Esenciais USC

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERIES DE FOURIER
introdución ás ecuacións en derivadas parciais

Daniel Cao Labora,Rodrigo López Pouso (Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización) María Ferreiro Subrido (Departamento de Matemáticas)

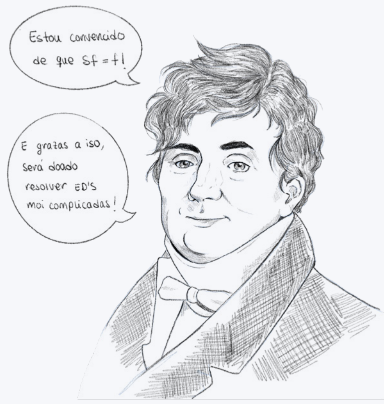
Definición de serie de Fourier

A serie de **Fourier** dunha función $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(L > 0)$ defínese como

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

sendo

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{Coeficientes de Fourier}$$



Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Visualiza e calcula con SageMath

Exemplo. Serie de Fourier da función descontinua $f(x) = 0$ para $x \in [-1, 0]$ e $f(x) = 1$ para $x \in (0, 1]$.

Calculamos os coeficientes usando as fórmulas (neste caso con $L = 1$):

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1,$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_0^1 \cos(n\pi x)dx = \left.\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 = 0 \quad \text{(recorda } \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \text{ se } n \in \mathbb{N}\text{)},$$

e

$$b_n = \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)dx = -\left.\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \quad \text{(recorda } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ se } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Polo tanto, a serie de Fourier da función f é

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)\pi x)}{2n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Criterios de converxencia das series de Fourier

Como se observa na definición, as series de Fourier son $2L$–periódicas, é dicir, $Sf(x+2L)$ **e** $Sf(x)$ **son a mesma** serie para calquera $x \in \mathbb{R}$, polo que abonda estudar a converxencia de $Sf(x)$ nos puntos $x \in (-L, L]$.

Nos seguintes enunciados **supoñemos que** $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ **é unha función continua a anacos e limitada**.

Criterio das derivadas laterais

Se nun punto $x_0 \in (-L, L)$ a función f ten as dúas derivadas laterais (non necesariamente coincidentes), entón a serie de Fourier é converxente no punto $x = x_0$ e $Sf(x_0) = f(x_0)$.

Criterio dos límites laterais da derivada

Se nun punto $x_0 \in (-L, L)$ existen os dous límites laterais **da derivada**

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) \in \mathbb{R},$$

entón a serie de Fourier Sf é converxente no punto $x = x_0$ e

$$Sf(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

onde $f(x_0^+)$ $(f(x_0^-))$ denota o límite de $f(x)$ cando x tende a x_0 pola dereita (esquerda).

Caso $x_0 = \pm L$. Se existen os dous límites

$$\lim_{x \to -L^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to L^-} f'(x),$$

entón a serie de Fourier Sf é converxente nos puntos $x = \pm L$ e

$$Sf(-L) = Sf(L) = \frac{f(-L^+) + f(L^-)}{2}.$$

Visualiza nesta ligazón

Nota. A continuidade de f nun punto x_0 non abonda para garantir a converxencia da serie $Sf(x_0)$.

Series de senos e de cosenos

As simetrías simplifican os cálculos!

Se f é impar entón todos os a_n's valen cero pois

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Impar}} \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{Par}}}_{\text{Impar}} \, dx = 0.$$

Dise entón que a serie de Fourier é unha **serie de senos**, e ademais temos dúas expresións para os b_n's:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}}_{\text{Par}} \, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Analogamente, se f e par, todos os b_n's son cero. Temos así unha serie de Fourier de cosenos e os a_n's (incluíndo ao a_0) poden calcularse como integrais sobre a parte positiva do intervalo:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{Par}} \, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se $f(x)$ soamente está definida para $x \in [0, L]$, entón abondaría con definila “de calquera xeito” no intervalo $[-L, 0)$ para construírlle unha serie Fourier. Así e todo, hai dúas extensións que son especialmente naturais e útiles.

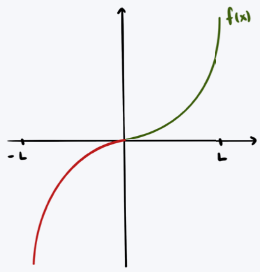
Serie de senos de f

É a serie de Fourier da **extensión impar** de f ao intervalo $[-L, L]$, é dicir, é a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$



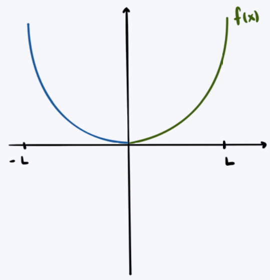
Serie de cosenos de f

É a serie de Fourier da **extensión par** de f a $[-L, L]$, é dicir, é a serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$



Series de senos e de cosenos con SageMath

Aplicación á resolución de ecuacións en derivadas parciais

Sexan $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, e sexan $F(x,t)$, $f(x)$ e $g(x)$ funcións dadas. **Trátase de achar** $u = u(x,t)$ **tal que**

$$u_{tt} + a\, u_t + b\, u + c\, u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0, L) \times (0, +\infty), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \tag{2}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \tag{3}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Nota. u_{tt} denota a derivada parcial segunda da solución $u(x,t)$ con respecto á variable t, e os termos u_t e u_{xx} teñen o correspondente significado análogo

(1) é unha ecuación en derivadas parciais (EDP) de segunda orde, lineal e de coeficientes constantes.

(2)–(3) son as condicións iniciais (fixadas no instante $t = 0$). Hai dúas porque (1) é de segunda orde na variable t.

O método de resolución que imos explicar pode adaptarse a EDPs doutras ordes na variable t, pero habería que usar tantas condicións iniciais como orde da ecuación. Por exemplo, a ecuación da calor é de primeira orde en t e, nese caso, soamente consideraremos a condición inicial (2). Se, por outra banda, desexamos resolver unha EDP de orde tres en t, entón imporemos as condicións (2) e (3) e engadiremos unha condición similar sobre $u_{tt}(x, 0)$.

(4) son condicións de fronteira, neste caso de tipo Dirichlet, nos puntos $x = 0$ e $x = L$ (fronteira do dominio espacial da EDP). É posible impor dúas condicións porque (1) é de segunda orde na variable x (velaquí a importancia de que $c \neq 0$).

As condicións iniciais e de fronteira deben ser compatibles. Por exemplo, tendo en conta (2) e (4), deducimos que $f(0) = u(0,0) = 0$ e tamén $f(L) = 0$. En xeral, as solucións que obteremos terán boas propiedades de regularidade se os datos f e g son funcións regulares que cumpren as condicións de fronteira.

Unha idea importante antes de resolver o problema (1)–(2)–(3)–(4) cando F só depende de x

No caso $F(x,t) = F(x)$ convén comezar por calcular unha solución de (1) e (4) que só dependa de x, pois iso permitirá reducir o problema de partida a outro con $F(x,t)=0$.
Para iso temos que achar algunha solución $y(x)$ do problema

$$c\,y''(x) + b\,y(x) = F(x), \quad y(0) = y(L) = 0,$$

(o que non sempre é posible) e despois realizar o cambio de variable dependente $v(x,t) = u(x,t) - y(x)$. A función $v(x,t)$ é solución dun problema do mesmo tipo que (1)–(2)–(3)–(4), pero con $F(x,t)=0$.

O MÉTODO DE FOURIER PARA RESOLVER O PROBLEMA (1)–(2)–(3)–(4).

O método de Fourier pódese esquematizar nas tres etapas seguintes:

1

Expresión dos datos $F(x,t)$, $f(x)$ e $g(x)$ en series de senos. Escóllense as representacións en series de senos porque as funcións sen $(n\pi x/L)$, $n \in \mathbb{N}$, cumpren as condicións de fronteira (4).

Nesta etapa simplemente reescribimos o problema (1)–(2)–(3)–(4) na forma

$$\begin{aligned} u_{tt} + a\,u_t + b\,u + c\,u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\ \mathrm{sen}(n\pi x/L) && (1)\\ u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \mathrm{sen}(n\pi x/L) && (2)\\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n\ \mathrm{sen}(n\pi x/L) && (3)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0 && (4) \end{aligned}$$

A serie de senos da función $F(x,t)$ debe entenderse como serie con respecto á variable x, é dicir,

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\ \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \qquad \text{onde} \quad B_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t)\ \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

2

Principio de superposición. A solución do problema (1)–(2)–(3)–(4) pódese obter como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

onde cada un $u_n(x,t)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ é solución do problema elemental (sen sumatorios)

$$(P_n) \quad \left\{ \begin{aligned} u_{tt} + a\,u_t + b\,u + c\,u_{xx} &= B_n(t)\ \mathrm{sen}(n\pi x/L)\\ u(x,0) &= b_n\ \mathrm{sen}(n\pi x/L)\\ u_t(x,0) &= \tilde{b}_n\ \mathrm{sen}(n\pi x/L)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0 \end{aligned} \right.$$

3

Resolución dos problemas (P_n), $n = 1,2,3,\ldots$ Calculamos cada unha das $u_n(x,t)$ supoñendo que teñen a mesma forma que o dato inicial de (P_n), mais con funcións da variable t no lugar da constante b_n. É dicir, supoñemos que un $u_n(x,t) = v_n(t)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$, onde $v_n(t)$ é unha función que determinamos substituíndo

$$u = v_n(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$$

nas tres primeiras ecuacións de (P_n). Neste proceso desaparecerán todos os factores sen $(n\pi x/L)$ e chegaremos a un problema cunha EDO para $v_n(t)$.

Exercicio resolto

Acha a solución do seguinte problema coa ecuación da corda vibrante (ou ecuación de ondas unidimensional) cos extremos fixos:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x) = x(\pi - x), & x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = g(x) = 0, & x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Solución:

1) Expandimos os datos en series de senos: os datos $F(x,t) = 0$ e $u_t(x,0) = g(x) = 0$ xa están expresados en series de senos (as series triviais que teñen todos os termos nulos) e

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \qquad \text{onde } b_n = \frac{4}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n^3}, n = 1,2,3,\dots$$

2) A solución é $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, onde cada u_n é solución do problema elemental

$$(P_n) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = b_n \operatorname{sen} nx, & x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

3) Supoñemos que $u_n(x,t) = v_n(t) \operatorname{sen} nx$ e determinamos $v_n(t)$ substituíndo $u = v_n(t) \operatorname{sen} nx$ nas tres primeiras ecuacións de (P_n). Ao facelo, deducimos que $v_n(t)$ debe ser solución de

$$v_n''(t) + n^2 v_n(t) = 0, \qquad v_n(0) = b_n, \; v_n'(0) = 0.$$

A única solución deste problema é $v_n(t) = b_n \cos nt$; así que a solución do problema (P) é

$$u(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \cos nt \, \operatorname{sen} nx = \frac{8}{\pi} \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t] \operatorname{sen}[(2n-1)x]}{(2n-1)^3}.$$

O MÉTODO DE FOURIER CON CONDICIÓNS DE FRONTEIRA DE TIPO NEUMANN

Se cambiamos (4) polas condicións Neumann $\mathbf{u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0}$, $t \geq 0$, entón o método de resolución é análogo, pero usando series de cosenos.

Neste caso, na **terceira etapa** do método debemos supoñer que $u_n(x,t) = v_n(t)\cos(n\pi x/L)$ para $n = 0,1,2,3,\dots$ (o caso $n = 0$ non hai que consideralo cando as condicións de fronteira son de tipo Dirichlet), e a solución será da forma

$$u(x,t) = v_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

O MÉTODO DE FOURIER CON CONDICIÓNS DE FRONTEIRA DE TIPO PERIÓDICO

Para as **condicións de fronteira periódicas** no intervalo $[-L,L]$, é dicir,

$$u(-L,t) = u(L,t) \qquad \text{e} \qquad u_x(-L,t) = u_x(L,t), \; t \in \mathbb{R},$$

debemos procurar solucións en serie de Fourier completa:

$$u(x,t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

TRES TIPOS FUNDAMENTAIS DE EDPS RESOLTOS CO MÉTODO DE FOURIER E SAGEMATH

Ecuación en derivadas parciais $\longrightarrow$	Ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ $(c > 0)$	Ecuación da calor $u_t - a u_{xx} = 0$ $(a > 0)$	Ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $0 < x < L,\ 0 < y < R$
Interpretación física $\longrightarrow$	$u(x,t)$ é a altura do punto x, no instante t, dunha corda horizontal que vibra verticalmente por mor da tensión	$u(x,t)$ é a temperatura do punto x dun arame no instante t	$u(x,y)$ é un modelo para moitos fenómenos bidimensionais que non cambian co tempo (distribucións estacionarias de temperaturas nunha placa, concentracións químicas, potenciais...)
Condicións de fronteira $\downarrow$			
Dirichlet (solución en serie de senos)	Corda suxeita nos extremos ***Visualiza*** nesta ligazón	Temperatura constante cero nos extremos ***Visualiza*** nesta ligazón	Valores prefixados na fronteira ***Visualiza*** nesta ligazón
Neumann (solución en serie de cosenos)	Corda libre nos extremos ***Visualiza*** nesta ligazón	Arame termicamente illado ***Visualiza*** nesta ligazón	Derivadas na dirección normal prefixadas na fronteira ***Visualiza*** nesta ligazón

ALGÚNS PROBLEMAS DE FRONTEIRA REDUCIBLES AO DIRICHLET OU AO NEUMANN HOMOXÉNEOS

Resolución do problema (1)–(2)–(3) con...	**Indicacións**
Condicións de fronteira mixtas (I): $$u(0,t) = u_x(L,t) = 0$$	Solución da forma $$u(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$ (Observa que é a solución dun problema Dirichlet no intervalo dobre $[0, 2L]$. Cal e ese problema?)
Condicións de fronteira mixtas (II): $$u_x(0,t) = u(L,t) = 0$$	Solución da forma $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$ (Neste caso emprégase a solución dun problema Neumann no intervalo dobre $[0, 2L]$ e con $v_0(t) = 0$. Cal é ese problema?)
Condicións Dirichlet non homoxéneas: $$u(0,t) = p(t), \quad u(L,t) = q(t)$$	Supoñendo que $p(t)$ e $q(t)$ son regulares dabondo, o cambio de variable dependente $$v(x,t) = u(x,t) - p(t)\frac{L-x}{L} - q(t)\frac{x}{L}$$ reduce o problema a outro para $v(x,t)$ con condicións homoxéneas (do tipo (4)). (Que cambio de variable podemos usar para tratar as condicións Neumann non homoxéneas?)

Bibliografía

M. S. Gockenbach, *Partial Differential Equations: analytical and numerical methods, Segunda Edición, SIAM, 2011*.

R. Haberman, *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Tercera Edición, Pearson Educación S.A.,2003.

R. López Pouso, *Series de Fourier y Ecuaciones en Derivadas Parciales: una introducción con MAPLE y ejercicios resueltos*, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico, USC editora, 2019.

P. Pedregal Tercero, *Iniciación a las Ecuaciones en Derivadas Parciales y al Análisis de Fourier*, Septem Ediciones, 2001.