SANDRO CAEIRO OLIVEIRA

MÉTRICAS CRÍTICAS PARA FUNCIONAIS CUADRÁTICOS DA CURVATURA

153
2023

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SANDRO CAEIRO OLIVEIRA

MÉTRICAS CRÍTICAS PARA FUNCIONAIS CUADRÁTICOS DA CURVATURA

153

2023

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TESE DE DOUTORAMENTO

Métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura

Sandro Caeiro Oliveira

ESCOLA DE DOUTORAMENTO INTERNACIONAL
DA UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA DE DOUTORAMENTO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

ANO 2022

A presente tese foi dirixida por Eduardo García Río e Miguel Brozos Vázquez. Defendida na Universidade de Santiago de Compostela o 19 de decembro de 2022.

Os resultados presentados nesta memoria foron obtidos grazas ao financiamento da Consellería de Cultura, Educación e Ordenación Universitaria da Xunta de Galicia, na modalidade de Grupo de Referencia Competitiva GRC2013-045, e coas axudas dos proxectos MTM2016-75897-P, ED431F2017/03 e ED431F 2020/04 (incluído cofinanciamento do FEDER).

Índice xeral

Agradecementos

Estes foron catro anos bastante completos. Intentarei recopilar nos seguintes parágrafos a todos aqueles que fixeron que este período fose tan bo.

Gustaríame agradecer aos meus directores de tese, Miguel e Eduardo, non só o seu labor de dirección, senón tamén a súa forma de traballar comigo. Ademais de alumno, fixéronme sentir parte dun equipo. Oxalá a experiencia de todos os doutorandos fose así.

Quero dar grazas tamén a miña nai e meu irmán polo apoio a pesar de non teren moi claro que estaba a facer (e con razón).

Tamén a Bea e María, compañeiras de piso, de aventuras, de fatigas e de dramas. Xa deberían ser consideradas irmás (en especial Bea, que me leva aturando un terzo da miña vida).

Por suposto, tamén á charcutería, cos seus integrantes pasados e presentes. Rodri, Olga, Tomás, Diego, Juanma e Sergio, xunto coas dúas xa mencionadas, sen eles non tería tantos bos recordos destes catro anos. Cafés, cañas, congresos, escapadas ao río, noites de xogos... Volvería empezar o doutoramento sen dubidalo.

Introdución

Un obxectivo fundamental no campo da xeometría é a busca de obxectos óptimos con respecto a unha certa propiedade ou característica. A miúdo ditos obxectos preséntanse en estreita relación con certos funcionais xeométricos cuxos valores críticos permiten detectar os comportamentos buscados. A modo de exemplo, as xeodésicas sobre unha variedade riemanniana identifícanse como os puntos críticos do funcional de lonxitude sobre o espazo de curvas diferenciables a cachos unindo dous puntos dados. Considerando aplicacións entre variedades e a súa segunda forma fundamental como medida da súa desviación respecto do carácter totalmente xeodésico da aplicación, as aplicacións harmónicas xorden como aquelas cuxa enerxía é crítica. Se (M, g) é unha variedade riemanniana orientable e $dvol_g$ é o elemento de volume riemanniano, as métricas críticas para o funcional de volume (cando se considera dito funcional sobre variacións normais para subvariedades en $\mathbb{R}^m$) son precisamente as subvariedades minimais. Ditas subvariedades correspóndense con aquelas nas que a masa está máis uniformemente distribuída.

Dado que a curvatura escalar representa o invariante escalar máis sinxelo dunha estrutura pseudo-riemanniana, a busca de variedades onde dita curvatura (que xeneraliza de forma natural a curvatura de Gauss dunha superficie) se distribúe da forma máis uniforme posible deu lugar ao estudo do funcional de Hilbert-Einstein, ou funcional da curvatura escalar total. Dado que o funcional de Hilbert-Einstein non é invariante por reescalamentos da métrica, con frecuencia introdúcese un factor que o compensa, ou, alternativamente,restrínxese o funcional a variacións de métricas que manteñan o volume da variedade constante. Neste caso as métricas Einstein correspóndense cos puntos críticos de dito funcional. As métricas Einstein desempeñan un papel central non só en xeometría senón tamén en física, onde o funcional da curvatura escalar total é fundamental na formulación da relatividade xeral.

Xeneralizando a curvatura escalar, os invariantes escalares cuadráticos da curvatura dunha variedade pseudo-riemanniana constitúen un espazo vectorial de dimensión catro para o que $\{\tau^2, \|\rho\|^2, \|R\|^2, \Delta\tau\}$ representa unha base. Asociado aos elementos da mesma xorden de xeito natural os funcionais cuadráticos da curvatura que veñen dados polas normas L^2 da curvatura escalar, do tensor de Ricci e do tensor de curvatura. En xeral, un funcional cuadrático está dado por

$$g \mapsto \int_M \{a\tau^2 + b\|\rho\|^2 + c\|R\|^2\} dovl_g, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

É importante sinalar que algúns funcionais relevantes (como a norma L^2 do tensor de Weyl, o funcional de volume de esferas xeodésicas ou os funcionais determinados polo tensor de Schouten) se obteñen como combinacións lineares dos tres funcionais anteriores. Ademais, estes funcionais son a base sobre a que se constrúen distintas xeneralizacións da relatividade xeral como a nova gravitación masiva [13, 14]. A busca de métricas críticas para distintos funcionais cuadráticos foi unha constante na investigación matemática desde o traballo de Berger [11] (ver tamén [4, 5, 7, 45, 80], así como [46] e as súas referencias).

Noutras situacións, os funcionais cuadráticos considerados limítanse a variacións con propiedades preestablecidas. Así, o funcional de Calabi [36] consiste na norma L^2 da curvatura escalar restrinxida a métricas nunha clase de Kähler dada. As ecuacións de Euler-Lagrange das súas métricas (denominadas métricas extremais) correspóndense co feito de que o gradiente da curvatura escalar sexa un campo de vectores holomorfo, isto é, un automorfismo infinitesimal da estrutura complexa (ver, por exemplo, [15]). Boyer, Galicki e Simanca consideraron o funcional correspondente para variacións de métricas Sasakianas [16]. O funcional de pinzamento do tensor de Ricci, $g \mapsto \int_M \frac{\tau^2}{\|\rho\|^2} dvol_g$, considerado en [101, 102] é equivalente aos funcionais cuadráticos con enerxía cero no caso homoxéneo. Cómpre indicar que, mentres as métricas críticas descritas por Lauret e Will se obteñen restrinxindo o funcional a variacións por métricas invariantes á esquerda sobre grupos de Lie, as consideradas nesta memoria non son necesariamente homoxéneas. En outras ocasións considéranse as métricas críticas dos funcionais cando estes se restrinxen a variacións na clase conforme ou a variacións nunha clase caracterizadas por propiedades adicionais. Exemplos disto son o funcional de Yamabe [105] redúcese ao funcional de Hilbert-Einstein rescalado, e a conxectura de Besse, que se establece a partir de considerar a variación da curvatura escalar total para métricas de volumen e curvatura escalar constante [15] (para máis información ver, por exemplo, [15, 46]).

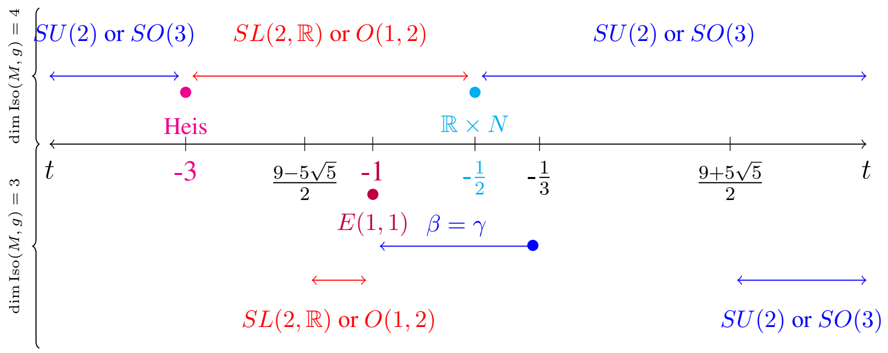
O feito de que o tensor de Weyl se anule en dimensión tres permite amosar que toda métrica Einstein é crítica para calquera funcional cuadrático en dita dimensión. Tamén en dimensión catro toda métrica Einstein é crítica para calquera funcional cuadrático, pero neste caso é consecuencia do Teorema de Chern-Gauss-Bonnet. En dimensións superiores as métricas Einstein son críticas para o funcional determinado pola norma L^2 do tensor de curvatura se e só se a variedade é Einstein e $\check{R}$-Einstein [15]. En consecuencia, o noso traballo centrarase en dimensións baixas $n = 3$ e $n = 4$, onde abordaremos a clasificación das métricas que son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura. Ademais, todo funcional cuadrático da curvatura nestas dimensións é equivalente a un dos seguintes:

$$\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \tau^2 dvol_g, \mathcal{F}_t : g \mapsto \int_M \{\|\rho\|^2 + t\tau^2\} dvol_g, \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

O noso primeiro obxectivo nesta memoria foi a clasificación das métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura sobre variedades cun alto grao de homoxeneidade, o que permite simplificar as ecuacións de Euler-Lagrange correspondentes de xeito que sexan máis tratables. Un segundo obxectivo é analizar a existencia de métricas que, sen seren Einstein, son críticas para todos os funcionais cuadráticos. Mostramos a existencia de tales exemplos no ámbito riemanniano e lorentziano, onde as variedades correspondentes a ondas de Brinkmann desempeñan un papel esencial.

Dunha forma máis precisa, o contido desta memoria estrutúrase como segue. No Capítulo 1 introducimos a notación que utilizaremos ao longo da memoria, así como certas nocións sobre as que se traballará en capítulos posteriores.

A primeira parte da memoria, que inclúe os Capítulos 2, 3 e 4, céntrase no estudo de métricas riemannianas. No Capítulo 2 analizamos a existencia de métricas homoxéneas críticas en dimensión tres. Amosamos que todo funcional cuadrático da curvatura admite unha métrica crítica homoxénea cuxo grupo de isometrías ten dimensión catro. A seguinte táboa recolle todas as posibles métricas homoxéneas que son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura. A única métrica $\mathcal{F}_{-3}$-crítica homoxénea non Einstein correspóndese coa xeometría Nil_3 e realízase sobre o grupo de Heisenberg. Así mesmo, as únicas métricas $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas non Einstein realízanse sobre produtos simétricos $\mathbb{R} \times N^2(c)$. Para o valor $t = -1$ existen métricas $\mathcal{F}_{-1}$-críticas sobre espazos con grupo de isometrías de dimensión catro que se realizan sobre $SL(2, \mathbb{R})$ ou $O(1, 2)$, e métricas $\mathcal{F}_{-1}$-críticas no grupo de Poincaré que se corresponden coa xeometría Sol_3. As métricas $\mathcal{F}_t$-críticas que se sitúan debaixo do eixo t correspóndense con métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie unimodulares e non unimodulares determinados por unha derivación auto-adxunta do grupo abeliano $\mathbb{R}^2$ ($\beta = \gamma$) onde o grupo de isometrías ten dimensión tres.



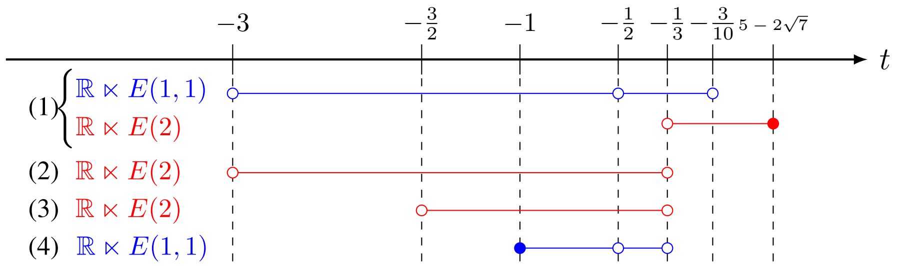
Rango de t para as métricas $\mathcal{F}_t$-críticas en espazos homoxéneos.

Como aplicación do noso resultado obtense que o exemplo de métrica crítica para a norma L^2 do tensor de curvatura ($\mathcal{F}_{-1/4}$-crítica) sobre a esfera $\mathbb{S}^3$ construído por Lamontagne [98] é o único posible. Ademais, amosamos que a compacidade é unha condición esencial para garantir o carácter localmente conformemente chan das métricas $\mathcal{F}_{-3/8}$-críticas con enerxía cero que obtiveron Gursky e Viaclovsky [80]. Así mesmo, estudando a enerxía dos funcionais, mostramos a seguinte relación entre métricas e solitóns de Ricci.

Teorema 2.17. *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana homoxénea de dimensión tres. Entón, (M, g) é un solitón de Ricci se e só se (M, g) é crítica para un funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero.*

O contexto homoxéneo de dimensión catro, tratado no Capítulo 3, é significativamente máis complexo. As ecuacións de Euler-Lagrange correspondentes ás métricas críticas invariantes á esquerda poden formularse en termos dun sistema (xeralmente sobredeterminado) de nove ecuacións polinómicas de seis variables e grao oito. En xeral, a análise de ditos sistemas de ecuacións é inabordable,mais o uso de métodos computacionais para o cálculo de bases de Gröbner permitiu obter as correspondentes solucións. A diferenza dos rangos obtidos para t en dimensión tres, tan só os funcionais $\mathcal{F}_t$ con $t < -\frac{1}{4}$ admiten métricas homoxéneas críticas non simétricas.

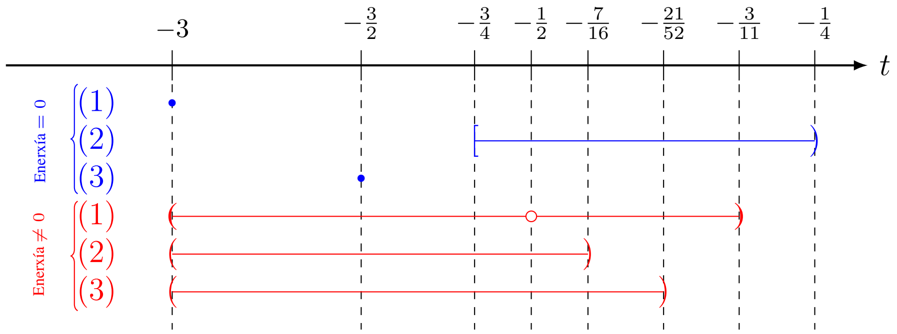
No caso simétrico, os produtos $\mathbb{R} \times N^3(c)$ e $\mathbb{R}^2 \times N^2(c)$ son $\mathcal{F}_t$-críticos para $t = -\frac{1}{3}$ e $t = -\frac{1}{2}$, respectivamente. Os produtos localmente conformemente chans $N^2(c) \times M^2(-c)$ son $\mathcal{F}_t$-críticos para todo valor de $t \in \mathbb{R}$. Calquera outra variedade homoxénea non simétrica correspóndese cunha métrica invariante á esquerda sobre un grupo de Lie. Non existen métricas invariantes á esquerda non simétricas sobre $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ e a única métrica crítica sobre $SU(2) \times \mathbb{R}$ é isométrica ao produto $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ (véxase o Teorema 3.5). As métricas críticas sobre produtos semidirectos dos grupos euclidiano e de Poincaré veñen determinadas polos seguintes valores determinados no Teorema 3.8.



Métricas críticas en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ e $\mathbb{R} \ltimes E(2)$. Os funcionais $\mathcal{F}_t$ que admiten métricas críticas non triviais correspóndense con valores de $t \in (-3, 5 - 2\sqrt{7})$.

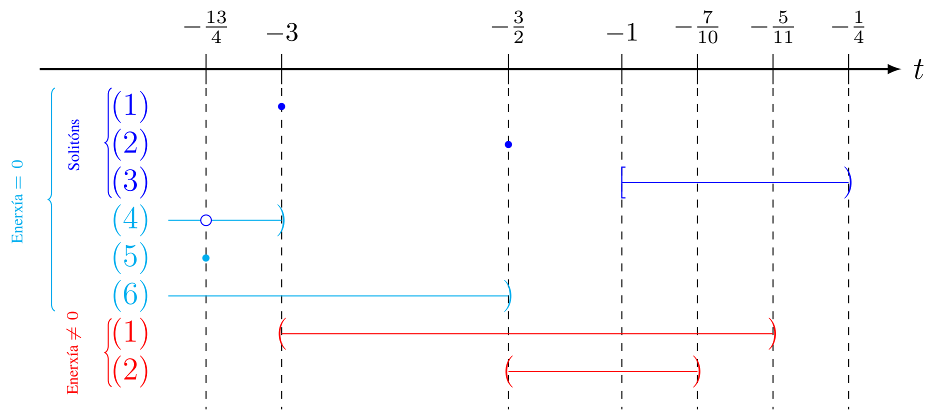
As métricas críticas en $\mathbb{R} \ltimes E(2)$ nunca teñen enerxía cero e as críticas en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ teñen enerxía cero só no caso (4) para $t = -1$.

As métricas $\mathcal{F}_t$-críticas non simétricas que se realizan en produtos semi-directos do grupo de Heisenberg correspóndense, segundo se proba no Teorema 3.12 e na Observación 3.15, cos seguintes valores:



Métricas críticas sobre $\mathbb{R} \ltimes H^3$. Os funcionais $\mathcal{F}_t$ que admiten métricas críticas non triviais correspóndense cos valores de $t \in (-3, -\frac{1}{4})$.

As métricas $\mathcal{F}_t$-críticas non simétricas que se realizan en produtos semi-directos do grupo abeliano $\mathbb{R}^3$ correspóndense, segundo se amosa no Teorema 3.19 e a Observación 3.22, cos seguintes valores:



Métricas críticas sobre $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$. Os funcionais $\mathcal{F}_t$ que admiten métricas críticas non triviais correspóndense cos valores de $t \in (-\infty, -\frac{1}{4})$.

Séguese dos resultados anteriores que unha métrica homoxénea é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún $t \geq -1/4$ (en particular crítica para a norma L^2 do tensor de curvatura) se e só se é Einstein ou homotética ao producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$. As métricas homoxéneas Bach-chás foron clasificadas en [41]. Como consecuencia dos resultados anteriores obtense ditas métricas se realizan en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ (familia (1)), $\mathbb{R} \ltimes H^3$ (familias (1) e (2)), e en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ (familia (3)) con enerxía cero e con enerxía distinta de cero en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ (familias indicadas en vermello).

Motivados polo resultado en dimensión tres, estudamos a relación entre solitóns de Ricci e métricas con enerxía cero tamén en dimensión catro, obtendo o seguinte:

Teorema 3.1. *Unha métrica homoxénea é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero se e só se é homotética a un solitón de Ricci ou a unha métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ determinada por*

$$[e_1, e_4] = e_1 + ce_3, \quad [e_2, e_4] = -(p+1)e_2 + he_3, \quad [e_3, e_4] = -ce_1 - he_2 + pe_3,$$

con respecto a unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$, onde $c^2 + h^2 \neq 0$ e ademais:

(i) Se $c = 0$, entón $p = \kappa - \frac{1}{2}$ para $\kappa > \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $h^2 = \kappa^2 \frac{4\kappa^2+3}{4\kappa^2-3}$. Estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{48\kappa^4-9}{16\kappa^4-9} \in (-\infty, -3)$.

(ii) Se $p = -2$, entón $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9 - 2c^2}$ para $0 < c < \frac{3}{\sqrt{2}}$. Estas métricas son $\mathcal{F}_{-13/4}$-críticas.

(iii) Se $(p+2)ch \neq 0$, entón c e h son as solucións positivas de

$$c^2 = -\frac{(2p+1)(8p^3+15p^2+3p+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}, \qquad h^2 = \frac{(p+1)(p-1)(5p^3+12p^2+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)},$$

para algún $p \neq 0$, con $p \in (-\infty, \zeta_1) \cup (\zeta_2, -1) \cup (\frac{1-\sqrt{21}}{10}, \frac{1+\sqrt{21}}{10})$, onde $\zeta_1 = -2,433\dots$ e $\zeta_2 = -1,697\dots$ son as únicas solucións reais das ecuacións $5p^3 + 12p^2 + 1 = 0$ e $8p^3 + 15p^2 + 3p + 1 = 0$, respectivamente. Estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{30p^4-3p^2-6p-3}{2(p^2+p+1)(5p^2-p-1)} \in (-\infty, -\frac{3}{2})$.

No Capítulo 4 abordamos a existencia de métricas críticas para todos os funcionais cuadráticos. A maiores das métricas Einstein, a métrica produto en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ é crítica para todos os funcionais cuadráticos con curvatura escalar cero. Na sección 4.1 construímos métricas críticas sobre conos con curvatura escalar non constante:

Corolario 4.8. *Un cono non chan $\mathbb{R}^+ \times_r N$ é crítico para todos os funcionais cuadráticos da curvatura se e só se (N, g_N) é unha variedade Einstein de dimensión tres con curvatura seccional constante $c_N = -3$.*

A estrutura subxacente aos conos (produto warped localmente conformemente chan con base de dimensión un) é, en realidade, a estrutura subxacente ás métricas críticas para todos os funcionais con curvatura escalar non constante nun sentido xenérico.

Teorema 4.12. *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión catro cuxa curvatura escalar é unha función propia que non se anula en ningún punto. Entón, (M, g) é crítica para todos os funcionais cuadráticos se e só se é Einstein ou localmente isométrica a un produto warped localmente conformemente chan $\mathbb{R} \times_f N(c)$ cuxa función de deformación $f = e^\sigma$ satisfai*

$$\begin{aligned}\sigma^{(4)}(r) = 2c^2 e^{-4\sigma(r)} + 2c e^{-2\sigma(r)} \left(\sigma'(r)^2 - \sigma''(r)\right) \\ - 3\left(2\sigma''(r)^2 + \sigma'(r)\sigma^{(3)}(r)\right),\end{aligned}$$

A segunda parte da memoria, constituída polos Capítulos 5, 6 e 7, céntrase na análise das métricas lorentzianas en dimensión tres. No Capítulo 5 estudamos ditas métricas baixo condicións de homoxeneidade. De novo, o estudo redúcese aos espazos simétricos e as métricas invariantes á esquerda sobre grupos de Lie. Aquí foi necesaria unha revisión profunda da bibliografía existente xa que existían omisións na descrición de ditas métricas. A diferenza do caso riemanniano, existen espazos homoxéneos non simétricos que son críticos para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. Ditos espazos realízanse nun bo número de casos como ondas de Brinkmann. Outra diferenza co caso riemanniano é a existencia de solitóns de Ricci que non son homotéticos a ningún solitón alxébrico. Para estes últimos amosamos que se corresponden con métricas críticas con enerxía cero e, reciprocamente, que toda métrica homoxénea crítica con enerxía cero é un solitón de Ricci.

No Capítulo 6 analizamos a existencia de métricas críticas sobre variedades curvatura homoxéneas. Dita condición, aínda que permite simplificar as ecuacións de Euler-Lagrange, mantén o carácter diferenciable das mesmas, que resultan nun sistema sobredeterminado de EDPs. Obtemos unha descrición completa de ditas variedades no contexto semi-simétrico, isto é, cando o tensor de curvatura está modelado nun espazo simétrico. A situación en que o operador de Ricci sexa diagonalizable tan só permite métricas $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas e todas elas se realizan sobre ondas de Brinkmann.

Teorema 6.10. *Sexa (M, g) unha variedade lorentziana curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable e que non é homoxénea. Se (M, g) é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura, entón é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica e é unha onda de Brinkmann 1-curvatura homoxénea.*

Ademais, existen coordenadas locais (v,u,x) tales que o tensor métrico é da forma $g = dx^2 + 2dudv + f(v,u,x)du^2$, onde a función de Brinkmann vén dada por

$$f(v,u,x) = \lambda v^2 + v(\alpha(u) + x\beta(u)) + \frac{x^2\beta(u)^2}{4\lambda} + x\delta(u) + \gamma(u)$$

para funcións diferenciables α, β, γ e δ e unha constante $\lambda \neq 0$.

A situación en que o operador de Ricci sexa nilpotente en dous pasos dá lugar a métricas que son $\mathcal{F}_t$-críticas para todos os funcionais. Ditas métricas son espazo-tempos de Kundt.

Teorema 6.18. *Sexa (M,g) unha variedade curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci nilpotente en dous pasos que non é homoxénea. Se (M,g) é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura $\mathcal{F}_t$, entón é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura e é un espazo-tempo de Kundt dexenerado.*

Ademais, existen coordenadas locais (v,u,x) tales que

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + vf_1(u) + f_0(u,x)\right)du^2 - 4\frac{v}{x}dudx,$$

onde $f_1(u)$ é unha función arbitraria e $f_0(u,x)$ é un polinomio de orde catro en x: $f_0(u,x) = \alpha_4(u)x^4 + \alpha_3(u)x^3 + \alpha_2(u)x^2 + \alpha_1(u)x$, con $\alpha_3(u)^2 + \alpha_4(u)^2 \neq 0$.

Utilizando os resultados anteriores foi posible construír novos exemplos en teorías de gravitación masiva, estes atópanse recollidos na sección 6.4.

No Capítulo 7 estudamos a existencia de ondas de Brinkmann que son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura. Mostramos no Teorema 7.1 que as ondas de Brinkmann son $\mathcal{S}$-críticas se e só se a súa curvatura escalar é cero. Para os funcionais $\mathcal{F}_t$ a situación e ben diversa. Se unha onda de Brinkmann é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún t distinto de $-1/2$, $-1/3$ ou $-1/4$, entón a métrica é crítica para todos os funcionais cuadráticos (Teorema 7.3). Os casos excepcionais correspóndense cos funcionais dados pola norma L^2 do tensor de Ricci sen traza cando $t = -1/3$ e a norma L^2 do tensor de curvatura cando $t = -1/4$. O caso $t = -1/2$ é un valor distinguido polo feito de que $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = 0$ para calquera onda de Brinkmann de dimensión tres. Analizamos por separado os tres funcionais anteriores.

As ondas de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/3}$-críticas están determinadas pola súa curvatura escalar, como se amosa no Teorema 7.5. A existencia de ondas de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/4}$-críticas está estreitamente relacionada coas funcións elípticas de Weierstrass, mostramos no Teorema 7.6 que tales funcións permiten parametrizar ditas variedades. Finalmente as ondas críticas correspondentes a $t = -1/2$ analízanse na sección 7.3.3, onde usamos o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya para probar o seguinte resultado:

Teorema 7.9. *Sexa (Σ, g_Σ) unha variedade de Brinkmann analítica de dimensión dous. Entón, esta pode ser estendida a unha onda de Brinkmann analítica $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica de dimensión tres (M,g) tal que (Σ, g_Σ) é unha subvariedade totalmente xeodésica de (M,g).*

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Xeometría pseudo-riemanniana

Nesta sección introducimos a notación e as nocións básicas de xeometría pseudo-riemanniana seguidas ao longo do traballo.

Unha métrica pseudo-riemanniana g nunha variedade diferenciable M de dimensión n é un campo de tensores g de tipo $(0,2)$ simétrico e non dexenerado. Chamaremos variedade pseudo-riemanniana ao par (M,g). Esta tese centrarase no estudo de certos casos especiais de variedades pseudo-riemannianas. Se o tensor g é definido positivo, dise que (M,g) é unha *variedade riemanniana*. (M,g) é unha variedade lorentziana se a métrica g ten sinatura $(1,n-1)$, é dicir, se o maior subespazo onde a restrición da métrica é definida negativa ten dimensión un.

Nas variedades pseudo-riemannianas poden existir vectores con norma positiva, cero ou negativa. Deste xeito, dise que un vector $v \in T_pM$ é *espacial* se $g_p(v,v) > 0$, *nulo* ou *luminoso* se $g_p(v,v) = 0$, $v \neq 0$, e *temporal* se $g_p(v,v) < 0$.

Dada unha variedade pseudo-riemanniana (M,g), a Fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

con $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, determina unha única conexión linear ∇ libre de torsión de xeito que a métrica é paralela respecto dela. Esta conexión ∇ denomínase *conexión de Levi-Civita*.

Fixadas unhas coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$ en M, denotamos con ∂_{x^i} os campos de vectores coordenados e con dx^i as 1-formas duais. Podemos expresar localmente a métrica g como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde $g_{ij} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$ son as funcións coordenadas locais da métrica. Considerando a matriz (g_{ij}), o carácter non dexenerado da métrica amosa que existe inversa $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$.

O tensor métrico permite transformar os campos de tensores de tipo (r,s) en campos de tensores de tipo $(r+1, s-1)$ e viceversa. Ao longo do traballo, isto será usado especialmente para establecer relacións entre tensores de tipo $(0,2)$ e de tipo $(1,1)$. Dado un tensor de tipo $(0,2)$ T, defínese o tensor de tipo $(1,1)$ metricamente equivalente, Q_T, como $T(X,Y) = g(Q_T(X), Y)$. Así, as expresións en coordenadas locais de $T = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$ e ${Q_T}^i_j \partial_{x^i} \otimes dx^j$ relaciónanse mediante $T_{ij} = {Q_T}^k_j g_{ki}$, ou equivalentemente, ${Q_T}^k_j = T_{ji} g^{ik}$.

1.1.1. Curvatura

Sexa (M, g) unha variedade pseudo-riemanniana de dimensión n. O *tensor de curvatura* de M é o tensor de tipo $(1, 3)$ dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

A partir deste tensor de tipo $(1, 3)$, podemos definir o tensor de curvatura de tipo (0,4) facendo uso da métrica como

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T).$$

Este tensor satisfai as seguintes propiedades:

$$\begin{aligned}
&R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z),\\
&R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y),\\
&R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0,\\
&(\nabla_X R)(Y, Z, T, U) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, U) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, U) = 0,
\end{aligned}$$

sendo as dúas últimas propiedades as chamadas Primeira e Segunda Identidade de Bianchi, respectivamente. Ademais, diremos que un tensor de tipo (0,4) é un *tensor de curvatura alxébrico* se satisfai as tres primeiras identidades.

Dicimos que unha variedade (M, g) é *chá* se todo punto ten unha veciñanza isométrica a un aberto de $\mathbb{R}^n$ ou, equivalentemente, se o tensor de curvatura é cero.

Definimos o *tensor de curvatura alxébrico estándar* nun espazo vectorial V cun produto escalar $\langle , \rangle$ como

$$R_0(X, Y, Z, T) = \langle X, Z\rangle\langle Y, T\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, T\rangle.$$

Así, definimos a *curvatura seccional* dun plano $\Pi = \operatorname{span}\{X, Y\}$ como

$$K(\Pi) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{R_0(X, Y, X, Y)},$$

dando así a relación entre os tensores R e R_0 en cada plano. Se a curvatura seccional da variedade (M, g) satisfai que $K(\Pi) = c$ para todo plano $\Pi \subset TM$ en todo punto de M, diremos que a variedade ten curvatura seccional constante e, polo tanto, o tensor de curvatura de tipo (0,4) está determinado por

$$R(X, Y, Z, T) = cR_0(X, Y, Z, T).$$

Se unha variedade pseudo-riemanniana é completa e de curvatura seccional constante, dicimos que a variedade é un *espazo forma*. O recubrimento universal destes espazos é isométrico á esfera $\mathbb{S}^n$, ao espazo hiperbólico $\mathbb{H}^n$ ou ao espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$, dependendo de se a curvatura seccional é positiva, negativa ou cero, respectivamente.

A partir do tensor de curvatura, defínese o *tensor de Ricci* como

$$\rho(X, Y) = \operatorname{tr}\{Z \mapsto R(X, Z)Y\} = \sum_{i=1}^{n} g(R(X, E_i)Y, E_i) = \sum_{i=1}^{n} R(X, E_i, Y, E_i),$$

sendo $\{E_1, \ldots, E_n\}$ unha referencia ortonormal.

A partir deste tensor de tipo $(0,2)$, definimos o operador de Ricci Ric como o tensor de tipo $(1,1)$ que satisfai $\rho(X,Y) = g(\mathrm{Ric}(X), Y)$. Defínese así a curvatura escalar dunha variedade (M,g) como a traza do *operador de Ricci*, é dicir, $\tau = \operatorname{tr}\mathrm{Ric}$.

Unha métrica g dise que é ***Einstein*** se o tensor de Ricci é un múltiplo constante da métrica, é dicir, se $\rho = \lambda g$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomando trazas nesta expresión vemos que $\lambda = \frac{\tau}{n}$. Toda variedade pseudo-riemanniana de dimensión dous verifica esta condición punto a punto, polo que é Einstein se e só se a curvatura escalar é constante. En dimensións maiores isto non é certo, mais a curvatura escalar de toda métrica Einstein é constante. As variedades Einstein en dimensión tres teñen curvatura seccional constante (véxase, por exemplo, [96]), mentres que en calquera dimensión superior existen exemplos Einstein con curvatura seccional non constante.

Unha cuestión que xorde de xeito natural é a xeneralización do concepto de métrica Einstein. Unha primeira idea é adaptar a ecuación (1.6) a outros tensores de tipo (0,2) asociados á curvatura. Isto dá lugar ás chamadas *métricas debilmente Einstein*, que se obteñen considerando os tensores $\check{R}$, $\check{\rho}$ e $R[\rho]$. Estes defínense en coordenadas como $\check{R}_{ij} = R_{i\alpha\beta\gamma}R_j{}^{\alpha\beta\gamma}$, $\check{\rho} = \rho_{i\alpha}\rho_j{}^{\alpha}$ e $R[\rho] = R_{i\alpha j\beta}\rho^{\alpha\beta}$.

- Unha variedade (M,g) dise $\check{\rho}$-***Einstein*** se satisfai $\check{\rho} = \frac{\|\rho\|^2}{n}g$.
- Unha variedade (M,g) dise $R[\rho]$-***Einstein*** se satisfai $R[\rho] = \frac{\|\rho\|^2}{n}g$.
- Unha variedade (M,g) dise $\check{R}$-***Einstein*** se satisfai $\check{R} = \frac{\|R\|^2}{n}g$.

Claramente, toda métrica Einstein é $\check{\rho}$-Einstein e $R[\rho]$-Einstein. En dimensión $n \leq 4$, as métricas Einstein son tamén $\check{R}$-Einstein, pero non é así en dimensións superiores. As variedades debilmente Einstein foron estudadas, por exemplo, en [34, 74]. Como se verá máis adiante, estas condicións desempeñan un papel importante na análise das métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura.

Utilizando o tensor de Ricci e a curvatura escalar, definimos o *tensor de Schouten* como

$$S = \tfrac{1}{n-2}\left(\rho - \tfrac{\tau}{2(n-1)}g\right),$$

e o *tensor de Weyl* como

$$W = R - S \odot g,$$

sendo $\odot$ o produto de Kulkarni-Nomizu, dado por

$$\begin{aligned}(A \odot B)(X,Y,Z,T) &= A(X,Z)B(Y,T) - A(Y,Z)B(X,T)\\ &\quad + A(Y,T)B(X,Z) - A(X,T)B(Y,Z),\end{aligned}$$

para calquera tensores de tipo $(0,2)$ A e B. Denotaremos por $\mathcal{W}$ o tensor de tipo $(1,3)$ asociado ao tensor de Weyl.

Definimos o *tensor de Cotton* como o tensor de tipo $(0,3)$ dado por

$$C(X,Y,Z) = (n-2)\{(\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Y S)(X,Z)\}.$$

Este tensor mide a simetría das derivadas do tensor de Schouten, anulándose se estas son simétricas.

Sexan (M, g) e $(N, \bar{g})$ dúas variedades pseudo-riemannianas e sexa $\Phi : M \to N$ unha aplicación diferenciable entre elas. Dicimos que Φ é unha aplicación conforme se existe unha función distinta de cero $\lambda : M \to \mathbb{R}$ tal que para todo punto $p \in M$,

$$\bar{g}_{\Phi(p)}(\Phi_*(p)X, \Phi_*(p)Y) = \lambda^2(p)g(X, Y).$$

Se λ é constante dicimos que Φ é unha homotecia e se $\lambda = 1$ dicimos que é unha isometría. Nestes casos diremos que M e N están conformemente relacionadas (ou homoteticamente ou isometricamente, respectivamente).

Deste xeito, diremos que unha variedade pseudo-riemanniana (M, g) é localmente conformemente chá se para cada punto da variedade existe unha veciñanza conformemente relacionada cunha variedade chá. Se λ está definida en toda a variedade diremos que é conformemente chá. As variedades localmente conformemente chás relaciónanse co tensor de Weyl mediante o seguinte resultado (véxase [96]).

Lema 1.1. *Sexan (M, g) e $(N, \bar{g})$ dúas variedades pseudo-riemannianas conformemente relacionadas e sexan W e $\bar{W}$ os seus tensores de Weyl. Entón, $\mathcal{W} = \bar{\mathcal{W}}$ e $\bar{W} = \lambda^2 W$. En particular, se unha variedade pseudo-riemanniana é localmente conformemente chá, entón $W = 0$.*

En dimensión tres, o tensor de Weyl anúlase sempre. Polo tanto, a condición a satisfacer para que unha variedade sexa localmente conformemente chá en dimensión tres é diferente.

Teorema 1.2. [104] *Sexa (M, g) unha variedade pseudo-riemanniana de dimensión n. Entón*

- *Se $n \geq 4$, M é localmente conformemente chá se e só se o tensor de Weyl é identicamente cero.*
- *Se $n = 3$, M é localmente conformemente chá se e só se o tensor de Cotton é identicamente cero.*

1.1.2. Operadores diferenciais

Nesta sección introducimos os operadores diferenciais asociados ás variedades pseudo-riemannianas que serán utilizados ao longo da tese.

Sexa $f : M \to \mathbb{R}$ unha función real. Definimos o *gradiente* de f, denotado por ∇, como o campo de vectores que satisfai a relación

$$g(\nabla f, X) = X(f).$$

Así, o *operador hessiano* asociado a f defínese como a derivada covariante do gradiente,

$$hes_f(X) = \nabla_X \nabla f,$$

e o *hessiano de f* como o tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ dado por

$$\nabla^2 f(X, Y) = g(hes_f(X), Y).$$

A partir do operador hessiano, definimos o *laplaciano de* f como

$$\Delta f = \operatorname{tr} hes_f.$$

Considerando a extensión da conexión de Levi-Civita como derivación de campos de tensores, defínese o *laplaciano dun campo de tensores* T de tipo $(0,k)$ como

$$\Delta T(X_1,\dots,X_k) = \operatorname{tr} hes_T(X_1,\dots,X_k) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla^2_{E_i E_i} T)(X_1,\dots,X_k),$$

sendo $\{E_1,\dots,E_n\}$ unha referencia ortonormal de (M,g).

1.2. Variedades homoxéneas

Unha variedade pseudo-riemanniana (M,g) é *homoxénea* se algún subgrupo do grupo de isometrías actúa transitivamente sobre ela. Denotando con G o grupo que actúa transitivamente por isometrías e sendo K o subgrupo de isotropía, todo espazo homoxéneo admite unha presentación como variedade cociente $M = G/K$. Denotando con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ as álxebras de Lie de G e K respectivamente, o espazo tanxente a M nun punto arbitrario pódese identificar co espazo cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. O espazo homoxéneo G/K dirase redutivo se $\mathfrak{g}$ admite unha descomposición redutiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{k}$ (isto é, $[\mathfrak{k},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ se K é conexo). A existencia dunha descomposición redutiva pódese garantir no caso riemanniano, mais non noutras sinaturas [69]. Así mesmo, é importante indicar que un mesmo espazo homoxéneo (M,g) pode presentar distintas realizacións da forma G/K se ben todas elas se corresponden coa mesma variedade desde o punto de vista estritamente pseudo-riemanniano.

En xeral, diremos que (M,g) é *localmente homoxénea* se para cada par de puntos $p,q \in M$ existe algunha isometría local $\varphi_{pq} : \mathcal{U}_p \to \mathcal{U}_q$ entre veciñanzas abertas de $p \in \mathcal{U}_p$ e $q \in \mathcal{U}_q$ tal que $\varphi_{pq}(p) = q$. É importante indicar que a condición de homoxeneidade local non é unha versión local da homoxeneidade no sentido de que existen variedades localmente homoxéneas de dimensión $n \geq 5$ que non son localmente isométricas a ningunha variedade homoxénea. Kowalski [94] construíu os primeiros exemplos nesta dirección.

Unha variedade pseudo-riemanniana é *localmente simétrica* se a reflexión xeodésica respecto a cada punto $p \in M$, $\exp_p(u) \mapsto \exp_p(-u)$ é unha isometría definida nunha veciñanza de p ou, equivalentemente, o seu tensor de curvatura é paralelo ($\nabla R = 0$). Toda variedade localmente simétrica é localmente homoxénea, se ben o recíproco non é certo.

Outra familia importante de variedades homoxéneas é a proporcionada polos grupos de Lie con métricas invariantes á esquerda, onde as traslacións á esquerda son isometrías que actúan transitivamente.

Na situación riemanniana, toda variedade homoxénea é completa, mais a completitude xeodésica non está garantida no caso lorentziano (aínda que se cumple baixo a hipótese de compacidade [112]). De feito existen grupos de Lie con métrica invariante á esquerda non completa no contexto lorentziano [75].

O noso traballo céntrase en dimensións baixas, $n = 3$ e $n = 4$, onde é máis sinxelo abordar a existencia de métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura. Un aspecto clave na análise que levaremos a cabo é a posibilidade de describir os espazos localmente homoxéneos en dimensión $n = 3$ grazas ao traballo de Sekigawa [122] e Calvaruso [40] en sinaturas riemanniana e lorentziana, respectivamente.

Teorema 1.3. [40, 122] *Sexa (M, g) unha variedade pseudo-riemanniana de dimensión tres. Entón, é localmente homoxénea se e só se é localmente simétrica ou localmente isométrica a un grupo de Lie con métrica invariante á esquerda.*

A análise dos espazos localmente simétricos é especialmente sinxelo en dimensións baixas. Como o operador de Ricci é paralelo, os seus autovalores son constantes e os autoespazos asociados son paralelos, polo que a variedade se descompón localmente como un produto de variedades Einstein en sinatura riemanniana. No ámbito lorentziano, aínda que é lixeiramente máis complexo, redúcense igualmente a produtos locais de variedades Einstein e espazos de Cahen-Wallach. Esta situación é tratada na sección 5.1. Así, o estudo das variedades localmente homoxéneas en dimensión tres reducirase á análise de métricas invariantes sobre grupos de Lie.

Os grupos de Lie de dimensión tres poden ser estruturados como

(I) Grupos de Lie unimodulares (para todo $x \in \mathfrak{g}$, tense que $\operatorname{tr} \operatorname{ad}(x) = 0$):

- $SU(2)$: o subgrupo de matrices unitarias 2×2 de determinante 1, cuxa álxebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ son as matrices 2×2 anti-hermitianas con traza cero.
- $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$; o recubrimento universal do grupo de matrices 2×2 con determinante 1, cuxa álxebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ son as matrices 2×2 de traza cero.
- $\tilde{E}(2)$: o recubrimento universal dos movementos ríxidos do plano euclidiano, cuxa álxebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ é o produto semidirecto $\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{r}^2$ determinado por un endomorfismo de $\mathfrak{r}^2$ con autovalores complexos imaxinarios.
- $E(1, 1)$: o grupo de movementos ríxidos do plano de Minkowski, con álxebra de Lie $\mathfrak{e}(1, 1)$ determinada polo produto semidirecto $\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{r}^2$ asociado a un endomorfismo de $\mathfrak{r}^2$ con autovalores reais opostos.
- H^3: o grupo de Heisenberg de orde tres, con álxebra de Lie $\mathfrak{h}$ determinada polo corchete $[x, y] = z$.
- $\mathbb{R}^3$: o grupo abeliano, con álxebra de Lie $\mathfrak{r}^3$.

(II) Grupos de Lie non-unimodulares. O núcleo unimodular $\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g}; \operatorname{tr} \operatorname{ad}(x) = 0\}$ é un ideal abeliano que contén a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Así, considerando un vector $z \notin \mathfrak{u}$, a álxebra de Lie descríbese como un produto semidirecto $\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{r}^2$ caracterizado por $\operatorname{ad}(x)$.

As métricas invariantes á esquerda sobre grupos de Lie de dimensión tres foron descritas por Milnor [110] na situación riemanniana e Rahmani [119] e Cordero e Parker [59] no caso lorentziano. Ditas métricas serán estudadas en detalle nos capítulos 2 e 5, respectivamente. É importante destacar que se traballa con dous niveis de estrutura: un alxébrico (como grupos de

Lie) e outro xeométrico (como variedades pseudo-riemannianas). Así, ocorrerá en ocasións que métricas invariantes sobre grupos de Lie non isomorfos dean lugar á mesma estrutura pseudo-riemanniana, sendo localmente (ou globalmente) isométricas.

O estudo dos espazos homoxéneos riemannianos de dimensión $n = 4$ pode levarse a cabo seguindo un proceso semellante a partir do seguinte resultado de Berard-Bergery.

Teorema 1.4. [10] *Todo espazo homoxéneo riemanniano de dimensión $n = 4$ simplemente conexo é un espazo simétrico ou isométrico a un grupo de Lie cunha métrica invariante á esquerda.*

A descrición dos grupos de Lie simplemente conexos de dimensión catro é relativamente curta, como segue [10]:

(1) Os grupos produto $SU(2) \times \mathbb{R}$ ou $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

(2) Os produtos semidirectos resolubles $\tilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$, $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$, $H^3 \rtimes \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$.

A descrición das métricas invariantes á esquerda sobre estes grupos levarase a cabo no capítulo 3. Aínda que formalmente non difire moito do caso de dimensión tres, a análise das mesmas é significativamente máis complexa. É importante indicar que os produtos semidirectos en (2) non son clases completamente disxuntas, xa que extensións semidirectas de distintos grupos poden ser isomorfas.

Os espazos homoxéneos lorentzianos en dimensión catro son unha clase moito máis ampla que a dada no Teorema 1.4. Por exemplo, a existencia de espazos homoxéneos non redutivos marca unha diferenza esencial coa xeometría riemanniana [69]. Na situación redutiva, os espazos homoxéneos de dimensión catro lorentzianos con isotropía non trivial foron clasificados por Komrakov [95].

1.3. Solitóns de Ricci

Unha variedade riemanniana (M, g) é un *solitón de Ricci* se existe un campo de vectores X en M satisfacendo

$$\mathcal{L}_X g + \rho = \lambda g \tag{1.1}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{L}_X$ denota a derivada de Lie respecto de X. Os solitóns de Ricci xeneralizan as métricas Einstein, que se corresponden coa situación na que o campo de vectores solitón X é cero ou é un campo de Killing. En tal caso diremos que o solitón de Ricci é *trivial*, polo que o noso interese se centrará na situación non trivial. É importante sinalar que a existencia de solitóns de Ricci é unha propiedade invariante por homotecias. De feito, a ecuación (1.1) é homoteticamente invariante tras un rescalado do campo de vectores solitón.

Máis alá do seu interese como xeneralización das métricas Einstein, os solitóns de Ricci xorden de forma natural no estudo do fluxo de Ricci. Unha familia 1-paramétrica de métricas $g(t)$ nunha variedade M definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é unha solución do *fluxo de Ricci* se verifica a ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\rho_{g(t)}.$$

Se $(M, g(0))$ é unha variedade Einstein, entón $g(t) = (1 - 2t\frac{\tau}{n})g(0)$ é unha solución do fluxo de Ricci que se mantén na clase homotética de $g(0)$. Xeneralizando esta situación e, dado que o tensor de Ricci é invariante por homotecias, son particularmente interesantes as solucións do fluxo de Ricci que permanecen invariantes por homotecias e difeomorfismos, o que dá lugar ás denominadas solucións auto-similares. Sexa Ψ_t unha familia 1-paramétrica de difeomorfismos de M e $\sigma(t)$ unha función real positiva. A familia de métricas asociada $g(t) = \sigma(t)\Psi_t^* g(0)$ denomínase *solución auto-similar* se verifica a ecuación do fluxo de Ricci. Ditas solucións están en correspondencia cos solitóns de Ricci, onde o campo de vectores X está asociado ao grupo 1-paramétrico de difeomorfismos Ψ_t (véxase [53]).

Un solitón de Ricci dise *expansivo*, *estable* ou *contractivo* se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Estas condicións correspóndense (en certo sentido) coas situacións de curvatura de Ricci negativa, cero, ou positiva, respectivamente. Por exemplo, é coñecido que os únicos solitóns de Ricci nunha variedade compacta son Einstein ou contractivos [53].

Na situación especial na que o campo de vectores X é un gradiente, $X = \nabla f$, o solitón denomínase *solitón de Ricci gradiente* e a función f que satisfai $\nabla f = X$ denomínase *función potencial*. Os solitóns gradientes son importantes non só por seren unha simplificación máis manexable da situación xeral, senón tamén porque baixo certas condicións (por exemplo a compacidade), o campo de vectores solitón é suma dun campo de Killing e un campo de vectores gradiente.

No contexto das variedades homoxéneas, Petersen e Wylie [116] demostraron que os solitóns de Ricci gradientes homoxéneos son *ríxidos*, é dicir, son isométricos a un produto $\mathbb{R}^k \times N$, onde N é unha variedade Einstein, e a función potencial vén dada pola proxección no factor euclídeo $f = \frac{\lambda}{2}\|\pi_{\mathbb{R}^k}\|^2$. Dado que todas as variedades de Einstein de dimensión dous ou tres son localmente simétricas (de feito, de curvatura seccional constante), os solitóns ríxidos en dimensións tres e catro son necesariamente localmente simétricos e correspóndense con produtos $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}$ ou $\mathbb{R}^k \times \mathbb{H}^{n-k}$.

En xeral, para un solitón de Ricci (M, g, X), considerando o X-laplaciano definido por $\Delta_X h = \Delta h - g(X, \nabla h)$ para calquera función $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, amósase en [48] que o X-laplaciano da curvatura escalar satisfai

$$\frac{1}{2}\Delta_X \tau = \lambda\tau - \|\rho\|^2.$$

Así, no contexto localmente homoxéneo todo solitón de Ricci debe verificar $\|\rho\|^2 = \lambda\tau$. Se o solitón é estable ($\lambda = 0$) a métrica debe ser Ricci-chá e polo tanto chá [127]. No caso contractivo ($\lambda > 0$), os traballos de Naber [111] e Perelman [114] amosan que os solitóns de Ricci son gradientes e, polo tanto, ríxidos. Así, todo solitón de Ricci homoxéneo é expansivo ($\lambda < 0$) con curvatura escalar negativa.

Lauret introduciu en [99] os solitóns de Ricci alxébricos. A idea subxacente reside en considerar, sobre un grupo de Lie G, solucións auto-similares do fluxo de Ricci onde o grupo de difeomorfismos Ψ_t está dado por automorfismos do grupo. Dado que a álxebra de Lie do grupo $\operatorname{Aut}(G)$ de automorfismos de G está determinada polas derivacións da álxebra de Lie $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, un *solitón de Ricci alxébrico* sobre un grupo de Lie cunha métrica invariante á esquerda, $(G, \langle , \rangle)$, é unha derivación da forma

$$D = \operatorname{Ric} - \lambda \operatorname{Id}. \tag{1.2}$$

En tal caso, considerando a familia 1-paramétrica de automorfismos de G determinados por

$$\varphi_t(e) = e, \quad d(\varphi_t)_e = \exp\left(\frac{t}{2}D\right),$$

obtense un campo de vectores $X : p \in G \mapsto X(p) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\varphi_t(p)$ de tal forma que $(G, \langle,\rangle, X)$ é un solitón de Ricci expansivo [99].

Todo solitón de Ricci homoxéneo é isométrico a un solitón alxébrico en dimensión $n \leq 5$ [6, 87, 88], polo que é posible determinar os solitóns de Ricci sobre variedades homoxéneas de dimensión baixa resolvendo un problema alxébrico. Na sección 2.4 descríbense todos os solitóns riemannianos homoxéneos de dimensión tres, mentres que o caso de dimensión catro se desenvolve na sección 3.3.

As consideracións anteriores restrínxense ao ámbito das métricas definidas positivas. O problema no contexto lorentziano é moi distinto xa que, aínda que ten sentido cuestionarse a existencia de solucións auto-similares do fluxo de Ricci, non está garantida a existencia de solucións locais do mesmo.

Para unha variedade lorentziana, un solitón de Ricci é unha solución da ecuación (1.1), aínda que o seu comportamento difire esencialmente do caso riemanniano. Así, os solitóns de Ricci gradientes homoxéneos non son necesariamente ríxidos (véxase [28] para unha clasificación en dimensión tres). Por outro lado, a sinatura lorentziana permite a existencia de solitóns de Ricci sobre grupos de Lie con campo solitón invariante á esquerda (véxase, por exemplo, [27, 70]), mentres que tal situación non é posible no caso riemanniano [65].

Os solitóns de Ricci alxébricos lorentzianos foron clasificados en [19] para dimensión tres. Na sección 5.4.4 volveremos sobre dita clasificación, clarificando algúns aspectos e estudando a súa relación coas métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura.

1.4. Variedades curvatura homoxéneas

Unha variedade pseudo-riemanniana (M, g) dise k-*curvatura homoxénea* se para cada par de puntos $p,\ q \in M$ existe unha isometría linear $\Phi_{pq} : T_pM \to T_qM$ satisfacendo $\Phi^*_{pq}\nabla^i R_q = \nabla^i R_p$ para todo $0 \leq i \leq k$. Diremos que a variedade é *curvatura homoxénea* se $k = 0$, é dicir, se a isometría linear satisfai $\Phi^*_{pq}R_q = R_p$.

Dado que unha variedade é localmente homoxénea se para cada par de puntos existe unha isometría local entre veciñanzas deles que transforma un punto no outro, temos que toda variedade localmente homoxénea é k-curvatura homoxénea para todo $k \geq 0$. Porén, unha variedade pode ser k-curvatura homoxénea para algún k sen ser homoxénea.

Posto que o operador de Ricci dunha variedade riemanniana é diagonalizable e en dimensión tres o operador de Ricci determina o tensor de curvatura, para unha variedade riemanniana tridimensional basta con que o operador de Ricci teña autovalores constantes para que sexa curvatura homoxénea. Ademais, neste contexto particular, a 1-curvatura homoxeneidade implica a homoxeneidade local (véxase [122]).

A diferenza do caso riemanniano, o operador de Ricci dunha variedade lorentziana non sempre é diagonalizable. Así, dada unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ con sinatura $(+, +, -)$, a forma de Jordan do operador de Ricci correspóndese cunha das seguintes (véxase [82]):

$$\underset{\text{Tipo I.a}}{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{Tipo I.b}}{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{Tipo II}}{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & -1 & b \pm 2 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{Tipo III}}{\begin{pmatrix} b & a & -a \\ a & b & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}}.$$

Polo tanto, unha variedade lorentziana de dimensión tres é curvatura homoxénea se e só se as curvaturas de Ricci e a forma normal de Jordan do operador de Ricci non varían de punto a punto (véxase [76]). Deste xeito, o estudo destas variedades escinde en catro casos xerais correspondentes ás catro posibilidades alxébricas, todas elas realizables xeometricamente, como foi amosado en [38]. Ademais, no caso lorentziano a 2-curvatura homoxeneidade garante a homoxeneidade local e as variedades 1-curvatura homoxéneas redúcense a dúas únicas familias que non son localmente homoxéneas (véxase [33]).

Unha variedade pseudo-riemanniana (M, g) dise *semi-simétrica* se o seu tensor de curvatura satisfai a condición alxébrica $R(X,Y) \cdot R = 0$, onde $R(X,Y)$ actúa como unha derivación

$$\begin{aligned}(R(X,Y) \cdot R)(Z_1, \dots, Z_4) = & -R(R(X,Y)Z_1, \dots, Z_4) \\ & - \dots - R(Z_1, \dots, R(X,Y)Z_4),\end{aligned}$$

para calquera campos de vectores $X, Y, Z_1, \dots, Z_4$. Equivalentemente,

$$\nabla_{[X,Y]} R - \nabla_X \nabla_Y R + \nabla_y \nabla_X R = 0,$$

de onde se segue que o tensor de curvatura de calquera variedade localmente simétrico é semi-simétrico, sendo certo o recíproco no seguinte caso. Unha variedade é semi-simétrica se e só se en cada punto $p \in M$ o tensor de curvatura $R_p \in \otimes^4 T_p^* M$ é o tensor de curvatura dun espazo simétrico (véxase, por exemplo, [81]). Obviamente, o espazo simétrico no que se modela o tensor de curvatura pode cambiar dun punto a outro polo que, a pesar de non seren localmente homoxéneas, as variedades semi-simétricas están moi preto das variedades localmente simétricas [128]. Para o caso de dimensión tres con sinatura lorentziana, tense que un tensor de curvatura alxébrico é semi-simétrico se e só se o operador de Ricci asociado é un múltiplo da identidade, diagonalizable con autovalores $(0, \lambda, \lambda)$ ou nilpotente en dous pasos.

Unha variedade semi-simétrica non é necesariamente curvatura homoxénea e, no caso homoxéneo, ser semi-simétrica non implica ser localmente simétrica, como se amosa na sección 5.2.

1.5. Produtos warped

Unha estrutura que atopamos de xeito natural en múltiples contextos é a dunha variedade que escinde como produto de variedades pero na que a métrica se ve influída por algunha función que está definida sobre a variedade ou exclusivamente en algún dos factores. Os produtos warped, amplamente estudados na literatura (ver, por exemplo, [49, 112]), son un exemplo disto.

Sexan (B, g_B) e (F, g_F) variedades pseudo-riemannianas e sexa $f : B \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable positiva. O *produto warped* $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ dotada da métrica $g = g_B + f^2 g_F$. As variedades B e F denomínanse *base* e *fibra* do produto warped, respectivamente, e a función f denomínase *función de deformación*.

No capítulo 4 traballaremos con produtos warped cuxa base ten dimensión un, é dicir, produtos warped da forma $I \times_f N$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ un aberto de $\mathbb{R}$. Neste caso, os elementos da curvatura poden ser descritos en función dos elementos da curvatura da fibra e da función de deformación [112].

Sexa (N, g_N) unha variedade pseudo-riemanniana de dimensión n e $f : I \to \mathbb{R}$ unha función de deformación. Se ∂_r é o campo coordenado tanxente á base I e X, Y e Z son os levantamentos a $I \times_f N$ dos campos de vectores tanxentes a N, a conexión de Levi-Civita do produto warped vén dada por

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0, \quad \nabla_{\partial_r}X = \nabla_X \partial_r = \tfrac{f'}{f}X, \quad \nabla_X Y = -\tfrac{f'}{f}g(X,Y)\partial_r + \nabla^N_X Y,$$

onde ∇^N é a conexión de Levi-Civita de (N, g_N).

Nun produto $I \times N$ temos as foliación canónicas horizontal $\mathcal{L}^I$ e vertical $\mathcal{L}^N$. Á vista das expresións da conexión de Levi-Civita no produto warped deducimos que a foliación $\mathcal{L}^I$ é totalmente xeodésica, xa que a segunda forma fundamental asociada a $\mathcal{L}^I$ é cero. Por outro lado, a segunda forma fundamental asociada a $\mathcal{L}^N$ vén dada por $II^N(X,Y) = -\frac{f'}{f}g(X,Y)\partial_r$, polo que a foliación é umbílica. Como, ademais, ∂_r é paralelo con respecto da fibra, é dicir, $\nabla_X \partial_r$ é ortogonal a ∂_r, tense que a foliación é, de feito, esférica. Estas propiedades caracterizan os produtos warped do seguinte xeito [118]:

Teorema 1.5. *Sexa g unha métrica pseudo-riemanniana nunha variedade produto $I \times N$ de modo que as foliacións canónicas $\mathcal{L}^I$ e $\mathcal{L}^N$ se intersecan perpendicularmente. Se $\mathcal{L}^I$ é totalmente xeodésica e $\mathcal{L}^N$ é esférica entón a variedade é localmente un produto warped.*

As compoñentes que poden ser distintas de cero do tensor de curvatura R son as seguintes:

$$\begin{aligned} &R(X,\partial_r)\partial_r = \tfrac{f''}{f}X, \qquad R(\partial_r, X)Y = \tfrac{f''}{f}g(X,Y)\partial_r, \\ &R(X,Y)Z = R^N(X,Y)Z - \left(\tfrac{f'}{f}\right)^2\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}, \end{aligned}$$

onde R^N é o tensor de curvatura de (N, g_N). Mediante un cálculo directo obtense que o tensor de Ricci vén dado por

$$\begin{aligned} &\rho(\partial_r,\partial_r) = -n\tfrac{f''}{f}, \quad \rho(\partial_r, X) = 0 \\ &\rho(X,Y) = \rho^N(X,Y) - \left\{\tfrac{f''}{f} + (n-1)\left(\tfrac{f'}{f}\right)^2\right\} g(X,Y), \end{aligned}$$

onde ρ^N é o tensor de Ricci de (N, g_N). Tomando a traza do tensor de Ricci, temos que a curvatura escalar do produto warped é

$$\tau = \tfrac{1}{f^2}\left(\tau^N - 2nff'' - n(n-1)(f')^2\right),$$

onde τ^N é a curvatura escalar de (N, g_N).

A completitude dun produto warped en sinatura riemanniana vén dada pola da súa base e a súa fibra [112]. Así, un produto warped $I \times_f N$ é completo se $I = \mathbb{R}$ e (N, g_N) é completa, para calquera función de deformación f definida en $\mathbb{R}$. En cambio, en sinatura lorentziana esta caracterización non é certa e precísase unha condición adicional sobre a función de deformación, como se amosa a continuación:

Teorema 1.6. [44] *Sexa $M = I \times_f N$ un produto warped onde $I = (\alpha, \beta)$ é un intervalo (posiblemente non acoutado) e (N, g_N) é unha variedade xeodesicamente completa. Entón M é espacial, temporal e nula xeodesicamente completa se e só se para algún $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tense*

$$\int_\alpha^\gamma \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} dr = \int_\gamma^\beta \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} dr = +\infty.$$

Un caso especial de produtos warped son os conos que serán tratados na sección 4.1. A fin de situalos no seu contexto, se (M, g) é unha variedade pseudo-riemanniana, o *cono sobre M* é a variedade produto $\mathbb{R}^+ \times M$ dotada da métrica $\varepsilon dr^2 + r^2 g$, de xeito que o cono se dirá espacial cando $\varepsilon = 1$ e temporal cando $\varepsilon = -1$.

Os conos poden ser caracterizados como as únicas variedades sobre as que existe un campo de vectores non nulo ξ para as cales se verifican as EDPs dadas por $\nabla \xi = \mathrm{Id}$, simplemente considerando $\xi = r\frac{\partial}{\partial r}$. O recíproco séguese do traballo de Gallot [72], así como dos resultados de Ponge e Reckziegel [118] e as expresións anteriores da conexión de Levi-Civita.

1.6. Espazo-tempos con campo de vectores nulo distinguido

Nesta sección introducimos diversas familias de variedades lorentzianas que se caracterizan por ter un campo de vectores nulo que satisfai algunha condición adicional. A existencia destes campos de vectores afecta á estrutura da variedade e, en ocasións, existen unhas coordenadas canónicas que permiten describir a métrica da variedade localmente.

1.6.1. Espazo-tempos de Kundt

Sexa (M, g) unha variedade lorentziana e ℓ un campo de vectores nulo. Considerando o tensor de tipo $(1,1)$ dado pola derivada covariante $\nabla \ell$, sexa $(\nabla \ell)_0 = \nabla \ell - \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(\nabla \ell)\mathrm{Id}$ a súa compoñente sen traza. A descomposición en compoñente simétrica $(\nabla \ell)_0^{sim}$ e antisimétrica $(\nabla \ell)_0^{ant}$ teñen especial relevancia física. Así, o cizallamento e a torsión asociados a un campo de vectores nulo veñen dados polas partes simétrica e antisimétrica de $(\nabla \ell)_0$, respectivamente.

Unha variedade lorentziana (M, g) é un *espazo-tempo de Kundt* se admite un campo de vectores nulo xeodésico ℓ sen cizallamento, sen torsión e que non se expande (isto é, que a traza de $\nabla \ell$ é cero). Dado que en dimensión tres un campo de vectores nulo xeodésico sen expansión non ten torsión nin cizallamento, un espazo-tempo tridimensional é de Kundt se admite un campo de vectores nulo xeodésico libre de expansión, é dicir, $\|\ell\|^2 = 0$, $\nabla_\ell \ell = 0$ e $\mathrm{tr}\,\nabla \ell = 0$. Máis alá do significado físico, os espazo-tempos de Kundt son importantes desde un punto de vista xeométrico dado que toda métrica lorentziana con invariantes escalares da curvatura nulos (denominadas VSI, por *Vanishing Scalar Invariants*) é necesariamente un espazo-tempo de Kundt (véxase [56, 57]).

A forma xeral dun espazo-tempo de Kundt de dimensión tres en coordenadas locais (v, u, x) é

$$g = \frac{1}{P(u,x)^2}dx^2 + 2dudv + f(v,u,x)du^2 + 2W(v,u,x)dudx,$$

onde podemos asumir que $P(u, x) = 1$ considerando o cambio da coordenada $\tilde{x} = \int \frac{1}{P}dx$ (véxase, por exemplo, [55]). Polo tanto, un espazo-tempo de Kundt de dimensión tres pode escribirse localmente da forma

$$g = dx^2 + 2dudv + f(v,u,x)du^2 + 2W(v,u,x)dudx. \tag{1.3}$$

Unha métrica de Kundt dise dexenerada se $\partial_{vv}W = \partial_{vvv}f = 0$.

1.6.2. Ondas de Brinkmann

Un caso particular de espazos de Kundt dase cando a distribución dexenerada $\mathrm{span}\{\ell\}$ é paralela (ou equivalentemente, o campo de vectores nulo ℓ é recorrente, isto é, $\nabla\ell = \omega \otimes \ell$ para algunha 1-forma ω).

Unha variedade lorentziana que admite unha distribución paralela $\mathrm{span}\{\ell\}$ (é dicir, existe un campo de vectores ℓ recorrente) escinde localmente como un produto cando ℓ é non nulo. Porén, se o campo de vectores ℓ é nulo, non se obtén a escisión anterior. Os espazo-tempos que admiten campos de vectores destas características foron amplamente estudados no contexto da relatividade xeral, onde son denominados *pp-waves* (*plane-fronted waves with parallel rays*) no caso transversalmente chan, isto é, se o endomorfismo da curvatura satisfai $R(\ell^\perp, \ell^\perp) = 0$ [66]. Ademais, o espazo-tempo é unha *onda plana* se o tensor de curvatura é transversalmente paralelo (é dicir, $\nabla_{\ell^\perp}R = 0$). As ondas planas Ricci-chás denomínanse *ondas gravitacionais planas* e xogan un papel especial en relatividade (véxase [113, 115, 120]). Os recentes achados de ondas gravitacionais fixeron que o interese destas clases de espazo-tempos aumentase nos últimos tempos.

Dun xeito máis xeral, unha variedade lorentziana denomínase *onda de Brinkmann* se admite unha distribución unidimensional nula paralela. En dimensión tres podemos tomar coordenadas (u, x, y) de xeito que o tensor métrico vén dado por (véxase [20])

$$g = 2dudy + dx^2 + \varphi(u,x,y)dy^2. \tag{1.4}$$

A distribución unidimensional nula paralela está xerada localmente por un campo de vectores nulo recorrente.Para unha métrica (1.4), o campo de vectores que desempeña este papel é ∂_u, que é nulo e recorrente. O campo de vectores nulo ∂_u pódese reescalar a un campo de vectores paralelo se e só se o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos, en cuxo caso pódense adaptar as coordenadas para que a función que determina o tensor métrico $\varphi(u, x, y)$ non dependa da coordenada u. Neste caso a variedade (M, g) é unha pp-wave. Ademais, nesta situación (M, g) é unha onda plana se e só se a función φ é un polinomio cuadrático na coordenada x, o que reduce a expresión de φ a $\varphi(x, y) = a(y)x^2$ tras facer os cambios de coordenadas apropiados.

Observación 1.7. As ondas de Brinkmann son un caso particular de espazo-tempos de Kundt. De feito, a expresión en coordenadas de Kundt dunha onda de Brinkmann vén dada fixando $W = 0$ en (1.3) (véxase [20]), é dicir,

$$g = dx^2 + 2dudv + f(v, u, x)du^2. \tag{1.5}$$

Desta forma, no capítulo 6 trataremos as ondas de Brinkmann curvatura homoxéneas como variedades lorentzianas obtidas de xeito natural a partir dos espazos de Kundt e utilizaremos a expresión en coordenadas (1.5), mais no capítulo 7, onde estudamos as ondas de Brinkmann sen condicións a maiores, faremos uso da expresión en coordenadas (1.4) por ser esta máis utilizada neste contexto.

1.7. Funcionais da curvatura

A busca de obxectos óptimos (isto é, cun comportamento destacable) é un aspecto común en xeometría que se aborda mediante o estudo de puntos críticos para determinados funcionais. As xeodésicas (curvas críticas para o funcional de lonxitude), as superficies minimais (críticas para o funcional de área) ou as aplicacións harmónicas (críticas para o funcional de enerxía) son só algúns exemplos.

O obxectivo central deste traballo é a obtención de métricas óptimas sobre variedades riemannianas e lorentzianas con respecto á distribución de distintos invariantes da curvatura.

Sexa (M, g) unha variedade pseudo-riemanniana e sexa $\{E_i\}$ unha referencia local ortonormal. Un *invariante escalar da curvatura* é un polinomio nas compoñentes do tensor de curvatura e as súas derivadas covariantes que non depende da escolla da referencia local utilizada na súa construción. Ditos invariantes obtéñense mediante contraccións nas compoñentes do tensor de curvatura e nas súas derivadas covariantes (véxase [29]). Diremos que un invariante ten *orde* k se involucra un total de k-derivadas do tensor métrico. Dado que cada compoñente do tensor de curvatura involucra dúas derivadas do tensor métrico, denotaremos con $I(k, n)$ o espazo de invariantes de orde $2k$ sobre unha variedade de dimensión n.

O espazo $I(1, n)$ ten dimensión un e está xerado pola curvatura escalar, $I(1, n) = \operatorname{span}\{\tau\}$. Tense ademais que $\dim I(2, n) = 4$ e unha base deste espazo vén dada por $\{\tau^2, \|\rho\|^2, \|R\|^2, \Delta\tau\}$ (véxase [12]).

1.7.1. Funcional de Hilbert-Einstein

Un funcional amplamente estudado en xeometría pseudo-riemanniana é o funcional de Hilbert-Einstein, tamén chamado funcional da curvatura escalar total. Dada unha variedade pseudo-riemanniana compacta (M, g) de dimensión n, o funcional defínese como a integral de volume da curvatura escalar,

$$S_{HE} : g \mapsto \int_M \tau dvol_g.$$

Considerando variacións da forma $g[t] = g + th$, onde h é un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$, diremos que a métrica g é crítica para dita variación se $\frac{d}{dt}|_{t=0} S_{HE}(g[t])$. Escribindo a expresión anterior como

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} S_{HE}(g[t]) = \int_M \langle \nabla S_{HE}, h \rangle dvol_g$$

para un campo de tensores simétrico ∇S_{HE} de tipo $(0, 2)$, diremos que ∇S_{HE} é o *gradiente do funcional* S_{HE}. O gradiente do funcional de Hilbert-Einstein vén dado por $\nabla S_{HE} = -\rho + \frac{\tau}{2} g$.

Dado que o funcional S_{HE} non é invariante por homotecias, considérase a súa restrición ao espazo de métricas de volume constante un sobre a variedade compacta M. Tendo en conta que todas as métricas da variación $g[t]$ teñen volume constante se o campo de tensores h é ortogonal á métrica g, as ecuacións de Euler-Lagrange correspondentes está determinadas por $\nabla S_{HE} = \lambda g$. Tomando trazas a ambos os dous lados da igualdade, dedúcese que $\lambda = \frac{1}{n} \mathrm{tr}\,(\nabla S_{HE}) = \frac{n-2}{2n} \tau$. Así, a ecuación resultante é a seguinte:

$$\rho - \frac{\tau}{n} g = 0. \tag{1.6}$$

Deste xeito, as métricas críticas para o funcional de Hilbert-Einstein restrinxido a variacións con volume constante son aquelas cuxo tensor de Ricci é proporcional ao tensor métrico, isto é, as *métricas Einstein* [96].

O Teorema de Gauss-Bonnet en dimensión dous amosa que o funcional S_{HE} é constantemente un múltiplo da característica de Euler. Así, todas as métricas son críticas en dita dimensión, de onde se segue que $0 = \nabla S_{HE} = -\rho + \frac{\tau}{2} g$, o que proporciona unha identidade universal da curvatura en dimensión dous.

Aínda que nas consideracións anteriores se asume que a variedade M é compacta e sen fronteira, poderían considerarse variacións $g[t] = g + th$ sobre unha variedade compacta con fronteira sempre e cando o campo de tensores da variación h se anule nunha veciñanza da fronteira. En tal caso as métricas críticas veñen caracterizadas polas mesmas ecuacións, o que permite falar de métricas críticas sobre variedades non compactas, considerando a restrición do funcional dado a calquera aberto con clausura compacta e variacións con soporte contido no aberto dado (véxase, por exemplo, a discusión en [90] sobre aplicacións harmónicas en variedades non compactas).

As métricas Einstein correspóndense con aquelas cuxa curvatura escalar está mellor distribuída ao longo da variedade e teñen especial relevancia na física, máis concretamente no ámbito da relatividade xeral, xa que estas variedades son solucións das ecuacións do campo de Einstein no baleiro [15].

1.7.2. Funcionais cuadráticos da curvatura

Considerando o espazo de invariantes da curvatura de orde dous,$I(2, n) = \mathrm{span}\{\tau^2, \|\rho\|^2, \|R\|^2, \Delta\tau\}$, un funcional cuadrático da curvatura vén dado por

$$g \mapsto \int_M \{a\,\tau^2 + b\,\|\rho\|^2 + c\,\|R\|^2 + d\,\Delta\tau\} dvol_g$$

para algúns $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supoñendo que M é compacta e sen fronteira, tense que

$$\begin{aligned} g \mapsto & \textstyle\int_M \{a\,\tau^2 + b\,\|\rho\|^2 + c\,\|R\|^2 + d\,\Delta\tau\} dvol_g \\ & = \textstyle\int_M \{a\,\tau^2 + b\,\|\rho\|^2 + c\,\|R\|^2\} dvol_g \end{aligned}$$

Polo tanto, todo funcional está determinado polos tres funcionais seguintes:

$$\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \tau^2 dvol_g, \quad \mathcal{T} : g \mapsto \int_M \|\rho\|^2 dvol_g, \quad \mathcal{R} : g \mapsto \int_M \|R\|^2 dvol_g,$$

que serán denominados *funcionais cuadráticos da curvatura*. Os gradientes destes funcionais veñen dados por [11]

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{S} &= 2\nabla^2\tau - 2\Delta\tau g - \tau\left(2\rho - \tfrac{1}{2}\tau g\right), \\ \nabla\mathcal{T} &= -\Delta\rho + \nabla^2\tau - \tfrac{1}{2}\Delta\tau g - 2R[\rho] + \tfrac{1}{2}\|\rho\|^2 g, \\ \nabla\mathcal{R} &= -4\Delta\rho + 2\nabla^2\tau - 2\check{R} + \tfrac{1}{2}\|R\|^2 g - 4R[\rho] + 4\check{\rho}. \end{aligned}$$

En dimensión tres, o tensor de curvatura R está totalmente determinado polo tensor de Ricci, debido á anulación do tensor de Weyl. Isto implica que os tres invariantes están relacionados mediante a expresión

$$\|R\|^2 = 2\|\rho\|^2 - \tfrac{1}{2}\tau^2.$$

Polo tanto, o funcional da norma L^2 do tensor de curvatura en dimensión tres vén dado pola combinación linear $\mathcal{R} = 2\mathcal{T} - \frac{1}{2}\mathcal{S}$.

En dimensión catro, o Teorema de Chern-Gauss-Bonnet determina que a característica de Euler, $\chi(M)$, dunha variedade pseudo-riemanniana compacta e sen fronteira vén dada por

$$\chi(M) = \tfrac{1}{8\pi^2}\int_M \left(\|R\|^2 - 4\|\rho\|^2 + \tau^2\right) dvol_g.$$

Polo tanto, o funcional $\mathcal{R}$ en dimensión catro vén dado por $\mathcal{R} = 8\pi^2\chi(M) + 4\mathcal{T} - \mathcal{S}$ e, dado que a característica de Euler dunha variedade é unha constante, os puntos críticos do funcional $\mathcal{R}$ correspóndense cos puntos críticos de $4\{\mathcal{T} - \frac{1}{4}\mathcal{S}\}$, o que amosa que os funcionais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T} - \frac{1}{4}\mathcal{S}$ son equivalentes.

Deste xeito, para achar as métricas críticas correspondentes aos funcionais cuadráticos da curvatura en dimensión tres e catro bastará con estudar os puntos críticos dos funcionais

$$\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \tau^2 dvol_g, \quad \mathcal{F}_t : g \mapsto \int_M \left\{\|\rho\|^2 + t\tau^2\right\} dvol_g,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Os gradientes destes funcionais veñen dados por (ver, por exemplo, [46])

$$\nabla\mathcal{S} = 2\nabla^2\tau - 2\Delta\tau g - \tau\left(2\rho - \tfrac{1}{2}\tau g\right),$$

$$\nabla\mathcal{F}_t = -\Delta\rho + (1+2t)\nabla^2\tau - \tfrac{1+4t}{2}\Delta\tau g - 2R[\rho] + \tfrac{1}{2}\|\rho\|^2 g + \frac{1}{2}t\tau^2 g - 2t\tau\rho,$$

Seguindo o mesmo procedemento que co funcional de Hilbert-Einstein, ao restrinxir o estudo ao espazo de métricas de volume constante, as ecuacións de Euler-Lagrange están determinadas por $\nabla\mathcal{S} = \lambda_{\mathcal{S}} g$ e $\nabla\mathcal{F}_t = \lambda_{\mathcal{F}} g$, respectivamente. Tomando trazas a ambos os dous lados das igualdades temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{S}} &= \tfrac{2-2n}{n}\Delta\tau + \tfrac{n-4}{2n}\tau^2, \\ \lambda_{\mathcal{F}} &= \left(\tfrac{2t}{n} - \tfrac{1+4t}{2}\right)\Delta\tau + \tfrac{n-4}{2n}\left(\|\rho\|^2 + t\tau^2\right) \end{aligned}$$

Así, as ecuacións de Euler-Lagrange para os funcionais $\mathcal{S}$ e $\mathcal{F}_t$ restrinxidos a variacións con volume constante son as seguintes:

$$\nabla^2\tau - \tfrac{1}{n}\Delta\tau g - \tau\left(\rho - \tfrac{1}{n}\tau g\right) = 0, \tag{1.7}$$

$$\Delta\rho - (1+2t)\nabla^2\tau + \tfrac{2}{n}t\Delta\tau g + 2(R[\rho] - \tfrac{1}{n}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho - \tfrac{1}{n}\tau g) = 0. \tag{1.8}$$

É importante observar que toda métrica de Einstein é crítica para o funcional $\mathcal{S}$ e para calquera funcional $\mathcal{F}_t$, xa que o termo da esquerda na ecuación (1.8) redúcese a $2(R[\rho] - \frac{1}{n}\|\rho\|^2 g)$, que é cero por ser toda métrica Einstein $R[\rho]$-Einstein. En consecuencia, toda métrica Einstein é crítica para calquera funcional cuadrático da curvatura en dimensión tres e catro. Porén, as métricas Einstein non son necesariamente críticas para todos os funcionais cuadráticos en dimensións superiores. A modo de exemplo, consideremos un produto $M = \mathbb{S}^1 \times N$, onde (N, g_N) é unha variedade Ricci-chá de dimensión catro. Considerando o gradiente do funcional $\mathcal{R}$, tense que

$$\nabla\mathcal{R} = -4\Delta\rho + 2\nabla^2\tau - 2\check{R} + \tfrac{1}{2}\|R\|^2 g - 4R[\rho] + 4\check{\rho} = -2\check{R} + \tfrac{1}{2}\|R\|^2 g,$$

xa que ao ser M Ricci-chá, anúlanse todos os termos restantes. En consecuencia, restrinxindo o funcional a variacións con volume constante, tense que a métrica produto $d = d_{\mathbb{S}^1} + g_N$ é $\mathcal{R}$-crítica se e só se $\check{R} = \frac{1}{5}\|R\|^2 g$. Agora ben, un cálculo sinxelo amosa que dita ecuación non se cumpre en xeral na variedade (M, g) polo que, sendo Einstein, non é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. Procedendo dun xeito análogo, obtense que unha variedade Einstein é $\mathcal{R}$-crítica para variacións con volume constante se e só se é $\check{R}$-Einstein en calquera dimensión.

Sexa $\mathcal{F}_t$ un funcional cuadrático da curvatura e g unha métrica crítica. A enerxía do funcional $\mathcal{F}_t(g)$ desempeña un papel esencial no estudo das métricas críticas (ver, por exemplo, [80]). Como veremos nos capítulos 2 e 3, as métricas críticas con enerxía cero son especialmente relevantes pola súa conexión cos solitóns de Ricci. Na situación homoxénea (que constitúe o eixo central desta memoria), as métricas críticas de enerxía cero correspóndense cos funcionais $\mathcal{F}_t$ determinados polo parámetro $t = -\frac{\|\rho\|^2}{\tau^2} \leq -\frac{1}{n}$, xa que $\|\rho\|^2 \geq \frac{1}{n}\tau^2$, dándose a igualdade no caso Einstein.

Algúns exemplos especialmente significativos de funcionais cuadráticos da curvatura son os seguintes.

O funcional de Chern-Gauss-Bonnet

O Teorema de Chern-Gauss-Bonnet en dimensión catro [51] establece que o funcional $\mathcal{F}_{CGB} : g \mapsto \mathcal{F}_{CGB}(g) = \int_M \{\|R\|^2 - 4\|\rho\|^2 + \tau^2\} dvol_g$ é constante con valor $8\pi^2\chi(M)$ se a variedade é compacta. En consecuencia, o gradiente de dito funcional é identicamente cero, de onde se segue a identidade universal da curvatura en dimensión catro [11, 67]:

$$\left(\check{R} - \frac{\|R\|^2}{4} g\right) + \tau\left(\rho - \frac{\tau}{4} g\right) = 2\left(\check{\rho} - \frac{\|\rho\|^2}{4} g\right) + 2\left(R[\rho] - \frac{\|\rho\|^2}{4} g\right).$$

Unha aplicación inmediata da identidade anterior é que toda métrica Einstein en dimensión catro é $\check{R}$-Einstein, o que non é certo en dimensións superiores.

A norma L^2 do tensor de Weyl

En dimensión catro, o funcional $\mathcal{W} : g \mapsto \mathcal{W}(g) = \int_M \|W\|^2 dvol_g$ é conformemente invariante e, utilizando o Teorema de Chern-Gauss-Bonnet, tense que $\mathcal{W}(g) = 32\pi^2\chi(M) + 2\mathcal{F}_{-1/3}$, polo que é equivalente ao funcional $\mathcal{F}_{-1/3}$. A invariancia conforme de $\mathcal{W}$ permite amosar que toda métrica conformemente Einstein en dimensión catro é $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica. Estas métricas están caracterizadas equivalentemente pola anulación do tensor de Bach [7], definido como

$$\mathfrak{B} = \operatorname{div}_2 \operatorname{div}_4 W + \tfrac{1}{2} W[\rho],$$

onde $W[\rho]_{ij} = W_{ikj\ell}\rho^{k\ell}$ e div_k indica a diverxencia dun campo dado no argumento k-ésimo.

Para calquera variedade de dimensión catro tense que

$$\begin{aligned} 8\pi^2\chi(M) &= \int_M \left\{ \tfrac{1}{24}\tau^2 - \tfrac{1}{2}\|\rho_0\|^2 + \|W\|^2 \right\} dvol_g, \\ &= \int_M \left\{ \tfrac{1}{24}\tau^2 - \tfrac{1}{2}\|\rho_0\|^2 + \|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 \right\} dvol_g, \end{aligned}$$

onde $\rho_0 = \rho - \frac{1}{4}\tau\, g$ é o tensor de Ricci sen traza. Utilizando que a sinatura de Hirzebruch da variedade se expresa como $\tau[M] = \frac{1}{12\pi^2}\int_M \{\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2\} dvol_g$, séguese que o funcional da norma L^2 do tensor de Weyl satisfai

$$\mathcal{W}(g) = -12\pi^2\tau[M] + 2\int_M \|W^+\|^2 dvol_g,$$

o que mostra que é equivalente ao funcional da norma L^2 do tensor de Weyl autodual.

Se a métrica g é de Kähler, entón o operador de Weyl autodual é diagonalizable da forma $W^+ = \frac{\tau}{12}\operatorname{diag}[2, -1, -1]$ e polo tanto a súa norma $\|W^+\|^2 = \frac{1}{24}\tau^2$, o que amosa que o funcional de Calabi ($\mathcal{S}$ restrinxido a métricas de Kähler na mesma clase) se corresponde co funcional cuadrático $\mathcal{F}_{-1/3}$ restrinxido a ditas variacións.

Funcionais asociados aos autovalores do operador de Schouten

Considerando a descomposición do tensor de curvatura $R = W + S \odot g$, onde S é o tensor de Schouten, obsérvase que a información xeométrica que se ve alterada mediante un cambio conforme da métrica concéntrase neste tensor S. É polo tanto natural considerar non só o funcional determinado pola norma L^2 do tensor de Schouten [86], senón tamén os seus autovalores, sendo de especial interés as súas funcións simétricas elementais $\sigma_k(S)$. En particular $\sigma_1(S) = \frac{1}{2(n-1)}\tau$, polo que o funcional asociado é equivalente ao funcional de Hilbert-Einstein.

Denotemos con $\sigma_2(S)$ a segunda función simétrica elemental dos autovalores do operador de Schouten ($\sigma_2(S) = \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$). En dimensión tres tense a relación $\int_M \sigma_2(S) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{-3/8}$ (véxase a sección 2.3.5).

O funcional $\mathcal{F}_{-3/8}$ foi utilizado por Gursky e Viaclovsky [80] para caracterizar as variedades de dimensión tres con curvatura seccional constante como métricas críticas de dito funcional. Ademais, é importante destacar que o campo de tensores de tipo $(0, 2)$ determinado pola ecuación

(1.8) ten diverxencia cero, polo que desempeña un papel esencial nas teorías de gravitación masiva.

Para $n = 4$, como aplicación do Teorema de Chern-Gauss-Bonnet tense que

$$\int_M \left\{ \tfrac{1}{4}\|W\|^2 + \sigma_2(S) \right\} dvol_g = 8\pi^2\chi(M),$$

polo que o funcional $\sigma_2(S)$ é equivalente ao funcional $\mathcal{W}$.

O funcional de volume

Sexa $p \in M$ e denotemos con $S_p(r)$ a esfera xeodésica $S_p(r) = \exp_p(S_0(r))$, onde $S_0(r) = \{x \in T_pM; \|x\| = r\}$ para valores de r suficientemente pequenos. Considerando o volume das esferas xeodésicas centradas en $p \in M$ como función do raio e, desenvolvéndoo en serie de Taylor, os primeiros termos están dados por [78]

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S_p(r)) = \alpha_n r^{n-1} \Big\{ 1 - \frac{1}{6n}\tau(p)\, r^2 \\ + \frac{1}{360n(n+2)} \left(-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2 - 18\Delta\tau \right)(p)\, r^4 + \cdots \Big\}\end{aligned}$$

onde α_n é o volume da esfera de raio unidade no espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$ (véxase, por exemplo, [79]).

Dado que o termo de grao $4(n-1)$ no desenvolvemento anterior está determinado por un invariante escalar da curvatura, o funcional cuadrático asociado determina unha medida de como o volume das esferas xeodésicas se diferencia do correspondente ás esferas euclidianas en orde catro. Dito funcional

$$g \mapsto \mathcal{F}_{vol}(g) = \int_M \{-3\|R\|^2 + 8\|\rho\|^2 + 5\tau^2\} dvol_g$$

correspóndese con $\mathcal{F}_{13/4}$ en dimensión tres (ver sección 2.3.6) e é equivalente ao funcional $\mathcal{F}_{-2}$ en dimensión catro, xa que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{vol}(g) &= -24\pi^2\chi(M) - 4\int_M \|\rho\|^2 dvol_g + 8\int_M \tau^2 dvol_g \\ &= -24\pi^2\chi(M) - 4\int_M \{\|\rho\|^2 - 2\tau^2\} dvol_g.\end{aligned}$$

1.7.3. Funcionais de gravitación masiva

As ecuacións de campo en Relatividade Xeral, $\rho - \frac{1}{2}\tau g = 8\pi G T - \Lambda g$, están establecidas en termos do tensor de Einstein, $\rho - \frac{1}{2}\tau g$, o tensor enerxía-momento T, a constante de Newton G e a constante cosmolóxica Λ. As ecuacións de campo obtéñense da variación da acción de Hilbert-Einstein $S_{HE} = \frac{1}{16\pi G}\int (\tau - 2\Lambda) dvol_g$, baseada na curvatura escalar total. Desde os inicios da relatividade xeral, propuxéronse diferentes alternativas para construír unha teoría unificada da gravidade. Mentres a relatividade xeral involucra derivadas de segunda orde da métrica, algunhas extensións permiten obter ecuacións de campo cunha orde maior. Mediante outras extensións, a acción é función non só da curvatura escalar, senón tamén dos invariantes cuadráticos da curvatura τ^2, $\|\rho\|^2$ e $\|R\|^2$. As extensións estudadas neste traballo, que se realizan en dimensión tres, son as seguintes:

- **Gravitación masiva topolóxica (TMG).** Obtense engadindo o termo gravitacional de Chern-Simons,
$$S_{CS} = \tfrac{1}{2} \int \varepsilon^{ijk} \Gamma_{is}^{r} (\partial_j \Gamma_{rk}^{s} + \tfrac{2}{3} \Gamma_{jv}^{s} \Gamma_{kr}^{v}) dvol_g,$$
ao funcional de Hilbert-Einstein, de xeito que $S_{TMG} = S_{HE} + \frac{1}{\omega} S_{CS}$, onde ω é un parámetro de masa [64]. As ecuacións de Euler-Lagrange deste funcional restrinxido ás métricas de volume constante veñen dadas por [64]
$$\rho - \tfrac{1}{2}\tau g + \tfrac{1}{\omega}\mathcal{C} = \Lambda g,$$
onde $\mathcal{C}$ denota o tensor de Cotton de tipo (0,2). O valor de Λ vén determinado ao tomar trazas a ambos lados da igualdade, polo que $\Lambda = -\frac{1}{6}\tau$. Así, as métricas que son solucións para a gravitación masiva topolóxica son aquelas que anulan o tensor de tipo (0,2) definido como
$$\mathfrak{T}_{TMG} = \rho - \tfrac{1}{3}\tau g + \tfrac{1}{\omega}\mathcal{C}. \tag{1.9}$$
- **Nova gravitación masiva (NMG).** Trátase dunha modificación en dimensión tres da Relatividade Xeral que complementa a acción de Hilbert-Einstein mediante un termo cuadrático, $\|\rho\|^2 - \frac{3}{8}\tau^2$, o cal engade un termo conservado (isto é, un termo de diverxencia cero) ás ecuacións de campo (véxase [13, 14]). A acción $S_{NMG} = S_{HE} - \frac{1}{m^2}\mathcal{F}_{-3/8}$, onde m é a masa do gravitón, dá lugar ás ecuacións de campo
$$\rho - \tfrac{1}{3}\tau g - \tfrac{1}{2m^2}(K - \tfrac{1}{3}(\|\rho\|^2 - \tfrac{3}{8}\tau^2)g) = 0,$$
onde $K = 2\Delta\rho - \frac{1}{2}\nabla^2\tau - \frac{3}{2}\tau\rho + 4R[\rho] - (\frac{1}{2}\Delta\tau + \|\rho\|^2 - \frac{3}{8}\tau^2)g$. Así, as métricas que son solucións para a nova gravitación masiva son aquelas que anulan o tensor de tipo (0,2) definido como
$$\mathfrak{T}_{NMG} = \rho - \tfrac{1}{3}\tau g - \tfrac{1}{2m^2}(K - \tfrac{1}{3}(\|\rho\|^2 - \tfrac{3}{8}\tau^2)g). \tag{1.10}$$
- **Gravitación masiva xeral (GMG).** Esta extensión das ecuacións de campo obtense engadindo simultaneamente os dous termos propostos nos modelos anteriores, dando lugar á combinación da gravitación masiva topolóxica e da nova gravitación masiva $S_{GMG} = S_{HE} + \frac{1}{\omega}S_{CS} - \frac{1}{m^2}\mathcal{F}_{-3/8}$. As ecuacións de campo derivadas desta acción veñen dadas por (véxase [123])
$$\rho - \tfrac{1}{3}\tau g + \tfrac{1}{\omega}\mathcal{C} - \tfrac{1}{2m^2}(K - \tfrac{1}{3}(\|\rho\|^2 - \tfrac{3}{8}\tau^2)g) = 0.$$
Así, as métricas que son solucións para a gravitación masiva xeral son aquelas que anulan o tensor de tipo (0,2) definido como
$$\mathfrak{T}_{GMG} = \rho - \tfrac{1}{3}\tau g + \tfrac{1}{\omega}\mathcal{C} - \tfrac{1}{2m^2}(K - \tfrac{1}{3}(\|\rho\|^2 - \tfrac{3}{8}\tau^2)g). \tag{1.11}$$

Nos capítulos 6 e 7 estudaremos as solucións para estes funcionais dentro do contexto das variedades curvatura homoxéneas e das ondas de Brinkmann, respectivamente.

Parte I

Métricas críticas en sinatura riemanniana

Capítulo 2
Métricas críticas homoxéneas riemannianas de dimensión tres

O estudo das variedades riemannianas localmente homoxéneas en dimensión tres redúcese aos espazos simétricos (que son Einstein ou localmente isométricos a produtos da forma $\mathbb{R} \times N^2(c)$) ou grupos de Lie, segundo o seguinte teorema.

Teorema 2.1 (Sekigawa, [122])**.** *Sexa (M, g) unha variedade localmente homoxénea de dimensión tres completa e simplemente conexa. Entón, (M, g) é unha variedade localmente simétrica ou é localmente isométrica a un grupo de Lie dotado dunha métrica invariante á esquerda.*

Polo tanto, podemos estudar as métricas homoxéneas críticas para os funcionais cuadráticos analizando as variedades simétricas e os grupos de Lie, que serán descritos posteriormente en seccións independentes.

Dados dous puntos nun espazo localmente homoxéneo, ambos os dous pertencen a veciñanzas isométricas, polo que a curvatura non varía de punto a punto. En particular, a curvatura escalar é constante. Polo tanto, anúlanse tanto o hessiano coma o laplaciano da curvatura escalar. Deste xeito, as ecuacións que caracterizan as métricas críticas dos funcionais $\mathcal{S}$ e $\mathcal{F}_t$, (1.7) e (1.8), redúcense ás seguintes expresións, respectivamente:

$$\tau\left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g\right) = 0 \tag{2.1}$$

$$\Delta\rho + 2\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2 g\right) + 2t\tau\left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau\, g\right) = 0. \tag{2.2}$$

Na ecuación (2.1) podemos observar que se trata da ecuación de Einstein, (1.6), multiplicada pola curvatura escalar. Polo tanto, unha métrica homoxénea é crítica para o funcional $\mathcal{S}$ se e só se é Einstein ou ten curvatura escalar cero. Nas vindeiras seccións estudaremos as métricas críticas para o funcional $\mathcal{F}_t$. Ademais, estas ecuacións son invariantes por homotecias, polo que nos resultados obtidos reflíctese unha métrica representante da clase homotética.

Neste capítulo estudaremos as métricas homoxéneas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura facendo unha primeira distinción entre as variedades simétricas (Sección 2.1) e os grupos de Lie (Sección 2.2), motivada polo Teorema 2.1. Á súa vez, dentro da sección dedicada aos grupos de Lie, abordarase a análise utilizando a caracterización dos grupos de Lie unimodulares (Sección 2.2.1) e non unimodulares (Sección 2.2.2) aportada por Milnor en [110]. Na Sección 2.3 compararemos a clasificación obtida con resultados previos dados por outros autores para determinados funcionais cuadráticos e prestaremos especial atención a funcionais cun interese xeométrico destacado.Por último, na Sección 2.4 relaciónanse os solitóns de Ricci homoxéneos coas métricas críticas para funcionais cuadráticos, obtendo que ditos solitóns son exactamente as métricas críticas para funcionais cuadráticos con enerxía cero (Teorema 2.17).

2.1. Espazos simétricos

Dicimos que unha variedade riemanninana é *localmente simétrica* se o tensor de curvatura é paralelo, isto é, a derivada covariante do tensor de curvatura R é cero, $\nabla R = 0$. Equivalentemente, é localmente simétrica se a simetría xeodésica con respecto a cada punto é unha isometría. Así, se (M, g) é localmente simétrica, o operador de Ricci ten un único autoespazo, co cal é Einstein, ou é paralelo. Polo tanto, os autoespazos do operador de Ricci son paralelos e (M, g) escinde como produto. En termos dos autovalores do operador de Ricci, en dimensión tres a única posibilidade non Einstein é $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[0, c, c]$. Tendo en conta estas dúas posibilidades, podemos dar o seguinte resultado que recolle os dous posibles casos para variedades simétricas.

Lema 2.2. *Sexa (M, g) unha variedade simétrica de dimensión tres. Entón tense un dos seguintes casos:*

1. *O grupo de isometrías ten dimensión seis. Neste caso, (M, g) ten curvatura seccional constante e a métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica para todo $t \in \mathbb{R}$.*

2. *O grupo de isometrías ten dimensión catro. Neste caso, (M, g) é un produto $\mathbb{R}\times N(c)$, onde $N(c)$ é unha superficie de curvatura seccional constante c, e é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{2}$.*

Demostración. Como se explicou anteriormente, o operador de Ricci dunha variedade simétrica pode ser $c \cdot \mathrm{Id}$ ou ben $\mathrm{diag}[0, c, c]$. No primeiro caso, trátase dunha métrica de Einstein con curvatura seccional constante $c/2$ e é crítica para todos os funcionais, co que se tería a primeira das opcións.

Se $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[0, c, c]$, a variedade (M, g) descomponse coma un produto $\mathbb{R} \times N(c)$, sendo $N(c)$ unha superficie de curvatura seccional constante c, e a ecuación (2.2) redúcese a

$$\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\, g\right) + t\tau \left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau\, g\right) = 0.$$

Sexa $\{E_1, E_2, E_3\}$ unha referencia ortonormal local tal que E_1 é tanxente a $\mathbb{R}$. Dado que $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[0, c, c]$, na referencia ortonormal $\{E_i\}$ os elementos da curvatura veñen dados por

$$\begin{gathered}
\rho(E_1, E_1) = \rho(E_i, E_j) = 0, i \neq j, \quad \rho(E_2, E_2) = \rho(E_3, E_3) = c, \\
R[\rho](E_1, E_1) = R[\rho](E_i, E_j) = 0, i \neq j, \quad R[\rho](E_2, E_2) = R[\rho](E_3, E_3) = c^2, \\
\tau = 2c, \quad \|\rho\|^2 = 2c^2.
\end{gathered}$$

Logo, as ecuacións resultantes son as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\, g\right)(E_1, E_1) + t\tau \left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau\, g\right)(E_1, E_1) = -\tfrac{2}{3}c^2(1 + 2t), \\
&\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\, g\right)(E_i, E_i) + t\tau \left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau\, g\right)(E_i, E_i) = \tfrac{1}{3}c^2(1 + 2t), \qquad i = 2, 3, \\
&\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\, g\right)(E_i, E_j) + t\tau \left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau\, g\right)(E_i, E_j) = 0, \qquad i \neq j.
\end{aligned}$$

Polo tanto, os produtos $\mathbb{R} \times N(c)$ son $\mathcal{F}_t$-críticos para $t = -\frac{1}{2}$. □

2.2. Grupos de Lie en dimensión tres

O produto corchete dunha álxebra de Lie de dimensión tres $\mathfrak{g}$ pode describirse como $[x, y] = L(x \times y)$, sendo '$\times$' o produto vectorial en $\mathbb{R}^3$ e L unha aplicación linear de $\mathfrak{g}$ en si mesma. Esta aplicación linear L pode ser usada para dar unha clasificación dos grupos de Lie que é de axuda á hora de abordar o estudo das métricas críticas.

Un grupo de Lie G dise *unimodular* se a súa medida de Haar invariante á esquerda é invariante á dereita. De xeito equivalente, un grupo de Lie conexo é unimodular se e só se $\operatorname{tr}\{\operatorname{ad}(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, sendo $\mathfrak{g}$ a álxebra de Lie de G. Por outra banda, en [110] demóstrase que un grupo de Lie G é unimodular se e só se a transformación linear L é autoadxunta e, polo tanto, toda métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie unimodular pode ser descrita cos corchetes

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \tag{2.3}$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é unha base ortonormal de autovectores de L, e as constantes de estrutura λ_1, λ_2 e λ_3 son os respectivos autovalores.

As álxebras de Lie non unimodulares de dimensión tres descríbense como produtos semidirectos $\mathbb{R} \ltimes \mathfrak{r}^2$, sendo $\mathfrak{r}^2$ unha álxebra de Lie abeliana de dimensión dous. En [110] demostrouse que toda métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie non unimodular pode describirse cos corchetes

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \tag{2.4}$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal e α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$. Sen perda de xeneralidade, podemos normalizar as constantes de estrutura de xeito que $\alpha + \delta = 2$. Ademais, a estrutura semidirecta está definida mediante unha derivación de $\mathfrak{r}^2$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & 2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Grazas a estas descricións dos grupos de Lie unimodulares e non unimodulares, o estudo das métricas críticas en grupos de Lie de dimensión tres dá lugar a sistemas de ecuacións alxébricas dependentes das constantes de estrutura correspondentes. Nas seguintes subseccións estudaranse por separado os grupos de Lie unimodulares e non unimodulares.

2.2.1. Métricas críticas en grupos de Lie unimodulares

Sexa G un grupo de Lie unimodular cunha métrica invariante á esquerda g, e sexa $\{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal que describe o produto corchete da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ como en (2.3). Os elementos da curvatura que nos interesan para analizar as ecuacións de Euler-Lagrange veñen dados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$
\begin{aligned}
\rho(e_i,e_i) =& \tfrac{1}{2}\left(\lambda_i^2-(\lambda_j-\lambda_k)^2\right), \quad \{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\
R[\rho](e_i,e_i) =& \tfrac{1}{4}(\lambda_j+\lambda_k-\lambda_i)\left(\lambda_i^3-3(\lambda_j-\lambda_k)^2\lambda_i+2(\lambda_j-\lambda_k)^2(\lambda_j+\lambda_k)\right),\\
\tau =& -\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3,\\
\|\rho\|^2 =& \tfrac{3}{4}(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4)-(\lambda_1^3(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^3(\lambda_1+\lambda_3)+\lambda_3^3(\lambda_1+\lambda_2))\\
&+\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3^2)+(\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Vexamos en primeiro lugar que condicións deben satisfacer as constantes de estrutura para que a métrica invariante á esquerda sexa Einstein. Para iso, basta con achar as condicións que fan que o operador de Ricci teña todos os seus autovalores iguais, neste caso dados por $\mathrm{Ric}_i = \frac{1}{2}\left(\lambda_i^2-(\lambda_j-\lambda_k)^2\right)$, con $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. Se $\mathrm{Ric}_i=\mathrm{Ric}_j$, mediante un cálculo sinxelo obtemos que

$$
\mathrm{Ric}_i-\mathrm{Ric}_j = 2(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i+\lambda_j-\lambda_k)=0,
$$

para calquera combinación que satisfaga $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. Así, a variedade será Einstein se $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ ou se $\lambda_i=\lambda_j\neq\lambda_k=0$ con $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. Ademais, no último caso a métrica é chá dado que se ten $\mathrm{Ric}_i=0$ para todo i. No que resta de sección, cando se faga referencia ás métricas críticas para os funcionais cuadráticos, as métricas Einstein serán excluídas.

Consideremos o tensor de tipo (0,2) definido a partir da ecuación (2.2),

$$
\mathfrak{F}^t = \Delta\rho + 2(R[\rho]-\tfrac{1}{3}\|\rho\|^2 g)+2t\tau(\rho-\tfrac{1}{3}\tau g). \tag{2.6}
$$

O problema de achar métricas invariantes á esquerda que sexan críticas para o funcional $\mathcal{F}_t$ é equivalente a buscar aquelas métricas que anulan o tensor $\mathfrak{F}^t$. Dadas as expresións dos elementos da curvatura (2.5), as compoñentes non nulas do tensor son as seguintes:

$$
\begin{aligned}
3\,\mathfrak{F}^t_{11} =& 2(t+3)\lambda_1^4-5(t+1)\lambda_1^3(\lambda_2+\lambda_3)\\
&+\lambda_1^2((3t+1)(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+2(t+1)\lambda_2\lambda_3)\\
&+(t+1)\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_2+\lambda_3)\\
&-((t+3)(\lambda_2^2+\lambda_3^2)-2(t-1)\lambda_2\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)^2,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
3\,\mathfrak{F}^t_{22} =& 2(t+3)\lambda_2^4-5(t+1)\lambda_2^3(\lambda_1+\lambda_3)\\
&+\lambda_2^2((3t+1)(\lambda_1^2+\lambda_3^2)+2(t+1)\lambda_1\lambda_3)\\
&+(t+1)\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1+\lambda_3)\\
&-((t+3)(\lambda_1^2+\lambda_3^2)-2(t-1)\lambda_1\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)^2,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
3\,\mathfrak{F}^t_{33} =& 2(t+3)\lambda_3^4-5(t+1)\lambda_3^3(\lambda_2+\lambda_1)\\
&+\lambda_3^2((3t+1)(\lambda_2^2+\lambda_1^2)+2(t+1)\lambda_2\lambda_1)\\
&+(t+1)\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)^2(\lambda_2+\lambda_1)\\
&-((t+3)(\lambda_2^2+\lambda_1^2)-2(t-1)\lambda_2\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)^2.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Unha vez obtidas as expresións que determinan o tensor $\mathfrak{F}^t$, estamos en condicións de dar os seguintes resultados.

Lema 2.3. *Sexa G un grupo de Lie unimodular de dimensión tres dotado dunha métrica invariante á esquerda g e con curvatura escalar cero. Entón, g é crítica para o funcional $\mathcal{S}$ e, ademais, é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún $t \in \mathbb{R}$ se e só se é chá.*

Demostración. Dado que a curvatura escalar é cero, o tensor $\mathfrak{F}^t$ redúcese a

$$\mathfrak{F}^t = \Delta\rho + 2\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2 g\right).$$

Un cálculo directo a partir das expresións calculadas en (2.5) tendo en conta que $\tau = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$ amosa que as compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$ veñen dadas polas seguintes expresións:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t_{11} &= \tfrac{4}{3}\lambda_1\left((3\lambda_1 - 2\lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 + 2\lambda_3) - 3\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + 4\lambda_3)\right),\\
\mathfrak{F}^t_{22} &= \tfrac{4}{3}\lambda_2\left((3\lambda_2 - 2\lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 + 2\lambda_3) - 3\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + 4\lambda_3)\right),\\
\mathfrak{F}^t_{33} &= \tfrac{4}{3}\lambda_3\left((3\lambda_3 - 2\lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 + 2\lambda_2) - 3\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + 4\lambda_2)\right).
\end{aligned}$$

Se $\lambda_2 = 0$, a curvatura escalar é da forma $\tau = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3)^2 = 0$, logo $\lambda_1 = \lambda_3$ e, polo tanto, a métrica é chá. Seguindo un razoamento análogo obtemos a mesma conclusión tomando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 = 0$.

Supoñamos que as constantes de estrutura son distintas de cero. Dado que buscamos anular as expresións $\mathfrak{F}^t_{ii}$, calquera combinación destas deberá anularse tamén. Tomando a combinación dada por

$$\begin{aligned}
&\tfrac{48}{64}(4\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_3\,\mathfrak{F}^t_{22} - \tfrac{1}{64}\left\{(4\lambda_2 + \lambda_3)(12\lambda_2 + 45\lambda_3) - 45\lambda_3^2\right\}\mathfrak{F}^t_{33}\\
&\quad = \lambda_2\lambda_3(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)(8\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_3 + 8\lambda_3^2),
\end{aligned}$$

e tendo en conta que supoñemos que as constantes de estrutura non se anulan, temos que $\lambda_2 = \pm\lambda_3$. Comprobamos a continuación que ningunha destas opcións é admisible.

Se $\lambda_2 = \lambda_3$, a curvatura escalar é da forma $\tau = -\frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1 - 4\lambda_3)$, polo que se ten $\lambda_1 = 4\lambda_3$. Así, $\mathfrak{F}^t_{11} = 320\lambda_3^4$, polo que $\mathfrak{F}^t_{11}$ non se anularía.

Se $\lambda_2 = -\lambda_3$, a curvatura escalar é da forma $\tau = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + 4\lambda_3^2)$, polo que non se anularía. □

Teorema 2.4. *Sexa G un grupo de Lie unimodular de dimensión tres. Unha métrica invariante á esquerda non Einstein g en G é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é homotética a unha métrica dada por* (2.3) *coas constantes de estrutura dadas coma nun dos seguintes casos:*

$(1.a)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 1)$. *Neste caso o funcional $\mathcal{F}_t$ está determinado por $t = -3$ e a curvatura escalar satisfai $\tau = -\frac{1}{2}$.*

$(1.b)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, \lambda, 1)$ *con $\lambda \neq \frac{1}{4}$. Neste caso o funcional $\mathcal{F}_t$ está determinado por $t = -3 + \dfrac{10\lambda}{4\lambda - 1}$, e a curvatura escalar satisfai $\tau = \frac{1}{2}(4\lambda - 1)$.*

(2) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda_2, \lambda_3)$, *con* $1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 1$, *e*

$$\lambda_2 = \frac{(2\kappa+1)^2 \pm \sqrt{(2\kappa+1)(4\kappa^2+6\kappa+1)}}{2(2\kappa+1)},$$
$$\lambda_3 = \frac{(2\kappa+1)^2 \mp \sqrt{(2\kappa+1)(4\kappa^2+6\kappa+1)}}{2(2\kappa+1)},$$

onde $\kappa \in \left(-\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}), -\frac{1}{2}\right)$ *ou* $\kappa > -\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)$ *e* $\kappa \neq 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Neste caso o funcional $\mathcal{F}_t$ *está determinado por* $t = \frac{2\kappa^3+4\kappa^2+4\kappa+1}{\kappa^2}$ *e a curvatura escalar vén dada por* $\tau = \frac{2\kappa^2}{1+2\kappa}$.

Demostración. Unha métrica invariante á esquerda é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún valor de t se satisfai a ecuación (2.2) ou, equivalentemente, se anula o tensor $\mathfrak{F}^t$ descrito en (2.6). Para o caso das métricas invariantes á esquerda sobre grupos de Lie unimodulares, dito tensor vén dado polas expresións (2.7), (2.8) e (2.9). Para reducir a complexidade do estudo das ecuacións, consideraremos de xeito independente as seguintes posibilidades para as constantes de estrutura dunha métrica non Einstein:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$. Á súa vez, podemos distinguir dous subcasos:

   a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \mu \neq 0$, e
   b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\lambda_3 = \mu \neq 0$.

   Dado que a ecuación (2.2) é invariante por homotecias, podemos normalizar as constantes de estrutura sen perda de xeneralidade, reducindo así a análise a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 1)$ (caso 1.a) e a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, \lambda, 1)$ (caso 1.b), respectivamente.

2. $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Dado que polo menos unha das constantes de estrutura é distinta de cero, podemos deformar a métrica invariante á esquerda de xeito homotético e analizar unicamente o caso $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Ademais, reordenando os vectores da base $\{e_1, e_2, e_3\}$ podemos reordenar as constantes de estrutura, polo que as solucións resultantes dos casos restantes serán análogas ás dos casos propostos aquí.

Caso (1.a): as constantes de estrutura satisfán $(\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}) = (\mathbf{0, 0, 1})$. Os polinomios dados polas expresións (2.7), (2.8) e (2.9) redúcense a

$$\mathfrak{F}^t_{11} = \mathfrak{F}^t_{22} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}^t_{33} = -\tfrac{1}{3}(t+3).$$

Entón, unha métrica invariante á esquerda con constantes de estrutura $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 1)$ é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -3$. Ademais, o operador de Ricci é da forma $\operatorname{Ric} = \operatorname{diag}\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Caso (1.b): as constantes de estrutura satisfán $(\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}) = (\boldsymbol{\lambda, \lambda}, \mathbf{1})$, con $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$. Os polinomios dados polas expresións (2.7), (2.8) e (2.9) redúcense a

$$\mathfrak{F}^t_{11} = \mathfrak{F}^t_{22} = -\frac{1}{2}\mathfrak{F}^t_{33} = -\frac{1}{3}(\lambda-1)((4\lambda-1)t+2\lambda-3).$$

Se $\lambda = 1$, as tres constantes de estrutura son iguais e polo tanto a métrica é Einstein. Se $4\lambda = 1$, entón $\mathfrak{F}^t_{11} = -\frac{5}{8}$ e polo tanto non é crítica para ningún valor de t. Así, se $\lambda \neq \frac{1}{4}$, a métrica invariante á esquerda é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{2\lambda-3}{4\lambda-1}$. Ademais, o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}\left[\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Caso (2): as constantes de estrutura $(\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \boldsymbol{\lambda_3})$ son distintas. Dado que buscamos anular as expresións dadas polo tensor $\mathfrak{F}^t$, calquera combinación dada polos polinomios $\mathfrak{F}^t_{11}$, $\mathfrak{F}^t_{22}$ e $\mathfrak{F}^t_{33}$ debe anularse tamén. Deste xeito, posto que as constantes de estrutura son distintas entre si, podemos tomar a seguinte combinación:

$$\tfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\mathfrak{F}^t_{11} + \tfrac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\mathfrak{F}^t_{22} + \tfrac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\mathfrak{F}^t_{33} = 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4t\tau,$$

onde $\tau = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$ é a curvatura escalar. No Lema 2.3 probouse que toda métrica invariante á esquerda crítica con curvatura escalar cero é Einstein, logo podemos asumir que $\tau \neq 0$. Así, obtemos $t = \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}{\tau}$ e os polinomios $\mathfrak{F}^t_{ii}$ redúcense aos seguintes:

$$\begin{aligned} 3\,\mathfrak{F}^t_{11} &= (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\,\mathbf{p}, \\ 3\,\mathfrak{F}^t_{22} &= (2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)\,\mathbf{p}, \\ 3\,\mathfrak{F}^t_{33} &= (2\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1)\,\mathbf{p}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{p} = \lambda_1^3 - \lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3) - \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)^2 + (\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_2+\lambda_3)$. Se $\mathbf{p} \neq 0$, as constantes de estrutura deben ser iguais, polo que a métrica invariante á esquerda é Einstein. Estudemos o caso no que se anula o polinomio $\mathbf{p}$.

Se $\lambda_1 = 0$, temos que $\mathbf{p} = (\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_2+\lambda_3)$. Polo tanto, anúlase se $\lambda_2 = \lambda_3$ (e a métrica invariante á esquerda é Einstein) ou $\lambda_2 = -\lambda_3$, e a métrica invariante á esquerda é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -1$ con operador de Ricci de rango un: $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[-2\lambda_2^2, 0, 0]$.

Se $\lambda_1 \neq 0$, podemos reescalar a métrica para obtermos $\lambda_1 = 1$. Ademais, do mesmo xeito que no traballo de J. Milnor [110], podemos realizar un cambio de constantes de estrutura de xeito que

$$\lambda_1 = \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_2 = \mu_1 + \mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2.$$

Utilizando simultaneamente o reescalado e o cambio de constantes de estrutura, temos

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \mu_1 + \mu_3, \quad \lambda_3 = 1 + \mu_1 - \mu_3.$$

Deste xeito, o polinomio $\mathbf{p}$ queda como segue:

$$\mathbf{p} = \mu_1(\mu_1+1) + (2\mu_1+1)\mu_3 - (2\mu_1+1)\mu_3^2.$$

O polinomio resultante é de grao dous en μ_3, polo que é posible resolver a ecuación $\mathbf{p} = 0$, obtendo

$$\mu_3 = \frac{(2\mu_1+1) \mp \sqrt{(2\mu_1+1)(4\mu_1^2+6\mu_1+1)}}{2(2\mu_1+1)}.$$

μ_3 está definido para $\mu_1 \in (-\frac{3+\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{3-+\sqrt{5}}{4}, +\infty)$. Polo tanto, unha métrica invariante á esquerda dada por (2.3) con constantes de estrutura distintas entre si é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún valor de t se e só se é homotética a unha métrica invariante á esquerda dada por $\lambda_1 = 1$,

$$\lambda_2 = \frac{(2\mu_1+1)^2 \pm \sqrt{(2\mu_1+1)(4\mu_1^2+6\mu_1+1)}}{2(2\mu_1+1)}, \text{ e}$$

$$\lambda_3 = \frac{(2\mu_1+1)^2 \mp \sqrt{(2\mu_1+1)(4\mu_1^2+6\mu_1+1)}}{2(2\mu_1+1)}.$$

Ademais, as constantes de estrutura son distintas se $\mu_1 \notin \{0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\}$, o que completa o caso (2). □

Observación 2.5. As posibles métricas unimodulares $\mathcal{F}_t$-críticas amósanse na Figura 2.2.1. Analizando as diferentes posibilidades para as constantes de estrutura dos grupos de Lie de dimensión tres, observamos o seguinte:

1. O grupo de Heisenberg admite unha métrica non Einstein $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se $t = -3$.
2. O grupo de Poincaré $E(1,1)$ admite unha métrica $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se $t = -1$. Ademais, $E(1,1)$ non admite métricas Einstein.
3. O grupo euclídeo $E(2)$ de movementos ríxidos do plano euclídeo non admite métricas $\mathcal{F}_t$-críticas non Einstein.
4. Os grupos $SL(2,\mathbb{R})$ ou $O(1,2)$ admiten unha métrica $\mathcal{F}_t$-crítica non Einstein se e só se
   a) $t \in (-3, -\frac{1}{2})$ e a métrica invariante á esquerda é homotética a unha determinada polas constantes de estrutura $(\lambda, \lambda, 1)$, con λ dada por $\lambda = \frac{t+3}{4t+2} < 0$.
   b) $t \in (\frac{1}{2}(9-5\sqrt{5}), -1)$ e a métrica invariante á esquerda é homotética a unha determinada polas constantes de estrutura do Teorema 2.4-(2) para $\kappa \in (-\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}), -\frac{1}{2}) \setminus \{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}$.
5. Os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ admiten unha métrica $\mathcal{F}_t$-crítica non Einstein se e só se
   a) $t \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$ e a métrica invariante á esquerda é homotética a unha determinada polas constantes de estrutura $(\lambda, \lambda, 1)$, con λ dada por $\lambda = \frac{t+3}{4t+2} > 0$.
   b) $t \in (\frac{1}{2}(9+5\sqrt{5}), \infty)$ e a métrica invariante á esquerda é homotética a unha determinada polas constantes de estrutura do Teorema 2.4-(2) para $\kappa \in (-\frac{1}{4}(3-\sqrt{5}), \infty) \setminus \{0, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}$.

Observación 2.6. Nótese que para calquera valor de $t < -3$, existen métricas invariantes á esquerda sobre $SO(3)$ non Einstein e críticas. Ademais, estas métricas teñen curvaturas de Ricci positivas e negativas, polo que a suposición de ter curvatura seccional non negativa no Teorema 1.1 de [45] non pode ser eliminada.

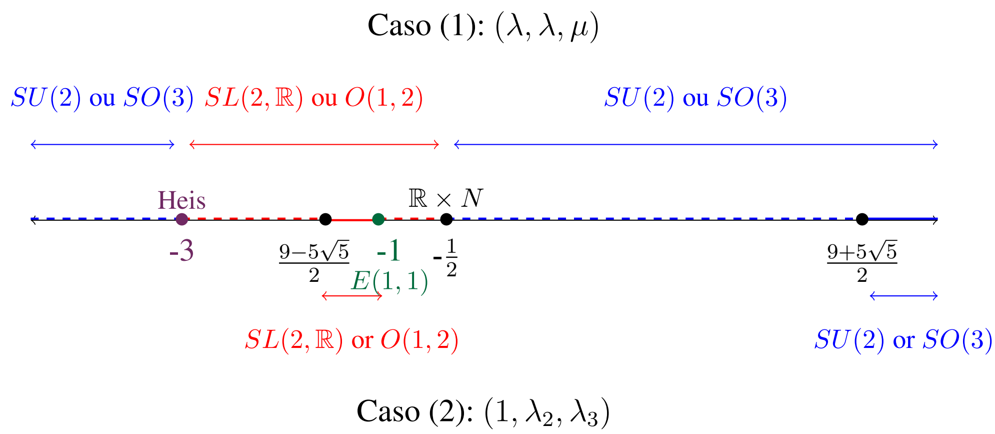


Figura 2.2.1: Rango de t para métricas $\mathcal{F}_t$-críticas en grupos de Lie unimodulares.

Para todo $t \in [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ existen métricas invariantes á esquerda críticas sobre $SO(3)$ determinadas polas constantes de estrutura $(\lambda, \lambda, 1)$ con $\frac{17}{8} < \lambda \leq 4$. Ademais, as curvaturas seccionais de ditas métricas son positivas, o que amosa a necesidade das condicións fixadas no Teorema 1.5 de [45].

Observación 2.7. O grupo de isometrías dunha variedade homoxénea de dimensión tres pode ser de dimensión tres, catro ou seis. O caso de dimensión seis correspóndese cos espazos de curvatura seccional constante. As variedades homoxéneas de dimensión tres con grupo de isometría de dimensión catro son simétricas (e polo tanto un produto $\mathbb{R} \times N(c)$) ou unha das seguintes xeometrías: Nil_3, $SL(2,\mathbb{R})$ ou as esferas de Berger (véxase, por exemplo, [61]). A existencia de métricas críticas sobre estas xeometrías vén dada polo Lema 2.2 e polo caso (1) do Teorema 2.4, como se ilustra na Figura 2.2.1.

A xeometría Nil_3, determinada pola métrica invariante á esquerda sobre o grupo de Heisenberg, correspóndese coa métrica descrita no caso (1.a) do Teorema 2.4. As xeometrías das esferas de Berger e $SL(2,\mathbb{R})$ correspóndense cos grupos de Lie unimodulares con métricas invariantes á esquerda determinadas polas constantes de estrutura (λ, λ, μ) satisfacendo $\lambda\mu > 0$ no caso das esferas de Berger e $\lambda\mu < 0$ no caso da xeometría de $SL(2,\mathbb{R})$. A curvatura escalar, $\tau = \frac{1}{2}\mu(4\lambda - \mu)$, é sempre distinta de cero no caso das xeometrías de $SL(2,\mathbb{R})$, mentres que pode ser cero no caso das esferas de Berger se $\mu = 4\lambda$. Se $\tau = 0$, a métrica é crítica para o funcional $\mathcal{S}$. Polo tanto, obtemos a seguinte conclusión:

> *Sexa (M, g) unha variedade homoxénea completa e simplemente conexa de dimensión tres con grupo de isometrías de dimensión catro. Entón, (M, g) é crítica para algún funcional cuadrático. Ademais, para calquera $t \in \mathbb{R}$, existe unha variedade homoxénea de dimensión tres con grupo de isometrías de dimensión catro que é $\mathcal{F}_t$-crítico para dito valor de t.*

As esferas de Berger e $SL(2,\mathbb{R})$ son métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{2\lambda-3\mu}{4\lambda-\mu}$ con $\lambda \neq \frac{1}{4}\mu$. Así, a enerxía do funcional vén dada por $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = \frac{3}{2}\lambda\mu^3$. Polo tanto, o funcional ten enerxía positiva para as esferas de Berger e negativa para a xeometría de $SL(2,\mathbb{R})$.

Observación 2.8. Unha variedade homoxénea $M = G/K$ cunha acción transitiva dun subgrupo de Lie G do grupo de isometrías e cunha descomposición redutiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ é naturalmente redutiva se

$$\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle + \langle Y, [X,Z]_{\mathfrak{m}}\rangle = 0, \quad \text{para todo} \quad X,Y,Z \in \mathfrak{m}.$$

As variedades homoxéneas naturalmente redutivas constitúen a clase máis sinxela de espazos homoxéneos. Os espazos naturalmente redutivos completos e simplemente conexos de dimensión tres foron clasificados por Tricerri e Vanhecke [131], os cales amosaron que son ou ben un espazo forma ou isométricos a un grupo de Lie $SU(2)$, $SL(2,\mathbb{R})$ ou o grupo de Heisenberg Heis_3 dotados dunha métrica invariante á esquerda adecuada. Obtense do traballo [131] que dita métrica invariante á esquerda está determinada por (2.3) con constantes de estrutura $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, \lambda, \mu)$. Polo tanto, temos que

> *Todo espazo homoxéneo naturalmente redutivo é crítico para algún funcional cuadrático da curvatura. Ademais, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe un espazo homoxéneo naturalmente redutivo non Einstein que é $\mathcal{F}_t$-crítico.*

Observación 2.9. En [71] amósase que un grupo de Lie unimodular de dimensión tres determinado por (2.3) é cíclico se e só se $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Polo tanto, a álxebra de Lie é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ con $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, ou a $\mathfrak{e}(1,1)$ con $\lambda_1 = -\lambda_3 > 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Entón, séguese do Teorema 2.4 que un grupo de Lie unimodular cíclico é crítico se e só se $t = -\frac{4}{3}$ ou $t = -1$. O primeiro caso correspóndese co grupo $SL(2,\mathbb{R})$ con constantes de estrutura $(\lambda, \lambda, -2\lambda)$ e o segundo caso co grupo de Poincaré $E(1,1)$ determinado polas constantes de estrutura $(\lambda, 0, -\lambda)$.

2.2.2. Métricas críticas en grupos de Lie non unimodulares

Sexa G un grupo de Lie non unimodular cunha métrica invariante á esquerda g e sexa $\{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal que describe o produto corchete da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ como en (2.4). Os obxectos asociados á curvatura que desempeñan un papel na expresión (2.2) están determinados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\rho(e_1,e_1) &= -2(\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)^2,\\
\rho(e_2,e_2) &= \tfrac{1}{2}(-4\alpha - \beta^2 + \gamma^2),\\
\rho(e_2,e_3) &= (\alpha-2)\beta - \alpha\gamma,\\
\rho(e_3,e_3) &= \tfrac{1}{2}(4\alpha + \beta^2 - \gamma^2 - 8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2R[\rho](e_1,e_1) &= 4\alpha(\alpha-2)(6+(\beta-\gamma)^2)+(\beta^2-\gamma^2)\\
&\quad +10\beta^2+4\beta\gamma+10\gamma^2+32,\\
4R[\rho](e_2,e_2) &= 8\alpha^4-8\alpha^3+2(5\beta^2+4\beta\gamma-\gamma^2-8)\alpha^2\\
&\quad -2(7\beta^2+2\beta\gamma-5\gamma^2-16)\alpha\\
&\quad +(\beta+\gamma)(8(\beta-\gamma)+2\beta^3+3\beta^2\gamma-\gamma^3),\\
4R[\rho](e_2,e_3) &= ((2-\alpha)\beta-\alpha\gamma)(16-24\alpha+12\alpha^2+3(\beta+\gamma)^2),\\
4R[\rho](e_3,e_3) &= 8\alpha^4-56\alpha^3-2(\beta^2-4\beta\gamma-5\gamma^2-64)\alpha^2\\
&\quad -2(\beta^2+14\beta\gamma+13\gamma^2+64)\alpha\\
&\quad -\beta^4-\beta^3\gamma+3\beta^2\gamma^2+5\beta\gamma^3+2\gamma^4+4\beta^2+20\gamma^2+64,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau &= -8+2(2-\alpha)\alpha-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)^2,\\
\|\rho\|^2 &= 4\alpha^4-16\alpha^3+4(\beta^2+\gamma^2+10)\alpha^2-8(\beta^2+\gamma^2+6)\alpha\\
&\quad +\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(3\beta^3+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+3\gamma^3+32\gamma)+8\beta^2+32.
\end{aligned}$$

As curvaturas de Ricci, é dicir, os autovalores do operador de Ricci, dunha métrica invariante á esquerda satisfacendo (2.4) veñen dadas por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_1 &= -2-\tfrac{1}{2}(4+(\beta+\gamma)^2+4\alpha(\alpha-2)),\\
\mathrm{Ric}_2 &= -2-\tfrac{1}{2}\sqrt{(4+(\beta-\gamma)^2)((\beta+\gamma)^2+4(\alpha-1)^2)},\\
\mathrm{Ric}_3 &= -2+\tfrac{1}{2}\sqrt{(4+(\beta-\gamma)^2)((\beta+\gamma)^2+4(\alpha-1)^2)}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, a partir destas expresións comprobamos que a métrica invariante á esquerda é Einstein se e só se $\alpha = 1$ e $\beta = -\gamma$. A curvatura escalar é estritamente negativa; en concreto, é menor ou igual que -6, valor que acada se e só se a métrica é Einstein, polo que non hai métricas invariantes á esquerda non Einstein $\mathcal{S}$-críticas nun grupo non unimodular. Ademais, unha métrica invariante á esquerda nun grupo non unimodular é simétrica se e só se é Einstein ou ben satisfai $\beta = \gamma$ e $\det A = 0$. No que resta de sección excluiranse as métricas Einstein cando se faga referencia ás métricas críticas para funcionais cuadráticos.

Ao igual que fixemos no caso dos grupos unimodulares, consideramos o tensor de tipo (0,2) asociado á ecuación (2.2),

$$\mathfrak{F}^t = \Delta\rho + 2(R[\rho]-\tfrac{1}{3}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho-\tfrac{1}{3}\tau g),$$

de xeito que as métricas críticas para o funcional $\mathcal{F}_t$ son aquelas que anulan dito tensor. Dadas as expresións dos elementos da curvatura, as compoñentes non nulas do tensor son as seguintes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t_{11} =& -\tfrac{1}{3}\left(4+4(\alpha-2)\alpha+(\beta+\gamma)^2\right)\times \\
&\left(8+4(\alpha-2)\alpha+3\beta^2-2\beta\gamma+3\gamma^2+t\left(16+4(\alpha-2)\alpha+(\beta+\gamma)^2\right)\right), \\
\mathfrak{F}^t_{22} =& \tfrac{1}{3}\left(8\alpha^4-56\alpha^3-4\alpha^2\left(\beta^2-5\gamma^2-32\right)-2\alpha\left(5\beta^2-6\beta\gamma+29\gamma^2+72\right)\right. \\
&-3\beta^4+\left(\beta^2+40\right)\gamma^2-\beta\left(\beta^2+8\right)\gamma+16\beta^2+5\beta\gamma^3+6\gamma^4+64 \\
&\left.+t(2(\alpha-5)\alpha-(\beta-2\gamma)(\beta+\gamma)+8)\left(16+4(\alpha-2)\alpha+(\beta+\gamma)^2\right)\right), \\
\mathfrak{F}^t_{23} =& -\alpha\gamma\left(4\alpha(2\alpha-5)+\beta^2+16\right)+(\alpha-2)\beta\left(4\alpha(2\alpha-3)+3\beta^2+8\right) \\
&+(\alpha-2)\beta\gamma^2-3\alpha\gamma^3+t((\alpha-2)\beta-\alpha\gamma)\left(16+4(\alpha-2)\alpha+(\beta+\gamma)^2\right), \\
\mathfrak{F}^t_{33} =& -\mathfrak{F}^t_{11}-\mathfrak{F}^t_{22}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dada a descrición do tensor $\mathfrak{F}^t$, estamos en condicións de dar o resultado de clasificación das métricas invariantes á esquerda críticas para algún funcional cuadrático en grupos de Lie non unimodulares.

Teorema 2.10. *Sexa G un grupo de Lie non unimodular de dimensión tres. Unha métrica invariante á esquerda non Einstein g en G é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se a álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G dada por* (2.4) *se corresponde cun dos seguintes casos:*

(1) *A derivación que determina o produto semidirecto é autoadxunta. Neste caso, o funcional $\mathcal{F}_t$ está determinado por*

$$t=-\frac{2-\det A}{4-\det A}=-\frac{\gamma^2+\alpha(\alpha-2)+2}{\gamma^2+\alpha(\alpha-2)+4}$$

e a curvatura escalar vén dada por $\tau=2(\det A-4)$.

(2) *A derivación que determina o produto semidirecto ten determinante cero,* $\det A=0$. *Neste caso, o funcional $\mathcal{F}_t$ está determinado por*

$$t=-\frac{8+3(\beta-\gamma)^2}{16+(\beta-\gamma)^2}$$

e a curvatura escalar vén dada por $\tau=-\frac{1}{2}(16+(\beta-\gamma)^2)$.

Demostración. Dado o tensor $\mathfrak{F}^t$ descrito en (2.10), un grupo de Lie non unimodular admite unha métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se as constantes de estrutura α, β e γ satisfán as ecuacións $\mathfrak{F}^t_{ij}=0$. Un cálculo directo amosa que

$$\tfrac{1}{2}(\beta-2\gamma)\mathfrak{F}^t_{11}-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\mathfrak{F}^t_{22}+(\alpha-1)\mathfrak{F}^t_{23}=2(\beta-\gamma)\det A(\tau+6).$$

Como xa se mencionou antes, unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie non unimodular é Einstein se e só se a súa curvatura escalar é $\tau=-6$, polo que a anulación do último factor da expresión anterior dá lugar ás métricas Einstein. En consecuencia, debemos estudar dúas posibilidades:

1. $\beta = \gamma$, e
2. $\det A = 0$.

Se se cumpren simultaneamente ambas as dúas condicións, a métrica invariante á esquerda é simétrica e a variedade escinde como produto, concretamente $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2(-4)$. Este espazo está incluído na clasificación dada no Lema 2.2. Consideremos agora os dous casos de forma independente.

Caso 1: $\boldsymbol{\beta = \gamma}$.

Con esta condición, os polinomios $\mathfrak{F}^t_{ij}$ redúcense a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^t_{11} &= -\tfrac{16}{3}\left(\gamma^2 + (\alpha-1)^2\right)\mathbf{q}, & \mathfrak{F}^t_{22} &= \tfrac{8}{3}\left(\gamma^2 + (\alpha-1)(\alpha-4)\right)\mathbf{q}, \\ \mathfrak{F}^t_{23} &= -8\gamma\mathbf{q}, & \mathfrak{F}^t_{33} &= \tfrac{8}{3}\left(\gamma^2 + (\alpha-1)(\alpha+2)\right)\mathbf{q}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{q} = 2 + \alpha(\alpha-2) + \gamma^2 + t(4 + \alpha(\alpha-2) + \gamma^2)$. Atendendo á ecuación $\mathfrak{F}^t_{11} = 0$, temos que ou ben $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$, e a métrica é Einstein, ou ben $\mathbf{q} = 0$. Entón, $t = -\frac{\gamma^2+\alpha(\alpha-2)+2}{\gamma^2+\alpha(\alpha-2)+4}$, o que se corresponde co primeiro caso do teorema.

Caso 2: $\det A = 0$**.**

Con esta condición, os polinomios $\mathfrak{F}^t_{ij}$ redúcense a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^t_{11} &= -\tfrac{1}{3}\left((\beta-\gamma)^2 + 4\right)\mathbf{p}, & \mathfrak{F}^t_{22} &= -\tfrac{1}{3}\left((\beta-\gamma)(\beta+2\gamma) + 6\alpha - 8\right)\mathbf{p}, \\ \mathfrak{F}^t_{23} &= (\beta(\alpha-2) - \alpha\gamma)\mathbf{p}, & \mathfrak{F}^t_{33} &= \tfrac{1}{3}\left((\beta-\gamma)(2\beta-2\gamma) + 6\alpha - 4\right)\mathbf{p}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{p} = 8 + 3(\beta-\gamma)^2 + t(16 + (\beta-\gamma)^2)$. Así, $\mathfrak{F}^t_{11} = 0$ se e só se $\mathbf{p} = 0$, é dicir, se e só se $t = -\frac{8+3(\beta-\gamma)^2}{16+(\beta-\gamma)^2}$. Entón, todo grupo non unimodular con $\det A = 0$ admite unha métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_t$-crítica, o que se corresponde co segundo caso do teorema. □

Observación 2.11. As métricas críticas obtidas no caso (1) do Teorema satisfán $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = 0$, é dicir, teñen enerxía cero. Por outra banda, as métricas obtidas no caso (2) satisfán $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -6(\beta-\gamma)^2$. Polo tanto, toda métrica crítica obtida no caso (2) ten enerxía negativa agás se $t = -\frac{1}{2}$, que se corresponde coa variedade simétrica $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2(-4)$ achada na intersección dos dous casos.

Observación 2.12. Para calquera $t \in (-1, -\frac{1}{3}]$ existe unha métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_t$-crítica dada polo Teorema 2.10-1. O caso 2 deste teorema proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para os valores de $t \in (-3, -\frac{1}{2}]$ (véxase a Figura 2.2.2). Para calquera valor de $t \in (-1, -\frac{1}{2})$, existen métricas críticas dos dous tipos reflectidos no teorema. Porén, ditas métricas non son isométricas, xa que as métricas do caso 1 teñen as tres curvaturas de Ricci distintas, mentres que as do caso 2 teñen dúas iguais: $\mathrm{Ric}_1 = \mathrm{Ric}_2 = -\frac{1}{2}(8 + (\beta-\gamma)^2)$ e $\mathrm{Ric}_3 = \frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2$.

Observación 2.13. As métricas invariantes á esquerda nos grupos de Lie non unimodulares con determinante da derivación nulo, $\det A = 0$, son isométricas a métricas invariantes á esquerda no grupo linear especial $SL(2, \mathbb{R})$ (véxase [109]). De feito, o rango de t obtido para os grupos de Lie non unimodulares con $\det A = 0$ coincide co obtido para $SL(2, \mathbb{R})$ no estudo dos grupos de Lie unimodulares, como se pode observar na Figura 2.2.3.

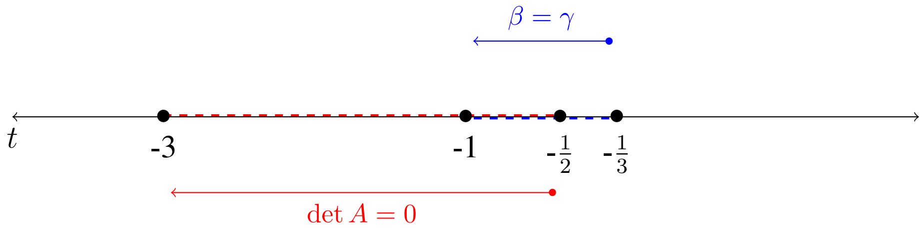


Figura 2.2.2: Rango de t para as métricas $\mathcal{F}_t$-críticas en grupos de Lie non unimodulares.

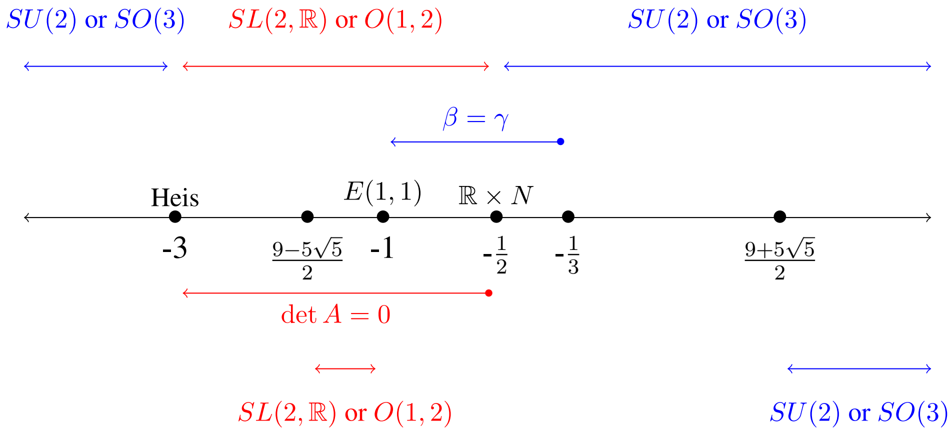


Figura 2.2.3: Rango de t para as métricas $\mathcal{F}_t$-críticas en espazos homoxéneos.

Observación 2.14. Sexa G un grupo de Lie non unimodular descrito como en (2.4). A álxebra de Lie é un produto semidirecto $\mathbb{R}e_1 \ltimes \mathfrak{r}^2$ inducido por unha derivación A da álxebra de Lie abeliana $\mathfrak{r}^2$ xerada por $\mathfrak{r}^2 = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}$. Se $\beta = \gamma$, a derivación é simétrica e, polo tanto, diagonalizable nunha base ortogonal $\{v_2, v_3\}$ con autovalores $\nu_\pm = 1 \pm \sqrt{\gamma^2 + (\alpha-1)^2}$. Así, as constantes de estrutura na base $\{v_1 = e_1, v_2, v_3\}$ teñen a forma:

$$[v_1, v_2] = \nu_+ v_2, \quad [v_1, v_3] = \nu_- v_3, \quad [v_2, v_3] = 0.$$

Sexan $\{v^1, v^2, v^3\}$ as 1-formas duais correspondentes, as constantes de estrutura poden ser escritas como $dv^1 = 0$, $dv^2 = -\nu_+ v^1 \wedge v^2$, e $dv^3 = -\nu_- v^1 \wedge v^3$. Así, os grupos de Lie con métrica invariante á esquerda obtidos no caso 1 do Teorema 2.10 son isométricos a $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (r, x, y) e a métrica

$$g_{(1)} = dr^2 + e^{-2r\nu_+} dx^2 + e^{-2r\nu_-} dy^2.$$

Dun xeito análogo, se $\det A = 0$, a álxebra de Lie correspondente é un produto semidirecto $\mathbb{R}e_1 \ltimes \mathfrak{r}^2$ inducido por unha derivación A de $\mathfrak{r}^2$ con autovalores $\nu = 0$ e $\mu = 0$. Se A fose diagonal, o espazo sería localmente simétrico, polo que podemos asumir, reordenando a base de ser necesario, que $\beta \neq 0$. Así, a derivación A diagonaliza na base

$$\left\{ v_2 = \tfrac{\alpha-2}{\beta} e_2 + e_3, v_3 = \tfrac{\alpha}{\beta} e_2 + e_3 \right\}.$$

Nesta base, as constantes de estrutura poden ser escritas como $dv^1 = 0$, $dv^2 = 0$, e $dv^3 = -2v^1 \wedge v^3$. Polo tanto, os grupos de Lie con métrica invariante á esquerda obtidos no caso 2 do Teorema 2.10 son isométricos a $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (r, x, y) e métrica

$$g_{(2)} = dr^2 + \tfrac{(\alpha-2)^2+\beta^2}{\beta^2} dx^2 + \tfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2} e^{-4r} dy^2 + \tfrac{2(\alpha(\alpha-2)+\beta^2)}{\beta^2} e^{-2r} dxdy.$$

Observación 2.15. Unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie dise *cíclica* se satisfai $\mathfrak{S}_{XYZ}\, g([X, Y], Z) = 0$, sendo $\mathfrak{S}_{XYZ}$ a notación para a suma cíclica en X, Y e Z. En [71] amósase que unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie non unimodular de dimensión tres determinado por (2.4) é cíclica se e só se $\beta = \gamma$, o que se corresponde co caso 1 do Teorema 2.10. Polo tanto, pódese concluír que calquera métrica invariante á esquerda cíclica nun grupo de Lie non unimodular é $\mathcal{F}_t$-crítica para un $t \in (-1, -\frac{1}{3}]$ adecuado.

2.3. Casos especiais

Antes de abordarmos o estudo sistemático de todos os funcionais cuadráticos da curvatura e obtermos a clasificación presentada nas seccións 2.1 e 2.2, outros autores estudaron funcionais concretos cun significado xeométrico destacado. Nesta sección particularízanse os resultados xerais obtidos no Lema 2.2 e nos Teoremas 2.4 e 2.10 para algúns valores específicos do parámetro t con especial relevancia xeométrica, comparando cos resultados obtidos anteriormente na literatura, de ser o caso.

2.3.1. O funcional dado pola norma L^2 do tensor de curvatura: o valor crítico $t = -\frac{1}{4}$

O funcional determinado por $t = -\frac{1}{4}$ é proporcional ao definido mediante a norma L^2 do tensor de curvatura, $\mathcal{R} = \int_M \|R\|^2$. Este funcional foi estudado con anterioridade por Lamontagne en [98], quen construíu métricas críticas non Einstein en $\mathbb{S}^3$.

Séguese do Lema 2.2 e dos Teoremas 2.4 e 2.10 que unha métrica homoxénea non Einstein de dimensión tres é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{4}$ se e só se é unha métrica invariante á esquerda en $SO(3)$ ou $SU(2)$ determinada polas constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, \frac{4}{11}\lambda)$. Isto completa o traballo de Lamontagne, xa que demostra que as métricas construídas no seu traballo son as únicas métricas homoxéneas críticas para este funcional. Neste caso, o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \frac{4}{11}\lambda^2 \mathrm{diag}[9, 9, 2]$, e a xeometría subxacente é a dunha esfera de Berger. Así, para este funcional obtemos a seguinte conclusión:

> *Un espazo localmente homoxéneo é crítico para o funcional $F_{-1/4}$ se e só se é Einstein ou é a métrica invariante á esquerda na esfera $\mathbb{S}^3$ construída por Lamontagne en* [98].

2.3.2. O funcional dado pola norma L^2 do tensor de Ricci: o valor crítico $t = 0$

As métricas homoxéneas que son críticas para o funcional determinado pola norma L^2 do tensor de Ricci son Einstein ou métricas invariantes á esquerda nos grupos de Lie unimodulares $SU(2)$ ou $SO(3)$ determinadas polas constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, \frac{2}{3}\lambda)$. Neste caso, o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \frac{2}{9}\lambda^2 \mathrm{diag}[2, 2, 1]$.

2.3.3. O funcional dado pola norma L^2 do tensor de Ricci sen traza: o valor crítico $t = -\frac{1}{3}$

Dada unha variedade riemanniana de dimensión tres (M, g), o tensor de Ricci sen traza, $\rho_0 = \rho - \frac{1}{3}\tau g$, mide canto dista a variedade de ser Einstein. O funcional determinado por $t = -\frac{1}{3}$ correspóndese coa norma L^2 do tensor de Ricci sen traza. Tanno estudou a relación de dito funcional coas métricas Einstein en [130] e Sekigawa construíu métricas críticas non Einstein en $SU(2)$ en [121].

O Teorema 2.10 amosa que un grupo non unimodular admite unha métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{3}$ se e só se a variedade é Einstein. Por outra banda, o Teorema 2.4 amosa que un grupo de Lie unimodular G admite unha métrica invariante á esquerda non Einstein e $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{3}$ se e só se $G = SO(3)$ e a métrica invariante á esquerda está determinada polas constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, \frac{1}{4}\lambda)$. Neste caso, o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \frac{1}{32}\lambda^2 \mathrm{diag}[7, 7, 1]$.

2.3.4. O funcional dado pola norma L^2 do tensor de Schouten: o valor crítico $t = -\frac{5}{16}$

Dado que a norma do tensor de Schouten dunha variedade de dimensión tres vén dada pola expresión $\|S\|^2 = \|\rho\|^2 - \frac{5}{16}\tau^2$, o funcional dado pola norma L^2 do tensor de Schouten correspóndese co funcional $\mathcal{F}_t$ con $t = -\frac{5}{16}$. As métricas homoxéneas non Einstein críticas para este funcional realízanse como métricas invariantes á esquerda en $SO(3)$ ou $SU(2)$ con constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, \frac{12}{43}\lambda)$. Neste caso o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \frac{12}{1849}\lambda^2 \mathrm{diag}[37, 37, 6]$.

2.3.5. O valor crítico $t = -\frac{3}{8}$

Denotemos por $\sigma_2(S)$ a segunda función simétrica elemental dos autovalores do tensor de Schouten S. No caso das variedades de dimensión tres, esta función vén dada por $\sigma_2(S) = -\frac{1}{2}\left(\|\rho\|^2 - \frac{3}{8}\tau^2\right)$, polo que $\int_M \sigma_2(S) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{-3/8}$. Gursky e Viaclovsky deron en [80] unha caracterización dos espazos forma como métricas $\sigma_2(S)$-críticas con enerxía non negativa.

Séguese do Teorema 2.10 que un grupo de Lie non unimodular é $\mathcal{F}_t$-crítico para $t = -\frac{3}{8}$ se e só se está determinado por (2.4) con $\beta = \gamma$ e $\alpha = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{5} - \gamma^2}$. Neste caso, as curvaturas de Ricci son $\{-\frac{12}{5}, -2 + \frac{\sqrt{5}}{5}, -2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\}$ e o funcional ten enerxía cero (véxase a Observación 2.11). Un cálculo directo amosa que a variedade non é localmente conformemente chá, o que deixa claro que a compacidade é unha suposición esencial no traballo de Gursky e Viaclovsky [80, Teorema 5.1]. Ademais, dado que $\tau = -\frac{32}{5}$, a suposición $\tau \geq 0$ non pode ser excluída en [47].

No caso unimodular, o Teorema 2.4 amosa que un grupo de Lie unimodular G é crítico para $\mathcal{F}_t$ con $t = -\frac{3}{8}$ se e só se G é $SO(3)$ ou $SU(2)$ e a métrica invariante á esquerda vén dada polas constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, \frac{4}{21}\lambda)$. O operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \frac{4\lambda^2}{441}\mathrm{diag}[19, 19, 2]$ e, polo tanto, ten curvatura seccional positiva. A enerxía do funcional vén dada por $\frac{32}{3087}\lambda^4$, polo que $\sigma_2(S) < 0$. Estes exemplos, que se corresponden coas métricas críticas na esfera $\mathbb{S}^2$ contruídas en [80], amosan que a suposición de $\sigma_2(S) \geq 0$ é necesaria en [47].

2.3.6. O funcional dado polo polinomio de volume cuadrático: o valor crítico $t = \frac{13}{4}$

Denotemos por $V_p(r)$ o volume dunha esfera xeodésica, $V_p(r) = \mathrm{vol}\{\exp_p(x) : \|x\| \leq r\}$. Se tomamos a expansión en serie de potencias, o termo de segunda orde está determinado pola curvatura escalar, mentres que o termo de orde catro vén dado polo polinomio cuadrático de volume $V_2 = 8\|\rho\|^2 - 3\|R\|^2 + 5\tau^2 - 18\Delta\tau$ (véxase [78]). Polo tanto, o funcional cuadrático determinado por este polinomio é

$$\mathcal{V} : g \mapsto \mathcal{V}(g) = \int_M V_2(g)\mathrm{dvol}_g = \int_M \{8\|\rho\|^2 - 3\|R\|^2 + 5\tau^2\}\mathrm{dvol}_g.$$

En dimensión tres sabemos que $\|R\|^2 = 2\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2$, logo o funcional determinado polo polinomio cuadrático de volume é $2\mathcal{F}_{13/4}$.

Séguese dos resultados previos que unha variedade homoxénea de dimensión tres é crítica para o funcional de volume se e só se se corresponde cunha métrica invariante á esquerda dada por (2.3) con constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, \frac{12}{5}\lambda)$ realizada en $SO(3)$ ou $SU(2)$. Neste caso o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \frac{12}{25}\lambda^2\mathrm{diag}[-1, -1, 6]$.

2.3.7. O funcional dado polo polinomio espectral cuadrático: o valor crítico $t = 2$

O polinomio espectral cuadrático está determinado por $S_2 = 2\|R\|^2 - 2\|\rho\|^2 + 5\tau^2 + 12\Delta\tau$ (véxase [12, 78]). En dimensión tres, o funcional xerado por este polinomio é equivalente a $\mathcal{F}_2$. Do Lema 2.2 e dos Teoremas 2.4 e 2.10 séguese que unha variedade homoxénea de dimensión tres é crítica para o funcional espectral se e só se se corresponde cunha métrica invariante á esquerda determinada por (2.3) con constantes de estrutura da forma $(\lambda, \lambda, 2\lambda)$ realizada en $SO(3)$ ou $SU(2)$. Neste caso, o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[0, 0, 2\lambda^2]$.

2.3.8. O valor crítico $t = -\frac{1}{2}$

O polinomio cuadrático da distancia media dun movemento browniano está determinado por $\mathcal{E}_2 = -6\Delta\tau - \|R\|^2 + \|\rho\|^2$ (véxase [92]). O funcional xerado por este polinomio correspóndese con $\mathcal{F}_{-1/2}$ en dimensión tres. Do Lema 2.2 obtemos que toda variedade simétrica de dimensión tres é crítica para este funcional e dos Teoremas 2.4 e 2.10 séguese que as métricas invariantes á esquerda nun grupo de Lie arbitrario son $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas se e só se son simétricas. Logo, obtemos a seguinte conclusión que estende o Teorema 1.2 (i) en [45]:

> *Unha variedade (localmente) homoxénea non Einstein de dimensión tres, completa e simplemente conexa é crítica para o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$ se e só se se corresponde(localmente) cun produto $\mathbb{R} \times N(c)$.*

2.3.9. O valor crítico $t = -3$

O grupo de Heisenberg é o único grupo de Lie unimodular determinado polas constantes de estrutura da forma $(0, 0, \lambda)$. Séguese do Teorema 2.4-1 que o grupo de Heisenberg é crítico para $t = -3$, e dos demais resultados obtense que é a única métrica crítica para dito funcional. Polo tanto, conclúese o seguinte:

> *Unha variedade localmente homoxénea de dimensión tres, completa e simplemente conexa é crítica para o funcional $\mathcal{F}_{-3}$ se e só se se corresponde coa xeometría Nil_3.*

Ademais, neste caso $\|\rho\|^2 - 3\tau^2 = 0$, polo que este funcional ten enerxía cero para Nil_3.

2.3.10. O valor crítico $t = -1$

Un grupo de Lie non unimodular é $\mathcal{F}_{-1}$-crítico se e só se as constantes de estrutura están determinadas por $\det A = 0$ e $\gamma = \beta \pm 2$. Neste caso, o operador de Ricci ten autovalores $(-6, -6, 2)$ e $\|\rho\|^2 - \tau^2 = -24 < 0$.

Un grupo de Lie unimodular non Einstein é $\mathcal{F}_{-1}$-crítico se e só se se corresponde cun dos seguintes casos:

- O grupo de Poincaré $E(1, 1)$ de movementos ríxidos no plano de Minkowski cunha métrica invariante á esquerda determinada polas constantes de estrutura da forma $(0, \lambda, -\lambda)$. Neste caso, o operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[-2\lambda^2, 0, 0]$ e a enerxía do funcional é cero.

- $SL(2, \mathbb{R})$ ou $O(1, 2)$ cunha métrica invariante á esquerda determinada por $(\lambda, \lambda, -\lambda)$. O operador de Ricci é da forma $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{diag}[3, 3, 1]$ e $\|\rho\|^2 - \tau^2 = -\frac{3}{2}\lambda^4 < 0$.

A modo de conclusión, obtemos a seguinte afirmación:

> *Unha variedade localmente homoxénea de dimensión tres, completa e simplemente conexa é crítica para o funcional $\mathcal{F}_{-1}$ con enerxía cero se e só se é isométrica ao grupo de Lie $E(1, 1)$ coa xeometría Sol_3.*

2.4. Métricas homoxéneas críticas e solitóns de Ricci

Dado que tanto os solitóns de Ricci coma as métricas críticas para funcionais cuadráticos xeneralizan as métricas Einstein, é natural preguntarse se existe unha relación entre elas e investigar, polo tanto, cal é a intersección entre ambas xeneralizacións.

No contexto dos grupos de Lie, os nilsolitóns son solitóns de Ricci alxébricos que se realizan sobre un grupo de Lie nilpotente. Lauret amosou en [99] que estes solitóns xorden como métricas críticas do seguinte xeito. Consideremos un espazo dotado dun produto interior $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. O conxunto $\mathcal{N}$ dos corchetes de Lie nilpotentes en $\mathfrak{n}$, o cal é un subconxunto de $\Lambda^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n}$, é invariante pola acción natural de $GL(\mathfrak{n})$ en $\Lambda^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n}$. Utilizamos o produto interior fixado anteriormente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para considerar calquera $\mu\in\mathcal{N}$ coma unha variedade nilpotente homoxénea $(N_\mu, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, onde N_μ é o grupo de Lie simplemente conexo con álxebra de Lie $(\mathfrak{n},\mu)$ dotado dunha métrica invariante á esquerda determinada polo produto interior, de tal xeito que os elementos isométricos pertencen á mesma $O(\mathfrak{n})$-órbita. Sexa $\mathscr{F}$ o funcional en $\Lambda^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n}$ definido como $\mathscr{F}(\mu) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}_\mu^2$. Utilizando o produto interior inducido en $\Lambda^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n}$, definimos $\mathsf{S} = \{\mu\in\Lambda^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n} : \|\mathfrak{n}\| = 1\}$, o conxunto de variedades nilpotentes asociadas a $(\mathfrak{n},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ de curvatura escalar fixada, $\mathsf{S}\cap\mathcal{N} = \{\mu\in\mathcal{N} : \tau(\mu) = -\frac{1}{4}\}$. Neste contexto, temos o seguinte resultado de Lauret.

Teorema 2.16 (Lauret [99])**.** *Dado un elemento $\mu\in\mathsf{S}\cap\mathcal{N}\subset\Lambda^2\mathfrak{n}^*\otimes\mathfrak{n}$, $(N_\mu,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ é un nilsolitón de Ricci se e só se μ é un punto crítico de $\mathscr{F}$ restrinxido a* S.

O propósito desta sección é estender este resultado amosando que os solitóns de Ricci homoxéneos no caso tridimensional xorden como métricas críticas para certos funcionais cuadráticos da curvatura.

Teorema 2.17. *Sexa (M,g) unha variedade riemanniana homoxénea de dimensión tres. Entón, (M,g) é un solitón de Ricci se e só se (M,g) é crítica para un funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero.*

Na Sección 2.4.1 veremos que todo solitón de Ricci homoxéneo é crítico para un funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero, mentres que na 2.4.2 amosaremos que todas as métricas críticas obtidas para funcionais con enerxía cero son solitóns alxébricos (ver Lemas 2.18 e 2.19). Deste xeito, o Teorema 2.17 é consecuencia directa das seccións vindeiras.

2.4.1. Os solitóns de Ricci homoxéneos son $\mathcal{F}_t$-críticos con enerxía cero

Sexa (M,g) unha variedade riemanniana homoxénea simplemente conexa de dimensión tres (no caso de non ser simplemente conexa, traballarase co recubrimento universal). Entón, o grupo de isometrías ten dimensión tres, catro ou seis, correspondéndose este último caso coas variedades de curvatura seccional constante. Se a dimensión é catro, a variedade é isométrica a un produto $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2$, á xeometría Nil_3, a unha esfera de Berger, ou á xeometría $SL(2,\mathbb{R})$. Os espazos produto son simétricos, polo tanto son solitóns de Ricci gradientes ríxidos, e considerarémolos coma o caso (i). Nil_3 é un solitón de Ricci alxébrico e será considerado como caso

(ii). Pola súa parte, as esferas de Berger e a xeometría $SL(2, \mathbb{R})$ son solitóns de Ricci se e só se son Einstein, xa que admiten un grupo de isometrías semi-simple e transitivo [87].

Se o grupo de isometrías ten dimensión tres, a variedade é isométrica a un grupo de Lie cunha métrica invariante á esquerda e é un solitón de Ricci se e só se é un solvsolitón [6]. Ademais, un cálculo directo seguindo [110] amosa que (M, g) é isométrica a un grupo de Lie simplemente conexo determinado por unha destas álxebras de Lie dadas nunha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ como

$$\begin{array}{llll} (iii) & [e_1, e_2] = 0, & [e_2, e_3] = \lambda e_1, & [e_3, e_1] = -\lambda e_2. \\ (iv) & [e_1, e_2] = \mu_2 e_2, & [e_1, e_3] = \mu_3 e_3, & [e_2, e_3] = 0. \end{array}$$

O caso (iii) determina unha métrica invariante á esquerda no grupo de Poincarè $E(1, 1)$ con $\operatorname{rang}\{\mathrm{Ric}\} = 1$ e constante do solitón $c = -2\lambda^2$, o cal se corresponde coa xeometría Sol_3. As métricas invariantes á esquerda do caso (iv) son isométricas a $\mathbb{R}^3$ coa métrica $g = dr^2 + e^{-2\mu_2 r} dx^2 + e^{-2\mu_3 r} dy^2$. Esta familia de variedades satisfai $\operatorname{rang}\{\mathrm{Ric}\} \geq 2$ e a constante do solitón é $c = -(\mu_2^2 + \mu_3^2)$.

Relacionando estes catro casos co Lema 2.2 e os Teoremas 2.4 e 2.10, podemos concluír o seguinte.

(i) Os produtos simétricos $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ son $\mathcal{F}_t$-críticas se e só se $t = -\frac{1}{2}$. Ademais, $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

(ii) O grupo de Heisenberg é $\mathcal{F}_t$-crítico se e só se $t = -3$. Ademais, $\|\rho\|^2 - 3\tau^2 = 0$.

(iii) O grupo de Poincarè admite unha métrica $\mathcal{F}_t$-críticas se e só se $t = -1$, correspondéndose coa xeometría Sol_3. Ademais, $\|\rho\|^2 - \tau^2 = 0$.

(iv) Os grupos de Lie non unimodulares desta familia son $\mathcal{F}_t$-críticas se e só se $t = -\frac{\|\rho\|^2}{\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mu_2^2+\mu_3^2}{\mu_2^2+\mu_2\mu_3+\mu_3^2}$ cos parámetros satisfacendo $\mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$.

Polo tanto, todos os solitóns de Ricci homoxéneos de dimensión tres son variedades riemannianas con métricas $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero.

2.4.2. As métricas homoxéneas $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero son solitóns de Ricci

Toda métrica Einstein é un solitón de Ricci e tamén é $\mathcal{F}_t$-crítica para calquera valor de t, polo que o caso Einstein é trivial nesta análise. Para toda variedade riemanniana de dimensión tres tense que $3\|\rho\|^2 \geq \tau^2$, polo que $-\frac{\|\rho\|^2}{\tau^2} \leq -\frac{1}{3}$. Para $t = -\frac{1}{3}$, a enerxía é cero se e só se a métrica é Einstein, logo para as métricas non Einstein con enerxía cero, o valor de t debe ser estritamente menor que $-\frac{1}{3}$. As métricas críticas homoxéneas foron estudadas nas seccións previas, polo que podemos abordar o problema a partir dos resultados xa demostrados.

Polo Lema 2.2, un produto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ é $\mathcal{F}_t$-crítico se e só se $t = -\frac{1}{2}$. Neste caso a enerxía do funcional vén dada por $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = 2c^2 - \frac{1}{2}(2c)^2 = 0$, onde c é a curvatura seccional de $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{H}^2$.

Dado o tensor $\mathfrak{F}^t$ definido en (2.6), consideremos agora o tensor (0,2) definido como

$$\overline{\mathfrak{F}} = \tau \mathfrak{F}^{-\frac{\|\rho\|^2}{\tau^2}} = \tau\Delta\rho + 2\tau R[\rho] - 2\|\rho\|^2\rho.$$

Para o caso das métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie unimodulares, definidas a partir dos corchetes dados en (2.3), podemos realizar un cambio nas constantes de estrutura tal que $\lambda_1 = \mu_2 + \mu_3$, $\lambda_2 = \mu_1 + \mu_3$ e $\lambda_3 = \mu_1 + \mu_2$. Deste xeito, as compoñentes non nulas do tensor expresadas na base $\{e_1, e_2, e_3\}$ son as seguintes:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{F}}_{11} &= 8(\mu_2 + \mu_3)\left(\mu_1^3(\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_1^2\left(\mu_2^3 + \mu_3^3\right) - \mu_2^2\mu_3^2(\mu_2 + \mu_3)\right),\\
\overline{\mathfrak{F}}_{22} &= 8(\mu_1 + \mu_3)\left(\mu_2^3(\mu_1 - \mu_3)^2 + \mu_2^2\left(\mu_1^3 + \mu_3^3\right) - \mu_1^2\mu_3^2(\mu_1 + \mu_3)\right),\\
\overline{\mathfrak{F}}_{33} &= 8(\mu_1 + \mu_2)\left(\mu_3^3(\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_3^2\left(\mu_1^3 + \mu_2^3\right) - \mu_1^2\mu_2^2(\mu_1 + \mu_2)\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Traballaremos módulo permutación de índices para anular os polinomios $\overline{\mathfrak{F}}_{ii}$. Se $\mu_3 = -\mu_1$, anúlase o polinomio $\overline{\mathfrak{F}}_{22}$ e

$$\overline{\mathfrak{F}}_{11} = -\overline{\mathfrak{F}}_{33} = 16\mu_1^3\mu_2(\mu_2^2 - \mu_1^2).$$

Polo tanto, se g non é Einstein, tense que $\mu_2 = 0$ ou $\mu_2 = \pm\mu_1$. Se $\mu_2 = 0$, as constantes de estrutura satisfán $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\mu_1, 0, \mu_1)$, correspondéndose co grupo de Poincarè. Se $\mu_2 = \pm\mu_1$, as constantes de estrutura satisfán $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 2\mu_1)$ no caso positivo e $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2\mu_1, 0, 0)$ no negativo, correspondéndose ambos casos co grupo de Heisenberg.

Se para todo $i \neq j$ se ten que $\mu_i + \mu_j \neq 0$, os factores da dereita das expresións en (2.11) deben anularse simultaneamente, é dicir, terase que $a_i = 0$ con

$$\begin{aligned}
a_1 &= \mu_1^3(\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_1^2\left(\mu_2^3 + \mu_3^3\right) - \mu_2^2\mu_3^2(\mu_2 + \mu_3),\\
a_2 &= \mu_2^3(\mu_1 - \mu_3)^2 + \mu_2^2\left(\mu_1^3 + \mu_3^3\right) - \mu_1^2\mu_3^2(\mu_1 + \mu_3),\\
a_3 &= \mu_3^3(\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_3^2\left(\mu_1^3 + \mu_2^3\right) - \mu_1^2\mu_2^2(\mu_1 + \mu_2).
\end{aligned}$$

Consideremos as combinacións

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= 2\mu_1\mu_2\left(\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\mu_3\right),\\
a_1 + a_3 &= 2\mu_1\mu_3\left(\mu_1\mu_3(\mu_1 + \mu_3) - \left(\mu_1^2 + \mu_3^2\right)\mu_2\right),\\
a_2 + a_3 &= 2\mu_2\mu_3\left(\mu_2\mu_3(\mu_2 + \mu_3) - \left(\mu_2^2 + \mu_3^2\right)\mu_1\right).
\end{aligned}$$

Se $\mu_1 = 0$, séguese de $a_2 + a_3 = 0$ que $\mu_2^2\mu_3^2(\mu_2 + \mu_3) = 0$, mais dado que $\mu_i + \mu_j \neq 0$, o polinomio non se anula. Seguindo un razoamento análogo obtemos o mesmo resultado para $\mu_2 = 0$ e $\mu_3 = 0$.

Se $\mu_i \neq 0$, para $i = 1,\ 2,\ 3$, tense que $a_1 + a_2 = 0$ se $\mu_3 = \frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1^2+\mu_2^2}$. Así,

$$a_1 + a_3 = 4\frac{\mu_1^4\mu_2^3(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1^3 - \mu_2^3)}{(\mu_1^2 + \mu_2^2)^3}.$$

Se $a_1 + a_3 = 0$, entón $\mu_1 = \mu_2$, mais neste caso tamén se ten que $\mu_3 = \mu_1$ e a métrica é Einstein. Polo tanto, podemos concluír o seguinte:

Lema 2.18. *Sexa G un grupo de Lie unimodular de dimensión tres. Unha métrica invariante á esquerda g en G é $\mathcal{F}_t$-crítica con enerxía cero se e só se se corresponde cun dos seguintes casos:*

(a) $G = E(1,1)$ *é o grupo de Poincarè e a métrica está determinada por* (2.3) *con constantes de estrutura* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\lambda, 0, \lambda)$. *Neste caso, a métrica é crítica para* $t = -1$.

(b) $G = \mathrm{Heis}_3$ *é o grupo de Heisenberg e a métrica está determinada por* (2.3) *con constantes de estrutura* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \lambda)$. *Neste caso, a métrica é crítica para* $t = -3$.

Ademais, as variedades en (a) e (b) correspóndense cos casos (ii) e (iii) da sección 2.4.1, respectivamente, polo que ambos son solitóns de Ricci.

Para o caso das métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie non unimodulares, definidas a partir dos corchetes dados en (2.4), podemos realizar un cambio nas constantes de estrutura tal que $\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = -(1 - \xi)\eta$ e $\delta = 1 - \xi$ (véxase [110]). Sen perda de xeneralidade, podemos asumir que $\xi, \eta \geq 0$. Con este cambio, as curvaturas de Ricci dunha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie non unimodular veñen dadas por

$$\mathrm{Ric}_1 = -2(1 + (1 + \eta^2)\xi^2), \quad \mathrm{Ric}_2 = -2(1 + (1 + \eta^2)\xi), \quad \mathrm{Ric}_3 = -2(1 - (1 + \eta^2)\xi).$$

Así, a métrica é Einstein se e só se $\xi = 0$, e é simétrica se e só se é Einstein ou $\eta = 0$ e $\xi = 1$, correspondéndose neste caso cun produto $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

As compoñentes non nulas do tensor $\overline{\mathfrak{F}}$ expresadas na base $\{e_1, e_2, e_3\}$ son as seguintes:

$$\begin{aligned} &\overline{\mathfrak{F}}_{11} = -4\eta\xi\mathbf{r}, \qquad && \overline{\mathfrak{F}}_{22} = -\eta\left(3 - 2\xi - (\eta^2 - 2)\xi^2 + (\eta^2 + 1)\xi^4\right)\mathbf{r}, \\ &\overline{\mathfrak{F}}_{33} = -(\overline{\mathfrak{F}}_{22} + \overline{\mathfrak{F}}_{11}), && \overline{\mathfrak{F}}_{23} = \overline{\mathfrak{F}}_{32} = (\xi^2 - 1)\,\mathbf{r}\left((\eta^2 + 1)\,\xi^2 + 3\right), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r} = 16\eta\xi\,(\eta^2 + 1)$. $\overline{\mathfrak{F}}_{11}$ anúlase se e só se $\xi = 0$, e a métrica é Einstein, ou $\eta = 0$, e $\overline{\mathfrak{F}} = 0$. Polo tanto a métrica é crítica con enerxía cero. Esta última condición correspóndese co caso (iv) da sección 2.4.1, polo que a variedade resultante é un solitón de Ricci. Así, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.19. *Sexa G un grupo de Lie non unimodular de dimensión tres. Unha métrica invariante á esquerda g en G é $\mathcal{F}_t$-crítica con enerxía cero se e só se $\eta = 0$, en cuxo caso (G, g) é un solitón de Ricci.*

Observación 2.20. A diferenza do caso unimodular, onde o valor de $t = -\frac{\|\rho\|^2}{\tau^2}$ está fixado para cada unha das familias obtidas, o valor de t para os grupos de Lie non unimodulares é $t = -\frac{1+\xi^2}{3+\xi^2} \in (-1, -\frac{1}{3}]$. Polo tanto, existe unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie non unimodular que é $\mathcal{F}_t$-crítica con enerxía cero para cada $t \in (-1, -\frac{1}{3}]$ e o valor extremo $t = -\frac{1}{3}$ correspóndese co caso Einstein.

Observación 2.21. O operador de Ricci da familia non unimodular obtida vén dado por $\mathrm{Ric} = -2\mathrm{diag}[(1 + \xi^2), (1 + \xi), (1 - \xi)]$, polo que ten tres autovalores diferentes e ten rango máximo agás para $\xi = 1$, en cuxo caso é unha variedade simétrica e $\mathrm{rang}\,\{\mathrm{Ric}\} = 2$. No caso do grupo de Heisenberg, o operador de Ricci vén dado por $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\mathrm{diag}[\lambda^2, \lambda^2, -\lambda^2]$, polo que tamén satisfai $\mathrm{rang}\,\{\mathrm{Ric}\} = 3$, mais os autovalores non son diferentes. Por último, o operador de Ricci da métrica invariante á esquerda do grupo de Poincarè vén dado por $\mathrm{Ric} = -2\mathrm{diag}[0, \lambda^2, 0]$, polo que ten rango un.

En conclusión, as variedades non Einstein obtidas nesta sección non son isométricas.

Capítulo 3
Métricas críticas homoxéneas riemannianas de dimensión catro

Neste capítulo seguiremos a liña do estudado no capítulo previo mais nunha dimensión superior. Traballaremos no ámbito homoxéneo, polo que tanto τ como $\|\rho\|$ son constantes e as ecuacións (1.7)-(1.8) redúcense a

$$\tau\left(\rho - \tfrac{1}{4}\tau\, g\right) = 0, \qquad \Delta\rho + 2\left(R[\rho] - \tfrac{1}{4}\|\rho\|^2\, g\right) + 2t\tau\left(\rho - \tfrac{1}{4}\tau\, g\right) = 0. \tag{3.1}$$

Centrándonos no caso no que a enerxía do funcional $\mathcal{F}_t$ é cero, o valor de t vén dado por $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2}$. Nótese que $\tau = 0$ implica que $\|\rho\|^2 = 0$ e a métrica é chá [1]. Polo tanto a segunda ecuación en (3.1) redúcese neste caso a

$$\Delta\rho + 2R[\rho] - 2\tau^{-1}\|\rho\|^2\rho = 0, \tag{3.2}$$

a cal caracteriza as métricas $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero no caso homoxéneo. Ademais, dado que toda variedade riemanniana satisfai $\|\rho\|^2 \geq \frac{1}{4}\tau^2$, dándose a igualdade se e só se a métrica é Einstein, unha métrica homoxénea é crítica con enerxía cero se e só se $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2} \leq -\frac{1}{4}$, onde se ten a igualdade só para as métricas Einstein.

As métricas Einstein homoxéneas en dimensión catro son simétricas (véxase [89]). A métrica produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ é así mesmo simétrica e crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. A diferenza con respecto ás métricas Einstein é que a enerxía de calquera funcional $\mathcal{F}_t$ definido sobre $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ é $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = \|\rho\|^2 = 4$. De feito, un cálculo explícito amosa que a curvatura escalar dunha métrica non Einstein Bach-chá (e, polo tanto, $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica) nunca se anula [41] e entón ningunha outra métrica é crítica simultaneamente para os funcionais $\mathcal{S}$ e $\mathcal{F}_{-1/3}$.

Neste capítulo obteremos diversos resultados dependendo da variedade homoxénea sobre a que esteamos traballando. Non obstante, podemos englobar todos estes resultados nun único teorema.

Teorema 3.1. *Unha métrica homoxénea é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero se e só se é homotético ou ben a un solitón de Ricci ou a unha métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ determinada por*

$$[e_1, e_4] = e_1 + ce_3, \quad [e_2, e_4] = -(p+1)e_2 + he_3, \quad [e_3, e_4] = -ce_1 - he_2 + pe_3,$$

con respecto a unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$, onde $c^2 + h^2 \neq 0$ e

(i) Se a constante de estrutura $c = 0$, entón $p = \kappa - \frac{1}{2}$ para $\kappa > \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $h^2 = \kappa^2 \frac{4\kappa^2+3}{4\kappa^2-3}$. Estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{48\kappa^4-9}{16\kappa^4-9} \in (-\infty, -3)$.

(ii) *Se a constante de estrutura* $p = -2$*, entón* $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9-2c^2}$ *para* $0 < c < \frac{3}{\sqrt{2}}$*. Estas métricas son* $\mathcal{F}_{-13/4}$*-críticas.*

(iii) *Se* $(p+2)ch \neq 0$*, entón* c *e* h *son as solucións positivas de*

$$c^2 = -\tfrac{(2p+1)(8p^3+15p^2+3p+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}, \quad h^2 = \tfrac{(p+1)(p-1)(5p^3+12p^2+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)},$$

para algún $p \neq 0$*, con* $p \in (-\infty, \zeta_1) \cup (\zeta_2, -1) \cup (\frac{1-\sqrt{21}}{10}, \frac{1+\sqrt{21}}{10})$*, onde* $\zeta_1 = -2,433\ldots$ *e* $\zeta_2 = -1,697\ldots$ *son as únicas solucións reais das ecuacións* $5p^3 + 12p^2 + 1 = 0$ *e* $8p^3 + 15p^2 + 3p + 1 = 0$*, respectivamente. Estas métricas son* $\mathcal{F}_t$*-críticas para* $t = -\frac{30p^4-3p^2-6p-3}{2(p^2+p+1)(5p^2-p-1)} \in (-\infty, -\frac{3}{2})$*.*

3.1. Espazos simétricos

Do mesmo xeito que en dimensión tres, os espazos homoxéneos de dimensión catro son simétricos ou localmente isométricos a un grupo de Lie dotado dunha métrica invariante á esquerda [10, 122]. A análise dos espazos simétricos de dimensión catro séguese considerando as diferentes posibilidades para os autovalores do operador de Ricci. Así, os espazos simétricos de dimensión catro son as seguintes métricas $\mathcal{F}_t$-críticas.

(i) Métricas Einstein: son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura e $\tau \neq 0$. En particular, son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2} = -\frac{1}{4}$.

(ii) Produtos localmente conformemente chans $\mathbb{R} \times N^3(\kappa)$. Neste caso a métrica é $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica. Ademais, a enerxía do funcional é cero, $\|\rho\|^2 - \frac{1}{3}\tau^2 = 0$.

(iii) Produtos localmente conformemente chans $N_1(\kappa) \times N_2(-\kappa)$. Neste caso a métrica é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura con enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = 4\kappa^2 \neq 0$.

(iv) Produtos $\mathbb{R}^2 \times N^2(\kappa)$. Neste caso a métrica é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica con enerxía cero.

(v) Produtos $N_1^2(\kappa_1) \times N_2^2(\kappa_2)$ con $\kappa_1^2 \neq \kappa_2^2$. Neste caso a métrica é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica con enerxía distinta de cero, $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = -4\kappa_1\kappa_2$.

Polo tanto, todos os espazos simétricos de dimensión catro son críticos para algún funcional cuadrático da curvatura e as métricas dos casos (iii) e (v) ditos funcionais teñen enerxía distinta de cero.

3.2. Grupos de Lie de dimensión catro

Os grupos de Lie de dimensión catro son isomorfos aos produtos $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ ou $SU(2) \times \mathbb{R}$ ou, en caso contrario, son grupos de Lie resolubles que se corresponden coas extensións semidirectas dos grupos euclídeo e de Poincaré $\mathbb{R} \ltimes E(2)$ e $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$, do grupo de Heisenberg $\mathbb{R} \ltimes H^3$, ou do grupo abeliano $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ [10]. Nas seguintes seccións darase unha descrición explícita das métricas invariantes a esquerda nestes grupos de Lie.

3.2.1. Bases de Gröbner

Ao longo deste capítulo atoparemos sistemas de ecuacións polinómicas $\{\mathfrak{P}_i = 0\}$ nas constantes de estrutura dun grupo de Lie. Coa fin de obter unha clasificación completa das métricas críticas correspondentes, é necesario resolver os respectivos sistemas de ecuacións. Cando un sistema é sinxelo, habitualmente é unha tarefa fácil resolvelo. Porén, cando tanto o número de ecuacións como de variables aumenta, a miúdo dan lugar a sistemas que non son manexables e cuxas solucións non poden ser calculadas mediante un proceso directo. Porén, existen algunhas estratexias que permiten abordar este tipo de problemas. Unha delas é o uso de bases de Gröbner que revisamos de forma breve. Para máis información, así como para as demostracións pertinentes, referímonos á monografía [60].

Dado un conxunto $\mathcal{S}$ de polinomios $\mathfrak{P}_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, diremos que o vector $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ é unha solución do sistema de ecuacións polinómicas determinadas por $\mathcal{S}$ se e só se $\mathfrak{P}_i(\vec{a}) = 0$ para todo i. É inmediato entón que $\vec{a}$ é unha solución do sistema de ecuacións determinado por todos os polinomios no ideal $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{P}_i \rangle$ xerado por $\mathcal{S}$, isto é, se dous conxuntos de polinomios xeran o mesmo ideal, as súas correspondentes raíces son iguais. Así, a estratexia para resolver sistemas de ecuacións determinados por polinomios complicados consistirá en obter "mellores polinomios"que pertenzan ao mesmo ideal, para o que utilizaremos a teoría de bases de Gröbner.

Sexa $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ con $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ un monomio en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Unha orde monomial é calquera relación no conxunto de monomios x^α verificando as seguintes propiedades:

1. É un orde total en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

2. Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entón $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

3. $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ está ben ordenado de forma que calquera subconxunto non baleiro de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ ten un primeiro elemento respecto á orde considerada.

A partir dunha orde dada en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ obtense a correspondente ordenación nos monomios. Para os nosos propósitos utilizaremos a *orde lexicográfica* e a *orde lexicográfica inversa graduada*. Diremos que $\alpha >_{lex} \beta$ se no vector $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ o primeiro termo á esquerda non nulo é positivo, e diremos que $\alpha >_{grevlex} \beta$ se $|\alpha| > |\beta|$ ou $|\alpha| = |\beta|$ e o termo non nulo máis á dereita de $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ é negativo.

Os elementos básicos na construción das bases de Gröbner son os termos principais dos polinomios, que se definen como segue. Se $\mathfrak{P} = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ es un polinomio en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, calquera orde monomial ordena os monomios de $\mathfrak{P}$. O *grao* de $\mathfrak{P}$ é o máximo de $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $a_\alpha \neq 0$, onde o máximo se toma respecto á orde monomial considerada. O monomio correspondente denomínase *termo principal*, isto é, $LT(\mathfrak{P}) = a_\alpha x^\alpha$.

Sexa $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal non nulo. Sexa $LT(\mathcal{I})$ o conxunto dos termos principais de todos os elementos de $\mathcal{I}$ e sexa $\langle LT(\mathcal{I}) \rangle$ o ideal xerado polos elementos de $LT(\mathcal{I})$. É importante destacar que se $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{P}_i \rangle$, entón $\langle LT(\mathcal{I}) \rangle$ pode ser estritamente máis grande que o ideal $\langle LT(\mathfrak{P}_i) \rangle$. Un subconxunto finito $\mathcal{G} = \{\mathrm{g}_1, \dots, \mathrm{g}_\nu\}$ dun ideal $\mathcal{I}$ é unha *base de Gröbner* con respecto a unha ordenación monomial se se dá a igualdade anterior, isto é, se $\langle LT(\mathrm{g}_1), \dots, LT(\mathrm{g}_\nu) \rangle = \langle LT(\mathcal{I}) \rangle$.

O Teorema da base de Hilbert (véxase, por exemplo, [60, Capítulo 2]) garante que todo ideal non nulo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ admite unha base de Gröbner. Ademais, calquera base de Gröbner dun ideal $\mathcal{I}$ é unha base de $\mathcal{I}$. Así, unha estratexia para analizar as solucións dun sistema de ecuacións polinómicas consistirá en construír bases de Gröbner do ideal xerado polos polinomios na base de Gröbner, coa esperanza de que sexan máis abordables que as correspondentes aos polinomios iniciais.

O algoritmo de Buchberger proporciona un método construtivo para obter unha base de Gröbner (véxase, por exemplo, [63]). En calquera caso é importante sinalar que a construción de bases de Gröbner é extremadamente sensible á ordenación escollida así como á orde das variables nos polinomios. Habitualmente sucede que para unha certa ordenación é posible obter bases de Gröbner sinxelas cun número reducido de polinomios, mais para outras ordes tanto o número de polinomios como a forma destes pode facer o problema inabordable. En consecuencia, indicaremos en cada caso tanto a orde das variables como a ordenación monomial utilizada a fin de que os cálculos desenvolvidos poidan ser reproducibles.

3.3. Solitóns de Ricci alxébricos de dimensión catro

Os solitóns de Ricci alxébricos en grupos de Lie non resolubles de dimensión catro son isomorficamente homotéticos á unha métrica invariante á esquerda en $SU(2) \times \mathbb{R}$ determinada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é unha base ortonormal da álxebra de Lie $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{r}$. Ademais, é localmente conformemente chá (e polo tanto simétrica por [129]) e homotético a un produto $\mathbb{R} \times N^3(\kappa)$, o cal é $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítico con enerxía cero.

Os solitóns de Ricci alxébricos en grupos de Lie resolubles de dimensión catro, tamén chamados solvsolitóns, foron descritos por Lauret (véxase [100]). Traballaremos módulo homotecias (o cal non preserva necesariamente a estrutura de grupo). Un cálculo directo amosa que os solvsolitóns non simétricos de dimensión catro son homotéticos a un dos seguintes casos, sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal da álxebra de Lie correspondente:

(i) A métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_{-3}$-crítica en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ dada por $[e_2, e_4] = e_2 + e_3$, $[e_3, e_4] = -(e_2 + e_3)$.

(ii) A métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_{-3/2}$-crítica en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ dada por

$$[e_1, e_4] = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3), \quad [e_2, e_4] = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1 - e_3.$$

(iii) A métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ dada pola derivación autoadxunta

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = fe_2, \quad [e_3, e_4] = pe_3,$$

que é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2} = -\frac{f^2+p^2+1}{2(f^2+p^2+fp+f+p+1)} \in [-1, -\frac{1}{4})$, con $f \leq p$ e $(f, p) \notin \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$.

(iv) A métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ dada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = de_2, \quad [e_3, e_4] = (a + d)e_3,$$

que é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2} = -\frac{3}{2(4ad+5)} \in [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$, con $a \neq d$ satisfacendo $4(a^2 + d^2 + ad) = 3$.

Observación 3.2. Aínda que as métricas invariantes á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ dadas por

$$[e_1, e_4] = e_1 + ce_3, \quad [e_2, e_4] = fe_2, \quad [e_3, e_4] = -ce_1 + e_3,$$

son solitóns de Ricci alxébricos, un cálculo directo amosa que a curvatura seccional non depende da constante de estrutura c, polo que, seguindo [97], temos que estas métricas son homoteticamente equivalentes (mais non isomorficamente equivalentes) a unha métrica con $c = 0$, o que se corresponde co caso (iii) con $p = 1$.

Observación 3.3. A métrica produto en $\mathbb{R} \times H^3$ dada por $[e_1, e_2] = e_3$ é un solitón de Ricci alxébrico que é isomorficamente homotético á métrica (i) considerando a base ortogonal $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ dada por

$$\tilde{e}_1 = 2e_4, \quad \tilde{e}_2 = -\sqrt{2}(e_2 - e_3), \quad \tilde{e}_3 = \sqrt{2}(e_2 + e_3), \quad \tilde{e}_4 = 2e_1.$$

Analogamente, a métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ determinada polos corchetes $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_4] = -e_1$ é un solitón de Ricci alxébrico que é isomorficamente homotético á métrica (ii) considerando a base ortogonal $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ dada por

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_3 - e_4, & \tilde{e}_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\, e_1 + e_3 + e_4), \\ \tilde{e}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\, e_1 - e_3 - e_4), & \tilde{e}_4 &= -\sqrt{2}e_2. \end{aligned}$$

Observación 3.4. A métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ determinada por

$$[e_1, e_3] = e_2, \ [e_1, e_4] = Ae_2, \ [e_2, e_3] = e_1, \ [e_2, e_4] = Ae_1,$$

é un solitón de Ricci alxébrico $\mathcal{F}_{-1}$-crítico. Considerando a base ortogonal $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ dada por

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2(A^2+1)}}(e_1 + e_2), & \tilde{e}_3 &= \tfrac{-1}{A^2+1}(Ae_3 - e_4), \\ \tilde{e}_2 &= \tfrac{-1}{\sqrt{2(A^2+1)}}(e_1 - e_2), & \tilde{e}_4 &= \tfrac{1}{A^2+1}(e_3 + Ae_4), \end{aligned}$$

temos que esta métrica é isomorficamente homotética á métrica (iii) con $f = -1$ e $p = 0$.

A Figura 3.3.1 representa o rango de valores de t para os que existe un solitón de Ricci alxébrico de dimensión catro que é crítico para $\mathcal{F}_t$. Calculando o invariante homotético de segunda orde $\tau^{-2}\|R\|^2$ e os autovalores do operador de Ricci, temos que as métricas (iii) non son homotéticas ás métricas (iv). Ademais, un cálculo directo amosa que a enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2$ é cero en todos os casos. Polo tanto, séguese de [6] que *os solitóns de Ricci homoxéneos de dimensión catro son $\mathcal{F}_t$-críticos con enerxía cero*. Mentres o recíproco é certo no caso simétrico de dimensión catro, a clase de métricas homoxéneas críticas con enerxía cero abrangue máis métricas ademais dos solitóns de Ricci. De feito, no Corolario 3.21 veremos que existen métricas $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero para todos os valores de $t < -\frac{3}{2}$, valores que non toman os solitóns de Ricci.

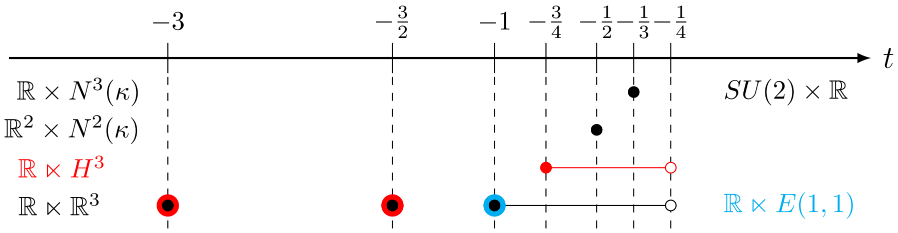


Figura 3.3.1: Rango de valores de t nos que os solitóns de Ricci alxébricos non Einstein son $\mathcal{F}_t$-críticos

3.4. Métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas nos produtos directos $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ e $SU(2) \times \mathbb{R}$

Sexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \times \mathbb{R}$ unha extensión directa da álxebra de Lie unimodular $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{su}(2)$. Sexa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produto interior en $\mathfrak{g}$ e sexa $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ a notación para a súa restrición a $\mathfrak{g}_3$. Seguindo o traballo de Milnor [110], existe unha base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$ tal que

$$[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \lambda_1 \mathbf{v}_1, \qquad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = \lambda_2 \mathbf{v}_2, \qquad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \lambda_3 \mathbf{v}_3, \tag{3.3}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Ademais, o grupo de Lie asociado correspóndese con $SU(2)$ (respectivamente, $SL(2,\mathbb{R})$) se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non cambian de signo (respectivamente, se cambian de signo).

Sexa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ unha base de $\mathfrak{g}$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ veñen dados pola ecuación (3.3) e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{R}\mathbf{v}_4$. Dado que $\mathbb{R}\mathbf{v}_4$ non é necesariamente ortogonal a $\mathfrak{g}_3$, definimos $\tilde{k}_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_4 \rangle$, para $i = 1, 2, 3$. Definimos $\hat{e}_4 = \mathbf{v}_4 - \sum_i \tilde{k}_i \mathbf{v}_i$ e normalizamos para obter unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \\ &[e_1, e_4] = \tfrac{1}{R}(\tilde{k}_3 \lambda_2 e_2 - \tilde{k}_2 \lambda_3 e_3), \qquad [e_2, e_4] = \tfrac{1}{R}(\tilde{k}_1 \lambda_3 e_3 - \tilde{k}_3 \lambda_1 e_1), \\ &[e_3, e_4] = \tfrac{1}{R}(\tilde{k}_2 \lambda_1 e_1 - \tilde{k}_1 \lambda_2 e_2), \qquad R > 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Co obxectivo de simplificar as expresións, fixamos $k_i = \frac{1}{R}\tilde{k}_i$.

Estas métricas invariantes á esquerda nunca son Einstein e teñen curvatura escalar

$$\begin{aligned} \tau = -\tfrac{1}{2} \{ &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &+ k_1^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + k_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + k_3^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \}. \end{aligned}$$

Polo tanto, as métricas $\mathcal{S}$-críticas poden existir para os valores adecuados das constantes de estrutura. O seguinte resultado amosa que as métricas invariantes á esquerda dadas por (3.4) son críticas para algún funcional cuadrático $\mathcal{F}_t$ se e só se son localmente conformemente chás (e polo tanto localmente simétricas, seguindo o traballo de Takagi [129]), o cal só é posible para as métricas invariantes á esquerda en $SU(2) \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.5. *Unha métrica invariante á esquerda en $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ ou $SU(2)\times\mathbb{R}$ é crítica para algún funcional cuadrático $\mathcal{F}_t$ se e só se é localmente conformemente chá. Ademais, dita métrica está determinada por* (3.4) *con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ e é isométrica a un produto $\mathbb{R}\times N^3(\kappa)$, con $\kappa=\lambda^2/4$.*

Demostración. Unha métrica invariante á esquerda (3.4) é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se o tensor simétrico de tipo (0,2) $\mathfrak{F}^t=\Delta\rho-\frac{1}{2}(\|\rho\|^2+t\tau^2)g+2R[\rho]+2t\tau\rho$ se anula. A condición $\mathfrak{F}^t=0$ determina un sistema de ecuacións polinómicas nas constantes de estrutura e en t. Dado que as constantes de estrutura son distintas de cero, podemos asumir que $\lambda_1=1$, mantendo a mesma clase homotética. Ademais, introducimos as variables adicionais λ_2' e λ_3' para indicar que as constantes de estrutura λ_2 e λ_3 son distintas de cero mediante os polinomios $\lambda_2\lambda_2'-1$ e $\lambda_3\lambda_3'-1$. No que resta da proba traballaremos no anel de polinomios $\mathbb{R}[\lambda_3',\lambda_3,\lambda_2',\lambda_2,\lambda_1,k_1,k_2,k_3,t]$ onde consideraremos a orde lexicográfica. O Teorema da base de Hilbert [60] garante que todo ideal non cero $\mathcal{I}$ admiten unha base de Gröbner. Ademais, calquera base de Gröbner para un ideal $\mathcal{I}$ é unha base de $\mathcal{I}$.

Coa fin de estudar a condición de ser crítica, consideramos de xeito separado o caso $k_1=k_2=0$, o caso $k_1=0$, $k_2k_3\neq 0$, e o caso $k_1k_2k_3\neq 0$. No segundo caso podemos simplificar os factores non nulos k_2 e k_3 considerando os polinomios $\frac{1}{k_2k_3}\mathfrak{F}^t(e_2,e_3)$, $\frac{1}{k_2}\mathfrak{F}^t(e_2,e_4)$ e $\frac{1}{k_3}\mathfrak{F}^t(e_3,e_4)$. Analogamente, no último caso simplificamos as variables non nulas k_1, k_2 e k_3 multiplicando os polinomios $\mathfrak{F}^t(e_i,e_j)$ con $i\neq j$ coma no caso anterior. Sexan $\bar{\mathfrak{F}}^t(e_i,e_j)$ os polinomios $\mathfrak{F}^t(e_i,e_j)$ coas simplificacións correspondentes a cada caso e sexa $\mathcal{I}$ o ideal xerado polos polinomios $\bar{\mathfrak{F}}^t(e_i,e_j)\cup\{\lambda_1-1,\lambda_2\lambda_2'-1,\lambda_3\lambda_3'-1\}$

Fixando $k_1=k_2=0$, calculamos a base de Gröbner do ideal $\mathcal{I}_1=\langle\mathcal{I}\cup\{k_1,k_2\}\rangle$ e obtemos que os polinomios

$$\mathbf{g}_{11}=3t+1,\quad \mathbf{g}_{12}=(\lambda_2-1)^2,\quad \mathbf{g}_{13}=2\lambda_3-\lambda_2-1,$$

pertencen ao ideal $\mathcal{I}_1$. Así, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ e $t=-\frac{1}{3}$. Un cálculo directo amosa que a métrica subxacente é localmente conformemente chá e isométrica a un produto $\mathbb{R}\times N^3(\kappa)$, onde $N^3(\kappa)$ é unha variedade de dimensión tres de curvatura seccional constante.

Fixando $k_1=0$, $k_2k_3\neq 0$, construímos a base de Gröbner para o ideal $\mathcal{I}_2=\langle\mathcal{I}\cup\{k_1\}\rangle$ e obtemos que os polinomios

$$\mathbf{g}_{21}=\mathbf{p}(3t+1),\ \mathbf{g}_{22}=\mathbf{p}(\lambda_2-1)^2,\ \mathbf{g}_{23}=\mathbf{p}(\lambda_3+\lambda_2-2),$$

con $\mathbf{p}=(k_2^2+k_3^2+1)$, pertencen ao ideal $\mathcal{I}_2$. Un cálculo directo amosa que os valores para as constantes de estrutura e para o parámetro t que anulan estes polinomios son os mesmos que os obtidos no caso anterior.

Por último, se $k_i\neq 0$ para todo i, calculamos unha base de Gröbner para o ideal $\mathcal{I}$ tal que os polinomios

$$\mathbf{g}_{31}=\mathbf{q}^2(3t+1),\qquad \mathbf{g}_{32}=\mathbf{q}(t+1)(\lambda_2-1),$$
$$\mathbf{g}_{33}=\mathbf{q}(2\lambda_2+2\lambda_3-9t-7),$$

con $\mathbf{q}=(k_1^2+k_2^2+k_3^2+1)$, pertencen ao ideal $\mathcal{I}$. Deste xeito, o valores para as constantes de estrutura e para o parámetro t que anulan estes tres polinomios simultaneamente son os xa obtidos nos casos previos. □

Observación 3.6. Aínda que no capítulo anterior se probou que os grupos de Lie de dimensión tres $SU(2)$ e $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ admiten diferentes métricas $\mathcal{F}_t$-críticas, o grupo de Lie produto $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ non admite métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas. De feito, a métrica crítica obtida no Teorema 3.5 é realizada en $SU(2)\times\mathbb{R}$.

Observación 3.7. Séguese do teorema previo que toda métrica homoxénea de dimensión catro $\mathcal{F}_t$-crítica non simétrica é isométrica a unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie resoluble.

3.5. Métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas en $\mathbb{R}\ltimes E(1,1)$ e $\mathbb{R}\ltimes E(2)$

Sexa $\mathfrak{g}=\mathbb{R}\ltimes\mathfrak{g}_3$ a extensión semidirecta da álxebra de Lie unimodular $\mathfrak{g}_3=\mathfrak{e}(1,1)$ ou $\mathfrak{g}_3=\mathfrak{e}(2)$. Sexa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produto interior en $\mathfrak{g}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ a súa restrición a $\mathfrak{g}_3$. Seguindo o traballo de Milnor [110], existe unha base ortonormal $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ de $\mathfrak{g}_3$ tal que

$$[\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=\lambda_1\mathbf{v}_1,\qquad [\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1]=\lambda_2\mathbf{v}_2,\qquad [\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2]=0,\tag{3.5}$$

onde $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ e $\lambda_1\lambda_2\neq 0$. Ademais, o grupo de Lie asociado correspóndese con $E(2)$ (respectivamente, con $E(1,1)$) se $\lambda_1\lambda_2>0$ (respectivamente, $\lambda_1\lambda_2<0$). A álxebra de derivacións de $\mathfrak{g}_3$ veñen dadas por

$$\operatorname{der}(\mathfrak{g}_3)=\left\{\begin{pmatrix}\tilde b & \tilde a & \tilde c\\ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tilde a & \tilde b & \tilde d\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ \tilde a,\tilde b,\tilde c,\tilde d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Sexa $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ unha base de $\mathfrak{g}$ tal que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ veñen dados pola Ecuación (3.5) e $\mathfrak{g}=\mathbb{R}\mathbf{v}_4\oplus\mathfrak{g}_3$. Dado que $\mathbb{R}\mathbf{v}_4$ non é necesariamente ortogonal a $\mathfrak{g}_3$, fixamos $\tilde k_i=\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_4\rangle$, para $i=1,2,3$. Sexa $\hat e=\mathbf{v}_4-\sum_i\tilde k_i\mathbf{v}_i$ e normalicemos para obter a base ortonormal $\{e_1,\dots,e_4\}$ de $\mathfrak{g}=\mathbb{R}\oplus\mathfrak{g}_3$ tal que

$$\begin{aligned}
&[e_2,e_3]=\lambda_1e_1, && [e_1,e_3]=-\lambda_2e_2,\\
&[e_1,e_4]=-\tfrac{1}{R}\{\tilde be_1-\lambda_2(\tfrac{\tilde a}{\lambda_1}+\tilde k_3)e_2\}, && [e_2,e_4]=-\tfrac{1}{R}\{(\tilde a+\tilde k_3\lambda_1)e_1+\tilde be_2\},\\
&[e_3,e_4]=-\tfrac{1}{R}\{(\tilde c-\tilde k_2\lambda_1)e_1+(\tilde d+\tilde k_1\lambda_2)e_2\},\quad R>0. &&
\end{aligned}\tag{3.6}$$

A partir deste punto, fixamos $a=-\frac{\tilde a}{R}$, $b=-\frac{\tilde b}{R}$, $c=-\frac{\tilde c}{R}$, $d=-\frac{\tilde d}{R}$ e $k_i=-\frac{\tilde k_i}{R}$. Ademais, usaremos a notación $A=\frac{a}{\lambda_1}+k_3$, $C=c-k_2\lambda_1$ e $D=d+k_1\lambda_2$.

Deste xeito, a curvatura escalar vén dada por

$$\tau=-\frac{1}{2}\left\{(A^2+1)(\lambda_1-\lambda_2)^2+12b^2+C^2+D^2\right\},$$

de onde se segue que $\tau=0$ se e só se $b=C=D=0$, $\lambda_2=\lambda_1$, en cuxo caso a métrica é chá. Un cálculo directo amosa que unha métrica (3.6) é Einstein se e só se é chá, ou un produto de dúas superficies $N_1(\kappa) \times N_2(\kappa)$ no caso $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$, fixando $A = C = D = 0$, $\lambda_1 = -\lambda_2$, $b = \pm\lambda_1$. Unha métrica invariante á esquerda (3.6) é localmente simétrica se e só se $C = D = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2$ (en cuxo caso é localmente conformemente chá e a estrutura subxacente é a dun produto $\mathbb{R} \times N^3(\kappa)$), ou $C = D = 0$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ e $b^2 = (A^2+1)\lambda_2^2$ (en cuxo caso a estrutura subxacente é a dun produto de superficies $N_1(\kappa_1) \times N_2(\kappa_2)$).

Teorema 3.8. *Unha métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ ou $\mathbb{R} \ltimes E(2)$ non simétrica é crítica para un funcional cuadrático da curvatura $\mathcal{F}_t$ se e só se é isomorficamente homotética a unha das seguintes:*

(1) $[e_1,e_3] = -\lambda e_2$, $[e_1,e_4] = be_1$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_2,e_4] = be_2$, *con* $\lambda \neq 0, \pm 1$, $b > 0$ *e* $4b^4 - (3\lambda^2 - 2\lambda + 3)\, b^2 - (\lambda-1)^2\lambda = 0$. *Neste caso,* $t = -\frac{3\lambda^2-2\lambda+3}{12b^2+(\lambda-1)^2}$ *e a enerxía do funcional é distinto de cero.*

(2) $[e_1,e_3] = -e_2$, $[e_1,e_4] = e_1$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_2,e_4] = e_2$, $[e_3,e_4] = De_2$, *con* $D \neq 0$. *Neste caso,* $t = -\frac{3D^2+4}{D^2+12}$ *e a enerxía do funcional é distinta de cero.*

(3) $[e_1,e_3] = -\lambda e_2$, $[e_1,e_4] = be_1$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_2,e_4] = be_2$, $[e_3,e_4] = De_2$, *con* $b > 0$, $b \neq 1$, $\lambda D \neq 0$, $\lambda^2 + D^2 = 1$, $2b^4 - (5\lambda^2 - \lambda - 2)b^2 + (\lambda-1)\lambda = 0$. *Neste caso,* $t = -\frac{3b^2-2\lambda+3}{12b^2-2\lambda+2}$ *e a enerxía do funcional é distinta de cero.*

(4) $[e_1,e_3] = e_2$, $[e_1,e_4] = be_1 + Ae_2$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_2,e_4] = Ae_1 + be_2$, *con* $b \geq 0$ *e* $b^2 - A^2 \neq 1$. *Neste caso,* $t = -\frac{A^2+b^2+1}{A^2+3b^2+1}$. *A enerxía do funcional anúlase se e só se* $b = 0$, *en cuxo caso* $\mathrm{Ric} + 2(A^2+1)\mathrm{Id}$ *é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico.*

Demostración. Unha métrica invariante á esquerda é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se o tensor simétrico de tipo (0,2) $\mathfrak{F}^t = \Delta\rho - \frac{1}{2}(\|\rho\|^2 + t\tau^2)g + 2R[\rho] + 2t\tau\rho$ se anula. Ademais, as compoñentes $\mathfrak{F}^t(e_i,e_j)$ son polinomios en t e nas constantes de estrutura que determinan a métrica (3.6). Dado que as constantes de estrutura λ_1 e λ_2 son distintas de cero, podemos simplificar os polinomios $\mathfrak{F}^t(e_1,e_4)$ e $\mathfrak{F}^t(e_2,e_4)$ que teñen estas constantes como factores, denotando por $\overline{\mathfrak{F}}^t(e_i,e_j)$ os polinomios resultantes. Coa fin de resolver o sistema $\{\overline{\mathfrak{F}}^t(e_i,e_j) = 0\}$ dun xeito máis simple, dividiremos o problema en dous casos, $C = 0$ e $C \neq 0$.

Caso $C = 0$. Asumindo que $C = 0$, consideramos a homotecia que transforma λ_1 en 1. Nótese que a isometría $e_4 \mapsto -e_4$ intercambia as constantes (λ_2, A, b, D) e $(\lambda_2, -A, -b, -D)$, polo que podemos fixar $b \geq 0$ sen perda de xeneralidade. Ademais, introducimos a variable auxiliar λ_2' tal que $\lambda_2\lambda_2' = 1$. No que resta de caso traballaremos no anel de polinomios $\mathbb{R}[t, \lambda_1, \lambda_2', \lambda_2, b, A, C, D]$, onde usamos a orde lexicográfica, e denotaremos por $\mathcal{I}_1$ o ideal xerado polos polinomios $\overline{\mathfrak{F}}_t(e_i,e_j) \cup \{C, \lambda_1 - 1, \lambda_2\lambda_2' - 1\}$. Calculando a base de Gröbner de $\mathcal{I}_1$, tense que o polinomio $\mathrm{g}_1 = A(A^2+1)D^3$ pertence ao ideal. Polo tanto, ou $A = 0$ ou $D = 0$.

Caso $A = C = 0$. Consideremos o ideal $\mathcal{I}_{11} = \langle \mathcal{I}_1 \cup \{A\} \rangle$ e calculamos a base de Gröbner, obtendo que o polinomio $\mathrm{g}_{11} = D(b^2-1)(D^2+\lambda_2^2-1)$ está no ideal. Polo tanto, temos unha das seguintes posibilidades:

(i) Se $A = C = D = 0$, calculamos a base de Gröbner de $\mathcal{I}_{11}' = \langle \mathcal{I}_{11} \cup \{D\} \rangle$ tal que

$$\mathrm{g}_{11}' = (\lambda_2 - 1)(\lambda_2 + 1)\left(4b^4 - (3\lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 3)b^2 - (\lambda_2 - 1)^2\lambda_2\right)$$

pertence ao ideal.

Se $\lambda_2 = 1$ entón a métrica é localmente conformemente chá e polo tanto é un espazo simétrico (see [129]).

Se $\lambda_2 = -1$ e $b \neq \pm 1$ (a métrica é Einstein se $b^2 = 1$), entón a métrica é crítica para o funcional $\mathcal{F}_t$ determinado por $t = -\frac{b^2+1}{3b^2+1}$. Ademais, $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -16b^2$ e polo tanto a enerxía anúlase se e só se $b = 0$, en cuxo caso $\mathrm{Ric} + 2\,\mathrm{Id}$ é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico. Estes valores correspóndense co caso particular da posibilidade (4) con $A = 0$.

Por último, se $4b^4 - (3\lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 3)b^2 - (\lambda_2 - 1)^2\lambda_2 = 0$ e $\lambda_2 \neq \pm 1$, entón un cálculo directo amosa que

$$\overline{\mathfrak{F}}_t(e_2, e_2) - \overline{\mathfrak{F}}_t(e_1, e_1) = (\lambda_2^2 - 1)\left((12b^2 + (\lambda_2 - 1)^2)t + 3\lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 3\right)$$

e a métrica invariante á esquerda correspondente é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se $(12b^2 + (\lambda_2 - 1)^2)t + 3\lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 3 = 0$, en cuxo caso a enerxía do funcional vén dada por $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = 4\lambda_2(\lambda_2 - 1)^2 \neq 0$. Este caso correspóndese coa posibilidade (1).

(ii) Se $A = C = 0$ e $b^2 = 1$, con $D \neq 0$, entón $\overline{\mathfrak{F}}_t$ anúlase se e só se $(D^2 + (\lambda_2 - 2)\lambda_2 + 13)t + 3D^2 + (3\lambda_2 - 2)\lambda_2 + 3 = 0$ e $(\lambda_2 - 1)(D^2 + (\lambda_2 + 1)^2) = 0$, o que amosa que $\lambda_2 = 1$. Ademais, a enerxía vén dada por $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -5D^2 \neq 0$. Deste xeito, este caso correspóndese coa posibilidade (2).

(iii) Se $A = C = 0$, con $D \neq 0$, $b^2 \neq 1$ e $D^2 + \lambda_2^2 - 1 = 0$, entón o tensor $\overline{\mathfrak{F}}_t$ anúlase se e só se $(12b^2 - 2\lambda_2 + 2)t + 3b^2 - 2\lambda_2 + 3 = 0$ and $2b^4 - (5\lambda_2^2 - \lambda_2 - 2)b^2 + (\lambda_2 - 1)\lambda_2 = 0$. Este caso correspóndese coa posibilidade (3), en cuxo caso a enerxía vén dada por $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = (\lambda_2 - 1)(9b^2 + (3b^2 - 2)\lambda_2) \neq 0$.

Caso $C = D = 0$, $A \neq 0$. Sexa $\mathcal{I}_{12} = \langle \mathcal{I}_1 \cup \{D\}\rangle$. Calculamos a base de Gröbner do ideal $\mathcal{I}_{12}$ e temos que o polinomio $\mathbf{g}_{12} = A(A^2 + 1)^2(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 + 1)^2$ pertence a $\mathcal{I}_{12}$. Dado que $A \neq 0$, temos dúas posibilidades:

(i) Se $C = D = 0$, $A \neq 0$ e $\lambda_2 = 1$, entón $\overline{\mathfrak{F}}_t(e_3, e_3) = -3\overline{\mathfrak{F}}_t(e_i, e_i) = 6b^4(3t + 1)$, $i \neq 3$. Ademais, a métrica é localmente conformemente chá e, polo tanto, simétrica.

(ii) Se $C = D = 0$, $A \neq 0$ e $\lambda_2 = -1$, entón a métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se $(A^2 + 3b^2 + 1)t + A^2 + b^2 + 1 = 0$, e a métrica é localmente simétrica se e só se $b^2 - A^2 = 1$. Ademais, a enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -16b^2$ anúlase se e só se $b = 0$, en cuxo caso $\mathrm{Ric} + 2(A^2 + 1)\,\mathrm{Id}$ é unha derivación da álxebra de Lie que determina un solitón de Ricci alxébrico. Este caso correspóndese coa posibilidade (4) con $A \neq 0$.

Caso $C \neq 0$. Asumimos que $C \neq 0$, polo que podemos tomar a métrica da mesma clase homotética con $C = 1$. No que resta de proba, fixamos o anel de polinomios $\mathbb{R}[t, \lambda_1, \lambda_2, A, b, C, D]$ coa orde lexicográfica e denotamos por $\mathcal{I}_2$ o ideal xerado polos polinomios $\overline{\mathfrak{F}}_t(e_i, e_j) \cup \{C - 1\}$. Calculamos a base de Gröbner do ideal e obtemos que o polinomio

$$\mathbf{g}_2 = Ab^3(D^2 - 1)(16A^2 + 9)(D^2 + 1)^3(A^2D^4 + 6A^2D^2 + A^2 + 9D^2)$$

pertence a $\mathcal{I}_2$. Así, séguese que $b = 0$, $A = 0$ ou $D^2 = 1$.

Caso $b = 0$. Calculando a base de Gröbner do ideal $\mathcal{I}_{21} = \langle \mathcal{I}_2 \cup \{b\} \rangle$ temos que $\mathrm{g}_{21} = \lambda_2^2 D(A^2+1)(2(A^2+1)\lambda_2^2+7)$ e $\mathrm{g}'_{21} = \lambda_2^3(A^2+1)(\lambda_1 + D^2\lambda_2)$ pertence a $\mathcal{I}_{21}$. Dado que $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ séguese que non existen métricas críticas neste caso.

Caso $A = 0$, $b \neq 0$. Calculando a base de Gröbner de $\mathcal{I}_{22} = \langle \mathcal{I}_2 \cup \{A\} \rangle$ temos que o polinomio $\mathrm{g}_{22} = bD(\lambda_1 - \lambda_2)$ pertence ao ideal $\mathcal{I}_{22}$.

Se $\lambda_2 = \lambda_1$, entón $\overline{\mathfrak{F}}_t(e_2, e_4) = \frac{1}{2}((D^2 + 12b^2 + 1)t + 3D^2 + 3b^2 + \lambda_1^2 + 3)$, o que amosa que $t = -\frac{3D^2+3b^2+\lambda_1^2+3}{D^2+12b^2+1}$. Como consecuencia, $\overline{\mathfrak{F}}_t(e_3, e_3) = \frac{3}{8}(b^2 - \lambda_1^2)(4b^2 + D^2 + 1)$. Fixando $b^2 = \lambda_1^2$ temos unha métrica crítica con enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -5\lambda_1^2(D^2+1) \neq 0$. Consideramos a base ortogonal

$$\tilde{e}_1 = \tfrac{-1}{\lambda_1\sqrt{D^2+1}}(De_1 - e_2), \;\; \tilde{e}_2 = \tfrac{-1}{\lambda_1\sqrt{D^2+1}}(e_1 + De_2), \;\; \tilde{e}_3 = \tfrac{1}{\lambda_1}e_3, \;\; \tilde{e}_4 = \tfrac{1}{b}e_4,$$

onde $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2}\langle e_i, e_j \rangle$. Agora, un cálculo directo amosa que os corchetes de Lie están determinados por

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = -\tilde{e}_2, \;\; [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = \tilde{e}_1, \;\; [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_1, \;\; [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = \tilde{e}_2, \;\; [\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = -\tfrac{\sqrt{D^2+1}}{b}\tilde{e}_2,$$

e polo tanto estas métricas son homotéticas ás dadas na posibilidade (2).

Se $D = 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entón séguese de

$$\overline{\mathfrak{F}}_t(e_2, e_4) = \tfrac{1}{2}\left((12b^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 1)t + 3b^2 + 3\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 3\right)$$

que $t = -\frac{3b^2+3\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+3}{12b^2+(\lambda_1-\lambda_2)^2+1}$. Un cálculo directo amosa que $\overline{\mathfrak{F}}_t = 0$ se e só se

$$\begin{aligned} &4b^4 + b^2(3\lambda_1^2 - 9\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 13) \\ &\qquad - \lambda_2(4\lambda_1^3 - 9\lambda_2^3 + 7\lambda_1^2\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2^2 + 4\lambda_1 + 9\lambda_2) = 0, \\ &(b^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, non existe solución con $b^2 = \lambda_2^2$. Así, $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1 = 0$ e a primeira ecuación redúcese a $2b^4 - (3\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 - 5)b^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 - 1)\lambda_2^2 = 0$. Ademais, a enerxía, que vén dada por $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -2\lambda_2^4 + 2\lambda_1\lambda_2^3 - 2(3b^2-1)\lambda_2^2 + 6b^2\lambda_1\lambda_2 - 3b^2$, é distinta de cero nas condicións dadas. Considerando a base ortogonal

$$\tilde{e}_1 = \tfrac{-1}{\lambda_2}e_2, \qquad \tilde{e}_2 = \tfrac{-1}{\lambda_2}e_1, \qquad \tilde{e}_3 = \tfrac{-1}{\lambda_2}e_3, \qquad \tilde{e}_4 = \tfrac{-1}{\lambda_2}e_4,$$

tal que $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2}\langle e_i, e_j \rangle$ e introducimos novas variables $\lambda' = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $b' = -\frac{b}{\lambda_2}$ e $D' = -\frac{1}{\lambda_2}$. Un cálculo directo amosa que os corchetes de Lie están determinados por

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = -\lambda'\tilde{e}_2, \;\; [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = b'\tilde{e}_1, \;\; [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_1, \;\; [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = b'\tilde{e}_2, \;\; [\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = D'\tilde{e}_2$$

e, ademais, as condicións en λ_1, λ_2 e b implica que $b' \neq \pm 1$, $\lambda' D' \neq 0$, $(\lambda')^2 + (D')^2 = 1$ e $2(b')^4 - (5(\lambda')^2 - \lambda' - 2)(b')^2 + (\lambda' - 1)\lambda' = 0$. Así, estas métricas son homotéticas aos dados na posibilidade (3).

Caso $D^2 = 1$, $b \neq 0$, $A \neq 0$. Calculamos a base de Gröbner do ideal $\mathcal{I}_{23} = \langle \mathcal{I}_2 \cup \{D^2 - 1\}\rangle$ e temos que o polinomio

$$\mathrm{g}_{23} = Ab^3(256A^4b^4 + 416A^4b^2 + 288A^2b^2 + 144A^4 + 225A^2 + 81)$$

pertence ao ideal $\mathcal{I}_{23}$. Así, $Ab \neq 0$ implica que non existen métricas críticas neste caso. $\square$

Observación 3.9. As métricas $\mathcal{F}_t$-críticas non simétricas no Teorema 3.8 realízanse en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ e $\mathbb{R} \ltimes E(2)$ como se indica na Figura 3.5.1. Os rangos do parámetro t tamén se inclúen na figura.

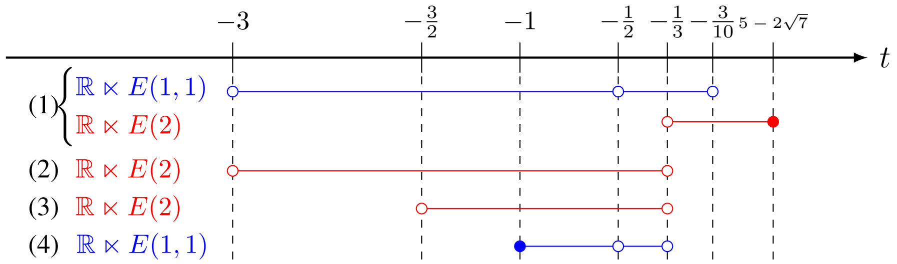


Figura 3.5.1: Valores de t con métricas críticas realizadas en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ e $\mathbb{R} \ltimes E(2)$.

A métrica no Caso (4) correspondente a $t = -1$ é a única métrica crítica con enerxía cero, a cal se corresponde co solitón de Ricci alxébrico en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$, e é isomorficamente homotética a un solitón de Ricci alxébrico (iii) da sección 3.3, como se reflicte na Observación 3.4. A única métrica Bach-chá non simétrica é a métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes E(1,1)$ correspóndese co Caso (1) para $t = -\frac{1}{3}$ (véxase [41]).

3.6. Métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas en $\mathbb{R} \ltimes H^3$

Sexa $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathfrak{h}^3$ unha extensión semidirecta da álxebra de Heisenberg $\mathfrak{h}^3$. Sexa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produto interior en $\mathfrak{g}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ a súa restrición a $\mathfrak{h}^3$. Entón, existe unha base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathfrak{h}^3$ tal que (véxase [110])

$$[\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2] = 0, \qquad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = 0, \qquad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \lambda_3 \mathbf{v}_3, \tag{3.7}$$

onde $\lambda_3 \neq 0$ é un número real. A álxebra de Lie de todas as derivacións de $\mathfrak{h}^3$ vén dada respecto da base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ por

$$\mathrm{der}(\mathfrak{h}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \hat{h} & \hat{f} & \alpha_{11} + \alpha_{22} \end{pmatrix} ; \alpha_{ij}, \hat{f}, \hat{h} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rotamos os elementos da base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de xeito que a matriz $A = (\alpha_{ij})$ se descompón como a suma da matriz diagonal e da matriz antisimétrica. Así,

$$\operatorname{der}(\mathfrak{h}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} & 0 \\ -\tilde{c} & \tilde{d} & 0 \\ \tilde{h} & \tilde{f} & \tilde{a}+\tilde{d} \end{pmatrix} ; \tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{f}, \tilde{h} \in \mathbb{R} \right\}$$

e consideramos a álxebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\mathbf{v}_4 \oplus \mathfrak{h}^3$ dada por

$$\begin{array}{ll} [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2] = 0, & [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1] = \tilde{a}\mathbf{v}_1 - \tilde{c}\mathbf{v}_2 + \tilde{h}\mathbf{v}_3, \\ [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = 0, & [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2] = \tilde{c}\mathbf{v}_1 + \tilde{d}\mathbf{v}_2 + \tilde{f}\mathbf{v}_3, \\ [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \gamma\mathbf{v}_3, & [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3] = (\tilde{a}+\tilde{d})\mathbf{v}_3. \end{array}$$

Dado que $\mathbb{R}\mathbf{v}_4$ non é necesariamente ortogonal a $\mathfrak{h}^3$, fixamos $\tilde{k}_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_4 \rangle$, para $i = 1, 2, 3$. Sexa $\hat{e}_4 = \mathbf{v}_4 - \sum_i \tilde{k}_i \mathbf{v}_i$ e normalicémolo para obter unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}^3$ tal que

$$\begin{array}{ll} [e_1, e_2] = \gamma e_3, & [e_1, e_4] = -\frac{1}{R}\{\tilde{a}e_1 - \tilde{c}e_2 + (\tilde{h} + \tilde{k}_2\gamma)e_3\}, \\ [e_3, e_4] = -\frac{1}{R}(\tilde{a}+\tilde{d})e_3, & [e_2, e_4] = -\frac{1}{R}\{\tilde{c}e_1 + \tilde{d}e_2 + (\tilde{f} - \tilde{k}_1\gamma)e_3\}, \quad R > 0. \end{array} \tag{3.8}$$

Co obxectivo de simplificar as expresións, fixamos $a = -\frac{\tilde{a}}{R}$, $c = -\frac{\tilde{c}}{R}$, $d = -\frac{\tilde{d}}{R}$, $f = -\frac{\tilde{f}}{R}$, $h = -\frac{\tilde{h}}{R}$, $k_i = -\frac{\tilde{k}_i}{R}$ e usamos a notación $F = f - k_1\gamma$ e $H = h + k_2\gamma$.

Observación 3.10. As métricas invariantes á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ sempre teñen curvatura escalar distinta de cero, dada por $\tau = -\frac{1}{2}\left(4\left(3a^2 + 3d^2 + 5ad\right) + F^2 + H^2 + \gamma^2\right)$, e son Einstein se e só se

$$[e_1, e_2] = \gamma e_3, \quad [e_1, e_4] = \pm\tfrac{1}{2}\gamma e_1 - ce_2, \quad [e_2, e_4] = ce_1 \pm \tfrac{1}{2}\gamma e_2, \quad [e_3, e_4] = \pm\gamma e_3,$$

en cuxo caso correspóndense co espazo hiperbólico complexo, que é a única métrica invariante á esquerda simétrica en $\mathbb{R} \ltimes H^3$.

Observación 3.11. Sexa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ unha métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ dada por (3.8) con constantes de estrutura (γ, a, c, d, H, F). Considerando a isometría $\bar{e}_1 = -e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$, $\bar{e}_3 = e_3$, $\bar{e}_4 = e_4$, as constantes de estrutura cambian a $(\gamma, d, c, a, -F, H)$. Polo tanto, calquera métrica invariante á esquerda (3.8) con $F = 0$ é isométrica a unha métrica invariante á esquerda con $H = 0$.

Teorema 3.12. *Unha métrica invariante á esquerda non simétrica en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero se e só se é un solitón de Ricci. Ademais, é homotética a unha das seguintes variedades:*

(1) *O produto directo $\mathbb{R} \times H^3$, coa métrica determinada por $[e_1, e_2] = e_3$.*

(2) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_4] = ae_1$, $[e_2, e_4] = de_2$ *e* $[e_3, e_4] = (a+d)e_3$,
onde $a < d$ e $4(a^2 + d^2 + ad) - 3 = 0$.

(3) $[e_1, e_2] = e_3$ e $[e_2, e_4] = -e_1$.

Demostración. Dado que a curvatura escalar é distinta de cero, o funcional $\mathcal{F}_t$ con enerxía cero vén dado por $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2}$, onde a curvatura escalar está determinada pola expresión $\tau = -\frac{1}{2}\left(4\left(3a^2+3d^2+5ad\right)+F^2+H^2+\gamma^2\right)$ e

$$\begin{aligned}\|\rho\|^2 = \tfrac{1}{4}&\left(48(a^4+d^4)+128(a^3d+ad^3)+8(a^2c^2+22a^2d^2+c^2d^2)-16ac^2d\right.\\ &+2\left((9F^2+8H^2)a^2+(F^2+H^2)c^2+(8F^2+9H^2)d^2\right)\\ &\left.+12\left(FHac+2(F^2+H^2)ad-FHcd\right)+3(F^2+H^2+\gamma^2)^2\right).\end{aligned}$$

Sexa $\mathfrak{F} = \Delta\rho + 2R[\rho] - 2\tau^{-1}\|\rho\|^2\rho$ o tensor simétrico de tipo $(0,2)$ $\mathfrak{F}_t$ correspondente ao valor de $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2}$. Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{F}(e_i, e_j) = -\frac{1}{2\tau}\mathfrak{P}_{ij}$, onde $\mathfrak{P}_{ij}$ é un polinomio nas constantes de estrutura, as cales reescalamos para asumir que $\gamma = 1$ e traballar así con unha métrica na mesma clase homotética. Ao longo da proba fixaremos o anel de polinomios $\mathbb{R}[c, d, a, \gamma, F, H]$ coa orde lexicográfica e denotaremos por $\mathcal{I}$ o ideal xerado polos polinomios $\mathfrak{P}_{ij} \cup \{\gamma - 1\}$. Calculando a base de Gröbner de $\mathcal{I}$ obtemos que o polinomio

$$\begin{aligned}\mathbf{g} = &-2\tau\, a^3H^2(F-H)^2(F+H)^2\left(4H^2+9\right)\left(H^4-3H^2+3\right)\\ &\times\left(40320H^8+168000H^6+361540H^4+329715H^2+221778\right)\\ &\times\left(8791776H^8-31713192H^6+26269971H^4+28379169H^2+5316979\right)\\ &\times\left(7103859130368H^{12}+12415693357056H^{10}+14169581874944H^8\right.\\ &\quad+7086287541696H^6-3795976137789H^4\\ &\quad\left.+3367138842540H^2+794285563500\right)\end{aligned}$$

pertence ao ideal e polo tanto $a^3H^2(F-H)^2(F+H)^2 = 0$, dado que o resto de factores carecen de raíces reais. Así, este polinomio anúlase se $H = 0$, $a = 0$ ou $H = \pm F$.

Caso $\boldsymbol{H = 0}$ A compoñente $\mathfrak{P}_{24} = -\tau\, cF(d - 5a)$ dá lugar ás seguintes posibilidades.

Caso $H = c = 0$ Consideramos o ideal $\mathcal{I}_{11} = \langle \mathcal{I} \cup \{H, c\}\rangle$ e calculamos a base de Gröbner de xeito que obtemos que o polinomio

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{11} = a^2F^2(4F^2+9)&\left(a^4\left(9F^4-20F^2+16\right)\right.\\ &\left.+2a^2\left(F^2+1\right)\left(9F^4+5F^2-16\right)+\left(3F^4+8F^2+5\right)^2\right)\end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{I}_{11}$. Así $aF = 0$.

Se $F = 0$, entón tense que

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{11} &= \ \ 2\left(4\left(a^2+d^2+ad\right)-3\right)\left(2a^2+3d^2+4ad\right),\\ \mathfrak{P}_{22} &= \ \ 2\left(4\left(a^2+d^2+ad\right)-3\right)\left(3a^2+2d^2+4ad\right),\\ \mathfrak{P}_{33} &= -2\left(4\left(a^2+d^2+ad\right)-3\right)\left(4a^2+4d^2+7ad\right),\\ \mathfrak{P}_{44} &= -\mathfrak{P}_{11}-\mathfrak{P}_{22}-\mathfrak{P}_{33},\end{aligned}$$

e $\mathfrak{P}_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Así, a métrica está determinada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = de_2, \quad [e_3, e_4] = (a+d)e_3,$$

con $a = d = 0$ ou $a \neq d$ e $4(a^2 + d^2 + ad) = 3$. Se $a \neq d$, entón usando a isometría $e_4 \mapsto -e_4$ podemos fixar $a < d$. Estes casos correspóndense coas posibilidades (1) e (2), respectivamente.

Se $a = 0$, $F \neq 0$, entón tense que $\mathfrak{P}_{14} = 4d^2F(3F^2 + 5)$ e así $d = 0$, dado que o caso $F = 0$ xa foi considerado anteriormente. Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{F} = 0$ se e só se $d = 0$, e a métrica está determinada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_4] = Fe_3.$$

Consideramos a base ortogonal dada por

$$\tilde{e}_1 = \tfrac{1}{F^2+1}\left(e_1 - Fe_4\right),\ \tilde{e}_2 = \tfrac{-1}{\sqrt{F^2+1}}e_2,\ \tilde{e}_3 = \tfrac{-1}{\sqrt{F^2+1}}e_3,\ \tilde{e}_4 = \tfrac{-1}{F^2+1}(Fe_1 + e_4).$$

Nótese que o único corchete non nulo con esta base é $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3$ e, dado que o produto interior satisfai $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = \frac{1}{F^2+1}\langle e_i, e_j \rangle$, a métrica do grupo de Lie é isomorfa á métrica produto da posibilidade (1).

Caso $H = F = 0$, $c \neq 0$ Consideramos o ideal $\mathcal{I}_{12} = \langle \mathcal{I} \cup \{H, F\} \rangle$ e calculamos a base de Gröbner, obtendo así que o polinomio

$$\mathbf{g}_{12} = -2\tau\, a^2 c \left(4a^2 - 1\right)^2 \left(784a^4 - 840a^2 + 81\right)$$

pertence a $\mathcal{I}_{12}$. Dado que o caso $c = 0$ foi considerado anteriormente, séguese que $a(4a^2 - 1)\left(784a^4 - 840a^2 + 81\right) = 0$ e así $a = 0$, $a^2 = \frac{1}{4}$, $a^2 = \frac{27}{28}$, ou $a^2 = \frac{3}{28}$. Mediante unha substitución directa nos polinomios $\mathfrak{P}_{ij}$ tense que os casos $a^2 = \frac{27}{28}$ e $a^2 = \frac{3}{28}$ non proporcionan ningunha solución.

Asumimos que $a = 0$. Entón

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{33} &= 4d^2(4c^2d^2 - c^2 - 8d^2 + 6), \\ \mathfrak{P}_{44} &= -2d^2(16c^2d^2 + 2c^2 + 4d^2 - 3), \end{aligned}$$

de onde se segue que $d = 0$ e o tensor $\mathfrak{F}$ se anula identicamente. A métrica invariante á esquerda vén dada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = -ce_2, \quad [e_2, e_4] = ce_1.$$

A curvatura seccional é independente do parámetro c e polo tanto a métrica é homotética a unha métrica con $c = 0$ (véxase [97]), a cal se corresponde coa posibilidade (1).

Asumimos agora que $a^2 = \frac{1}{4}$ e consideramos o ideal $\mathcal{I}'_{12} = \langle \mathcal{I}_{12} \cup \{4a^2 - 1\} \rangle$. Calculamos a base de Gröbner e obtemos que o polinomio

$$\mathbf{g}'_{12} = c(4d^2 - 1)(3d^2 + 5ad + 1)$$

pertence ao ideal $\mathcal{I}'_{12}$. Así, dado que $c \neq 0$ e $4a^2 = 1$, tense que $4d^2 = 1$. Agora os polinomios $\mathfrak{P}_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e

$$\mathfrak{P}_{11} = \mathfrak{P}_{22} = -\mathfrak{P}_{33} = -\mathfrak{P}_{44} = -\tfrac{1}{2}(4c^2 - 1)(4ad - 1).$$

Se $a = d$, entón a métrica é Einstein, polo que as condicións anteriores redúcense a $a = -d$ e $a^2 = d^2 = c^2 = \frac{1}{4}$. A métrica vén dada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = ae_1 - \varepsilon ae_2, \quad [e_2, e_4] = \varepsilon ae_1 - ae_2,$$

onde $\varepsilon^2 = 1$ e $4a^2 = 1$. Consideramos a base ortonormal dada por

$$\tilde{e}_1 = \frac{-1}{2a\sqrt{2}}(\varepsilon e_1 - e_2), \quad \tilde{e}_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(e_1 + \varepsilon e_2), \quad \tilde{e}_3 = \frac{1}{2a}e_3, \quad \tilde{e}_4 = -\varepsilon e_4.$$

Agora, os corchetes non nulos nesta base son $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3$ and $[\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = -\tilde{e}_1$, o que amosa que as métricas obtidas se corresponden coas dadas na posibilidade (3).

Caso $H = d - 5a = 0$, $cF \neq 0$ Consideramos $\mathcal{I}_{13} = \langle \mathcal{I} \cup \{H, d - 5a\}\rangle$, calculamos a base de Gröbner e obtemos que o polinomio

$$\mathbf{g}_{13} = a^2c(412a^2 + F^2 + 1)$$

pertence a $\mathcal{I}_{13}$. Dado que o caso $c = 0$ foi estudado anteriormente, séguese que $a = 0$ e así $d = 0$. Entón, un cálculo directo amosa que $\mathfrak{P}_{44} = -c^2F^2 \neq 0$.

Caso $a = 0$, $H \neq 0$ Consideramos o ideal $\mathcal{I}_2 = \langle \mathcal{I} \cup \{a\}\rangle$ e calculamos a base de Gröbner, obtendo que o polinomio

$$\mathbf{g}_2 = d^2H(F^2 + H^2 + 12d^2 + 1)$$

pertence a $\mathcal{I}_2$. Así $d = 0$ e $\mathfrak{P}_{44} = -c^2(F^2 + H^2)$, o que implica que $c = 0$ dado que $H \neq 0$. Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{F} = 0$ e a métrica vén dada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = He_3, \quad [e_2, e_4] = Fe_3.$$

Considerando a base ortogonal dada por

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \frac{1}{(F^2+H^2+1)\sqrt{F^2+H^2}}\left(Fe_1 - He_2 - (F^2 + H^2)e_4\right), \qquad \tilde{e}_3 = \frac{-1}{\sqrt{F^2+H^2+1}}e_3, \\ \tilde{e}_2 &= \frac{-1}{\sqrt{(F^2+H^2+1)(F^2+H^2)}}\left(He_1 + Fe_2\right), \qquad \tilde{e}_4 = \frac{-1}{F^2+H^2+1}\left(Fe_1 - He_2 + e_4\right), \end{aligned}$$

o único corchete non nulo nesta base é $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3$. Ademais, para todo i, j tense que $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j\rangle = \frac{1}{F^2+H^2+1}\langle e_i, e_j\rangle$, o que amosa que a métrica co grupo de Lie é isomorfa á métrica produto na posibilidade (1).

Caso $H = \pm F$, $a \neq 0$, $H \neq 0$ Consideramos $\mathcal{I}_3 = \langle \mathcal{I} \cup \{F^2 - H^2\}\rangle$ e calculamos a base de Gröbner, obtendo que o polinomio

$$\mathbf{g}_3 = -2\tau\, a^3F^2(27F^2 + 5)(4a^2 - 2F^2 - 1)$$

pertence a $\mathcal{I}_3$. Así $4a^2 - 2F^2 - 1 = 0$ dado que $a \neq 0$ e $F = \pm H \neq 0$. Sexa $\mathcal{I}_3' = \langle \mathcal{I}_3 \cup \{4a^2 - 2F^2 - 1\}\rangle$. Calculamos a base de Gröbner de $\mathcal{I}_3'$ e obtemos que

$$\mathbf{g}_3' = F(4a^2 + 3d^2 + 5ad)(4d^2 - 2F^2 - 1)$$

pertence a $\mathcal{I}_3'$, o que implica que $4d^2 - 2F^2 - 1 = 0$ e polo tanto $d = \pm a$. Fixando $H = \varepsilon F$, con $\varepsilon^2 = 1$, se $d = a$ entón

$$\mathfrak{P}_{44} = -\tfrac{1}{2}F^2(160F^4 + (64c^2 + 218)F^2 + 36c^2 + 69) \neq 0.$$

Así, necesariamente $d = -a$ e $\mathfrak{P}_{33} = -(2F^2+1)^2(4c^2 - 2F^2 - 1)$, o que implica que $4c^2 - 2F^2 - 1 = 0$, e usando esta condición tense que $\mathfrak{P}_{13} = 3F(2F^2+1)(c + \varepsilon a)$, de onde se obtén $c = -\varepsilon a$. Agora, un cálculo directo amosa que o tensor $\mathfrak{F}$ se anula baixo as condicións $H = \varepsilon F$, $d = -a$, $c = -\varepsilon a$ e $4a^2 - 2F^2 - 1 = 0$, e a métrica invariante á esquerda vén dada por

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = ae_1 + \varepsilon a e_2 + \varepsilon F e_3, \quad [e_2, e_4] = -\varepsilon a e_1 - a e_2 + F e_3.$$

Consideramos unha base ortogonal dada por

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \tfrac{1}{2a\sqrt{2}}\left(\varepsilon e_1 + e_2\right), & \tilde{e}_3 &= \tfrac{1}{2a} e_3, \\ \tilde{e}_2 &= \tfrac{-1}{4a^2\sqrt{2}}\left(e_1 - \varepsilon e_2 - 2Fe_4\right), & \tilde{e}_4 &= \tfrac{\varepsilon}{4a^2}\left(Fe_1 - \varepsilon F e_2 + e_4\right). \end{aligned}$$

Agora, os únicos corchetes non nulos son $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3$ e $[\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = -\tilde{e}_1$. Ademais, $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = \frac{1}{2F^2+1}\langle e_i, e_j \rangle$, o que amosa que as métricas dadas anteriormente son isomorficamente homotéticas á métrica na posibilidade (3). □

Observación 3.13. As métricas dadas nas posibilidades (1) e (3) no Teorema 3.12 son isomorficamente homotéticas a métricas invariantes á esquerda no grupo de Lie $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ como se amosou na Observación 3.3. Polo tanto, correspóndense cos solitóns de Ricci alxébricos (i) e (ii) como se discutiu na sección 3.3. A posibilidade (2) correspóndese co (iv) da sección 3.3.

Observación 3.14. O operador de Ricci da métrica invariante á esquerda no Teorema 3.12-(1) é da forma $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]$, mentres que para as métricas no Teorema 3.12-(2) é da forma $\mathrm{Ric} = -\,\mathrm{diag}[2(1-d^2), 2d(a+d) + \frac{1}{2}, 2ad + 1, \frac{3}{2}]$. O operador de Ricci da métrica dada no Teorema 3.12-(3) é da forma $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[0, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

Observación 3.15. Seguindo un argumento similar ao aplicado no Teorema 3.12, podemos obter as métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ con enerxía distinta de cero. Así, temos o seguinte:

> *Unha métrica invariante á esquerda non simétrica en $\mathbb{R} \ltimes H^3$ é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía distinta de cero se e só se é homotética a unha das seguintes variedades:*
>
> (1) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_4] = ae_1$, $[e_2, e_4] = ae_2$, $[e_3, e_4] = 2ae_3$, *con* $a \neq 0, \pm\frac{1}{2}$. *Ademais* $t = -\frac{3(4a^2+1)}{44a^2+1} \in (-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{11})$ *con enerxía* $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -36a^2$. *Para a elección especial de* $a = 1$ *(respectivamente,* $a = -1$*) a métrica é autodual (respectivamente, anti-autodual) e polo tanto Bach-chá (equivalentemente* $\mathcal{F}_{-1/3}$*-crítica) [62].*

(2) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_4] = ae_1 + He_3$, $[e_2, e_4] = de_2$, $[e_3, e_4] = (a + d)e_3$, *onde* $a = -\frac{d(2d^2+2H^2-3)}{2d^2+2H^2+2}$, $d \neq -2a$, $H \neq 0$, *e as constantes de estrutura* d, H *satisfán*

$$4d^6 + 5(3H^2 - 1)d^4 + \left(18H^4 + 6H^2 + 13\right) d^2 + (H^2 + 1)^2(7H^2 - 3) = 0.$$

Ademais, $t = -\frac{4a^2+3d^2+2ad+3\left(H^2+1\right)}{4(3a^2+3d^2+5ad)+H^2+1} \in (-3, -\frac{7}{16})$ *e a enerxía sempre é distinta de cero.*

(3) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_4] = ae_1 - ce_2$, $[e_2, e_4] = ce_1 + de_2$, $[e_3, e_4] = (a + d)e_3$, *onde* $c \neq 0$, $a \neq d$, $a \neq 5d$ *e os parámetros* a, d *están restrinxidos polas ecuacións*

$$3a^2 + 4c^2 + 3d^2 + 10ad = 0, \quad 32c^4 + 32ac^2d + 8c^2 - 28ad - 9 = 0.$$

Ademais, $t = -\frac{a^2+4c^2+d^2-6ad}{4(3a^2+3d^2+5ad)+1}$ *e* $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -8c^2 + 28ad + 9$, *o que amosa que a enerxía se anula se e só se* $a^2 = c^2 = \frac{1}{4}$ *e* $d = -a$. *Ademais,* $t \in (-3, -\frac{21}{52})$.

Observación 3.16. Na Figura 3.6.1 represéntanse os valores de t para as métricas críticas obtidas no Teorema 3.12 e na Observación 3.15.

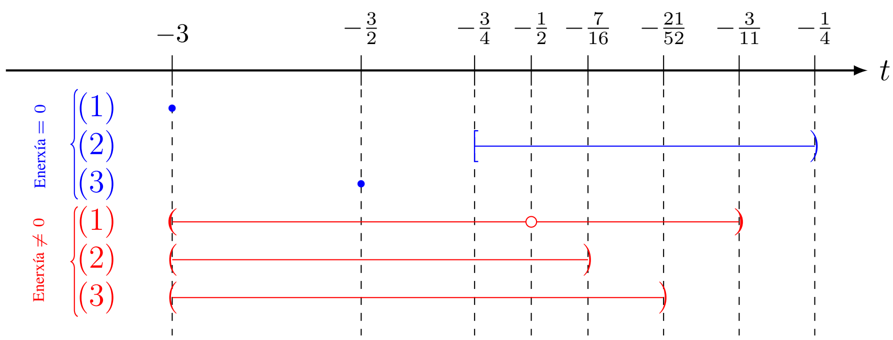


Figura 3.6.1: Valores de t para os que existen métricas invariantes á esquerda en $\mathbb{R} \rtimes H^3$ críticas, distinguindo entre as que teñen enerxía cero e distinta de cero.

3.7. Métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$

Sexa $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathfrak{r}^3$ unha extensión semidirecta da álxebra de Lie abeliana $\mathfrak{r}^3$. Sexa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produto interior en $\mathfrak{g}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ a súa restrición a $\mathfrak{r}^3$. A álxebra de Lie de todas as derivacións $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{r}^3$ é $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Se fixamos $\mathfrak{D} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, existe unha base $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$-ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathfrak{r}^3$ onde $\mathfrak{D}$ se descompón como suma dunha matriz diagonal e unha matriz antisimétrica. Así

$$\operatorname{der}(\mathfrak{r}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} & -\tilde{b} & -\tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{f} & -\tilde{h} \\ \tilde{c} & \tilde{h} & \tilde{p} \end{pmatrix} ; \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f}, \tilde{h}, \tilde{p} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Agora, o produto semidirecto correspondente $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\mathbf{v}_4 \ltimes \mathfrak{r}^3$ vén dado por

$$\begin{aligned} &[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3] = 0, \quad [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = 0, && [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1] = \tilde{a}\mathbf{v}_1 + \tilde{b}\mathbf{v}_2 + \tilde{c}\mathbf{v}_3, \\ &[\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2] = -\tilde{b}\mathbf{v}_1 + \tilde{f}\mathbf{v}_2 + \tilde{h}\mathbf{v}_3, && [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3] = -\tilde{c}\mathbf{v}_1 - \tilde{h}\mathbf{v}_2 + \tilde{p}\mathbf{v}_3, \end{aligned}$$

con respecto a unha base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\mathbf{v}_4 \oplus \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Dado que $\mathbb{R}\mathbf{v}_4$ non é necesariamente ortogonal a $\mathfrak{r}^3$, fixamos $\tilde{k}_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_4 \rangle$, para $i = 1, 2, 3$. Sexa $\hat{e}_4 = \mathbf{v}_4 - \sum_i \tilde{k}_i \mathbf{v}_i$ e normalicemos para obter unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$ de $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{r}^3$ tal que

$$\begin{aligned} &[e_1, e_4] = -\tfrac{1}{R}\{\tilde{a}e_1 + \tilde{b}e_2 + \tilde{c}e_3\}, \qquad [e_2, e_4] = -\tfrac{1}{R}\{-\tilde{b}e_1 + \tilde{f}e_2 + \tilde{h}e_3\}, \\ &[e_3, e_4] = -\tfrac{1}{R}\{-\tilde{c}e_1 - \tilde{h}e_2 + \tilde{p}e_3\}, \quad R > 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

No que segue, fixamos $a = -\frac{\tilde{a}}{R}$, $f = -\frac{\tilde{f}}{R}$, $p = -\frac{\tilde{p}}{R}$, $b = -\frac{\tilde{b}}{R}$, $c = -\frac{\tilde{c}}{R}$ e $h = -\frac{\tilde{h}}{R}$.

Observación 3.17. As métricas invariantes á esquerda (3.9) están determinadas por un vector $(a, f, p, b, c, h) \in \mathbb{R}^6$. A isometría $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4) = (e_2, e_1, e_3, e_4)$ amosa que $(a, f, p, b, c, h) \sim (f, a, p, -b, h, c)$. Analogamente, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4) = (e_3, e_2, e_1, e_4)$ dá lugar a $(a, f, p, b, c, h) \sim (p, f, a, -h, -c, -b)$ e a isometría $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4) = (e_1, e_3, e_2, e_4)$ mostra que $(a, f, p, b, c, h) \sim (a, p, f, c, b, -h)$.

Observación 3.18. Unha métrica invariante á esquerda (3.9) é Einstein se e só se a parte autoadxunta da derivación é un múltiplo da identidade, $a = f = p$, en cuxo caso a curvatura seccional é constante $K = -a^2$. Ademais, a curvatura escalar dunha métrica (3.9), $\tau = -2\left(a^2 + f^2 + p^2 + a(f + p) + fp\right)$, anúlase se e só se a métrica é chá.

Comezaremos estudando o caso das métricas $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero. No caso non chan, temos que $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2}$ e

$$\begin{aligned} \|\rho\|^2 = {} & \left(a^2 + f^2 + p^2\right)^2 + \left(a^2 + f^2 + p^2\right)(a + f + p)^2 \\ & + 2b^2(a - f)^2 + 2c^2(a - p)^2 + 2h^2(f - p)^2. \end{aligned}$$

Teorema 3.19. *Unha métrica invariante á esquerda non simétrica en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero se e só se é homotética a unha métrica invariante á esquerda determinada polas seguintes álxebras de Lie:*

(1) $[e_2, e_4] = e_2 + e_3$ *e* $[e_3, e_4] = -(e_2 + e_3)$.

(2) $[e_1, e_4] = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3)$, $[e_2, e_4] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + e_2$ *e* $[e_3, e_4] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - e_3$.

(3) $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = fe_2$ *e* $[e_3, e_4] = pe_3$, *onde as constantes de estrutura* $f \leq p$ *satisfán* $(f, p) \notin \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

(4) $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = -(\kappa + \frac{1}{2})e_2 + he_3$, $[e_3, e_4] = -he_2 + (\kappa - \frac{1}{2})e_3$, *onde* $\kappa > \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $h^2 = \kappa^2 \frac{4\kappa^2 + 3}{4\kappa^2 - 3}$.

(5) $[e_1, e_4] = e_1 + ce_3$, $[e_2, e_4] = e_2 + he_3$ *e* $[e_3, e_4] = -ce_1 - he_2 - 2e_3$, *onde* $2(c^2 + h^2) = 9$ *con* $c, h \in (0, \frac{3}{\sqrt{2}})$.

(6) $[e_1, e_4] = e_1 + ce_3$, $[e_2, e_4] = -(p+1)e_2 + he_3$, $[e_3, e_4] = -ce_1 - he_2 + pe_3$, *cos parámetros* $c, h > 0$ *determinados por* $c^2 = -\frac{(2p+1)(8p^3+15p^2+3p+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}$ *e* $h^2 = \frac{(p+1)(p-1)(5p^3+12p^2+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}$, $p \neq 0$, $p \in (-\infty, \zeta_1) \cup (\zeta_2, -1) \cup (\frac{1-\sqrt{21}}{10}, \frac{1+\sqrt{21}}{10})$, *onde* ζ_1 *e* ζ_2 *son as únicas solucións reais de* $5p^3 + 12p^2 + 1 = 0$ *e* $8p^3 + 15p^2 + 3p + 1 = 0$, *respectivamente.*

Ademais, as métricas dadas en (1)-(3) *son solitóns de Ricci alxébricos, mentres que as dadas en* (4)-(6) *non o son.*

Demostración. Sexa $\mathfrak{F} = \Delta\rho + 2R[\rho] - 2\tau^{-1}\|\rho\|^2\rho$ o tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ $\mathfrak{F}_t$ correspondente ao valor de $t = -\|\rho\|^2\tau^{-2}$. Considerando a parte autoadxunta da derivación dada por $\mathrm{diag}[a, f, p]$, dividimos o estudo en dous casos distintos, $afp = 0$ e $afp \neq 0$. No primeiro caso podemos asumir, tras unha posible rotación, que $a = 0$.

Caso $a = 0$. Distinguiremos os casos nos que a parte autoadxunta da derivación é de rango un ou dous. A observación 3.18 amosa que a métrica é chá se e só se a parte autoadxunta da derivación se anula.

Caso $a = 0$, $f = 0$, $p \neq 0$. Neste caso, $\mathfrak{F}(e_4, e_4) = -2p^2(c^2 + h^2)$, de onde se segue que $c = h = 0$ e así a métrica é localmente simétrica e localmente isométrica a un produto $\mathbb{R}^2 \times N^2(\kappa)$, o cal é un solitón de Ricci gradiente ríxido.

Caso $a = 0$, $fp \neq 0$. Reescalamos para fixar $f = 1$ e traballar cunha métrica homotética á orixinal. Agora $\mathfrak{F}(e_4, e_4) = -\frac{2(p+1)^2}{p^2+p+1}(b^2 + c^2p^2 + h^2(p-1)^2)$, de onde se segue que $p = -1$, $b = c = h = 0$, ou $b = c = 0$ e $p = 1$.

(i) Caso $a = 0$, $f = 1$, $p \neq 0$, $b = c = h = 0$. Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{F} = 0$ e $\mathrm{Ric} + (p^2 + 1)\,\mathrm{Id}$ é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico, o cal é un caso particular da posibilidade (3) (véxase a Observación 3.17). Ademais, $p \neq 1$ dado que a métrica é localmente simétrica en caso contrario.

(ii) Caso $a = 0$, $f = 1 = -p$. Neste caso $\mathfrak{F}$ está determinado por

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}(e_1, e_1) &= \mathfrak{F}(e_2, e_2) = \mathfrak{F}(e_3, e_3) = 6bch, \\ \mathfrak{F}(e_1, e_2) &= -b(2b^2 - 4c^2 - h^2 + 1), \\ \mathfrak{F}(e_1, e_3) &= -c(4b^2 - 2c^2 + h^2 - 1), \\ \mathfrak{F}(e_2, e_3) &= h(b^2 + c^2 - 8h^2 + 8). \end{aligned}$$

Dado que $bch = 0$, consideramos as distintas posibilidades Nótese que o caso $b = c = h = 0$ está incluído no estudo do caso (i). Se $b = 0$, entón necesariamente temos que $c = 0$ e $h^2 = 1$, o que implica que

$$[e_2, e_4] = e_2 + he_3, \quad [e_3, e_4] = -he_2 - e_3, \quad h^2 = 1.$$

A métrica é $\mathcal{F}_{-3}$-crítica e $\mathrm{Ric} + 6\,\mathrm{Id}$ é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico. Ademais, a isometría $e_2 \mapsto -e_2$ intercambia o signo de h. Así, podemos asumir que $h = 1$, o que se corresponde coa posibilidade (1). Por último, se $b \neq 0$, entón séguese que $c^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ e $h = 0$. Neste caso a métrica, determinada por

$$[e_1, e_4] = be_2 + ce_3, \quad [e_2, e_4] = -be_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = -ce_1 - e_3,$$

é $\mathcal{F}_{-3/2}$-crítica e $\operatorname{Ric} + 3 \operatorname{Id}$ é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico. Seguindo o mesmo argumento que no caso anterior, $e_2 \mapsto -e_2$ e $e_3 \mapsto -e_3$ determinan isometrías que intercambian os signos de b e c, respectivamente. Así, podemos asumir que $b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o que se corresponde coa posibilidade (2).

(iii) Caso $a = 0$, $f = p = 1$, $b = c = 0$. Un cálculo directo amosa que a estrutura é localmente conformemente chá e localmente isométrica a un produto $\mathbb{R} \times N^3(\kappa)$, que é un solitón de Ricci gradiente ríxido.

Caso $\boldsymbol{afp \neq 0}$. Un cálculo directo amosa que

$$\mathfrak{F}(e_4, e_4) = \frac{4}{\tau}(a + f + p)^2 \, \tilde{\mathfrak{g}},$$

onde $\tilde{\mathfrak{g}} = b^2(a - f)^2 + c^2(a - p)^2 + h^2(f - p)^2$. Deste xeito, consideraremos de forma separada os casos $a + f + p = 0$ e $a + f + p \neq 0$, é dicir, distinguiremos os casos nos que a traza da parte autoadxunta da derivación é nula dos que non.

Caso $a + f + p = 0$. Fixando $f = -(a + p)$ temos que

$$\mathfrak{F}(e_1, e_1) = 6bch(a + 2p), \quad \mathfrak{F}(e_2, e_2) = 6bch(a - p), \quad \mathfrak{F}(e_3, e_3) = -6bch(2a + p),$$

o que amosa que a parte antisimétrica da derivación satisfai $bch = 0$. Pola Observación 3.17, podemos asumir que $b = 0$. Traballando coa métrica homotética determinada por $a = 1$, o tensor $\mathfrak{F}$ redúcese ás compoñentes non nulas

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(e_1, e_3) &= -\tfrac{c\left(2(p-1)(p^2+4p+1)c^2-(p^3-9p^2-15p-4)h^2+(p-1)^3(p^2+p+1)\right)}{p^2+p+1}, \\
\mathfrak{F}(e_2, e_3) &= -\tfrac{h\left((p^3+9p^2+3p-4)c^2-(2p+1)(4p^2+4p-2)h^2+(2p+1)^3(p^2+p+1)\right)}{p^2+p+1}.
\end{aligned}$$

Ademais, usando novamente a Observación 3.17, basta con analizar os seguintes casos: $c = h = 0$, ou $c = 0$ e $h \neq 0$, ou $ch \neq 0$.

(i) Se $c = h = 0$, entón o tensor $\mathfrak{F}$ anúlase identicamente e, ademais, $\operatorname{Ric} + 2(p^2 + p + 1)$ é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico. A métrica, determinada por

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = -(p + 1)e_2, \quad [e_3, e_4] = pe_3,$$

é un caso particular das dadas na posibilidade (3) (véxase a Observación 3.17).

(ii) Se $c = 0$ e $h \neq 0$, entón $\mathfrak{F}$ redúcese a

$$\mathfrak{F}(e_2, e_3) = \tfrac{h(2p+1)\left(h^2(4p^2+4p-2)-(2p+1)^2(p^2+p+1)\right)}{p^2+p+1}.$$

Asumindo que $2p+1 = 0$, a curvatura seccional non depende do parámetro h, o que amosa que a métrica é homotética a unha métrica invariante á esquerda do caso anterior(véxase [97]). En caso contrario, temos a condición $h^2(4p^2 + 4p - 2) - (2p + 1)^2(p^2 + p + 1) = 0$.

Fixando $\kappa = p + \frac{1}{2}$, esta ecuación é da forma $\kappa^2(4\kappa^2+3) - h^2(4\kappa^2-3) = 0$. Así $\kappa > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\kappa < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$$[e_1,e_4] = e_1,\ [e_2,e_4] = -\left(\kappa + \tfrac{1}{2}\right) e_2 + he_3,\ [e_3,e_4] = -he_2 + \left(\kappa - \tfrac{1}{2}\right) e_3.$$

Ademais $e_2 \mapsto e_3$ determina unha isometría que intercambia o signo de κ e de h. Deste xeito, podemos restrinxir o estudo a $\kappa > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Un cálculo directo amosa que estes grupos de Lie, que se corresponden coa posibilidade (4), non son solitóns de Ricci alxébricos.

(iii) Se $ch \neq 0$, entón a métrica vén dada por

$$\begin{aligned}&[e_1,e_4] = e_1 + ce_3, \quad [e_2,e_4] = -(p+1)e_2 + he_3,\\ &[e_3,e_4] = -ce_1 - he_2 + pe_3,\end{aligned}$$

onde os parámetros c e h están determinados polas expresións $\mathfrak{F}(e_1,e_3)$ e $\mathfrak{F}(e_2,e_3)$. Se $(p+2)(5p^2-p-1) \neq 0$, entón

$$c^2 = -\tfrac{(2p+1)(8p^3+15p^2+3p+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}, \quad h^2 = \tfrac{(p-1)(p+1)(5p^3+12p^2+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}.$$

Ademais, estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero e non son solitóns de Ricci alxébricos. Dado que a isometría $e_2 \mapsto -e_2$ intercambia h con $-h$, e $e_3 \mapsto -e_3$ intercambia c con $-c$ e h con $-h$ simultaneamente, podemos asumir que $c > 0$ e $h > 0$. Esta situación correspóndese coa posibilidade (6).

Se $p = -2$ obtemos

$$\mathfrak{F}(e_1,e_3) = -3c(2(c^2+h^2)-9), \quad \mathfrak{F}(e_2,e_3) = -3h(2(c^2+h^2)-9),$$

de onde se segue que c e h están limitados por $2(c^2+h^2) = 9$. Nótese que a isometría $e_1 \mapsto e_2$ intercambia c e h. Ademais, $e_2 \mapsto -e_2$ intercambia h con $-h$ e a isometría $e_3 \mapsto -e_3$ intercambia o signo de c e h simultaneamente. Polo tanto, podemos asumir que $c > 0$ e $h > 0$ e fixar $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9-2c^2}$ con $0 < c < \frac{3}{\sqrt{2}}$. Estas métricas, que se corresponden coa posibilidade (5), non son solitóns de Ricci alxébricos.

Finalmente, o caso $5p^2 - p - 1 = 0$ correspóndese cos valores de $p = \frac{1}{10}(1 \pm \sqrt{21})$, e un cálculo directo amosa que este caso non proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas con enerxía cero.

Caso $a+f+p \neq 0$ *e* $\tilde{\mathfrak{g}} = b^2(a-f)^2 + c^2(a-p)^2 + h^2(f-p)^2 = 0$. Séguese da Observación 3.17 que basta con considerar as seguintes situacións non simétricas:

(i) Se $b = c = h = 0$, entón a métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica con enerxía cero e $\operatorname{Ric} + (a^2+f^2+p^2)\operatorname{Id}$ é unha derivación que determina un solitón de Ricci alxébrico. Ademais, estas métricas son isomorficamente homotéticas ás da posibilidade (3) (véxase a Observación 3.17).

(ii) Se $b = h = 0$, $c \neq 0$ e $p = a$, entón fixando $a = 1$ a métrica está na clase homotética de

$$[e_1,e_4] = e_1 + ce_3, \quad [e_2,e_4] = fe_2, \quad [e_3,e_4] = -ce_1 + e_3,$$

e un cálculo directo amosa que a curvatura seccional é independente da constante de estrutura c. Séguese do traballo de Kulkarni (véxase [97]) que a métrica é homotética a unha métrica con $c = 0$, a cal é un caso particular da posibilidade (i). □

Observación 3.20. As métricas no Teorema 3.19-(1) correspóndense cos solitóns de Ricci alxébricos (i) na Sección 3.3. As métricas invariantes á esquerda no Teorema 3.19-(2) correspóndense cos solitóns de Ricci alxébricos (ii), mentres que as métricas dadas no Teorema 3.19-(3) se corresponden cos (iii) na Sección 3.3.

Corolario 3.21. *Unha métrica invariante á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero se e só se é homotético ou ben a un solitón de Ricci ou a unha métrica invariante á esquerda determinada por*

$$[e_1, e_4] = e_1 + ce_3, \quad [e_2, e_4] = -(p+1)e_2 + he_3, \quad [e_3, e_4] = -ce_1 - he_2 + pe_3,$$

con respecto a unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$, onde $c^2 + h^2 \neq 0$ e

(i) Se a constante de estrutura $c = 0$, entón $p = \kappa - \frac{1}{2}$ para $\kappa > \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $h^2 = \kappa^2 \frac{4\kappa^2+3}{4\kappa^2-3}$. Estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{48\kappa^4-9}{16\kappa^4-9} \in (-\infty, -3)$.

(ii) Se a constante de estrutura $p = -2$, entón $h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9-2c^2}$ para $0 < c < \frac{3}{\sqrt{2}}$. Estas métricas son $\mathcal{F}_{-13/4}$-críticas.

(iii) Se $(p+2)ch \neq 0$, entón c e h son as solucións positivas de

$$c^2 = -\frac{(2p+1)(8p^3+15p^2+3p+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)}, \quad h^2 = \frac{(p+1)(p-1)(5p^3+12p^2+1)}{(p+2)(5p^2-p-1)},$$

para algún $p \neq 0$, con $p \in (-\infty, \zeta_1) \cup (\zeta_2, -1) \cup (\frac{1-\sqrt{21}}{10}, \frac{1+\sqrt{21}}{10})$, onde $\zeta_1 = -2,433\dots$ e $\zeta_2 = -1,697\dots$ son as únicas solucións reais das ecuacións $5p^3 + 12p^2 + 1 = 0$ e $8p^3 + 15p^2 + 3p + 1 = 0$, respectivamente. Estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{30p^4-3p^2-6p-3}{2(p^2+p+1)(5p^2-p-1)} \in (-\infty, -\frac{3}{2})$.

Demostración. Analizamos as métricas críticas dadas no Teorema 3.19 que non son solitóns de Ricci alxébricos. Considerando as métricas invariantes á esquerda dadas no Teorema 3.19-(4), temos que $t = -\frac{48\kappa^4-9}{16\kappa^4-9} \in (-\infty, -3)$. Isto correspóndese coa posibilidade (i).

A posibilidade (ii) correspóndese coas métricas no Teorema 3.19-(5). Un cálculo directo amosa que estas métricas son $\mathcal{F}_{-13/4}$-críticas.

Consideremos agora unha métrica descrita como no Teorema 3.19-(6). Un cálculo directo amosa que o rango do parámetro p está limitado pola positividade dos cocientes que determinan c^2 e h^2. Ademais, estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{30p^4-3p^2-6p-3}{2(p^2+p+1)(5p^2-p-1)} \in (-\infty, -\frac{3}{2})$, o que se corresponde coa posibilidade (iii).

No que segue amosamos que ningunha destas métricas está na clase homotética dun solitón de Ricci alxébrico. Obsérvese que os solitóns de Ricci non Einstein son $\mathcal{F}_t$-críticos para $t = -\frac{1}{2}$ e $t = -\frac{1}{3}$ no caso simétrico, ou para $t = -3$, $t = -\frac{3}{2}$, ou $-1 \leq t < -\frac{1}{4}$ noutro caso (véxase a Figura 3.3.1). Dado que os valores críticos das posibilidades (i) e (ii) non se corresponden co de ningún solitón de Ricci alxébrico, as métricas correspondentes non son solitóns de Ricci.

Para as métricas da posibilidade (iii) basta con analizar o caso crítico para $\mathcal{F}_{-3}$, que se corresponde con valor de $p = \frac{1}{16}(1 \pm \sqrt{33})$, en cuxo caso o invariante homotético de terceira orde

$\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\tau^3}$ vén dado por $\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\tau^3} = -\frac{776}{81}$. Por outra banda, os solitóns de Ricci alxébricos con $t = -3$ en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ correspóndense coas métricas dadas no Teorema 3.19-(1), cuxo invariante homotético de terceira orde vén dado por $\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\tau^3} = -8$, o que amosa que as métricas da posibilidade (iii) con $p = \frac{1}{16}(1 \pm \sqrt{33})$ non son solitóns de Ricci. □

Observación 3.22. Seguindo un argumento similar ao aplicado no Teorema 3.19, podemos obter as métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ con enerxía distinta de cero. Así, temos o seguinte:

> *Unha métrica invariante á esquerda non simétrica en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura con enerxía distinta de cero se e só se é homotética a unha das seguintes variedades:*
>
> (1) $[e_1, e_4] = \frac{1}{3}e_1$, $[e_2, e_4] = fe_2 + he_3$, $[e_3, e_4] = -he_2 - (f - \frac{2}{3})e_3$, *con* $h \neq 0$ *e* $36f^2 - 36h^2 - 24f - 5 = 0$. *Ademais* $t = -\frac{5+36h^2}{11+12h^2} \in (-3, -\frac{5}{11})$ *con enerxía* $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -\frac{16}{3}h^2$.
>
> (2) $[e_1, e_4] = ae_1 + be_2$, $[e_2, e_4] = -be_1 + \frac{1}{3}e_2 + be_3$, $[e_3, e_4] = -be_2 - (a - \frac{2}{3})e_3$, *con* $b > 0$ *e* $9a^2 - 18b^2 - 6a - 8 = 0$. *Ademais* $t = -\frac{7+18b^2}{10+12b^2} \in (-\frac{3}{2}, -\frac{7}{10})$ *con enerxía* $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -\frac{8}{3}b^2$.

Observación 3.23. Na Figura 3.7.1 represéntanse os valores de t para as métricas críticas obtidas no Teorema 3.19 e na Observación 3.22.

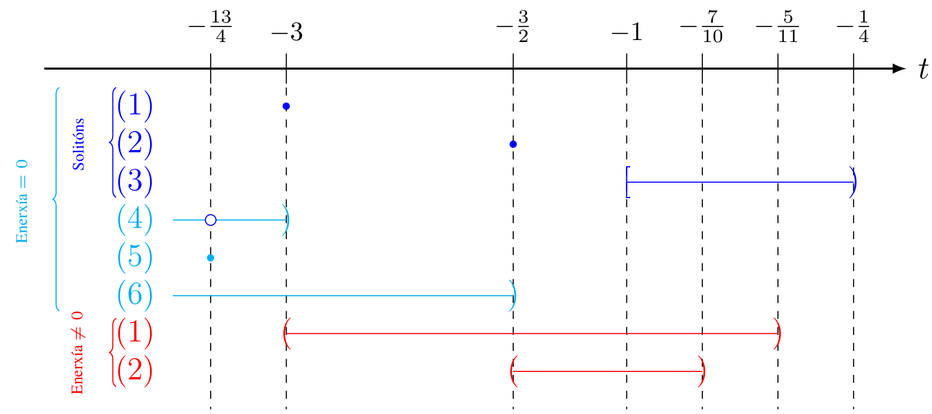


Figura 3.7.1: Valores de t para os que existen métricas invariantes á esquerda en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ críticas, distinguindo entre as que teñen enerxía cero e distinta de cero.

Capítulo 4

Métricas riemannianas críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura

Á hora de explorar métricas que son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura, debemos distinguir os casos en que a curvatura escalar é constante ou non. Baixo certas condición, como a homoxeneidade, que xa foi estudada nos capítulos 2 e 3, a curvatura escalar é constante. Mais tamén outras condicións, incluso de índole topolóxica, como que a variedade sexa pechada, poden forzar a que a variedade teña curvatura escalar constante:

Teorema 4.1. [126] *Unha métrica crítica para o funcional $\mathcal{S}$ nunha variedade pechada ten curvatura escalar constante.*

Nesta situación en que a curvatura escalar é constante, unha métrica crítica para o funcional da norma L^2 da curvatura escalar satisfai a ecuación (2.1):

$$\tau\left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g\right) = 0.$$

Polo tanto temos que a variedade é Einstein ou a curvatura escalar é 0. Un exemplo non-Einstein que pode resultar ilustrativo é o de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^2$, que ten curvatura escalar cero, pero non é Einstein. Ademais, esta variedade é localmente conformemente chá, polo que é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

Neste capítulo atenderemos ao caso en que a curvatura escalar é unha función non constante. En primeiro lugar, motivaremos este labor mediante o estudo dos conos, obtendo o primeiro exemplo de variedade riemanniana non Einstein que é crítica para todos os funcionais. Na sección seguinte chegaremos a que, en dimensión catro, toda variedade riemanniana crítica para todos os funcionais cuxa curvatura escalar é unha función propia é Einstein ou ben un produto warped cunha condición sobre a función de deformación. Finalmente, a partir desta condición antes mencionada, estudarase o dominio de dita función coa fin de descubrir se se pode estender a $\mathbb{R}$ e obter exemplos completos.

4.1. Métricas críticas sobre os conos

A idea de cono de dúas dimensións máis estendida dentro das matemáticas é a de superficie regrada: a superficie xerada ao xirar un segmento de recta que nace no eixo z ao redor de dito eixo. Porén, esta figura pode entenderse doutro xeito. Dado un segmento de recta (ou unha semirrecta), construímos un cono centrando en cada punto do segmento unha circunferencia de raio proporcional á distancia de dito punto a un extremo do segmento (resp., semirrecta).

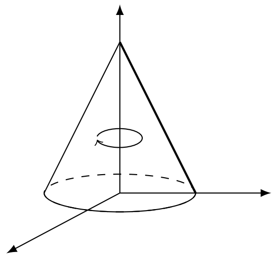


Figura 4.1.1: cono como superficie de revolución.

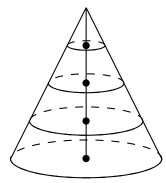


Figura 4.1.2: cono construído mediante circunferencias.

Este xeito de construír os conos de dúas dimensións dá pé á súa xeneralización, tanto aumentando a dimensión como permitindo substituír a circunferencia por calquera outra variedade riemanniana. Así, definimos os conos sobre unha variedade riemanniana como segue.

Definición 4.2. Sexa (N, g_N) unha variedade riemanniana de dimensión n. O *cono* sobre N é a variedade riemanniana de dimensión $n+1$ dada polo produto $\mathbb{R}^+ \times N$ equipado coa métrica de produto warped $g = dr^2 + r^2 g_N$.

Dado que o cono ten dimensión $n+1$, as ecuacións de Euler-Lagrange para o funcional $\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \tau^2 dvol_g$ veñen dadas por

$$2\nabla^2\tau - \tfrac{2}{n+1}\Delta\tau g - 2\tau\rho + \tfrac{2}{n+1}\tau^2 g = 0. \tag{4.1}$$

Dun xeito análogo, a expresión das ecuacións de Euler-Lagrange para o funcional $\mathcal{T} : g \mapsto \int_M \|\rho\|^2 dvol_g$ é da forma

$$\Delta\rho + 2R[\rho] - \nabla^2\tau - \tfrac{2}{n+1}\|\rho\|^2 g = 0. \tag{4.2}$$

Así, as ecuacións de Euler-Lagrange para o funcional $\mathcal{F}_t$ veñen dadas por

$$\Delta\rho - (1+2t)\nabla^2\tau + \tfrac{2}{n+1}t\Delta\tau g + 2(R[\rho] - \tfrac{1}{n+1}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho - \tfrac{1}{n+1}\tau g) = 0. \tag{4.3}$$

Sexa $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$ o campo de vectores unitario radial, e denotemos por X, Y, Z, os levantamentos a $\mathbb{R}^+ \times N$ dos campos de vectores X, Y, Z, en N. A conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^+ \times_r N$ está determinada por

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0, \qquad \nabla_{\partial_r} X = \nabla_X \partial_r = \tfrac{1}{r}X, \qquad \nabla_X Y = \nabla^N_X Y - \tfrac{1}{r}g(X,Y)\partial_r. \tag{4.4}$$

As únicas compoñentes posiblemente non nulas do tensor de curvatura de $\mathbb{R}^+ \times_r N$ son as da forma

$$R(X,Y)Z = R^N(X,Y)Z - \tfrac{1}{r^2}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}, \tag{4.5}$$

o que amosa que o cono é chan se e só se N é unha variedade de curvatura seccional constante igual a 1. O tensor de Ricci está determinado pola única compoñente non nula

$$\rho(X,Y) = \rho^N(X,Y) - (n-1)g_N(X,Y). \tag{4.6}$$

Polo tanto, o cono é Einstein se e só se é Ricci-chan, o cal ocorre se e só se N é Einstein con $\rho^N = (n-1)g_N$. A curvatura escalar vén dada por

$$\tau = \tfrac{1}{r^2}\left(\tau^N - n(n-1)\right),$$

polo que $\mathbb{R}^+ \times_r N$ ten curvatura escalar constante se e só se $\tau^N = n(n-1)$, en cuxo caso $\tau = 0$.

4.1.1. Métricas cónicas críticas para o funcional da norma L^2 da curvatura escalar

Teorema 4.3. *O cono sobre unha variedade riemanniana de dimensión n (N, g_N) é $\mathcal{S}$-crítico se e só se satisfai unha das seguintes condicións:*

(i) *A curvatura escalar τ anúlase (neste caso, $\tau^N = n(n-1)$).*

(ii) *(N, g_N) é Einstein con curvatura escalar $\tau^N = n(n-9)$.*

Demostración. Unha métrica $g = dr^2 + r^2 g_N$ é $\mathcal{S}$-crítica se e só se satisfai a ecuación (4.1). Polo tanto, consideremos o tensor de tipo (0,2)

$$\mathfrak{S} = 2\nabla^2\tau - \tfrac{2}{n+1}\Delta\tau g - 2\tau\rho + \tfrac{2}{n+1}\tau^2 g.$$

Un cálculo directo amosa que o hessiano da curvatura escalar do cono vén dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2\tau(\partial_r, \partial_r) &= \tfrac{6}{r^4}(\tau^N - n(n-1)),\\
\nabla^2\tau(\partial_r, X) &= -\tfrac{3}{r^3}d\tau^N(X),\\
\nabla^2\tau(X, Y) &= \tfrac{1}{r^2}\{(\nabla^N)^2\tau^N(X, Y) - 2(\tau^N - n(n-1))g_N(X, Y)\},
\end{aligned}$$

e o laplaciano da curvatura escalar, definido como a traza do hessiano da curvatura escalar, vén dado por $\Delta\tau = \frac{1}{r^4}\left(\Delta^N\tau^N - 2(n-3)(\tau^N - n(n-1))\right)$.

Así,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(\partial_r, X) &= 2\nabla^2\tau(\partial_r, X) - \tfrac{2}{n+1}\Delta\tau g(\partial_r, X) - 2\tau\rho(\partial_r, X) + \tfrac{2}{n+1}\tau^2 g(\partial_r, X)\\
&= -\tfrac{3}{r^3}d\tau^N(X),
\end{aligned}$$

do cal se deduce que a curvatura escalar de N é constante. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(\partial_r, \partial_r) &= 2\nabla^2\tau(\partial_r, \partial_r) - \tfrac{2}{n+1}\Delta\tau g(\partial_r, \partial_r) - 2\tau\rho(\partial_r, \partial_r) + \tfrac{2}{n+1}\tau^2 g(\partial_r, \partial_r)\\
&= \tfrac{1}{r^4(n+1)}\left(\tau^N - n(n-1)\right)\left(\tau^N - n(n-9)\right),
\end{aligned}$$

o que amosa que $\tau^N = n(n-1)$ e a curvatura escalar do cono se anula (condición (i) do teorema) ou ben $\tau^N = n(n-9)$. Por último, considerando a compoñente restante,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(X, Y) &= 2\nabla^2\tau(X, Y) - \tfrac{2}{n+1}\Delta\tau g(X, Y) - 2\tau\rho(X, Y) + \tfrac{2}{n+1}\tau^2 g(X, Y)\\
&= -\tfrac{1}{r^2}\left\{\tau_N - n(n-1)\right\}\left\{\rho^N(X, Y) - \tfrac{1}{n+1}(\tau^N + n - 9)g_N(X, Y)\right\},
\end{aligned}$$

novamente obtemos que $\tau^N = n(n-1)$ ou ben $\rho^N = \frac{1}{n+1}(\tau^N + n - 9)g_N$. Esta última posibilidade implica que (N, g_N) é Einstein con $\tau^N = n(n-9)$, o que se corresponde coa condición (ii). $\square$

Observación 4.4. Os conos con $\tau^N = n(n-1)$ da familia (i) do teorema teñen curvatura escalar cero e, polo tanto, proporcionan exemplos triviais de métricas $\mathcal{S}$-críticas. Por outra banda, os conos con $\tau^N = n(n-9)$ da familia (ii) do teorema proporcionan métricas $\mathcal{S}$-críticas con curvatura escalar $\tau = -\frac{8}{r^2}n$, a cal non é constante.

4.1.2. Métricas cónicas $\mathcal{S}$-críticas e $\mathcal{T}$-críticas

Dado que as métricas $\mathcal{T}$-críticas son caracterizadas pola Ecuación (4.2), consideramos o tensor simétrico de tipo (0,2) definido por $\mathfrak{T} = \Delta\rho + 2R[\rho] - \nabla^2\tau - \frac{2}{n+1}\|\rho\|^2 g$. En primeiro lugar, calculamos o laplaciano do tensor de Ricci como segue.

Lema 4.5. *Sexa $\mathbb{R}^+ \times_r N$ un cono sobre unha variedade riemanniana (N, g_N) de dimensión n. Entón, o laplaciano do tensor de Ricci vén dado por*

$$\begin{aligned}
&\Delta\rho(\partial_r, \partial_r) = \tfrac{2}{r^4}(\tau^N - n(n-1)),\\
&\Delta\rho(\partial_r, X) = -\tfrac{1}{r^3} d\tau^N(X),\\
&\Delta\rho(X, Y) = \tfrac{1}{r^2}\left\{\Delta^N\rho^N(X,Y) - 2(n-2)(\rho^N(X,Y) - (n-1)g_N(X,Y))\right\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Séguese de (4.4) e (4.6) que as posibles compoñentes non nulas de $\nabla\rho$ son

$$\nabla_{\partial_r}\rho(X,Y) = 2\nabla_Y\rho(\partial_r, X) = -\tfrac{2}{r}\rho(X,Y), \quad \nabla_Z\rho(X,Y) = \nabla^N_Z\rho(X,Y).$$

Sexa $\{\partial_r, e_1, \dots, e_n\}$ unha referencia ortonormal no cono. Un cálculo directo amosa que

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\partial_r\partial_r}\rho(X,Y) &= \tfrac{6}{r^2}\rho(X,Y),\\
\nabla^2_{e_ie_i}\rho(\partial_r,\partial_r) &= \tfrac{2}{r^2}\rho(e_i,e_i),\\
\nabla^2_{e_ie_i}\rho(\partial_r,X) &= -\tfrac{2}{r}(\nabla^N_{e_i}\rho^N)(e_i,X),\\
\nabla^2_{e_ie_i}\rho(X,Y) &= (\nabla^N)^2_{e_i\,e_i}\rho^N(X,Y)\\
&\quad - \tfrac{1}{r^2}\left\{2\rho(X,Y) + g(X,e_i)\rho(e_i,Y) + g(Y,e_i)\rho(e_i,X)\right\},
\end{aligned}$$

de onde se segue o resultado. □

Teorema 4.6. *Sexa (N, g_N) unha variedade Einstein de dimensión n. Entón, o cono $\mathbb{R}^+ \times_r N$ é $\mathcal{T}$-crítico se e só se satisfai unha das seguintes condicións:*

(1) $\mathbb{R}^+ \times_r N$ *é Ricci-chá.*

(2) $\tau^N = -n(n+3)$, *en cuxo caso* $\tau = -\frac{2}{r^2}n(n+1)$.

Demostración. Unha métrica é crítica para o norma L^2 do tensor de Ricci se e só se se anula identicamente o tensor simétrico de tipo (0,2) definido por $\mathfrak{T} = \Delta\rho + 2R[\rho] - \nabla^2\tau - \frac{2}{n+1}\|\rho\|^2 g$.

Un cálculo directo amosa que o tensor $R[\rho]$ dun cono satisfai

$$\begin{aligned}
R[\rho](X,Y) = {}&\tfrac{1}{r^2}R^N[\rho^N](X,Y)\\
&- \tfrac{1}{r^2}\{(n-2)\rho^N(X,Y) + (\tau^N - (n-1)^2)g_N(X,Y)\},
\end{aligned}$$

sendo cero noutro caso. Dado que (N, g_N) é unha variedade Einstein, a súa curvatura escalar é constante, o seu tensor de Ricci é proporcional á métrica $\rho^N = \frac{\tau^N}{n} g_N$ e $R^N[\rho^N] = (\frac{\tau^N}{n})^2 g_N$. Así,

$$R[\rho](X, Y) = \tfrac{1}{r^2 n^2}(\tau^N - n(n-1))^2 g_N(X, Y), \text{ e } R[\rho](\partial_r, \cdot) = 0.$$

Ademais, $\|\rho\|^2 = \frac{1}{nr^4}(\tau^N - n(n-1))^2$ e o hessiano da curvatura escalar do cono vén dado por

$$\begin{aligned}\nabla^2\tau(\partial_r, \partial_r) &= \tfrac{6}{r^4}(\tau^N - n(n-1)), \quad \nabla^2\tau(\partial_r, X) = 0,\\ \nabla^2\tau(X, Y) &= -\tfrac{2}{r^2}(\tau^N - n(n-1))g_N(X, Y).\end{aligned}$$

Séguese do Lema 4.5 que o laplaciano do tensor de Ricci dun cono sobre unha variedade Einstein vén dado por

$$\begin{aligned}\Delta\rho(\partial_r, \partial_r) &= \tfrac{2}{r^4}(\tau^N - n(n-1)), \quad \Delta\rho(\partial_r, X) = 0,\\ \Delta\rho(X, Y) &= -\tfrac{2(n-2)}{r^2 n}(\tau^N - n(n-1))g_N(X, Y).\end{aligned}$$

Dun cálculo directo obtemos que as posibles compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{T}$ son

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}(\partial_r, \partial_r) &= -\tfrac{2}{r^4 n(n+1)}(\tau_N - n(n-1))(\tau_N + n(n+3)),\\ \mathfrak{T}(X, Y) &= -\tfrac{2}{r^2 n^2(n+1)}(\tau_N - n(n-1))(\tau_N + n(n+3))g_N(X, Y).\end{aligned}$$

Polo tanto, o tensor $\mathfrak{T}$ anúlase se e só se $\tau^N = n(n-1)$, en cuxo caso o cono é Ricci-chan, ou $\tau^N = -n(n+3)$, e a curvatura escalar do cono vén dada por $\tau = -\frac{2}{r^2}n(n+1)$. □

Observación 4.7. Unha métrica é crítica para o funcional definido pola norma L^2 do tensor de curvatura se e só se o tensor simétrico de tipo (0,2) definido como

$$\mathfrak{R} = 4\Delta\rho - 2\nabla^2\tau + 4R[\rho] - 4\check{\rho} + 2\check{R} - \tfrac{2}{n+1}\left\{\Delta\tau + \|R\|^2\right\} g \tag{4.7}$$

se anula identicamente. Sexa $\mathbb{R}^+ \times_r N$ un cono Ricci-chan (é dicir, N é Einstein con $\tau^N = n(n-1)$). Entón, un cálculo directo amosa que $\mathfrak{R}(\partial_r, \partial_r) = -\frac{2}{n+1}\|R\|^2$, de onde se segue que un cono Ricci-chan é crítico para a norma L^2 do tensor de curvatura se e só se é chan.

Como consecuencia dos Teoremas 4.3 e 4.6 temos o seguinte resultado, que proporciona exemplos de métricas riemannianas críticas para todos os funcionais cuadráticos.

Corolario 4.8. *Un cono non chan $\mathbb{R}^+ \times_r N$ é crítico para todos os funcionais cuadráticos da curvatura se e só se (N, g_N) é unha variedade Einstein de dimensión tres con curvatura seccional constante $c_N = -3$.*

Demostración. Polo Teorema 4.3, unha métrica cónica $\mathbb{R}^+ \times_r N$ é $\mathcal{S}$-crítica se e só se a súa curvatura escalar se anula, isto é, se $\tau^N = n(n-1)$, ou se (N, g_N) é unha variedade Einstein con curvatura escalar $\tau^N = n(n-9)$. Se $\tau^N = n(n-1)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}(\partial_r, \partial_r) &= \Delta\rho(\partial_r, \partial_r) + 2R[\rho](\partial_r, \partial_r) - \nabla^2\tau(\partial_r, \partial_r) - \tfrac{2}{n+1}\|\rho\|^2 g(\partial_r, \partial_r)\\ &= \tfrac{8}{r^4}\big(\tau^N - n(n-1)\big) - \tfrac{2}{n+1}\|\rho\|^2.\end{aligned}$$

Polo tanto, se $\tau^N = n(n-1)$, esta compoñente anúlase se e só se $\|\rho\|^2 = 0$, e o cono $\mathbb{R}^+ \times_r N$ é necesariamente Ricci-chan. Ademais, pola Observación 4.7, un cono Ricci-chan é crítico para o funcional definido mediante a norma L^2 do tensor de curvatura se e só se é chan.

Se (N, g_N) é Einstein con curvatura escalar $\tau^N = n(n-9)$, entón, polo Teorema 4.6, o cono é crítico para o funcional $\mathcal{T}$ se e só se ademais satisfai que $\tau^N = -n(n+3)$. Igualando ambas expresións de τ^N temos que $n = 3$ e (N, g_N) é unha variedade Einstein de dimensión tres con curvatura escalar $\tau^N = -18$, de onde se segue que (N, g_N) ten curvatura seccional constante $c_N = -3$. □

Observación 4.9. A enerxía dos funcionais $\mathcal{F}_t$ correspondentes ás métricas críticas obtidas no Corolario 4.8 vén dada por $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = \frac{192}{r^4}(3t+1)$. A enerxía anúlase só para o funcional $\mathcal{F}_{-1/3}$, que en dimensión catro é equivalente ao funcional dado pola norma L^2 do tensor de Weyl.

Observación 4.10. O Corolario 4.8 amosa que as métricas cónicas que son críticas para todos os funcionais deben ser de dimensión catro e a base (N, g_N) debe ter curvatura seccional constante negativa $c_N = -3$. A pesar de que a rixidez na dimensión é esencial, o valor da curvatura seccional da base admite certa flexibilidade. Considerando unha deformación homotética da base (N, g_N), pódese construír un cono adecuado sobre calquera variedade de curvatura constante positiva ou, se consideramos un cono lorentziano, negativa de dimensión tres.

(1) Dada unha variedade de dimensión tres (N, g_N) con curvatura seccional negativa $-c$, o cono riemanniano modificado $\mathbb{R}^+ \times_{\lambda r} N$ con métrica $dr^2 + (\lambda r)^2 g_N$ é crítico para todos os funcionais cuadráticos da curvatura para $\lambda = \sqrt{\frac{c}{3}}$.

(2) Dada unha variedade de dimensión tres (N, g_N) con curvatura seccional positiva c, o cono lorentziano modificado $\mathbb{R}^+ \times_{\lambda r} N$ con métrica $-dr^2 + (\lambda r)^2 g_N$ é crítico para todos os funcionais cuadráticos da curvatura para $\lambda = \sqrt{\frac{c}{3}}$.

En contraposición cos casos anteriores, o cono sobre unha variedade chá de dimensión tres é $\mathcal{F}_t$-crítica unicamente para $t = -\frac{1}{3}$ dado que é localmente conformemente chá e este valor de t corresponde ao funcional da norma L^2 do tensor de Weyl.

4.2. Métricas críticas para todos os funcionais

Con esta fin recordamos o concepto de h-quasi-solitón de Ricci gradiente introducido en [77]. Un *h-quasi-solitón de Ricci gradiente* é unha cuádrupla (M, g, u, h) onde (M, g) é unha variedade riemanniana e $u,\ h \in C^\infty(M)$ son funcións diferenciables satisfacendo a ecuación

$$h\nabla^2 u + \rho = \lambda g, \tag{4.8}$$

onde $\lambda \in C^\infty(M)$ é obtida tomando as trazas da ecuación anterior. Ademais de xeneralizar as métricas Einstein e os solitóns de Ricci gradientes, os h-quasi-solitóns de Ricci gradientes inclúen ás métricas $\mathcal{S}$-críticas como un caso particular. A estrutura local dun h-quasi-solitón de Ricci gradiente Bach-chan foi estudado por Yun, Co e Hwang, obtendo o seguinte resultado.

Teorema 4.11. [133] *Sexa (M, g) un h-quasi-solitón de Ricci gradiente Bach-chan de dimensión n con función potencial u. Supoñamos que cada conxunto de nivel de u é compacto e h é unha función de u. Entón, (M, g) é*

- *Einstein con funcións u e h constantes, ou*
- *localmente isométrica a un produto warped con fibras Einstein compactas de dimensión $n-1$ se $\frac{dh}{du} > 0$ en M.*

Agora estamos en condicións de dar o seguinte resultado, que xeneraliza o cono crítico obtido na sección anterior.

Teorema 4.12. *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión catro cuxa curvatura escalar é unha función propia que non se anula en ningún punto. Entón, (M, g) é crítica para todos os funcionais cuadráticos se e só se é Einstein ou localmente isométrica a un produto warped localmente conformemente chan $\mathbb{R} \times_f N(c)$ cuxa función de deformación $f = e^\sigma$ satisfai*

$$\begin{aligned} \sigma^{(4)}(r) = {} & 2c^2 e^{-4\sigma(r)} + 2ce^{-2\sigma(r)} \left(\sigma'(r)^2 - \sigma''(r)\right) \\ & - 3\left(2\sigma''(r)^2 + \sigma'(r)\sigma^{(3)}(r)\right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

Demostración. Unha métrica $\mathcal{S}$-crítica con función escalar que non se anula é un h-quasi-solitón, como se evidencia se fixamos a función potencial $u = \tau$ e $h = -\frac{1}{u}$ en (4.8) e comparamos coa expresión (4.1). Neste caso, $\lambda = \frac{1}{4\tau}(\tau^2 - \Delta\tau)$.

Por outro lado, dado que a métrica é crítica para todos os funcionais, en particular é $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica, que en dimensión catro se corresponde con ser Bach-chá.

Polo tanto, á vista do Teorema 4.11, concluímos que a métrica é Einstein ou localmente isométrica a un produto warped $\mathbb{R} \times_f N(c)$, onde $N(c)$ é unha variedade de dimensión tres (N, g_N) con curvatura seccional constante $K_N = c$.

Vexamos agora como é a función de deformación. Dado que un produto warped $\mathbb{R} \times_f N(c)$ é localmente conformemente chan, é Bach-chan e polo tanto $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítico. Se, ademais, é $\mathcal{S}$-crítico, entón é crítico para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

Consideremos agora a ecuación (4.1) para determinar as condicións necesarias e suficientes sobre a función de deformación f para que o produto warped sexa $\mathcal{S}$-crítico. Sexa $\mathbb{R} \times_f N(c)$ un produto warped coa métrica $g = dr^2 + f^2 g_N$. Entón o tensor de Ricci e a curvatura escalar veñen dados por

$$\rho = -\tfrac{3f''}{f} dr^2 + \left(2c - 2(f')^2 - ff''\right) g_N, \qquad \tau = \tfrac{6}{f^2}\left(c - (f')^2 - ff''\right).$$

Un cálculo directo amosa que as compoñentes non nulas do hessiano da curvatura escalar veñen dadas por

$$\nabla^2\tau(\partial_r, \partial_r) = \partial^2_{rr}\tau, \qquad \nabla^2\tau(X, Y) = -\tfrac{f'}{f}\partial_r\tau g(X, Y),$$

para todos os campos de vectores X, Y tanxentes a N. Agora, un cálculo largo pero directo amosa que a ecuación (4.1) se verifica se e só se a función de deformación satisfai

$$2c^2 - 2cff'' + (f')^2(4c + 9ff'') - 3f^2(f'')^2 - 6(f')^4 + f^2 f' f^{(3)} - f^3 f^{(4)} = 0.$$

Na ecuación anterior pódese illar o termo de orde máxima mediante o cambio de variable $f(r) = e^{\sigma(r)}$, xa que f é necesariamente positiva, o que dá lugar á ecuación equivalente seguinte escrita en forma normal:

$$\begin{aligned}\sigma^{(4)}(r) = &\, 2c^2 e^{-4\sigma(r)} + 2ce^{-2\sigma(r)} \left(\sigma'(r)^2 - \sigma''(r)\right) \\ &- 3\left(2\sigma''(r)^2 + \sigma'(r)\sigma^{(3)}(r)\right),\end{aligned}$$

o que completa a proba do teorema. □

A partir da ecuación (4.9) temos que $\sigma^{(4)} = F\left(r, \sigma, \sigma', \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}\right)$ ou, equivalentemente, definimos a función vectorial $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ con $\sigma_1 = \sigma$ para obter o sistema de EDO de primeira orde

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sigma_1'(r) & = & \sigma_2(r) \\ \sigma_2'(r) & = & \sigma_3(r) \\ \sigma_3'(r) & = & \sigma_4(r) \\ \sigma_4'(r) & = & 2c^2 e^{-4\sigma_1(r)} + 2ce^{-2\sigma_1(r)} \left(\sigma_2(r)^2 - \sigma_3(r)\right) \\ & & -3\left(2\sigma_3(r)^2 + \sigma_2(r)\sigma_4(r)\right) \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Dado que $F(r, \sigma)$ é continua e as súas derivadas parciais existen e son continuas, F é localmente lipschitziana. O Teorema Fundamental de Existencia e Unicidade Local de solución de Ecuacións Diferenciais Ordinarias garante a existencia local de solución para o problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma' = F(t, \sigma) \\ \sigma(r_0) = \sigma_0, \end{array}\right.$$

o que dá lugar a métricas con forma de produto warped definidas localmente sobre unha variedade produto $I \times N$ que son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

4.3. Resultados globais

A partir do resultado anterior, estudaremos se a función de deformación pode ser definida en $\mathbb{R}$ ou se, pola contra, está definida unicamente nun intervalo limitado.

Como se dixo na sección anterior, a función de deformación $f(r) = e^{\sigma(r)}$ está determinada pola ecuación (4.9), de modo que agora o problema se reduce a garantir a existencia de solucións definidas globalmente. En principio non existe ningunha restrición inicial sobre a función $\sigma(r)$. Nun sentido xeométrico, ao fixar esta condición inicial estariamos facendo unha homotecia na métrica da fibra g_N.

No caso en que a fibra do produto warped sexa chá, as únicas métricas definidas globalmente que son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura son as Einstein, como amosa o seguinte resultado:

Teorema 4.13. *Consideramos un produto warped completo $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^3$. Entón a métrica é $\mathcal{S}$-crítica e, polo tanto, crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura, se e só se é a variedade é chá ou localmente isométrica ao espazo hiperbólico.*

Demostración. Se a curvatura seccional da fibra é $c = 0$, a ecuación (4.9) redúcese a

$$\sigma^{(4)}(r) = -3\left(2\sigma''(r)^2 + \sigma'(r)\sigma^{(3)}(r)\right).$$

Os polinomios de grao un, $\sigma(r) = ar + b$, son solucións triviais da ecuación definidas en todo $\mathbb{R}$ que dan lugar ao espazo de curvatura seccional constante $-a^2$. Veremos no que segue que esta solución é a única admisible se o espazo é completo. Consideramos a función $y(x) = \sigma'(r)$, onde o cambio da variable r por x é para nos adaptar á terminoloxía típica do estudo de ecuacións diferenciais. Estudamos solucións non constantes da ecuación

$$y^{(3)}(x) + 6y'(x)^2 + 3y(x)y''(x) = 0 \tag{4.11}$$

Calculamos

$$\tfrac{d^2}{dx^2}\left[y'(x) + \tfrac{3}{2}y(x)^2\right] = y^{(3)}(x) + 3y(x)y''(x) + 3y'(x)^2,$$

e usando (4.11) vemos que

$$\tfrac{d^2}{dx^2}\left[y'(x) + \tfrac{3}{2}y(x)^2\right] = -3y'(x)^2.$$

Polo tanto, a función $y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2$ é cóncava en todo o seu dominio. En consecuencia, esta función está limitada superiormente polo seu polinomio de Taylor de orde un, é dicir,

$$y'(x) + \tfrac{3}{2}y(x)^2 \leq y'(0) + \tfrac{3}{2}y(0)^2 + x(y''(0) + 3y(0)y'(0)) \tag{4.12}$$

para $x \geq 0$.

Consideremos agora os posibles crecementos da función anterior. Se $y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2$ fose constante nun intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$, entón

$$\tfrac{d^2}{dx^2}\left[y'(x) + \tfrac{3}{2}y(x)^2\right] = -3y'(x)^2 = 0,$$

co que $y'(x) = 0$ e a función $y(x)$ sería constante, o que xa vimos que proporcionaría unha función $\sigma(x)$ definida globalmente, mais daría lugar a un espazo de curvatura seccional constante non positiva. Así pois, no que segue asumiremos que $y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2$ non é constante en ningún intervalo.

Integrando en $[0, x]$ e facendo uso da integración por partes temos

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) - y''(0) + 6\textstyle\int_0^x y'(x)^2 + 3\int_0^x y(x)y''(x) \\ &= y''(x) - y''(0) + 6\textstyle\int_0^x y'(x)^2 + 3(y(x)y'(x) - y(0)y'(0) - \int_0^x y'(x)^2), \end{aligned}$$

e así

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}[y'(x) + \tfrac{3}{2}y(x)^2] &= y''(x) + 3y(x)y'(x) \\ &= y''(0) + 3y(0)y'(0) - 3\textstyle\int_0^x y'(x)^2. \end{aligned}$$

Se $y''(0) + 3y(0)y'(0) \leq 0$, entón desta expresión séguese que $\frac{d}{dx}[y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2] \leq 0$ para $x \geq 0$ e, polo tanto, a función $y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2$ é decrecente na parte positiva. Como ademais a función é cóncava, da expresión (4.12) deducimos que existen $x_0 \geq 0$ e $k > 0$ tales que

$$y'(x_0) + \tfrac{3}{2}y(x_0)^2 = -\tfrac{3}{2}k.$$

Ademais

$$y'(x) + \tfrac{3}{2}y(x)^2 \leq -\tfrac{3}{2}k, \quad \forall x \geq x_0.$$

Así, $y'(x) \leq -\frac{3}{2}[k + y(x)^2]$ para todo $x \geq x_0$ e, despexando e integrando, obtemos

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{k + y(t)^2} dt \leq -\tfrac{3}{2}(x - x_0).$$

Por outro lado, a integral anterior resulta

$$\int_{x_0}^{x} \tfrac{y'(t)}{k+y(t)^2} dt = \tfrac{1}{\sqrt{k}} \left(\arctan\left(\tfrac{y(x)}{\sqrt{k}}\right) - \arctan\left(\tfrac{y(x_0)}{\sqrt{k}}\right)\right) > \tfrac{1}{\sqrt{k}}\left(-\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\tfrac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Xuntando as dúas últimas expresións, temos que

$$-\tfrac{\pi}{\sqrt{k}} < \int_{x_0}^{x} \tfrac{y'(t)}{k+y(t)^2} dt \leq -\tfrac{3}{2}(x - x_0),$$

co que $\frac{\pi}{\sqrt{k}} > \frac{3}{2}(x - x_0)$ e así $x - x_0 < \frac{2\pi}{3\sqrt{k}}$, o que amosa que o intervalo de definición da solución está limitado superiormente.

Se $y''(0) + 3y(0)y'(0) \geq 0$, entón procedendo dun xeito análogo e se a solución non é afín, chegamos a que $y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2$ é crecente para $x \leq 0$. Ademais é estritamente crecente. A función $y'(x) + \frac{3}{2}y(x)^2$ é cóncava, polo que se estivese definida en $(-\infty, 0)$, debería existir un $x_0 \leq 0$ tal que $y'(x_0) + \frac{3}{2}y(x_0)^2 = -\frac{3}{2}k$, con $k > 0$. Así $y'(x) \leq -\frac{3}{2}(k + y(x)^2)$ se $x \leq x_0$. Integrando coma no caso anterior tense

$$-\tfrac{\pi}{\sqrt{k}} < \tfrac{1}{\sqrt{k}} \arctan\left(\tfrac{y(x_0)}{\sqrt{k}}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{k}} \arctan\left(\tfrac{y(x)}{\sqrt{k}}\right) = \int_{x}^{x_0} \tfrac{y'(t)}{k+y(t)^2} dt \leq -\tfrac{3}{2}(x_0 - x).$$

Polo tanto $x_0 - x < \frac{2\pi}{3\sqrt{k}}$ co que $x_0 - \frac{2\pi}{3\sqrt{k}} < x$, o que amosa que o dominio de definición está limitado inferiormente. □

No caso en que a fibra do produto warped non sexa chá, os experimentos numéricos realizados invitan a pensar que existen exemplos completos non Einstein, mais a día de hoxe segue a ser un problema aberto.

Parte II

Métricas críticas en sinatura lorentziana

Capítulo 5
Métricas críticas homoxéneas lorentzianas de dimensión tres

De xeito análogo ás variedades riemannianas, unha variedade lorentziana (M, g) dise homoxénea se o seu grupo de isometrías actúa transitivamente en M, e localmente homoxénea se para cada par de puntos da variedade $p, q \in M$ existe unha isometría local dunha veciñanza de p nunha veciñanza de q de tal forma que transforma p en q.

En sinatura lorentziana, o estudo das variedades homoxéneas de dimensión tres divídese dun xeito similar ao amosado no Teorema 2.1, como se pode observar no seguinte resultado.

Teorema 5.1. [40] *Sexa (M, g) unha variedade lorentziana homoxénea completa, conexa e simplemente conexa de dimensión tres. Entón, ou ben (M, g) é simétrica ou é isométrica a un grupo de Lie de dimensión tres dotado dunha métrica lorentziana invariante á esquerda.*

Recentemente foi posto de manifesto que unha clasificación global sen a hipótese de completitude no Teorema 5.1 inclúe unha onda plana non localmente simétrica e que non é globalmente isométrica a un grupo de Lie con métrica invariante á esquerda:

Teorema 5.2. [2] *Unha variedade lorentziana homoxénea simplemente conexa en dimensión tres é globalmente isométrica a un espazo globalmente simétrico, un grupo de Lie con métrica invariante á esquerda, ou unha onda plana $\mathcal{P}_c$ globalmente definida.*

As ondas planas $\mathcal{P}_c$ son esencialmente incompletas, no sentido de que non se poden embeber nunha variedade lorentziana completa, como se amosou en [73]. Ditas ondas planas, que son unha das familias *pp*-waves localmente homoxéneas (ver sección 5.2), realízanse localmente como métricas invariantes á esquerda no grupo de Poincaré $E(1, 1)$ (véxase a Observación 5.16).

A proba do Teorema 5.1 baséase no uso da homoxeneidade na curvatura, polo que dito resultado é certo a nivel local como se indicou no Teorema 1.3. Polo tanto, unha variedade lorentziana localmente homoxénea de dimensión tres é localmente simétrica ou localmente isométrica a un grupo de Lie cunha métrica lorentziana invariante á esquerda. Dado que o noso traballo se desenvolve a nivel local, ao longo deste capítulo traballaremos sobre variedades localmente homoxéneas e faremos uso de dito resultado de estrutura.

A curvatura escalar dunha variedade localmente homoxénea é constante, polo que, como se viu anteriormente, as ecuacións de Euler-Lagrange (1.7) e (1.8) veñen dadas polas expresións (2.1) e (2.2), é dicir, polas seguintes ecuacións:

$$\tau\left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g\right) = 0 \tag{5.1}$$

$$\Delta\rho + 2\left(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\, g\right) + 2t\tau\left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau\, g\right) = 0. \tag{5.2}$$

Obsérvese que a ecuación resultante para o funcional $\mathcal{S}$ vén dada pola ecuación de Einstein, (1.6), multiplicada pola curvatura escalar. Porén, a diferenza do caso riemanniano, existe gran cantidade de exemplos de variedades lorentzianas non Einstein con curvatura escalar cero grazas a que nesta sinatura o operador de Ricci pode ser nilpotente.

Definimos o tensor de tipo (0,2) simétrico dado pola expresión $\mathfrak{F}^t = \Delta\rho + 2\left(R[\rho] - \frac{1}{3}\|\rho\|^2\, g\right) + 2t\tau\left(\rho - \frac{1}{3}\tau\, g\right)$, de xeito que unha métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se anula o tensor $\mathfrak{F}^t$ para dito valor de t.

Neste capítulo abordaremos o estudo das métricas localmente homoxéneas lorentzianas de dimensión tres que son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura, dun xeito similar ao seguido no capítulo anterior. Facendo uso do Teorema 5.1, dividirase o estudo destas métricas en espazos simétricos (Sección 5.1) e grupos de Lie (Sección 5.3). Ademais, dado que as pp-waves aparecen de xeito natural no estudo tanto das variedades simétricas como dos grupos de Lie, na Sección 5.2 analízase o caso xeral para este tipo de espazos. Na sección correspondente aos grupos de Lie dividirase o estudo á súa vez en grupos de Lie unimodulares e non unimodulares. Finalmente, exporanse diversos casos particulares de especial interese a partir dos resultados recollidos nas seccións anteriores: as métricas críticas para o funcional dado pola norma L^2 do tensor de curvatura, as métricas localmente conformemente chás, os espazos semi-simétricos e os solitóns de Ricci alxébricos.

5.1. Espazos simétricos

Cando consideramos as variedades lorentzianas simétricas, unha diferenza salientable fronte ao caso riemanniano é a existencia de variedades indescompoñibles mais non irreducibles. Estas caracterízanse por posuír (polo menos) unha distribución paralela non trivial (con dimensión distinta de cero e a total), mais a restrición da métrica a toda distribución deste tipo é dexenerada. Temos, pois, que existen variedades localmente simétricas indescompoñibles mais non irreducibles, pero todas elas son localmente isométricas a espazos simétricos de Cahen-Wallach e, polo tanto, son un caso particular de onda plana (véxase [35]). Noutro caso, as variedades localmente simétricas de dimensión tres teñen curvatura seccional constante ou son localmente isométricas a un produto da forma $\mathbb{R} \times N(c)$, sendo $N(c)$ unha superficie riemanniana ou lorentziana de curvatura de Gauss constante c.

Se a variedade ten curvatura seccional constante entón é Einstein e, polo tanto, é crítica para todos os funcionais cuadráticos. Se a variedade é localmente un produto, utilizando un razoamento análogo ao argumentado no Lema 2.2, obtemos que é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{2}$. Se a variedade (M, g) é un espazo de Cahen-Wallach, existe un sistema de coordenadas (u, x, y) tal que a métrica pode ser descrita como

$$g = 2dudy + dx^2 + \kappa x^2 dy^2 \text{ con } \kappa \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Con estas coordenadas, o único obxecto non nulo da curvatura implicado na ecuación (5.2) é o tensor de Ricci, de xeito que todas as súas compoñentes son cero agás $\rho(\partial_y, \partial_y) = -\kappa$. Polo tanto, todo espazo de Cahen-Wallach satisfai as ecuacións (5.1) e (5.2), así que estes espazos son críticos para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. Obtemos o seguinte resultado.

Lema 5.3. *Toda variedade lorentziana localmente simétrica de dimensión tres é $\mathcal{F}_t$-crítica con $t = -\frac{1}{2}$. Ademais, os espazos de Cahen-Wallach son críticos para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.*

Observación 5.4. As coordenadas descritas en (5.3) son un caso particular das coordenadas de Brinkmann, utilizadas para describir ondas de Brinkmann, que son as variedades de Walker que podemos atopar en sinatura lorentziana. Estas variedades serán estudadas en profundidade no Capítulo 7.

5.2. pp-waves localmente homoxéneas

Na análise das métricas críticas localmente homoxéneas atoparémonos con que algunhas familias admiten distribucións nulas paralelas de dimensión un. Máis especificamente, algúns destes exemplos son pp-waves. Unha pp-wave localmente homoxénea de dimensión tres admite coordenadas locais adaptadas (u, x, y) onde a métrica vén dada por $g(\partial_y, \partial_y) = -2f(x, y)$ e $g(\partial_y, \partial_u) = g(\partial_x, \partial_x) = 1$. A función f determina o tipo de espazo, o cal é localmente isométrico a un dos seguintes modelos:

- $\mathcal{N}_b$: pp-wave con $f(x, y) = b^{-2}e^{bx}$, para calquera constante $b \neq 0$,
- $\mathcal{P}_c$: pp-wave con $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2\alpha(y)$, onde a función α é unha solución positiva da ecuación $\alpha' = c\alpha^{3/2}$, e c é unha constante non nula,
- $\mathcal{CW}_\varepsilon$: pp-wave con $f(x, y) = \varepsilon x^2$, onde $\varepsilon = \pm 1$.

As xeometrías $\mathcal{P}_c$ e $\mathcal{CW}_\varepsilon$ son ondas planas e, xunto coa xeometrías $\mathcal{N}_b$, abranguen todas as posibles clases de pp-waves localmente homoxéneas [73].

Teorema 5.5. *Sexa (M, g) unha pp-wave localmente homoxénea de dimensión tres. Tense:*

(1) *Se (M, g) é unha onda plana modelada en $\mathcal{CW}_\varepsilon$ ou $\mathcal{P}_c$, entón é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.*

(2) *Se (M, g) é unha pp-wave modelada en $\mathcal{N}_b$, entón é $\mathcal{S}$-crítica pero non é $\mathcal{F}_t$-crítica para ningún valor de t.*

Demostración. Para as ondas planas, un cálculo directo amosa que $\Delta\rho$, $R[\rho]$, $\|\rho\|$ e τ se anulan, polo que o tensor $\mathfrak{F}^t$ é cero independentemente do valor de t. Así, estas métricas son críticas para todos os funcionais cuadráticos.

Para as variedades modeladas na xeometría $\mathcal{N}_b$, $R[\rho]$, $\|\rho\|$ e τ anúlanse, pero $\Delta\rho(\partial_y, \partial_y) = b^2e^{bx} \neq 0$, xa que $b \neq 0$. Polo tanto, satisfaise a ecuación (5.1) e a variedade é $\mathcal{S}$-crítica, pero o tensor $\mathfrak{F}^t$ non se anula para ningún valor de t. □

5.3. Métricas de Lorentz invariantes á esquerda

Do mesmo xeito que no caso riemanniano, traballarase a nivel das álxebras de Lie. Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie de dimensión tres dotada dun produto escalar non dexenerado $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, e sexa $\times : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ o produto vectorial determinado por $\langle x \times y, z\rangle = \det(x, y, z)$ para calquera vectores x, y, z. Deste xeito, dada unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, o operador de estrutura L de $\mathfrak{g}$ é o endomorfismo da álxebra de Lie determinado por $L(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]$, para todo $i,\ j \in \{1, 2, 3\}$. O operador de estrutura permite caracterizar os grupos de Lie unimodulares e non unimodulares (véxase [110, 119]).

Os grupos de Lie unimodulares teñen operador de estrutura autoadxunto, polo que, dependendo da forma de Jordan do operador L, as álxebras de Lie unimodulares lorentzianas $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ son equivalentes a unha das seguintes (véxase [119]):

(Ia) O operador de estrutura é diagonalizable. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[e_1, e_2] = -\lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal satisfacendo $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$.

(Ib) O operador de estrutura ten dous autovalores complexos conxugados. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda e_1,$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ unha base ortonormal satisfacendo $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$, e $\beta \neq 0$.

(II) O operador de estrutura ten unha raíz dobre do seu polinomio mínimo. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[u_1, u_2] = \lambda_2 u_3, \quad [u_1, u_3] = -\lambda_1 u_1 - \varepsilon u_2, \quad [u_2, u_3] = \lambda_1 u_1,$$

sendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ unha base pseudo-ortonormal con $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = 1$.

(III) O operador de estrutura ten unha raíz tripla do seu polinomio mínimo. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[u_1, u_2] = u_1 + \lambda u_3, \quad [u_1, u_3] = -\lambda u_1, \quad [u_2, u_3] = \lambda u_2 + u_3,$$

sendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ unha base pseudo-ortonormal con $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = 1$.

Se o operador de estrutura non é autoadxunto, o grupo de Lie é non unimodular e a súa álxebra de Lie é un produto semidirecto $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \rtimes \mathbb{R}$, onde $\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} : \operatorname{tr}\operatorname{ad}(x) = 0\}$ denota o núcleo unimodular, que é un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$ que contén ao ideal conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (véxase [110]). Estes produtos semidirectos están determinados polo endomorfismo $-\operatorname{ad}(e_3)$, o cal non depende da escolla de $e_3 \notin \mathfrak{u}$. Polo tanto, dada unha base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathfrak{u}$, o endomorfismo $-\operatorname{ad}(e_3)$ vén dado por $-\operatorname{ad}(e_3)(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$ e $-\operatorname{ad}(e_3)(e_2) = \gamma e_1 + \delta e_2$. Denotaremos por A a matriz asociada a $-\operatorname{ad}(e_3)$.

No estudo das álxebras de Lie non unimodulares lorentzianas atopamos tres situacións diferentes en función do comportamento da restrición do produto escalar de $\mathfrak{g}$ ao núcleo unimodular, podendo ser $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$ riemanniano, lorentziano ou dexenerado. Así, unha álxebra de Lie non unimodular lorentziana $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ encádrase nunha das seguintes descricións:

(IV.1) A restrición do produto escalar ao núcleo unimodular é lorentziana. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

de xeito que $\alpha + \delta \neq 0$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é unha base ortonormal satisfacendo $-\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1$.

(IV.2) A restrición do produto escalar ao núcleo unimodular é riemanniana. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

de xeito que $\alpha + \delta \neq 0$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é unha base ortonormal satisfacendo $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$.

(IV.3) A restrición do produto escalar ao núcleo unimodular é dexenerada. Entón a álxebra de Lie vén dada polos corchetes

$$[u_1, u_2] = 0, \quad [u_1, u_3] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2, u_3] = \gamma u_1 + \delta u_2,$$

de xeito que $\alpha+\delta \neq 0$ e $\{u_1, u_2, u_3\}$ é unha base pseudo-ortonormal satisfacendo $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 1$.

Nas tres posibilidades tense que $\alpha+\delta \neq 0$ xa que a traza do endomorfismo é $\operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_3) = \alpha+\delta$ e, de anularse, teríase que e_3 pertence ao núcleo unimodular pola definición de $\mathfrak{u}$. Realizando un reescalamento na base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ podemos asumir que $\operatorname{tr}\operatorname{ad}(e_3) = 2$ e traballar así cun representante da clase homotética da métrica inicial dos casos IV.1 e IV.2. Para o caso IV.3, podemos tomar $\hat{u}_1 = u_1$, $\hat{u}_2 = \frac{\alpha+\delta}{2} u_2$, $\hat{u}_3 = \frac{2}{\alpha+\delta} u_3$, obtendo así unha nova base pseudo-ortonormal satisfacendo $\operatorname{tr}\operatorname{ad}(\hat{u}_3) = 2$, polo que traballaremos na clase isométrica da métrica inicial.

No caso riemanniano (véxase [110]) é posible rotar a base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de xeito que $\operatorname{ad}(e_3)(e_1)$ é ortonormal a $\operatorname{ad}(e_3)(e_2)$. Un cálculo directo amosa que esta normalización segue sendo válida naqueles grupos de Lie con núcleo unimodular riemanniano, é dicir, no caso IV.2. Polo tanto, pódese asumir que as constantes de estrutura satisfán $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ e $\alpha + \delta = 2$ neste caso. Isto é posible polo feito de que a parte autoadxunta do endomorfismo é diagonalizable; porén, isto non pode asumirse nos outros dous casos. Os cálculos explícitos incluídos nas observacións 5.20 e 5.27 amosan que as normalizacións análogas consideradas en [59] para os casos IV.1 e IV.3 impoñen restricións nas familias de métricas correspondentes.

Baseándonos na clasificación anterior, estudaremos de xeito independente nas seguintes seccións cada un dos sete tipos descritos.

Como curiosidade destacable, o número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que vén dado pola única solución positiva da ecuación $x^2 = x + 1$, aparece de xeito natural á hora de describir os grupos de Lie unimodulares $\mathcal{F}_t$-críticos. Observarase nas seguintes seccións que este número desempeña un papel distinguido tanto na expresión das métricas críticas dos tipos Ia (véxase o Teorema 5.6) e II (véxase o Teorema 5.12) coma no rango do parámetro t (véxase a Figura 5.3.4).

5.3.1. Métricas críticas con operador de estrutura diagonalizable

G é un grupo de Lie unimodular con operador de estrutura diagonalizable (tipo Ia). Consideramos unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfacendo $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$ tal que os corchetes de Lie da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ veñen dados por

$$[e_1, e_2] = -\lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \tag{5.4}$$

con $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$. O operador de Ricci vén dado por $\operatorname{Ric} = \frac{1}{2}\operatorname{diag}[(\lambda_2-\lambda_3)^2-\lambda_1^2, (\lambda_1-\lambda_3)^2-\lambda_2^2, (\lambda_1-\lambda_2)^2-\lambda_3^2]$, polo que unha métrica de tipo Ia é Einstein se e só se todas as constantes de estrutura son iguais ou $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_k = 0$ para $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Os elementos da curvatura veñen dados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\rho(e_i, e_i) =& \tfrac{1}{2}\left(\lambda_i^2 - (\lambda_j-\lambda_k)^2\right) g(e_i,e_i), \quad \{i,j,k\} = \{1,2,3\},\\
R[\rho](e_i,e_i) =& \tfrac{1}{4}\left(\lambda_i^3 - 3(\lambda_j-\lambda_k)^2\lambda_i + 2(\lambda_j-\lambda_k)^2(\lambda_j+\lambda_k)\right)\\
&\times(\lambda_j+\lambda_k-\lambda_i) g(e_i,e_i),\\
\tau =& -\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,\\
\|\rho\|^2 =& \tfrac{3}{4}(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4) - (\lambda_1^3(\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2^3(\lambda_1+\lambda_3) + \lambda_3^3(\lambda_1+\lambda_2))\\
&+\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2) + (\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2).
\end{aligned}$$

A partir destas compoñentes, obtemos que as compoñentes a priori non nulas de $\mathfrak{F}^t$ son as seguintes:

$$\begin{aligned}
3\,\mathfrak{F}^t_{11} =& 2(t+3)\lambda_1^4 - 5(t+1)(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1^3\\
&+((3t+1)(\lambda_2^2+\lambda_3^2) + 2(t+1)\lambda_2\lambda_3)\lambda_1^2\\
&+(t+1)(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1\\
&-((t+3)(\lambda_2^2+\lambda_3^2) - 2(t-1)\lambda_2\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)^2,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
3\,\mathfrak{F}^t_{22} =& 2(t+3)\lambda_2^4 - 5(t+1)\lambda_2^3(\lambda_1+\lambda_3)\\
&+\lambda_2^2((3t+1)(\lambda_1^2+\lambda_3^2) + 2(t+1)\lambda_1\lambda_3)\\
&+(t+1)\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1+\lambda_3)\\
&-((t+3)(\lambda_1^2+\lambda_3^2) - 2(t-1)\lambda_1\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)^2,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}3\,\mathfrak{F}^t_{33} = & -2(t+3)\lambda_3^4 + 5(t+1)\lambda_3^3(\lambda_2+\lambda_1)\\ & -\lambda_3^2((3t+1)(\lambda_2^2+\lambda_1^2)+2(t+1)\lambda_2\lambda_1)\\ & -(t+1)\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)^2(\lambda_2+\lambda_1)\\ & +((t+3)(\lambda_2^2+\lambda_1^2)-2(t-1)\lambda_2\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)^2.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Pódese observar que este caso é similar ao descrito para os grupos de Lie unimodulares riemannianos; porén, dado que o vector e_3 é temporal ($g(e_3,e_3)=-1$), non é posible intercambialo cos demais vectores da base como fixemos no capítulo anterior.

Dada a descrición do tensor $\mathfrak{F}^t$, podemos dar o seguinte resultado.

Teorema 5.6. *Sexa G un grupo de Lie de tipo Ia cunha métrica invariante á esquerda non Einstein g. Entón, g é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é homotética a unha métrica dada por* (5.4) *con constantes de estrutura descritas como segue:*

(1) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,\lambda,\lambda)$ *ou* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda,\lambda,1)$ *con* $\lambda\neq\frac{1}{4}$, 1. *Neste caso, a métrica é crítica para* $t=-\frac{2\lambda-3}{4\lambda-1}$ *e* $\tau=\frac{1}{2}-2\lambda$.

(2) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,\alpha,\beta)$ *ou* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\alpha,\beta,1)$*, con* $\alpha\neq\beta$ *dados por*

$$\alpha=\tfrac{\kappa}{2}\pm\tfrac{\sqrt{\kappa(\kappa^2+\kappa-1)}}{2\kappa},\ e\ \beta=\tfrac{\kappa}{2}\mp\tfrac{\sqrt{\kappa(\kappa^2+\kappa-1)}}{2\kappa},$$

onde $\kappa\in(-\varphi,0)\cup(\varphi^{-1},\infty)$, $\kappa\notin\{1,\varphi^3,-\varphi^{-3}\}$. *A métrica correspondente é crítica para* $t=\frac{\kappa^3+\kappa^2+3\kappa-1}{(\kappa-1)^2}$ *e* $\tau=-\frac{(\kappa-1)^2}{2\kappa}$.

Demostración. Dado o tensor $\mathfrak{F}^t$ descrito en (5.5), (5.6) e (5.7), unha métrica invariante á esquerda nun grupo de Lie de tipo Ia é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún valor de t se satisfai $\mathfrak{F}^t_{ii}=0$ para todo i. Dado que a ecuación (5.2) é invariante por homotecias, podemos normalizar as constantes de estrutura $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ e dividir a proba nos seguintes casos que abranguen todas as posibilidades non Einstein:

(1) Dúas constantes de estrutura son iguais e a terceira é distinta de cero:

 (a) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,0,0)$ ou $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,1)$,

 (b) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,\lambda,\lambda)$ ou $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda,\lambda,1)$, con $\lambda\neq 0,1$.

(2) As tres constantes son diferentes:

 (a) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,\alpha,\beta)$ ou $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\alpha,\beta,0)$, con $0\neq\alpha\neq\beta\neq 0$.

 (b) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,\alpha,\beta)$ ou $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\alpha,\beta,1)$, con $0,1\neq\alpha\neq\beta\neq 0,1$.

Caso (1.a). Considerando $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,0,0)$ e $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,1)$, obtemos, respectivamente,

$$\mathfrak{F}^t_{11}=-2\mathfrak{F}^t_{22}=2\mathfrak{F}^t_{33}=\tfrac{2}{3}(t+3)\ \text{e}\ 2\mathfrak{F}^t_{11}=2\mathfrak{F}^t_{22}=\mathfrak{F}^t_{33}=\tfrac{2}{3}(t+3).$$

Polo tanto, estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t=-3$.

Caso (1.b). Se $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,\lambda,\lambda)$ ou $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda,\lambda,1)$, con $\lambda\neq 0,1$, as expresións das compoñentes do tensor $\mathfrak{F}^t$ redúcense, respectivamente, a

$$\mathfrak{F}^t_{11}=-2\mathfrak{F}^t_{22}=2\mathfrak{F}^t_{33}=\tfrac{2}{3}(\lambda-1)(2\lambda-3+(4\lambda-1)t),\ \text{e}$$
$$2\mathfrak{F}^t_{11}=2\mathfrak{F}^t_{22}=\mathfrak{F}^t_{33}=-\tfrac{2}{3}(\lambda-1)(2\lambda-3+(4\lambda-1)t).$$

Polo tanto, dado que $\lambda\neq 1$, o tensor anúlase se e só se $t=-\frac{2\lambda-3}{4\lambda-1}$ e $\lambda\neq\frac14$.

Nótese que o Caso (1.a) se corresponde co Caso (1.b) con $\lambda=0$.

Caso (2). Dado que todas as constantes de estrutura son diferentes, podemos tomar a seguinte combinación dos polinomios $\mathfrak{F}^t_{ii}$:

$$\tfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\mathfrak{F}^t_{11}+\tfrac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\mathfrak{F}^t_{22}-\tfrac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\mathfrak{F}^t_{33}=4(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+4t\tau.$$

Se $\tau=0$, o tensor $\mathfrak{F}^t$ vén dado por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t_{22}&=\tfrac{4}{3}\lambda_2((3\lambda_2-2\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2+2\lambda_3)-3\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+4\lambda_3)),\\
\mathfrak{F}^t_{33}&=-\tfrac{4}{3}\lambda_3((3\lambda_3-2\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3+2\lambda_2)-3\lambda_1(\lambda_3+\lambda_2)(\lambda_3+4\lambda_2)),\\
\mathfrak{F}^t_{11}&=\mathfrak{F}^t_{33}-\mathfrak{F}^t_{22}.
\end{aligned}$$

Estes polinomios e a curvatura escalar só se anulan simultaneamente se dúas das constantes de estrutura son iguais e a terceira é cero (en cuxo caso a métrica é Einstein). Polo tanto, temos que $\tau\neq 0$ e o valor de t vén dado por $t=-\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}{\tau}$. Deste xeito, as expresións de $\mathfrak{F}^t$ redúcense a

$$\begin{aligned}
3\mathfrak{F}^t_{11}&=(2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\,\mathbf{p},\\
3\mathfrak{F}^t_{22}&=(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)\,\mathbf{p},\\
3\mathfrak{F}^t_{33}&=3\,(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathbf{p},
\end{aligned}$$

sendo $\mathbf{p}=\lambda_3^3-\lambda_1\,(\lambda_2+\lambda_3)^{\,2}-\lambda_1^2\,(\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_3)^{\,2}\,(\lambda_2+\lambda_3)$. Os primeiros factores destas expresións non se anulan ao asumir que as constantes de estrutura son distintas, polo que a única posibilidade para que se anule o tensor $\mathfrak{F}^t$ é que $\mathbf{p}=0$. Así, temos que

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3-\lambda_2\lambda_1^2-\lambda_3\lambda_1^2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_3^2\lambda_1-\lambda_2\lambda_3^2-\lambda_2^2\lambda_3-2\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0. \tag{5.8}$$

Tanto a ecuación (5.8) coma a expresión de t son simétricas respecto das constantes de estrutura, polo que no que resta de proba se traballará módulo permutación.

Caso (2.a). Supoñamos que $\lambda_1=0$. A ecuación (5.8) redúcese a $(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_2+\lambda_3)=0$, logo $\lambda_2=-\lambda_3$. Así, obtemos dúas clases homotéticas: $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,1,-1)$ e $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(1,-1,0)$. Ambos os dous casos se corresponden con métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas para $t=-1$ e o operador de Ricci satisfai $\mathrm{Ric}=\mathrm{diag}[2,0,0]$ e $\mathrm{Ric}=\mathrm{diag}[0,0,2]$, respectivamente.

Caso (2.b). Consideremos agora que $\lambda_1\neq 0$. Mediante un razoamento análogo ao seguido na proba do Teorema 2.4, reescalamos a métrica de xeito que $\lambda_1=1$. Realizando un cambio nas constantes de estrutura, podemos fixar $\lambda_2 = \frac{-1+\mu_2+\mu_3}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1+\mu_2-\mu_3}{2}$. Así, a ecuación (5.8) dada en función de μ_2 e μ_3 redúcese a

$$\mu_2\mu_3^2 - 2\mu_2\mu_3 + 1 - \mu_2^2 = 0.$$

Resolvendo para μ_3, obtemos

$$\mu_3 = 1 \pm \frac{\sqrt{\mu_2(\mu_2^2 + \mu_2 - 1)}}{\mu_2}.$$

Nótese que μ_3 está ben definida para $\mu_2 \in (-\varphi, 0) \cup (\varphi^{-1}, \infty)$. Polo tanto, se fixamos $\mu_2 = \kappa$ e asumimos que as constantes de estrutura son distintas entre si, a métrica invariante á esquerda correspondente é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é homotética a unha métrica determinada polas constantes de estrutura $\lambda_1 = 1$,

$$\lambda_2 = \frac{\kappa}{2} \pm \frac{\sqrt{\kappa(\kappa^2 + \kappa - 1)}}{2\kappa} \text{ e } \lambda_3 = \frac{\kappa}{2} \mp \frac{\sqrt{\kappa(\kappa^2 + \kappa - 1)}}{2\kappa}. \tag{5.9}$$

As constantes de estrutura son distintas agás para $\kappa = 1$, $\kappa = \varphi^3$ e $\kappa = -\varphi^{-3}$. Ademais, se $\kappa = -1$, temos que $\lambda_3 = 0$, polo que formalmente os casos (2.a) e (2.b) poden tratarse conxuntamente asumindo que λ pode ser cero.

Se normalizamos $\lambda_3 = 1$, obtemos outra familia homotética de xeito que as expresións descritas en (5.9) determinan λ_1 e λ_2 e, da mesma forma que na normalización anterior, formalmente obtemos o Caso (2.a) con $\lambda_1 = 0$. Isto conclúe o Caso (2). □

Observación 5.7. A familia dada no Teorema 5.6-(1) proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Por outra banda, a familia descrita no Caso (2) proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para $t \in (-1-\varphi^{-5})$ se $\kappa \in (-\varphi, 0)\setminus\{-\varphi^{-3}\}$ e para $t \in (-1+\varphi^5, \infty)$ se $\kappa \in (\varphi^{-1}, \infty)\setminus\{1, \varphi^3\}$. Estes valores ilústranse na Figura 5.3.4.

Observación 5.8. As álxebras de Lie obtidas no Teorema 5.6-(1) son $\mathfrak{h}_3$ se $\lambda = 0$ (Caso (1.a) da demostración), $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$ ou $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, \lambda, 1)$ con $\lambda > 0$, e $\mathfrak{su}(2)$ se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, \lambda, 1)$ con $\lambda < 0$.

As álxebras de Lie obtidas no Teorema 5.6-(2) cunha constante de estrutura nula (Caso (2.a) da demostración) son $\mathfrak{e}(1, 1)$ se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, -\lambda, 0)$ e $\mathfrak{e}(2)$ se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \lambda, -\lambda)$. A diferenza do caso riemanniano, o grupo euclídeo admite métricas lorentzianas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas non Einstein.

As álxebras de Lie obtidas no Teorema 5.6-(2) sen constantes de estrutura nulas (Caso (2.b) da demostración) son as seguintes:

- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \alpha, \beta)$ con $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$, o cal ocorre se $\kappa \in (-\varphi, 0) \setminus \{-1\}$, ou $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\alpha, \beta, 1)$ con $\alpha, \beta > 0$, o cal ocorre se $\kappa > \varphi^{-1}$, ou con $\alpha\beta < 0$, o cal ocorre se $\kappa \in (-1, 0)$.

- $\mathfrak{su}(2)$ se $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \alpha, \beta)$ con $\alpha > 0 > \beta$, o cal ocorre se $\kappa \in (-1, 0)$, ou $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\alpha, \beta, 1)$ con $\alpha, \beta < 0$, o cal ocorre se $\kappa \in (-\varphi, -1)$.

5.3.2. Métricas críticas cuxo operador de estrutura ten dous autovalores complexos conxugados

G é un grupo de Lie unimodular con operador de estrutura que ten dous autovalores non reais (tipo Ib). Consideramos unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfacendo $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$ tal que os corchetes de Lie da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ veñen dados por

$$[e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda e_1, \tag{5.10}$$

con $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Obsérvese que substituír e_1 por $-e_1$ na base proporciona unha isometría intercambiando (α, β, λ) por $(-\alpha, -\beta, -\lambda)$. Do mesmo xeito, substituíndo e_2 por $-e_2$ ou e_3 por $-e_3$ intercámbianse (α, λ) por $(-\alpha, -\lambda)$. Polo tanto, podemos asumir que $\beta > 0$.

As métricas determinadas por (5.10) non son Einstein e teñen curvatura escalar $\tau = \frac{1}{2}(\lambda(\lambda - 4\alpha) - 4\beta^2)$. Polo tanto, son $\mathcal{S}$-críticas se e só se $\lambda = 2\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$. Os demais obxectos asociados á curvatura que desempeñan un papel na expresión (5.2) están determinados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\rho(e_1, e_1) =& - 2\beta^2 - \tfrac{1}{2}\lambda^2, \\
\rho(e_2, e_2) =& - \rho(e_3, e_3) = \lambda(\tfrac{1}{2}\lambda - \alpha), \\
\rho(e_2, e_3) =& \beta(\lambda - 2\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R[\rho](e_1, e_1) =& - \tfrac{1}{4}(2\alpha - \lambda)(16\alpha\beta^2 - \lambda(12\beta^2 + \lambda^2)), \\
R[\rho](e_2, e_2) =& \tfrac{1}{4}(8\beta^4 + 2\beta^2\lambda(3\lambda - 2\alpha) + \lambda^2(4\alpha^2 - 5\alpha\lambda + 2\lambda^2)) \\
=& - R[\rho](e_3, e_3), \\
R[\rho](e_2, e_3) =& \tfrac{1}{4}\beta(2\alpha - \lambda)(12\beta^2 + \lambda(5\lambda - 4\alpha)), \\
\|\rho\|^2 =& 4\beta^4 + \tfrac{3}{4}\lambda^4 + 2\alpha(\alpha - \lambda)(\lambda^2 - 4\beta^2).
\end{aligned}$$

Dadas as expresións dos elementos da curvatura, as compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$ son as seguintes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t_{11} = -2\mathfrak{F}^t_{22} = 2\mathfrak{F}^t_{33} = -\tfrac{2}{3}\big(&2t\beta^2\lambda^2 - (3+t)\lambda^4 - 2\alpha^2(8\beta^2 + (1+2t)\lambda^2) \\
&+ (1+t)(8\beta^4 + \alpha\lambda(4\beta^2 + 5\lambda^2))\big), \\
\mathfrak{F}^t_{23} = \beta\big(&8\alpha^3 - 8(1+t)\lambda\alpha^2 - 2(4(2+t)\beta^2 - (1+3t)\lambda^2)\alpha \\
&+ (1+t)\lambda(4\beta^2 - \lambda^2)\big).
\end{aligned}$$

Dadas as expresións que determinan o tensor $\mathfrak{F}^t$, estamos en condicións de dar o seguinte resultado.

Teorema 5.9. *Sexa G un grupo de Lie de tipo Ib cunha métrica invariante á esquerda g. Entón, g é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é isométrica a unha métrica dada por* (5.10) *con constantes de estrutura satisfacendo unha das seguintes condicións:*

(1) $8\alpha\beta^2 = \lambda(\lambda - 2\varphi\alpha)(\lambda + 2\varphi^{-1}\alpha)$, $\alpha \neq 0$. *Neste caso, G é isomorfo a $SL(2,\mathbb{R})$ e g é $\mathcal{F}_t$-crítica para* $t = \frac{8\alpha^3 + 4\alpha^2\lambda + 6\alpha\lambda^2 - \lambda^3}{\lambda(\lambda - 2\alpha)^2}$.

(2) $\alpha = \lambda = 0$. *Neste caso, G é isomorfo a $E(1,1)$ e a métrica g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -1$.*

Demostración. Consideremos en primeiro lugar o caso no que a curvatura escalar é cero. Se $\tau = \frac{1}{2}(\lambda(\lambda - 4\alpha) - 4\beta^2) = 0$, entón

$$\mathfrak{F}^t_{23} = \beta(8\alpha^3 - 8\lambda\alpha^2 - 2(8\beta^2 - \lambda^2)\alpha + \lambda(4\beta^2 - \lambda^2)),$$

polo que obtemos $\mathfrak{F}^t_{23} = 0$ se e só se $\alpha = 0$ e $\lambda = \pm 2\beta$, ou $\alpha = -\frac{3}{2}\lambda$ e $\beta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\lambda$. Así, o polinomio $\mathfrak{F}^t_{11}$ vén dado por $\mathfrak{F}^t_{11} = \frac{80}{3}\beta^4$ e $\mathfrak{F}^t_{11} = \frac{2048}{147}\beta^4$, respectivamente, polo que en ningún caso se podería anular o tensor $\mathfrak{F}^t$.

Supoñamos agora que a curvatura escalar é distinta de cero. Unha análise directa da expresión de $\mathfrak{F}^t_{23}$ amosa que se anula se e só se se satisfai unha das seguintes condicións:

(i) $t = \frac{8\alpha^3 - 8\alpha^2\lambda + 4\beta^2\lambda - \lambda^3 + 2\alpha(\lambda^2 - 8\beta^2)}{(2\alpha - \lambda)\tau}$,

(ii) $\alpha = \lambda = 0$.

No caso (i) tense que

$$(6\alpha - 3\lambda)\mathfrak{F}^t_{11} = 4\left((\alpha - \lambda)^2 + \beta^2\right)\left(4\alpha^2\lambda + 2\alpha\left(4\beta^2 + \lambda^2\right) - \lambda^3\right).$$

Dado que $\beta \neq 0$, $\mathfrak{F}^t_{11}$ só se anula se se anula o segundo factor, é dicir, se $\beta^2 = \frac{\lambda}{8\alpha}(\lambda^2 - 2\alpha\lambda - 4\alpha^2)$, o que se corresponde co Caso (1).

No caso (ii), $\mathfrak{F}^t_{11}$ redúcese a $\mathfrak{F}^t_{11} = -\frac{16}{3}(1 + t)\beta^4$, polo que só se anula se $t = -1$, o que se corresponde co Caso (2). □

Observación 5.10. A familia descrita no Teorema 5.9-(1) aporta métricas críticas para todo $t \in (-\infty, -1 - \varphi^{-5}) \cup (-1, -1 + \varphi^5)$. Estes valores de t ilústranse na Figura 5.3.4.

Observación 5.11. O operador de Ricci para as métricas críticas do Teorema 5.9-(1) ten autovalores $\{\lambda(\alpha - \frac{\lambda^2}{4\alpha}), -\frac{1}{4\alpha}(2\alpha - \lambda)(2\alpha\lambda \pm \sqrt{2\alpha\lambda(4\alpha^2 + 2\alpha\lambda - \lambda^2)})\}$. Dado que $\alpha\lambda(4\alpha^2 + 2\alpha\lambda - \lambda^2) = -8\alpha^2\beta^2 < 0$, o operador de Ricci ten dous autovalores complexos. Por outra banda, o operador de Ricci das métricas obtidas no Caso (2) é diagonalizable con autovalores $\{0, 0, -2\beta^2\}$.

5.3.3. Métricas críticas onde o operador de estrutura ten unha raíz dobre do polinomio mínimo

G é un grupo de Lie unimodular cunha raíz dobre do polinomio mínimo do operador de estrutura (tipo II). Consideramos unha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ satisfacendo $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = 1$ tal que os corchetes de Lie da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ veñen dados por

$$[u_1, u_2] = \lambda_2 u_3, \quad [u_1, u_3] = -\lambda_1 u_1 - \varepsilon u_2, \quad [u_2, u_3] = \lambda_1 u_2, \tag{5.11}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$. Os elementos da curvatura implicados na ecuación (5.2) teñen as seguintes compoñentes non nulas:

$$\rho(u_1, u_1) = \varepsilon(\lambda_2 - 2\lambda_1), \quad \rho(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}\lambda_2(\lambda_2 - 2\lambda_1), \quad \rho(u_3, u_3) = -\tfrac{1}{2}\lambda_2^2,$$

$$\begin{aligned} R[\rho](u_1, u_1) &= -\tfrac{1}{4}\varepsilon\lambda_2(4\lambda_1 - 5\lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2), \\ R[\rho](u_1, u_2) &= \tfrac{1}{4}\lambda_2^2(4\lambda_1^2 - 5\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2), \quad R[\rho](u_3, u_3) = \tfrac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2^3, \end{aligned}$$

$$\tau = -\tfrac{1}{2}\lambda_2(\lambda_2 - 4\lambda_1), \quad \|\rho\|^2 = \tfrac{1}{4}\lambda_2^2(8\lambda_1^2 - 8\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2).$$

Á vista das expresións do tensor de Ricci obtemos que as métricas invariantes á esquerda en grupos de Lie de tipo II son Einstein se e só se son Ricci-chás, é dicir, se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ademais, as métricas son críticas para o funcional $\mathcal{S}$ se e só se $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2 = 4\lambda_1$. Dadas as expresións dos obxectos asociados á curvatura, as compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$ son as seguintes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^t_{11} &= \varepsilon(8\lambda_1^3 - 8(1+t)\lambda_1^2\lambda_2 + 2(1+3t)\lambda_1\lambda_2^2 - (1+t)\lambda_2^3), \\ \mathfrak{F}^t_{12} &= -\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}^t_{33} = -\tfrac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2^2((2+4t)\lambda_1 - (3+t)\lambda_2). \end{aligned}$$

Teorema 5.12. *Sexa G un grupo de Lie de tipo II cunha métrica invariante á esquerda g que non é Einstein. Se g é $\mathcal{F}_t$-crítica , entón G é isomorfa a $SL(2,\mathbb{R})$ e g é isométrica a unha métrica dada por* (5.11) *con constantes de estrutura satisfacendo unha das seguintes condicións:*

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = \frac{1}{3}$.*

(2) $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\varphi\lambda_2 \neq 0$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -1 - \varphi^{-5}$.*

(3) $\lambda_1 = \frac{1}{2}\varphi^{-1}\lambda_2 \neq 0$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -1 + \varphi^5$.*

Demostración. Á vista da expresión de $\mathfrak{F}^t_{12}$, temos que este se anula se e só se $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$ ou $t = \frac{-2\lambda_1 + 3\lambda_2}{4\lambda_1 - \lambda_2}$ con $\lambda_2 \neq 4\lambda_1$. Analizamos por separado cada un destes casos.

Se $\lambda_2 = 0$, entón $\mathfrak{F}^t_{11} = 8\varepsilon\lambda_1^3$. Polo tanto o tensor anúlase se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e a variedade é Ricci-chá.

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, tense que $\mathfrak{F}^t_{11} = (1 - 3t)\varepsilon\lambda_2^3$. Dado que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ implica que a variedade é Ricci-chá, conclúese que $t = \frac{1}{3}$. Isto correspóndese co Caso (1).

Supoñamos agora que $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_2 \neq 4\lambda_1$. Se $t = \frac{-2\lambda_1 + 3\lambda_2}{4\lambda_1 - \lambda_2}$, a expresión de $\mathfrak{F}^t_{11}$ redúcese a

$$\mathfrak{F}^t_{11} = 2\varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2).$$

Así, o tensor $\mathfrak{F}^t$ anúlase se $4\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = 0$, é dicir, se $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\varphi\lambda_2$, o que se corresponde co Caso (2), ou $\lambda_1 = \frac{1}{2}\varphi^{-1}\lambda_2$, o que se corresponde co Caso (3). □

Observación 5.13. As métricas descritas no Teorema 5.12 teñen curvaturas de Ricci $a = -\frac{1}{2}\lambda_2^2$ e b dado por $b = -\frac{1}{2}\lambda_2^2$ no Caso (1), $b = \frac{1}{2}\varphi^2\lambda_2^2$ no Caso (2) e $b = \frac{1}{2}\varphi^{-2}\lambda_2^2$ no Caso (3). Ademais, o autovalor b sempre é unha raíz dobre do polinomio mínimo correspondente.

Observación 5.14. As métricas invariantes á esquerda dadas por (5.11) con $\lambda_2 = 0$ teñen unha distribución nula paralela de dimensión un, $\mathfrak{L} = \operatorname{span}\{u_2\}$, e operador de Ricci nilpotente en dous pasos. Polo tanto, tales métricas son *pp*-waves. Dado que ningunha métrica non Einstein con $\lambda_2 = 0$ pode ser $\mathcal{F}_t$-crítica, estas métricas correspóndense coas dadas no Teorema 5.5-(2), é dicir, son localmente isométricas ás *pp*-waves da familia $\mathcal{N}_b$.

5.3.4. Métricas críticas onde o operador de estrutura ten unha raíz tripla do seu polinomio mínimo

G é unimodular e o operador de estrutura ten unha raíz tripla do polinomio mínimo (tipo III). Consideramos unha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ satisfacendo $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = 1$ tal que os corchetes de Lie da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ veñen dados por

$$[u_1, u_2] = u_1 + \lambda u_3, \quad [u_1, u_3] = -\lambda u_1, \quad [u_2, u_3] = \lambda u_2 + u_3, \tag{5.12}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Os obxectos relacionados coa curvatura implicados na ecuación (5.2) para as métricas invariantes á esquerda nun grupo de Lie de tipo III están determinados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned} \rho(u_1, u_2) =& \rho(u_3, u_3) = -\tfrac{1}{2}\lambda^2, \quad \rho(u_2, u_2) = -2, \quad \rho(u_2, u_3) = -\lambda, \\ R[\rho](u_1, u_2) =& R[\rho](u_3, u_3) = \tfrac{1}{4}\lambda^4, \\ R[\rho](u_2, u_2) =& -\tfrac{3}{2}\lambda^2, \quad R[\rho](u_2, u_3) = \tfrac{1}{4}\lambda^3, \\ \tau =& -\tfrac{3}{2}\lambda^2, \quad \|\rho\|^2 = \tfrac{3}{4}\lambda^4. \end{aligned}$$

Os grupos de Lie de tipo III non admiten métricas invariantes á esquerda que sexan Einstein. Ademais, dado que a curvatura escalar vén dada por $\tau = -\frac{3}{2}\lambda^2$, as métricas invariantes á esquerda son $\mathcal{S}$-críticas se e só se $\lambda = 0$.

Dados os elementos da curvatura presentes na ecuación (5.2), o tensor $\mathfrak{F}^t$ está determinado polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\mathfrak{F}^t_{22} = -6(t-2)\lambda^2 \ \text{ e } \ \mathfrak{F}^t_{23} = (1-3t)\lambda^3. \tag{5.13}$$

Deste xeito, podemos obter o seguinte resultado.

Teorema 5.15. *Sexa G un grupo de Lie de tipo III cunha métrica invariante á esquerda g. Entón g é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se G é isomorfo a $E(1,1)$ e g é isométrica a unha métrica dada por* (5.12) *con $\lambda = 0$. Neste caso, a métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Dada a base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$, o tensor $\mathfrak{F}^t$ está determinado polas expresións (5.13). Logo, a única posibilidade para anular simultaneamente $\mathfrak{F}^t_{22}$ e $\mathfrak{F}^t_{23}$ é que λ sexa cero. Esta condición anula o tensor $\mathfrak{F}^t$ independentemente do valor de t. □

Observación 5.16. As métricas invariantes á esquerda obtidas no Teorema 5.15 teñen unha distribución nula paralela de dimensión un, $\mathfrak{L} = \operatorname{span}\{u_1\}$. Ademais, o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos, polo que estas métricas son *pp*-waves. Dado que estas métricas non son localmente simétricas, correspóndense coas métricas dadas no Teorema 5.5-(1) e son localmente isométricas ás ondas chás da familia $\mathcal{P}_c$.

5.3.5. Resumo dos resultados para grupos de Lie unimodulares

Analizando os resultados obtidos nas seccións anteriores, temos que os grupos de Lie unimodulares que admiten métricas invariantes á esquerda $\mathcal{F}_t$-críticas para algún valor de t son isomorfos aos seguintes:

- O grupo de Heisenberg H^3, o cal só admite métricas invariantes á esquerda non Einstein $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -3$.
- O grupo de Poincaré $E(1,1)$, o cal admite métricas críticas non Einstein para todo $t \in \mathbb{R}$.

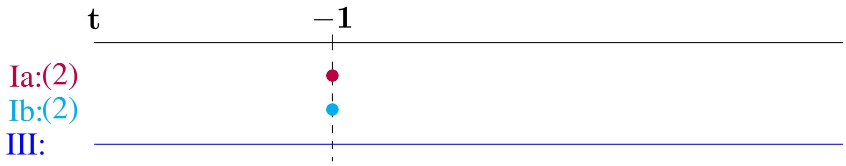


Figura 5.3.1: Valores de t nos cales se obtiveron métricas invariantes á esquerda no grupo de Poincaré que son $\mathcal{F}_t$-críticas en cada tipo dos grupos de Lie unimodulares. O número entre parénteses indica a familia no teorema de clasificación correspondente.

- O grupo euclídeo $E(2)$, o cal só admite métricas invariantes á esquerda non Einstein $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -1$.
- O grupo de Lie $SL(2,\mathbb{R})$, o cal admite métricas críticas non Einstein para todo $t \in \mathbb{R}$.

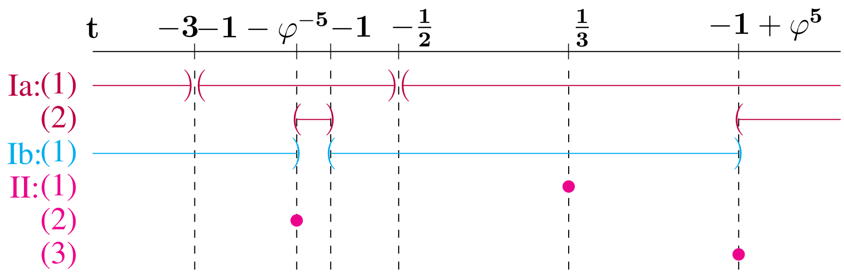


Figura 5.3.2: Valores de t nos cales se obtiveron métricas invariantes á esquerda no grupo $SL(2,\mathbb{R})$ que son $\mathcal{F}_t$-críticas en cada tipo dos grupos de Lie unimodulares.

- O grupo de Lie $SU(2)$, o cal admite métricas $\mathcal{F}_t$-críticas non Einstein para $t \in (-3, -\frac{1}{2})$.

5.3.6. Métricas críticas en grupos de Lie non unimodulares con núcleo unimodular lorentziano

G é un grupo de Lie non-unimodular con métrica inducida no núcleo unimodular u lorentziana. Así, existe unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfacendo $-\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1$

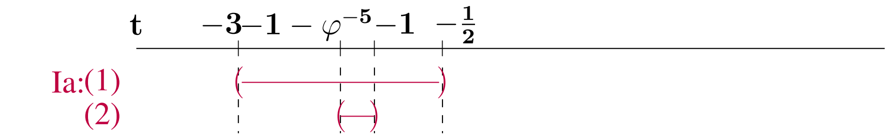


Figura 5.3.3: Valores de t nos cales se obtiveron métricas invariantes á esquerda no grupo $SU(2)$ que son $\mathcal{F}_t$-críticas en cada tipo dos grupos de Lie unimodulares.

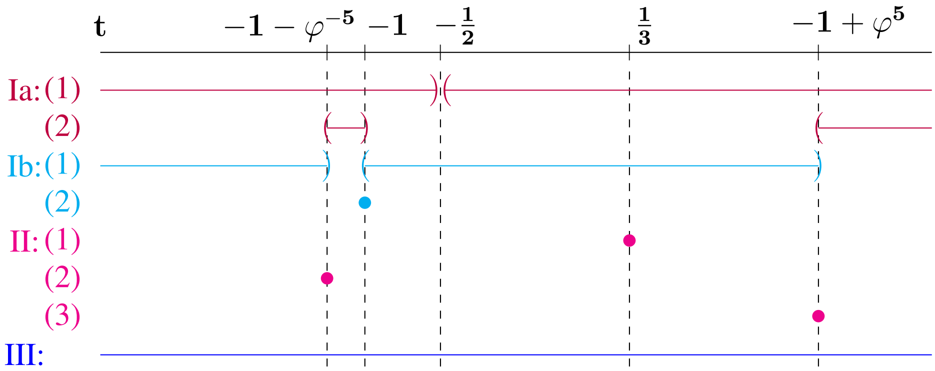


Figura 5.3.4: Este diagrama ilustra os valores de t nos cales se obtiveron métricas $\mathcal{F}_t$-críticas en cada tipo dos grupos de Lie unimodulares, sendo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o número áureo.

tal que a álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ está determinada polos corchetes

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2, \tag{5.14}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Traballaremos cun representante g da clase homotética tal que $\alpha + \delta = 2$. Así, os obxectos asociados á curvatura que desempeñan un papel na ecuación (5.2) están determinados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\rho(e_1, e_1) &= \tfrac{1}{2}(4\alpha - \beta^2 + \gamma^2), & \rho(e_1, e_2) &= (\alpha - 2)\beta + \alpha\gamma, \\
\rho(e_2, e_2) &= \tfrac{1}{2}(4(\alpha - 2) - \beta^2 + \gamma^2), & \rho(e_3, e_3) &= \tfrac{1}{2}((\beta + \gamma)^2 + 4 \det A - 8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R[\rho](e_1, e_1) =& \tfrac{1}{4} \big(2\alpha(3(\beta + \gamma)^2 - 16) - (\beta + \gamma)(2\beta^3 + 3\beta^2\gamma - \gamma^3 - 8\beta + 8\gamma) \\
& + 2(12\alpha - 5\beta^2 - 4\beta\gamma + \gamma^2) \det A - 8 \det A^2\big) , \\
R[\rho](e_1, e_2) =& \tfrac{1}{4}((\alpha - 2)\beta + \alpha\gamma)(12 \det A + 3(\beta + \gamma)^2 - 16), \\
R[\rho](e_2, e_2) =& \tfrac{1}{4} \big(2\alpha(3(\beta + \gamma)^2 - 16) - (\beta + \gamma)(\beta^3 - 3\beta\gamma^2 - 2\gamma^3 + 4\beta + 20\gamma) \\
& + 64 + 2(12\alpha - \beta^2 + 4\beta\gamma + 5\gamma^2 - 24) \det A + 8 \det A^2\big) , \\
R[\rho](e_3, e_3) =& \tfrac{1}{2} \big(4((\beta + \gamma)^2 - 6) \det A + (\beta + \gamma)^2((\beta + \gamma)^2 - 10) + 32\big) , \\
\tau =& \tfrac{1}{2} \big(4 \det A + (\beta + \gamma)^2 - 16\big) , \\
\|\rho\|^2 =& 4 \det A^2 + 4((\beta + \gamma)^2 - 6) \det A + \tfrac{1}{4}(\beta + \gamma)^2(3(\beta + \gamma)^2 - 32) + 32.
\end{aligned}$$

A métricas g é Einstein se as constantes de estrutura satisfán unha das seguintes posibilidades:

(i) $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma$,

(ii) $\beta = \pm\alpha$ e $\gamma = \pm(2-\alpha)$.

Obsérvese que o caso $A = \mathrm{ad}(e_3) = \mathrm{Id}$ está incluído en (i). Ademais, o caso dado por $(\beta,\gamma) = (\alpha, 2-\alpha)$ é isomorfo ao determinado por $(\beta,\gamma) = (-\alpha, \alpha-2)$ xa que o cambio de e_1 por $-e_1$ na base proporciona un isomorfismo isométrico que intercambia (β,γ) e $(-\beta,-\gamma)$. Dado que a curvatura escalar vén dada pola expresión $\tau = \frac{1}{2}\left(4\det A + (\beta+\gamma)^2 - 16\right)$, as métricas son $\mathcal{S}$-críticas se e só se son Einstein ou $\alpha = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta-\gamma)^2 - 12}$.

Dados os obxectos asociados á curvatura, o tensor $\mathfrak{F}^t$ vén dado polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{11} = -\tfrac{1}{3}(&8\det A^2 + 4(6\alpha - \beta^2 + 4\beta\gamma + 5\gamma^2 - 12)\det A \\ &+ (6\alpha - \beta^2 + \beta\gamma + 2\gamma^2 - 8)(3(\beta+\gamma)^2 - 8) \\ &+ t((\beta+\gamma)^2 + 4(\det A - 4)) \\ &\times (2\det A + 6\alpha - \beta^2 + \beta\gamma + 2\gamma^2 - 8)),\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{12} = &-((\alpha-2)\beta + \alpha\gamma)(3(\beta+\gamma)^2 - 8) \\ &+ 4((3-2\alpha)\beta + (1-2\alpha)\gamma)\det A \\ &- t((\alpha-2)\beta + \alpha\gamma)((\beta+\gamma)^2 + 4(\det A - 4)),\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{22} = \tfrac{1}{3}(&8\det A^2 - 4\,(6\alpha - 5\beta^2 - 4\beta\gamma + \gamma^2)\det A \\ &- (3(\beta+\gamma)^2 - 8)\,(6\alpha - 2\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 - 4) \\ &+ t((\beta+\gamma)^2 + 4\det A - 16) \\ &\times (-6\alpha + 2\beta^2 + \beta\gamma - \gamma^2 + 2\det A + 4)),\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{33} = -\tfrac{1}{3}(&4(\det A - 1) + (\beta+\gamma)^2) \\ &\times (4(\det A - 2) + 3(\beta+\gamma)^2 \\ &\quad + t(4(\det A - 4) + (\beta+\gamma)^2)).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Analizando estas expresións obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.17. *Sexa G un grupo de Lie de tipo IV.1. Unha métrica invariante á esquerda g en G non Einstein é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é homotética a unha métrica dada por* (5.14) *con constantes de estrutura satisfacendo unha das seguintes posibilidades:*

(1) $\alpha = 1 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para* $t = -\frac{1}{3}(\det A + \sqrt{1-\det A})$ *e* $\det A \leq 1$.

(2) $\det A = 0$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para* $t = -\frac{3(\beta+\gamma)^2 - 8}{(\beta+\gamma)^2 - 16}$.

(3) *A derivación* $\mathrm{ad}(e_3)$ *é autoadxunta, é dicir, $\beta = -\gamma$. Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{2-\det A}{4-\det A}$. Ademais, o determinante da derivación toma todos os valores reais e A realiza todas as posibles formas normais de Jordan.*

Demostración. Dadas as expresións das compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$ descritas en (5.15), (5.16), (5.17) e (5.18), obtemos mediante un cálculo directo que $\mathfrak{F}^t_{33}$ se anula se $\det A = 1 - \frac{1}{4}(\beta+\gamma)^2$ ou $t = -\frac{4(\det A-2)+3(\beta+\gamma)^2}{4(\det A-4)+(\beta+\gamma)^2}$.

Se supoñemos que $\det A = 1-\frac{1}{4}(\beta+\gamma)^2$, e dado que $\det A = \alpha(2-\alpha)-\beta\gamma$, temos que $\alpha = 1 \pm \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Como se mencionou anteriormente, intercambiar (β,γ) e $(-\beta,-\gamma)$ proporciona unha isometría, polo que podemos asumir sen perda de xeneralidade que $\alpha = 1 + \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Baixo esta condición, as compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$ redúcense a

$$\mathfrak{F}^t_{11} = -\mathfrak{F}^t_{12} = \mathfrak{F}^t_{22} = -(2\det A + 6t + \beta + \gamma)(\beta+\gamma-2)(\beta-\gamma).$$

Se $\beta=\gamma$, entón $\alpha = 1$ e a métrica é Einstein. Se $\gamma = 2-\beta$, entón $\alpha=\beta$ e a métrica tamén é Einstein. Logo o tensor anúlase se e só se a métrica é Einstein ou $t = -\frac{1}{6}(2\det A + \beta + \gamma)$, o que se corresponde co Caso (1).

Supoñamos agora que $t = -\frac{4(\det A-2)+3(\beta+\gamma)^2}{4(\det A-4)+(\beta+\gamma)^2}$. As compoñentes do tensor $\mathfrak{F}^t$ redúcense a

$$\mathfrak{F}^t_{11} = \mathfrak{F}^t_{22} = 2\det A(\beta+\gamma)(\beta-\gamma) \text{ e } \mathfrak{F}^t_{12} = -4\det A(\beta+\gamma)(\alpha-1).$$

Así, o tensor anúlase se $\det A = 0$, o que se corresponde co Caso (2), se $\beta = -\gamma$, o que se corresponde co Caso (3), ou se $\alpha = 1$ e $\beta=\gamma$, dando lugar a unha métrica Einstein. □

Observación 5.18. As métricas obtidas no Teorema 5.17 proporcionan exemplos de métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para valores de $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. A relación entre os valores de t e os diferentes casos obtidos está ilustrada na Figura 5.3.5 e descrita como segue:

- O Caso (1) proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para $t \in (-\frac{5}{12}, \infty)$ con enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = 3(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-2)$.
- O Caso (2) proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para $t \in (-\infty,-3)\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$ con enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = 6(\beta+\gamma)^2$.
- O Caso (3) proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ con enerxía cero.

Obsérvese que, para toda métrica crítica non Einstein, a enerxía do funcional correspondente é cero se e só se $\beta = -\gamma$.

Observación 5.19. Os operadores de Ricci das métricas críticas obtidas no Teorema 5.17 veñen dados polas seguintes descricións:

- Nas métricas críticas obtidas no Caso (1) o operador de Ricci ten un único autovalor igual a -2, que é unha raíz dobre do polinomio mínimo.
- As métricas críticas descritas no Caso (2) teñen operador de Ricci diagonalizable con dúas curvaturas de Ricci distintas, $\operatorname{Ric} = \operatorname{diag}[\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2, 4-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2, 4-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2]$.
- O operador de Ricci das métricas correspondentes ao Caso (3) ten autovalores $\{-2(2-\det A), -2(1\pm\sqrt{1-\det A})\}$, que poden ser reais ou non dependendo do valor do determinante da derivación. Ademais, se $\det A = 1$, hai un único autovalor igual a -2 que é raíz dobre do polinomio mínimo.

Observación 5.20. O Teorema 5.17 amosa que a normalización considerada en [59], dada por $\mathrm{ad}(e_3)(e_1) \perp \mathrm{ad}(e_3)(e_2)$, non sempre é posible. De feito, as métricas invariantes á esquerda obtidas no Caso (3), onde a derivación é autoadxunta, satisfán dita normalización soamente se A diagonaliza. Así, os casos con autovalores complexos ou con raíces dobres do polinomio mínimo non serían obtidos ao asumirmos a normalización. En concreto, se se consideran as métricas dadas por (5.14) con $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$, non se obterían métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para $t \in (-3, -\frac{1}{2})$.

5.3.7. Métricas críticas en grupos de Lie non unimodulares con núcleo unimodular riemanniano

G é un grupo de Lie non-unimodular con métrica inducida no núcleo unimodular $\mathfrak{u}$ riemanniana. Así, existe unha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfacendo $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$ tal que a álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ está determinada polos corchetes

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2, \tag{5.19}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ satisfacendo $\alpha + \delta = 2$. Así, os obxectos asociados á curvatura que desempeñan un papel na ecuación (5.2) están determinados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\rho(e_1, e_1) =& \tfrac{1}{2}(4\alpha + \beta^2 - \gamma^2), \quad \rho(e_1, e_2) = (2-\alpha)\beta + \alpha\gamma,\\
\rho(e_2, e_2) =& \tfrac{1}{2}(4(2-\alpha) - \beta^2 + \gamma^2), \quad \rho(e_3, e_3) = \tfrac{1}{2}(4\det A - 8 - (\beta-\gamma)^2),\\
R[\rho](e_1, e_1) =& \tfrac{1}{4}\left(2\alpha(3(\beta-\gamma)^2 + 16) + (\beta-\gamma)(2\beta^3 - 3\beta^2\gamma + \gamma^3 + 8\beta + 8\gamma)\right.\\
&\left. + 2(-12\alpha - 5\beta^2 + 4\beta\gamma + \gamma^2)\det A + 8\det A^2\right),\\
R[\rho](e_1, e_2) =& \tfrac{1}{4}((\alpha-2)\beta - \alpha\gamma)(12\det A - 3(\beta-\gamma)^2 - 16),\\
R[\rho](e_2, e_2) =& \tfrac{1}{4}\left(2\alpha(3(\beta-\gamma)^2 + 16) - (\beta-\gamma)(\beta^3 - 3\beta\gamma^2 + 2\gamma^3 - 4\beta + 20\gamma)\right.\\
&\left. + 64 + 2(12\alpha + \beta^2 + 4\beta\gamma - 5\gamma^2 - 24)\det A + 8\det A^2\right),\\
R[\rho](e_3, e_3) =& \tfrac{1}{2}\left(4((\beta-\gamma)^2 + 6)\det A - (\beta-\gamma)^2((\beta-\gamma)^2 + 10) - 32\right),\\
\tau =& \tfrac{1}{2}\left((\beta-\gamma)^2 + 16 - 4\det A\right),\\
\|\rho\|^2 =& 4\det A^2 - 4((\beta-\gamma)^2 + 6)\det A\\
& + \tfrac{1}{4}(\beta-\gamma)^2(3(\beta-\gamma)^2 + 32) + 32.
\end{aligned}$$

As métricas invariantes á esquerda son Einstein se e só se $\alpha = 1$ e $\gamma = -\beta$ (nótese que o caso $\mathrm{ad}(e_3) = \mathrm{Id}$ está incluído). Ademais, a curvatura escalar vén dada pola expresión $\tau = \frac{1}{2}\left((\beta-\gamma)^2 + 16 - 4\det A\right) = \frac{1}{2}\left((\beta+\gamma)^2 + 16 + 4(\alpha-2)\alpha\right)$, polo que sempre é positiva. Así, as únicas métricas $\mathcal{S}$-críticas son as Einstein.

O tensor $\mathfrak{F}^t$ vén dado polas seguintes compoñentes a priori non nulas:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t_{11} = \tfrac{1}{3}(&8(\det A)^2 + 4(6\alpha + \beta^2 + 4\beta\gamma - 5\gamma^2 - 12)\det A\\
&- (6\alpha + \beta^2 + \beta\gamma - 2\gamma^2 - 8)(3(\beta-\gamma)^2 + 8)\\
&- t(2\det A + 6\alpha + \beta^2 + \beta\gamma - 2\gamma^2 - 8)(4\det A - (\beta-\gamma)^2 - 16)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{12} &= \beta(8\alpha^3 - 28\alpha^2 + \alpha(9\gamma^2+32) - 2(\gamma^2+8)) + 3(\alpha-2)\beta^3 - \alpha\beta^2\gamma \\ &\quad + \alpha\gamma(4\alpha - 3\gamma^2 - 16 + 8\det A) \\ &\quad + t((\alpha-2)\beta - \alpha\gamma)((\beta-\gamma)^2 - 4\det A + 16),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{22} &= \tfrac{1}{3}(8(\det A)^2 - 4(6\alpha + 5\beta^2 - 4\beta\gamma - \gamma^2)\det A \\ &\quad + (3(\beta-\gamma)^2+8)(6\alpha + 2\beta^2 - \beta\gamma - \gamma^2 - 4)) \\ &\quad + t(4\det A - 16 - (\beta-\gamma)^2)(-6\alpha - 2\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 + 2\det A + 4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{33} &= \tfrac{1}{3}(4\det A - 4 - (\beta-\gamma)^2) \\ &\quad \times (4\det A - 8 - 3(\beta-\gamma)^2 + t(4\det A - 16 - (\beta-\gamma)^2)).\end{aligned}$$

Dada a descrición do tensor $\mathfrak{F}^t$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.21. *Sexa G un grupo de Lie de tipo IV.2. Unha métrica invariante á esquerda non Einstein g en G é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é homotética a unha métrica dada por* (5.19) *con constantes de estrutura satisfacendo unha das seguintes posibilidades:*

(1) $\det A = 0$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{8+3(\beta-\gamma)^2}{16+(\beta-\gamma)^2}$.*

(2) *A derivación* $\operatorname{ad}(e_3)$ *é autoadxunta, é dicir, $\beta = \gamma$. Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{2-\det A}{4-\det A}$ e* $\det A < 1$.

Demostración. Dadas as expresións das compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$, temos que $\mathfrak{F}^t_{33}$ se anula se e só se $\det A = 1 + \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2$ ou $t = -\frac{4\det A - 8 - 3(\beta-\gamma)^2}{4\det A - 16 - (\beta-\gamma)^2}$. Dado que $\det A = -\alpha^2 + 2\alpha - \beta\gamma$, a ecuación $\det A = 1 + \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2$ ten como solución $\alpha = 1 \pm (\beta+\gamma)\sqrt{-1}$, polo que a única solución real é $\alpha = 1$ e $\beta = -\gamma$, obtendo así unha métrica Einstein.

Asumimos por tanto que $t = -\frac{4\det A - 8 - 3(\beta-\gamma)^2}{4\det A - 16 - (\beta-\gamma)^2}$. Así, as compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$ redúcense ás seguintes expresións:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^t_{11} &= -\mathfrak{F}^t_{22} = -2\det A(\beta-\gamma)(\beta+\gamma), \\ \mathfrak{F}^t_{12} &= 4\det A(\beta-\gamma)(\alpha-1).\end{aligned}$$

Un cálculo directo amosa que o tensor se anula se $\det A = 0$, o cal se corresponde co Caso (1), se $\beta = \gamma$, o que se corresponde co Caso (2), ou se $\alpha = 1$ e $\beta = -\gamma$, o que dá lugar a unha métrica Einstein. □

Observación 5.22. A familia de métricas obtida no Caso (1) do Teorema 5.21 proporciona métricas críticas para os valores de $t \in (-3, -\frac{1}{2}]$ con enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = -6(\beta-\gamma)^2$. Do mesmo xeito, a familia obtida no Caso (2) proporciona métricas críticas para os valores de $t \in (-1, -\frac{1}{3})$ con enerxía cero, sendo as métricas críticas obtidas para $t = -\frac{1}{2}$ as determinadas por $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = 0$ e, polo tanto, métricas Einstein. Na Figura 5.3.5 ilústranse estes valores de t.

Observación 5.23. Os operadores de Ricci das métricas críticas obtidas no Teorema 5.21 son diagonalizables con autovalores $\{4 + \frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2, 4 + \frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2, -\frac{1}{2}(\beta-\gamma)^2\}$ no Caso (1) e $\{2(2-\det A), 2(1-\sqrt{1-\det A}), 2(1+\sqrt{1-\det A})\}$ no Caso (2). Nótese que a familia do Caso (2) ten dous autovalores iguais se e só se $\det A = 0$, é dicir, se tamén satisfai a condición do Caso (1). Nese caso a variedade é localmente simétrica.

Observación 5.24. A álxebra de Lie dada por (5.19) correspóndese cun produto semidirecto $\mathbb{R} \ltimes \mathfrak{r}^2$ donde a métrica restrinxida a $\mathfrak{r}^2$ ten sinatura definida positiva. É interesante destacar que os resultados obtidos para os grupos de Lie de tipo IV.2 son análogos aos obtidos para grupos de Lie non unimodulares riemannianos de dimensión tres, é dicir, ao Teorema 2.10.

5.3.8. Métricas críticas en grupos de Lie non unimodulares con núcleo unimodular dexenerado

G é un grupo de Lie non unimodular coa restrición da métrica ao núcleo unimodular $\mathfrak{u}$ dexenerada. Entón, existe unha base pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ da álxebra de Lie satisfacendo $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 1$, tal que

$$[u_1, u_2] = 0, \quad [u_1, u_3] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2, u_3] = \gamma e_1 + \delta u_2, \tag{5.20}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha + \delta = 2$. Os obxectos relacionados coa curvatura implicados na ecuación (5.2) para as métricas invariantes á esquerda están determinados polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\rho(u_1, u_1) =& - \rho(u_2, u_3) = -\tfrac{1}{2}\gamma^2,\\
\rho(u_1, u_3) =& \alpha\gamma, \quad \rho(u_3, u_3) = 2\alpha - 2\alpha^2 - \beta\gamma,\\
R[\rho](u_1, u_1) =& - \tfrac{1}{2}R[\rho](u_2, u_3) = -\tfrac{1}{4}\gamma^4,\\
R[\rho](u_1, u_3) =& \tfrac{3}{4}\alpha\gamma^2, \quad R[\rho](u_3, u_3) = \tfrac{1}{4}\gamma^2(2\alpha^2 - 10\alpha + 5\beta\gamma),\\
\tau =& \tfrac{1}{2}\gamma^2, \quad \|\rho\|^2 = \tfrac{3}{4}\gamma^4.
\end{aligned}$$

As métricas invariantes á esquerda son Einstein se e só se son chás, é dicir, se $\gamma = 0$ e $\alpha = 0, 1$. Ademais, dado que a curvatura escalar é $\tau = \frac{1}{2}\gamma^2$, as métricas dadas por (5.20) son $\mathcal{S}$-críticas se e só se $\gamma = 0$.

Dadas as expresións dos elementos da curvatura, o tensor $\mathfrak{F}^t$ vén dado polas seguintes compoñentes non nulas:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t_{11} &= \tfrac{2}{3}(3+t)\gamma^4, & \mathfrak{F}^t_{13} &= -(3+t)\alpha\gamma^3,\\
\mathfrak{F}^t_{23} &= -\tfrac{1}{3}(3+t)\gamma^4, & \mathfrak{F}^t_{33} &= \gamma^2(3\alpha^2 - \det A + t(\alpha^2 - \det A)).
\end{aligned}$$

Así, o resultado obtido para os grupos de Lie de tipo IV.3 é o seguinte.

Teorema 5.25. *Sexa G un grupo de Lie de tipo IV.3. Unha métrica invariante á esquerda non Einstein g en G é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se é homotética a unha métrica dada por* (5.20) *con constantes de estrutura satisfacendo unha das seguintes posibilidades:*

(1) $\det A = 0$. *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -3$.*

(2) *A derivación* $\operatorname{ad}(e_3)$ *é autoadxunta, é dicir, $\gamma = 0$. Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Dadas as compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{F}^t$, temos que o termo $\mathfrak{F}^t_{11}$ se anula se e só se $\gamma = 0$ ou $t = -3$. Se $\gamma = 0$, o tensor anúlase independentemente do valor de t, o que se corresponde co Caso (2).

Supoñamos que $t = -3$ e $\gamma \neq 0$. A única compoñente non nula restante é $\mathfrak{F}^t_{33} = 2\gamma^2 \det A$, polo que se anula se e só se $\det A = 0$, o que se corresponde co Caso (1). □

Observación 5.26. O operador de Ricci das métricas obtidas no Caso (1) do Teorema 5.25 é diagonalizable de xeito que $\mathrm{Ric} = \frac{\gamma^2}{2}\mathrm{diag}[-1, 1, 1]$. Polo tanto, a curvatura escalar vén dada por $\tau = \frac{\gamma^2}{2}$ e a norma do tensor de Ricci por $\|\rho\|^2 = \frac{3\gamma^4}{4}$, polo que a enerxía ($\|\rho\|^2 - 3\tau^2$) é cero neste caso.

Observación 5.27. As métricas invariantes á esquerda descritas no segundo caso do Teorema 5.25 teñen un campo paralelo dexenerado $\mathfrak{L} = \mathrm{span}\{u_2\}$. Ademais, o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos, polo tanto son pp-waves. Excluíndo o caso chán, se $\alpha = 2$ as métricas son localmente simétricas e, polo tanto, son espazos simétricos de Cahen-Wallach $\mathcal{CW}_\varepsilon$. Para outro valor de α, as métricas son ondas chás $\mathcal{P}_c$ (ver Teorema 5.5). Ademais, dado que o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos, todos os funcionais $\mathcal{F}_t$ teñen enerxía cero.

Observación 5.28. O operador de Ricci dunha métrica dada por (5.20) satisfai

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma^2}{2} & 0 & \alpha\gamma \\ \alpha\gamma & \frac{\gamma^2}{2} & \det A - \alpha^2 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma^2}{2} \end{pmatrix}$$

con autovalores $\{-\frac{\gamma^2}{2}, \frac{\gamma^2}{2}, \frac{\gamma^2}{2}\}$. Considerando a subfamilia dada por $\alpha^2 = \det A$ tense que o polinomio mínimo do operador de Ricci é $(\lambda + \frac{\gamma^2}{2})(\lambda - \frac{\gamma^2}{2})$ se $\alpha\gamma = 0$, mais obtemos $(\lambda + \frac{\gamma^2}{2})(\lambda - \frac{\gamma^2}{2})^2$ para o caso $\alpha\gamma \neq 0$. Polo tanto, dentro desta subfamilia hai métricas que non son isométricas ás obtidas coa normalización $\alpha\gamma = 0$ proposta en [59]. Así, a normalización $\mathrm{ad}(e_3)(e_1) \perp \mathrm{ad}(e_3)(e_2)$ (equivalentemente, $\alpha\gamma = 0$) non pode ser aplicada en (5.20) ou estarían a se omitir parte das métricas críticas.

5.3.9. Resumo dos resultados para grupos de Lie non unimodulares

A análise das seccións previas amosan que a sinatura lorentziana é máis rica que a riemanniana, onde os grupos de Lie coa derivación A normalizada mediante $\mathrm{tr}\, A = 2$ admiten métricas críticas só para $\det A \leq 1$ (véxase a Sección 2.2.2). Fixando a normalización $\mathrm{tr}\, A = 2$, das seccións anteriores séguese o seguinte:

- Os grupos de Lie con $\det A = 0$ admiten métricas críticas tales que a restrición da métrica ao núcleo unimodular é lorentziana (Teorema 5.17-(2)), riemanniana (Teorema 5.21-(1)) ou dexenerada (Teorema 5.25-(1)).
- Os grupos de Lie con $\det A \leq 1$ admiten métricas críticas tales que a restrición da métrica ao núcleo unimodular é lorentziana (Teorema 5.17-(1)), riemanniana (Teorema 5.21-(2), con curvatura seccional $K = 1$ se $\det A = 1$) ou dexenerada (Teorema 5.25-(2), con curvatura seccional $K = 0$ se $\det A = 1$).

- Para todo valor do determinante de A existe un grupo de Lie non unimodular que admite métricas críticas con núcleo unimodular lorentziano (Teorema 5.17-(3)).

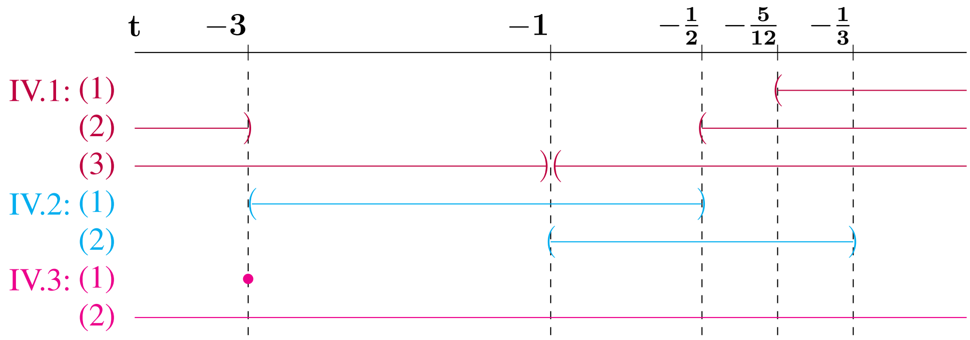


Figura 5.3.5: Este diagrama ilustra os valores de t nos cales se obtiveron métricas $\mathcal{F}_t$-críticas en cada tipo dos grupos de Lie non unimodulares.

5.4. Casos especiais

5.4.1. Métricas críticas para a norma L^2 do tensor de curvatura

En dimensión tres unha métrica é crítica para o funcional $g \mapsto \int_M \|R_g\|^2 \,\mathrm{dvol}_g$ se e só se é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{4}$. No capítulo anterior amosouse que a única métrica riemanniana non Einstein que é crítica para este funcional é a dada por Lamontagne en [98]. A sinatura lorentziana aporta os seguintes novos exemplos de métricas críticas para este funcional onde, como anteriormente, traballamos módulo clases homotéticas:

- As ondas chás dadas no Teorema 5.15 e no Teorema 5.25-(2). Son críticas para todos os funcionais cuadráticos e, en particular, para o determinado pola norma L^2 do tensor de curvatura.

- O grupo de Lie unimodular $SL(2,\mathbb{R})$ coa métrica (5.4) dada polas constates de estrutura $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (1,1,\frac{4}{11})$ ou $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (\frac{4}{11},1,1)$ como no Teorema 5.6-(1). Os operadores de Ricci son diagonalizables de xeito que $\mathrm{Ric} = -\frac{4}{121}\mathrm{diag}[9,9,2]$ e $\mathrm{Ric} = -\frac{4}{121}\mathrm{diag}[2,9,9]$, respectivamente.

- O grupo de Lie unimodular $SL(2,\mathbb{R})$ coa métrica (5.10) dada polas constantes de estrutura $\alpha = 1$ e $\beta^2 = \frac{1}{12}(7\lambda^2+4\lambda+16)$, onde λ é a única solución real da ecuación $3\lambda^3 - 20\lambda^2 - 20\lambda - 32 = 0$, como no Teorema 5.9-(1). O operador de Ricci ten autovalores complexos, como se amosou na Observación 5.11.

- Os grupos de Lie non unimodulares con núcleo unimodular lorentziano obtidos no Teorema 5.17:

- O grupo de Lie non unimodular con álxebra de Lie determinada por $\operatorname{tr} A = 2$ e $\det A = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{2})$ dotado dunha métrica invariante á esquerda homotética á dada no Teorema 5.17-(1) con $\beta + \gamma = 1 + \sqrt{2}$.
- O grupo de Lie non unimodular con álxebra de Lie determinada por $\operatorname{tr} A = 2$ e $\det A = 0$ dotado dunha métrica invariante á esquerda homotética á dada no Teorema 5.17-(2) con $\beta + \gamma = \frac{4\sqrt{11}}{11}$.
- O grupo de Lie non unimodular con álxebra de Lie determinada por $\operatorname{tr} A = 2$ e $\det A = \frac{4}{3}$ dotado dunha métrica invariante á esquerda homotética á dada no Teorema 5.17-(3) con $\alpha = 1 \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{3}}$.

O operador de Ricci correspondente a cada un destes casos foi estudado na Observación 5.19

5.4.2. Métricas críticas localmente homoxéneas localmente conformemente chás

As variedades localmente homoxéneas de dimensión tres localmente conformemente chás foron clasificadas en [84], onde se conclúe que estas variedades son localmente simétricas ou localmente homotéticas a un dos seguintes grupos de Lie:

(1) O grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ coa métrica invariante á esquerda determinada por (5.10) con $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda = 1$.

(2) O grupo de Lie $E(1, 1)$ coa métrica invariante á esquerda determinada por (5.12) con $\lambda = 0$.

(3) O grupo de Lie de tipo IV.1 coa métrica invariante á esquerda determinada por (5.14) con $\beta + \gamma = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}(2 + \beta - \gamma)$, $\gamma \neq \frac{1}{2}$.

(4) O grupo de Lie de tipo IV.3 coa métrica invariante á esquerda determinada por (5.20) con $\gamma = 0$ e $\alpha \notin \{0, 1, 2\}$.

As métricas do caso (1) teñen curvaturas de Ricci $\{-2, 1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}\}$. Polo tanto, a curvatura escalar é cero e as métricas son $\mathcal{S}$-críticas, mais non son críticas para ningún outro funcional cuadrático. As métricas do caso (3) son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{5}{12}$ e teñen unha única curvatura de Ricci $\mu = -2$ que é unha raíz dobre do polinomio mínimo. As métricas correspondentes aos casos (2) e (4) son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura e teñen operador de Ricci nilpotente en dous pasos.

5.4.3. Métricas homoxéneas $\mathcal{F}_t$-críticas e espazos semi-simétricos

Todos os espazos simétricos son críticos para o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$ (véxase o Lema 5.3). Estes espazos son xeneralizados polos denominados espazos semi-simétricos, as variedades cuxo tensor de curvatura coincide co dun espazo simétrico en cada punto, onde o modelo simétrico pode variar de punto a punto. En consecuencia, un grupo de Lie unimodular é semi-simétrico se e só se é simétrico ou se corresponde cunha pp-wave modelada en $\mathcal{N}_b$ (de tipo II) ou $\mathcal{P}_c$ (de tipo III).

Os resultados da Sección 5.3 amosan que un grupo de Lie unimodular non Einstein é $\mathcal{F}_t$-crítico para $t = -\frac{1}{2}$ se e só se é de tipo III con $\lambda = 0$ coma no Teorema 5.15 (e polo tanto é semi-simétrico), ou é de tipo Ib determinado por (5.10) con $\beta^2 = 2\alpha^2 + \alpha\lambda + \frac{3}{4}\lambda^2$ e $16\alpha^3 + 12\alpha^2\lambda + 8\alpha\lambda^2 - \lambda^3 = 0$. Neste último caso, o operador de Ricci ten autovalores complexos, polo que non se corresponde cun espazo semi-simétrico.

Un grupo de Lie non unimodular é semi-simétrico se e só se é simétrico ou se se corresponde cun grupo de Lie de tipo IV.3 determinado por (5.20) con $\gamma = 0$, en cuxo caso é unha pp-wave modelada en $\mathcal{P}_c$ ou $\mathcal{CW}_\varepsilon$. Ademais, os resultados da Sección 5.3 amosan que un grupo de Lie non unimodular é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítico se e só se é localmente simétrico ou de tipo IV.3 con $\gamma = 0$. O seguinte resultado resume as observacións anteriores:

> *Unha variedade localmente homoxénea lorentziana semi-simétrica de dimensión tres que é crítica para un funcional cuadrático da curvatura é $\mathcal{S}$-crítica ou $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica. Reciprocamente, toda métrica $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica é semi-simétrica agás se se corresponde co grupo de Lie de tipo Ib con curvaturas de Ricci complexas mencionado anteriormente.*

5.4.4. Métricas críticas e solitóns de Ricci alxébricos

Nesta sección relacionamos os grupos de Lie dotados dunha métrica invariante á esquerda $\mathcal{F}_t$-crítica cos solitóns de Ricci alxébricos. Seguindo a clasificación dada na Sección 5.3 consideramos os grupos de Lie unimodulares e analizamos cando $\mathrm{Ric} - \mu\mathrm{Id}$ é unha derivación da álxebra de Lie. Un cálculo directo amosa o seguinte resultado.

Lema 5.29. *Sexa (G, g) un grupo de Lie lorentziano unimodular de dimensión tres. Se (G, g) é un solitón de Ricci alxébrico non Einstein, entón é isométrico a un dos seguintes:*

(1) *O grupo de Heisenberg con álxebra de Lie* (5.4) *de tipo Ia determinada por*

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \lambda) \quad \textit{ou} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, 0, 0).$$

(2) *O grupo euclídeo $E(2)$ con álxebra de Lie* (5.4) *de tipo Ia determinada por* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \lambda, -\lambda)$.

(3) *O grupo de Poincaré $E(1, 1)$ con álxebra de Lie dada por*

   (a) *unha álxebra de Lie* (5.4) *de tipo Ia con constantes* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, -\lambda, 0)$.

   (b) *unha álxebra de Lie* (5.10) *de tipo Ib determinada por $\alpha = \lambda = 0$, ou*

   (c) *unha álxebra de Lie* (5.12) *de tipo III determinada por $\lambda = 0$.*

Dun xeito análogo, para os grupos de Lie non unimodulares obtemos o seguinte resultado.

Lema 5.30. *Un grupo de Lie lorentziano non unimodular de dimensión tres é un solitón de Ricci alxébrico se e só se é Einstein ou o operador* $\mathrm{ad}(e_3)$ *é autoadxunto.*

Observación 5.31. A clasificación dos solitóns de Ricci alxébricos dada en [9] omite algunha das posibilidades do caso non unimodular debido ao problema da normalización xa exposto na Observación 5.20. De feito, existen solitóns de Ricci alxébricos con operador de Ricci non diagonalizable que non se corresponden aos descritos en [9] (véxanse o Lema 5.30 e a Observación 5.19).

O seguinte resultado relaciona os solitóns de Ricci alxébricos e as métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura.

Teorema 5.32. *Sexa* (G, g) *un grupo de Lie lorentziano de dimensión tres cunha métrica invariante á esquerda. Se* (G, g) *é un solitón de Ricci alxébrico, entón é crítico para un funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero.*

Reciprocamente, se (G, g) *é crítico para un funcional cuadrático da curvatura con enerxía cero, entón é un solitón de Ricci alxébrico agás se* (G, g) *é isométrico a un grupo de Lie non unimodular de tipo IV.3 dado por* (5.20) *con* $\det A = 0$ *e* $\gamma \neq 0$.

Demostración. Se (G, g) é Einstein, entón é un solitón de Ricci alxébrico trivial e, ademais, é crítico para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

Para os grupos de Lie unimodulares, unha análise directa da enerxía $\|\rho\|^2 + t\tau^2$ das métricas obtidas nos Teoremas 5.6, 5.9, 5.12 e 5.15 amosa que aquelas con enerxía cero son exactamente os solitóns de Ricci alxébricos dados no Lema 5.29.

Unha análise análoga para os grupos de Lie non unimodulares dá como resultado que todos os solitóns de Ricci obtidos no Lema 5.30 son críticos para algún funcional de enerxía cero. O recíproco é certo agás por unha excepción: as métricas obtidas no Caso (1) do Teorema 5.25. Estas métricas son críticas para o funcional $\mathcal{F}_{-3} = \int_M (\|\rho\|^2 - 3\tau^2)\,\mathrm{dvol}_g$ con enerxía $\|\rho\|^2 - 3\tau^2 = 0$. Porén, un cálculo directo amosa que $\mathrm{Ric} - \mu\mathrm{Id}$ actúa como derivación só se $\gamma = 0$ (véxase o Lema 5.30), polo que só son solitóns de Ricci alxébricos nese caso, o que se corresponde coa intersección dos dous casos do Teorema 5.25. $\square$

Observación 5.33. O grupo de Lie non unimodular de tipo IV.3 dado por (5.20) con $\det A = 0$ e $\gamma \neq 0$ non é un solitón de Ricci alxébrico. Porén, si se trata dun solitón de Ricci. O grupo de Lie lorentziano $(G, \langle , \rangle)$ é isométrico a $\mathbb{R}^3$ coa métrica

$$g(x, y, z) = \gamma^2 dx^2 + 2\gamma^2 e^{-2z} dxdy - \alpha dxdz + \gamma^2 e^{-4z} dy^2 + 2(2 - \alpha) e^{-2z} dydz.$$

onde (x, y, z) son coordenadas globais en $\mathbb{R}^3$. Nestas coordenadas, a métrica satisfai a ecuación (1.1) para $\lambda = \frac{3}{2}\gamma^2$ e $X = (\frac{1}{4}(\alpha - 4)\alpha z + \gamma^2 x)\partial_x - \frac{1}{8}\alpha^2 e^{2z}\partial_y - \frac{1}{2}\gamma^2\partial_z$.

Polo tanto, todas as métricas lorentzianas localmente homoxéneas de dimensión tres que son críticas para funcionais cuadráticos con enerxía cero son solitóns de Ricci.

Observación 5.34. O feito de que os solitóns de Ricci alxébricos sexa críticos para os funcionais cuadráticos da curvatura de enerxía cero non se pode estender aos solitóns invariantes á esquerda. Ditos solitóns invariantes á esquerda non triviais son os seguintes [27]:

(1) Unha métrica invariante á esquerda en $E(1,1)$ determinada pola álxebra de Lie

(1.i) $[u_1,u_3] = -\lambda u_1 - \varepsilon u_2$, $[u_2,u_3] = \lambda u_2$, e o campo de vectores solitón invariante á esquerda está determinado por $X = -\lambda u_3$, onde $\lambda \neq 0$ e $\varepsilon = \pm 1$;

(1.ii) $[u_1,u_2] = u_1$, $[u_2,u_3] = u_3$, e o campo de vectores solitón invariante á esquerda está determinado por $X = -u_1$;

onde $\langle u_1,u_2\rangle = \langle u_3,u_3\rangle = 1$. Para caso (1.i), todos os funcionais cuadráticos da curvatura teñen enerxía cero, mais só é crítico para o funcional da normal L^2 da curvatura escalar. No caso (1.ii), a métrica é crítica para todos os funcionais cuadráticos, sendo estes de enerxía cero independetemente do valor de t.

(2) Unha métrica invariante á esquerda no recubrimento universal de $SL(2,\mathbb{R})$ determinado por

(2.i) $[u_1,u_2] = \lambda u_3$, $[u_1,u_3] = -\lambda u_1 - \varepsilon u_2$, $[u_2,u_3] = \lambda u_2$, e o campo de vectores solitón invariante á esquerda está determinado por $X = \kappa u_2 - \frac{1}{2}\lambda u_3$, onde $\lambda \neq 0$ e $\varepsilon = \pm 1$;

(2.ii) $[u_1,u_2] = u_1 + \lambda u_3$, $[u_1,u_3] - \lambda u_1$, $[u_2,u_3] = \lambda u_2 + u_3$, e o campo de vectores solitón invariante á esquerda está determinado por $X = -u_1 + \lambda u_3$, onde $\lambda \neq 0$;

onde $\langle u_1,u_2\rangle = \langle u_3,u_3\rangle = 1$. As métricas dadas no caso (2.i) son $\mathcal{F}_{1/3}$-críticas, con enerxía $\|\rho\|^2 + \frac{1}{3}\tau^2 = \frac{3}{2}\lambda^4$. As métricas dadas no caso (2.ii) anulan a enerxía do funcional $\mathcal{F}_{-1/3}$, mais non son críticas para ningún funcional cuadrático da curvatura.

(3) Unha métrica invariante á esquerda no grupo de Lie non unimodular $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ homotética a unha métrica determinada pola álxebra de Lie

$$[e_1,e_3] = e_1 - e_2, \quad [e_2,e_3] = e_1 + e_2,$$

onde $\{e_1,e_2,e_3\}$ é unha base ortonormal con $\langle e_1,e_1\rangle = -1$ e o campo de vectores solitón invariante á esquerda está determinado por $X = e_3$. Estas métricas son críticas para o funcional da norma L^2 do tensor de Ricci, o cal neste caso ten enerxía $\|\rho\|^2 = 0$.

(4) Unha métrica invariante á esquerda no grupo de Lie non unimodular $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ homotética a unha métrica determinada pola álxebra de Lie

$$[u_1,u_3] = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad [u_2,u_3] = (2-\alpha)u_2,$$

onde $\alpha \neq 2$ e $\langle u_2,u_3\rangle = \langle u_1,u_1\rangle = 1$. Se $\alpha = \frac{2}{3}$, o campo de vectores solitón invariante á esquerda está determinado por $X = \frac{3}{2}\beta u_1 + (\frac{1}{6} - \frac{9}{8}\beta^2)u_2 + u_3$; en caso contrario, $X = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha-2}u_2$. Estas métricas son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

No caso riemanniano, todo solitón de Ricci homoxéneo en dimensión baixa é homotético a un solitón alxébrico. Isto non é certo en xeometría lorentziana porque os solitóns invariantes á esquerda que non son críticos para un funcional con enerxía cero non poden ser homotéticos a ningún solitón alxébrico, xa que estes sempre son críticos para funcionais de enerxía cero en dimensión tres e a enerxía do funcional é invariante por homotecias.

Capítulo 6
Métricas críticas curvatura homoxéneas

Nos capítulos anteriores estudamos as variedades homoxéneas de dimensión tres que son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura, tanto en sinatura riemanniana (capítulo 2) como lorentziana (capítulo 5). Unha xeneralización deste tipo de variedades son as denominadas curvatura homoxéneas introducidas na sección 1.4.

Dado que as curvaturas de Ricci dunha variedade k-curvatura homoxénea son constantes, a curvatura escalar tamén o é. Polo tanto, as ecuacións de Euler-Lagrange para os funcionais cuadráticos da curvatura $\mathcal{S}$ e $\mathcal{F}_t$, (1.7) e (1.8), redúcense, respectivamente, a

$$\tau\left(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g\right) = 0, \tag{6.1}$$

$$\Delta\rho + 2(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g) = 0. \tag{6.2}$$

A partir de (6.1) vemos que, coo no caso homoxéneo, unha métrica k-curvatura homoxénea é $\mathcal{S}$-crítica se e só se é Einstein ou ten curvatura escalar cero.

Neste capítulo estudaremos nunha primeira sección as familias 1-curvatura homoxéneas, chegando a clasificar as métricas críticas 1-curvatura homoxéneas. Unha vez concluído o caso 1-curvatura homoxéneo, na seguinte sección analizarase o caso 0-curvatura homoxéneo. Debido á gran complexidade que supón a perda da condición $\Phi_{pq}^*\nabla R_q = \nabla R_p$ para a isometría linear Φ_{pq}, o noso estudo centrarase nas variedades curvatura homoxéneas modeladas en espazos simétricos.

6.1. Variedades 1-curvatura homoxéneas

Dependendo da forma normal de Jordan, as familias de variedades 1-curvatura homoxéneas tridimensionais descríbense como segue (véxase [33]).

(A) *Variedades con operador de Ricci diagonalizable.* Sexa $\{u_1, u_2, u_3\}$ unha referencia pseudo-ortonormal satisfacendo $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 1$. Os corchetes de Lie dados por

$$[u_1, u_2] = -\kappa u_2,\ [u_1, u_3] = -2u_2 + \kappa u_3,\ [u_2, u_3] = -2\kappa u_1 + \sqrt{2}\Phi u_2, \tag{6.3}$$

onde $\kappa \in \mathbb{R}$ e Φ é unha función satisfacendo $u_2(\Phi) = \kappa\Phi$ e $u_2(\Phi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}b$, con $b \in \mathbb{R}$, definen as variedades 1-curvatura homoxéneas con tensor de Ricci da forma

$$\rho = -2\kappa^2 u^1 \otimes u^1 + 2bu^2 \otimes u^3.$$

(B) *Variedades con operador de Ricci non diagonalizable.* Sexa $\{u_1, u_2, u_3\}$ unha referencia pseudo-ortonormal satisfacendo $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 1$. Os corchetes de Lie dados por

$$[u_1, u_2] = (\alpha - \beta)u_2,\ [u_1, u_3] = -\Psi u_2 - (\alpha + \beta)u_3,\ [u_2, u_3] = 0, \tag{6.4}$$

onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq 0$, e Ψ é unha función satisfacendo $u_1(\Psi) = 2\varepsilon - 2(\alpha+\beta)\Psi$ e $u_2(\Psi) = 0$, con $\varepsilon^2 = 1$, definen as variedades 1-curvatura homoxéneas con tensor de Ricci da forma

$$\rho = -2\beta^2 u^1 \otimes u^1 - 4\beta^2 u^2 \otimes u^3 - 2\varepsilon u^3 \otimes u^3.$$

Dadas as caracterizacións para as dúas familias estritamente 1-curvatura homoxéneas, podemos obter o seguinte resultado.

Teorema 6.1. *Sexa (M, g) unha variedade lorentziana tridimensional 1-curvatura homoxénea que non é localmente homoxénea. Entón, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún valor de $t \in \mathbb{R}$ se e só se satisfai unha das seguintes condicións:*

(1) *(M, g) é unha variedade con operador de Ricci diagonalizable descrita por* (6.3) *con $\kappa = 0$ e $b \neq 0$. Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{2}$.*

(2) *(M, g) é unha variedade con operador de Ricci non diagonalizable descrita por* (6.4). *Neste caso, g é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = \frac{\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2}{3\beta^2} \geq -\frac{5}{12}$.*

Demostración. Dado que (M, g) é unha variedade lorentziana de dimensión tres 1-curvatura homoxénea non homoxénea, pertence ou ben á clase (A) ou ben á clase (B), é dicir, ten operador de Ricci diagonalizable e pode ser descrita por (6.3) ou o seu operador de Ricci non diagonaliza e pode ser descrita por (6.4).

Supoñamos en primeiro lugar que (M, g) pertence á clase (A) e sexa $\{u_1, u_2, u_3\}$ unha referencia pseudo-ortonormal satisfacendo $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 1$ con corchetes de Lie dados por (6.3). Un cálculo directo amosa que

$$\begin{aligned} R[\rho] &= -2b\kappa^2 u^1 \otimes u^1 + 2(b^2 + b\kappa^2 + 2\kappa^4)u^2 \otimes u^3, \\ \Delta\rho &= -4\kappa(b + 2\kappa^2)\{\kappa u^1 \otimes u^1 - \kappa u^2 \otimes u^3 + 2u^3 \otimes u^3\}. \end{aligned}$$

O único obxecto da curvatura implicado na ecuación (6.2) que é distinto de cero para o par (u_3, u_3) é o laplaciano do tensor de Ricci. Así, tense que

$$\Delta\rho(u_3, u_3) = -8\kappa(b + 2\kappa^2) = 0.$$

Polo tanto, $b = -2\kappa^2$ ou $\kappa = 0$. Se $b = -2\kappa^2$, a variedade é Einstein e polo tanto localmente homoxénea. Se $\kappa = 0$, a ecuación (6.2) redúcese a

$$\tfrac{4}{3}b^2(1 + 2t)(u^1 \otimes u^1 - u^2 \otimes u^3) = 0.$$

Logo, $b = 0$ e a variedade é Einstein, ou $t = -\frac{1}{2}$, o cal se corresponde coa primeira posibilidade do teorema.

Supoñamos agora que (M, g) pertence á clase (B). Un cálculo directo amosa que

$$\begin{aligned} R[\rho] &= 2\beta^2\{2\beta^2 u^1 \otimes u^1 + 4\beta^2 u^2 \otimes u^3 + \varepsilon u^3 \otimes u^3\} \\ \Delta\rho &= -4(2\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2)\varepsilon u^3 \otimes u^3. \end{aligned}$$

Así, a ecuación (6.2) redúcese a

$$8\{\alpha^2 + \alpha\beta - (1+3t)\beta^2\}\varepsilon u^3 \otimes u^3 = 0.$$

Dado que $\varepsilon,\ \beta \neq 0$, conclúese que $t = \frac{\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2}{3\beta^2}$, o que se corresponde coa segunda posibilidade do teorema. □

Observación 6.2. As variedades obtidas no Teorema 6.1-(1) admiten unha distribución nula paralela de dimensión un, $\mathfrak{L} = \operatorname{span}\{u_2\}$, polo que son ondas de Brinkmann, mais como o operador de Ricci non é nilpotente, non son pp-waves. Ademais, estas variedades teñen curvatura escalar constante non nula, polo que son unha familia particular das métricas descritas no Lema 7.8.

Observación 6.3. O operador de Ricci das variedades obtidas no Teorema 6.1-(1) é da forma $\operatorname{Ric} = \operatorname{diag}[0, b, b]$. Dado que estas métricas son $\mathcal{F}_t$-críticas para $t = -\frac{1}{2}$, o funcional ten enerxía cero.

Por outra banda, o operador de Ricci das variedades obtidas no Teorema 6.1-(2) ten un único autovalor $\lambda = -2\beta^2$, que é unha raíz dobre do polinomio mínimo. Esta familia proporciona métricas $\mathcal{F}_t$-críticas para todo $t \geq -\frac{5}{12}$. Ademais, a enerxía do funcional é positiva se $t > -\frac{1}{3}$, negativa se $-\frac{5}{12} \leq t < -\frac{1}{3}$ e cero se $t = -\frac{1}{3}$.

Observación 6.4. Unha variedade lorentziana de dimensión tres é localmente conformemente chá se e só se o tensor de Schouten é Codazzi, é dicir, se $\nabla_X S_{YZ} = \nabla_Y S_{YZ}$, ou, equivalentemente, se o tensor de Cotton se anula. Un cálculo directo amosa que unha variedade lorentziana 1-curvatura homoxénea non homoxénea de dimensión tres é localmente conformemente chá se e só se pertence á clase (B) con $\beta = -2\alpha$, en cuxo caso a métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{5}{12}$. Facendo uso da expresión de t do Teorema 6.1-(2), temos que

> *Unha variedade lorentziana 1-curvatura homoxénea non homoxénea de dimensión tres é localmente conformemente chá se e só se é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{5}{12}$.*

Observación 6.5. Unha variedade lorentziana curvatura homoxénea estrita de dimensión tres localmente conformemente chá admite unha referencia pseudo-ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 1$, tal que

$$[u_1, u_2] = 0, \quad [u_1, u_3] = -\Phi u_1 - \Xi u_2 + \Psi u_3, \quad [u_2, u_3] = -3\Psi u_1 - \Upsilon u_2,$$

onde $\Phi, \Psi, \Xi, \Upsilon$ son funcións diferenciables satisfacendo

$$\begin{array}{ll} u_1(\Psi) = 2\Psi^2 + \frac{1}{4}(\kappa + \varepsilon), & u_2(\Psi) = 0, \\ u_1(\Xi) = u_3(\Phi) + \Phi\Upsilon - \Phi^2 - \Psi\Xi + 2\varepsilon, & u_2(\Xi) = u_3(\Psi) - 3\Phi\Psi, \\ u_1(\Upsilon) = u_2(\Xi) + \Psi\Upsilon, & u_2(\Upsilon) = \frac{1}{2}(\kappa + \varepsilon) - 5\Psi^2, \end{array}$$

onde $\varepsilon^2 = 1$ (véxase [38]). Un cálculo directo amosa que o operador de Ricci ten un único autovalor $\kappa+\varepsilon$, que é unha raíz dobre do polinomio mínimo. Así, o tensor de Ricci vén dado por

$$\rho = (\kappa+\varepsilon)\{u^1 \otimes u^1 + u^2 \otimes u^3 + u^3 \otimes u^2\} - 2\varepsilon u^3 \otimes u^3.$$

Ademais

$$\begin{aligned} R[\rho] &= (\kappa+\varepsilon)^2\{u^1 \otimes u^1 + u^2 \otimes u^3 + u^3 \otimes u^2\} - \varepsilon(\kappa+\varepsilon)u^3 \otimes u^3, \\ \Delta\rho &= -3\varepsilon(\kappa+\varepsilon)u^3 \otimes u^3, \end{aligned}$$

e polo tanto a ecuación (6.2) redúcese a $\varepsilon(\kappa+\varepsilon)(12t+5) = 0$. Entón, ou ben $\kappa+\varepsilon = 0$ e (M,g) é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura, ou ben é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{5}{12}$.

6.2. Variedades curvatura homoxéneas modeladas en espazos simétricos

Sexa (M,g) unha variedade lorentziana de dimensión tres con operador de Ricci da forma $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[\lambda,\lambda,0]$. Dado que o operador de Ricci é autoadxunto, a distribución $\ker \mathrm{Ric}$ non pode ser nula, polo que é espacial ou temporal. Seguindo o traballo [31], fixamos unha referencia ortonormal local $\{E_1,E_2,E_3\}$ de xeito que diagonalice o operador de Ricci con $\ker \mathrm{Ric} = \mathrm{span}\{E_3\}$. Sexa $\tilde\sigma$ o operador cizallamento, definido como a compoñente autoadxunta do tensor sen traza $S^0 = S - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\, S)\mathrm{Id}$ asociado a $S(X) = \nabla_X E_3$. A segunda identidade de Bianchi amosa que $\tilde\sigma(E_3) = 0$ e, polo tanto, o operador cizallamento ten forma normal de Jordan

$$\underset{\text{Tipo I.a}}{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{Tipo I.b}}{\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \text{ou} \quad \underset{\text{Tipo II}}{\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & 0 \\ 1 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

onde $\varepsilon^2 = 1$. Ademais, a norma do tensor cizallamento é positiva para o Tipo I.a, negativa para o Tipo I.b e cero para o Tipo II. As variedades lorentzianas curvatura homoxéneas semi-simétricas con operador de Ricci diagonalizable son descritas como segue.

Lema 6.6. *Sexa (M,g) unha variedade lorentziana curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable. Entón, (M,g) é localmente simétrica ou é localmente isométrica a un dos seguintes modelos:*

(1) *Operador cizallamento diagonalizable. Para unha referencia ortonormal local $\{E_1,E_2,E_3\}$ de sinatura $(++-)$ e funcións diferenciables θ e φ, os corchetes de Lie veñen dados por*

$$\begin{aligned} &[E_1,E_2] = \varepsilon\theta E_1 - \theta E_2 + 2\varphi E_3, \\ &[E_1,E_3] = \varepsilon\varphi E_1 + \varphi E_2, \quad [E_2,E_3] = -\varphi E_1 - \varepsilon\varphi E_2, \qquad (\varepsilon = \pm 1), \end{aligned}$$

con θ e φ satisfacendo as ecuacións diferenciais $E_3(\theta) = E_3(\varphi) = 0$ e

$$E_1(\theta) + \varepsilon E_2(\theta) + 2\theta^2 + \lambda = 0, \qquad E_1(\varphi) + \varepsilon E_2(\varphi) + 2\theta\varphi = 0.$$

(2) *Operador cizallamento con autovalores complexos. Para unha referencia ortonormal local* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *de sinatura* $(-++)$ *e funcións diferenciables* θ *e* φ*, os corchetes de Lie veñen dados por*

(2.i) $[E_1, E_2] = \theta E_1 - 2\varphi E_3, \quad [E_1, E_3] = 2\varphi E_2, \quad [E_2, E_3] = 0,$

onde as funcións θ*,* φ *satisfán as ecuacións diferenciais* $E_3(\theta) = E_3(\varphi) = 0$*,* $E_2(\theta) + \theta^2 + \lambda = 0$*, e* $E_2(\varphi) + \theta\varphi = 0$*.*

(2.ii) $[E_1, E_2] = -\theta E_2 - 2\varphi E_3, \quad [E_1, E_3] = 0, \quad [E_2, E_3] = 2\varphi E_1,$

onde as funcións θ*,* φ *satisfán as ecuacións diferenciais* $E_3(\theta) = E_3(\varphi) = 0$*,* $E_1(\theta) + \theta^2 - \lambda = 0$*, e* $E_1(\varphi) + \theta\varphi = 0$*.*

(3) *Operador cizallamento nilpotente en dous pasos. Para unha referencia ortonormal local* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *de sinatura* $(-++)$ *e función diferenciable* θ*, os corchetes de Lie veñen dados por*

$$[E_1, E_2] = -\theta(E_1 + E_2), \quad [E_1, E_3] = E_1 + E_2, \quad [E_2, E_3] = -E_1 - E_2,$$

con θ *satisfacendo as ecuacións diferenciais* $E_3(\theta) = 0$ *e* $E_1(\theta) + E_2(\theta) = \lambda$*.*

Demostración. Sexa (M, g) unha variedade lorentziana curvatura homoxénea con operador de Ricci diagonalizable $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[\lambda, \lambda, \alpha]$. Se o operador cizallamento é de Tipo I.a, en [31, Teorema 1] amósase que existe unha referencia ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ tal que $g(E_1, E_1) = \kappa = \pm 1$, $g(E_2, E_2) = 1$, $g(E_3, E_3) = -\kappa$, $\rho(E_1, E_1) = \kappa\lambda$, $\rho(E_2, E_2) = \lambda$ e $\rho(E_3, E_3) = -\kappa\alpha$, e existen funcións θ_1, θ_2, ω e σ satisfacendo

$$\begin{aligned}
&[E_1, E_2] = \theta_2 E_1 - \theta_1 E_2 + 2\kappa\omega E_3, \\
&[E_1, E_3] = \sigma E_1 + \omega E_2, \quad [E_2, E_3] = -\kappa\omega E_1 - \sigma E_2, \qquad \alpha = 2(\kappa\sigma^2 - \omega^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
E_3(\omega) = E_3(\sigma) = 0, & \kappa E_1(\theta_1) + E_2(\theta_2) + \kappa\theta_1^2 + \theta_2^2 + \lambda = 0, \\
E_3(\theta_1) - \sigma\theta_1 + \omega\theta_2 = 0, & E_3(\theta_2) - \kappa\omega\theta_1 + \sigma\theta_2 = 0, \\
E_1(\sigma) + E_2(\omega) + 2\theta_1\sigma = 0, & \kappa E_1(\omega) + E_2(\sigma) + 2\theta_2\sigma = 0.
\end{array}$$

Dado que, para unha variedade semi-simétrica con operador de Ricci diagonalizable, a curvatura de Ricci con multiplicidade un é cero, temos que $\alpha = 0$. Así, temos tres posibles casos: $\kappa = 1$ e $\sigma = \pm\omega$, ou $\kappa = -1$ e $\sigma = \omega = 0$. Se $\kappa = -1$ e $\sigma = \omega = 0$, a variedade é localmente simétrica. Se $\kappa = 1$ e $\sigma = \omega$, cun cálculo directo sobre as ecuacións diferenciais anteriores obtemos

$$(E_1 + E_2)(\omega) + 2\theta_1\omega = 0 \ \text{ e } \ (E_1 + E_2)(\omega) + 2\theta_2\omega = 0,$$

polo que se segue que $2\omega(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Logo, $\omega = 0$ e a variedade é localmente simétrica, ou $\theta_1 = \theta_2$, o que se corresponde co modelo (1) do enunciado con $\varepsilon = 1$. Analogamente, se $\kappa = 1$ e $\sigma = -\omega$, cun cálculo directo sobre as ecuacións diferenciais previas obtemos

$$(E_1 - E_2)(\omega) + 2\theta_1\omega = 0 \ \text{ e } \ (E_1 - E_2)(\omega) - 2\theta_2\omega = 0,$$

polo que se segue que $2\omega(\theta_1+\theta_2)=0$. Logo, $\omega=0$ e a variedade é localmente simétrica, ou $\theta_1=-\theta_2$, o que se corresponde co modelo (1) do enunciado con $\varepsilon=-1$.

Se o operador cizallamento é de Tipo I.b, entón de [31, Teorema 2] temos que existe unha referencia ortonormal $\{E_1,E_2,E_3\}$ tal que $g(E_1,E_1)=-1$, $g(E_2,E_2)=1$, $g(E_3,E_3)=1$, $\rho(E_1,E_1)=-\lambda$, $\rho(E_2,E_2)=\lambda$ e $\rho(E_3,E_3)=\alpha$, e existen unhas funcións θ_1, θ_2, ω e σ satisfacendo

$$\begin{aligned}&[E_1,E_2]=\theta_2E_1-\theta_1E_2-2\omega E_3,\\ &[E_1,E_3]=(\sigma+\omega)E_2,\quad [E_2,E_3]=-(\sigma-\omega)E_1,\qquad \alpha=2(\sigma^2-\omega^2),\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} E_3(\omega)=E_3(\sigma)=0, & E_1(\theta_1)-E_2(\theta_2)+\theta_1^2-\theta_2^2-\lambda=0,\\ E_3(\theta_1)-\theta_2(\sigma-\omega)=0, & E_3(\theta_2)+\theta_1(\sigma+\omega)=0,\\ E_2(\sigma+\omega)+2\theta_2\sigma=0, & E_1(\sigma-\omega)+2\theta_1\sigma=0.\end{array}$$

Fixando $\alpha=0$, tense que $\sigma=\pm\omega$. Se $\sigma=\omega$, temos que $E_1(\sigma-\omega)+2\theta_1\sigma=2\theta_1\omega=0$. Logo, $\omega=0$ e a variedade é localmente simétrica, ou $\theta_1=0$, o que se corresponde co modelo (2.i) do enunciado. Se $\sigma=-\omega$, temos que $E_2(\sigma+\omega)+2\theta_2\sigma=-2\theta_2\omega=0$. Logo, $\omega=0$ e a variedade é localmente simétrica, ou $\theta_2=0$, o que se corresponde co modelo (2.ii) do enunciado.

Por último, se o operador cizallamento é de Tipo II, séguese de [31, Teorema 3] que existe unha referencia ortonormal $\{E_1,E_2,E_3\}$ tal que $g(E_1,E_1)=-1$, $g(E_2,E_2)=1$, $g(E_3,E_3)=1$, $\rho(E_1,E_1)=-\lambda$, $\rho(E_2,E_2)=\lambda$ e $\rho(E_3,E_3)=\alpha$, e existen unhas funcións θ e ω satisfacendo

$$\begin{aligned}&[E_1,E_2]=-\theta E_1-\theta E_2-2\omega E_3,\\ &[E_1,E_3]=E_1+(\omega+1)E_2,\quad [E_2,E_3]=(\omega-1)E_1-E_2,\qquad \alpha=-2\omega^2,\end{aligned}$$

$$E_i(\omega)=0,\quad E_3(\theta)-\omega\theta=0,\quad E_1(\theta)+E_2(\theta)-\lambda=0.$$

Fixando $\alpha=0$, temos que $\omega=0$, o que se corresponde co modelo (3) do enunciado. □

Observación 6.7. As variedades correspondentes aos modelos dados en (1) e (2) son localmente simétricas se e só se $\varphi=0$. Por outra banda, as variedades modeladas por (3) nunca son localmente simétricas.

Lema 6.8. *Unha métrica de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable da forma* $\mathrm{Ric}=\mathrm{diag}[\lambda,\lambda,0]$ *con* $\lambda\neq 0$ *constante é* $\mathcal{F}_{-1/2}$*-crítica se e só se* $\Delta\rho=0$.

Demostración. Supoñamos que $\mathrm{Ric}=\mathrm{diag}[\lambda,\lambda,0]$ con λ constante. Entón, $\tau=2\lambda$ tamén é constante. Un cálculo directo amosa que $R[\rho]=\check{\rho}$, onde $\check{\rho}(X,Y)=g(\mathrm{Ric}^2X,Y)$, e a ecuación (6.2) redúcese a

$$\Delta\rho+\tfrac{2}{3}\lambda^2(1+2t)\mathrm{diag}[1,1,-2]g=0.$$

Polo tanto, séguese que $t=-\frac{1}{2}$ se e só se $\Delta\rho=0$. □

O seguinte resultado amosa que só as métricas con operador cizallamento nilpotente son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura fóra do ámbito localmente homoxéneo.

Lema 6.9. *Sexa (M, g) unha variedade lorentziana curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable e que non é homoxénea. Se (M, g) é crítica para algún funcional cuadrático, entón vén dada localmente por*

$$[E_1, E_2] = -\theta(E_1 + E_2), \quad [E_1, E_3] = E_1 + E_2, \quad [E_2, E_3] = -E_1 - E_2,$$

con θ satisfacendo as ecuacións diferenciais $E_3(\theta) = 0$ e $E_1(\theta) + E_2(\theta) = \lambda$, onde $\{E_1(-), E_2(+), E_3(+)\}$ é unha referencia ortonormal. Ademais, estas métricas son $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas e 1-curvatura homoxéneas.

Demostración. Analizamos as diferentes posibilidades presentadas no Lema 6.6. Pola ecuación (6.2), (M, g) é $\mathcal{F}_t$-crítica se e só se o tensor simétrico $\mathfrak{F}^t = \Delta\rho + 2(R[\rho] - \frac{1}{3}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho - \frac{1}{3}\tau g)$ se anula identicamente.

Os tensores ρ e $R[\rho]$ para as variedades no Lema 6.6-(1) veñen dados por

$$\rho(E_1, E_1) = \rho(E_2, E_2) = \lambda, \quad R[\rho](E_1, E_1) = R[\rho](E_2, E_2) = \lambda^2,$$

respectivamente, sendo o resto de compoñentes nulas. Ademais, as compoñentes do laplaciano do tensor de Ricci veñen dadas por

$$\begin{aligned} &\Delta\rho(E_1, E_1) = \Delta\rho(E_2, E_2) = \varepsilon\Delta\rho(E_1, E_2) = 4\lambda\varphi^2, && \Delta\rho(E_3, E_3) = 8\lambda\varphi^2, \\ &\Delta\rho(E_1, E_3) = -2\varepsilon\lambda(2\theta\varphi + E_1(\varphi)), && \Delta\rho(E_2, E_3) = -2\lambda E_1(\varphi). \end{aligned}$$

Polo tanto, $\mathfrak{F}^t(E_1, E_2) = 4\varepsilon\lambda\varphi^2$, entón tense necesariamente que $\varphi = 0$. Así, $\Delta\rho = 0$ e, polo Lema 6.8, estas métricas son críticas para $t = -\frac{1}{2}$. Ademais, pola Observación 6.7, temos que todas as métricas críticas neste caso son localmente simétricas, polo que podemos concluír que as métricas dadas no Lema 6.6-(1) son $\mathcal{F}_t$-críticas se e só se son localmente isométricas a un produto $N(\lambda) \times \mathbb{R}$, en cuxo caso son $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas (véxase o Lema 5.3).

O tensor de Ricci e a contracción da curvatura $R[\rho]$ das variedades dadas no Lema 6.6-(2) veñen dados polas compoñentes non nulas $\rho(E_1, E_1) = -\rho(E_2, E_2) = -\lambda$ e $R[\rho](E_1, E_1) = R[\rho](E_2, E_2) = -\lambda^2$. Ademais, o laplaciano do tensor de Ricci está determinado polos termos non nulos

$$\begin{aligned} &\Delta\rho(E_2, E_2) = -\Delta\rho(E_3, E_3) = 8\lambda\varphi^2, \\ &\Delta\rho(E_1, E_3) = -2\lambda\theta\varphi, && \Delta\rho(E_2, E_3) = 2\lambda E_1(\varphi), \end{aligned}$$

para as variedades no caso (2.i), e

$$\begin{aligned} &\Delta\rho(E_1, E_1) = \Delta\rho(E_3, E_3) = -8\lambda\varphi^2, \\ &\Delta\rho(E_1, E_3) = 2\lambda E_2(\varphi), && \Delta\rho(E_2, E_3) = -2\lambda\theta\varphi, \end{aligned}$$

no caso (2.ii). Así, para as variedades dadas no Lema 6.6-(2.i) temos que $\mathfrak{F}^t(E_1, E_1) = -\frac{2}{3}(1 + 2t)\lambda^2$ e, para as variedades dadas no Lema 6.6-(2.ii), temos que $\mathfrak{F}^t(E_2, E_2) = \frac{2}{3}(1 + 2t)\lambda^2$. Polo tanto, temos $t = -\frac{1}{2}$ en ámbolos dous casos. Novamente, polo Lema 6.8, estas métricas son críticas se e só se $\Delta\rho = 0$, satisfacéndose só se $\varphi = 0$. Pola Observación 6.7, as métricas críticas obtidas nestas dúas familias son localmente isométricas a un produto $N(\lambda) \times \mathbb{R}$ e son críticas para o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$.

Por último, sexa (M, g) unha variedade nas condicións do Lema 6.6-(3). Entón, as compoñentes non nulas do tensor de Ricci e do tensor $R[\rho]$ son $\rho(E_1, E_1) = -\rho(E_2, E_2) = -\lambda$ e $R[\rho](E_1, E_1) = -R[\rho](E_2, E_2) = -\lambda^2$. Ademais, o laplaciano do tensor de Ricci anúlase identicamente, logo, polo Lema 6.8, todas as métricas curvatura homoxéneas dadas no Lema 6.6-(3) son $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas. Ademais, as compoñentes non nulas da derivada covariante do tensor de Ricci veñen dadas por

$$(-1)^{i+j}(\nabla_{E_i}\rho)(E_j, E_3) = \lambda,$$

con $1 \leq i, j \leq 2$, o que amosa que (M, g) é 1-curvatura homoxénea. □

Este resultado proporciona unha caracterización das variedades lorentzianas curvatura homoxéneas semi-simétricas que son críticas para algún funcional cuadrático. Non obstante, este resultado pódese refinar aínda máis, estudando que estrutura é a que subxace detrás desta caracterización. O seguinte teorema, ademais do obtido no lema anterior, especifica que espazo é o resultante.

Teorema 6.10. *Sexa (M, g) unha variedade lorentziana curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable e que non é homoxénea. Se (M, g) é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura, entón é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica e é unha onda de Brinkmann 1-curvatura homoxénea.*

Ademais, existen coordenadas locais (v, u, x) tales que o tensor métrico é da forma $g = dx^2 + 2dudv + f(v, u, x)du^2$, onde a función de Brinkmann vén dada por

$$f(v, u, x) = \lambda v^2 + v(\alpha(u) + x\beta(u)) + \frac{x^2\beta(u)^2}{4\lambda} + x\delta(u) + \gamma(u)$$

para funcións diferenciables α, β, γ e δ e unha constante $\lambda \neq 0$.

Demostración. Séguese do Lema 6.9 que unha métrica crítica curvatura homoxénea semi-simétrica non homoxénea con operador de Ricci diagonalizable é necesariamente 1-curvatura homoxénea e é crítica para $t = -\frac{1}{2}$. Ademais, as compoñentes non nulas da conexión de Levi-Civita para estas métricas son

$$\begin{aligned} &\nabla_{E_1}E_1 = E_3 - E_2\theta, && \nabla_{E_1}E_2 = -E_1\theta - E_3, && \nabla_{E_1}E_3 = E_1 + E_2, \\ &\nabla_{E_2}E_1 = -E_3 + E_2\theta, && \nabla_{E_2}E_2 = E_1\theta + E_3, && \nabla_{E_2}E_3 = -E_1 - E_2. \end{aligned}$$

Polo tanto, $\ell = E_1 + E_2$ é un campo de vectores nulo recorrente, entón $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{\ell\}$ é unha distribución unidimensional nula paralela e a variedade é unha onda de Brinkmann.

Consideremos unha onda de Brinkmann en coordenadas locais (v, u, x) da forma $g = dx^2 + 2dudv + f(v, u, x)du^2$. Os autovalores do operador de Ricci son $\{\frac{1}{2}\partial_{vv}f, \frac{1}{2}\partial_{vv}f, 0\}$, polo que $\frac{1}{2}\partial_{vv}f = \lambda$. Así, $f(v, u, x) = \lambda x^2 + a(u, x)v + b(u, x)$ para unhas funcións a e b. Deste xeito obtemos

$$\begin{gathered} \operatorname{Ric}(\partial_v) = \lambda\partial_v, \quad \operatorname{Ric}(\partial_x) = \tfrac{1}{2}\partial_x a\partial_v, \\ \operatorname{Ric}(\partial_u) = -\tfrac{1}{2}\left(\partial_{xx}b + v\partial_{xx}a\right)\partial_v + \lambda\partial_u + \tfrac{1}{2}\partial_x a\partial_x. \end{gathered}$$

Destas expresións séguese que o operador de Ricci diagonaliza se $f(v,u,x) = \lambda v^2 + v(\alpha(u) + x\beta(u)) + \frac{x^2\beta(u)^2}{4\lambda} + x\delta(u) + \gamma(u)$. Con esta función, a métrica é $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{2}$. □

Observación 6.11. A enerxía $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2$ anúlase para todas as métricas do Teorema 6.10.

Observación 6.12. As métricas 1-curvatura homoxéneas xa foron estudadas na sección anterior. Así, a familia de métricas obtida no Teorema 6.10 correspóndense coa obtida no Teorema 6.1-(1), mais coa descrición dada respecto dunha referencia diferente.

Observación 6.13. Sexa (M,g) unha variedade riemanniana curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres. Entón, (M,g) é localmente simétrica ou admite unha referencia ortonormal local $\{E_1,E_2,E_3\}$ tal que [31]

$$[E_1,E_2]=\theta(\varepsilon E_1 - E_2) - 2\varphi E_3,\ [E_1,E_3]=\varphi(\varepsilon E_1 + E_2),\ [E_2,E_3]=-\varphi(E_1 + \varepsilon E_2),$$

onde θ e φ son funcións que satisfán $E_3(\theta) = E_3(\varphi) = 0$ e

$$E_1(\theta) + \varepsilon E_2(\theta) + 2\theta^2 + \lambda = 0, \quad E_1(\varphi) + \varepsilon E_2(\varphi) + 2\theta\varphi = 0.$$

Un argumento similar ao seguido no Lema 6.9 amosa que se unha destas métricas é crítica para algún funcional cuadrático, entón ou $\lambda = 0$ e a métrica é chá, ou $\varphi = 0$ e a variedade é localmente isométrica a un produto $N(c) \times \mathbb{R}$. Ademais, neste caso é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica. Polo tanto, concluímos que

> *as variedades riemannianas curvatura homoxéneas semi-simétricas de dimensión tres son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura se e só se son localmente simétricas.*

Dun xeito alternativo, en [21] amosouse que toda variedade riemanniana curvatura homoxénea semi-simétrica non Einstein admite coordenadas locais (v,u,x) tales que a métrica é homotética a

$$g = (\cosh u - h(x) \operatorname{senh} u)^2 dx^2 - (du - f(x)v dx)^2 + (dv + f(x)u dx)^2.$$

Un cálculo directo amosa que nestas coordenadas as métricas son críticas para algún funcional cuadrático se e só se $f = 0$, en cuxo caso (M,g) é localmente simétrica.

6.2.1. Solitóns de Cotton

Denotemos por $S = \rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g$ o tensor de Schouten. O tensor de Cotton, $C_{ijk} = (\nabla_i S)_{jk} - (\nabla_j S)_{ik}$, é o único invariante conforme en dimensión tres. Ademais, C anúlase se e só se a variedade é localmente conformemente chá. O tensor de tipo (0,2) asociado ao Cotton, que é libre de traza e libre de diverxencia, defínese en dimensión tres como

$$C_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} C_{nmi} \varepsilon^{nm\ell} g_{\ell i},$$

onde $\varepsilon^{123} = 1$. O fluxo de Cotton, introducido en [93], está determinado pola ecuación de evolución $\partial_t g(t) = \kappa C(t)$, onde $C(t)$ é o tensor de Cotton de tipo (0,2) de (M, g) e κ é unha constante (véxase tamén [91]). As solucións autosimilares do fluxo, isto é, as solucións que permanecen fixas mediante escalados e difeomorfismos, son os solitóns de Cotton. Así, un *solitón de Cotton gradiente* é unha tripla (M, g, ϕ), onde (M, g) é unha variedade pseudo-riemanniana e ϕ unha función diferenciable satisfacendo

$$\nabla^2\phi + C = \mu g \tag{6.5}$$

para $\mu \in \mathbb{R}$. Un solitón de Cotton dise contractivo, estable ou expansivo se $\mu > 0$, $\mu = 0$ ou $\mu < 0$, respectivamente. Nótese que, tomando trazas na Ecuación (6.5), obtense que $\mu = \frac{1}{3}\Delta\phi$.

Consideremos a métrica $g = dx^2 + 2dudv + f(v, u, x)du^2$ con

$$f(v, u, x) = \lambda v^2 + v(\alpha(u) + x\beta(u)) + \frac{x^2\beta(u)^2}{4\lambda} + x\delta(u) + \gamma(u)$$

como no Teorema 6.10. A única compoñente non nula do tensor de Cotton de tipo (0,2) é $C(\partial_u, \partial_u) = \frac{1}{4}\{\alpha(u)\beta(u) - 2\lambda\delta(u) + 2\beta'(u)\}$, a cal só se anula se a variedade é localmente simétrica, concretamente localmente isométrica a un produto $N(\lambda) \times \mathbb{R}$.

Sexa $\phi(v, u, x)$ unha función diferenciable. Consideremos o tensor de tipo (0,2) $\mathfrak{C} = \nabla^2\phi + C - \mu g$ de xeito que os solitóns de Cotton gradientes anulan dito tensor. Un cálculo directo amosa que

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}(\partial_v, \partial_v) = \partial_{vv}\phi, \qquad \mathfrak{C}(\partial_v, \partial_x) = \partial_{vx}\phi, \qquad \mathfrak{C}(\partial_x, \partial_x) = \partial_{xx}\phi - \mu,\\
&\mathfrak{C}(\partial_v, \partial_u) = \partial_{vu}\phi - \tfrac{1}{2}(2v\lambda + \alpha(u) + x\beta(u))\partial_v\phi - \mu,\\
&\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_x) = \partial_{xu}\phi - \tfrac{1}{4\lambda}(2v\lambda\beta(u) + x\beta(u)^2 + 2\lambda\delta(u))\partial_v\phi.
\end{aligned}$$

Das tres primeiras ecuacións obtense que $\phi(v, u, x) = \phi_2(u)v + \frac{\mu}{2}x^2 + \phi_1(u)x + \phi_0(u)$, e utilizando que $\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_u) = 0$, temos que $\phi_2(u) = 0$ e $\mu = 0$. Polo tanto, o tensor de Cotton gradiente é estable. Ademais, a compoñente $\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_x)$ redúcese a $\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_x) = \phi_1'(u)$. Polo tanto a función ϕ_1 é constante e a función potencial é $\phi(v, u, x) = \kappa x + \varphi(u)$. Por último, a compoñente $\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_u)$ redúcese a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_u) =& \tfrac{1}{4\lambda}\left\{(2\lambda v + x\beta(u))\left(\kappa\beta(u) + 2\lambda\varphi'(u)\right) + \lambda\alpha(u)(\beta(u) + 2\varphi'(u))\right.\\
&\left. +2\lambda\beta'(u) + 2\lambda(\kappa - \lambda)\delta(u) + 4\lambda\varphi''(u)\right\}.
\end{aligned}$$

Derivando esta expresión respecto de x, obtemos que $\varphi'(u) = -\frac{\kappa}{2\lambda}\beta(u)$. Así, a expresión redúcese a

$$\mathfrak{C}(\partial_u, \partial_u) = \frac{1}{4\lambda}(\lambda - \kappa)(\alpha(u)\beta(u) - 2\lambda\delta(u) + 2\beta'(u)),$$

obtendo $\kappa = \lambda$ (sempre que a variedade non sexa Cotton-chá e localmente simétrica). Isto amosa que para $\phi(v, u, x) = \lambda x - \frac{1}{2}\int \beta(u)du$, estas ondas de Brinkmann son solitóns de Cotton gradientes estables. Isto é,

> *Toda variedade curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable que sexa crítica para algún funcional cuadrático da curvatura é un solitón de Cotton gradiente estable.*

6.3. Variedades curvatura homoxéneas semi-simétricas cuxo operador de Ricci é nilpotente en dous pasos

Nesta sección consideraremos as variedades semi-simétricas modeladas nun espazo simétrico de Cahen-Wallach. O operador de Ricci destas variedades é nilpotente en dous pasos, polo que a curvatura escalar é cero e as métricas son críticas para o funcional $\mathcal{S}$. Se, ademais, unha métrica é crítica para algún outro funcional cuadrático, entón é crítica para todos os funcionais cuadráticos. Así, veremos que esta familia de métricas proporciona exemplos de métricas non Einstein que son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

Lema 6.14. *Unha variedade de dimensión tres con operador de Ricci nilpotente en dous pasos é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún t (e, polo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$) se e só se $\Delta\rho = 0$.*

Demostración. Dado que $\mathrm{Ric}^2 = 0$, temos que $\tau = 0$ e $\|\rho\|^2 = 0$. Así, $R[\rho] = -2\check{\rho} = 0$ e as ecuacións de Euler-Lagrange (6.2) redúcense a $\Delta\rho = 0$. □

Lema 6.15. *Sexa (M, g) unha variedade lorentziana curvatura homoxénea semi-simétrica con operador de Ricci nilpotente en dous pasos que é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura que non é homoxénea. Entón, existe unha referencia pseudo-ortonormal local $\{E_1, E_2, E_3\}$ con $g(E_1, E_1) = g(E_2, E_3) = 1$ tal que*

$$[E_1, E_2] = 0, \;\; [E_2, E_3] = (H - C)E_1 - IE_2, \;\; [E_3, E_1] = AE_1 + GE_2 + (C + H)E_3,$$

onde A, C, G, H e I son funcións diferenciables satisfacendo as ecuacións diferenciais

$$\begin{array}{ll}
E_2(A) = -C(C + 2H), & \\
E_1(C) = -2C(C + H), & E_2(C) = 0, \\
E_1(G) = E_3(A) + AI - A^2 - G(3C + H) + 2\varepsilon, & E_2(G) - E_3(C) = A(H - C) \\
E_1(H) = -H^2, & E_2(H) = 0, \\
E_1(I) = E_2(G) - I(C + H), & E_2(I) = C(2H - C),
\end{array}$$

con $\varepsilon = \pm 1$. Ademais, estas métricas son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.

Demostración. Séguese do traballo de Bueken [30] que unha variedade lorentziana curvatura homoxénea de dimensión tres con operador de Ricci nilpotente admite unha referencia pseudo-ortonormal local $\{E_1, E_2, E_3\}$ con $g(E_1, E_1) = g(E_2, E_3) = 1$ tal que

$$\begin{array}{l}
[E_1, E_2] = -2FE_1, \\
[E_1, E_3] = -AE_1 - GE_2 - (C + H)E_3, \\
[E_2, E_3] = (H - C)E_1 - IE_2 - FE_3,
\end{array} \tag{6.6}$$

con funcións diferenciables A, C, F, G, H, I satisfacendo

$$\begin{array}{ll}
E_1(C) - E_2(A) = -C^2 - AF, & E_2(F) = 3F^2, \\
E_1(H) - 2E_3(F) = -H^2 - 2F(I + A), & E_1(F) - E_2(C) = -4CF, \\
E_2(I) - E_3(F) = C(2H - C) - 2FI, & E_2(H) = 2F(H - C), \\
E_1(I) - E_2(G) = -FG - I(C + H), & \\
E_2(G) - E_3(C) = A(H - C) - 2FG, & \\
E_1(G) - E_3(A) = 2\varepsilon + A(I - A) - G(3C + H), & \varepsilon = \pm 1.
\end{array} \tag{6.7}$$

A única compoñente non nula do operador de Ricci é $\mathrm{Ric}(E_3) = -2\varepsilon E_2$. O Lema 6.14 amosa que unha métrica nestas condicións é crítica para un funcional cuadrático da curvatura $\mathcal{F}_t$ se e só se $\Delta\rho = 0$. As compoñentes non nulas do laplaciano do tensor de Ricci veñen dadas por

$$\begin{aligned}
&\Delta\rho(E_1, E_1) = -16\varepsilon F^2,\\
&\Delta\rho(E_1, E_3) = 4\varepsilon(E_2(C) + F(3H - C)),\\
&\Delta\rho(E_2, E_3) = 8\varepsilon F^2,\\
&\Delta\rho(E_3, E_3) = -4\varepsilon(E_2(A) + 2E_3(F) + C(C + 2H) - 4AF).
\end{aligned}$$

Séguese polo tanto que $\Delta\rho = 0$ se e só se $F = 0$, $E_2(C) = 0$ e $E_2(A) = -C(C + 2H)$. Aplicando isto a (6.6) e (6.7) obtemos a descrición dada no lema. □

Observación 6.16. Sexa (M, g) unha métrica descrita como no Lema 6.15. As compoñentes non nulas de $\nabla\rho$ veñen dadas por

$$(\nabla_{E_3}\rho)(E_1, E_3) = 2\varepsilon H, \quad (\nabla_{E_1}\rho)(E_3, E_3) = -4\varepsilon C, \quad (\nabla_{E_3}\rho)(E_3, E_3) = -4\varepsilon I.$$

Polo tanto, estas métricas son localmente simétricas se e só se as funcións C, H e I se anulan identicamente. Ademais, se ditas funcións son constantes, as métricas son 1-curvatura homoxéneas. Se comparamos esta familia coa dada no Teorema 6.1 vemos que non coinciden, polo que concluímos que as métricas desta familia son localmente homoxéneas.

Observación 6.17. A derivada covariante do campo de vectores nulo E_2 para unha métrica dada como no Lema 6.15 satisfai

$$\nabla_{E_1} E_2 = CE_2, \quad \nabla_{E_2} E_2 = 0, \quad \nabla_{E_3} E_2 = -HE_1 + IE_2.$$

Se a función H se anula identicamente, $\mathcal{L} = \mathrm{span}\{E_2\}$ é unha distribución undimensional nula paralela e, dado que o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos, a estrutura subxacente é a dunha pp-wave. Polo tanto, existen coordenadas locais (v, u, x) onde o tensor métrico se expresa como $g = 2dvdu + dx^2 + (\alpha(u)x^3 + \beta(u)x^2)du^2$, para funcións $\alpha(u)$, $\beta(u)$.

O Lema 6.15 caracteriza as variedades curvatura homoxéneas con operador de Ricci nilpotente que son críticas para algún funcional cuadrático da curvatura. Do mesmo xeito que no caso con operador de Ricci diagonalizable, este resultado pode ser completado estudando a estrutura subxacente destas variedades.

Teorema 6.18. *Sexa (M, g) unha variedade curvatura homoxénea semi-simétrica de dimensión tres con operador de Ricci nilpotente en dous pasos que non é homoxénea. Se (M, g) é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura $\mathcal{F}_t$, entón é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura e é un espazo-tempo de Kundt dexenerado.*

Ademais, existen coordenadas locais (v, u, x) tales que

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + vf_1(u) + f_0(u, x)\right) du^2 - 4\frac{v}{x}dudx, \tag{6.8}$$

onde $f_1(u)$ é unha función arbitraria e $f_0(u, x)$ é un polinomio de orde catro en x: $f_0(u, x) = \alpha_4(u)x^4 + \alpha_3(u)x^3 + \alpha_2(u)x^2 + \alpha_1(u)x$, con $\alpha_3(u)^2 + \alpha_4(u)^2 \neq 0$.

Demostración. Séguese das expresións da derivada covariante dadas na Observación 6.17 que $\ell = E_2$ é un campo de vectores nulo xeodésico libre de expansión (isto é, $\|\ell\|^2 = 0$, $\nabla_\ell \ell = 0$ e $\operatorname{tr} \nabla \ell = 0$, respectivamente). Polo tanto, a variedade é un espazo-tempo de Kundt.

Consideremos as coordenadas locais (v, u, x) de xeito que o tensor métrico se expresa como en (1.3). Dado que o operador de Ricci das métricas obtidas no Lema 6.15 é nilpotente en dous pasos, temos que $g(\mathrm{Ric}^2 \partial_u, \partial_v) = \frac{1}{4}(\partial_{vv} W(v, u, x))^2 = 0$, logo

$$W(v, u, x) = vW_1(u, x) + W_0(u, x).$$

Agora, a curvatura escalar é $\tau = \partial_{vv} f + 2\partial_x W_1 - \frac{3}{2} W_1^2$ e, dado que esta se anula, obtemos

$$f(v, u, x) = v^2 \left(\tfrac{3}{4} W_1(u, x)^2 - \partial_x W_1(u, x)\right) + v f_1(u, x) + f_0(u, x).$$

Así, $g(\mathrm{Ric}^2 \partial_x, \partial_x) = (\partial_x W_1 - \frac{1}{2} W_1^2)^2 = 0$, polo que

$$W_1(u, x) = -\frac{2}{x + \omega(u)},$$

para unha función diferenciable arbitraria $\omega(u)$. Neste punto, a forma da métrica é preservada mediante un cambio de coordenadas (véxase, por exemplo, [55]) dado por

$$\tilde{v} = v + F(u, x), \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{x} = x + \omega(u),$$

onde F é unha función arbitraria. Unha escolla apropiada de F fai que $W(\tilde{u}, \tilde{x}) = -2\frac{\tilde{v}}{\tilde{x}}$ no novo sistema de coordenadas. Así, o tensor métrico é da forma

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + v f_1(u, x) + f_0(u, x)\right) du^2 - 4\frac{v}{x} dudx.$$

Para esta forma da métrica, tense que $g(\mathrm{Ric}^2 \partial_u, \partial_u) = \frac{1}{4}(\partial_x f_1)^2 = 0$, polo que f_1 non depende de x. Así, $\mathrm{Ric}^2 = 0$.

Polo Lema 6.14, as métricas críticas con operador de Ricci nilpotente en dous pasos teñen tensor de Ricci harmónico. Un cálculo explícito de $\Delta\rho$ amosa que a única compoñente non nula vén dada por

$$\Delta\rho(\partial_u, \partial_u) = -\tfrac{1}{2}\partial_x^{(4)} f_0 + \tfrac{2}{x}\partial_x^{(3)} f_0 - \tfrac{6}{x^2}\partial_x^{(2)} f_0 + \tfrac{12}{x^3}\partial_x f_0 - \tfrac{12}{x^4} f_0.$$

Resolvendo a ecuación $\Delta\rho = 0$, obtense que a función f_0 vén dada por un polinomio de orde catro na coordenada x sen termo independente: $f_0(u, x) = \alpha_4(u)x^4 + \alpha_3(u)x^3 + \alpha_2(u)x^2 + \alpha_1(u)x$, con $\alpha_4(u)^2 + \alpha_3(u)^2 \neq 0$ (de seren α_3 e α_4 nulos, a métrica sería chá). $\square$

Observación 6.19. Unha métrica de Kundt dada como no Teorema 6.18 é localmente conformemente chá se e só se a única compoñente non nula do tensor de Cotton $C(\partial_v, \partial_v) = 3x\alpha_4(u)$ se anula. Isto é, se e só se $\alpha_4(u) = 0$. Ademais, un cálculo directo amosa que ditas métricas son localmente simétricas se e só se $\alpha_3(u)$ e $\alpha_4(u)$ se anulan identicamente, en cuxo caso as métricas son chás.

Observación 6.20. As métricas dadas no Teorema 6.18 son métricas de Kundt dexeneradas. Ademais, séguese de [57] que son espazos-tempo VSI (*Vanishing Scalar Invariants*, isto é, todos os invariantes escalares da métrica son nulos).

6.4. Solucións en teorías de gravitación masiva

Nesta sección estúdanse as métricas curvatura homoxéneas que son solucións para as accións de gravitación masiva. Seguindo o esquema deste capítulo, para cada acción diferenciamos o caso de Ricci diagonalizable e nilpotente en dous pasos.

6.4.1. Gravitación masiva topolóxica

Solucións TMG curvatura homoxéneas semi-simétricas con operador de Ricci diagonalizable

Sexa (M, g) unha variedade curvatura homoxénea como no Lema 6.6. Se (M, g) se corresponde coas métricas dadas no caso (1), entón un cálculo directo amosa que $\mathfrak{T}_{TMG}(E_1, E_1) = \lambda(\frac{\varphi}{\omega} + \frac{1}{3})$ e $\mathfrak{T}_{TMG}(E_1, E_2) = \varepsilon\lambda\frac{\varphi}{\omega}$, polo que só se anulan simultaneamente se $\lambda = 0$. Así, a variedade é chá.

Para o caso (2) do Lema 6.6 obtense a expresión $\mathfrak{T}_{TMG}(E_1, E_1) = -\frac{1}{3}\lambda$ para a familia (2.i) e $\mathfrak{T}_{TMG}(E_2, E_2) = \frac{1}{3}\lambda$ para a familia (2.ii). Polo tanto, as solucións obtidas son chás.

Para o caso (3), obtense $\mathfrak{T}_{TMG}(E_3, E_3) = -\frac{2}{3}\lambda$, polo que as únicas solucións son chás.

Solucións TMG curvatura homoxéneas semi-simétricas con operador de Ricci nilpotente

Seguindo un razoamento análogo ao do Lema 6.15, consideramos unha métrica curvatura homoxénea con operador de Ricci nilpotente descrita como en (6.6) e (6.7). Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{T}_{TMG}$ está determinado polos termos non nulos

$$\mathfrak{T}_{TMG}(E_1, E_3) = -\frac{4\varepsilon}{\omega}F, \qquad \mathfrak{T}_{TMG}(E_3, E_3) = \frac{2\varepsilon}{\omega}(2C + H - \omega).$$

Polo tanto, estas métricas son solucións en TMG se e só se $F = 0$ e $H = \omega - 2C$. Dado que $F = 0$ e $H = \omega - 2C$, séguese ademais que $E_2(C) = 0$ e $E_2(A) = \frac{1}{2}(6C^2 - 4\omega C + \omega^2)$. Un cálculo directo amosa que $\Delta\rho(E_3, E_3) = -2\varepsilon\omega^2 \neq 0$ e polo tanto, seguindo o Lema 6.14, ningunha solución para o TMG pode ser crítica para ningún funcional cuadrático da curvatura.

Dado que a función $F = 0$, E_2 é un campo de vectores nulo xeodésico libre de expansión (véxase a Observación 6.17), polo que a estrutura subxacente é a dun espazo-tempo de Kundt. Da proba do Teorema 6.18 séguese que a métrica pode ser dada en coordenadas locais como

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + f_1(u)v + f_0(u, x)\right) du^2 - 4\frac{v}{x}dudx.$$

Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{T}_{TMG}$ está determinado pola compoñente non nula

$$\mathfrak{T}_{TMG}(\partial_u, \partial_u) = \tfrac{1}{2\omega}\left(\partial_x^{(3)} f_0 - \frac{3 + \omega x}{x}\partial_x^{(2)} f_0 + 2\frac{3 + \omega x}{x^2}\partial_x f_0 - 2\frac{3 + \omega x}{x^3} f_0\right).$$

Resolvendo a ecuación diferencial $\mathfrak{T}_{TMG}(\partial_u, \partial_u) = 0$, podemos resumir o resultado para a gravitación masiva topolóxica como segue:

Toda solución para a gravitación masiva topolóxica curvatura homoxénea semi-simétrica que non é localmente simétrica é un espazo-tempo de Kundt que se pode escribir en coordenadas locais como

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + f_1(u)v + f_0(u,x)\right) du^2 - 4\frac{v}{x}dudx.$$

con $f_0(u,x) = \beta_3(u)xe^{x\omega} + \beta_2(u)x^2 + \beta_1(u)x$*, para funcións arbitrarias* $\beta_1(u), \beta_2(u)$*, e* $\beta_3(u) \neq 0$.

6.4.2. Nova gravitación masiva

Solucións NMG curvatura homoxéneas semi-simétricas con operador de Ricci diagonalizable

Consideremos as diferentes posibilidades dadas no Lema 6.6. Se (M,g) se corresponde co caso (1), entón $\mathfrak{T}_{NMG}(E_1,E_2) = \frac{4\varepsilon\lambda\varphi^2}{m^2}$ e calquera solución NMG é localmente simétrica (véxase a Observación 6.7).

Para as métricas dadas no caso (2.i) tense que $\mathfrak{T}_{NMG}(E_1,E_1) = \frac{\lambda(\lambda-2m^2)}{6m^2}$ e $\mathfrak{T}_{NMG}(E_2,E_2) = -\frac{\lambda(\lambda-2m^2+48\varphi^2)}{6m^2}$. Así, $\lambda = 2m^2$ e $\varphi = 0$, polo que as solucións obtidas neste caso son localmente simétricas. As métricas no caso (2.ii) compórtanse de xeito similar, obtendo $\mathfrak{T}_{NMG}(E_2,E_2) = -\frac{\lambda(\lambda-2m^2)}{6m^2}$ e $\mathfrak{T}_{NMG}(E_1,E_1) = \frac{\lambda(\lambda-2m^2+48\varphi^2)}{6m^2}$, e chegando de novo a que as solucións son localmente simétricas.

As compoñentes non nulas de $\mathfrak{T}_{NMG}$ para as métricas do caso (3) veñen dadas por

$$\mathfrak{T}_{NMG}(E_1,E_1) = -\mathfrak{T}_{NMG}(E_2,E_2) = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_{NMG}(E_3,E_3) = \frac{\lambda^2(\lambda-2m^2)}{6m^2}.$$

Polo tanto, as variedades con $\lambda = 2m^2 > 0$ son solucións para NMG modeladas en $N(\lambda)\times\mathbb{R}$. Ademais, estas variedades son ondas de Brinkmann, son 1-curvatura homoxéneas e son críticas para o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$ (véxase o Lema 6.9). Resumindo, obtemos o seguinte:

Unha solución NMG curvatura homoxénea semi-simétrica con operador de Ricci diagonalizable é localmente simétrica ou é unha onda de Brinkmann $g = dx^2 + 2dudv + f(v,u,x)du^2$*, determinada por*

$$f(v,u,x) = 2m^2v^2 + v(\alpha(u) + x\beta(u)) + \frac{1}{8m^2}x^2\beta(u)^2 + x\delta(u) + \gamma(u),$$

para funcións diferenciables $\alpha(u)$*,* $\beta(u)$*,* $\gamma(u)$*,* $\delta(u)$*.*

Solucións NMG curvatura homoxéneas semi-simétricas con operador de Ricci nilpotente

Do mesmo xeito que para a gravitación masiva topolóxica, consideramos unha métrica curvatura homoxénea con operador de Ricci nilpotente descrita como en (6.6) e (6.7). Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{T}_{NMG}$ está determinado polas compoñentes non nulas

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{T}_{NMG}(E_1,E_1) = -2\mathfrak{T}_{NMG}(E_2,E_3) = \tfrac{16\varepsilon}{m^2}F^2,\\
&\mathfrak{T}_{NMG}(E_1,E_3) = \tfrac{4\varepsilon}{m^2}\{F(C-3H) - E_2(C)\},\\
&\mathfrak{T}_{NMG}(E_3,E_3) = \tfrac{2\varepsilon}{m^2}\{2C^2 - 8AF + 4CH - m^2 + 2E_2(A) + 4E_3(F)\}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, unha métrica dada por (6.6) e (6.7) é unha solución para NMG se e só se $F = 0$, $E_2(C) = 0$ e $E_2(A) = -C^2 - 2CH + \frac{1}{2}m^2$. Obsérvese que, polo Lema 6.15, estas métricas non son críticas para ningún funcional cuadrático da curvatura $\mathcal{F}_t$.

Dado que a función $F = 0$, E_2 é un campo de vectores nulo xeodésico libre de expansión (véxase a Observación 6.17), polo que a estrutura subxacente é a dun espazo-tempo de Kundt. Así, a métrica pode ser expresada en coordenadas locais como

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + f_1(u)v + f_0(u,x)\right)du^2 - 4\frac{v}{x}dudx.$$

Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{T}_{NMG}$ está determinado pola compoñente non nula

$$\mathfrak{T}_{NMG}(\partial_u,\partial_u) = \tfrac{1}{2m^2}\left(\partial_x^{(4)}f_0 - \tfrac{4}{x}\partial_x^{(3)}f_0 + \tfrac{12-m^2x^2}{x^2}\left(\partial_x^{(2)}f_0 - \tfrac{2}{x}\partial_x f_0 + \tfrac{2}{x^2}f_0\right)\right).$$

Resolvendo a ecuación $\mathfrak{T}_{NMG}(\partial_u,\partial_u) = 0$ obtemos o seguinte:

Unha solución NMG curvatura homoxénea semi-simétrica con operador de Ricci non diagonalizable é un espazo-tempo de Kundt

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + f_1(u)v + f_0(u,x)\right)du^2 - 4\frac{v}{x}dudx$$

con $f_0(u,x) = \beta_4(u)xe^{mx} + \beta_3(u)xe^{-mx} + \beta_2(u)x^2 + \beta_1(u)x$*, para funcións arbitrarias* $\beta_1(u),\beta_2(u),\beta_3(u),\beta_4(u)$*, con* $\beta_3(u)^2 + \beta_4(u)^2 \neq 0$.

6.4.3. Gravitación masiva xeral

Se o operador de Ricci é diagonalizable, o caso é moi ríxido. Un proceso análogo ao seguido nas seccións anteriores revela que as métricas dos casos (1) e (2) do Lema 6.6 dan lugar a solucións localmente simétricas, mentres que as métricas dadas no caso (3) nunca son solucións GMG.

Se o operador de Ricci é nilpotente, entón unha métrica descrita por (6.6) e (6.7) é solución para GMG se e só se o tensor $\mathfrak{T}_{GMG}$ se anula identicamente. As compoñentes non nulas de $\mathfrak{T}_{GMG}$ para as métricas curvatura homoxéneas con operador de Ricci nilpotente veñen dadas por

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{T}_{GMG}(E_1,E_1) = -2\mathfrak{T}_{GMG}(E_2,E_3) = \tfrac{16\varepsilon}{m^2}F^2,\\
&\mathfrak{T}_{GMG}(E_1,E_3) = -\tfrac{4\varepsilon}{m^2\omega}\left\{F(m^2 + (3H-C)\omega) + E_2(C)\omega)\right\},\\
&\mathfrak{T}_{GMG}(E_3,E_3) = \tfrac{2\varepsilon}{m^2\omega}\left\{(2C+H)m^2 + (2C(C+2H) - 8AF - m^2)\omega\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left. +2E_2(A)\omega + 4E_3(F)\omega\right\}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, $\mathfrak{T}_{GMG} = 0$ se e só se $F = 0$, $E_2(C) = 0$ e $E_2(A) = \frac{1}{2}(m^2 - 2C(C+2H)) - \frac{m^2}{2\omega}(H + 2C)$. Ademais, estas métricas son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura se e só se $H + 2C = \omega$, é dicir, se e só se tamén son solucións TMG.

Dado que a función $F = 0$, E_2 é un campo de vectores nulo xeodésico libre de expansión (véxase a Observación 6.17), polo que a estrutura subxacente é a dun espazo-tempo de Kundt. Así, a métrica pode ser expresada en coordenadas locais como

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + f_1(u)v + f_0(u,x)\right) du^2 - 4\frac{v}{x}dudx.$$

Un cálculo directo amosa que $\mathfrak{T}_{GMG}$ está determinado pola compoñente non nula

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{GMG}(\partial_u, \partial_u) = \tfrac{1}{2m^2}\Big(\partial_x^{(4)} f_0 - \tfrac{4\omega - m^2 x}{\omega x}\partial_x^{(3)} f_0 \\ + \tfrac{12 - m^2 x(3+\omega x)}{x^2}\left(\partial_x^{(2)} f_0 - \tfrac{2}{x}\partial_x f_0 + \tfrac{2}{x^2} f_0\right)\Big).\end{aligned}$$

Resolvendo a ecuación $\mathfrak{T}_{NMG}(\partial_u, \partial_u) = 0$ obtemos o seguinte:

Unha solución GMG curvatura homoxénea semi-simétrica con operador de Ricci non diagonalizable é un espazo-tempo de Kundt

$$g = dx^2 + 2dudv + \left(\frac{v^2}{x^2} + f_1(u)v + f_0(u,x)\right) du^2 - 4\frac{v}{x}dudx$$

con

$$\begin{aligned}f_0(u,x) = \beta_4(u) x e^{-\frac{m}{2\omega}(m+\sqrt{m^2+4\omega^2})x} + \beta_3(u) x e^{-\frac{m}{2\omega}(m-\sqrt{m^2+4\omega^2})x} \\ + \beta_2(u)x^2 + \beta_1(u)x,\end{aligned}$$

para funcións arbitrarias $\beta_1(u)$, $\beta_2(u)$, $\beta_3(u)$ *e* $\beta_4(u)$, *con* $\beta_3(u)^2 + \beta_4(u)^2 \neq 0$.

Capítulo 7
Ondas de Brinkmann críticas

Neste capítulo traballaremos con múltiples derivadas parciais. Para simplificar os termos das expresións resultantes, farase uso dos subíndices para denotar as derivadas da función, isto é, $\varphi_s = \partial_s \varphi$.

O tensor de Ricci dunha onda de Brinkmann descrita como (1.4) vén dado polas compoñentes non nulas

$$\rho(\partial_u, \partial_y) = \tfrac{1}{2}\varphi_{uu}, \quad \rho(\partial_x, \partial_y) = \tfrac{1}{2}\varphi_{ux}, \quad \rho(\partial_y, \partial_y) = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi_{uu} - \varphi_{xx}). \tag{7.1}$$

Así, as curvaturas de Ricci son 0 e $\frac{1}{2}\varphi_{uu}$, sendo esta última de multiplicidade dous. Polo tanto, a curvatura escalar é $\tau = \varphi_{uu}$ e a norma do tensor de Ricci vén dada por $\|\rho\|^2 = \frac{1}{2}\varphi_{uu}^2$. O integrando do funcional $\mathcal{S}$ é sempre non negativo, polo que as métricas con curvatura escalar nula son $\mathcal{S}$-críticas. Por outra banda, o integrando do funcional dado pola norma L^2 do tensor de Ricci é non negativo no contexto das ondas de Brinkmann, mais isto non é un feito xeral en sinatura lorentziana. Como consecuencia, existen métricas con norma do tensor de Ricci nula que non son $\mathcal{T}$-críticas. Ademais, a enerxía do funcional $\mathcal{F}_t$ é $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = \frac{1}{2}(1+2t)\varphi_{uu}^2$, polo que o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$ ten enerxía cero para calquera onda de Brinkmann. Isto fai que o valor $t = -\frac{1}{2}$ sexa un valor distinguido que aparecerá de xeito natural coma un caso especial dos funcionais a analizar.

Neste capítulo estudaremos nunha primeira sección as métricas críticas para o funcional $\mathcal{S}$, onde se comproba que ter curvatura escalar nula, ademais de ser unha condición suficiente, tamén é unha condición necesaria para que a onda de Brinkmann sexa $\mathcal{S}$-crítica. A seguir, analizaremos o funcional $\mathcal{F}_t$, obtendo o caso xeral e tres casos particulares distinguidos, os cales serán revisados en profundidade nunha sección nova. Baseándonos nos resultados destas seccións, estudaremos as métricas críticas para certos casos especiais de ondas de Brinkmann. Finalmente, remataremos o capítulo achando as ondas de Brinkmann que son solucións para as teorías de gravitación masiva.

7.1. Ondas de Brinkmann $\mathcal{S}$-críticas

Xa se mencionou anteriormente que, dado que a enerxía do funcional sempre é non negativa, as ondas de Brinkmann con curvatura escalar nula son críticas para o funcional $\mathcal{S}$. A continuación veremos que estas son as únicas ondas de Brinkmann $\mathcal{S}$-críticas.

Teorema 7.1. *Unha métrica de Brinkmann de dimensión tres g é crítica para o funcional $\mathcal{S}$ se e só se a curvatura escalar é cero, isto é, existen coordenadas (u, x, y) tales que a métrica vén dada pola expresión* (1.4) *con* $\varphi(u, x, y) = f(x, y)u + h(x, y)$.

Demostración. Unha métrica é crítica para o funcional $\mathcal{S}$ se e só se satisfai a ecuación (1.7),

$$\nabla^2\tau - \tfrac{1}{3}\Delta\tau - \tau(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g) = 0.$$

Isto equivale a dicir que o tensor simétrico de tipo (0,2) $\mathfrak{S} = \nabla^2\tau - \frac{1}{3}\Delta\tau - \tau(\rho - \frac{1}{3}\tau g)$ se anula. Un cálculo directo utilizando as coordenadas (1.4) dá lugar ás seguintes compoñentes non nulas do tensor $\mathfrak{S}$ para as ondas de Brinkmann:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_u) = \varphi_{uuuu}, \qquad \mathfrak{S}(\partial_u, \partial_x) = \varphi_{uuux},\\
&\mathfrak{S}(\partial_x, \partial_y) = -\tfrac{1}{2}\varphi_{ux}\varphi_{uu} + \varphi_{uuxy} - \tfrac{1}{2}\varphi_x\varphi_{uuu},\\
&\mathfrak{S}(\partial_x, \partial_x) = -2\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_y) = \tfrac{1}{3}\left(\varphi_{uu}^2 + 2\varphi_{uuxx} + \varphi_u\varphi_{uuu} - 2\varphi_{uuuy} - 2\varphi\varphi_{uuuu}\right),\\
&\mathfrak{S}(\partial_y, \partial_y) = \tfrac{1}{6}\left(3\varphi_{xx}\varphi_{uu} + 3\varphi_u\varphi_{uuy} + 6\varphi_{uuyy} + 3\varphi_x\varphi_{uux} - 3\varphi_y\varphi_{uuu} - \varphi\varphi_{uu}^2\right.\\
&\qquad\qquad \left.-2\varphi\varphi_{uuxx} - \varphi\varphi_u\varphi_{uuu} - 4\varphi\varphi_{uuuy} + 2\varphi^2\varphi_{uuuu}\right).
\end{aligned}$$

Para anular simultaneamente $\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_u)$ e $\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_x)$ temos que a función φ é da forma

$$\varphi(u,x,y) = f_3(y)u^3 + f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y).$$

Facendo uso desta expresión, a compoñente $\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_y)$ redúcese a

$$\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_y) = \tfrac{1}{6}\left(-6f_3\left(f_1 + 2uf_2 + 3u^2f_3\right) - 4f_{2xx} - (2f_2 + 6uf_3)^2 + 12f_3'\right).$$

Derivando esta expresión respecto de u dúas veces obtemos

$$\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_y)_{uu} = -18{f_3}^2,$$

polo que $f_3 = 0$ e $\varphi(u,x,y) = f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Simplificando novamente, temos que

$$\mathfrak{S}(\partial_x, \partial_y) = -f_2\left(f_{1x} + 2uf_{2x}\right) + 2f_{2xy} \quad \text{e} \quad \mathfrak{S}(\partial_x, \partial_y)_u = -2f_2f_{2x},$$

polo que f_2 non depende de x. Así, $\mathfrak{S}(\partial_u, \partial_y) = -\frac{2}{3}f_2^2$ e $f_2 = 0$. Deste xeito, $\varphi(u,x,y) = f_1(x,y)u + f_0(x,y)$ e o tensor $\mathfrak{S}$ anúlase identicamente. □

7.2. Ondas de Brinkmann $\mathcal{F}_t$-críticas: caso xeral

Unha métrica é crítica para o funcional $\mathcal{F}_t$ se e só se satisfai a ecuación (1.8),

$$\Delta\rho - (1+2t)\nabla^2\tau + \tfrac{2}{3}t\Delta\tau g + 2(R[\rho] - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho - \tfrac{1}{3}\tau g) = 0,$$

ou, equivalentemente, se o tensor $\mathfrak{F}^t = \Delta\rho - (1+2t)\nabla^2\tau + \frac{2}{3}t\Delta\tau g + 2(R[\rho] - \frac{1}{3}\|\rho\|^2 g) + 2t\tau(\rho - \frac{1}{3}\tau g)$ se anula identicamente. Considerando as coordenadas de Brinkmann dadas en

(1.4), un cálculo directo amosa que o tensor $\mathfrak{F}^t$ vén determinado polas seguintes compoñentes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_u) &= -(1+2t)\varphi_{uuuu},\\
\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_x) &= -(1+2t)\varphi_{uuux}, \qquad \mathfrak{F}^t(\partial_x,\partial_x) = -2\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_y),\\
\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_y) &= \tfrac{1}{6}\left((1+2t)\varphi_{uu}^2 - 4t\varphi_{uuuy} + (3+4t)\varphi_{uuxx} + 2t\varphi_u\varphi_{uuu}\right.\\
&\quad \left.-(3+4t)\varphi\varphi_{uuuu}\right),\\
\mathfrak{F}^t(\partial_x,\partial_y) &= \tfrac{1}{2}\left(\varphi_{uxxx} - 4t\varphi_{uuxy} + (1+2t)\varphi_{ux}\varphi_{uu} + 2t\varphi_x\varphi_{uuu} - \varphi\varphi_{uuux}\right),\\
\mathfrak{F}^t(\partial_y,\partial_y) &= \tfrac{1}{6}\left((1+2t)\varphi\varphi_{uu}^2 - 3\varphi_{xxxx} - 3\varphi_{ux}^2 - 6\varphi_{uxxy} - 6t\varphi_{xx}\varphi_{uu}\right.\\
&\qquad + 2(3+2t)\varphi\varphi_{uuxx} - 3\varphi_u\varphi_{uxx} - 3(1+2t)\varphi_u\varphi_{uuy}\\
&\qquad + 2t\varphi\varphi_u\varphi_{uuu} - 6(1+2t)\varphi_{uuyy} + 3(1-2t)\varphi_x\varphi_{uux}\\
&\qquad \left.+ 3(1+2t)\varphi_y\varphi_{uuu} + 2(3+4t)\varphi\varphi_{uuuy} - (3+4t)\varphi^2\varphi_{uuuu}\right).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Así, estamos en condicións de dar os seguintes resultados.

Lema 7.2. *Se unha métrica de Brinkmann de dimensión tres é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún valor de t distinto de $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{4}$, entón a curvatura escalar é cero e (M,g) é crítica para todos os funcionais cuadráticos.*

Demostración. Asumamos que $t \notin \{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\}$ e que a métrica g vén dada por (1.4). Dado que $t \neq -\frac{1}{2}$, séguese de $\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_u)=0$ e $\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_x)=0$ que a función de Brinkmann debe ser un polinomio en u da forma $\varphi(u,x,y)=f_3(y)u^3+f_2(x,y)u^2+f_1(x,y)u+f_0(x,y)$. Simplificando as expresións en (7.2) temos que

$$\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_y)_{uu} = -12(1+3t)f_3^2.$$

Dado que $t \neq -\frac{1}{3}$, f_3 anúlase e así $\varphi(u,x,y) = f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Agora, combinando diferentes derivadas obtemos

$$2\mathfrak{F}^t(\partial_x,\partial_y)_u - 3\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_y)_x = (1+4t)f_{2xxx}.$$

Dado que asumimos que $t \neq -\frac{1}{4}$, concluímos que $f_{2xxx}=0$. Ademais, isto implica que

$$\mathfrak{F}^t(\partial_x,\partial_y)_u = -2(1+2t)f_2f_{2x}.$$

Novamente, $t \neq -\frac{1}{2}$, polo que se segue que f_2 non depende de x e $\varphi(u,x,y) = f_2(y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Con esta expresión chegamos a

$$\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_y) = \tfrac{2}{3}(1+2t)f_2^2.$$

Polo tanto, $f_2=0$ e $\varphi(u,x,y)=f_1(x,y)u+f_0(x,y)$, co que obtemos que a curvatura escalar é cero e a métrica é $\mathcal{S}$-crítica polo Teorema 7.1. Dado que a métrica é crítica para dous funcionais, é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. $\square$

Os valores distinguidos $t = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ serán analizados na seguinte sección. Para outros valores de t as métricas $\mathcal{F}_t$-críticas son críticas para todos os funcionais cuadráticos, como vimos de ver no Lema 7.2, e quedan descritos explicitamente en coordenadas a continuación.

Teorema 7.3. *Unha métrica de Brinkmann de dimensión tres dada por* (1.4) *é crítica para todos os funcionais se e só se a función de Brinkmann vén dada por* $\varphi(u,x,y) = f_1(x,y)u + f_0(x,y)$ *con*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) =& A(y)x^2 + B(y)x + C(y), \\ f_0(x,y) =& -\tfrac{1}{60}A(y)^2x^6 - \tfrac{1}{20}A(y)B(y)x^5 \\ & - \tfrac{1}{24}\left(B(y)^2 + 2A(y)C(y) + 4A'(y)\right)x^4 + D(y)x^3 + E(y)x^2 \\ & + F(y)x + G(y). \end{aligned}$$

Demostración. Dado que g é unha métrica $\mathcal{S}$-crítica, a curvatura escalar é cero e polo tanto $\varphi(u,x,y) = f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Dado que g é $\mathcal{T}$-crítica, o tensor $\mathfrak{F}^0$ dado por (7.2) anúlase. Así, as únicas compoñentes non nulas son $\mathfrak{F}^0(\partial_x, \partial_y)$ e $\mathfrak{F}^0(\partial_y, \partial_y)$. De $\mathfrak{F}^0(\partial_x, \partial_y)$ temos que

$$\mathfrak{F}^0(\partial_x, \partial_y) = -\tfrac{1}{2}f_{1xxx},$$

polo que $f_{1xxx} = 0$ e $f_1(x,y) = A(y)x^2 + B(y)x + C(y)$. Así, a compoñente non nula restante vén dada por

$$2\mathfrak{F}_0(\partial_y, \partial_y) = 6A^2x^2 + 6ABx + B^2 + 2AC + 4A' + f_{0xxxx},$$

de onde se segue que f_0 vén dada por

$$\begin{aligned} f_0(x,y) =& -\tfrac{1}{60}A(y)^2x^6 - \tfrac{1}{20}A(y)B(y)x^5 - \tfrac{1}{24}(B(y)^2 + 2A(y)C(y) + 4A'(y))x^4 \\ & + D(y)x^3 + E(y)x^2 + F(y)x + G(y), \end{aligned}$$

o que completa a proba. □

Do Teorema 7.1 séguese que as *pp*-waves son $\mathcal{S}$-críticas por teren curvatura escalar cero. Ademais, calquera *pp*-wave pode ser descrita en coordenadas locais de Brinkmann (1.4) mediante unha función que non depende de u, $\varphi(x,y)$. Unha consecuencia directa do Teorema 7.3 é que as *pp*-waves son críticas para todos os funcionais cuadráticos se e só se a función de Brinkmann é un polinomio de orde tres en x, $\varphi(x,y) = D(y)x^3 + E(y)x^2 + F(y)x + G(y)$. Mediante un argumento estándar, temos que esta función pode reducirse a $\varphi(x,y) = \kappa(y)x^3 + \alpha(y)x^2$.

Sexa $S = \rho - \frac{\tau}{4}g$ o tensor de Schouten de (M,g) e sexa o tensor de Cotton, $\mathcal{C}$, o tensor que mide canto dista o tensor de Schouten de ser Codazzi, definido como $\mathcal{C}_{ijk} = \nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik}$. Dado que a variedade é de dimensión tres, podemos definir o tensor de Cotton de tipo (0,2) como $\mathcal{C}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\mathcal{C}_{nmi}\epsilon^{nm\ell}g_{\ell j}$, onde $\epsilon^{123} = 1$ é o símbolo antisimétrico. Un cálculo directo amosa que, coas coordenadas locais (1.4), a única compoñente non nula da diverxencia do tensor de Cotton dunha métrica de Brinkmann é $\operatorname{div}\mathcal{C}(\partial_y, \partial_y) = -\frac{1}{2}\varphi_{xxxx}$. Así, temos o seguinte resultado.

Corolario 7.4. *Unha pp-wave de dimensión tres é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura* $\mathcal{F}_t$ *se e só se o tensor de Cotton é libre de diverxencia, sendo así crítica para todos os funcionais cuadráticos. Ademais, neste caso existen coordenadas de Brinkmann* (1.4) *con* $\varphi(x,y) = \kappa(y)x^3 + \alpha(y)x^2$.

7.3. Ondas de Brinkmann $\mathcal{F}_t$-críticas: casos especiais

Na proba do Lema 7.2 distinguimos entre dúas posibles situacións: ondas de Brinkmann con curvatura escalar cero ou distinta de cero. Se unha métrica con curvatura escalar cero é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún t, é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. Porén, se a métrica non ten curvatura escalar cero, só poderá ser $\mathcal{F}_t$-crítica para $t = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ ou $-\frac{1}{4}$, xa que estes valores apareceron como excepcionais na demostración do Lema 7.2. Nesta sección estudaremos por separado estes tres casos particulares.

7.3.1. Métricas $\mathcal{F}_{-1/3}$-críticas

A norma do tensor de Ricci sen traza, $\rho_0 = \rho - \frac{\tau}{3}g$ vén dada por $\|\rho_0\|^2 = \|\rho\|^2 - \frac{1}{3}\tau^2$. Polo tanto, o funcional $\mathcal{F}_{-1/3}$ é o funcional dado pola norma L^2 do tensor de Ricci sen traza en dimensión tres.

Teorema 7.5. *Sexa g unha métrica de Brinkmann* (1.4) *con curvatura escalar non nula. Se g é $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica, entón a curvatura escalar é da forma*

$$\tau = 6f_3(y)u + 2\lambda x^2 + 2f_{21}(y)x + 2f_{20}(y), \tag{7.3}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, dada unha función $\tilde{\tau}$ como en (7.3)*, existe unha métrica de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica con curvatura escalar $\tilde{\tau}$.*

Demostración. Unha métrica é crítica para o funcional $\mathcal{F}_{-1/3}$ se e só se o tensor $\mathfrak{F}^{-1/3}$ dado na ecuación (7.2) se anula. De $\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_u, \partial_u) = 0$ e $\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_u, \partial_x) = 0$ temos que $\varphi(u, x, y) = f_3(y)u^3 + f_2(x, y)u^2 + f_1(x, y)u + f_0(x, y)$.

Se $f_3(y) = 0$, entón $27\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x, \partial_x)_x + 30\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x, \partial_y)_u = 4f_2 f_{2x}$, polo que f_2 non depende de x. Así, $\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x, \partial_x) = \frac{4}{9}(f_2)^2$, polo que $f_2 = 0$, o que contradí que a curvatura escalar é distinta de cero. No que resta de proba, asumirase que $f_3(y)$ é distinta de cero.

Da ecuación (7.2) obtemos que $9\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_u, \partial_y) = -2f_2^2 + 6f_1 f_3 - 12f_3' - 5f_{2xx}$. Ao anular esta compoñente, temos que

$$f_1(x, y) = \frac{1}{6f_3(y)}(2f_2(x, y)^2 + 12f_3'(y) + 5f_{2xx}(x, y)).$$

Substituíndo esta expresión en $\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x, \partial_y)$ obtemos

$$\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x, \partial_y)_u = -\tfrac{1}{6}f_{2xxx}.$$

Polo tanto, $f_{2xxx} = 0$ e f_2 é un polinomio en x da forma $f_2(x, y) = f_{22}(y)x^2 + f_{21}(y)x + f_{20}(y)$. Simplificando en $\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_y, \partial_y)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_y, \partial_y)_u = \tfrac{1}{9f_3}\,\big(&20f_{22}^3x^4 + 40f_{21}f_{22}^2x^3 + 24f_{22}(f_{21}^2 + f_{20}f_{22})x^2 \\ &+ 4(f_{21}^3 + 6f_{20}f_{21}f_{22})x + 4f_{20}f_{21}^2 + 4f_{20}^2f_{22} + 36f_{22}^2 \\ &+21f_3f_{22}' - 18f_3^2f_{0xx}\big)\,.\end{aligned}$$

Polo tanto, séguese que

$$\begin{aligned} f_0(x,y) =& \tfrac{1}{27f_3(y)^2}\big(f_{22}(y)^3x^6 + 3f_{22}(y)^2f_{21}(y)x^5 \\ &+ 3f_{22}(y)(f_{22}(y)f_{20}(y) + f_{21}(y)^2)x^4 \\ &+ (6f_{22}(y)f_{20}(y)f_{21}(y) + f_{21}(y)^3)x^3 \\ &+ (27f_{22}(y)^2 + 3f_{22}(y)f_{20}(y)^2 + 3f_{20}(y)f_{21}(y)^2 \\ &+\tfrac{63}{4}f_3(y)f_{22}'(y))x^2\big) \\ &+ f_{01}(y)x + f_{00}(y). \end{aligned}$$

Substituíndo esta expresión, obtemos que $\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x,\partial_y)_x = -\frac{1}{3}f_{22}'$, polo que $f_{22}=\lambda$ é constante. Simplificando de novo,

$$\mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_x,\partial_y) = -\tfrac{2}{9f_3}\left((9\lambda + f_{20}^2)f_{21} - 9f_{01}f_3^2 + 6f_3f_{21}'\right),$$

e así,

$$f_{01}(y) = \tfrac{1}{9f_3(y)^2}\left(9\lambda f_{21}(y) + f_{20}(y)^2f_{21}(y) + 6f_3(y)f_{21}'(y)\right).$$

Finalmente, a última compoñente non nula de $\mathfrak{F}^{-1/3}$ redúcese a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1/3}(\partial_y,\partial_y) =& \tfrac{1}{27f_3^2}\big(-f_3f_{00}' - 2(\lambda + f_3')f_{00} + \tfrac{2}{3}f_{20}'' \\ &+ \tfrac{1}{9f_3}(f_{20}^2f_{20}' + 2f_{21}f_{21}' + 17\lambda f_{20}' + 6f_{20}'f_3') \\ &+\tfrac{1}{27f_3^2}2\lambda(15f_{20} + f_{20}^3 + 3f_{21}^2)\big). \end{aligned}$$

Polo tanto, a función φ é da forma $\varphi(u,x,y) = f_3(y)u^3 + f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$ con

$$\begin{aligned} f_3(y) \neq& 0, \\ f_2(x,y) =& \lambda x^2 + f_{21}(y)x + f_{20}(y), \\ f_1(x,y) =& \tfrac{1}{3f_3(y)}\left((\lambda x^2 + f_{21}(y)x + f_{20}(y))^2 + 5\lambda + 6f_3'(y)\right), \\ f_0(x,y) =& \tfrac{1}{27f_3(y)^2}\big(\lambda^3x^6 + 3\lambda f_{21}(y)x^5 + 3\lambda(\lambda f_{20}(y) + f_{21}(y)^2)x^4 \\ &+ (6\lambda f_{20}(y)f_{21}(y) + f_{21}(y)^3)x^3 \\ &+ (27\lambda^2 + 3\lambda f_{20}(y)^2 + 3f_{20}(y)f_{21}(y)^2)x^2 \\ &+3((9\lambda + f_{20}(y)^2)f_{21}(y) + 6f_3(y)f_{21}'(y))x\big) + f_{00}(y), \end{aligned}$$

onde f_{00} é unha solución da ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} &- f_3f_{00}' - 2(\lambda + f_3')f_{00} + \tfrac{2}{3}f_{20}'' + \tfrac{1}{9f_3}(f_{20}^2f_{20}' + 2f_{21}f_{21}' + 17\lambda f_{20}' + 6f_{20}'f_3') \\ &+ \tfrac{1}{27f_3^2}2\lambda(15f_{20} + f_{20}^3 + 3f_{21}^2) = 0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Baixo estas condicións, a curvatura escalar da métrica obtida é a dada na expresión (7.3). Obsérvese que a curvatura escalar está determinada polas funcións f_3, f_{21} e f_{20} e a constante λ. Estas poden escollerse con liberdade, polo que para unha curvatura escalar desta forma existe unha métrica de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica que realiza dita curvatura escalar. □

7.3.2. Métricas $\mathcal{F}_{-1/4}$-críticas

En dimensión tres, o tensor de curvatura está determinado polo tensor de Ricci. Do mesmo xeito, a norma do tensor de curvatura vén dada pola expresión $\|R\|^2 = 2\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = 2\left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{4}\tau^2\right)$. Polo tanto, o funcional $\mathcal{F}_{-1/4}$ é equivalente ao funcional dado pola normal L^2 do tensor de curvatura.

Teorema 7.6. *Sexa g unha métrica de Brinkmann* (1.4) *con curvatura escalar distinta de cero. Se g é $\mathcal{F}_{-1/4}$-crítica, entón a curvatura escalar satisfai*

$$\tau_u = 0 \quad e \quad 4\tau_{xx} + \tau^2 = 0. \tag{7.5}$$

Reciprocamente, para toda solución $\tilde{\tau}$ da ecuación (7.5)*, existe unha métrica de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/4}$-crítica con curvatura escalar $\tilde{\tau}$.*

Demostración. Sexa g unha métrica de Brinkmann dada en coordenadas (1.4). Consideramos o tensor $\mathfrak{F}^{-1/4}$ dado pola ecuación (7.2) e seguimos o razoamento da proba do Lema 7.2 para obter $\varphi(u,x,y) = f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Así, a curvatura escalar vén dada por $\tau = \varphi_{uu} = 2f_2(x,y)$ e non depende da coordenada u, obtendo así a primeira ecuación en (7.5). Ademais,

$$\mathfrak{F}^{-1/4}(\partial_u, \partial_y) = -\tfrac{1}{3}\left(f_2^2 + 2f_{2xx}\right) = -\tfrac{1}{3}(4\tau_{xx} + \tau^2),$$

obtendo así a segunda ecuación do enunciado. Agora, sabendo que $2f_{2xx} = -f_2^2$, as derivadas de orde superior de f_2 veñen dadas por

$$f_{2xxx} = -f_2 f_{2x}, \quad f_{2xxy} = -f_2 f_{2y}, \quad f_{2xxxx} = \tfrac{1}{2}{f_2}^3 - {f_{2x}}^2.$$

Baixo estas condicións, $\mathfrak{F}^{-1/4}(\partial_x, \partial_y) = -\frac{1}{2}\left(f_{1xxx} + f_2 f_{1x} + 2f_{2xy}\right)$, dando lugar á ecuación

$$f_{1xxx} + f_2 f_{1x} + 2f_{2xy} = 0. \tag{7.6}$$

Fixada f_2, esta ecuación proporciona a única relación que debe ser satisfeita por f_1. Asumindo que f_1 é unha solución da ecuación (7.6), podemos utilizar que

$$f_{1xxxx} = 2f_2 f_{2y} - f_{2x} f_{1x} - f_2 f_{1xx},$$

para simplificar $2\mathfrak{F}^{-1/4}(\partial_y, \partial_y)$, obtendo

$$f_{0xxxx} - f_2 f_{0xx} - 3f_{2x} f_{0x} + {f_2}^2 f_0 + 2f_{2yy} + {f_{1x}}^2 + f_1(f_{2y} + f_{1xx}) + 2f_{1xxy} = 0. \tag{7.7}$$

Fixadas f_2 e f_1, a ecuación (7.7) determina f_0.

O estudo previo amosa que a curvatura escalar dunha métrica de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/4}$-crítica satisfai a ecuación (7.5). Reciprocamente, se se satisfai dita ecuación, existen solucións f_1 e f_0 para as ecuacións (7.6) e (7.7), respectivamente, tales que a correspondente métrica de Brinkmann determinada por $\varphi(u,x,y) = f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$ é $\mathcal{F}_{-1/4}$-crítica. $\square$

Observación 7.7. As solucións da ecuación non linear $2f_{2xx} + f_2^2 = 0$ veñen dadas por $f_2(x,y) = -(-2)^{2/3}\sqrt[3]{3}\,\mathcal{P}\big((x+\alpha(y))\frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}}{2^{2/3}}; g_2, g_3\big)$, onde $\mathcal{P}(-; g_2, g_3)$ denota a función elíptica de Weierstrass con invariantes $g_2 = 0$, $g_3 = \beta(y)$, e α e β son funcións arbitrarias (véxase, por exemplo, [50, 103]).

7.3.3. Métricas $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas

Para toda onda de Brinkmann de dimensión tres satisfaise que $\|\rho\|^2 - \frac{1}{2}\tau^2 = 0$, polo que o valor $t = -\frac{1}{2}$ é claramente un valor distinguido no estudo destas variedades como métricas $\mathcal{F}_t$-críticas. Ademais, o termo de grao tres na expansión asintótica da distancia media do movemento browniano nunha variedade riemanniana está determinado pola expresión cuadrática $\mathcal{E} = -6\Delta\tau - \|R\|^2 + \|\rho\|^2$ (véxase [92]). Así, o funcional cuadrático asociado é equivalente a $\mathcal{F}_{-1/2}$ en dimensión tres.

Lema 7.8. *Se unha métrica de Brinkmann* (1.4) *é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica, entón a curvatura escalar é unha función harmónica e, ademais, a función de Brinkmann satisfai*

$$\Delta_g\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi_u^2 = C_1(y)u + C_2(y)x + C_3(y), \tag{7.8}$$

para funcións C_1, C_2, C_3. Reciprocamente, calquera métrica de Brinkmann determinada por unha función de Brinkmann que sexa solución da ecuación (7.8) *é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica.*

Demostración. Tomamos o tensor $\mathfrak{F}^{-1/2}$ dado polas expresións en (7.2). As compoñentes a priori non nulas son

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_x,\partial_x) &= -2\mathfrak{F}_{1/2}(\partial_u,\partial_y) = \tfrac{1}{3}(\varphi_{uuxx} - \varphi_u\varphi_{uuu} + 2\varphi_{uuuy} - \varphi\varphi_{uuuu})\\
&= \tfrac{1}{3}\Delta_g\tau,\\
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_x,\partial_y) &= \tfrac{1}{2}(-\varphi_{uxxx} - 2\varphi_{uuxy} + \varphi_x\varphi_{uuu} + \varphi\varphi_{uuux}),\\
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_y,\partial_y) &= \tfrac{1}{6}(3\varphi_{xxxx} + 3\varphi_{ux}^2 + 6\varphi_{uxxy} - 3\varphi_{xx}\varphi_{uu} - 6\varphi_x\varphi_{uux}\\
&\quad + \varphi_u(3\varphi_{uxx} + \varphi\varphi_{uuu}) + \varphi(-4\varphi_{uuxx} - 2\varphi_{uuuy} + \varphi\varphi_{uuuu})).
\end{aligned}$$

Usando que $\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_x,\partial_x) = \frac{1}{3}\Delta_g\tau = 0$, simplificamos $\mathfrak{F}_{-1/2}(\partial_y,\partial_y)$ para ver que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_y,\partial_y) = \tfrac{1}{2}(&\varphi_{xxxx} + \varphi_{ux}^2 + \varphi_u\varphi_{uxx} + 2\varphi_{uxxy} - \varphi_{xx}\varphi_{uu}\\
&- 2\varphi_x\varphi_{uux} - \varphi\varphi_{uuxx}),
\end{aligned}$$

e as tres expresións previas redúcense a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_u,\partial_y) &= -\tfrac{1}{6}(\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}\varphi_u^2 + 2\varphi_{uy} - \varphi\varphi_{uu})_{uu} = -\tfrac{1}{6}(\Delta_g\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi_u^2)_{uu},\\
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_x,\partial_y) &= -\tfrac{1}{2}(\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}\varphi_u^2 + 2\varphi_{uy} - \varphi\varphi_{uu})_{ux} = -\tfrac{1}{2}(\Delta_g\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi_u^2)_{ux},\\
\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_y,\partial_y) &= \tfrac{1}{2}(\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}\varphi_u^2 + 2\varphi_{uy} - \varphi\varphi_{uu})_{xx} = \tfrac{1}{2}(\Delta_g\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi_u^2)_{xx}.
\end{aligned}$$

Polo tanto, unha métrica de Brinkmann (1.4) é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica se e só se a función de Brinkmann φ satisfai a ecuación (7.8) para funcións C_1, C_2 e C_3. □

A continuación faremos uso do Teorema de Cauchy-Kovalevskaya para construír solucións locais da ecuación (7.8). Sexa (M,g) unha onda de Brinkmann de dimensión tres dada en coordenadas por (1.4), e sexa Σ o hiperplano $x = 0$ coa métrica de Brinkmann inducida $g_\Sigma = 2dudy + \tilde{\varphi}(u,y)dy^2$. Un cálculo directo amosa que a segunda forma fundamental de $\Sigma \subset M$ vén dada por $\mathbb{I} = -\frac{1}{2}\varphi_x dy \otimes dy \otimes \partial_x$, dado que ∂_u e ∂_y son tanxentes a Σ mentres que ∂_x é normal ao hiperplano. Así, (Σ, g_Σ) é totalmente xeodésico se e só se $\varphi_x = 0$.

Teorema 7.9. *Sexa (Σ, g_Σ) unha variedade de Brinkmann analítica de dimensión dous. Entón, pode ser estendida a unha onda de Brinkmann analítica $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica de dimensión tres (M, g) tal que (Σ, g_Σ) é unha subvariedade totalmente xeodésica de (M, g).*

Demostración. Consideremos unha métrica de Brinkmann de dimensión dous g_Σ dada en coordenadas locais (u, y) por $g_\Sigma = 2dudy + \tilde{\varphi}(u, y)dy^2$. Sexa g unha métrica de Brinkmann dada en coordenadas (1.4) tal que g_Σ se corresponde coa métrica inducida no plano $x = 0$.

O Lema 7.8 amosa que g é $\mathcal{F}_{-1/2}$-crítica se e só se

$$\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}\varphi_u^2 + 2\varphi_{uy} - \varphi\varphi_{uu} = C_1(y)u + C_2(y)x + C_3(y) \tag{7.9}$$

para funcións C_1, C_2 e C_3. Escollemos estas funcións para que sexan analíticas e nótese que $x = 0$ é unha superficie non característica para esta ecuación en derivadas parciais (véxase, por exemplo, [68]). Fixando $\varphi_{|x=0} = \tilde{\varphi}$ e $\varphi_{x|x=0} = 0$ como condicións iniciais e facendo uso do Teorema de Cauchy-Kovalevskaya, conclúese que existe unha solución analítica φ para a ecuación (7.9). Esta solución permite estender g_Σ a g de xeito que o plano $x = 0$ é unha subvariedade totalmente xeodésica de g utilizando as coordenadas locais en (1.4). □

Observación 7.10. O Teorema 7.9 amosa a posibilidade de xerar métricas $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas cunha clara interpretación xeométrica (véxase a Figura 7.3.1). Ademais, pódense escoller na ecuación (7.8) outras superficies non características distintas do hiperplano $x = 0$, conseguindo así novas familias de métricas críticas partindo de condicións iniciais diferentes.

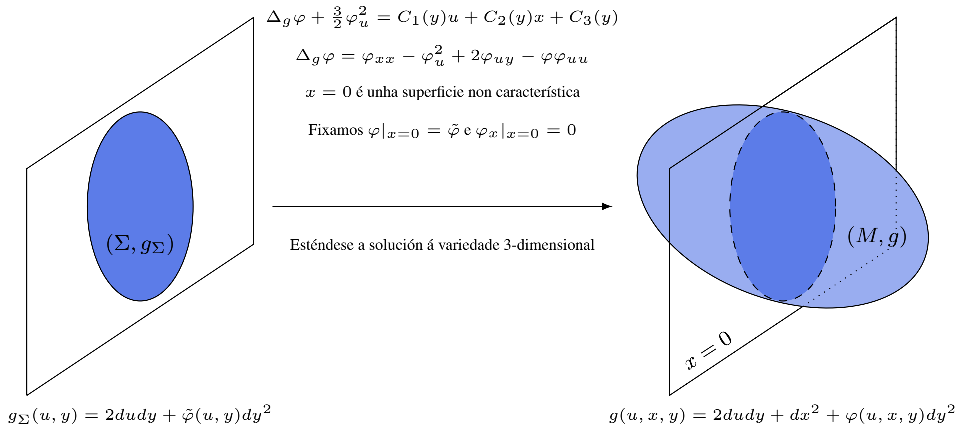


Figura 7.3.1: Interpretación xeométrica

7.4. Casos especiais de ondas de Brinkmann

Nesta sección consideraremos algunhas familias especiais de ondas de Brinkmann baseándonos en condicións xeométricas relacionadas coa homoxeneidade e coa condición de ser localmente conformemente chá. Así, determinaremos as métricas críticas con curvatura escalar constante, as localmente simétricas, as localmente conformemente chás e as localmente conformemente simétricas.

7.4.1. Métricas de Brinkmann con curvatura escalar constante

As métricas de Brinkmann con curvatura escalar cero xa foron estudadas na sección 7.2. O caso de curvatura escalar constante distinta de cero redúcese ao funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$, como se reflicte no seguinte resultado.

Teorema 7.11. *Se unha métrica de Brinkmann con curvatura escalar constante non nula é $\mathcal{F}_t$-crítica, entón $t = -\frac{1}{2}$ e, ademais, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$, existe unha métrica de Brinkmann de dimensión tres que é crítica para $\mathcal{F}_{1/2}$ con $\tau = \kappa$.*

Demostración. Se unha métrica de Brinkmann con curvatura escalar non nula é crítica para un funcional cuadrático da curvatura, entón, polo Teorema 7.1 e o Lema 7.2, a métrica non pode ser crítica para o funcional $\mathcal{S}$ nin para $\mathcal{F}_t$ con $t \notin \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\}$. O Teorema 7.5 amosa que a curvatura escalar dunha métrica de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/3}$-crítica é da forma $\tau(u,x,y) = 6f_3(y)u + 2f_2(x,y)$, con $f_3(y) \neq 0$, agás se $\tau = 0$, polo que este funcional non admite métricas de Brinkmann críticas con curvatura escalar constante non nula. Do Teorema 7.6 séguese que a curvatura escalar dunha métrica de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/4}$-crítica vén dada por $\tau(u,x,y) = 2f_2(x,y)$, sendo f_2 unha función elíptica de Weierstrass. Así, o único funcional cuadrático da curvatura que admite métricas de Brinkmann críticas con curvatura escalar constante non nula é $\mathcal{F}_{-1/2}$.

Fixamos as coordenadas de Brinkmann (1.4) e facemos uso do Lema 7.8 para identificar as métricas $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas mediante a ecuación (7.8). Se $\tau = k$, entón $\varphi_{uu} = k$ e a función de Brinkmann φ vén dada por $\varphi(u,x,y) = \frac{k}{2}u^2 + \alpha(x,y)u + \beta(x,y)$. Así, a ecuación (7.8) redúcese a

$$\alpha_{xx}u + \beta_{xx} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha_y - k\beta = C_1(y)u + C_2(y)x + C_3(y).$$

Derivando respecto de u, temos que $\alpha_{xx} = C_1(y)$, polo que

$$\alpha(x,y) = \tfrac{1}{2}C_1(y)x^2 + \xi(y)x + \eta(y).$$

A partir deste punto, coa fin de simplificar a notación, eliminarase a dependencia de y das funcións implicadas na ecuación. Agora, a ecuación (7.8) vén dada por

$$\begin{aligned} &C_1u + \tfrac{1}{8}C_1^2x^4 + \tfrac{1}{2}C_1\xi x^3 + \tfrac{1}{2}(C_1\eta + \xi^2 + 2C_1')x^2 + (\eta\xi + 2\xi')x \\ &+\tfrac{1}{2}\eta^2 + 2\eta' - k\beta + \beta_{xx} = C_1u + C_2x + C_3. \end{aligned}$$

Derivando respecto de x obtemos

$$\tfrac{1}{2}C_1^2x^3 + \tfrac{3}{2}C_1\xi x^2 + (C_1\eta + \xi^2 + 2C_1')x + (\eta\xi + 2\xi') - k\beta_x + \beta_{xxx} = C_2,$$

de xeito que β é da forma

$$\begin{aligned} \beta(x,y) = {}& \tfrac{1}{8k}C_1(y)^2x^4 + \tfrac{1}{2k}C_1(y)\xi(y)x^3 \\ &+ \tfrac{1}{2k^2}(3C_1(y)^2 + kC_1(y)\eta(y) + k\xi(y)^2 + 2kC_1'(y))x^2 \\ &+ \tfrac{1}{k^2}(-kC_2(y) + 3C_1(y)\xi(y) + k\eta(y)\xi(y) + 2k\xi'(y))x \\ &+ \Xi(x,y) + \epsilon(y), \end{aligned}$$

con

$$\Xi(x,y) = \tfrac{\sqrt{k}}{k}(\gamma(y)e^{\sqrt{k}x} - \delta(y)e^{-\sqrt{k}x}) \quad \text{se } k>0, \text{ e}$$
$$\Xi(x,y) = \tfrac{\sqrt{-k}}{k}(\gamma(y)\operatorname{sen}(\sqrt{-k}x) - \delta(y)\cos(\sqrt{-k}x)) \quad \text{se } k<0.$$

Por último, comprobamos que a ecuación (7.8) ten solucións para

$$\begin{aligned} C_3(y) = \tfrac{1}{2k^2}(&6C_1(y)^2 + 2kC_1(y)\eta(y) \\ &+ k(-2k^2\epsilon(y) + k\eta(y)^2 + 2\xi(y)^2 + 4C_1'(y) + 4k\eta'(y))). \end{aligned}$$

Así, existe unha familia de métricas de Brinkmann $\mathcal{F}_{-1/2}$-críticas con curvatura escalar $\tau = k$, con funcións arbitrarias C_1, ξ, η, γ, δ e ϵ definindo a función φ. □

Observación 7.12. Nótese que na proba do Teorema 7.11 podemos asumir que a curvatura escalar depende unicamente da coordenada y, polo que o teorema pode ser estendido do seguinte xeito:

> *Se unha métrica de Brinkmann con curvatura escalar $\tau = \kappa(y)$ é $\mathcal{F}_t$-crítica, entón $t = -\frac{1}{2}$ e, ademais, para toda función nunha variable $\kappa(y)$, existe unha métrica de Brinkmann de dimensión tres que é crítica para $\mathcal{F}_{1/2}$ con $\tau = \kappa(y)$.*

Observación 7.13. Como xeneralizacións naturais das xeometrías homoxéneas, as métricas lorentzianas con invariantes escalares da curvatura nulos (VSI) ou con invariantes escalares da curvatura constantes (CSI) foron amplamente estudados (véxase, por exemplo, [58, 124]). Seguindo o traballo [58] e a súa notación, os espazos-tempo VSI de dimensión tres divídense nas familias $\mathcal{A}.1$ e $\mathcal{B}.1$. As métricas da familia $\mathcal{A}.1$ son ondas de Brinkmann con curvatura escalar cero, polo que o seu estudo redúcese ao feito no Teorema 7.1 e no Lema 7.2. A familia $\mathcal{B}.1$ pode ser descrita en coordenadas locais (u, v, x) como

$$g = -2du\left[dv + \frac{1}{2}\left\{-\frac{v^2}{x^2} + vf_1(u,x) + f_0(u,x)\right\}du - \frac{2v}{x}dx\right] + dx^2,$$

para funcións arbitrarias f_0 e f_1. Un cálculo directo amosa que o tensor simétrico $\mathfrak{F}^t$ está determinado por completo polas compoñentes $\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_u)$ e $\mathfrak{F}^t(\partial_u,\partial_x) = -\frac{1}{2}f_{1_{xxx}} - \frac{1}{x}f_{1_{xx}}$. Así $f_1(u,x) = -\alpha(u)\log(x) + x\gamma(u) + \beta(u)$ e as métricas na familia $\mathcal{B}.1$ que son $\mathcal{F}_t$-críticas están determinadas pola seguinte ecuación en derivadas parciais linear de cuarta orde.

$$\begin{aligned} 2x^4\,\mathfrak{F}_t(\partial_u,\partial_u) = {}& x^4\left(f_{0_{xxxx}}(u,x) + \gamma(u)^2\right) + x^3\left(4f_{0_{xxx}}(u,x) - \alpha(u)\gamma(u)\right) \\ &+ x^2\left(\alpha(u)\beta(u) + 2\left(\alpha'(u) - 6f_{0_{xx}}(u,x)\right) + \alpha(u)^2(1-\log(x))\right) \\ &+ 24x\,f_{0_x}(u,x) - 24f_0(u,x)\,. \end{aligned}$$

Polo tanto, unha métrica VSI da familia $\mathcal{B}.1$ é $\mathcal{F}_t$-crítica para algún $t \in \mathbb{R}$ se e só se é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura, en cuxo caso

$$\begin{aligned} f_1(u,x) &= -\alpha(u)\log(x) + x\gamma(u) + \beta(u), \\ f_0(u,x) &= x^4\left\{A_4(u) + \tfrac{1}{36}\gamma(u)^2(6\log(x) - 11)\right\} \\ &\quad + x^3\left\{A_3(u) + \tfrac{1}{4}\alpha(u)\gamma(u)(2\log(x) - 1)\right\} \\ &\quad + x^2\left\{A_2(u) + \tfrac{1}{2}\alpha'(u)(2\log(x)+1) + \tfrac{1}{4}\alpha(u)\beta(u)(2\log(x)+1)\right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{1}{8}\alpha(u)^2\left(2\log(x) - 2\log^2(x) - 3\right)\right\} + xA_1(u). \end{aligned}$$

7.4.2. Métricas de Brinkmann localmente simétricas

Unha métrica lorentziana de dimensión tres é simétrica se é Einstein, un produto $\mathbb{R} \times N(c)$ (onde N é unha superficie de curvatura de Gauss constante), ou un espazo simétrico de Cahen-Wallach, o cal é un caso particular de onda plana, que se pode expresar en coordenadas de Brinkmann como $\varphi(u, x, y) = \kappa x^2$ (véxase [35]).

Como xa se mencionou, as variedades Einstein son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura. Porén, os produtos da forma $\mathbb{R} \times N(c)$ son críticos só para $\mathcal{F}_{-1/2}$. O seguinte resultado, consecuencia directa do Teorema 7.3 amosa os funcionais para os que son críticos os espazos de Cahen-Wallach.

Corolario 7.14. *Toda métrica lorentziana localmente simétrica de dimensión tres é crítica para o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$. Ademais, as métricas de Cahen-Wallach son críticas para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.*

7.4.3. Métricas de Brinkmann localmente conformemente chás

A condición de ser localmente conformemente chá en dimensión $n \geq 4$ está caracterizada polo tensor de Weyl nulo. Polo tanto, toda métrica localmente conformemente chá é crítica para o funcional dado pola norma L^2 do tensor de Weyl, o cal é equivalente ao funcional $\mathcal{F}_{-1/3}$ en dimensión catro como consecuencia do Teorema de Gauss-Bonnet. A situación é diferente en dimensión tres, onde a condición de ser localmente conformemente chá vén caracterizada pola anulación do tensor de Cotton nulo. Existen métricas de Brinkmann localmente conformemente chás que non son críticas para ningún funcional cuadrático da curvatura.

Teorema 7.15. *Sexa (M, g) unha onda de Brinkmann localmente conformemente chá de dimensión tres que é crítica para algún funcional cuadrático da curvatura. Entón, tense unha das seguintes posibilidades:*

1. *(M, g) é unha onda plana.*
2. *(M, g) é un produto localmente simétrico $\mathbb{R} \times N(c)$, onde $N(c)$ é unha superficie lorentziana de curvatura de Gauss constante.*

Demostración. Unha métrica de dimensión tres é localmente conformemente chá se e só se o tensor de Cotton se anula. Para ondas de Brinkmann descritas en coordenadas locais (1.4), o tensor de Cotton de tipo (0,2) está determinado por

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\partial_u, \partial_x) = -\tfrac{1}{4}\varphi_{uuu}, \qquad \mathcal{C}(\partial_u, \partial_y) = -\tfrac{1}{2}\mathcal{C}(\partial_x, \partial_x) = \tfrac{1}{4}\varphi_{uux},\\
&\mathcal{C}(\partial_x, \partial_y) = \tfrac{1}{2}\varphi_{uxx} + \tfrac{1}{4}\varphi_{uuy} - \tfrac{1}{4}\varphi\varphi_{uuu},\\
&\mathcal{C}(\partial_y, \partial_y) = -\tfrac{1}{2}\varphi_{xxx} - \tfrac{1}{4}\varphi_u\varphi_{ux} - \tfrac{1}{2}\varphi_{uxy} + \tfrac{1}{4}\varphi_x\varphi_{uu} + \tfrac{1}{2}\varphi\varphi_{uux}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

De (7.10) obtemos que φ é da forma

$$\varphi(u, x, y) = A(y)u^2 - \left(\tfrac{1}{2}x^2 A'(y) - B(y)x - C(y)\right)u + Q(x, y).$$

Séguese de (7.2) que $\mathfrak{F}^t(\partial_x, \partial_x) = \frac{4}{3}(1+2t)A(y)^2$ e, polo tanto, $A(y) = 0$ ou $t = -\frac{1}{2}$.

Se $A(y) = 0$, entón $\tau = 0$ e un cálculo directo amosa que $\varphi(u,x,y) = (Bx+C)u - \frac{1}{48}B^2x^4 - \frac{1}{12}(2B'+BC)x^3 + Dx^2 + Ex + F$ para algunhas funcións B, C, D, E e F dependentes da variable y. Así, $\mathfrak{F}^t(\partial_y, \partial_y) = \frac{B^2}{4}$, polo que $B = 0$. Deste xeito, o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos e a métrica é unha pp-wave. Agora, nas coordenadas apropiadas, temos que $\varphi(x,y) = D(y)x^2 + E(y)x + F(y)$. Polo tanto, a métrica é unha onda plana e as coordenadas pódense reducir a $\varphi(x,y) = a(y)x^2$.

Se $A(y) \neq 0$ e $t = -\frac{1}{2}$, traballamos co termo $\mathfrak{F}^{-1/2}(\partial_y, \partial_y)$ e con (7.10) para ver que $A(y)$ é constante, polo que φ se reduce a $\varphi(u,x,y) = \kappa u^2 + (B(y)x + C(y))u + \frac{1}{4\kappa}B(y)^2x^2 + \frac{1}{2\kappa}(B(y)C(y) + 2B'(y))x + D(y)$. Así, (M,g) é localmente simétrica e o campo de vectores unitario espacial $X = -\frac{1}{2\kappa}B(y)\partial_u + \partial_x$ é paralelo, de onde se segue que a métrica escinde localmente como un produto $\mathbb{R} \times N(c)$ onde N é unha superficie lorentziana de curvatura de Gauss constante. □

7.4.4. Métricas de Brinkmann conformemente simétricas

Unha variedade de dimensión tres é conformemente simétrica se o tensor de Cotton é paralelo. As variedades localmente simétricas e localmente conformemente chás son conformemente simétricas. En [43] amosouse que calquera outro caso é localmente unha métrica de Brinkmann (1.4) determinada pola función $\varphi(u,x,y) = x^3 + \alpha(y)x$. O seguinte resultado é unha consecuencia inmediata do Teorema 7.3.

Corolario 7.16. *Unha variedade conformemente simétrica de dimensión tres que non é localmente conformemente chá nin localmente simétrica é crítica para todos os funcionais cuadráticos da curvatura.*

7.5. Ondas de Brinkmann en gravitación masiva

Nesta sección utilizamos as ondas de Brinkmann para construír novas solucións en gravitación masiva. As ondas de Brinkmann con curvatura escalar nula teñen invariantes escalares da curvatura nulos e, neste caso, obtemos as solucións dadas en [124]. Non obstante, nesta seccións tratamos ademais a existencia de solucións con curvatura escalar non nula.

7.5.1. Gravitación masiva topolóxica

O seguinte resultado amosa que as únicas métricas de Brinkmann que son solucións para a gravitación masiva topolóxica teñen curvatura escalar constante e redúcense ás recollidas en [124].

Teorema 7.17. *Unha métrica de Brinkmann* (1.4) *é unha solución para o funcional de gravita-*

ción masiva topolóxica se e só se $\varphi(u,x,y)=f_1(x,y)u+f_0(x,y)$*, con*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= -\tfrac{1}{\omega}\alpha(y)e^{-\omega x}+\beta(y),\\ f_0(x,y) &= -\tfrac{1}{2\omega^3}\left\{(\omega x+2)(\alpha(y)\beta(y)-2\alpha'(y))-2\omega\gamma(y)\right\}e^{-\omega x}\\ &\quad -\tfrac{1}{8\omega^4}\alpha(y)^2e^{-2\omega x}+\xi(y)x+\eta(y), \end{aligned}$$

onde α*,* β*,* γ*,* ξ *e* η *son funcións arbitrarias.*

Demostración. Consideremos o tensor simétrico $\mathfrak{T}=\rho-\frac{1}{3}\tau g+\frac{1}{\omega}C$ para unha onda de Brinkmann (1.4). Séguese de (7.1) e (7.10) que $\mathfrak{T}(\partial_u,\partial_x)=-\frac{1}{4\omega}\varphi_{uuu}$, polo que φ é da forma

$$\varphi(u,x,y)=f_2(x,y)u^2+f_1(x,y)u+f_0(x,y).$$

Entón $\mathfrak{T}(\partial_u,\partial_y)=\frac{1}{3}f_2+\frac{1}{2\omega}f_{2x}$, polo que $f_2(x,y)=A(y)e^{-\frac{2x\omega}{3}}$. Agora, temos que $\mathfrak{T}(\partial_x,\partial_y)=\frac{1}{18\omega}\{9\,(\omega f_{1x}+f_{1xx})+e^{-\frac{2x\omega}{3}}\,(9A'(y)-4u\omega^2A(y))\}$. Dado que a última expresión se anula identicamente, conclúese que $A(y)=0$. Así, $f_2=0$ e polo tanto $\tau=0$.

Agora, séguese que $\mathfrak{T}(\partial_x,\partial_y)=\frac{1}{2}f_{1x}+\frac{1}{2\omega}f_{1xx}$, polo que a función f_1 vén dada por $f_1(x,y)=-\frac{1}{\omega}\alpha(y)e^{-\omega x}+\beta(y)$ para algunhas funcións α e β. Por último,

$$\mathfrak{T}(\partial_y,\partial_y)=\tfrac{1}{4\omega^2}\alpha(y)^2e^{-2\omega x}-\tfrac{1}{4\omega}\{\alpha(y)\beta(y)+2\alpha'(y)\}e^{-\omega x}-\tfrac{1}{2\omega}\left(f_{0xxx}+\omega f_{0xx}\right),$$

o que determina a función f_0. □

Observación 7.18. As solucións obtidas no teorema anterior son críticas para o funcional $\mathcal{S}$, xa que a curvatura escalar se anula. Ademais, son críticas para algún outro funcional cuadrático da curvatura se e só se son chás.

7.5.2. Nova gravitación masiva

A diferenza da teoría de gravitación masiva topolóxica, as ondas de Brinkmann que son solucións para a nova gravitación masiva poden ter curvatura escalar non nula.

Teorema 7.19. *Unha métrica de Brinkmann é solución para o funcional da nova gravitación masiva se e só se se verifica unha das seguintes posibilidades:*

(a) *A curvatura escalar é cero e a métrica vén dada por* (1.4) *determinada por* $\varphi(u,x,y)=f_1(x,y)u+f_0(x,y)$ *con*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \tfrac{1}{m}A(y)e^{mx}-\tfrac{1}{m}B(y)e^{-mx}+C(y),\\ f_0(x,y) &= -\tfrac{1}{6m^4}A(y)^2e^{2mx}-\tfrac{1}{6m^4}B(y)^2e^{-2mx}-\tfrac{1}{4m^3}H_1(x,y)e^{mx}\\ &\quad -\tfrac{1}{4m^3}H_2(x,y)e^{-mx}+\xi(y)x+\eta(y), \end{aligned}$$

onde as funcións H_1 *e* H_2 *veñen dadas por*

$$\begin{aligned} H_1(x,y) &= 2m(A(y)C(y)+2A'(y))x\\ &\quad -(5A(y)C(y)+4m\alpha(y)+10A'(y)),\\ H_2(x,y) &= 2m(B(y)C(y)+2B'(y))x\\ &\quad +(5B(y)C(y)-4m\beta(y)+10B'(y)). \end{aligned}$$

(b) *A curvatura escalar é constante* $\tau = 4m^2$ *e a métrica vén dada por* (1.4) *determinada pola función* $\varphi(u,x,y) = 2m^2u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$ *con*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= A(y)x^2 + B(y)x + C(y), \\ f_0(x,y) &= \tfrac{1}{8m^2}A(y)^2x^4 + \tfrac{1}{4m^2}A(y)B(y)x^3 \\ &\quad + \tfrac{1}{8m^4}\left\{m^2B(y)^2 + 2m^2A(y)C(y) + 3A(y)^2 + 4m^2A'(y)\right\}x^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{4m^2}\left\{\alpha(y)e^{2mx} + \beta(y)e^{-2mx}\right\} + \xi(y)x + \eta(y). \end{aligned}$$

Demostración. As compoñentes $\mathfrak{N}(\partial_u,\partial_u)$ e $\mathfrak{N}(\partial_u,\partial_x)$ veñen dadas por

$$\mathfrak{N}(\partial_u,\partial_u) = \tfrac{\varphi_{uuuu}}{4m^2} \quad \text{e} \quad \mathfrak{N}(\partial_u,\partial_x) = \tfrac{\varphi_{uuux}}{4m^2},$$

polo que se anulan simultaneamente se e só se $\varphi(u,x,y) = f_3(y)u^3 + f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Así, a compoñente $\mathfrak{N}(\partial_u,\partial_y)$ redúcese a

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\partial_u,\partial_y) = \tfrac{1}{12m^2}\big\{&9f_3^2u^2 + 6(2m^2+f_2)f_3u + 4m^2f_2 - 2{f_2}^2 + 9f_1f_3 \\ &-18f_3' - 6f_{2xx}\big\}. \end{aligned}$$

Derivando dúas veces respecto de u, obtemos $\mathfrak{N}(\partial_u,\partial_y)_{uu} = \frac{3}{2m^2}{f_3}^2$. Así $f_3 = 0$ e $\varphi(u,x,y) = f_2(x,y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$. Deste xeito podemos calcular a expresión

$$2\mathfrak{N}(\partial_u,\partial_y)_x - \mathfrak{N}(\partial_x,\partial_y)_u = -\tfrac{1}{6m^2}(f_2+2m^2)f_{2x},$$

polo que f_2 non depende de x. Chegados a este punto, temos que $\varphi(u,x,y) = f_2(y)u^2 + f_1(x,y)u + f_0(x,y)$ e $\mathfrak{N}(\partial_x,\partial_x) = \frac{1}{3m^2}(f_2 - 2m^2)f_2$. Isto amosa que $f_2 = 0$ ou $f_2 = 2m^2$, que se corresponden coas posibilidades (a) e (b) do teorema, respectivamente.

Se $f_2 = 0$, temos que $\mathfrak{N}(\partial_x,\partial_y) = \frac{1}{2}f_{1x} - \frac{1}{2m^2}f_{1xxx}$ e a función f_1 é da forma

$$f_1(x,y) = \tfrac{1}{m}A(y)e^{mx} - \tfrac{1}{m}B(y)e^{-mx} + C(y).$$

O último termo non nulo $\mathfrak{N}(\partial_y,\partial_y)$ redúcese a

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\partial_y,\partial_y) = \tfrac{1}{2m^2}\big\{&2A^2e^{2mx} + 2B^2e^{-2mx} + m(AC+2A')e^{mx} \\ &-m(BC+2B')e^{-mx} - m^2f_{0xx} + f_{0xxxx}\big\}, \end{aligned}$$

de onde se segue a posibilidade (a) do teorema.

Se $f_2 = 2m^2$, entón $\mathfrak{N}(\partial_x,\partial_y) = -\frac{1}{2m^2}f_{1xxx}$ e, así, $f_1(x,y) = A(y)x^2 + B(y)x + C(y)$. Usando esta expresión, o último termo $\mathfrak{N}(\partial_y,\partial_y)$ redúcese a

$$\mathfrak{N}(\partial_y,\partial_y) = \frac{1}{2m^2}\left\{6A^2x^2 + 6ABx + B^2 + 2AC + 4A' - 4m^2f_{0xx} + f_{0xxxx}\right\},$$

de onde se segue a posibilidade (b) do teorema. □

Observación 7.20. As métricas da familia (a) son críticas para o funcional $\mathcal{S}$ e correspóndense coas dadas en [124], mentres que as métricas da familia (b) son críticas para o funcional $\mathcal{F}_{-1/2}$.

Bibliografía

[1] D. Alekseevskii, B. N. Kimelfeld, Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature, *Funkcional. Anal. i PriloŽen* **9** (1975), 5–11.

[2] S. Allout, A. Belkacem, Zeghib, On homogeneous 3-dimensional spacetimes: focus on plane waves, arXiv:2210.11439.

[3] W. Ambrose, I. M. Singer, On homogeneous Riemannian manifolds, *Duke Math. J.* **25** (1958), 647–669.

[4] M. T. Anderson, Extrema of curvature functionals on the space of metrics on 3-manifolds, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **5** (1997), 199–269.

[5] M. T. Anderson, Extrema of curvature functionals on the space of metrics on 3-manifolds, II, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **12** (2001), 1–58.

[6] R. Arroyo, R. Lafuente, Homogeneous Ricci solitons in low dimensions, *Int. Math. Res. Not.* (2015), 4901–4932.

[7] R. Bach, Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs, *Math. Z.* **9** (1921) 110–135.

[8] I. Bakas, Ch. Sourdis, Homogeneous vacua of (generalized) new massive gravity, *Class. Quantum Grav.* **28** (1) (2011), 015012, 20 pp.

[9] W. Batat, K. Onda, Algebraic Ricci solitons of three-dimensional Lorentzian Lie groups. *J. Geom. Phys.* **114** (2017), 138–152.

[10] L. Bérard-Bergery: *Les spaces homogènes Riemanniens de dimension* 4, Riemannian geometry in dimension 4 (Paris 1978/1979) **3**, 40–60, 1981.

[11] M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), no. 4, 285–294.

[12] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **194**, Springer-Verlag, Berlin-New York 1971.

[13] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P. K. Townsend, Massive gravity in three dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **102** (20) (2009), 201301, 4 pp.

[14] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P. K. Townsend, More on massive 3D gravity, *Phys. Rev. D* **79** (2009), 124042.

[15] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[16] C. P. Boyer, K. Galicki, S. R. Simanca, Canonical Sasakian metrics, *Comm. Math. Phys.* **279** (2008), 705–733.

[17] C. P. Boyer, K. Galicki, S. R. Simanca, The Sasaki cone and extremal Sasakian metrics, Riemannian topology and geometric structures on manifolds, 263–290, *Progr. Math.*, **2**71, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009.

[18] T. Branson, Differential operators canonically associated to a conformal structure, *Math. Scand.* **57** (1985), 293–345.

[19] T. P. Branson, B. Ørsted, Explicit functional determinants in four dimensions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), 669–682.

[20] H. W. Brinkmann, Einstein spaces which are mapped conformally on each other, *Math. Ann.* **94** (1925), 119–145.

[21] T. G. Brooks, 3-manifolds with constant Ricci eigenvalues $(\lambda, \lambda, 0)$. arXiv:2111.15499v1

[22] M. Brozos-Vázquez, S. Caeiro-Oliveira, E. García-Río, Critical metrics and massive gravity solutions on three-dimensional Brinkmann waves, *Class. Quantum Grav.* **39** (2022), 015007, 20pp.

[23] M. Brozos-Vázquez, S. Caeiro-Oliveira, E. García-Río, Homogeneous and curvature homogeneous Lorentzian critical metrics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect A*, 1-25. doi:10.1017/prm.2022.44.

[24] M. Brozos-Vázquez, S. Caeiro-Oliveira, E. García-Río, Curvature homogeneous critical metrics in dimension three *J. Math. Anal. Appl.* **514** (2022), 126354, 16 pp.

[25] M. Brozos-Vázquez, S. Caeiro-Oliveira, E. García-Río, Critical metrics for all quadratic curvature functionals *Bull. Lond. Math. Soc.* **53** (2021), 680–685.

[26] M. Brozos-Vázquez, S. Caeiro-Oliveira, E. García-Río, Three-dimensional homogeneous critical metrics for quadratic curvature functionals, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 200, No. 1,(2021), 363–378.

[27] M. Brozos-Vázquez, G. Calvaruso, E. García-Río, S. Gavino-Fernández, Three-dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons. *Israel J. Math.* **188** (2012), 385–403

[28] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, S. Gavino-Fernández, P. Gilkey, The structure of the Ricci tensor on locally homogeneous Lorentzian gradient Ricci solitons. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **148** (2018), 461–482.

[29] M. Brozos Vázquez, P. Gilkey, S. Nikcevic, *Geometric realizations of curvature*. ICP Advanced Texts in Mathematics, **6**. Imperial College Press, London, 2012.

[30] P. Bueken, On curvature homogeneous three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.* **22** (1997), 349–362.

[31] P. Bueken, Three-dimensional Lorentzian manifolds with constant principal Ricci curvatures $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 1000–1013.

[32] P. Bueken, Three-dimensional Riemannian manifolds with constant principal Ricci curvatures $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 4062 .

[33] P. Bueken, M. Djorić, Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one, *Ann. Global Anal. Geom.* **18** (2000), 85–103.

[34] S. Caeiro-Oliveira, *Caracterización de espacios homogéneos tridimensionales en términos de su curvatura de Ricci*, Universidade de Santiago de Compostela. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico, Santiago de Compostela, 2019.

[35] M. Cahen, J. Leroy, M. Parker, F. Tricerri, L. Vanhecke, Lorentz manifolds modelled on a Lorentz symmetric space, *J. Geom. Phys.* **7** (1990), 571–581.

[36] E. Calabi, Extremal Kähler metrics, Seminar on Differential Geometry, *Ann. of Math. Stud.*, vol. **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, pp. 259–290.

[37] S. Calamai, D. Petrecca, On Calabi extremal Kähler-Ricci solitons, *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 813–821.

[38] G. Calvaruso, Curvature homogeneous Lorentzian three-manifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **36** (2009), 1–17.

[39] G. Calvaruso, Einstein-like curvature homogeneous Lorentzian three-manifolds. *Result. Math.* **55** (2009), 295-310.

[40] G. Calvaruso, Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1279–1291.

[41] E. Calviño-Louzao, X. García-Martínez, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, R. Vázquez-Lorenzo: Conformally Einstein and Bach-flat four-dimensional homogeneous manifolds, *J. Math. Pures Appl. (9)* **130** (2019), 347–374.

[42] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional homogeneous Kähler Ricci solitons, *Contemp. Math.* **775** (2021), 31–39.

[43] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, J. Seoane-Bascoy, R. Vázquez-Lorenzo, Three-dimensional conformally symmetric manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **193** (2014), 1661–1670.

[44] A.M. Candela, M. Sánchez, Geodesics in semi-Riemannian manifolds: geometric properties and variational tools, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, 359–418.

[45] G. Catino, Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **54** (2015), no. 3, 2921–2937.

[46] G. Catino, P. Mastrolia, *A perspective on canonical Riemannian metrics*, Progress in Math. **336**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.

[47] G. Catino, P. Mastrolia, D. D. Monticelli, A variational characterization of flat spaces in dimension three, *Pacific J. Math.* **282** (2016), 285–292.

[48] G. Catino, P. Mastrolia, D. D. Monticelli, M. Rigoli, Analytic and geometric properties of generic Ricci solitons. *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 7533–7549.

[49] B.-Y. Chen, *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*, World Scientific, 2017.

[50] Y. Chen, Z. Yan, The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29** (2006), no. 4, 948–964.

[51] S.-S. Chern, Chern, On the Curvatura Integra in a Riemannian Manifold, *Ann. of Math.* **46** (1945), 674–684.

[52] M. Chernicoff, G. Giribet, N. Grandi, E. Lavia, J. Oliva, Q curvature and gravity, *Phys. Rev. D* **98** (2018), no. 10, 104023, 9 pp.

[53] B. Chow, S. C. Chu, D. Glickenstein, Ch. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects*. Mathematical Surveys and Monographs, **135**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[54] D. D. K. Chow, C. N. Pope, E. Sezgin, Classification of solutions in topologically massive gravity, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010), 105001 (26pp)

[55] D. D. K. Chow, C. N. Pope, E. Sezgin, Kundt spacetimes as solutions of topologically massive gravity, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010), 105002, 19 pp.

[56] A. Coley, S. Hervik, G. Papadopoulos, N. Pelavas, Kundt spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009), no. 10, 105016, 34 pp.

[57] A. Coley, S. Hervik, N. Pelavas, Lorentzian spacetimes with constant curvature invariants in three dimensions, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008), 025008 (14pp)

[58] A. Coley, S. Hervik, N. Pelavas, On spacetimes with constant scalar invariants, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006), 3053–3074.

[59] L. A. Cordero, Ph. Parker, Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups, *Rend. Mat. Serie VII* **17** (1997), 129–155.

[60] D. Cox, D. Little, D. O'Shea: Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2015.

[61] B. Daniel, Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), 87–131.

[62] V. de Smedt, S. Salamon, Anti-self-dual metrics on Lie groups, *Contemp. Math.*, **308** (2002), 63–75.

[63] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann: SINGULAR 4-1-0 – A computer algebra system for polynomial computations, `http://www.singular.uni-kl.de`, 2016.

[64] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Topologically massive gauge theories, *Ann. Physics* **140** (1982), 372–411.

[65] L. di Cerbo, Generic properties of homogeneous Ricci solitons. *Adv. Geom.* **14** (2014), 225–237

[66] J. Ehlers W. Kundt, Exact solutions of the gravitational field equations, *Gravitation: an introduction to current research*, 49–101, Wiley, New York, 1962.

[67] Y. Euh, J. Park, K. Sekigawa, Critical metrics for quadratic functionals in the curvature on 4-dimensional manifolds, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 642–646.

[68] L. C. Evans, Partial differential equations, *Graduate Studies in Mathematics*, **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[69] M. E. Fels, A. G. Renner, Non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian manifolds of dimension four, *Canad. J. Math.* **58** (2006), 282–311.

[70] M. Ferreiro-Subrido, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo, Ricci solitons on four-dimensional Lorentzian Lie groups. *Anal. Math. Phys.* **12** (2022), no. 2, Paper No. 61, 35 pp.

[71] P. M. Gadea, J. C. González-Dávila, J. A. Oubiña, Cyclic metric Lie groups, *Monatsh. Math.* **176** (2015), 219–239.

[72] S. Gallot, Équations différentielles caractéristiques de la sphère, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **12** (1979), 235–267.

[73] E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, Homogeneity of Lorentzian three-manifolds with recurrent curvature, *Math. Nachr.* **287** (2014), 32–47.

[74] E. García-Río, A. Haji-Badali, R. Mariño-Villar M. E. Vázquez Abal, Four-dimensional homogeneous manifolds satisfying some Einstein-like conditions, *Kodai Math. J.* **43** (2020), 465–488.

[75] M. Guediri, On completeness of left-invariant Lorentz metrics on solvable Lie groups, *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **9** (1996), 337–350

[76] P. B. Gilkey, *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, volume 2 of *Advanced Texts in Mathematics*. Imperial College Press, London 2007.

[77] J.N. Gomes, Q. Wang, Ch. Xia, On the h-almost Ricci soliton, *J. Geom. Phys.* **114** (2017), 216–222.

[78] A. Gray, The volume of a small geodesic ball of a Riemannian manifold, *Michigan Math. J.* **20** (1973), 329–344.

[79] A. Gray, *Tubes*, 2Ed, Progress in Mathematics, **221**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

[80] M. J. Gursky, J. A. Viaclovsky, A new variational characterization of three-dimensional space forms, *Invent. Math.* **145** (2001), 251–278.

[81] S.Haesen, L. Verstraelen, Natural intrinsic geometrical symmetries, *Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **5** (2009), Paper 086, 15 pp.

[82] G. Hall, T. Morgan, Z. Perjes, Three-dimensional space-times, *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987), 1137–1147.

[83] T. Hashinaga H. Tamaru, Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, *Internat. J. Math.* **28** (2017), no. 6, 1750048, 31 pp.

[84] K. Honda K. Tsukada, Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), 831–851.

[85] Z. Hu, H. Li, A new variational characterization of n-dimensional space forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2003), 3005–3023.

[86] Z. Hu, S. Nishikawa, U. Simon, Critical metrics of the Schouten functional, *J. Geom.* **98** (2010), 91–113.

[87] M. Jablonski, Homogeneous Ricci solitons, *J. Reine Angew. Math.* **699** (2015), 159–182.

[88] M. Jablonski, Homogeneous Ricci solitons are algebraic, *Geometry & Topology* **18** (2014), 2477–2486.

[89] G. R. Jensen, Homogeneous Einstein spaces of dimension four, *J. Differential Geometry* **3** (1969), 309–349.

[90] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 6Ed. Universitext. Springer, Heidelberg, 2011.

[91] E. Kilicarslan, S. Dengiz, B. Tekin, More on Cotton flow, *J. High Energy Phys.* (2015), no. 6, 136, 24 pp.

[92] Y.-T. Kim, H.-S. Park, Mean distance of Brownian motion on a Riemannian manifold, *Stochastic Process. Appl.* **102** (2002), 117–138.

[93] A. U. O. Kisisel, O. Sarioglu, B. Tekin, Cotton flow, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008), 165019.

[94] O. Kowalski, Counterexample to the "second Singer's theorem", *Ann. Global Anal. Geom.* **8** (1990), 211–214

[95] B. Komrakov Jr., Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces, *Lobachevskii J. Math.* **8** (2001), 33–165.

[96] W. Kühnel, *Differential geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Third ed., AMS, 2015.

[97] R. S. Kulkarni, Curvature and metric, *Ann. of Math. (2)* **91** (1970), 311–331.

[98] F. Lamontagne, A critical metric for the L^2-norm of the curvature tensor on $\mathbb{S}^3$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126** (1998), 589–593.

[99] J. Lauret, Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), 715–733.

[100] J. Lauret, Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.* **650** (2011), 1–21.

[101] J. Lauret, C. Will, The Ricci pinching functional on solvmanifolds, *Quart. J. Math.* **70** (2019), 1281–1304.

[102] J. Lauret, C. Will, The Ricci pinching functional on solvmanifolds II, *Proc. Amer. Math. Soc.* **148** (2020), 2601–2607.

[103] D. F. Lawden, Elliptic Functions and Applications, *Applied Mathematical Sciences* **80**, Springer-Verlag, New York, 1989.

[104] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd Ed., Graduate Texts in Math., **176**, Springer, Cham, 2018.

[105] J. M. Lee, Th. H. Parker, The Yamabe problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **17** (1987), 37–91

[106] Th. Leistner, Semi-Riemannian cones, *Geometry, Lie theory and applications—the Abel Symposium 2019*, 193–222, Abel Symp., **16**, Springer, Cham, 2022.

[107] H. Lü, C. N. Pope, Critical Gravity in Four Dimensions, *Phys. Rev. Letters* **106** (2011), 181302.

[108] Ph. D. Mannheim, Making the case for conformal gravity, *Found. Phys.* **42** (2012), 388–420.

[109] W. Meeks, J. Pérez, Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups, *Geometric analysis: partial differential equations and surfaces*, 25–110, Contemp. Math., **570**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[110] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.

[111] A. Naber, Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. *J. Reine Angew. Math.* **645** (2010), 125–153.

[112] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, **103**, Academic Press, New York, 1983.

[113] T. Ortín, *Gravity and strings*, 2Ed, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[114] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. 2002. arXiv:math/0211159 [math.DG]

[115] A. Peres, Some gravitational waves, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959), 571.

[116] P. Petersen, W. Wylie, On gradient Ricci solitons with symmetry, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2085–2092.

[117] J. Podolský, M. Žofka, General Kundt spacetimes in higher dimensions, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009), 105008, 18 pp.

[118] R. Ponge, H. Reckziegel, Twisted products in pseudo-Riemannian geometry, *Geom. Dedicata* **48** (1993), 15–25.

[119] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, *J. Geom. Phys.* **9** (1992), no. 3, 295–302.

[120] I. Robinson, A. Trautman, Some spherical gravitational waves in general relativity, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **265** (1961/62), 463–473.

[121] K. Sekigawa, A note on deformations of Riemannian metrics on 3-dimensional manifolds, *Tensor (N.S.)* **31** (1977), 103–106.

[122] K. Sekigawa, On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces, *Tensor (N.S.)* **31** (1977), 87–97.

[123] M. R. Setare, On the generalized minimal massive gravity, *Nuclear Phys. B* **898** (2015), 259–275

[124] K. Siampos, Ph. Spindel, Solutions of massive gravity theories in constant scalar invariant geometries, *Classical Quantum Gravity* **30** (2013), no. 14, 145014, 36 pp.

[125] S. R. Simanca, A note on extremal metrics of non-constant scalar curvature, *Israel J. Math.* **78** (1992), 85-93.

[126] S. R. Simanca, Einstein and scalar flat Riemannian metrics, arXiv:1911.02706v1 [math.DG]

[127] A. Spiro. A remark on locally homogeneous Riemannian spaces. *Results Math.* **24** (1993), 318–325.

[128] Z. I. Szabó, Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$. I. The local version. *J. Differential Geometry* **17** (1982), 531–582.

[129] H. Takagi: Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries, *Tohoku Math. J. (2)* **27** (1975), 103–110.

[130] S. Tanno, Deformations of Riemannian metrics on 3-dimensional manifolds, *Tohoku Math. J. (2)* **27** (1975), 437–444.

[131] F. Tricerri, L.Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds* London Mathematical Society Lecture Note Series, **83**. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[132] J. A. Viaclovsky, Critical metrics for Riemannian curvature functionals, *Geometric analysis*, 197–274, IAS/Park City Math. Ser., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[133] G. Yun, J. Co, S. Hwang, Bach-flat h-almost gradient Ricci solitons, *Pacific J. Math.* **288** (2017), no. 2. 475–488.