MATERIA
Bioestatística

TITULACIÓN
Grao en Medicina

unidade didáctica 3

Ciencias Experimentais

Variables aleatorias discretas

María Isabel Borrajo
Mercedes Conde Amboage

Área de Estatística e Investigación Operativa
Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Facultade de Matemáticas

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Edicións USC
usc.gal/publicacions

DOI
https://dx.doi.org/10.15304/9788419679376

MATERIA: Bioestatística
TITULACIÓN: Grao en Medicina
PROGRAMA XERAL DO CURSO

BLOQUE I: ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Unidade 1. Estatística descritiva

A utilidade da estatística nas ciencias da saúde
Conceptos básicos: poboación, variable aleatoria e mostra
Tipos de variables aleatorias
Táboas de frecuencias
Medidas características
Representacións gráficas

BLOQUE II: TEORÍA DA PROBABILIDADE

Unidade 2. Fundamentos da teoría da probabilidade

Experimento aleatorio, sucesos e espazo mostral
Definición de probabilidade
Probabilidade condicionada. Independencia de sucesos
Resultados notables: regra do produto, probabilidades totais e teorema de Bayes
Prevalencia e incidencia
Probas diagnósticas: sensibilidade, especificidade e valores preditivos
Medidas de efecto: risco relativo e odds-ratio

Unidade 3. Variables aleatorias discretas

Definición de variable aleatoria discreta
Función de masa de probabilidade e función de distribución
Medidas características
Modelos de distribucións discretas

Unidade 4. Variables aleatorias continuas

Definición de variable aleatoria continua
Función de densidade e función de distribución
Medidas características
Modelos de distribucións continuas. A distribución Normal
Aproximación entre distribucións

BLOQUE III: INFERENCIA ESTATÍSTICA

Unidade 5. Introdución á inferencia estatística

Utilidade da inferencia estatística
Conceptos básicos: parámetro, estatístico e estimador
Distribución na mostraxe
Distribucións asociadas á Normal: T de Student e χ- cadrado

Unidade 6. Estimación de parámetros

Definición e propiedades dos estimadores puntuais
Estimación puntual da media, varianza e proporción
Estimación por intervalos de confianza

Unidade 7. Contrastes de hipóteses

Utilidade dos contrastes de hipóteses
Procedemento de contraste
Contrastes sobre unha poboación
Contrastes para comparación de poboacións

Unidade 8. Contrastes para datos categóricos

Introdución
Táboas de continxencia
Contrastes χ- cadrado

BLOQUE IV: MODELOS DE REGRESIÓN

Unidade 9. Modelo de regresión lineal simple

Introdución aos modelos de regresión
Conceptos previos: vector de medias, coeficiente de correlación e diagrama de dispersión
Modelo de regresión lineal simple
Método de mínimos cadrados
Coeficiente de determinación

Unidade 10. Análise da varianza

Modelo e hipóteses
Táboa de descomposición da variabilidade
Contraste de igualdade de medias
Comparacións múltiples

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

A bioestatística é segundo o dicionario da RAE (Real Academia Española) a *ciencia que aplica el análisis estadístico a los problemas y objetos de estudio de la biología*. Partindo desta definición, a materia de Bioestatística (con pequenas variacións na súa nomenclatura) é unha materia que se imparte no primeiro curso de todos os graos da rama biosanitaria, tales como Medicina, Odontoloxía, Enfermaría, Bioloxía, Biotecnoloxía, Farmacia, Óptica, Psicoloxía ou Veterinaria.

Esta unidade didáctica caracterízase pola súa transversalidade no senso de que pode ser empregada polo alumnado e profesorado de moi diversas titulacións facendo mínimas adaptacións da mesma. Na Táboa 1 detállase a listaxe completa de titulacións e materias nas que se podería empregar esta unidade.

Táboa 1: Relación de titulacións e materias da rama biosanitaria, impartidas nalgún dos campus da USC, nas que se pode empregar esta unidade didáctica.

Titulación	Materia
Grao en Bioloxía	Bioestatística
Grao en Bioquímica	Bioestatística
Grao en Biotecnoloxía	Bioestatística
Dobre Grao en Farmacia e Óptica e Optometría	Matemáticas e estatística I
Grao en Enfermaría	Estatística
Grao en Farmacia	Matemáticas e estatística I
Grao en Nutrición Humana e Dietética	Bioestatística
Grao en Odontoloxía	Bioestatística e introdución á investigación
Grao en Óptica e Optometría	Bioestatística
Grao en Psicoloxía	Análise de datos en psicoloxía
Grao en Veterinaria	Bioestatística

Nestas materias realízase un percorrido polas ferramentas elementais da probabilidade e da estatística focalizándose nas aplicacións biosanitarias en xeral, e no ámbito máis específico de cada titulación en particular. No seu desenvolvemento hai que ter en conta que, por estar asentada maioritariamente no primeiro curso, é necesariamente unha materia de nivelación dos coñecementos do alumnado con procedencias diversas e, á súa vez debe proporcionar unha competencia estatística sólida, pois en moitas das titulacións é o único contacto coa estatística que o alumnado vai ter ao longo deses anos de formación na correspondente facultade ou escola.

A programación docente proposta, da que esta unidade didáctica forma parte, está composta por catro bloques temáticos agrupando diversas unidades segundo se detalla a continuación:

- Bloque I: Estatística descritiva (1 UD);
- Bloque II: Teoría da probabilidade (3 UD);

— Bloque III: Inferencia estatística (4 UD);

— Bloque IV: Modelos de regresión (2 UD).

Esta proposta de programación docente cobre os contidos que se detallan na memoria de verificación de título do Grao en Medicina (pode consultarse na seguinte ligazón: https://pro-assets-usc.azureedge.net/cdn/ff/b4ycnzhOyuydvYl2rdg777pZ-5g_Z4rxapDN7SRNyAw/1632393404/public/plan/2021-09/Medicina_modif_2014.pdf), que son dos máis extensos de todas as titulacións biosanitarias da Universidade de Santiago de Compostela arriba mencionadas. Deste xeito, podemos cubrir os programas de todas as materias, se ben é certo que algunhas unidades non se empregarían en todas as titulacións.

Dentro da programación, con esta unidade didáctica en particular, pretendemos fornecer o alumnado e o profesorado, das materias de primeiro curso das titulacións da rama biosanitaria, cun material tanto teórico como práctico que cubra os contidos sobre variables aleatorias discretas. Un material que sirva de referencia común, e que permita unificar tanto os conceptos básicos requiridos, como a notación e nomenclatura empregadas.

A presente unidade didáctica é a segunda das unidades que conforman o Bloque II. Teoría da Probabilidade. A través do seu desenvolvemento preténdese transmitir ao alumnado conceptos básicos como o de variable aleatoria discreta, función de masa de probabilidade, función de distribución ou as principais medidas características e o seu cálculo. Ademais, tamén se introducirán os principais modelos de distribucións discretas: Bernoulli, binomial, xeométrica, binomial negativa e Poisson.

COMPETENCIAS E OBXECTIVOS

Segundo a memoria de verificación do título de Grao en Medicina pola USC, a comprensión das ciencias básicas, amosar unha actitude ética, o establecemento dunha boa comunicación interpersoal e a adaptación a circunstancias cambiantes son obxectivos fundamentais a acadar polo alumnado durante esta etapa de formación.

As competencias xerais e específicas vencelladas coa materia de Bioestatística que se recollen na memoria de verificación de título veñen detalladas a continuación. Por coherencia coa memoria de verificación de título, decidíronse manter os seu códigos de nomenclatura. Débese salientar que nesta listaxe tamén se inclúen as competencias CG32, CE31 e CE37, que a pesar de non vincularse coa materia de Bioestatística na memoria de verificación do título, si se traballan e se desenvolven ao longo da mesma. Polo tanto, as competencias que se traballarán ao longo da materia son:

CG28: obter e empregar datos epidemiolóxicos e valorar tendencias e riscos para a toma de decisións sobre saúde;

CG31: coñecer, valorar criticamente e saber empregar fontes de información clínica e biomédica para obter, organizar, interpretar e comunicar información científica e sanitaria,

CG32: saber empregar as tecnoloxías da información e a comunicación en actividades clínicas, terapéutica, preventiva e investigadora.
CG33: manter e utilizar rexistros con información do paciente para unha posterior análise, preservando a confidencialidade dos datos;
CG34: ter, na actividade profesional, un punto de vista crítico e creativo, con escepticismo construtivo e orientado á investigación;
CG35: comprender a importancia e as limitacións do pensamento científico no estudo, prevención e manexo de enfermidades;
CG36: ser capaz de formular hipóteses, recoller e valorar de xeito crítico información para resolver problemas, seguindo o método científico;
CG37: adquirir formación básica para a actividade investigadora;
CE31: coñecer, valorar criticamente e saber utilizar tecnoloxías e fontes de información clínica e biomédica, para obter, organizar, interpretar e comunicar información clínica, científica e de saúde;
CE32: coñecer os conceptos básicos da bioestatística e a súa aplicación ás ciencias médicas;
CE33: ser capaz de deseñar e realizar estudos estatísticos sinxelos mediante programas informáticos e interpretar os resultados;
CE34: comprender e interpretar datos estatísticos da literatura médica;
CE37: manexar con autonomía un ordenador persoal e as aplicacións informáticas máis comúns no campo da biomedicina.

Seguindo as competencias arriba indicadas, na guía docente da materia establécese que a finalidade desta é familiarizar ao alumnado cos conceptos e técnicas básicas da estatística descritiva, da teoría da probabilidade e da inferencia estatística. Amais, derívanse os obxectivos xerais da materia:

OX1: coñecer a linguaxe estatística básica: proporcionar ao estudantado os coñecementos teóricos básicos que lle permita comprender os distintos aspectos estatísticos e probabilistas implicados na investigación médico/sanitaria;
OX2: coñecer e aplicar algúns métodos estatísticos básicos para representar e analizar conxuntos de datos simples e poder obter conclusións destas análises;
OX3: coñecer, expresar e interpretar correctamente os niveis de precisión, confianza e de erro nas conclusións dun estudo estatístico.

Nesta unidade didáctica traballaremos o OX1, e del derívanse os seguintes obxectivos específicos:

OE1: coñecer o concepto de variable aleatoria;
OE2: distinguir entre variable aleatoria discreta e continua;
OE3: coñecer e saber representar as principais funcións que caracterizan as variables aleatorias discretas;
OE4: coñecer e saber obter as principais medidas características asociadas a unha variable aleatoria discreta;
OE5: coñecer modelos notables de distribucións discretas;

OE6: saber identificar situacións reais nas que aparecen os modelos notables de distribucións discretas;
OE7: desenvolver unha actitude crítica e responsable coa toma de decisións baseada en resultados estatísticos;
OE8: valorar a aprendizaxe autónoma;
OE9: amosar iniciativa na resolución de problemas;
OE10: amosar interese por adquirir novos coñecementos estatísticos.

A relación entre estes obxectivos específicos e as correspondentes competencias vén detallada na Táboa 2.

Táboa 2: Relación entre os obxectivos específicos desta unidade didáctica e as competencias vencelladas á materia segundo a memoria de verificación do Grao en Medicina.

Obxectivos	Competencias
OE1	CG31, CG37, CE32, CE34
OE2	CG31, CG35, CG37, CE32, CE34
OE3	CG37, CE32
OE4	CG37, CE32
OE5	CG37, CE32
OE6	CG31, CG35, CG37, CE32, CE34
OE7	CG34, CG35, CE31, CE32
OE8	CG37
OE9	CG37, CE31
OE10	CG37, CE31, CE34

Remarcar que os obxectivos OE1 a OE5 están ligados a competencias técnicas (aquelas que implican dominio como experta/o das tarefas e contidos do seu ámbito de traballo, así como os coñecementos e habilidades necesarios para o seu desempeño); o OE6 a competencias metodolóxicas (implican a capacidade de reacción ao aplicar o procedemento adecuado ás tarefas encomendadas e ás irregularidades que xurdan atopando de xeito independente vías de solución, que ademais logo se transfiren a outros eidos da formación ou traballo); e os OE7 a OE10 a competencias actitudinais (vencelladas á colaboración interpersoal de forma comunicativa e construtiva, así como á participación na organización e á capacidade de decidir e asumir responsabilidades).

PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Neste apartado especifícase a liña metodolóxica xeral e a dinámica de traballo que desexamos instaurar neste Bloque II. Teoría da Probabilidade. As actividades propostas clasifícanse en dous grandes grupos atendendo ao carácter presencial ou non das mesmas. Na Táboa 3 pódese ver en detalle a dedicación en horas presenciais e non presenciais que se espera por parte do alumnado para a superación desta unidade didáctica.

As actividades formativas con presenza do profesorado que se desenvolverán ao longo deste Bloque II son:

— **Sesións expositivas.** Para a exposición dos contidos teóricos o profesorado fará uso de presentacións en ordenador que o alumnado terá á súa disposición a través do Campus Virtual da USC. Estas presentacións son esquemas para que o alumnado poida seguir as sesións, pero é recomendable que cada alumna/o tome as súas propias notas e complete os contidos que se expoñen. As sesións expositivas desenvolveranse intercalando problemas prácticos e aplicacións entre as explicacións teóricas. Preténdese enriquecer a participación do alumnado na aula, por medio dun exercicio diario ao finalizar cada sesión que se poida resolver aplicando os coñecementos adquiridos durante a mesma.

  Xunto coa presentación de cada sesión, facilitaráselle ao alumnado ao concluír cada tema un material máis desenvolvido. Preténdese que o alumnado compare o material que recopilou durante as sesións con estes documentos, para repasar os conceptos estudados e completar os seus apuntamentos. Ademais, cada tema inclúe o seu correspondente boletín de exercicios nos que o alumnado poderá aplicar as ideas desenvolvidas nas sesións expositivas.

— **Sesións interactivas de seminario.** Estas sesións dedicaranse á resolución por parte do alumnado dos exercicios propostos nos boletíns temáticos. En ocasións nas que sexa necesario clarificar ou incidir en algún dos contidos, os problemas serán resoltos polo profesorado. Preténdese que a/o estudante adquira seguridade na exposición oral de coñecementos e valore o traballo en equipo.

Como actividades non presenciais asociadas a esta unidade considéranse a resolución de exercicios, as buscas bibliográficas ou a realización das lecturas recomendadas.

Táboa 3: Dedicación (en horas) do alumnado a esta unidade didáctica segundo o tipo de actividade.

Actividades presenciais	**Horas**	**Actividades non presenciais**	**Horas**
Sesións expositivas	3	Estudo individual	6
Seminarios	1	Resolución de exercicios	1.5
Total horas presenciais	**4**	**Total horas non presenciais**	**7.5**

CONTIDOS

A definición e a estruturación dos contidos da presente unidade didáctica farase en primeiro lugar respectando as indicacións que se especifican na ficha da materia incluída na memoria de verificación do título. Ademais, pretende ser fiel a dous principios chave:

— non hipertrofiar os contidos disciplinarios, configurando un programa acorde co peso curricular da materia, proporcionando ao alumnado as ferramentas necesarias para o correcto desenvolvemento doutras materias da titulación e da súa futura actividade profesional;

— romper o que se coñece como «encefalograma plano», é dicir, dar a todos os contidos o mesmo nivel de importancia. Debemos ser capaces de amosar ao alumnado as chaves da nosa disciplina mediante contido esencial, necesario e de extensión.

Os contidos desta unidade didáctica atópanse distribuídos en catro seccións, que deben de ser tratadas de xeito secuencial no tempo e que detallamos a continuación.

1. Definición de variable aleatoria discreta

Definimos unha variable aleatoria X como unha aplicación que a cada resultado dun experimento aleatorio lle asigna un número real obtido medindo unha determinada característica. Formalmente, unha variable aleatoria é unha aplicación $X : \Omega \to \mathbb{R}$, onde Ω é un espazo mostral.

Dependendo desas posibles asignacións numéricas asociadas ao experimento aleatorio, distinguiremos entre variables aleatorias aleatorias discretas e continuas. Nesta unidade centrámonos nas primeiras, e deixamos as variables aleatorias continuas para a unidade seguinte.

Dada unha variable aleatoria X, dise que é unha **variable aleatoria discreta** se toma unha cantidade finita ou infinita numerable de valores. Por exemplo, se consideramos o experimento aleatorio consistente en lanzar dous dados, a variable aleatoria $X =$“Suma das puntuacións” é unha variable aleatoria discreta cuxos posibles valores son $\{2, 3, \ldots, 12\}$.

2. Función de masa de probabilidade e función de distribución

Dada unha variable aleatoria discreta, X, o seu comportamento estará caracterizado pola función de masa de probabilidade ou pola función de distribución.

Se denotamos por $\{x_1, \ldots, x_k\}$ os posibles valores que toma unha variable discreta X, denomínase **función de masa de probabilidade** ao conxunto de probabilidades $\{p_1, \ldots, p_k\}$ tales que

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \text{ con } i = 1, \ldots, k \text{ onde } p_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

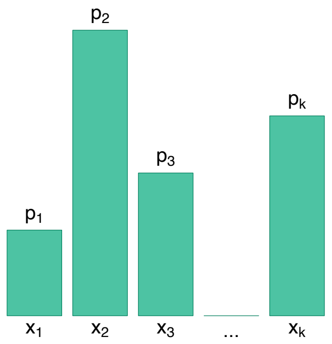
Por outra banda, defínese a **función de distribución** dunha variable aleatoria X, que denotaremos por F_X, como a función que asocia a cada valor $x \in \mathbb{R}$, a probabilidade de que a variable tome valores menores ou iguais a este, é dicir,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

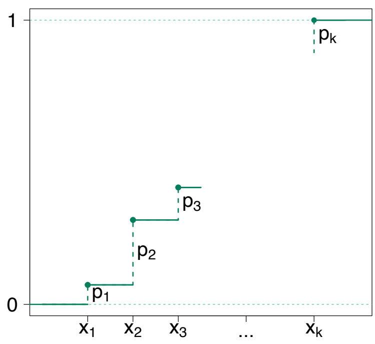
A función de distribución é unha función non decrecente, con valores entre 0 e 1, e que verifica que $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$. Amais, neste caso particular de variables aleatorias discretas, a función de distribución é unha función descontinua que presenta saltos nos puntos x_i de altura p_i, con $i = 1, \ldots, k$.

A modo de ilustración, represéntase, na Figura 1, a función de masa de probabilidade e a función de distribución asociada a unha variable aleatoria discreta xenérica que toma os valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ con probabilidades $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, respectivamente. Como xa comentabamos, é claro que nestes casos a función de distribución é unha función definida a chanzos.

Figura 1: Exemplo de función de masa de probabilidade (a) e función de distribución (b) para unha variable aleatoria discreta X.



(a) Función de masa de probabilidade.



(b) Función de distribución.

3. Medidas características

As principais medidas características asociadas a unha variable aleatoria en xeral, e a unha variable aleatoria discreta en particular, son a media, a varianza e a desviación típica. A continuación defínense cada unha delas.

Media

Sexa X unha variable aleatoria discreta que toma os valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ con probabilidades $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, respectivamente. Neste caso, definimos a **media** ou **esperanza poboacional** de X como

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

Varianza

Sexa X unha variable aleatoria discreta que toma os valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ con probabilidades $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, respectivamente. Neste caso, definimos a **varianza poboacional** de X como

$$\sigma_X^2 = \mathbb{V}ar(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu_X)^2 p_i.$$

Desviación típica

A **desviación típica poboacional** defínese a partir da varianza poboacional como a súa raíz cadrada, isto é,

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu_X)^2 p_i}.$$

A principal vantaxe da desviación típica fronte a varianza é que a primeira mídese nas mesmas unidades que a variable aleatoria de interese, polo que os seus valores son máis intuitivos e máis facilmente interpretables.

Ademais destas tres medidas características fundamentais, existen outras medidas características de interese como a moda, a mediana, ou en xeral, os cuantís, que tamén se introducen a continuación.

- **Moda:** é o(s) valor(es) que ten (teñen) asociada unha probabilidade maior.
- **Mediana:** é o menor valor que deixa unha probabilidade de a lo menos 0.5 á súa esquerda.
- **Cuantil:** dado un valor $\tau \in (0,1)$ defínese o cuantil de orde τ como o menor valor que deixa á súa esquerda unha probabilidade a lo menos τ, é dicir,

$$Q(\tau) = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \tau\}.$$

A mediana é un caso particular de cuantil, sendo nese caso $\tau = 0.5$.

Exemplo 1 *Consideremos o experimento aleatorio consistente en lanzar dous dados, e definamos a variable aleatoria X =“suma das puntuacións”. Calcular a súa función de masa de probabilidade, función de distribución,*

media, varianza e desviación típica.
Para calcular a función de masa de probabilidade temos que obter as probabilidades asociadas a cada un dos posibles valores da variable aleatoria X. *Neste caso os posibles valores son* $\{2, 3, \ldots, 11, 12\}$. *Para obter as probabilidades asociadas a cada un deles, temos que determinar cantos sucesos resultantes do experimento aleatorio levan a cada un deses valores. Por exemplo, o valor* 2 *só se pode conseguir cun suceso, saír un en cada dado, mentres que o valor* 6 *pódese conseguir con cinco sucesos,* $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,4)$, $(4,2)$ *e* $(3,3)$. *Polo tanto as probabilidades asociadas serán* $1/36$ *e* $5/36$, *respectivamente, tendo en conta que ao lanzar dous dados podemos obter* 36 *resultados diferentes.*
Aplicando este mesmo razoamento a todos os valores obtemos a seguinte función de masa de probabilidade:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A función de distribución calcúlase de xeito acumulativo a partir da función de masa de probabilidade do seguinjte xeito:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2, \\ \frac{1}{36} = 0.028, & \text{se } 2 \le x < 3, \\ \frac{3}{36} = 0.083, & \text{se } 3 \le x < 4, \\ \frac{6}{36} = 0.167, & \text{se } 4 \le x < 5, \\ \frac{10}{36} = 0.278, & \text{se } 5 \le x < 6, \\ \frac{15}{36} = 0.417, & \text{se } 6 \le x < 7, \\ \frac{21}{36} = 0.583, & \text{se } 7 \le x < 8, \\ \frac{26}{36} = 0.722, & \text{se } 8 \le x < 9, \\ \frac{30}{36} = 0.833, & \text{se } 9 \le x < 10, \\ \frac{33}{36} = 0.917, & \text{se } 10 \le x < 12, \\ \frac{35}{36} = 0.972, & \text{se } 11 \le x < 12, \\ \frac{36}{36} = 1, & \text{se } x \ge 12. \end{cases}$$

Para o cálculo da media aplicaremos a definición correspondente:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{11} x_i p_i = \left(2\,\frac{1}{36} + 3\,\frac{2}{36} + \cdots + 11\,\frac{2}{36} + 12\,\frac{1}{36}\right) = 7 \textit{ puntos}.$$

De xeito análogo obteremos a varianza e a desviación típica, tendo en conta *que neste cálculo precisamos incluír o valor da media previamente obtido:*

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \sum_{i=1}^{11}(x_i-\mu_X)^2 p_i = \left((2-7)^2\frac{1}{36}+\cdots+(12-7)^2\frac{1}{36}\right)\\ &= 5.83\,\textit{puntos}^2,\\ \sigma_X &= \sqrt{5.83} = 2.41\,\textit{puntos}.\end{aligned}$$

4. Principais modelos de distribucións discretas

Nesta sección faremos un percorrido por algunhas das principais distribucións discretas: Bernoulli, binomial, xeométrica, binomial negativa e Poisson. Ademais, no Anexo amosamos as funcións de masa de probabilidade para diferentes exemplos de modelos de distribucións discretas.

Bernoulli

Un experimento de Bernoulli é aquel que presenta só dous posibles resultados (por exemplo, éxito ou fracaso, válido ou defectuoso, 0 ou 1, san ou enfermo, ...). En xeral, chamaremos éxito, E, á ocorrencia do evento que nos interesa estudar, e fracaso, F, á non ocorrencia. Ademais, a probabilidade de obter un éxito permanece constante, e denotarémola p.

A variable aleatoria X que rexistra o resultado de tal proba dise que ten unha distribución de Bernoulli de parámetro p, e denotarémola como $X \in Ber(p)$:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorre E}, \\ 0, & \text{se ocorre F (non ocorre E)}. \end{cases}$$

A función de masa de probabilidade vén dada por:

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

e a función de distribución é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1-p, & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

Delas dedúcese que a esperanza e a varianza desta distribución son, respectivamente:

$$\mu_X = 0\,(1-p) + 1\,p = p$$
$$\sigma_X^2 = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p).$$

Binomial

Se repetimos m veces en idénticas condicións un mesmo experimento de Bernoulli, pódese construír unha variable aleatoria X que compute o número de éxitos obtidos en m repeticións. Esta variable segue unha distribución binomial de parámetros m e p, e denótase como $X \in Bi(m,p)$.

A distribución binomial toma os valores $\{0,1,2,3,\ldots,m\}$ con probabilidades:

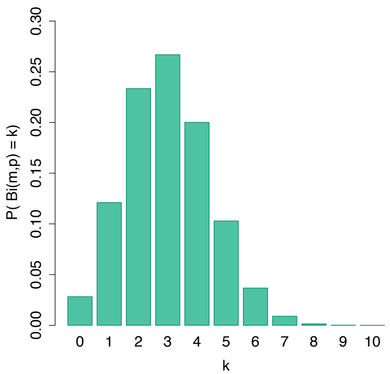
$$\mathbb{P}\,(X=k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \text{ con } k = 0,1,2,3,\ldots,m$$

onde se debe recordar que $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Na Figura 2 ilústrase a función de masa de probabilidade e a función de distribución asociadas a unha variable aleatoria binomial de parámetros $m = 10$ e $p = 0.3$.

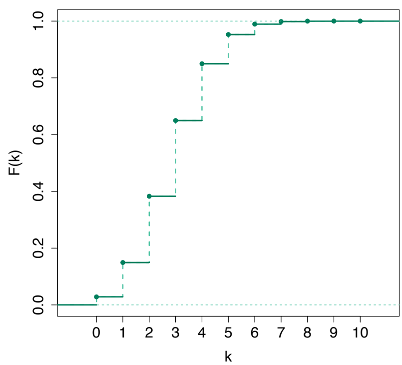
A media e a varianza dunha distribución binomial veñen dadas por:

$$\mu_X = mp \quad \text{e} \quad \sigma_X^2 = mp(1-p).$$

Figura 2: Representación gráfica da función de masa de probabilidade (a) e da función de distribución (b) para unha variable aleatoria discreta que segue unha distribución binomial de parámetros $m = 10$ e $p = 0.3$.



(a) Función de masa de probabilidade.



(b) Función de distribución.

Xeométrica

De novo repetimos, en idénticas condicións, un mesmo experimento de Bernoulli, pero agora construímos unha variable aleatoria X que compute o número de fracasos ata o primeiro éxito. Esta variable seguirá unha distribución xeométrica de parámetro p, e denótase por $X \in Xeo(p)$.

A distribución xeométrica toma os valores $\{0,1,2,3,\ldots\}$ con probabilidades:

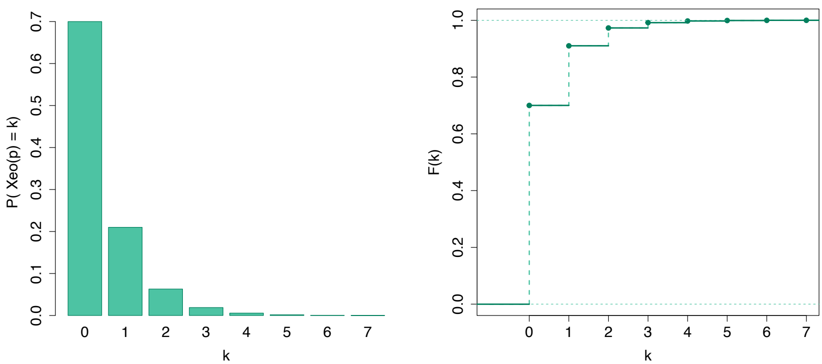
$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=(1-p)^k p, \text{ con } k=0,1,2,3,\ldots$$

Na Figura 3 ilústrase a función de masa de probabilidade e a función de distribución asociadas a unha variable aleatoria xeométrica de parámetro $p=0.7$.

A súa media e varianza veñen dadas por:

$$\mu_X=\frac{1-p}{p} \quad \text{e} \quad \sigma_X^2=\frac{1-p}{p^2}.$$

Figura 3: Representación gráfica da función de masa de probabilidade (a) e da función de distribución (b) para unha variable aleatoria discreta que segue unha distribución xeométrica de parámetro $p=0.7$.



(a) Función de masa de probabilidade.

(b) Función de distribución.

Binomial negativa

A distribución binomial negativa é unha xeneralización da distribución xeométrica. Neste caso temos de novo un experimento de Bernoulli que repetimos en idénticas condicións e definimos unha variable aleatoria X que compute o número de fracasos ata o éxito m-ésimo. Esta variable seguirá unha distribución binomial negativa de parámetros m e p, e denótase por $X \in BN(m,p)$.

A distribución binomial negativa toma os valores $\{0,1,2,3,\ldots\}$ con probabilidades:

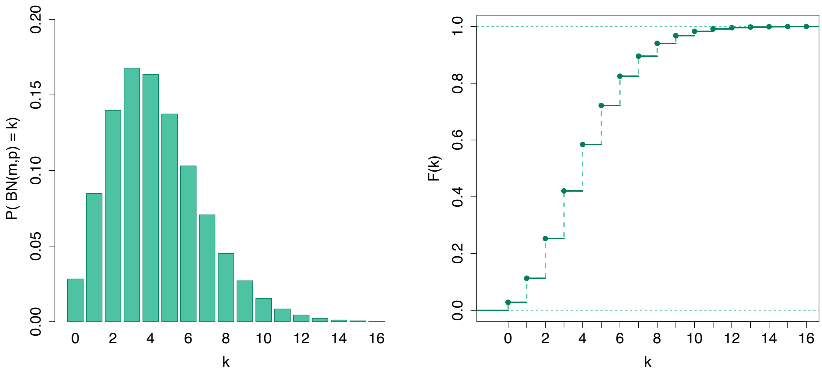
$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{m+k-1}{k}(1-p)^k p^m, \text{ con } k=0,1,2,3,\ldots$$

Na Figura 4 ilústrase a función de masa de probabilidade e a función de distribución asociadas a unha variable aleatoria binomial negativa con parámetros $m=10$ e $p=0.7$.

A súa media e varianza veñen dadas por:

$$\mu_X = \frac{m(1-p)}{p} \quad \text{e} \quad \sigma_X^2 = \frac{m(1-p)}{p^2}.$$

Figura 4: Representación gráfica da función de masa de probabilidade (a) e da función de distribución (b) para unha variable aleatoria discreta que segue unha distribución binomial negativa de parámetros $m = 10$ e $p = 0.7$.



(a) Función de masa de probabilidade. (b) Función de distribución.

Poisson

A distribución de Poisson xa non se orixina a partir dun experimento Bernoulli, senón que o fai a partir dun novo experimento aleatorio que se define a continuación. Un proceso de Poisson é un experimento aleatorio que consiste en computar o número de sucesos nun certo período de tempo baixo unhas condicións:

- o proceso a de ser estable, é dicir, o número medio de eventos por unidade de tempo é constante, e denótase habitualmente por λ;
- os sucesos teñen que ocorrer de xeito independente.

Baixo este escenario, podemos definir a variable aleatoria $X =$"número de sucesos nun intervalo de tempo", que segue unha distribución de Poisson de parámetro λ, e denótase por $X \in Pois(\lambda)$.

A distribución de Poisson toma os valores $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ con probabilidades:

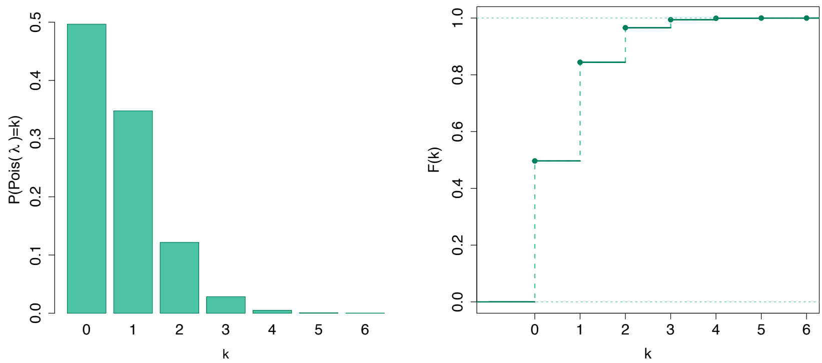
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Na Figura 5 ilústrase a función de masa de probabilidade e a función de distribución asociadas a unha variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 0.7$.

A súa media e varianza veñen dadas por:

$$\mu_X = \lambda \quad \text{e} \quad \sigma_X^2 = \lambda.$$

Figura 5: Representación gráfica da función de masa de probabilidade (a) e da función de distribución (b) para unha variable aleatoria discreta que segue unha distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.7$.



(a) Función de masa de probabilidade.

(b) Función de distribución.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Na memoria de verificación do Grao en Medicina especifícase que en todas as materias do Grao a cualificación de cada alumna/o farase mediante avaliación continua e a realización dun exame final. En concreto, no caso da materia de Bioestatística, a avaliación continua terá un peso do $30\,\%$ da nota final, mentres que o exame final terá un peso do $70\,\%$.

A avaliación continua desta unidade didáctica realizarase conxuntamente coas outras unidades didácticas que forman parte do Bloque II. Teoría da Probabilidade supoñendo un peso do $6\,\%$ na nota final da materia. Esta avaliación engloba os dez obxectivos específicos desta unidade e consistirá na entrega dun exercicio realizado de xeito individual por cada alumna/o como traballo non presencial.

Así mesmo, no exame final da materia poderanse incluír preguntas de tipo teórico e/ou práctico sobre os contidos desta unidade didáctica.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

BORRAJO, M. I., CONDE-AMBOAGE, M. E CRUJEIRAS-CASAIS, R. M. (2021). *Fundamentos da teoría da probabilidade*. Esenciais USC. Universidade de Santiago de Compostela. https://www.usc.gal/libros/es/categorias/1025-fundamentos-da-teoria-da-probabilidade-334620-fundamentos-da-teoria-da-probabilidade.html#/29-formato-pdf/34-transaccion-gratis.

CRUJEIRAS-CASAIS, R. M. E FARALDO-ROCA, P. (2010). *Manual de estadística básica para ciencias de la salud.* Universidade de Santiago de Compostela, Dpto. de Esta-

dística e Investigación Operativa.
MILTON, J.S. (1994) *Estadística para biología y ciencias de la salud*. (2ª ed). Interamericana, McGraw-Hill.
ROSNER, B. (2006) *Fundamentals of biostatistics* (6ª edición). Wadsworth Publishing Company. Duxbury Press.

Bibliografía complementaria

ALTMAN, D. G. (1990). *Practical statistics for medical research*. Chapman & Hall.
ÁLVAREZ-CÁCERES, R. (2007). *Estadística Aplicada a las Ciencias de la Salud.* Editorial Diaz de Santos.
DANIEL, W. (1991). *Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Limusa Wiley.
DURRETT, R. (2009). *Elementary probability for applications.* Cambridge University Press.

RECURSOS NA REDE

Hoxe en día, tanto alumnado como profesorado teñen acceso a multitude de recursos a través da Rede. Aínda que é certo que na liberdade que reina no mundo dixital hai que saber cales merece a pena consultar. É por iso que esta sección pretende proporcionar recursos de calidade para diferentes fins dentro do proceso de aprendizaxe.

— ***Academic Skills Kit*** **(ASK)**
https://internal.ncl.ac.uk/ask/numeracy-maths-statistics/statistics/
A Universidade de Newcastle pon a disposición de calquera usuario da Rede cursos de diversas temáticas. En particular, a páxina de estatística ten un curso de iniciación bastante completo, no que para cada tema comeza coas definicións teóricas básicas, seguidas dalgunha actividade extra, que poden ser vídeos, exemplos ilustrativos, exercicios, outros recursos electrónicos ... Ademais, todos os exercicios propostos son acompañado dunha solución detallada.

— ***GeoGebra***
https://www.geogebra.org/
GeoGebra é un conxunto de ferramentas dixitais gratuítas para a docencia das matemáticas en xeral, e da estatística en particular, á que lle foron concedidos numerosos premios e mencións. En relación á temática desta unidade, destacamos un simulador que permite visualizar a función de masa de probabilidade de calquera variable aleatoria discreta (https://www.geogebra.org/m/cqMQwFC5), ou un simulador máis específico da distribución binomial (https://www.geogebra.org/m/ccryftau). Estes son só algúns exemplos, pero existe unha gran cantidade e variedade de ferramentas sinxelas e moi útiles de cara á visualización e interpretación dos conceptos vistos ao longo desta unidade.

— **SOCR**

http://www.distributome.org/tools.html

SOCR é un recurso interactivo gratuíto e accesible a través da Rede para exploración, modelado, análise e interpretación de datos. Foi deseñado pola Universidade de California no 2006. Inclúe ferramentas e recursos baseados en *applets* interactivos como aplicacións de cálculo e gráficos para a impartición de cursos estatísticos. A súa filosofía é a dunha ferramenta aberta e ampliable para a comunidade educativa. É unha das maiores coleccións de *applets* Java, moi útil para a aprendizaxe autónoma, motivación, modernización e mellora do modelo de ensino estatístico. Promove a aprendizaxe activa e práctica, co/coa estudante como axente centrado/a no proceso de aprendizaxe. Para a unidade de variables aleatorias discretas dispón de varias aplicacións nas que se poden simular diversos experimentos, ver representacións das funcións características e mesmo visualizar as aproximacións límite.

— ***Shiny apps***

http://www.showmeshiny.com/

Son aplicacións sinxelas feitas con código, pero cunha interface gráfica moi amigable que permite á/ao usuaria/o «xogar» cos números. Os temas que tratan son moi variados, pero hai moitos dedicados a ideas sobre variables aleatorias.

ANEXO: TÁBOAS DE DISTRIBUCIÓNS NOTABLES

Dada $X \in Bi(m,p)$ preséntase $\mathbb{P}\,(X=k)$ para todo $k \in \{0,1,\ldots,m\}$.

m	k \ p	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
2	0	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0198	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0001	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.0294	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0003	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0000	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.0388	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0006	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0000	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	1	0.0480	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3955	0.3601	0.3124	0.2592	0.2059	0.1562
	2	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1562
	5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0312
6	0	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.0571	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0937
	2	0.0014	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0000	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.0659	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0020	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0000	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0000	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078

Dada $X \in Bi(m,p)$ preséntase $\mathbb{P}\,(X=k)$ para todo $k \in \{0,1,\ldots,m\}$.

m	k \ p	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.0746	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0026	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0001	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0000	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.0914	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0042	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0001	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0000	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0000	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.0995	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0050	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0002	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0000	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0000	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005

Dada $X \in BN(m,p)$ preséntase $\mathbb{P}(X=k)$ para todo $k \in \{0,1,2,\ldots\}$.

$p=0.25$ k m	2	3	4	5	6	7	8
0	0.0625	0.0156	0.0039	0.0010	0.0002	0.0001	0.0000
1	0.0938	0.0352	0.0117	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001
2	0.1055	0.0527	0.0220	0.0082	0.0029	0.0010	0.0003
3	0.1055	0.0659	0.0330	0.0144	0.0058	0.0022	0.0008
4	0.0989	0.0742	0.0433	0.0216	0.0097	0.0041	0.0016
5	0.0890	0.0779	0.0519	0.0292	0.0146	0.0067	0.0029
6	0.0779	0.0779	0.0584	0.0365	0.0201	0.0100	0.0047
7	0.0667	0.0751	0.0626	0.0430	0.0258	0.0140	0.0070
8	0.0563	0.0704	0.0645	0.0484	0.0315	0.0183	0.0098
9	0.0469	0.0645	0.0645	0.0524	0.0367	0.0229	0.0131
10	0.0387	0.0581	0.0629	0.0550	0.0413	0.0275	0.0167
11	0.0317	0.0515	0.0601	0.0563	0.0450	0.0319	0.0205
12	0.0257	0.0450	0.0563	0.0563	0.0479	0.0359	0.0244
13	0.0208	0.0390	0.0520	0.0552	0.0497	0.0393	0.0281
14	0.0167	0.0334	0.0473	0.0532	0.0506	0.0422	0.0316
15	0.0134	0.0284	0.0426	0.0506	0.0506	0.0443	0.0348
16	0.0106	0.0240	0.0379	0.0474	0.0498	0.0456	0.0375
17	0.0085	0.0201	0.0335	0.0439	0.0483	0.0463	0.0397
18	0.0067	0.0167	0.0293	0.0403	0.0463	0.0463	0.0414
19	0.0053	0.0139	0.0254	0.0366	0.0439	0.0457	0.0424
20	0.0042	0.0114	0.0219	0.0329	0.0411	0.0446	0.0430
21	0.0033	0.0094	0.0188	0.0294	0.0382	0.0430	0.0430
22	0.0026	0.0077	0.0160	0.0260	0.0352	0.0410	0.0425
23	0.0020	0.0063	0.0136	0.0229	0.0321	0.0388	0.0416
24	0.0016	0.0051	0.0115	0.0201	0.0291	0.0364	0.0403
25	0.0012	0.0041	0.0096	0.0175	0.0262	0.0338	0.0386
26	0.0010	0.0033	0.0081	0.0151	0.0234	0.0312	0.0368
27	0.0007	0.0027	0.0067	0.0130	0.0208	0.0286	0.0347
28	0.0006	0.0022	0.0056	0.0111	0.0184	0.0261	0.0326
29	0.0004	0.0017	0.0046	0.0095	0.0162	0.0236	0.0303
30	0.0003	0.0014	0.0038	0.0081	0.0142	0.0212	0.0281

Dada $X \in BN(m, p)$ preséntase $\mathbb{P}(X = k)$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

$p = 0.5$ k m	2	3	4	5	6	7	8
0	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156	0.0078	0.0039
1	0.2500	0.1875	0.1250	0.0781	0.0469	0.0273	0.0156
2	0.1875	0.1875	0.1563	0.1172	0.0820	0.0547	0.0352
3	0.1250	0.1562	0.1562	0.1367	0.1094	0.0820	0.0586
4	0.0781	0.1172	0.1367	0.1367	0.1230	0.1025	0.0806
5	0.0469	0.0820	0.1094	0.1230	0.1230	0.1128	0.0967
6	0.0273	0.0547	0.0820	0.1025	0.1128	0.1128	0.1047
7	0.0156	0.0352	0.0586	0.0806	0.0967	0.1047	0.1047
8	0.0088	0.0220	0.0403	0.0604	0.0786	0.0916	0.0982
9	0.0049	0.0134	0.0269	0.0436	0.0611	0.0764	0.0873
10	0.0027	0.0081	0.0175	0.0305	0.0458	0.0611	0.0742
11	0.0015	0.0048	0.0111	0.0208	0.0333	0.0472	0.0607
12	0.0008	0.0028	0.0069	0.0139	0.0236	0.0354	0.0481
13	0.0004	0.0016	0.0043	0.0091	0.0163	0.0259	0.0370
14	0.0002	0.0009	0.0026	0.0058	0.0111	0.0185	0.0277
15	0.0001	0.0005	0.0016	0.0037	0.0074	0.0129	0.0203
16	0.0001	0.0003	0.0009	0.0023	0.0049	0.0089	0.0146
17	0.0000	0.0002	0.0005	0.0014	0.0031	0.0060	0.0103
18	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0020	0.0040	0.0072
19	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0013	0.0026	0.0049
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0017	0.0033
21	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011	0.0022
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0009
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
29	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Dada $X \in BN(m,p)$ preséntase $\mathbb{P}(X=k)$ para todo $k \in \{0,1,2,\ldots\}$.

$p=0.75$ k m	2	3	4	5	6	7	8
0	0.5625	0.4219	0.3164	0.2373	0.1780	0.1335	0.1001
1	0.2812	0.3164	0.3164	0.2966	0.2670	0.2336	0.2002
2	0.1055	0.1582	0.1978	0.2225	0.2336	0.2336	0.2253
3	0.0352	0.0659	0.0989	0.1298	0.1557	0.1752	0.1877
4	0.0110	0.0247	0.0433	0.0649	0.0876	0.1095	0.1291
5	0.0033	0.0087	0.0173	0.0292	0.0438	0.0602	0.0774
6	0.0010	0.0029	0.0065	0.0122	0.0201	0.0301	0.0419
7	0.0003	0.0009	0.0023	0.0048	0.0086	0.0140	0.0210
8	0.0001	0.0003	0.0008	0.0018	0.0035	0.0061	0.0098
9	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006	0.0014	0.0025	0.0044
10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010	0.0019
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0008
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
29	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Dada $X \in Pois(\lambda)$ preséntase $\mathbb{P}\,(X = k)$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

λ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.8187	0.1637	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	0.6065	0.3033	0.0758	0.0126	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.5488	0.3293	0.0988	0.0198	0.0030	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0284	0.0050	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	0.4493	0.3595	0.1438	0.0383	0.0077	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.9	0.4066	0.3659	0.1647	0.0494	0.0111	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.1	0.3329	0.3662	0.2014	0.0738	0.0203	0.0045	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2	0.3012	0.3614	0.2169	0.0867	0.0260	0.0062	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.3	0.2725	0.3543	0.2303	0.0998	0.0324	0.0084	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.4	0.2466	0.3452	0.2417	0.1128	0.0395	0.0111	0.0026	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.5	0.2231	0.3347	0.2510	0.1255	0.0471	0.0141	0.0035	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.6	0.2019	0.3230	0.2584	0.1378	0.0551	0.0176	0.0047	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.7	0.1827	0.3106	0.2640	0.1496	0.0636	0.0216	0.0061	0.0015	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1.8	0.1653	0.2975	0.2678	0.1607	0.0723	0.0260	0.0078	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1.9	0.1496	0.2842	0.2700	0.1710	0.0812	0.0309	0.0098	0.0027	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
2.1	0.1225	0.2572	0.2700	0.1890	0.0992	0.0417	0.0146	0.0044	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
2.2	0.1108	0.2438	0.2681	0.1966	0.1082	0.0476	0.0174	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
2.3	0.1003	0.2306	0.2652	0.2033	0.1169	0.0538	0.0206	0.0068	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2.4	0.0907	0.2177	0.2613	0.2090	0.1254	0.0602	0.0241	0.0083	0.0025	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
2.5	0.0821	0.2052	0.2565	0.2138	0.1336	0.0668	0.0278	0.0099	0.0031	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000
2.6	0.0743	0.1931	0.2510	0.2176	0.1414	0.0735	0.0319	0.0118	0.0038	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
2.7	0.0672	0.1815	0.2450	0.2205	0.1488	0.0804	0.0362	0.0139	0.0047	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000
2.8	0.0608	0.1703	0.2384	0.2225	0.1557	0.0872	0.0407	0.0163	0.0057	0.0018	0.0005	0.0001	0.0000
2.9	0.0550	0.1596	0.2314	0.2237	0.1622	0.0940	0.0455	0.0188	0.0068	0.0022	0.0006	0.0002	0.0000
3	0.0498	0.1494	0.2240	0.2240	0.1680	0.1008	0.0504	0.0216	0.0081	0.0027	0.0008	0.0002	0.0001
3.1	0.0450	0.1397	0.2165	0.2237	0.1733	0.1075	0.0555	0.0246	0.0095	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001
3.2	0.0408	0.1304	0.2087	0.2226	0.1781	0.1140	0.0608	0.0278	0.0111	0.0040	0.0013	0.0004	0.0001
3.3	0.0369	0.1217	0.2008	0.2209	0.1823	0.1203	0.0662	0.0312	0.0129	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001
3.4	0.0334	0.1135	0.1929	0.2186	0.1858	0.1264	0.0716	0.0348	0.0148	0.0056	0.0019	0.0006	0.0002
3.5	0.0302	0.1057	0.1850	0.2158	0.1888	0.1322	0.0771	0.0385	0.0169	0.0066	0.0023	0.0007	0.0002
3.6	0.0273	0.0984	0.1771	0.2125	0.1912	0.1377	0.0826	0.0425	0.0191	0.0076	0.0028	0.0009	0.0003
3.7	0.0247	0.0915	0.1692	0.2087	0.1931	0.1429	0.0881	0.0466	0.0215	0.0089	0.0033	0.0011	0.0003
3.8	0.0224	0.0850	0.1615	0.2046	0.1944	0.1477	0.0936	0.0508	0.0241	0.0102	0.0039	0.0013	0.0004
3.9	0.0202	0.0789	0.1539	0.2001	0.1951	0.1522	0.0989	0.0551	0.0269	0.0116	0.0045	0.0016	0.0005
4	0.0183	0.0733	0.1465	0.1954	0.1954	0.1563	0.1042	0.0595	0.0298	0.0132	0.0053	0.0019	0.0006
5	0.0067	0.0337	0.0842	0.1404	0.1755	0.1755	0.1462	0.1044	0.0653	0.0363	0.0181	0.0082	0.0034
6	0.0025	0.0149	0.0446	0.0892	0.1339	0.1606	0.1606	0.1377	0.1033	0.0688	0.0413	0.0225	0.0113
7	0.0009	0.0064	0.0223	0.0521	0.0912	0.1277	0.1490	0.1490	0.1304	0.1014	0.0710	0.0452	0.0263
8	0.0003	0.0027	0.0107	0.0286	0.0573	0.0916	0.1221	0.1396	0.1396	0.1241	0.0993	0.0722	0.0481
9	0.0001	0.0011	0.0050	0.0150	0.0337	0.0607	0.0911	0.1171	0.1318	0.1318	0.1186	0.0970	0.0728
10	0.0000	0.0005	0.0023	0.0076	0.0189	0.0378	0.0631	0.0901	0.1126	0.1251	0.1251	0.1137	0.0948

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA