

MATERIA
Análise das Operacións Financeiras

unidade
didáctica
1

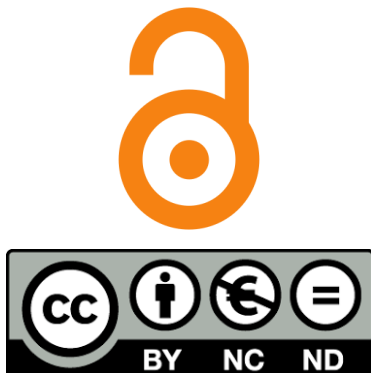
TITULACIÓN
Grao en Administración e Dirección de Empresas

Amortización de préstamos

María Garrido Ruso
M^a Celia López Penabad

Área de Economía Financeira e Contabilidade
Departamento de Economía Financeira e Contabilidade
Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>

© Universidade de Santiago de Compostela, 2023

Deseño e maquetación

J. M. Gairí

Edita

Edicións USC

usc.gal/publicacions

DOI

<https://dx.doi.org/10.15304/9788419679413>

MATERIA: Análise das Operacións Financeiras

TITULACIÓN: Grao en Administración e Dirección de Empresas

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Fundamentos da matemática financeira

Introdución

Capital financeiro: postulados

Operación financeira

Capitais equivalentes. Operacións e leis de capitalización e de desconto

Tantos equivalentes

Unificación de capitais: suma financeira, vencemento común e medio

Equivalencia financeira

Reserva financeira dunha operación

Unidade II. Valoración financeira das rendas

Introdución

Definición e elementos dunha renda

Clasificación das rendas

Valoración das rendas

Valoración de rendas constantes

Valoración de rendas variables en progresión xeométrica e aritmética

Valoración de outras rendas: VAN e TIR

Unidade III. Amortización de préstamos

Introdución

O cadro de amortización: magnitudes

Modalidades de amortización de préstamos

Desevolvedemento xeral do préstamo

Relacións non directas

Capital vivo ou pendente de amortizar: reserva matemática

Préstamos con carencia

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

OBXECTIVOS

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. Introducción
2. O cadro de amortización: magnitudes
3. Modalidades de amortización de préstamos
 - 3.1 Sistema Italiano, de cotas decrecentes ou de cotas de amortización constantes
 - 3.2 Sistema francés ou de cotas constantes
 - 3.3 Sistema americano
4. Desenvolvemento xeral dun préstamo
5. Relacións non directas
 - 5.1 Introducción
 - 5.2 Sistema italiano
 - 5.3 Sistema francés: relacións non directas
6. Capital vivo ou pendente de amortizar: reserva matemática
7. Préstamos con carencia
 - 7.1 Carencia total
 - 7.2 Carencia parcial

ACTIVIDADES PROPOSTAS

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

BIBLIOGRAFÍA

PRESENTACIÓN

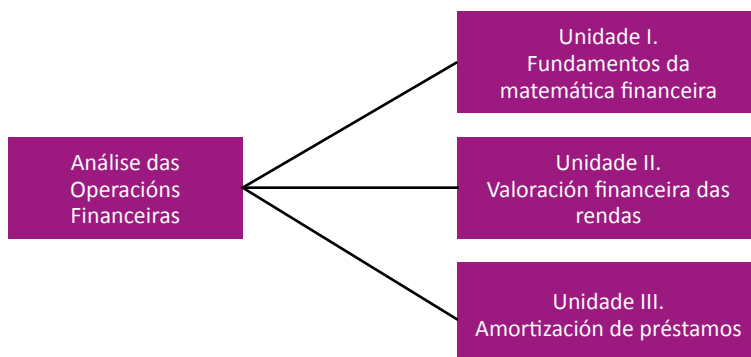
A unidade didáctica “Amortización de préstamos” pertence á materia “Análise das Operacións Financeiras”, correspondente ao segundo curso do Grao en Administración e Dirección de Empresas. Segundo o plan de estudos da titulación (BOE n.º 56, de 5 marzo de 2010), dita materia ten carácter obrigatorio. A súa carga lectiva é de 6 créditos ECTS e impártase no primeiro cuadrimestre.

A materia de “Análise das Operacións Financeiras” ten como finalidade proporcionar aos alumnos os conceptos e principios básicos da matemática financeira e relacionalos co estudo e análise financeira dos diversos produtos e operacións que existen actualmente no mercado.

Os contidos desta materia desempeñan un papel fundamental na titulación do Grao en Administración e Dirección de Empresas. Trátase do primeiro contacto que teñen os alumnos co mundo financeiro, é unha materia que serve como base para as materias que se estudan en cursos posteriores. Complementábase coas materias “Dirección Financeira I” e “Dirección Financeira II”, de terceiro e cuarto curso respectivamente. Ese último ano de carreira, os alumnos tamén poderán escoller como materias optativas “Estratexia e Xestión Financeira”, “Xestión Financeira Internacional”, “Mercados e Institucións Financeiras” e “Investimentos Financeiros”. Estas dúas últimas pertencen a Finanzas de Mercado, e xunto coas outras materias optativas, que pertencen a Finanzas da Empresa, permiten profundar na temática máis importante da área de Finanzas.

A programación docente da materia “Análise das Operacións Financeiras” está formada por tres unidades didácticas, como se indica na Figura 1. Aquí preséntase a terceira unidade didáctica, na que se define o que é un préstamo, como se desenvolve, as diferentes modalidades de amortización de préstamos e como se amortizan. Os contidos desta unidade didáctica impartiranse en 4 horas expositivas e 7,5 horas interactivas

Figura 1. Programación docente da materia Análise das Operacións Financeiras



Fonte: Elaboración propia

A primeira unidade didáctica desta materia é unha primeira toma de contacto cos fundamentos da matemática financeira. Nela introdúcense conceptos básicos como capital financeiro, as operacións financeiras, capitais equivalentes, tantos equivalentes ou reserva financeira dunha operación. A segunda, céntrase na valoración financeira das rendas, comezando cunha definición seguido dunha clasificación e valoración dos diferentes tipos de rendas.

OBXECTIVOS

A materia Análise das Operacións Financeiras, impartida o primerio cuadrimestre do segundo curso do Grao en Administración e Dirección de Empresas, constitúe a primeira aproximación ao mundo financeiro. Deste modo, os obxectivos da materia son os seguintes:

- Obxectivo xeral 1: Proporcionar aos alumnos os conceptos e principios básicos da matemática financeira.
- Obxectivo xeral 2: Relacionar os conceptos co estudo e análise financeira dos diversos produtos e operacións que existen actualmente no mercado.
- Obxectivo xeral 3: Xestionar as leis financeiras convencionalmente utilizadas nas transaccións financeiras.

Especificamente, os obxectivos referentes a esta unidade son:

- Obxectivo 1: definir que é un préstamo.
- Obxectivo 2: realizar táboas de amortización de préstamos segundo diferentes sistemas de amortización e entender a relación entre as súas variábeis.
- Obxectivo 3: Expresar problemas financeiros manexando vocabulario específico.

As competencias básicas da titulación ás que contribúe a materia son as seguintes:

- CB1 Que os estudantes demostren posuír e comprender coñecementos nunha área de estudo que parte da base da educación secundaria xeral, e acostuma a atoparse a un nivel que, se ben se apoia en libros de texto avanzados, inclúe tamén algúns aspectos que implican coñecementos procedentes da vangarda do seu campo de estudo.
- CB2 Que os estudantes saiban aplicar os seus coñecementos ao seu traballo ou vocación dunha forma profesional e posúan as competencias que adoitan demostrarse por medio da elaboración e defensa de argumentos e a resolución de problemas dentro da súa área de estudo.
- CB3 Que os estudantes teñan a capacidade de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro da súa área de estudo) para emitiren xuízos que inclúan unha reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica ou ética.
- CB4 Que os estudantes poidan transmitir información, ideas, problemas e solucións a un público tanto especializado como non especializado.

- CB5 Que os estudantes teñan desenvolvido aquelas habilidades de aprendizaxe necesarias para emprenderen estudos posteriores cun alto grao de autonomía.

Pola súa banda, as competencias transversais desta materia son as seguintes:

- CT1 Análise e síntese.
- CT6 Resolución de problemas.
- CT7 Toma de decisións.
- CT8 Razoamento crítico.
- CT9 Autonomía na aprendizaxe.
- CT10 Traballo en equipo.
- CT18 Iniciativa e espírito emprendedor.
- CT21 Xestión de proxectos.

Tamén, as competencias específicas

- C1 Elementos básicos de álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, optimización matemática e matemáticas das operacións financeiras.
- C3 Elementos básicos de matemáticas das operacións financeiras.
- D6 Identificar as fontes de información económica relevante e o seu contido.
- D8 Derivar dos datos información relevante imposible de recoñecer por non profesionais.
- D10 Aplicar á análise dos problemas criterios profesionais baseados no manexo de instrumentos técnicos.
- D11 Comunicarse con fluidez na súa contorna e traballar en equipo.

Esta unidade didáctica introduce o alumnado á amortización préstamos, presentando o concepto deste produto financeiro e as diferentes modalidades de amortización. Especificamente afronta as competencias básicas **CB3**, **CB4** e **CB5**; as transversais, **CT1**, **CT6**, **CT7**, **CT8** e as específicas **C1**, **C3**, **D8** e **D10**.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Segundo o modelo do Espazo Europeo de Educación Superior, para o ensino da materia combinaranse as clases expositivas coas interactivas, sendo complementadas coas titorías.

As clases expositivas constitúen necesariamente o eixe central para o desenvolvemento do programa docente da materia. Ao longo destas sesións, avanza no coñecemento dos conceptos teóricos á vez que se intercalan con situación reais, facilitando para iso material de apoio. En todo caso, as explicacións do profesorado débense acompañar coa participación activa do alumnado, mediante intervencións que fomenten o seu papel principal no proceso de aprendizaxe. O método afirmativo, tanto expositivo como demostrativo, combinarase co método de elaboración interrogativo.

O programa desenvolvido nas clases expositivas coordínase coas sesións interactivas, que permiten analizar cun maior detalle os contidos mostrados previamente. Nestas sesións, o alumnado poderá reflexionar sobre estes contidos a través de casos prácticos seleccionados polo docente. Os conceptos teóricos levaranse á práctica resolvendo exercicios e casos nos que os alumnos terán que manifestar o seu propio criterio. As clases interactivas desta unidade didáctica serán nas aulas de informática co obxectivo de que os alumnos utilicen a folla de cálculo (Excel) e resolvan os exercicios dende un novo enfoque.

Por outra banda, o alumnado contará co apoio e orientación do profesorado, tanto para a realización das distintas actividades como para calquera outra consulta ou dúbida relacionada coa materia. Neste sentido, as titorías son un sistema pedagóxico complementario destinado a facilitar a comunicación e o intercambio de opinión entre o profesorado e o alumnado. O seu obxectivo esencial é constituírse nunha continuación das clases, permitindo resolver as dúbidas que non quedasen suficientemente clarificadas na clase, e sobre todo, guiar o alumnado.

O Campus Virtual desempeñará a función de complemento docente ás sesións presenciais, así como un instrumento de titorización e de intercambio de ideas. Nesta plataforma, ademais de contar co material empregado nas clases expositivas e a descrición das tarefas, o alumnado terá a súa disposición material complementario, ligazóns de interese ou información relevante.

OS CONTIDOS BÁSICOS

Esta unidade didáctica define que é un préstamo, o proceso de amortización de préstamos, explica o cadro de amortización, analiza o funcionamento de tres sistemas de amortización e identifica as principais relacións que existen entre estes sistemas, ademais de explicar os préstamos con carencia.

1. Introducción

Os préstamos son operacións financeiras mediante as cales unha persoa, chamada prestamista, comprométese a entregar a outra persoa, chamada prestatario, nun determinado momento, momento 0, certo capital (C_0 , 0), que o prestatario comprométese a reembolsar nun período de tempo, xunto cos seus xuros.

Estas operacións poden suceder de varias maneiras:

- 1) O capital prestado devólvese cos xuros acumulados ao final da vida do préstamo. Para calcular o importe total que hai que devolver ao final da vida do préstamo basta con aplicar a lei de capitalización composta:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

- 2) Páganse os xuros ao final de cada período, devolvendo ao final os xuros correspondentes máis o principal. Isto coñécese como **sistema de amortización americano**.

- 3) O capital prestado reintégrase mediante unha renda que cobre capital e xuros no tempo sinalado no contrato. Os capitais da contraprestación $(\alpha_1, t_1), (\alpha_2, t_2) \dots (\alpha_n, t_n)$, denomínanse **termos amortizativos**. Teñen como misión aboar os xuros que se forman na operación e devolver o principal da débeda. Esta modalidade de devolución de préstamos fai referencia a dous sistemas de amortización, **sistema de amortización francés ou de cota constante** e o **sistema de amortización italiano ou de cota decrecente**.

2. O cadro de amortización: magnitudes

O cadro de amortización dun préstamo representábase da seguinte maneira:

Táboa 1. Cadro de amortización dun préstamo

Período	α_k	I_k	A_k	C_k	M_k
0				C_0	0
1					
2					
s					
n				0	C_0

En primeiro lugar, necesitamos saber a canto ascende a suma prestada polo prestamista no momento inicial t_0 . A esta cantidade, que chamaremos **capital prestado** na orixe, **nominal ou importe do préstamo**, denotarámola C_0 . Tamén debemos coñecer a cantidade que paga en cada período o prestatario ao prestamista para devolver o préstamo. A esa cantidade, que denominamos **termo amortizativo** ou **cota**, representarámola por α_k . Se os períodos son anuais chamaremos anualidade a α_k . Cada termo amortizativo α_k incluíra unha parte destinada a pago de **xuros** (I_k) e outra, a sobranse, a devolución de principal (A_k), chamada **cota de amortización**.

Estes dous conceptos pódense definir da seguinte maneira. Os xuros de cada período son o resultado de multiplicar o tipo de xuro periodal polo capital vivo que tiñamos ao principio do período (ou a finais do período anterior). Por outro lado, a cota de amortización no período k é a diferenza entre o principal que debiamos a principio de período e o principal que debemos ao principio do período seguinte $k+1$.

Ademais, tanto ao prestamista como ao prestatario interésalles saber a canto ascende a **débeda pendente** ou **capital vivo** tras o pago dun termo amortizativo calquera. O capital vivo representámolo por C_k . Por último, é interesante coñecer

a canto ascende o capital xa devolto polo prestatario ou **capital amortizado**. A esta magnitude denotarémola M_k .

En resumo, o cadro de amortización inclúe as seguintes variables e as seguintes relacións:

Táboa 2. Variables do cadro de amortización dun préstamo

Variable	Definición
C_0	Capital prestado na orixe
α_k	Contía do termo amortizativo que vence ao final do período k $\alpha_k = I_k + A_k$
I_k	Cantidade que se aboa por xuros no período k, ou cota de xuros xerados polo capital C_{k-1} $I_k = C_{k-1} \cdot i$ $I_k = \alpha_k - A_k$
A_k	Cota de amortización do período k $A_k = \alpha_k - I_k$ $C_k = C_{k-1} - A_k$
C_k	Capital pendente de amortizar ou débeda pendente a principios do período $k+1$ ou a finais do k tras pagar o termo α_k
M_k	Contía do capital amortizado nos k primeiros períodos $C_0 + 0 = C_0$ $C_1 + M_1 = C_0$... $0 + M_n = C_0$

3. Modalidades de amortización de préstamos

Neste apartado vanse analizar tres dos métodos máis comúns á hora de amortizar un préstamo: o método italiano, o método francés e o método americano.

3.1 Sistema Italiano, de cotas decrecentes ou de cotas de amortización constantes

Este sistema caracterízase porque a cota de amortización é constante, é dicir, todos os anos devólvese a mesma cantidade de principal, que se obtén de dividir o importe do préstamo entre a súa duración.

$$A = \frac{C_0}{n} \rightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_s = \dots = A = cte.$$

Isto lévanos a afirmar que, se cada ano a débeda diminúe (o que implica pagar cada vez menos xuros) e a cota de amortización mantense constante, a cota tamén diminuirá. Deste xeito, neste sistema cúmprense as seguintes relacións:

$$\begin{aligned} I_k &= C_{k-1} \cdot i \\ \alpha_k &= A + I_k \\ C_k &= C_{k-1} - A_k \\ M_k &= M_{k-1} + A \end{aligned}$$

Por unha banda, o total amortizado do primeiro período (M_1) será igual ao que se amortiza ese ano (A), mentres que o total amortizado do segundo período será igual á suma do amortizado os dous primeiros períodos ($A+A$), ou o que é o mesmo, $2A$.

Doutra banda, a débeda pendente de amortizar do primeiro período (C_1) será igual á débeda anterior menos o principal amortizado ese período (A), mentres que o capital vivo do segundo período será igual á diferenza entre o capital inicial e a cota de amortización dos dous primeiros períodos.

Táboa 3. Relacións do sistema italiano

$M_1 = A$	$C_1 = C_0 - A$
$M_2 = A + A = 2A$	$C_2 = C_0 - 2A$
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
$M_k = k \cdot A$	$C_k = C_0 - kA$

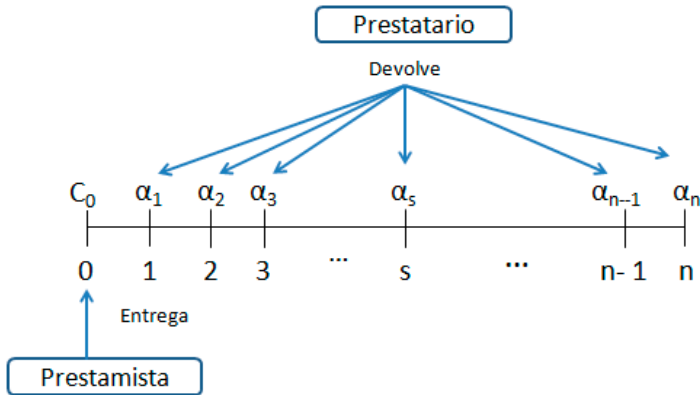
3.2 Sistema francés ou de cotas constantes

Este sistema caracterízase por que a cota é constante, é dicir, todos os anos devólvese a mesma cantidade.

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{s=1}^n \alpha V^s = \alpha \partial_{n-i} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \dots = \alpha_z = \dots = \alpha_n = \alpha = cte. \end{aligned}$$

Neste apartado é necesario facer mención ao **principio de equivalencia financeira**, representado na figura 2.

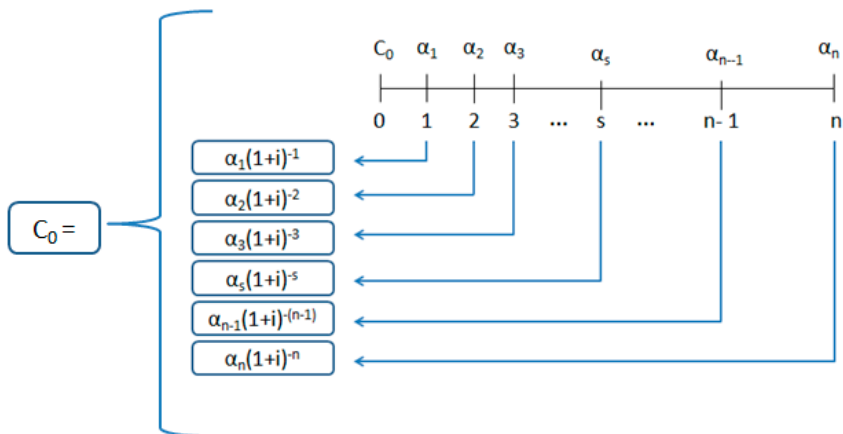
Figura 2. Principio de equivalencia financeira



Fonte: Elaboración propia

Posto que a amortización dun préstamo é unha operación financeira, ten que cumprir o principio de equivalencia financeira. Isto significa que as cantidades entregadas por acredor (prestamista) e debedor (prestatario) deben ser equivalentes de acordo cunha determinada lei financeira. Se representamos graficamente o sistema de amortización francés observamos o seguinte:

Figura 3. Representación gráfica del sistema de amortización francés



Fonte: Elaboración propia

O capital inicial é o resultado de descontar cada un dos termos os períodos necesarios para chegar ata o momento inicial.

$$C_0 = \alpha(1+i)^{-1} + \alpha(1+i)^{-2} + \dots + \alpha(1+i)^{-n}$$

Se sacamos factor común e operamos nesa ecuación, podemos concluír que o capital inicial será igual á seguinte expresión:

$$C_0 = \alpha \partial_{n-i}$$

O que implica que, se despexamos α podemos calcular o termo dividindo o capital vivo no momento inicial entre o valor actual da renda unitaria.

$$\alpha = \frac{C_0}{\partial_{n-i}}$$

A figura 3 lémbra-nos a un gráfico da Unidade didáctica II. E é que, o que en préstamo coñecemos como capital vivo (C_0), coincide co que en rendas denominamos valor actual. Polo que o sistema de amortización francés funciona como unha renda constante.

3.3 Sistema americano

Este sistema caracterízase por que o prestatario só paga os xuros correspondentes a cada período e, no último, devolve xunto cos xuros deste, a totalidade do principal. Por tanto, danse as seguintes relacións:

Táboa 4. Relacións do sistema americano

Momento 0 a n-1	Momento n
$I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_s = \dots$	$= \dots = I_n = C_0 \cdot i$
$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_s = \dots = A_{n-1} = 0$	$A_n = C_0$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_s = \dots = \alpha_{n-1} = I = C_0 \cdot i = cte$	$\alpha_n = C_0 \cdot i + C_0$
$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_s = \dots = C_{n-1} = C_0$	$C_n = 0$
$M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_s = \dots = M_{n-1} = 0$	$M_n = C_0$

4. Desenvolvemento xeral dun préstamo

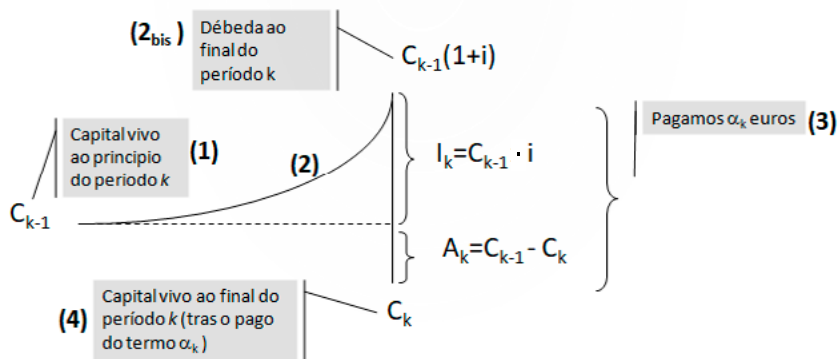
O funcionamento dun préstamo é un proceso que sucede seguindo unha serie de pasos. Co comentado anteriormente, pódese afirmar que o termo amortizativo que

se paga nun ano k calquera é igual á diferenza entre o capital vivo a principios de período capitalizado un período e o capital vivo que teremos tras aboar o termo α_k .

$$\alpha_k = C_{k-1} \cdot i + C_{k-1} - C_k = C_{k-1}(1 + i) - C_k$$

A operativa que hai detrás desta fórmula explícase a continuación na figura 4.

Figura 4. Desenvolvemento dun préstamo



Fonte: Ximénez Rodríguez, Fernández López e outros (2000)

1. Ao comezar o período k , a nosa débeda ascendía a C_{k-1}
2. A medida que transcorre o tempo a débeda aumenta, pois o paso do tempo xera xuros que se van acumulando ata o final do período
3. Cando o período k chega ao seu fin teremos que facer fronte a un desembolso de α_k euros en concepto de pagamento de xuros e devolución do principal
4. Por tanto tras o pago de α_k a nosa débeda ascenderá a C_k euros

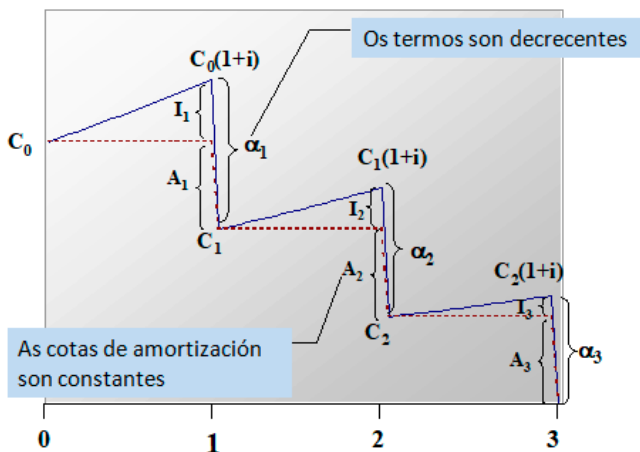
5. Relacións non directas

Neste apartado trataranse as relacións indirectas que xorden nos diferentes sistemas de amortización.

5.1 Introducción

Como se comentou anteriormente, o sistema italiano caracterízase por que as cotas de amortización son constantes e os termos decrecentes. O funcionamento deste tipo de préstamos represéntase Figura 5.

Figura 5. Representación do sistema italiano

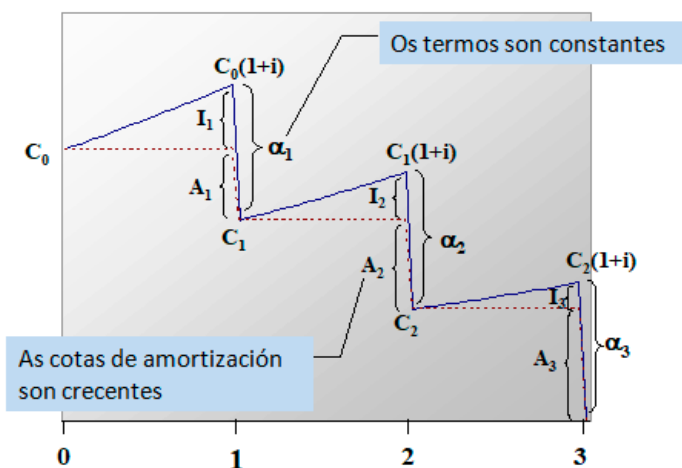


Fonte: Ximénez Rodríguez, Fernández López e outros (2000)

Partimos dun capital vivo C_0 e, a medida que avanza o tempo, esta débeda incrementase debido aos xuros en $C_0(1+i)$. Con todo, ao rematar o primeiro período a débeda diminúe porque se realiza un pago de xuros e de principal. No gráfico pode observarse que os pagos da cota de amortización son constantes, e, ao diminuír a débeda, os xuros decrecen, o que supón que a cota tamén sexa máis pequena cada período.

No relativo ao sistema francés, este caracterízase por que os termos son constantes e as cotas de amortización son crecentes. O funcionamento deste tipo de préstamos represéntase na seguinte Figura 6.

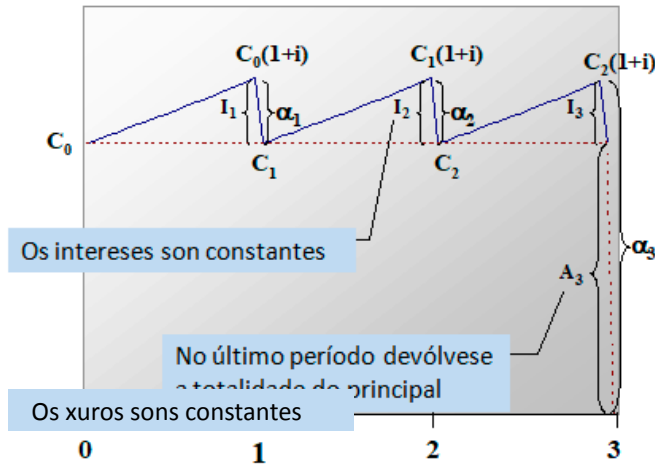
Figura 6. Representación do sistema francés



Fonte: Ximénez Rodríguez, Fernández López e outros (2000)

Finalmente, o sistema americano caracterízase por que os xuros son constantes, sendo o único que se devolve ao longo da vida do préstamo. Finalmente, no último período devólvese a totalidade do principal. O funcionamento deste tipo de préstamos represéntase na Figura 7.

Figura 7. Representación do sistema americano



Fonte: Ximénez Rodríguez, Fernández López e outros (2000)

Se observamos as figuras anteriores detéctase que o pagamento de xuros coincide no primeiro período nos tres casos, con todo, a medida que avanza a vida do préstamo deixa de ser así. Isto débese a que os xuros se calculan sobre o importe do principal, e no momento 0 nos tres sistemas pártese da mesma débeda, o que provoca que no primeiro período o pago de xuros sexa o mesmo independentemente do sistema utilizado para amortizar o préstamo. Con todo, a medida que avanza o préstamo, a débeda irá variando atendendo ás peculiaridades de cada sistema, mentres que no sistema americano non decrece ata o último período, no sistema francés e italiano vaino facendo ao longo da vida do préstamo.

Polo tanto, podemos concluír que os xuros son unha magnitude que decrece tanto no sistema italiano como no francés, pero mantense constante ata o último período no sistema americano.

5.2 Sistema italiano

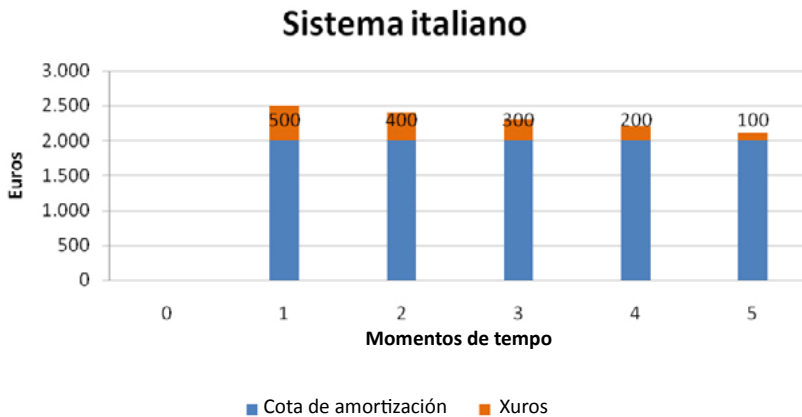
Imos analizar que relacións indirectas se producen no sistema de amortización italiano a través dun exemplo. Supoñamos un préstamo de 10.000 € que ha de amortizarse en 5 períodos a un xuro do 5 %.

Táboa 5. Sistema de amortización italiano

Período	α_k	I_k	A_k	C_k	M_k
0				10.000	0
1	2.500	500	2.000	8.000	2.000
2	2.400	400	2.000	6.000	4.000
3	2.300	300	2.000	4.000	6.000
4	2.200	200	2.000	2.000	8.000
5	2.100	100	2.000	-	10.000

Sabemos que a cota de amortización é constante, pero imos ver que ocorre cos xuros. Como se comentou anteriormente, esta magnitude decrece a medida que se amortiza o préstamo debido ao descenso da débeda, como se observa na Figura 8; a pregunta é, en canto decrece cada período?

Figura 8. Sistema de amortización italiano



Para analizar a evolución dos xuros e coñecer en canto decrecen cada período haberá que restar os xuros dun período k cos xuros do período anterior $k-1$.

$$I_k - I_{k-1} = (C_{k-1} \cdot i) - C_{k-2} \cdot i$$

Se realizamos operacións nesta ecuación obtemos:

$$I_k - I_{k-1} = (C_{k-1} \cdot i) - C_{k-2} \cdot i = (C_{k-1} - C_{k-2}) \cdot i = A \cdot i$$

Por definición, a diferenza entre os capitais vivos de dous períodos consecutivos ($C_{k-1} - C_{k-2}$) é a cota de amortización (A). Isto lévanos a afirmar que os xuros diminúen en cada período na contía $A \cdot i$ (no noso exemplo $2.000 \cdot 0,05 = 100$) Por que nesa cantidade? Os xuros que pagamos son o resultado de multiplicar o capital vivo polo tipo de xuro i e en cada período o capital vivo diminúe na euros. Por tanto, os xuros dun período serán igual aos do período anterior $-A \cdot i$.

$$I_k = I_{k-1} - A \cdot i$$

Ou expresado doutra maneira, os xuros dun período serán igual aos pagados no primeiro momento $-(k-1) A \cdot i$

$$I_k = I_1 - (k-1)A \cdot i$$

Por outra banda, sabemos que a cota de amortización é constante, pero imos ver que ocorre coa cota. Como se comentou anteriormente, esta magnitude decrece, pero a pregunta é, en canto decrece cada período? Para analizar a evolución da cota e coñecer en canto decrece cada período haberá que restar a cota dun período k coa cota do período anterior $k-1$.

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} = A + I_k - A + I_{k+1}$$

Ao realizar esta resta podemos simplificar eliminando A , polo que nos quedaría:

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} = I_k - I_{k+1}$$

As cotas diminúen en cada período na contía $A \cdot i$, isto é, no que diminúen os xuros. Por que nesa cantidade? As cotas son o resultado de sumar A (contía constantes) + I (diminúen en cada ano $A \cdot i$). Por tanto, a cota dun período será igual á do período anterior $-A \cdot i$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} - A \cdot i$$

Ou, expresado doutra maneira, a cota dun período será igual á paga no primeiro momento $-(k-1) A \cdot i$

$$\alpha_k = A + I_k = A + I_1 - (k-1) \cdot A \cdot i = \alpha_1 - (k-1) \cdot A \cdot i$$

5.3 Sistema francés: relacións non directas

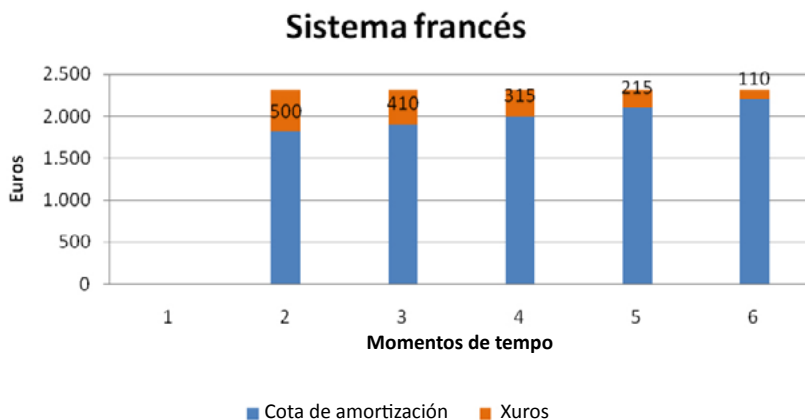
Imos analizar que relacións indirectas se producen no sistema de amortización francés a través dun exemplo. Supoñamos un préstamo de 10.000 € que ha de amortizarse en 5 períodos a un xuro do 5%.

Táboa 6. Sistema de amortización francés

Período	α_k	I_k	A_k	C_k	M_k
0				10.000	0
1	2.309,75	500	1.809,75	8.190,25	1.809,75
2	2.309,75	409,51	1.900,24	6.290,02	3.709,98
3	2.309,75	314,50	1.995,25	4.294,77	5.705,23
4	2.309,75	214,74	2.095,01	2.199,76	7.800,24
5	2.309,75	109,99	2.199,76	0	10.000
De 1 a 2			90,49	-90,49	
De 2 a 3			95,01	-95,01	
De 3 a 4			99,76	-99,76	
De 4 a 5			104,75	-104,75	

Sabemos que a cota é constante, pero imos ver que ocorre coa cota de amortización. Como se comentou anteriormente, esta magnitude aumenta a medida que se amortiza o préstamo debido ao descenso da débeda, como se observa na Figura 9, a pregunta é, en canto crece cada período?

Figura 9 . Sistema de amortización francés



Para analizar a evolución da cota de amortización e coñecer en canto crece cada período, imos ver que ocorre se restamos dous termos amortizativos consecutivos. Haberá que restar o termo dun período k co termo do período $k+1$.

$$\alpha - \alpha = (C_{k-1} - C_k) \cdot i + A_k - A_{k+1} = A_k \cdot i + A_k - A_{k+1}$$

Se despois de A_k neste operación obtemos o seguinte:

$$A_{k+1} = A_k \cdot (1 + i)$$

A cota de amortización nun período é igual á do período anterior multiplicada por $(1+i)$. Por tanto, a cota de amortización nun período é igual á primeira multiplicada por $(1+i)^{k-1}$

$$A_k = A_1 \cdot (1 + i)^{k-1}$$

En definitiva se a cota de amortización é crecente, e a cota constante, que sucederá cos xuros? Diminúen, en canto? No mesmo que aumenta a cota de amortización. Por tanto, os xuros dun período serán igual aos do período anterior $-A_k \cdot i$.

$$I_{k+1} = C_k \cdot i = (C_{k-1} - A_k) \cdot i = C_{k-1} \cdot i - A_k \cdot i = I_k - A_k \cdot i$$

6. Capital vivo ou pendente de amortizar: reserva matemática

Para entender este concepto imos partir dun exemplo. Supoñamos que vostede pide un préstamo de 12.000 € para comprar un coche. Este préstamo vai devolvelo en 10 anos, co que cada mes pagará 100 € máis os xuros correspondentes. Transcorreron 5 anos e vostede quere cambiar de coche polo que desexa cancelar esa operación.

Resulta obvio que na cancelación anticipada de calquera operación financeira que aínda non chegase ao seu fin existirá, polo menos, unha parte que non fixese fronte a todos os seus compromisos de pago. No noso exemplo, o banco (acredor) entregou 12.000 € mentres que vostede (debedor) só lle devolveu ao banco 6.000. Entón, para pechar a operación será necesario que vostede lle entregue ao banco os 6.000 € que aínda lle debe, e desta forma quedará o préstamo saldado. Pois ben, estes 6.000 € que vostede acabaría entregándolle ao banco será o que chamemos reserva matemática.

A reserva matemática ou saldo financeiro é aquel capital que recolle a diferenza entre as cantidades entregadas polas dúas partes que integran unha operación financeira nun determinado momento de tempo.

Para calcular a reserva matemática nun determinado momento do tempo:

1. Cálculase o total das cantidades entregadas por cada unha das partes ata ese momento, ou ben, as cantidades pendentes de entregar por cada unha das partes.
2. Compróbase cal das partes entregou menos, ou ben, réstalle máis por entregar, e ese será o participante que debe realizar o desembolso para saldar a operación.

O capital vivo nun período k calquera é a cantidade que o prestatario ten que entregar ao prestamista para cancelar o contrato. Que nos lembra esta definición?

Evidentemente á reserva matemática dunha operación. Por tanto, o capital vivo nun período k calquera é a reserva matemática da operación de préstamo. Usual-

mente calcúlase como a reserva matemática pola dereita (capitais pendentes de devolver)

$$C_k = \alpha_{k+1}(1+i)^1 + \alpha_{k+2}(1+i)^2 + \dots + \alpha_n(1+i)^{n-k}$$

Operando nesta fórmula chégase ao capital vivo do período k no sistema francés.

$$C_k = \alpha \left(\frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{i} \right)$$

7. Préstamos con carencia

Trátase daqueles préstamos que se conceden e que permiten un período de carencia antes de comezar a devolver o préstamo.

7.1 Carencia total

Un préstamo con carencia total é aquel que, durante un certo número de períodos, exonera ao prestatario do pago dos termos amortizativos correspondentes. É dicir, despois de recibir os fondos, o prestatario goza dun certo período de tempo no que non paga cotas.

Agora ben, isto non significa que o prestamista lle proporcione o diñeiro gratis durante ese tempo, senón que os xuros que se producen acumúlanse, incrementando a débeda.

Un préstamo con carencia total amortízase aplicando a carencia os anos correspondentes, e logo como indique o sistema polo que se ha de amortizar. Para entendela, supoñamos un préstamo de 10.000 €, que ha de amortizarse polo sistema italiano, en 6 anos, dos cales dous dispón de carencia total e a un xuro do 5 %.

- 1) Calcúlase o importe total da débeda a finais do período de carencia (capitalizando)

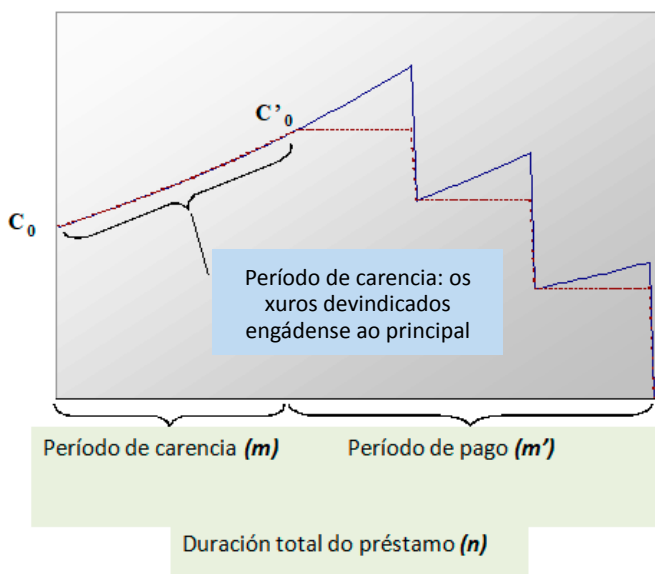
$$C_{0 \text{ finalizada carencia}} = C_0 (1+i)^c (\text{carencia})$$

Táboa 7. Préstamo con carencia total (sistema de amortización italiano)

Período	α_k	I_k	A_k	C_k	M_k
0				10.000	0
1				10.500	
2				11.025	
3	3.307,50	551,25	2.756,25	8.628,75	2.765,25
4	3.169,69	413,44	2.756,25	5.512,50	5.512,50
5	3.301,88	275,65	2.756,25	2.756,25	8.268,75
6	2.894,06	137,81	2.756,25	0	11.025

- 2) Amortízase C_0 finalizada a carencia (o importe total da débeda a finais do período de carencia) segundo o sistema correspondente

Figura 10. Representación dun préstamo con carencia total



Fonte: Ximénez Rodríguez, Fernández López e outros (2000)

7.2 Carencia parcial

Un préstamo con carencia na cota de amortización é aquel que, durante un certo número de períodos, exonera ao prestatario do pago das cotas de amortización pero non das cotas de xuro. É dicir, despois de recibir os fondos, o prestatario goza dun certo período de tempo no que paga as cotas de xuro que lle corresponde pero non paga cotas de amortización. Por tanto, o préstamo funciona como un préstamo americano durante a carencia e cando esta expira amortízase polo método que ambas as partes acordasen.

Para entendelo, supoñamos un préstamo de 10.000 €, que ha de amortizarse polo sistema italiano, en 6 anos, dos cales dous dispón de carencia total e a un xuro do 5%.

- 1) Durante o período de carencia páganse os xuros correspondentes

$$I = C_0 \cdot i$$

Como consecuencia, o capital debido ao finalizar a carencia coincide co capital orixinalmente prestado

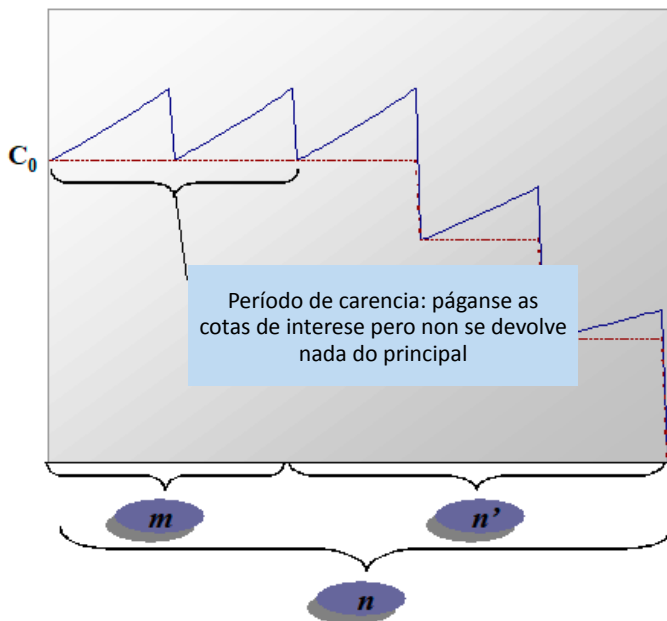
$$C_{0 \text{ finalizada carencia}} = C_0$$

Táboa 7. Préstamo con carencia parcial (sistema de amortización italiano)

Período	α_k	I_k	A_k	C_k	M_k
0				10.000	0
1	500	500		10.000	
2	500	500		10.000	
3	3.000	500	2.500	7.500	2.500
4	2.875	375	2.500	5.000	5.000
5	2.750	250	2.500	2.500	7.500
6	2.625	125	2.500	0	10.000

- 2) Amortizar C_0 (o importe total da débeda a finais do período de carencia) segundo o sistema correspondente

Figura 11. Representación dun préstamo con carencia parcial



Fonte: Ximénez Rodríguez, Fernández López e outros (2000)

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Co obxectivo de afondar e poñer en práctica os contidos teóricos amosados nas sesións expositivas, dedícanse tres sesións interactivas para esta unidade didáctica. Nestas sesións interactivas os alumnos recibirán un boletín de exercicios de préstamos e terán que resolver os problemas na folla de cálculo Excel. Ademais, unha vez realizados todos os exercicios realizarase un *kahoot* grupal para comprobar que os conceptos básicos foron asimilados.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación desta unidade didáctica levarase a cabo segundo o sistema de avaliación continua en catro fases:

- En primeiro lugar, ao inicio da unidade didáctica realizaranse unha serie de preguntas para avaliar o nivel de coñecementos previo do alumnado e a súa homoxeneidade. O obxectivo principal é avaliar o nivel de coñecemento do alumnado respecto aos aspectos que se van tratar ao longo da unidade

didáctica, permitindo así axustar as explicacións e axuda pedagóxica ás necesidades do alumnado e aos seus coñecementos;

- En segundo lugar, empregarase una avaliación procesual ao longo de toda a unidade didáctica. Para isto, levaranse a cabo comentarios e preguntas sobre os contidos xa presentados, co obxectivo de comprobar a comprensión dos contidos expostos e aclarar e reforzar aqueles que non quedasen claros, facilitando tamén a relación dos novos contidos cos xa vistos anteriormente
- Ao rematar a unidade didáctica farase unha proba práctica na folia de cálculo para comprobar que os alumnos interiorizaron os conceptos e saben traballar coas táboas de amortización de préstamos. Esta proba será un punto da nota final da materia. Para avaliar esta proba, empregarase unha rúbrica que estará a disposición do alumnado.
- Por último, a avaliación final realízase una vez rematada a materia, para valorar o grao de cumprimento dos obxectivos e de adquisición de coñecementos e capacidades por parte do alumnado.

No sistema de avaliación continua, a cualificación é o resultado de sumar a puntuación obtida nas preguntas do exame referidas a esta unidade e a valoración obtida nas actividades interactivas. Na valoración global da materia, é importante destacar que o peso do exame final representa o 60 % da cualificación e as actividades interactivas o 40 %. Dentro desta última porcentaxe, o 30 % corresponde a probas de avaliación cotinua e o 10 % á participación activa do alumnado na aula.

BIBLIOGRAFÍA

A continuación, preséntase un conxunto de referencias bibliográficas que poden servir para a preparación dos contidos desta unidade didáctica. Esta listaxe poderá ser ampliada e adaptada ao longo do curso en base ás necesidades específicas do alumnado.

APARICIO ROZAS, A., IBARRA ALFARAZ, J.A., e MONROBEL ALCÁNTARA, J.R. (2017): Cálculo financiero. Teoría y ejercicios, 3ª edición revisada. Ediciones Paraninfo S.A.

BAQUERO, M.J., e MAESTRO, M.L. (2003): Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras, Thomson.

BROWN, R.L., KOPP, S., e ZIMA, P. (2011): Mathematics of Finance, 7th Edición, McGraw-Hill.

FEDERER VAALER, I.J., e DANIEL, J.W. (2009): Mathematical Interest Theory, Mathematical Association of America, 2ª edición.

FUENTE SÁNCHEZ, D. de la, e HERNÁNDEZ SOLÍS, M. (2015): Ejercicios de Matemática Financiera, Editorial Universitaria Ramón Areces.

GONZÁLEZ VELASCO, Mª del Carmen (2001): Análisis de las operaciones financieras: 150 supuestos resueltos, Civitas.

- LÓPEZ CORRALES, F., MAREQUE ÁLVAREZ-SANTULLANO, M., e ANIDO CRESPO, M. (2018) Matemáticas financieras básicas, 2ª edición, Garceta Grupo editorial.
- MINER ARANZÁBAL, J. (2003): Curso de Matemática Financiera, McGraw-Hill.
- NAVARRO ARRIBAS, E. (2019): Matemáticas de las operaciones financieras. Pirámide.
- NAVARRO, E., e NAVE, J.M. (2001): Fundamentos de matemáticas financieras, Antoni Bosch.
- SUÁREZ, J.L. (2001): Análisis de las operaciones financieras, Civitas.
- VILLALOBOS, J.L. (2001): Matemáticas financieras, 2ª edición, Prentice Hall.
- XIMÉNEZ RODRÍGUEZ, S., FERNÁNDEZ LÓPEZ, S., e outros (2000): Análisis y cálculo de las operaciones financieras, Tórculo, Santiago.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA