 - \lambda_2^2,
\end{aligned}$$

e non se obteñen solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$ con $\lambda_2 \neq 0$.

4.1.4. Métricas inducidas por un produto escalar lorentziano en $\mathbb{R}^3$

Para o caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ao tratarse do caso no que a subálxebra $\mathfrak{g}_3$ é abeliana, toda aplicación linear $D\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$ é unha derivación. Co obxectivo de simplificar os cálculos, considérase a forma bilinear Φ asociada ao endomorfismo $D = [\cdot, u_4]$, $\Phi(x, y) := g(Dx, y)$. Procedendo de forma análoga a como se fixo na sección 3.4, descomponse Φ na súa parte simétrica e antisimétrica

$$\Phi_{sim}(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi(x, y) + \Phi(y, x)\}, \qquad \Phi_{ant}(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi(x, y) - \Phi(y, x)\}.$$

Téñense agora endomorfismos asociados D_{aut} e D_{ant} dados por

$$\Phi_{sim}(x, y) = g(D_{aut}x, y), \qquad \Phi_{ant}(x, y) = g(D_{ant}x, y),$$

onde D_{aut} é autoadxunto e D_{ant} anti-autoadxunto.

Traballando coa parte autoadxunta, D_{aut} ten que tomar unha das formas descritas no lema 2.3. Nos casos (Ia) e (Ib), con respecto dunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$, con e_3 temporal, tense

$$D_{ant} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

mentres que nos casos (II) e (III), con respecto dunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ con $g(u_1, u_2) = 1$, u_1 e u_2 nulos, e u_3 espacial,

$$D_{ant} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación estúdase cada unha das distintas posibilidades.

Produtos semidirectos con D_{aut} diagonalizable

Asumimos, en primeiro lugar, que a parte autoadxunta e anti-autoadxunta da derivación veñen dadas por

$$D_{aut} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}, \qquad D_{ant} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

con respecto dunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ con e_3 temporal. $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada entón, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{span}\{e_4\}$, con e_3 temporal, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [e_1, e_4] = \delta_1 e_1 - \alpha e_2 + \beta e_3, \qquad [e_2, e_4] = \alpha e_1 + \delta_2 e_2 + \gamma e_3, \\ [e_3, e_4] = \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta_3 e_3, \end{cases} \tag{4.7}$$

onde δ_i, α, β e γ son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base son:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_{11} &= -\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3^2 - \delta_1(\delta_2 + \delta_3), \\ \mathcal{E}_{12} &= \alpha(\delta_2 - \delta_1), \\ \mathcal{E}_{13} &= \beta(\delta_3 - \delta_1), \\ 2\mathcal{E}_{22} &= \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_2\delta_3 + \delta_3^2 + \delta_1(\delta_3 - \delta_2), \\ \mathcal{E}_{23} &= \gamma(\delta_3 - \delta_2), \\ 2\mathcal{E}_{33} &= -\delta_1^2 - \delta_2^2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3^2 + \delta_1(\delta_3 - \delta_2), \\ 2\mathcal{E}_{44} &= -\delta_1^2 - \delta_2^2 + \delta_2\delta_3 - \delta_3^2 + \delta_1(\delta_2 + \delta_3). \end{aligned}$$

Resolvendo $\mathcal{E}_{ij} = 0$ obtense unha única solución, dada por $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$, que se corresponde cunha métrica de curvatura seccional constante $K = -\delta^2$.

Produtos semidirectos nos que D_{aut} ten autovalores complexos

No caso no que D_{aut} ten autovalores complexos $\mu \pm i\kappa$ e un autovalor real δ, tense que

$$D_{aut} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \kappa \\ 0 & -\kappa & \mu \end{pmatrix}, \qquad D_{ant} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

con respecto dunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$ con e_3 temporal. $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada entón, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{span}\{e_4\}$, con e_3 temporal, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [e_1, e_4] = \delta e_1 - \alpha e_2 + \beta e_3, \qquad [e_2, e_4] = \alpha e_1 + \mu e_2 + (\gamma - \kappa) e_3, \\ [e_3, e_4] = \beta e_1 + (\gamma + \kappa) e_2 + \mu e_3, \end{cases} \tag{4.8}$$

para $\delta, \mu, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\kappa \neq 0$. Escribindo as compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base tense

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_{11} &= -\delta^2 - \kappa^2 - 2\delta\mu + 3\mu^2, & \mathcal{E}_{12} &= \beta\kappa + \alpha(\mu - \delta), \\
\mathcal{E}_{13} &= -\alpha\kappa + \beta(\mu - \delta), & 2\mathcal{E}_{22} &= \delta^2 + 4\gamma\kappa - \kappa^2 - \mu^2, \\
\mathcal{E}_{23} &= \kappa(\delta + 2\mu), & 2\mathcal{E}_{33} &= -\delta^2 + 4\gamma\kappa + \kappa^2 + \mu^2, \\
2\mathcal{E}_{44} &= -\delta^2 + 3\kappa^2 + 2\delta\mu - \mu^2.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema $\mathcal{E}_{ij} = 0$ atopamos solucións dadas por $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $-\frac{\delta}{2} = \mu = \pm\frac{\kappa}{\sqrt{3}} \neq 0$. Os casos $\mu = \frac{\kappa}{\sqrt{3}}$ e $\mu = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}}$ correspóndense mediante un cambio de base, resultante de intercambiar e_2 e $-e_2$, polo que se pode supoñer $\mu = \frac{\kappa}{\sqrt{3}}$. Así, obtemos unha única familia de métricas lorentzianas invariantes pola esquerda de Einstein en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ para este caso, caracterizada polos corchetes non nulos

$$[e_1, e_4] = -2\mu e_1, \quad [e_2, e_4] = \mu(e_2 + \sqrt{3}e_3), \quad \text{e} \quad [e_3, e_4] = \mu(-\sqrt{3}e_2 + e_3). \tag{4.9}$$

con respecto dunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^3 \rtimes \operatorname{span}\{e_4\}$ con e_3 temporal. Estas métricas son Ricci-chás, e estudando os invariantes da curvatura de orde 3 compróbase que $\|\nabla R\|^2 = -9216$, polo que a variedade non é localmente simétrica nin pode ser unha fronte de onda (un cálculo directo mostra que toda variedade fronte de onda verifica $\|\nabla R\|^2 = 0$).

Produtos semidirectos nos que D_{aut} ten un autovalor dobre con multiplicidade xeométrica un

No caso no que D_{aut} ten un autovalor δ_1 dobre con multiplicidade xeométrica 1 tense que existe unha base $\{u_1, u_2, u_3\}$ con respecto da cal

$$D_{aut} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \qquad D_{ant} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_{\mathfrak{g}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

polo que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$, con u_1, u_2 nulos, u_3, u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_1, u_4] = (\delta_1 + \alpha)u_1 + \varepsilon u_2 - \gamma u_3, \quad [u_2, u_4] = (\delta_1 - \alpha)u_2 - \beta u_3, \\ [u_3, u_4] = \beta u_1 + \gamma u_2 + \delta_2 u_3, \end{cases} \tag{4.10}$$

onde $\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon = \pm 1$. As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ con respecto desta base resultan

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{11} &= (2\alpha + 2\delta_1 + \delta_2)\varepsilon, & 2\mathcal{E}_{12} &= \delta_2^2 - \delta_1^2, & \mathcal{E}_{13} &= \gamma(\delta_2 - \delta_1) - \beta\varepsilon, \\
\mathcal{E}_{23} &= \beta(\delta_2 - \delta_1), & 2\mathcal{E}_{33} &= 3\delta_1^2 - 2\delta_1\delta_2 - \delta_2^2, & 2\mathcal{E}_{44} &= (\delta_2 - \delta_1)^2,
\end{aligned}$$

e para $\mathcal{E}_{ij} = 0$ obtense unha familia de solucións, dada por $\delta_1 = \delta_2 = 2\eta$, $\beta = 0$ e $\alpha = -3\eta$, onde η é un parámetro real arbitrario. Así, esta familia de exemplos de métricas de Einstein está determinada, con respecto da base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$, polos corchetes non nulos

$$[u_1, u_4] = -\eta u_1 + \varepsilon u_2 - \gamma u_3, \quad [u_2, u_4] = 5\eta u_2, \quad \text{e} \quad [u_3, u_4] = \gamma u_2 + 2\eta u_3, \tag{4.11}$$

onde $\eta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon = \pm 1$. Para o caso $\eta = 0$, a métrica determinada por (4.11) é chá, mentres que se $\eta \neq 0$, a métrica invariante asociada ten curvatura escalar $\tau = -12\eta^2$, polo que o exemplo non é unha variedade fronte de onda (un cálculo directo mostra que para este tipo de variedades $\tau = 0$). Ademais, a métrica non é localmente simétrica para $\eta \neq 0$.

Observación 4.1. O operador de curvatura $R : \Lambda^2 \to \Lambda^2$ no espazo de 2-formas asociado a unha métrica determinada por (4.11) vén dado por

$$R = \begin{pmatrix} -\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\eta & 0 & -\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\eta & 0 & -\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 \end{pmatrix}, \quad \langle\langle \cdot\, , \cdot \rangle\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto da base de 2-formas $\{u^1 \wedge u^2, u^1 \wedge u^3, u^1 \wedge u^4, u^2 \wedge u^3, u^2 \wedge u^4, u^3 \wedge u^4\}$, onde $\langle\langle \cdot\, , \cdot \rangle\rangle$ denota o produto inducido no espazo Λ^2. En consecuencia, o operador $R + \eta^2 \,\mathrm{Id}_{\Lambda^2}$ é nilpotente en dous pasos.

Produtos semidirectos nos que D_{aut} ten un autovalor triplo con multiplicidade xeométrica un

Por último, para o caso no que D_{aut} ten un autovalor triplo δ con multiplicidade xeométrica 1 tense que, respecto dunha base pseudo-ortonormal

$$D_{aut} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 1 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}, \qquad D_{ant} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_{\mathfrak{g}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

polo que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$, con u_1, u_2 nulos, u_3, u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_1, u_4] = (\delta + \alpha)u_1 - \gamma u_3, \qquad [u_2, u_4] = (\delta - \alpha)u_2 + (1 - \beta)u_3, \\ [u_3, u_4] = (1 + \beta)u_1 + \gamma u_2 + \delta u_3, \end{cases} \tag{4.12}$$

onde δ, α, β e γ son constantes reais arbitrarias. As compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ resultan agora

$$\mathcal{E}_{12} = \gamma, \quad \mathcal{E}_{22} = 2\beta, \quad \mathcal{E}_{23} = \alpha - 3\delta, \quad \mathcal{E}_{33} = -2\gamma,$$

e obtense unha familia de solucións de $\mathcal{E}_{ij} = 0$ caracterizada por $\beta = \gamma = 0$ e $\alpha = 3\delta$. Escribindo os corchetes non nulos con respecto da base pseudo-ortonormal, tense

$$[u_1, u_4] = 4\delta u_1, \quad [u_2, u_4] = -2\delta u_2 + u_3, \quad \text{e} \quad [u_3, u_4] = u_1 + \delta u_3, \tag{4.13}$$

onde δ é un parámetro real arbitrario.

Cando $\delta = 0$, u_1 determina un campo de vectores nulo paralelo, e a métrica é Ricci-chá e transversalmente chá, polo que se corresponde cunha onda plana en virtude do lema 1.9.

Cando $\delta \neq 0$, a métrica ten curvatura escalar $\tau = -12\delta^2$ e non é localmente simétrica.

Observación 4.2. O operador de curvatura $R : \Lambda^2 \to \Lambda^2$ no espazo de 2-formas asociado a unha métrica determinada por (4.13) vén dado por

$$R = \begin{pmatrix} -\delta^2 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ -\delta & -\delta^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta^2 & 0 & -1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta^2 \end{pmatrix}, \quad \langle\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respecto da base de 2-formas $\{u^1 \wedge u^2, u^1 \wedge u^3, u^1 \wedge u^4, u^2 \wedge u^3, u^2 \wedge u^4, u^3 \wedge u^4\}$, onde $\langle\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\rangle$ denota o produto inducido no espazo Λ^2. En consecuencia, o operador $R + \delta^2 \, \mathrm{Id}_{\Lambda^2}$ é nilpotente en tres pasos, de onde se segue que as métricas determinadas por (4.11) e (4.13) non son localmente isométricas (e de feito nin sequera localmente homotéticas).

Observación 4.3. As métricas homoxéneas non redutivas foron clasificadas por Fels e Renner en [11], onde se demostra que existe unha única familia de métricas de Einstein non redutivas con curvatura seccional non constante. Tales espazos son localmente isométricos a grupos de Lie con métricas invariantes pola esquerda [8], e un cálculo sinxelo utilizando as expresións do operador curvatura na observación 4.1 e na observación 4.2 mostra que ditas métricas son localmente isométricas ás métricas en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ determinadas pola expresión (4.11).

Os resultados desta sección recóllense de xeito resumido no seguinte teorema, que establece a clasificación de extensións lorentzianas de Einstein de álxebras de Lie lorentzianas con operador de estrutura diagonalizable.

Teorema 4.4. *Sexa g un produto escalar lorentziano nunha álxebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ de dimensión 4 tal que g se restrinxe a un produto escalar lorentziano en $\mathfrak{g}_3$ e o operador de estrutura $L\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$ é diagonalizable. Entón a métrica invariante á esquerda asociada a g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, é isométrica a unha das métricas determinadas polos seguintes casos:*

1. *Respecto dunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes span\{e_4\}$, con e_3 temporal, polos corchetes non nulos*
   - $[e_1, e_2] = -\lambda e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda e_2, \quad [e_2, e_4] = \alpha e_3 \quad e \quad [e_3, e_4] = \alpha e_2.$
     Estas métricas correspóndense con métricas chás en $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$.
   - $[e_1, e_3] = -\lambda e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda e_1, \quad [e_1, e_4] = -\alpha e_2 \quad e \quad [e_2, e_4] = \alpha e_1.$
     Estas métricas correspóndense con métricas chás en $\widetilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$.

- $[e_1,e_4]=\delta e_1-\alpha e_2+\beta e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha e_1+\delta e_2+\gamma e_3,\quad e\quad [e_3,e_4]=\beta e_1+\gamma e_2+\delta e_3.$
Estas métricas son métricas de curvatura seccional constante non positiva $-\delta^2$ en $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$.
- $[e_1,e_4]=-2\mu e_1,\quad [e_2,e_4]=\mu(e_2+\sqrt{3}e_3),\quad e\quad [e_3,e_4]=\mu(-\sqrt{3}e_2+e_3),$
Estas métricas en $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$ son Ricci-chás con $\|\nabla R\|^2\neq 0$, polo que non son localmente isométricas a ningunha onda plana.

2. Respecto dunha base pseudo-ortonormal $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ de $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_3\rtimes span\{u_4\}$, con u_1, u_2 nulos, u_3, u_4 espaciais e $g(u_1,u_2)=1$, polos corchetes non nulos

- $[u_1,u_4]=-\eta u_1+\varepsilon u_2-\gamma u_3,\quad [u_2,u_4]=5\eta u_2,\quad e\quad [u_3,u_4]=\gamma u_2+2\eta u_3.$
Estas métricas en $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$ teñen curvatura escalar $\tau=-12\eta^2$, e nunca son localmente simétricas para $\eta\neq 0$. Para $\eta=0$, son variedades chás.
- $[u_1,u_4]=4\delta u_1,\quad [u_2,u_4]=-2\delta u_2+u_3,\quad e\quad [u_3,u_4]=u_1+\delta u_3.$
Estas métricas en $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$ son non localmente simétricas e teñen curvatura escalar $\tau=-12\delta^2$. Para $\delta=0$, son ondas planas.

para $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\delta,\eta$ constantes reais, $\varepsilon=\pm 1$ e $\mu\neq 0$.

Observación 4.5. Se se pretende traballar nunha clase homotética, pódense simplificar as expresión dos exemplos non simétricos anteriores como segue:

(i) As métricas Ricci-chás determinadas, nunha base ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ con e_3 temporal, por

$$[e_1,e_4]=-2\mu e_1,\quad [e_2,e_4]=\mu(e_2+\sqrt{3}e_3),\quad \text{e}\quad [e_3,e_4]=\mu(-\sqrt{3}e_2+e_3),$$

son localmente homotéticas á métrica determinada por

$$[e_1,e_4]=-2e_1,\quad [e_2,e_4]=e_2+\sqrt{3}e_3,\quad \text{e}\quad [e_3,e_4]=-\sqrt{3}e_2+e_3,$$

con respecto da base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

(ii) Para as métricas non Ricci-chás con operador de Weyl nilpotente en dous pasos non chás determinadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ con $\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_3,u_3\rangle=\langle u_4,u_4\rangle=1$, por

$$[u_1,u_4]=-\eta u_1+\varepsilon u_2-\gamma u_3,\quad [u_2,u_4]=5\eta u_2,\quad \text{e}\quad [u_3,u_4]=\gamma u_2+2\eta u_3,$$

compróbase que o tensor curvatura non depende de γ. Kulkarni probou en [16] que para variedades de dimensión $n\geq 4$ e curvatura seccional non constante os difeomorfismos que conservan a curvatura son isometrías, polo que fixando $\gamma=0$ se obteñen métricas localmente isométricas á métrica anterior. Agora, podemos dividir os vectores da base por η e permanecer na mesma clase homotética. Desta maneira, obtense que as métricas anteriores son homotéticas ás determinadas, con respecto da base $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, por

$$[u_1,u_4]=-u_1+\delta u_2,\quad [u_2,u_4]=5u_2,\quad \text{e}\quad [u_3,u_4]=2u_3,$$

onde δ é un parámetro real distinto de cero.

(iii) As métricas non Ricci-chás con operador de curvatura nilpotente en tres pasos non localmente simétricas determinadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con $g(u_1, u_2) = g(u_3, u_3) = g(u_4, u_4) = 1$, por

$$[u_1, u_4] = 4\delta u_1, \quad [u_2, u_4] = -2\delta u_2 + u_3, \quad \text{e} \quad [u_3, u_4] = u_1 + \delta u_3,$$

correspóndense coa clase homotética que se obtén dividindo os vectores da base por δ. Así tense que as métricas anteriores son homotéticas ás determinadas, con respecto da base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, polos corchetes non nulos

$$[u_1, u_4] = 4u_1, \quad [u_2, u_4] = -2u_2 + \delta u_3, \quad \text{e} \quad [u_3, u_4] = \delta u_1 + u_3,$$

onde δ é un parámetro distinto de 0.

4.2. O operador de estrutura ten autovalores complexos: Caso Ib

Nesta ocasión, tense que existe unha base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ tal que $\mathfrak{g}_3 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathfrak{r} = \operatorname{span}\{e_4\}$, e con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} [e_1, e_2] &= -L(e_3) = -\beta e_2 - \alpha e_3, \\ [e_1, e_3] &= -L(e_2) = -\alpha e_2 + \beta e_3, \\ [e_2, e_3] &= L(e_1) = \lambda e_1, \end{aligned}$$

onde $\beta \neq 0$ e α, λ son autovalores reais arbitrarios. Escribindo formalmente unha extensión semidirecta da álxebra anterior dada por

$$[e_1, e_4] = \sum_1^3 \mu_i e_i, \quad [e_2, e_4] = \sum_1^3 \kappa_i e_i, \quad [e_3, e_4] = \sum_1^3 \gamma_i e_i,$$

obtense que e_4 actúa como unha derivación sobre $\mathfrak{g}_3$ (ou equivalentemente se verifica a identidade de Jacobi en $\mathfrak{g}$) se, e soamente se,

$$\begin{aligned} &\gamma_1\alpha + \kappa_1\beta - \mu_3\lambda = 0, && \kappa_3\alpha - \gamma_2\alpha + \mu_1\beta = 0, \\ &\kappa_1\alpha - \gamma_1\beta + \mu_2\lambda = 0, && \mu_1\alpha + \kappa_2\alpha - \gamma_3\alpha - 2\kappa_3\beta = 0, \\ &\mu_1\alpha - \kappa_2\alpha + \gamma_3\alpha + 2\gamma_2\beta = 0, && (\mu_1 - \kappa_2 - \gamma_3)\lambda = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Na análise das ecuacións anteriores distinguiremos as situacións nas que o autovalor real λ do operador de estrutura sexa nulo ou non.

O autovalor real do operador de estrutura é cero: extensións lorentzianas de métricas lorentzianas en $\mathfrak{e}(1,1)$

Se $\lambda = 0$, a dimensión de $\mathfrak{g}_3'$ é 2, polo que $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{e}(1,1)$ segundo se veu na sección 2.3. Séguese de (4.14) que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\begin{cases} [e_1,e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, \quad [e_1,e_3] = -\alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1,e_4] = \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3, \\ [e_2,e_4] = 2\beta\kappa_2 e_2 + (\kappa_2 - \gamma_3)\alpha e_3, \quad [e_3,e_4] = (\kappa_2-\gamma_3)\alpha e_2 + 2\gamma_3\beta e_3, \end{cases} \tag{4.15}$$

onde $\beta \neq 0$ e $\alpha, \mu_i, \kappa_i, \gamma_i$ son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base son

$$\begin{aligned} 8\mathcal{E}_{11} &= -3\mu_2^2 + 3\mu_3^2 + 4\beta^2(-3 + 4\kappa_2^2 + 4\kappa_2\gamma_3 + 4\gamma_3^2), \\ 2\mathcal{E}_{12} &= \alpha\mu_3(\kappa_2 - \gamma_3) - \beta\mu_2(2\kappa_2 + \gamma_3), \\ 2\mathcal{E}_{13} &= \beta\mu_3(\kappa_2 + 2\gamma_3) - \alpha\mu_2(\kappa_2 - \gamma_3), \\ \mathcal{E}_{14} &= 2\beta^2(\gamma_3 - \kappa_2), \\ 8\mathcal{E}_{22} &= 5\mu_2^2 - \mu_3^2 + 4\beta^2(1 - 4\kappa_2^2 - 4\kappa_2\gamma_3 + 4\gamma_3^2), \\ 2\mathcal{E}_{23} &= -\mu_2\mu_3 - 4\alpha\beta(1 + \kappa_2^2 - 2\kappa_2\gamma_3 + \gamma_3^2), \\ 2\mathcal{E}_{24} &= \beta\mu_2 - \alpha\mu_3, \\ 8\mathcal{E}_{33} &= -\mu_2^2 + 5\mu_3^2 + 4\beta^2(-1 - 4\kappa_2^2 + 4\kappa_2\gamma_3 + 4\gamma_3^2), \\ 2\mathcal{E}_{34} &= \alpha\mu_2 + \beta\mu_3, \\ 8\mathcal{E}_{44} &= -3\mu_2^2 + 3\mu_3^2 + 4\beta^2(1 - 4\kappa_2^2 + 4\kappa_2\gamma_3 - 4\gamma_3^2). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$, as solucións veñen dadas por $\alpha = \mu_2 = \mu_3 = 0$ e $\kappa_2 = \gamma_3 = \pm\frac{1}{2}$, e correspóndense con métricas localmente simétricas en $G = \widetilde{E}(1,1) \rtimes R$. As familias de solucións dadas por $\kappa_2 = \gamma_3 = \frac{1}{2}$ e $\kappa_2 = \gamma_3 = -\frac{1}{2}$ correspóndense, de feito, mediante o cambiando e_4 por $-e_4$, co que se pode supoñer $\kappa_2 = \gamma_3 = \frac{1}{2}$ sen perda de xeneralidade. Para este caso, no que os corchetes non nulos son da forma

$$[e_1,e_2] = -\beta e_2, \quad [e_1,e_3] = \beta e_3, \quad [e_2,e_4] = \beta e_2, \quad \text{e} \quad [e_3,e_4] = \beta e_3.$$

Compróbase que $\operatorname{span}\{e_2, e_4 + e_1\}$ e $\operatorname{span}\{e_3, e_4 - e_1\}$ definen distribucións paralelas non dexeneradas, polo que a métrica invariante pola esquerda asociada é localmente isométrica a un produto de variedades de dimensión 2 con curvatura seccional constante negativa $K = -2\beta^2$. Desta maneira, (G, g) é localmente isométrico a un produto de planos hiperbólicos coa mesma curvatura seccional, un deles riemanniano e o outro lorentziano, $\mathbb{H}^2(r) \times \mathbb{H}^2_1(r)$, onde $r = \sqrt{\frac{1}{2\beta^2}}$.

O autovalor real do operador de estrutura é distinto de cero: extensións lorentzianas de métricas lorentzianas en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$

O caso no que $\lambda \neq 0$, tendo en conta a clasificación feita na sección 2.3, correspóndese $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Considerando a identidade de Jacobi (4.14), tense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con e_3 temporal, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, \qquad [e_1, e_3] = -\alpha e_2 + \beta e_3, \qquad [e_2, e_3] = \lambda e_1, \\ [e_1, e_4] = (\alpha^2 + \beta^2)(\delta_1 e_2 + \delta_2 e_3), \\ [e_2, e_4] = (\delta_2\beta - \delta_1\alpha)\lambda e_1 - \delta_3\beta e_2 - \delta_3\alpha e_3, \\ [e_3, e_4] = (\delta_2\alpha + \delta_1\beta)\lambda e_1 - \delta_3\alpha e_2 + \delta_3\beta e_3, \end{cases} \tag{4.16}$$

para $\lambda, \beta \neq 0$ e $\alpha, \delta_i \in \mathbb{R}$.

As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ con respecto desta base resultan

$$\begin{aligned} 8\mathcal{E}_{11} &= -12\beta^2 + 4\delta_3^2\beta^2 + 4\alpha\lambda - 5\lambda^2 + 4\delta_1\delta_2\beta\lambda(\alpha^2 + \beta^2 - 5\alpha\lambda) \\ &\quad - \delta_1^2(3\alpha^4 + 3\beta^4 + 2\alpha^3\lambda + 2\alpha\beta^2\lambda + 5\beta^2\lambda^2 + \alpha^2(6\beta^2 - 5\lambda^2)) \\ &\quad + \delta_2^2(3\alpha^4 + 3\beta^4 + 2\alpha^3\lambda + 2\alpha\beta^2\lambda + 5\beta^2\lambda^2 + \alpha^2(6\beta^2 - 5\lambda^2)), \\ 8\mathcal{E}_{22} &= 4\beta^2 - 4\alpha\lambda + 3\lambda^2 + 4\delta_1\delta_2\beta\lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\,\lambda) \\ &\quad + \delta_1^2(5\alpha^4 + 5\beta^4 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha\beta^2\lambda - \beta^2\lambda^2 + \alpha^2\,(10\beta^2 - 3\lambda^2)) \\ &\quad - \delta_2^2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha\beta^2\lambda + 3\beta^2\lambda^2 + \alpha^2(2\beta^2 + \lambda^2)), \\ 2\mathcal{E}_{23} &= \delta_1^2\alpha\beta\lambda^2 - \delta_1\delta_2(\alpha^4 + \alpha^2(2\beta^2 - \lambda^2) + \beta^2(\beta^2 + \lambda^2)) - \beta(-2\lambda + \alpha\,(4 + \delta_2^2\lambda^2)), \\ 2\mathcal{E}_{24} &= \delta_1\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \lambda^2) - \delta_2(\alpha^3 - 2\alpha^2\lambda - 2\beta^2\lambda + \alpha(\beta^2 + \lambda^2)), \\ 8\mathcal{E}_{33} &= -4\beta^2 + 4\alpha\lambda - 3\lambda^2 - 4\delta_1\delta_2\beta\lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\,\lambda) \\ &\quad - \delta_1^2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha\beta^2\lambda + 3\beta^2\lambda^2 + \alpha^2(2\beta^2 + \lambda^2)) \\ &\quad + \delta_2^2(5\alpha^4 + 5\beta^4 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha\beta^2\lambda - \beta^2\lambda^2 + \alpha^2\,(10\beta^2 - 3\lambda^2)), \\ 2\mathcal{E}_{34} &= \delta_2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \lambda^2) + \delta_1(\alpha^3 - 2\alpha^2\lambda - 2\beta^2\lambda + \alpha(\beta^2 + \lambda^2)), \\ 8\mathcal{E}_{44} &= 4\beta^2 + 4\alpha\lambda - \lambda^2 - 12\delta_1\delta_2\beta\lambda(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\,\lambda) \\ &\quad - 3\delta_1^2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha\beta^2\lambda - \beta^2\lambda^2 + \alpha^2\,(2\beta^2 + \lambda^2)) \\ &\quad + 3\delta_2^2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^3\lambda - 2\alpha\beta^2\lambda - \beta^2\lambda^2 + \alpha^2\,(2\beta^2 + \lambda^2)). \end{aligned}$$

Un cálculo longo mostra que o sistema de ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$ non ten solucións, polo que non hai métricas de Einstein nesta situación.

Os resultados desta sección resúmense no seguinte teorema:

Teorema 4.6. *Sexa g unha métrica lorentziana invariante pola esquerda nun grupo de Lie $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$ de dimensión 4 tal que g se restrinxe a un produto escalar lorentziano en $\mathfrak{g}_3$ e o operador de estrutura $L\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$ ten un autovalor complexo. Entón g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, (G, g) é localmente isométrica a un produto de espazos hiperbólicos coa mesma curvatura, $\mathbb{H}^2(r) \times \mathbb{H}^2_1(r)$, un deles riemanniano e o outro lorentziano. Neste caso $G = E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$.*

Observación 4.7. As métricas anteriores no teorema 4.6 son homotéticas á determinada polos seguintes corchetes non nulos en $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1) \rtimes \mathfrak{r}$:

$$[e_1, e_2] = -e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad \text{e} \quad [e_3, e_4] = e_3,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é unha base ortonormal con e_3 temporal de maneira que $\mathfrak{e}(1,1) = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathfrak{r} = \operatorname{span}\{e_4\}$.

4.3. O operador de estrutura ten un autovalor dobre con multiplicidade xeométrica 1: Caso II

Se L ten unha raíz dobre do seu polinomio característico con multiplicidade xeométrica 1, entón existe unha base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ tal que $\mathfrak{g}_3 = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathfrak{r} = \operatorname{span}\{u_4\}$, e con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} [u_1, u_2] = L(u_3) = \lambda_2 u_3, \\ [u_1, u_3] = -L(u_1) = -\lambda_1 u_1 - \varepsilon\, u_2, \\ [u_2, u_3] = L(u_2) = \lambda_1 u_2, \end{array}$$

onde λ_1 é unha raíz dobre do polinomio mínimo de L con multiplicidade xeométrica 1 e λ_2 unha raíz simple. A identidade de Jacobi cúmprese agora se, e soamente se,

$$\begin{array}{ll} \mu_3\lambda_1 + \gamma_1\lambda_2 = 0, & \gamma_3\lambda_1 - \mu_1\varepsilon = 0, \\ 2\mu_1\lambda_1 = 0, & \kappa_3\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \mu_3\varepsilon = 0, \\ (\kappa_1 + \mu_2 - \gamma_3)\lambda_2 = 0, & 2\kappa_2\lambda_1 - (\kappa_1 - \mu_2 + \gamma_3)\varepsilon = 0, \end{array} \tag{4.17}$$

onde a extensión de $\mathfrak{g}_3$ se escribe de maneira formal como

$$[u_1, u_4] = \sum_1^3 \kappa_i u_i, \quad [u_2, u_4] = \sum_1^3 \mu_i u_i, \quad [u_3, u_4] = \sum_1^3 \gamma_i u_i.$$

As posibles extensións correspondentes ás solucións de (4.17) dependen dos autovalores de L, segundo sexan $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Estúdanse a continuación cada unha das posibilidades de maneira separada.

Caso $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$: extensións lorentzianas da álxebra lorentziana $\mathfrak{h}_3$

Cando ambos autovalores son 0, a subálxebra derivada $\mathfrak{g}_3'$ ten dimensión 1, co que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$. Resolvendo as ecuacións de Jacobi (4.17), tense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, & \\ [u_1, u_4] = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, & [u_2, u_4] = (\kappa_1 + \gamma_3) u_2, \\ [u_3, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, & \end{array} \right. \tag{4.18}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$ e κ_i, γ_i son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ con respecto desta base son

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}_{11} &= -4\kappa_1\kappa_2 - \kappa_3^2 + \gamma_2^2 - 2\kappa_2\gamma_3, \\
8\mathcal{E}_{12} &= -4\kappa_1^2 + 2\kappa_3\gamma_1 + 6\gamma_1\gamma_2 - 4\kappa_1\gamma_3 + 3\gamma_3^2, \\
2\mathcal{E}_{13} &= -\kappa_2\gamma_1 - \kappa_1(\kappa_3 + 3\gamma_2) - (2\kappa_3 + \gamma_2)\gamma_3, \\
2\mathcal{E}_{14} &= -\gamma_1\varepsilon, \\
2\mathcal{E}_{22} &= \gamma_1^2, \\
2\mathcal{E}_{23} &= -\gamma_1(3\kappa_1 + 2\gamma_3), \\
8\mathcal{E}_{33} &= 12\kappa_1^2 + 2\kappa_3\gamma_1 - 6\gamma_1\gamma_2 + 4\kappa_1\gamma_3 - 5\gamma_3^2, \\
8\mathcal{E}_{44} &= -4\kappa_1^2 - 6\kappa_3\gamma_1 - 6\gamma_1\gamma_2 + 4\kappa_1\gamma_3 - \gamma_3^2.
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema de ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$, obtéñense dúas familias de solucións, a primeira dada por $\kappa_2 = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$ e $\kappa_3 = \pm\gamma_2$, e a segunda por $\kappa_2 = \gamma_1 = 0$, $\kappa_3 = -\gamma_2$ e $2\kappa_1 = \gamma_3 \neq 0$. Estas tres solucións presentan diferentes xeometrías:

- Cando $\kappa_2 = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$ e $\kappa_3 = -\gamma_2$, a métrica asociada é unha métrica chá.
- A solución dada por $\kappa_2 = \gamma_1 = 0$ e $\kappa_3 = -\gamma_2$ e $2\kappa_1 = \gamma_3$ da lugar a variedades con curvatura seccional constante negativa $K = -\kappa_1^2$.
- No caso $\kappa_2 = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$ e $\kappa_3 = \gamma_2$, se $\gamma_2 = 0$ a métrica e chá, e se $\gamma_2 \neq 0$ compróbase que non é localmente simétrica. Neste caso, o vector u_2 é nulo e paralelo, polo que a métrica resultante é unha onda de Brinkmann. Compróbase ademais que (G, g) é transversalmente chá (isto é, $\mathcal{R}(x, y) = 0$ para calquera $x, y \in u_2^\perp$) e Ricci-chá, polo que aplicando o lema 1.9 é unha onda plana, e polo tanto correspóndese coas métricas consideradas na sección 1.3.

Caso $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$

No caso no que o autovalor dobre é cero e o outro distinto de cero, a subálxebra derivada $\mathfrak{g}_3'$ ten dimensión dous, polo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2) \rtimes \mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{e}(1,1) \rtimes \mathfrak{r}$.

Utilizando as expresións da identidade de Jacobi en (4.17), obtense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
[u_1, u_2] = \lambda_2 u_3, & [u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, & \\
[u_1, u_4] = \alpha u_2 + \beta u_3, & [u_2, u_4] = \gamma u_2 - \delta\varepsilon\lambda_2 u_3, & [u_3, u_4] = \delta u_2 + \gamma u_3,
\end{array}
\right. \tag{4.19}
$$

onde $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ con respecto desta base son agora

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}_{11} &= -\beta^2 + \delta^2 - 2\alpha\gamma + 2\varepsilon\lambda_2, & 8\mathcal{E}_{12} &= 3\gamma^2 + \lambda_2(2\beta\delta\varepsilon - 2\delta^2\varepsilon + 3\lambda_2), \\
2\mathcal{E}_{13} &= -2\beta\gamma - \delta(\gamma + \alpha\varepsilon\lambda_2), & 2\mathcal{E}_{14} &= (\beta + \delta + \delta)\lambda_2, \\
2\mathcal{E}_{22} &= -\delta^2\lambda_2^2, & 2\mathcal{E}_{23} &= 3\delta\gamma\varepsilon\lambda_2, \\
2\mathcal{E}_{24} &= \delta\varepsilon\lambda_2^2, & 8\mathcal{E}_{33} &= -5\gamma^2 - \lambda_2(10\beta\delta\varepsilon + 2\delta^2\varepsilon + 5\lambda_2), \\
8\mathcal{E}_{44} &= -\gamma^2 + (6\beta\delta\varepsilon + 6\delta^2\varepsilon - \lambda_2)\lambda_2, & &
\end{aligned}
$$

de onde se segue que non hai solucións para o sistema de ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$ con $\lambda_2 \neq 0$.

Caso $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$

O caso no que autovalor dobre de L é distinto de cero e o outro se anula correspóndese con produtos semidirectos $\mathfrak{e}(1,1) \rtimes \mathfrak{r}$. $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada neste caso, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\left\{ \begin{array}{lll} [u_1, u_3] = -\lambda_1 u_1 - \varepsilon u_2, & [u_2, u_3] = \lambda_1 u_1, & \\ [u_1, u_4] = \alpha u_1 + \beta u_2, & [u_2, u_4] = (\alpha - 2\varepsilon\lambda_1\beta) u_2, & [u_3, u_4] = \gamma u_1 + \delta u_2, \end{array} \right. \tag{4.20}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda_1 \neq 0$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ resultan

$$\begin{array}{ll} 2\mathcal{E}_{11} = -4\alpha\beta + \delta^2 - 4\varepsilon\lambda_1, & 4\mathcal{E}_{12} = -2\alpha^2 + 3\delta\gamma + 4\alpha\beta\varepsilon\lambda_1 - 2\beta^2\lambda_1^2, \\ 2\mathcal{E}_{13} = -3\alpha\delta - \beta\gamma + 2\beta\delta\varepsilon\lambda_1, & 2\mathcal{E}_{14} = -\gamma\varepsilon - \delta\lambda_1, \\ 2\mathcal{E}_{22} = \gamma^2, & 2\mathcal{E}_{23} = -3\alpha\gamma + 4\beta\gamma\varepsilon\lambda_1, \\ 2\mathcal{E}_{24} = \gamma\lambda_1, & 4\mathcal{E}_{33} = 3(2\alpha^2 - \delta\gamma - 4\alpha\beta\varepsilon\lambda_1 + 2\beta^2\lambda_1^2), \\ 4\mathcal{E}_{44} = -2\alpha^2 - 3\delta\gamma + 4\alpha\beta\varepsilon\lambda_1 - 2\beta^2\lambda_1^2, & \end{array}$$

e compróbase que non existen solucións de $\mathcal{E}_{ij} = 0$ con $\lambda_1 \neq 0$.

Caso $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$

Se os dous autovalores de L son distintos de 0, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$ segundo a clasificación feita en 2.3. As ecuacións (4.17) aseguran agora que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{lll} [u_1, u_2] = \lambda_2 u_2, & [u_1, u_3] = -\lambda_1 u_1 - \varepsilon u_2, & [u_2, u_3] = \lambda_1 u_1, \\ [u_1, u_4] = -\delta_2\lambda_1 u_1 - \varepsilon\delta_2 u_2 + \delta_1\lambda_2 u_3, & & [u_2, u_4] = \delta_2\lambda_1 u_2 - \delta_3\lambda_2 u_3, \\ [u_3, u_4] = \delta_3\lambda_1 u_1 + (\varepsilon\delta_3 - \delta_1\lambda_1) u_2, & & \end{array} \right. \tag{4.21}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ e δ_i parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas de $\mathcal{E}$ resultan

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_{11} &= \delta_3^2\varepsilon^2 - 2\delta_1\delta_3\varepsilon\lambda_1 + \varepsilon(-4(1+\delta_2^2)\lambda_1 + 2\lambda_2) + \delta_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2),\\
8\mathcal{E}_{12} &= \delta_3^2\varepsilon(6\lambda_1 - 2\lambda_2) + \lambda_2(-4\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2\delta_1\delta_3(-3\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2),\\
2\mathcal{E}_{13} &= \delta_2(\delta_1\lambda_1(-\lambda_1 + \lambda_2) + \delta_3\varepsilon(2\lambda_1 + \lambda_2)),\\
2\mathcal{E}_{14} &= -(\lambda_1 - \lambda_2)(2\delta_3\varepsilon + \delta_1(-\lambda_1 + \lambda_2)),\\
2\mathcal{E}_{22} &= \delta_3^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2),\\
2\mathcal{E}_{23} &= -\delta_2\delta_3\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2),\\
2\mathcal{E}_{24} &= \delta_3(\lambda_1 - \lambda_2)^2,\\
8\mathcal{E}_{33} &= (4\lambda_1 - 5\lambda_2)\lambda_2 - 2\delta_3^2\varepsilon(3\lambda_1 + \lambda_2) + 2\delta_1\delta_3(3\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 5\lambda_2^2),\\
8\mathcal{E}_{44} &= 6\delta_1\delta_3(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (4\lambda_1 - \lambda_2)\ \lambda_2 + 6\delta_3^2\varepsilon(-\lambda_1 + \lambda_2).
\end{aligned}$$

Para $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, non se obteñen solucións, polo que non existen métricas de Einstein nesta situación.

Os resultados desta sección recóllense no seguinte teorema:

Teorema 4.8. *Sexa g un produto escalar lorentziano nunha álxebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ de dimensión 4 tal que a restrición $g_{|\mathfrak{g}_3}$ é lorentziana e o operador de estrutura $L\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$ ten un autovalor dobre con multiplicidade xeométrica 1. Entón a métrica invariante á esquerda asociada a g é unha métrica Einstein se, e soamente se, é unha métrica con curvatura seccional constante ou unha onda plana en $H_3 \rtimes \mathbb{R}$.*

Observación 4.9. As métricas do teorema anterior están determinadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{h}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$, con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos

- $[u_1, u_3] = \pm u_2, \quad [u_1, u_4] = \alpha u_2 + \gamma u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma u_2$, para algúns $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.
  Neste caso a métrica trátase dunha onda plana. Se $\gamma = 0$, a variedade é chá.

- $[u_1, u_3] = \pm u_2, \quad [u_1, u_4] = \alpha u_2 - \gamma u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma u_2$, para algúns $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.
  Esta métrica trátase dunha métrica chá.

- $[u_1, u_3] = \pm u_2, \quad [u_1, u_4] = \alpha u_1 - \gamma u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma u_2 + 2\alpha u_3$, para $\alpha \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
  Este caso correspóndese con métricas de curvatura seccional constante negativa $K = -\alpha^2$.

4.4. O operador de estrutura ten un autovalor triplo con multiplicidade xeométrica 1: caso III

Cando L ten unha raíz tripla do seu polinomio característico con multiplicidade xeométrica 1, tense que existe unha base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ tal que $\mathfrak{g}_3 = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$,

$\mathfrak{r} = \text{span}\{u_4\}$ e con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{aligned} [u_1, u_2] &= u_1 + \lambda u_3, \\ [u_1, u_3] &= -\lambda u_1, \\ [u_2, u_3] &= \lambda u_2 + u_3, \end{aligned}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribindo de xeito formal a extensión $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ como

$$[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,$$

onde $\mathfrak{r} = \text{span}\{u_4\}$, a identidade de Jacobi cúmprese se, e soamente se,

$$\begin{array}{lll} \alpha_2 + (\alpha_3 + \gamma_2)\lambda = 0, & \beta_2 = (\beta_3 + \gamma_1)\lambda, & 2\alpha_3 = (\alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3)\lambda, \\ \alpha_2 \lambda = 0, & \gamma_2 = \gamma_3 \lambda, & \gamma_1 + \beta_1 \lambda = 0. \end{array} \tag{4.22}$$

A continuación estúdanse as posibilidades de álxebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ que aparecen en función de se o autovalor λ de L é 0 ou distinto de 0.

Caso $\lambda = 0$: extensións lorentzianas da álxebra lorentziana $\mathfrak{e}(1,1)$

Se $\lambda = 0$, entón a álxebra de Lie resultante é $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1) \rtimes \mathfrak{r}$. Resolvendo o sistema de ecuacións (4.22) tense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\left\{ \begin{array}{lll} [u_1, u_2] = u_1, & [u_2, u_3] = u_3, & \\ [u_1, u_4] = \alpha u_1, & [u_2, u_4] = \beta u_1 + \gamma u_3, & [u_3, u_4] = \delta u_3, \end{array} \right. \tag{4.23}$$

para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parámetros reais positivos.

As compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ veñen dadas por

$$\begin{array}{lll} 8\mathcal{E}_{12} = 4\delta^2 - \alpha^2, & 2\mathcal{E}_{22} = -4 - 2\beta\delta - \gamma^2, & \mathcal{E}_{23} = -\delta\gamma, \\ 2\mathcal{E}_{24} = 2\delta - \alpha, & 8\mathcal{E}_{33} = 3\alpha^2 - 4\alpha\delta - 4\delta^2, & 8\mathcal{E}_{44} = -(\alpha - 2\delta)^2. \end{array}$$

Resolvendo o sistema de ecuacións $\mathcal{E}_{ij} = 0$, obtense unha familia de solucións, caracterizada por $\gamma = 0$, $\frac{\alpha}{2} = \delta = \frac{-2}{\beta}$, con $\beta \neq 0$, que se corresponde cunha métrica con curvatura seccional constante negativa.

Caso $\lambda \neq 0$. Métricas en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{r}$

Para o caso $\lambda \neq 0$, tense que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. A identidade de Jacobi (4.22) proporciona agora que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos seguintes corchetes non nulos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [u_1, u_2] = u_1 + \lambda u_3, \quad [u_1, u_3] = -\lambda u_1, & [u_2, u_3] = \lambda u_2 + u_3, \\ [u_1, u_4] = -(\alpha + \beta\lambda - \gamma\lambda^2) u_1 - \alpha\lambda u_3, & \\ [u_2, u_4] = \gamma u_1 + \lambda(\beta - \gamma\lambda) u_2 + \beta u_3, & [u_3, u_4] = -\gamma\lambda u_1 + \alpha\lambda u_2 + \alpha u_3, \end{array} \right. \tag{4.24}$$

para $\lambda \neq 0$ e α, β, γ parámetros reais arbitrarios.

As compoñentes non nulas do tensor $\mathcal{E}$ resultan neste caso

$$
\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{12} &= 3\alpha^2 - \lambda^2 + 4\alpha\lambda(\beta - \gamma\lambda), & 2\mathcal{E}_{13} &= 3\alpha^2\lambda, \\
2\mathcal{E}_{22} &= -4 - \beta^2 - 2\alpha\gamma - 4\beta\gamma\lambda + 5\gamma^2\lambda^2, & 2\mathcal{E}_{23} &= -\alpha(2\beta + 3\gamma\lambda) - \lambda(2 + \beta^2 - 2\beta\gamma\lambda + \gamma^2\lambda^2), \\
2\mathcal{E}_{24} &= 3\alpha, & 8\mathcal{E}_{33} &= 3\alpha^2 - \lambda^2 + 8\alpha\lambda(-\beta + \gamma\lambda), \\
\mathcal{E}_{44} &= -9\alpha^2 + 3\lambda^2,
\end{aligned}
$$

e non se teñen solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$, xa que $\lambda \neq 0$. Desta maneira obtense:

Teorema 4.10. *Sexa g un produto escalar lorentziano nunha álxebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ de dimensión 4 tal que g se restrinxe a un produto escalar lorentziano en $\mathfrak{g}_3$ e o operador $L\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$ ten un autovalor triplo con multiplicidade xeométrica 1. Entón a métrica invariante á esquerda asociada a g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, é unha métrica de curvatura seccional constante negativa en $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$.*

Observación 4.11. As métricas do teorema 4.10 están caracterizadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1) \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_1, u_2) = 1$, polos corchetes non nulos

$$
[u_1, u_2] = u_1, \quad [u_2, u_3] = u_3, \quad [u_1, u_4] = 2\alpha u_1, \quad [u_2, u_4] = -\frac{2}{\alpha} u_1, \quad [u_3, u_4] = \alpha u_3,
$$

para $\alpha \neq 0$, sendo o valor da curvatura seccional $K = -\alpha^2$.

Capítulo 5

Extensións lorentzianas de grupos de Lie dexenerados

Neste capítulo séguese coa análise dos casos descritos no teorema 2.5, esta vez co caso (c), que se corresponde con produtos semidirectos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ onde a restrición da métrica a $\mathfrak{g}_3$ é dexenerada.

O resultado principal do capítulo pódese resumir no seguinte teorema, onde se mostra que os exemplos específicos desta situación se corresponden con métricas chás ou ondas planas.

Teorema 5.1. *Sexa g unha métrica de Einstein nun grupo de Lie lorentziano $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$ de dimensión 4 que se restrinxe a un produto dexenerado en $\mathfrak{g}_3$. Entón tense un dos seguintes casos*

(i) *$G = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ e (G, g) é chá ou unha onda plana determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^3 \rtimes span\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos*

$$[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \qquad [u_2, u_4] = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3,$$
$$[u_3, u_4] = \frac{2\alpha_1^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 + 2\beta_2^2}{2(\alpha_1 + \beta_2)} u_3,$$

para α_i, β_i parámetros reais tales que $\alpha_1 + \beta_2 \neq 0$.

(ii) *$G = H_3 \rtimes \mathbb{R}$ e (G, g) é unha onda plana determinada por*

$$[u_1, u_2] = \pm(\kappa_2 + \mu_1) u_3, \qquad [u_1, u_4] = \eta_3 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3,$$
$$[u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_3 u_3, \qquad [u_3, u_4] = \eta_3 u_3,$$

para κ_i, μ_i e η_i parámetros reais arbitrarios, ou ben

$$[u_1, u_2] = \alpha u_3, \qquad [u_1, u_4] = \frac{((\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2)}{4\mu_2} u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3,$$
$$[u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \quad [u_3, u_4] = \left(\frac{(\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2}{4\mu_2} + \mu_2 \right) u_3,$$

para $\kappa_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ con $\mu_2 \neq 0$, onde $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ denota unha base pseudo-ortonormal de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes span\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$.

(iii) *$G = \tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ ou $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$ e g é unha das métricas xa estudadas nos capítulos 3 e 4.*

Estúdanse a continuación as diferentes posibilidades de álxebras de Lie deste tipo en función da dimensión da subálxebra derivada $\mathfrak{g}_3' = [\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_3]$ de $\mathfrak{g}_3$. Así, se $\dim(\mathfrak{g}_3') = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^3 \rtimes \mathfrak{r}$. Se $\dim(\mathfrak{g}_3') = 1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$. Os casos nos que $\dim(\mathfrak{g}_3') = 2$ correspóndense con produtos semidirectos $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2) \rtimes \mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(1,1) \rtimes \mathfrak{r}$. Por último, se $\dim(\mathfrak{g}_3') = 3$, $\mathfrak{g}$ correspóndese cun dos produtos directos $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{r}$.

5.1. O caso $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$

Se $\dim(\mathfrak{g}_3') = 0$, $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{r}^3$ e a identidade de Jacobi satisfaise sempre. Seguindo o teorema 2.5, existe unha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, e con respecto da cal os corchetes non nulos son da forma

$$[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,$$

para $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$. Escribindo as compoñentes do tensor $\mathcal{E}$ distintas de 0 con respecto desta base obtense

$$\begin{aligned}
8\mathcal{E}_{11} &= -5\gamma_1^2 - \gamma_2^2, & 2\mathcal{E}_{12} &= -\gamma_1\gamma_2,\\
2\mathcal{E}_{14} &= 2\alpha_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2, & 8\mathcal{E}_{22} &= -\gamma_1^2 - 5\gamma_2^2,\\
2\mathcal{E}_{24} &= \beta_1\gamma_1 + (\alpha_1 + 2\beta_2)\gamma_2, & 8\mathcal{E}_{34} &= 3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2),\\
2\mathcal{E}_{44} &= -2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_2\beta_1 - \beta_1^2 - 2\beta_2^2 & &\\
&\quad - 2\alpha_3\gamma_1 - 2\beta_3\gamma_2 + 2\alpha_1\gamma_3 + 2\beta_2\gamma_3, & &
\end{aligned}$$

e téñense dúas familias de solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$, unha caracterizada por $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e $\alpha_2 = -\beta_1$, e a segunda dada por $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 = \frac{2\alpha_1^2 + (\alpha_2+\beta_1)^2 + 2\beta_2^2}{2(\alpha_1+\beta_2)}$.

- Para o caso $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e $\alpha_2 = -\beta_1$, a métrica correspondente é chá.
- Cando $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 = \frac{2\alpha_1^2 + (\alpha_2+\beta_1)^2 + 2\beta_2^2}{2(\alpha_1+\beta_2)}$, escribindo a conexión de Levi-Civita en termos da base, compróbase que u_3 é un campo de vectores recurrente e nulo, polo que xera unha distribución paralela nula. Pódese ver agora que $\mathcal{R}(x,y) = 0$ para todo $x, y \in u_3^\perp$ e, ademais, a variedade é Ricci-chá, polo que é unha onda plana polo lema 1.9.

Lema 5.2. *Sexa g unha métrica lorentziana invariante pola esquerda en $G = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ tal que a restrición $g_{|\mathbb{R}^3}$ é dexenerada. Entón g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, é unha onda plana.*

Observación 5.3. As métricas do lema 5.2 están determinadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$[u_1, u_4] = \alpha u_2 + \beta u_3, \quad [u_2, u_4] = -\alpha u_1 + \gamma u_3, \quad [u_3, u_4] = \delta u_3,$$

para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, caso no que g é unha métrica chá; ou ben por

$$\begin{aligned} &[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3, \\ &[u_3, u_4] = \frac{2\alpha_1^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 + 2\beta_2^2}{2(\alpha_1 + \beta_2)} u_3, \end{aligned}$$

para $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 \neq \beta_2$ para o caso de ondas planas.

5.2. O caso $H_3 \rtimes \mathbb{R}$

Se $\dim(\mathfrak{g}_3') = 1$, $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{h}_3$, e logo $\mathfrak{g}_3' = \operatorname{span}\{x\}$ para algún $x \in \mathfrak{g}_3$. Como $g_{|\mathfrak{g}_3}$ ten signatura $(2, 0, 1)$, pódese escribir $x = v + \lambda u_3$, con v espacial e u_3 nulo. Diferéncianse a continuación dúas posibilidades, dependendo de se x é espacial ou nulo.

Caso 1. $\mathfrak{g}_3'$ é un subespazo nulo

Para o caso no que $v = 0$, $\mathfrak{g}_3' = \operatorname{span}\{u_3\}$, e entón pódese escoller unha base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ tal que $\mathfrak{g}_3 = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathfrak{r} = \operatorname{span}\{u_4\}$, e

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &[u_1, u_2] = \alpha u_3, \quad [u_1, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \\ &[u_1, u_3] = \beta u_3, \quad [u_2, u_4] = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\ &[u_2, u_3] = \gamma u_3, \quad [u_3, u_4] = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \delta_3 u_3, \end{aligned}$$

para algún dos α, β, γ distinto de cero e $\mu_i, \kappa_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ de maneira que se cumpra a identidade de Jacobi, condición equivalente a que

$$\begin{aligned} &\delta_1 \alpha = 0, \quad \delta_2 \alpha = 0, \quad \mu_1 \alpha + \kappa_2 \alpha - \delta_3 \alpha + \kappa_3 \beta - \mu_3 \gamma = 0. \\ &\delta_1 \beta = 0, \quad \delta_2 \beta = 0, \quad \mu_1 \beta + \mu_2 \gamma = 0, \\ &\delta_1 \gamma = 0, \quad \delta_2 \gamma = 0, \quad \kappa_1 \beta + \kappa_2 \gamma = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dependendo dos valores de α, β e γ téñense as seguintes posibilidades de álxebras de Lie:

- Se $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ (e polo tanto $\alpha \neq 0$), resolver as ecuacións (5.1) asegura que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\left\{ \begin{aligned} &[u_1, u_2] = \alpha u_3, \\ &[u_1, u_4] = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \\ &[u_3, u_4] = (\kappa_1 + \mu_2) u_3, \end{aligned} \right.$$

A única compoñente non nula de $\mathcal{E}$ resulta agora $2\mathcal{E}_{44} = -(\kappa_2 + \mu_1)^2 + 4\kappa_1\mu_2 + \alpha^2$, e obtéñense dúas familias de solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$, a primeira delas dada por $\mu_2 = 0$ e $\alpha = \pm(\kappa_2 + \mu_1) \neq 0$, e a segunda delas caracterizada por $\kappa_1 = (\kappa_2^2 + 2\kappa_2\mu_1 + \mu_1^2 - \alpha^2)/(4\mu_2)$, con $\mu_2 \neq 0$. Todos estas métricas son ondas planas con vector recurrente nulo u_3.

- Se $\beta = 0$ e $\gamma \neq 0$, $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_1, u_2] = \alpha u_3, & [u_2, u_3] = \gamma u_3 \\ [u_1, u_4] = \gamma\mu_1 u_1 + \alpha(\mu_1 - \delta_3)u_3, & [u_2, u_4] = \kappa_1 u_1 + \kappa_3 u_3, \\ [u_3, u_4] = \gamma\delta_3 u_3, \end{cases}$$

para α, μ_i, κ_i parámetros reais arbitrarios e $\gamma \neq 0$. Calculando as coordenadas do tensor $\mathcal{E}$ obtense que $8\mathcal{E}_{11} = 3\gamma^2$, polo que non hai solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$ con $\gamma \neq 0$.

- Por último, se $\beta \neq 0$, como consecuencia de (5.1), $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_1, u_2] = \alpha u_3, \quad [u_1, u_3] = \beta e_3, \quad [u_2, u_3] = \gamma e_3 \\ [u_1, u_4] = \beta(-\gamma\mu_2 u_1 + \beta\mu_2 u_2 + \mu_3 u_3), \quad [u_3, u_4] = \beta\delta_3 u_3, \\ [u_2, u_4] = -\gamma\kappa_2 u_1 + \beta\kappa_2 u_2 + (\gamma\mu_3 + \alpha(\gamma\mu_2 - \kappa_2 + \delta_3))u_3, \end{cases}$$

para $\alpha, \gamma, \mu_i, \kappa_i, \delta_3$ parámetros reais arbitrarios e $\beta \neq 0$. Tense agora que $8\mathcal{E}_{34} = -\beta^2 - \gamma^2$, polo que non hai solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$ con $\beta \neq 0$.

Caso 2. $\mathfrak{g}_3'$ é un subespazo riemanniano

Se $v \neq 0$, podemos tomar $u_1 = \frac{x}{\|x\|}$, que é un vector espacial e unitario, $u_3 = e_3$, e completar a unha base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g}$, con respecto da cal se ten

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} [u_1, u_2] = \alpha u_1, & [u_1, u_4] = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\ [u_1, u_3] = \beta u_1, & [u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \\ [u_2, u_3] = \gamma u_1, & [u_3, u_4] = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3, \end{array}$$

con polo menos un dos $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ e $\mu_i, \kappa_i, \delta_i \in \mathbb{R}$. A identidade de Jacobi cúmprese agora se, e soamente se,

$$\begin{array}{lll} \kappa_2\alpha = 0, & \kappa_3\alpha = 0, & \mu_2\alpha + \mu_3\beta = 0 \\ \kappa_2\beta = 0, & \kappa_3\beta = 0, & \delta_2\alpha + \delta_3\beta = 0 \\ \kappa_2\gamma = 0, & \kappa_3\gamma = 0, & \delta_1\alpha - \mu_1\beta + (\kappa_1 - \mu_2 - \delta_3)\gamma = 0 \end{array} \tag{5.2}$$

Dependendo dos valores de α e β téñense as seguintes posibilidades de álxebras de Lie:

- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ (e polo tanto $\gamma \neq 0$), dedúcese de (5.2) que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_2, u_3] = \gamma u_1, & [u_1, u_4] = (\mu_2 + \eta_3) u_1, \\ [u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, & [u_3, u_4] = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3, \end{cases}$$

  con $\gamma, \mu_i, \kappa_i \in \mathbb{R}$. Agora, pódese comprobar que $\mathcal{E}_{33} = -\frac{\gamma^2}{2}$, polo que non hai solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$.

- Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, tense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_1, u_3] = \beta u_1, & [u_2, u_3] = \gamma u_1, & [u_1, u_4] = \kappa_1 u_1, \\ [u_2, u_4] = \kappa_2 \gamma u_1 + (\kappa_1 - \kappa_2 \beta) u_2, & [u_3, u_4] = \kappa_3 u_1 + \kappa_4 u_2, \end{cases}$$

  para $\kappa_i \in \mathbb{R}$. Neste, caso, $\mathcal{E}_{33} = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}$, e non hai solución para $\mathcal{E}_{ij} = 0$.

- Por último, se $\alpha \neq 0$, resolvendo as ecuacións (5.2) tense que $(\mathfrak{g}, g)$ está determinada, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{cases} [u_1, u_2] = \alpha u_1, & [u_1, u_3] = \beta u_1, & [u_2, u_3] = \gamma u_1, \\ [u_1, u_4] = \kappa_1 u_1, & [u_2, u_4] = \kappa_2 \gamma u_1 + (\kappa_1 - \kappa_2 \beta) u_2, & [u_3, u_4] = \kappa_3 u_1 + \kappa_4 u_2, \end{cases}$$

  para $\alpha \neq 0$ e $\kappa_i \in \mathbb{R}$. Tense agora

$$\begin{aligned} 8\mathcal{E}_{44} = {} & -4\alpha^2 - 5\kappa_2^2 \beta^2 - \kappa_4^2 \beta^2 + 10\kappa_2 \beta(\kappa_1 + \kappa_4 - \kappa_3 \beta)\gamma - 5\kappa_1^2 \gamma^2 - 10\kappa_1 \kappa_4 \gamma^2 - 5\kappa_4^2 \gamma^2 \\ & + 10\kappa_1 \kappa_3 \beta \gamma^2 + 10\kappa_3 \kappa_4 \beta \gamma^2 - 5\kappa_3^2 \beta^2 \gamma^2 + \alpha(-8\kappa_1 \beta + 4\kappa_4 \beta - 4\kappa_3 \beta^2 + 10\kappa_2 \gamma), \\ 2\mathcal{E}_{33} = {} & -2\beta^2 - \gamma^2, \end{aligned}$$

  e compróbase facilmente que non hai solucións de $\mathcal{E}_{ij} = 0$ se $\alpha \neq 0$.

Finalmente, obtense:

Lema 5.4. *Sexa g unha métrica lorentziana invariante pola esquerda en $G = H_3 \rtimes \mathbb{R}$ tal que g se restrinxe a un produto escalar dexenerado en $\mathfrak{h}_3$. Entón, g é unha métrica de Einstein se, e soamente se, é unha onda plana.*

Observación 5.5. As métricas no lema 5.4 son isométricas a unha das dadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= \pm(\kappa_2 + \mu_1) u_3, & [u_1, u_4] &= \eta_3 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\ [u_2, u_4] &= \mu_1 u_1 + \mu_3 u_3, & [u_3, u_4] &= \eta_3 u_3, \end{aligned}$$

para $\kappa_i, \mu_i, \eta_i \in \mathbb{R}$, ou ben

$$\begin{aligned}
[u_1, u_2] &= \alpha u_3, & [u_1, u_4] &= \frac{((\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2)}{4\mu_2} u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\
[u_2, u_4] &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, & [u_3, u_4] &= \left(\frac{(\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2}{4\mu_2} + \mu_2 \right) u_3,
\end{aligned}$$

para $\kappa_i, \mu_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ e $\mu_2 \neq 0$.

5.3. O caso $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$ ou $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$

Se a dimensión da subálxebra derivada $\mathfrak{g}_3'$ é 2, $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}(1,1) \rtimes \mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{e}(2) \rtimes \mathfrak{r}$. Podemos supoñer sen perda de xeneralidade que a subálxebra derivada de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, é a subálxebra de dimensión 3 $\mathfrak{g}_3$: se $\dim(\mathfrak{g}') < 3$, entón existen dous vectores linearmente independentes $v, w \in \mathfrak{g}$ actuando como derivacións en $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ é lorentziana, ten que existir algún vector $u \in \operatorname{span}\{v, w\}$ non nulo, e logo podemos escribir $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes \operatorname{span}\{u\}$ para unha subálxebra $\mathfrak{h}$ de dimensión 3 na que a métrica é non dexenerada, co que $\mathfrak{g}$ é unha das álxebras de Lie dos capítulos 3 e 4.

Escribindo $\mathfrak{g}_3' = \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$ para $w_1, w_2 \in \mathfrak{g}_3$, podemos descompoñer cada un dos vectores w_1, w_2 como $w_i = v_i + \lambda_i u_3$, onde os v_i son vectores espaciais e u_3 nulo e ortogonal aos v_i. Distínguense agora dous casos, dependendo de se v_1 e v_2 son linearmente independentes (e entón $\mathfrak{g}_3'$ é un subespazo riemanniano), ou non (e a restrición de g a $\mathfrak{g}_3'$ é dexenerada).

Caso 1. $\mathfrak{g}_3'$ é un subespazo riemanniano

Se v_1 e v_2 son linearmente independentes, tomando u_1, u_2 unha base ortonormal de $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, chégase a que existe unha base de $\mathfrak{g}_3$ con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{aligned}
[u_1, u_2] &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, & [u_1, u_4] &= \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\
[u_1, u_3] &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, & [u_2, u_4] &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \\
[u_2, u_3] &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, & [u_3, u_4] &= \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3,
\end{aligned}$$

para $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \kappa_i, \mu_i, \eta_i \in \mathbb{R}$, onde as matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \kappa_1 & \mu_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \kappa_2 & \mu_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_3 & \mu_3 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

teñen rango máximo. Escribindo as condicións para que se verifique a identidade de Jacobi, achamos que para calquera α_i, β_i e γ_i, a álxebra resultante é tal que $\dim(\mathfrak{g}') \leq 2$, co que como se discutiu anteriormente, estas estruturas se corresponden coas xa estudadas nos capítulos 3 e 4.

Caso 2. A restrición de g a $\mathfrak{g}_3'$ é dexenerada

Se v_1 e v_2 son linearmente dependentes, tomando $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, tense que $\{u_1, u_3\}$ é unha base de $\mathfrak{g}_3'$, a cal se pode completar a unha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$ con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} [u_1,u_2] = \alpha_1 u_1 + \alpha_3 u_3, & [u_1,u_4] = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\ [u_1,u_3] = \beta_1 u_1 + \beta_3 u_3, & [u_2,u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \\ [u_2,u_3] = \gamma_1 u_1 + \gamma_3 u_3, & [u_3,u_4] = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3, \end{array}$$

onde as matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \kappa_1 & \mu_1 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2 & \mu_2 & \eta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \kappa_3 & \mu_3 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

teñen rango máximo. De novo, escribindo as condicións para que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$, tense que $\dim(\mathfrak{g}') \leq 2$, polo que $\mathfrak{g}$ é unha das álxebras estudadas anteriormente.

5.4. O caso $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ ou $SU(2)\times\mathbb{R}$

Neste caso a subálxebra derivada $\mathfrak{g}_3' = \mathfrak{g}_3$, co que se se considera a base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$ do caso (c) no teorema 2.5 e o endomorfismo adxunto $\mathrm{ad}_{u_3}\colon \mathfrak{g}_3 \to \mathfrak{g}_3$, este ten que ter necesariamente ou ben dous autovalores reais non nulos ou ben dous autovalores complexos conxugados. Ademais, pódese escribir $u_3 = [v, w]$ para algúns $v, w \in \mathfrak{g}_3$, polo que $\mathrm{ad}_{u_3} = \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_w - \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_v$, do que se deduce que $tr(\mathrm{ad}_{u_3}) = 0$. Preséntanse agora dúas posibilidades:

Caso 1. ad_{u_3} ten autovalores reais

Se ad_{u_3} ten autovalores reais 0, λ e $-\lambda$, con $\lambda \neq 0$, sexan v_1, v_2 autovectores unitarios de forma que $[v_1, u_3] = \lambda v_1$ e $[v_2, u_3] = -\lambda v_2$. Escribindo a identidade de Jacobi obtense que $[v_1, v_2] \in \mathrm{span}\{u_3\}$. Desta maneira, posiblemente reescalando u_3, obtense unha base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{v_4\}$ con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} [v_1,v_2] = v_3, & [v_1,v_4] = -\alpha v_1 + \beta v_3, \\ [v_1,v_3] = \lambda v_1, & [v_2,v_4] = \alpha v_2 + \gamma v_3, \\ [v_2,v_3] = -\lambda v_2, & [v_3,v_4] = \lambda(\gamma v_1 + \beta v_2), \end{array}$$

para $\lambda \neq 0$, $\kappa \neq \pm 1$ e α, β, γ parámetros reais arbitrarios.

A compoñente $(3,3)$ do tensor $\mathcal{E}$ con respecto desta base resulta $\mathcal{E}_{33} = \frac{2\lambda^2}{\kappa^2 - 1}$, polo que non se obteñen solucións para $\mathcal{E}_{ij} = 0$ con $\lambda \neq 0$.

Caso 2. ad_{u_3} ten autovalores complexos

Se ad_{u_3} ten autovalores 0, $i\beta$ e $-i\beta$, con $\beta \neq 0$, pódense tomar v_1, v_2 vectores unitarios de forma que $[v_1, u_3] = \beta v_2$ e $[v_2, u_3] = -\beta v_1$. Escribindo a identidade de Jacobi obtense que $[v_1, v_2] \in \mathrm{span}\{u_3\}$. Desta maneira, reescalando u_3 de ser necesario, tense que existe unha base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathrm{span}\{v_4\}$ con respecto da cal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} [v_1, v_2] = v_3, & [v_1, v_4] = -\alpha v_2 + \gamma v_3, \\ [v_1, v_3] = \beta v_2, & [v_2, v_4] = \alpha v_1 + \delta v_3, \\ [v_2, v_3] = -\beta v_1, & [v_3, v_4] = \beta(\gamma v_1 + \delta v_2), \end{array}$$

para $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq \pm 1$ e $\beta \neq 0$. As compoñentes do tensor $\mathcal{E}$ son agora

$$\begin{aligned}
8(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{11}/\beta &= 4 + 5\gamma^2\beta + 10\gamma\kappa\delta\beta - 10\gamma\kappa^3\delta\beta + \delta^2\beta - 4\kappa^4\delta^2\beta \\
&\quad + \kappa^2(-8 + 40\alpha - 5\gamma^2\beta + 3\delta^2\beta), \\
8(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{12}/\beta &= 4\gamma\delta\beta + 2\gamma\kappa^2\delta\beta - 6\gamma\kappa^4\delta\beta + k(-4 + 32\alpha + 5\gamma^2\beta + 5\delta^2\beta) \\
&\quad + \kappa^3(8\alpha - 5(\gamma^2 + \delta^2)\beta), \\
2\mathcal{E}_{13} &= -(\gamma\kappa + \delta)\beta^2, \\
2(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{14}/\beta &= -\gamma\kappa(2 + (-1 + \kappa^2)\alpha) - (1 + \kappa^2(-3 + \alpha) - \alpha)\delta, \\
8(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{22}/\beta &= 4 + \gamma^2\beta - 4\gamma^2\kappa^4\beta + 10\gamma\kappa\delta\beta - 10\gamma\kappa^3\delta\beta + 5\delta^2\beta \\
&\quad + \kappa^2(-8 + 40\alpha + 3\gamma^2\beta - 5\delta^2\beta), \\
2\mathcal{E}_{23} &= (\gamma + \kappa\delta)\beta^2, \\
2(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{24}/\beta &= \gamma(1 + \kappa^2(-3 + \alpha) - \alpha) + \kappa(2 + (-1 + \kappa^2)\alpha)\delta, \\
(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{33} &= 2\kappa^2\beta^2, \\
8(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{34}/\beta &= -4 - 3\gamma^2\beta - 6\gamma\kappa\delta\beta + 6\gamma\kappa^3\delta\beta - 3\delta^2\beta + k^2(-8\alpha + 3(\gamma^2 + \delta^2)\beta), \\
2(\kappa^2 - 1)\mathcal{E}_{44} &= -1 + 2\gamma^2\beta + 2\delta^2\beta - 2\kappa^2(-2\alpha^2 + (\gamma^2 + \delta^2)\beta).
\end{aligned}$$

Resolvendo $\mathcal{E}_{ij} = 0$, compróbase que non existen solucións con $\beta \neq 0$.

Lema 5.6. *Non existen métricas lorentzianas invariantes pola esquerda de Einstein en $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ ou $SU(2) \times \mathbb{R}$ que se restrinxan a produtos escalares dexenerados en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{su}(2)$.*

Capítulo 6

Conclusións

A partir dos resultados obtidos nos capítulos 3, 4 e 5, estamos en condicións de dar finalmente unha clasificación xeral de tódalas métricas lorentzianas de Einstein invariantes á esquerda en dimensión 4.

6.1. Ondas planas invariantes á esquerda

Paga a pena destacarmos previamente algunhas simplificacións para o produto corchete das familias de ondas planas non chás obtidas nos capítulos 4 e 5.

O primeiro exemplo de onda plana de Einstein, que se obtiña no teorema 4.4, correspondíase coas métricas dadas con respecto dunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

$$[u_2, u_4] = u_3, \quad \text{e} \quad [u_3, u_4] = u_1.$$

Sexan $\hat{u}_1 = u_3$, $\hat{u}_2 = u_4$, $\hat{u}_3 = u_1$, $\hat{u}_4 = u_2$. Tense agora que os únicos corchetes non nulos con respecto desta nova base son $[\hat{u}_1, \hat{u}_2] = \hat{u}_3$ e $[\hat{u}_2, \hat{u}_4] = -\hat{u}_1$, polo que $\mathrm{span}\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\} \cong \mathfrak{h}_3$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathrm{span}\{\hat{u}_4\}$. Con respecto da base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4\}$, tense que

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

polo que estes exemplos son isométricos ás ondas planas estudadas no capítulo 5 en $H_3 \rtimes \mathbb{R}$.

Na sección 4.3 obtíñase outro exemplo de ondas planas, esta vez caracterizadas polos corchetes distintos de cero

$$[u_1, u_3] = \pm u_2, \quad [u_1, u_4] = \alpha u_2 + \gamma u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma u_2,$$

onde $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ denota unha base pseudo-ortonormal de $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^3 \rtimes \mathrm{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 nulos, u_3 e u_4 espaciais e $g(u_3, u_4) = 1$. Tomando $\hat{u}_1 = u_4$, $\hat{u}_2 = u_3$, $\hat{u}_3 = u_2$, $\hat{u}_4 = u_1$, tense que con respecto desta nova base de $\mathfrak{g}$ os corchetes non nulos son

$$[\hat{u}_1, \hat{u}_2] = -\gamma\hat{u}_3, \quad [\hat{u}_2, \hat{u}_4] = -\alpha\hat{u}_3 - \gamma\hat{u}_2, \quad [\hat{u}_3, \hat{u}_4] = \pm\hat{u}_3$$

polo que $\operatorname{span}\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\} \cong \mathfrak{h}_3$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \operatorname{span}\{\hat{u}_4\}$. Compróbase agora que $g_{|\operatorname{span}\{\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3\}}$ é dexenerada, co que esta variedade é isométrica ás ondas planas estudadas no capítulo 5 para $H_3 \rtimes \mathbb{R}$.

- Polo tanto, as ondas planas de Einstein en grupos de Lie lorentzianos de dimensión 4 podemos describilas sempre como métricas en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ ou $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ de maneira que a restrición de g a $\mathfrak{r}^3$ ou $\mathfrak{h}_3$ sexa un produto escalar dexenerado.

Pódense tamén simplificar as expresións obtidas no capítulo 5 para os exemplos de ondas planas, especialmente se se quere traballar con clases homotéticas. Por exemplo, para as métricas determinadas no teorema 5.2 por

$$\begin{aligned}
&[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \qquad [u_2, u_4] = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3,\\
&[u_3, u_4] = \frac{2\alpha_1^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 + 2\beta_2^2}{2(\alpha_1 + \beta_2)} u_3,
\end{aligned}$$

compróbase que o tensor curvatura non depende de α_3 nin β_3, polo que utilizando o traballo de Kulkarni [16] son localmente isométricas ás dadas por

$$[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad [u_2, u_4] = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, \quad [u_3, u_4] = \frac{2\alpha_1^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 + 2\beta_2^2}{2(\alpha_1 + \beta_2)} u_3.$$

Agora, estas métricas correspóndense con produtos semidirectos determinados por unha derivación de $\mathbb{R}^3$ que deixa invariante o subespazo $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$. A restrición $g_{|\operatorname{span}\{u_1,u_2\}}$ é definida positiva, e logo pódese atopar unha base ortonormal $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$ de $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ na que a derivación se descompón nunha parte simétrica e outra antisimétrica. Con respecto desta base, os corchetes son da forma

$$[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad [u_2, u_4] = -\alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2, \quad [u_3, u_4] = \frac{\alpha_1^2 + \beta_2^2}{\alpha_1 + \beta_2} u_3,$$

e reescribindo $\kappa = \alpha_1 + \beta_2$, que é distinto de cero, tense

$$[u_1, u_4] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad [u_2, u_4] = -\alpha_2 u_1 + (\kappa - \alpha_1) u_2, \quad [u_3, u_4] = \frac{\alpha_1^2 + (\kappa - \alpha_1)^2}{\kappa} u_3.$$

Dividindo os vectores da base por κ, seguimos a traballar na mesma clase homotética, obtendo

$$[u_1, u_4] = \frac{\alpha_1}{\kappa} u_1 + \frac{\alpha_2}{\kappa} u_2, \quad [u_2, u_4] = -\frac{\alpha_2}{\kappa} u_1 + \frac{(\kappa - \alpha_1)}{\kappa} u_2, \quad [u_3, u_4] = \frac{\alpha_1^2 + (\kappa - \alpha_1)^2}{\kappa^2} u_3.$$

- Desta maneira, as métricas do segundo exemplo no lema 5.2 son localmente homotéticas ás determinadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}^3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$ con u_1 e u_2 espaciais, u_3 e u_4 nulos e $g(u_3, u_4) = 1$, polos corchetes non nulos

  $$[u_1, u_4] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2, u_4] = -\beta u_1 + (1-\alpha)u_2, \quad [u_3, u_4] = (1 - 2\alpha + 2\alpha^2)u_3,$$

  para α, β parámetros reais arbitrarios. Estas métricas son localmente simétricas se, e soamente se, son chás.

Ao igual que para o caso $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$, pódense simplificar bastante as expresións dos corchetes dos exemplos na observación 5.5. Para o exemplo caracterizado por

$$\begin{aligned} &[u_1, u_2] = \pm(\kappa_2 + \mu_1)u_3, && [u_1, u_4] = \eta_3 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\ &[u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_3 u_3, && [u_3, u_4] = \eta_3 u_3, \end{aligned}$$

o tensor curvatura de tipo $(0,4)$ non depende de κ_3 nin μ_3, polo que de novo utilizando o traballo de Kulkarni [16] se poden supoñer estes parámetros iguais a cero. Se ademais escribimos $\delta = \kappa_2 + \mu_1$, obtemos

$$[u_1, u_2] = \pm\delta u_3, \quad [u_1, u_4] = \eta_3 u_1 + \kappa_2 u_2, \quad [u_2, u_4] = (\delta - \kappa_2)u_1, \quad [u_3, u_4] = \eta_3 u_3.$$

- Reescalando os vectores da base, tense que estas métricas son homotéticas ás determinadas nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \operatorname{span}\{u_4\}$, por

  $$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &[u_1, u_2] = \pm u_3, \\ &[u_1, u_4] = \alpha u_1 + \beta u_2, \\ &[u_2, u_4] = (1-\beta)u_1, \\ &[u_3, u_4] = \alpha u_3, \end{aligned}$$

  para α, β parámetros reais arbitrarios. Estas métricas son localmente simétricas se, e soamente se, $\beta = 0$, caso para o que a variedade é chá.

No caso de métricas na observación 5.5 determinadas polos corchetes

$$\begin{aligned} &[u_1, u_2] = \alpha u_3, && [u_1, u_4] = \frac{((\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2)}{4\mu_2} u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3, \\ &[u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, && [u_3, u_4] = \left(\frac{(\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2}{4\mu_2} + \mu_2 \right) u_3, \end{aligned}$$

compróbase que R non depende de κ_3 nin μ_3, polo que estes parámetros se poden supoñer cero. Reescalando os vectores da base, as métricas anteriores son localmente homotéticas ás determinadas en $H_3 \rtimes R$ por

$$\begin{aligned} &[u_1, u_2] = \alpha u_3, && [u_1, u_4] = \frac{((\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2)}{4} u_1 + \kappa_2 u_2, \\ &[u_2, u_4] = \mu_1 u_1 + u_2, && [u_3, u_4] = \left(\frac{(\kappa_2 + \mu_1)^2 - \alpha^2}{4} + 1 \right) u_3. \end{aligned}$$

Agora, a derivación D que determina o produto semidirecto $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ neste caso deixa fixo o subespazo span$\{u_1, u_2\}$, no que o produto escalar é definido positivo. Podemos entón escoller unha nova base ortonormal de span$\{u_1, u_2\}$ con respecto da cal

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

onde $4a_{11}b_{22} + \alpha^2 = 0$, condición que vén imposta de que a_{11} e b_{22} sexan os autovalores de $\frac{1}{2}\left\{D + D^T\right\}$. Con respecto desta nova base,

$$[u_1, u_2] = \alpha u_3, \qquad [u_1, u_4] = u_1 - a_{12}u_2,$$
$$[u_2, u_4] = a_{12}u_1 - \left(\frac{\alpha^2}{4a_{11}}\right) u_2, \qquad [u_3, u_4] = \left(1 - \frac{\alpha^2}{4a_{11}}\right) u_3.$$

- Reescalando os vectores da base, obtemos que as métricas da segunda familia de exemplos na observación 5.5 son localmente homotéticas ás métricas determinadas, nunha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \text{span}\{u_4\}$, por

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &[u_1, u_2] = u_3, \\ &[u_1, u_4] = \delta u_1 - \gamma u_2, \\ &[u_2, u_4] = \gamma u_1 - \frac{1}{4\delta} u_2, \\ &[u_3, u_4] = \left(\delta - \frac{1}{4\delta}\right) u_3, \end{aligned}$$

  onde $\delta \neq 0$ e os γ é un parámetro real arbitrario.

Desta maneira, tense que as ondas planas que aparecían ao longo do traballo pertencen a unha de tres familias de métricas homotéticas.

6.2. Descrición das métricas de Einstein invariantes á esquerda

Tendo en conta os resultados da sección anterior, as ondas planas de Einstein invariantes á esquerda en grupos de Lie lorentzianos están determinadas como segue.

Teorema 6.1. *Sexa g unha onda plana de Einstein invariante á esquerda nun grupo de Lie lorentziano G de dimensión 4. Entón (G, g) é localmente homotético a un dos seguintes grupos:*

(i) *As ondas planas en $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ determinadas polos corchetes non nulos*

$$[u_1, u_4] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2, u_4] = -\beta u_1 + (1 - \alpha)u_2, \quad [u_3, u_4] = (1 - 2\alpha + 2\alpha^2)u_3,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) *As ondas planas en* $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ *determinadas polos corchetes non nulos*

$$[u_1, u_2] = \pm u_3, \quad [u_1, u_4] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2, u_4] = (1 - \beta) u_1, \quad [u_3, u_4] = \alpha u_3,$$

onde α, β *son parámetros reais arbitrarios.*

(iii) *As ondas planas en* $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ *determinadas polos corchetes non nulos*

$$[u_1, u_2] = u_3, \quad [u_1, u_4] = \delta u_1 - \gamma u_2, \quad [u_2, u_4] = \gamma u_1 - \frac{1}{4\delta} u_2, \quad [u_3, u_4] = \left(\delta - \frac{1}{4\delta}\right) u_3,$$

para $\delta \neq 0$ *e* $\gamma \in \mathbb{R}$.

En cada caso, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *denota unha base pseudo-ortonormal de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes span\{u_4\}$ *con* u_1 *e* u_2 *espaciais,* u_3 *e* u_4 *nulos e* $g(u_3, u_4) = 1$.

Ademais, unha onda plana de Einstein invariante á esquerda nun grupo de Lie lorentziano G *de dimensión* 4 *é localmente simétrica se, e soamente se, é chá.*

Retomando a clasificación xeral dos grupos e tendo en conta os resultados dados ao longo do traballo, podemos enunciar o seguinte teorema, que proporciona unha visión xeral da xeometría dos diferentes exemplos de métricas de Einstein obtidos:

Teorema 6.2. *Unha métrica lorentziana de Einstein invariante á esquerda nun grupo de Lie de dimensión catro é ou ben localmente simétrica, ou unha onda plana en* $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ *ou* $H_3 \rtimes \mathbb{R}$, *ou localmente homotética a unha das seguintes métricas en* $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$*:*

(i) *As métricas Ricci-chás determinadas, nunha base ortonormal* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *con* e_3 *temporal, por*

$$[e_1, e_4] = -2e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2 + \sqrt{3} e_3, \qquad [e_3, e_4] = -\sqrt{3} e_2 + e_3,$$

que non son ondas planas.

(ii) *As métricas non Ricci-chás con operador de Weyl nilpotente en dous pasos determinadas, nunha base pseudo-ortonormal* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *con* $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = \langle u_4, u_4 \rangle = 1$, *por*

$$[u_1, u_4] = -u_1 + \delta u_2, \qquad [u_2, u_4] = 5u_2, \qquad [u_3, u_4] = 2u_3,$$

onde δ *é un parámetro real distinto de cero. Estas métrica son localmente isométricas ao único espazo non redutivo lorentziano de Einstein con curvatura seccional non constante.*

(iii) *As métricas non Ricci-chás con operador de Weyl nilpotente en tres pasos determinadas, nunha base pseudo-ortonormal* $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *con* $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = \langle u_4, u_4 \rangle = 1$, *por*

$$[u_1, u_4] = 4u_1, \qquad [u_2, u_4] = -2u_2 + \delta u_3, \qquad [u_3, u_4] = \delta u_1 + u_3,$$

onde δ *é un parámetro real distinto de cero.*

Pódese dar tamén unha clasificación atendendo aos grupos nos que se realizan os exemplos como se fai no seguinte resultado, onde se mostra, por exemplo, que os grupos lorentzianos $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ e $SU(2) \times \mathbb{R}$ non admiten métricas de Einstein invariantes pola esquerda.

Teorema 6.3. *Sexa (G, g) un grupo de Lie lorentziano de dimensión 4 con $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$. Se g é unha métrica de Einstein, entón tense unha das seguintes posibilidades:*

(a) *$G = \tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$, e (G, g) é localmente isométrica ao espazo de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$.*

(b) *$G = E(1, 1) \rtimes \mathbb{R}$, e (G, g) é localmente isométrica a $\mathbb{R}^4_1$, ao pseudo-espazo hiperbólico $\mathbb{H}^4_1(r)$ ou a un produto de planos hiperbólicos coa mesma curvatura seccional $\mathbb{H}^2_1(r) \times \mathbb{H}^2(r)$.*

(c) *$G = H_3 \rtimes \mathbb{R}$, e (G, g) é unha onda plana ou é localmente isométrica a $\mathbb{R}^4_1$ ou $\mathbb{H}^4_1(r)$.*

(d) *$G = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ e g é de curvatura seccional constante, unha onda plana, ou un dos exemplos dados no teorema 6.2.*

Problemas abertos

Os resultados anteriores proporcionan non só as distintas clases homotéticas de métricas de Einstein invariantes á esquerda en grupos de Lie, senón tamén unha ferramenta para traballar con ditas métricas a partir da descrición das mesmas levada a cabo nos capítulos 3, 4 e 5. No momento de concluír este traballo aínda quedan abertos algúns aspectos como os seguintes

- Esencialmente existen dúas familias de ondas planas homoxéneas. Sería desexable poder decidir a que familia se corresponden cada unha das métricas no teorema 6.1. De igual maneira, sería desexable poder decidir se as distintas posibilidades no teorema 6.1 se corresponden con distintas clases homotéticas ou non.

- As tres clases homotéticas no teorema 6.2 son claramente diferentes. A primeira delas consiste dun punto singular no espazo de métricas, mentres que os outros dous casos se corresponden con curvas en dito espazo. Sería importante decidir se as distintas posibilidades do parámetro δ nas situacións (ii) e (iii) no teorema 6.2 determinan distintas clases homotéticas.

- Unha vez que se completou a clasificación de grupos de Lie con métrica de Einstein invariante pola esquerda, xorde de xeito natural a pregunta de que grupos están na clase conforme dunha destas variedades. Máis xenericamente pódese propoñer o problema de atopar que métricas invariantes á esquerda nun grupo de Lie lorentziano 4-dimensional son conformemente Einstein. Estas métricas están caracterizadas pola existencia dunha función f coa que se satisfaga a ecuación

$$\mathrm{Hes}_f + \rho + \frac{1}{2}\, df \otimes df = \frac{\Delta f + \tau + \frac{1}{2} g(\nabla f, \nabla f)}{4}\, g.$$

Como se ve, se f é constante, recuperamos a ecuación de Einstein.

Co obxectivo final de clasificar as métricas lorentzianas de Einstein homoxéneas en dimensión 4, cabe preguntarse se os teoremas anteriores cobren tódalas posibilidades. A resposta a isto é negativa. De feito, existen espazos simétricos que non se realizan como métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie (por exemplo os produtos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2_1$ ou as métricas de Cahen-Wallach Ricci chás e non chás). Por outra banda, dado que os espazos homoxéneos de Einstein non redutivos aparecen na clasificación local no teorema 6.2, sería interesante dar resposta á seguinte cuestión

- Unha métrica lorentziana de Einstein homoxénea non simétrica é localmente isométrica a unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie?

Unha resposta a este problema suporía sen dúbida un avance significativo cara á clasificación das métricas de Einstein homoxéneas en dimensión catro.

Bibliografía

[1] Alekseevskii, D. V.; Kimelfeld, B. N., Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **9 (2)** (1975), 97-102.

[2] Bérard Bérgery, L., Les espaces homogènes riemanniens de dimension 4. *Géométrie riemannienne en dimension 4, Textes Math., vol 3*, CEDIC, Paris, 1981.

[3] Blau, M., O'Loughlin, M., Homogeneous plane waves, *Nuclear Phys. B* **654 (1-2)** (2003), 135-176.

[4] Boubel, C., Bérard Bérgery, L., On Pseudo-Riemannian Manifolds Whose Ricci Tensor is Parallel, *Geom. Dedicata* **86** (2001), 1–8.

[5] Brinkmann, H. W., Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Math. Ann.* **94** (1925), 119-145.

[6] Cahen, M., Leroy, J., Parker, M., Tricerri, F., Vanhecke, L., Lorentz manifolds modelled on a Lorentz symmetric space. *J. Geom. Phys.* **7 (4)** (1990),571-581.

[7] Calvaruso, G., Castrillón López, M., Cyclic Lorentzian Lie groups. *Geom. Dedicata* **181** (2016), 119-136.

[8] Calvaruso, G., Storm, R., van der Veken, J., Parallel and totally geodesic hypersurfaces of non-reductive homogeneous four-manifolds, arXiv:1809.06631 [math.DG], a aparecer en *Math. Nachr.*

[9] Calvaruso, G., Zaeim, A., Four-dimensional Lorentzian Lie groups. *Differ. Geom. Appl.* **31** (2013), 496–509.

[10] Cohn, D. L., *Measure Theory* 2nd ed., Birkhäuser, New York, 2010.

[11] Fels, M. E., Renner, A. G., Non-reductive Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds of Dimension Four. *Canad. J. Math.* **58 (2)** (2006), 282-311.

[12] Gadea, P. M.; González-Dávila, J. C.; Oubiña, J. A., Cyclic metric Lie groups, *Monatsh. Math.* **176** (2015), 219–239.

[13] Globke, W., Leistner, Th., Locally homogeneous pp-waves, *J. Geom. Phys.* **108** (2016), 83-101.

[14] Jensen, G. R., Homogeneous Einstein Spaces of Dimension Four, *J. Diff. Geom.* **3** (1969), 309-349.

[15] Knapp, A. W., *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics, 140, Springer Science+Business Media, LLC, Cambridge, Massacuhsetts, 1996.

[16] Kulkarni, R. S., Curvature and Metric, *Ann. Math.* **91 (2)** (1970), 311–331.

[17] Kühnel, W., *Differential Geometry. Curves-Surfaces-Manifolds,* 3rd ed., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015.

[18] Lauret, J., Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), 715–733.

[19] Leistner, Th., Conformal holonomy of C-spaces, Ricci-flat, and Lorentzian manifolds, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), 458-478.

[20] Milnor, J., Curvature of Left Invariant Metrics on Lie Groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.

[21] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[22] Ovando, G. P., Invariant pseudo-Kähler metrics in dimension four, *J. Lie Theory* **16** (2006), 371–391.

[23] Rahmani, S., Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois. *J. Geom. Phys.* **9** (1992), 295-302.

[24] Schimming, R., Riemannsche Räume mit ebenfrontiger und mit ebener Symmetrie, *Math. Nachr.*, **59** (1974), 128-162.

[25] Spiro, A., A remark on locally homogeneous Riemannian spaces, *Results Math.* **24** (1993), 318–325.